



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

Título
Control robusto cuantitativo de sistemas con múltiples entradas de actuación y una salida objeto de control
Autor/es
Javier Rico Azagra
Director/es
Montserrat Gil Martínez
Facultad
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial
Titulación
Departamento
Ingeniería Eléctrica
Curso Académico



Control robusto cuantitativo de sistemas con múltiples entradas de actuación y una salida objeto de control, tesis doctoral de Javier Rico Azagra, dirigida por Montserrat Gil Martínez (publicada por la Universidad de La Rioja), se difunde bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported. Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los titulares del copyright.

© El autor
© Universidad de La Rioja, Servicio de Publicaciones, 2017
publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

TESIS DOCTORAL:

CONTROL ROBUSTO CUANTITATIVO DE
SISTEMAS CON MÚLTIPLES ENTRADAS
DE ACTUACIÓN Y UNA SALIDA OBJETO
DE CONTROL

JAVIER RICO AZAGRA

Dirigida por:

DRA. MONTSERRAT GIL MARTÍNEZ



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

Área de Ingeniería de Sistemas y Automática
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial
Universidad de La Rioja

Javier Rico Azagra: *Control robusto cuantitativo de sistemas con múltiples entradas de actuación y una salida objeto de control*

DIRECTORA:

Dra. Montserrat Gil Martínez

LUGAR:

Logroño, La Rioja

Julio 2017

© 2017 Javier Rico Azagra

*A María, sin tu apoyo en los momentos difíciles
este trabajo no habría sido posible.*

—

*A mis padres y hermanos,
sin vosotros no habría llegado hasta aquí.*

RESUMEN

El punto de partida del presente trabajo son los sistemas que presentan múltiples variables de actuación independientes para el gobierno de una única salida objeto control. Se trata por tanto de una disposición de n plantas en paralelo o sistema MISO (múltiple entrada simple salida) de dimensión $1 \times n$. Además, se considera que las salidas individuales de cada planta o bien no existen físicamente o no se pueden medir para formar lazos de realimentación. Al disponer de n actuaciones existen múltiples formas de determinar cómo éstas pueden colaborar para alcanzar el objetivo común. Las metodologías clásicas se centran en sistemas con sólo dos plantas, de forma que una trabaja en baja y otra en alta frecuencia. Este control dual además permite una cierta regulación de los puntos de operación de las variables de actuación.

En este marco, la propuesta es un control cuantitativo para sistemas MISO que persigue emplear la mínima acción de control posible en cada actuador. Con este fin, definidas las especificaciones de estabilidad y de comportamiento dinámico deseado para la salida, se establece un método cuantitativo para determinar las plantas mejor condicionadas en cada frecuencia para satisfacer dichas especificaciones. En última instancia, se determina si la colaboración entre plantas es beneficiosa para reducir la acción de control, o por el contrario debe inhibirse la participación de las plantas, evitando que señales que no reportan ningún beneficio lleguen a sus actuadores. La incertidumbre en los modelos de las plantas forma parte del diseño de control, dando lugar a un control robusto del sistema MISO. Los paradigmas de la Teoría de Realimentación Cuantitativa (QFT) son el fundamento de los nuevos desarrollos.

Cuando la especificación de comportamiento deseado sólo contempla el rechazo de la perturbación que desvía la salida de una referencia constante, se han empleado n controladores de realimentación. El criterio de reparto de la banda frecuencial con el que son diseñados éstos coincide con emplear la mínima cantidad de realimentación en cada rama y en cada frecuencia. Esta solución es la que emplea la menor acción de control posible en cada actuador para cumplir con las especificaciones de control. Determinado cuantitativamente el reparto de la banda frecuencial

entre las plantas, se propone un método secuencial de diseño de los n controladores. Los sistemas MISO considerados en los métodos propuestos pueden incluir plantas que no sean de fase mínima. Se contemplan dos posibles arquitecturas de control en las que los controladores de realimentación se disponen o bien en paralelo o bien en serie, cada una con sus particularidades a la hora de llevar a cabo el método secuencial de diseño. Además, ambas arquitecturas incorporan la posibilidad de modificar convenientemente el punto de operación de las variables de actuación, lo cual es de sumo interés desde un punto de vista práctico.

Cuando la especificación de comportamiento deseado versa sobre cómo la variable controlada debe seguir cambios en la referencia, a la estructura en realimentación se añaden controladores de prealimentación hacia cada actuador, más un maestro en prealimentación que conecta éstos con la variable conocida (referencia). La estructura en prealimentación puede igualmente emplearse para el caso en que la perturbación fuera medible. En ambos casos, al existir controladores de realimentación y de prealimentación, es posible que se seleccionen bandas frecuenciales diferentes por cada vía para la misma planta. Cuando las plantas del sistema MISO son de fase mínima, el criterio cuantitativo para emplear la acción de control mínima en cada actuador definirá bandas de trabajo parejas para la realimentación y la prealimentación. Paradójicamente, el empleo en cierta frecuencia de la planta con menor incertidumbre, aunque implica una menor cantidad de realimentación, puede incurrir en una cantidad de prealimentación mucho mayor si su ganancia es insuficiente, por lo que finalmente no se obtendría la solución de menor acción de control en el actuador. Sin embargo, la solución propuesta emplea la cantidad de realimentación estrictamente necesaria en cada rama para cumplir las especificaciones de control robustas con la mínima acción de control posible en cada actuador.

Como ejemplos de aplicación de la metodología propuesta se muestran el control de un digestor ATAD de fangos de depuradora, y el control de un reactor CSTR empleado en la industria química de procesos.

PUBLICACIONES

Algunos de los resultados de esta tesis han sido publicados en:

RICO-AZAGRA, J. y GIL-MARTÍNEZ, M. «Multivariable QFT robust control of a heat exchanger». En: *2011 19th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2011*, pp. 588-593, 2011.

RICO-AZAGRA, J.; GIL-MARTÍNEZ, M. y ELSO, J. «Quantitative feedback control of multiple input single output systems». *Mathematical Problems in Engineering*, 2014.

NÁJERA S.; GIL-MARTÍNEZ, M. y RICO-AZAGRA, J. «ATAD Dual-Control through Aeration and Solid Retention Time». *Water*, 2017, 9, 426.

RICO-AZAGRA, J. y GIL-MARTÍNEZ, M. «QFT bounds for prescribed simultaneous margins of robust stability». *International journal of robust and nonlinear control*, 2017. (Aceptado. Pendiente de publicación)

Otros resultados se encuentran en proceso de revisión:

RICO-AZAGRA, J. y GIL-MARTÍNEZ, M. «Robust serial control of systems with several manipulated inputs. Application to a Continuous Stirred Tank Reactor». *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2017. (En revisión)

AGRADECIMIENTOS

Después de varios años de trabajo, son muchas las personas a las que les desearía mostrar mi agradecimiento. Para no extenderme demasiado, me limitaré a mencionar a aquellas que han contribuido de manera directa a que este trabajo haya podido llegar a buen término.

Son varios los motivos por los que quiero expresar mi agradecimiento a Montserrat Gil Martínez, mi directora de tesis. En primer lugar, por haber confiado en mi y por haberme acogido en su grupo de investigación, en el que me ha hecho sentir importante desde el primer día. En segundo lugar, por haber compartido conmigo sus amplios conocimientos en teoría de control y en los aspectos referentes a la actividad investigadora. Por último, le agradezco su apoyo en los momentos difíciles, en los que nunca ha dejado de creer en mi valía y en la calidad del trabajo realizado.

Deseo igualmente mostrar mi gratitud a Jorge Elso Torralba, profesor de la Universidad Pública de Navarra, del que he aprendido mucho. Sus revisiones y comentarios han permitido mejorar los resultados alcanzados. El material facilitado y sus ideas referentes al seguimiento de referencias *model matching* han resultado fundamentales en este trabajo.

Dentro del grupo de investigación, me gustaría agradecer su ayuda a Carlos Elvira y Silvano Nájera. Aunque no han tenido una participación directa en el trabajo de investigación, siempre me han ayudado en todo lo que ha estado en su mano.

En el ámbito institucional, debo agradecer las ayudas que me han sido otorgadas, en forma de becas y proyectos de investigación, que han sido financiadas a través de la Universidad de La Rioja y la Comunidad Autónoma de La Rioja.

En el plano personal, me gustaría dar las gracias a toda mi familia por el apoyo prestado. En especial a mis padres, sin la educación recibida nunca podría haber llegado hasta aquí, espero que todo lo aprendido de ellos se refleje de forma indirecta en este trabajo. También quiero dar las gracias a mis hermanos, que me han ayudado en todo lo que han podido, sin necesidad de pedírselo. A mis amigos, a los que a pesar

de ver menos de lo deseado, siguen haciéndome sentir en casa cuando estoy con ellos.

En último lugar, aunque no por ello menos importante, quisiera expresar mi agradecimiento a María, por su comprensión, su ánimo y su ejemplo. Desde el principio, hasta el final de este camino, ha estado a mi lado, esforzándose en garantizar mi bienestar y haciendo todo lo que ha estado en su mano para facilitarme el trabajo. Le doy las gracias por entender lo que esta tesis significa para mi, y por haber asumido con buena cara las horas que nos ha robado. Por si esto fuera poco, tengo que agradecerle el haber realizado la revisión del manuscrito. Sus consejos en cuanto a la redacción y el estilo, han resultado muy valiosos.

ÍNDICE GENERAL

i	INTRODUCCIÓN Y REVISIÓN DEL ESTADO DEL ARTE	1
1	INTRODUCCIÓN	3
1.1	Sistema MISO	3
1.2	Problemática	4
1.3	Objetivos y Aportaciones	7
1.4	Organización de la unidad temática	9
2	ESTADO DEL ARTE	13
2.1	Definición de sistema MISO	13
2.2	Control colaborativo <i>vs.</i> no-colaborativo	16
2.3	Arquitecturas de control colaborativo	19
2.3.1	Estructura de control serie	19
2.3.2	Estructura de control paralelo	22
2.4	Estrategias de diseño colaborativo	28
2.4.1	VPC (<i>valve position control</i>)	29
2.4.2	Control <i>habituating</i>	33
2.4.3	Control de rango medio (<i>mid-ranging</i>)	37
2.4.4	Control cooperativo	42
2.4.5	Método PQ	46
2.4.6	Reparto de cargas (<i>load-sharing</i>)	48
2.4.7	Control robusto QFT	51
2.4.8	Control robusto en el espacio de parámetros	55
2.4.9	Control <i>main-vernier</i>	57
2.5	Aplicaciones	58
2.5.1	Procesos industriales	58
2.5.2	Motores de combustión interna	61
2.5.3	Sistemas de almacenamiento de datos	62
2.5.4	Sistemas mecánicos	63
2.5.5	Otras aplicaciones	64
ii	ANÁLISIS Y SOLUCIÓN QFT AL PROBLEMA DEL REGULADOR	67
3	COLABORACIÓN EN SISTEMAS MISO	69
3.1	Fundamentos QFT para sistemas SISO	69
3.1.1	Coste de la realimentación	69

3.1.2	Diseño QFT óptimo	73
3.2	Fundamentos cuantitativos y colaboración MISO	76
3.2.1	Acción de control	77
3.2.2	Colaboración	81
3.3	Conclusiones sobre la colaboración MISO	89
4	METODOLOGÍA DE DISEÑO MISO QFT	91
4.1	Estructura y fundamentos	91
4.2	Reparto frecuencial de la realimentación	93
4.3	Diseño de controladores en paralelo	95
4.4	Ejemplos de diseño	100
4.4.1	Ejemplo 1: Sistema MISO sin incertidumbre	101
4.4.2	Ejemplo 2: Intercambiador de calor	109
4.4.3	Ejemplo 3: Sistema MISO 1×3	114
5	ESTABILIDAD EN SISTEMAS MISO	119
5.1	Estabilidad referida al conjunto de ramas	120
5.1.1	Estabilidad en el plano Real-Imag	123
5.1.2	Estabilidad en el plano Mod-Arg	130
5.2	Estabilidad referida a cada rama	137
5.3	Diseño MISO secuencial estable	143
5.3.1	Plantas estables	145
5.3.2	Plantas inestables	148
6	MISO QFT PARA PLANTAS QUE NO SON DE FASE MÍNIMA	151
6.1	Planteamiento del problema de control	152
6.2	Antecedentes y estudio preliminar	153
6.3	Modificaciones del método general	157
6.4	Ejemplos de diseño del método extendido	160
6.4.1	Ejemplo 1: Sistema MISO con retardos	161
6.4.2	Ejemplo 2: Sistema MISO inestable	167
6.5	Comentarios adicionales	173
iii	GESTIÓN DE LAS ACCIONES DE CONTROL	175
7	CONTROL DE LAS ACCIONES DE CONTROL MISO	177
7.1	La importancia del punto de operación	178
7.2	Modificación de la estructura de control paralelo	183
7.3	Diseño de controladores de prealimentación	189
7.3.1	Desviación en la variable controlada	189
7.3.2	Seguimiento de la consigna	195
7.3.3	Referencias en modo rampa	199
8	ESTRUCTURA DE CONTROL MISO SERIE PROPUESTA	205

8.1	Estructuras de control serie clásicas	205
8.2	Estructura de control serie	211
8.3	Metodología de diseño MISO QFT Serie	213
9	APLICACIÓN AL CONTROL DE UN ATAD	221
9.1	Descripción del sistema	221
9.2	Diseño del sistema de control	225
9.3	Análisis de resultados	229
9.4	Diseño de controladores de prealimentación	230
9.5	Otros resultados	233
10	APLICACIÓN AL CONTROL DE UN CSTR	235
10.1	Descripción del sistema	235
10.2	Dimensionado y modelado de la instalación	237
10.3	Diseño del sistema de control	249
10.4	Análisis de la solución de control	255
10.5	Diseño de controladores de prealimentación	259
iv DOS GRADOS DE LIBERTAD: REALIMENTACIÓN Y PREALIMENTACIÓN		263
11	SERVOSISTEMAS SISO Y MISO	265
11.1	Seguimiento de referencias en sistemas SISO	266
11.2	Efecto de la prealimentación en sistemas MISO	271
12	MISO QFT PARA SERVOSISTEMAS	283
12.1	Estructura y fundamentos	283
12.2	Procedimiento de diseño para servosistemas	287
12.2.1	Planificación del reparto de la prealimentación	287
12.2.2	Diseño de esclavos de prealimentación	292
12.2.3	Planificación del reparto de la realimentación	294
12.2.4	Diseño de controladores de realimentación	296
12.2.5	Diseño del controlador maestro de prealimentación	298
12.3	Ejemplos de diseño	299
12.3.1	Ejemplo 1: Sistema MISO 1×2	299
12.3.2	Ejemplo 2: Alternativas de reparto	310
13	MISO QFT PARA PERTURBACIONES MEDIBLES	327
13.1	Estructura y fundamentos	327
13.2	Ejemplo de diseño	332
v CONCLUSIONES		343
14	CONCLUSIONES Y VÍAS DE CONTINUACIÓN	345
14.1	Conclusiones	345

14.2	Vías de continuación	347
vi	ANEXOS	351
A	REVISIÓN DE QFT	353
A.1	Introducción a QFT	353
A.2	Metodología de diseño QFT SISO	354
A.2.1	Modelo de planta con incertidumbre	355
A.2.2	Especificaciones	359
A.2.3	Contornos de diseño QFT	366
A.2.4	Diseño del controlador	377
A.2.5	Diseño del prefiltro	378
A.2.6	Validación de diseños	379
B	ESTABILIDAD EN SISTEMAS SISO	381
B.1	Aplicación del criterio de Nyquist a sistemas SISO	381
B.1.1	Sensibilidad y estabilidad	383
B.1.2	Sensibilidad complementaria y estabilidad	386
B.2	Estabilidad en sistemas con polos inestables	390
B.3	Estabilidad en los diagramas de Nichols	393
C	MODELO DEL REACTOR DOBLEMENTE REFRIGERADO	397
C.1	Régimen estacionario	397
C.2	Modelo dinámico	400
C.3	Modelos lineales de pequeña señal	402
D	INECUACIÓN PARA EL PROBLEMA DEL SEGUIMIENTO	411
	BIBLIOGRAFÍA	419

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1	Tipos de sistemas MISO	16
Figura 2.2	Control de sistema MISO con una única variable.	17
Figura 2.3	Control de rango partido.	17
Figura 2.4	Dos ejemplos de selector <i>split-range</i>	18
Figura 2.5	Estructura de control serie.	20
Figura 2.6	Estructuras serie con desacoplo de r_{u_1}	23
Figura 2.7	Estructura de control paralelo.	24
Figura 2.8	Estructura de control paralelo con control del punto de operación.	26
Figura 2.9	Estructura de control paralelo con desacoplo. . . .	27
Figura 2.10	Estructura de control paralelo con control en cascada.	28
Figura 3.1	Estructura de control SISO.	70
Figura 3.2	Coste de la realimentación en un sistema SISO. . .	72
Figura 3.3	Restricción de la función de lazo abierto para w_d .	75
Figura 3.4	Ejemplos de diseño de l_1 y l_2	84
Figura 4.1	Estructura de control para sistemas reguladores. .	92
Figura 4.2	Ejemplo de demanda de realimentación en un sistema 1×2	95
Figura 4.3	<i>Loop-shaping</i> para sistema 1×2 en el que una única planta trabaja en la frecuencia ω	97
Figura 4.4	Tres plantas colaboran en ω	99
Figura 4.5	Realimentación demandada por cada una de las plantas.	102
Figura 4.6	Secuencia de diseño (<i>loop-shaping</i>).	103
Figura 4.7	Secuencia de diseño (<i>loop-shaping</i>).	104
Figura 4.8	Respuesta frecuencial.	107
Figura 4.9	Respuesta temporal	109
Figura 4.10	Esquema del proceso térmico a controlar.	110
Figura 4.11	Magnitud de las plantas.	111
Figura 4.12	<i>Loop-shaping</i> de controladores.	112
Figura 4.13	Magnitud de la respuesta frecuencial en lazo cerrado. Especificaciones y Acciones de control. . .	113

Figura 4.14	<i>Loop-shaping</i> de los tres controladores en paralelo.	116
Figura 4.15	Magnitud de la respuesta frecuencial en lazo abierto.	117
Figura 5.1	Criterio de Nyquist MISO para tres funciones. . .	124
Figura 5.2	Puntos que determinan la estabilidad MISO cuando $l_k(j\omega)$ corta a $e_k(j\omega) = -1 - l_{-k}(j\omega)$	125
Figura 5.3	Criterio de Nyquist MISO respecto a -1	125
Figura 5.4	Regiones de exclusión para $l_k(j\omega)$ cuando se acota el pico de la función sensibilidad. Y diseño de $l_k(j\omega)$ estable.	127
Figura 5.5	Regiones de exclusión para $l_k(j\omega)$ cuando se acota el pico de la función sensibilidad complementaria. Y diseño de $l_k(j\omega)$ estable.	129
Figura 5.6	Esquema de la transformación de las regiones de exclusión en la carta de Nichols obtenidas mediante la acotación de T	131
Figura 5.7	Contorno de estabilidad en el plano Real-Imag obtenido por acotación del pico de la función sensibilidad: medidas características para dimensionar el contorno en el plano Mod-Arg.	133
Figura 5.8	Contorno de estabilidad en el plano Real-Imag obtenido por acotación del pico de la función sensibilidad complementaria: medidas características para dimensionar el contorno	135
Figura 5.9	Problemas producidos por la compresión de los contornos de estabilidad.	137
Figura 5.10	Regiones de exclusión obtenidas mediante el empleo de la inecuación (5.51).	139
Figura 5.11	Regiones de exclusión obtenidas mediante el empleo de la inecuación (5.54).	142
Figura 5.12	Comparativa entre los contornos obtenidos con (5.22) y (5.54).	143
Figura 5.13	Diseños de la rama l_k estables.	144
Figura 5.14	Diseños de rama para planta inestable. Estable en lazo cerrado para $l_{k_1}(j\omega)$, inestables para $l_{k_2}(j\omega)$	149
Figura 6.1	Ejemplo de contornos; (izq.) β_c y β_l , (dcha.) β'_c y β'_l	157
Figura 6.2	Dos plantas que no pueden colaborar en ω_1 pero si en ω_2	159

Figura 6.3	Desplazamiento de los contornos β'_{l_i} cuando realizamos el <i>loop-shaping</i> del lazo $j \neq i$	160
Figura 6.4	Necesidades de control $\beta'_{c_1}, \beta'_{c_2}$	162
Figura 6.5	<i>Loop-shaping</i> de los controladores $c_{i=1,2}$	164
Figura 6.6	Simulación del sistema controlado.	165
Figura 6.7	Magnitud de los controladores c_1, c_2 y c_{1_s}	166
Figura 6.8	Necesidades de control: (sup.) ganancias de control no inversas (inf.) ganancia inversa en c_1	168
Figura 6.9	<i>Loop-shapings</i> : (sup.) ganancias de control no inversas (inf.) ganancia inversa en c_1	170
Figura 6.10	Respuestas temporales: (izq.) ganancias no inversas, (dcha.) ganancia inversa en lazo 1.	171
Figura 6.11	Comparativa de controladores: (sup.) controlador MISO de ganancia no inversa, (inf.) controlador MISO con ganancia inversa en lazo 1.	173
Figura 7.1	Sistema de control de caudal con dos válvulas en paralelo.	179
Figura 7.2	Simulación del rechazo de perturbaciones para diferentes puntos de operación.	181
Figura 7.3	Estructura de control paralelo con gestión del punto de operación.	184
Figura 7.4	Seguimiento de la referencia r_{u_2} para el ejemplo de la Subsección 4.4.2	188
Figura 7.5	Situación de partida para el diseño de $f_i(j\omega)$. Cota W_{u_a} (izq.), cota W_{u_b} (dcha.).	192
Figura 7.6	Ejemplo de diseño de prefiltros.	193
Figura 7.7	Respuestas temporales obtenidas con los prefiltros $f_{3_{a,b,c}}$	194
Figura 7.8	Respuestas temporales obtenidas empleando prefiltros unitarios.	196
Figura 7.9	Respuestas frecuenciales u_i/r_{u_i} si se emplean prefiltros unitarios.	196
Figura 7.10	Respuesta temporal u_2 , para una referencia de tipo escalón unitario.	198
Figura 7.11	Respuestas frecuenciales u_2/r_{u_2} para los tres casos de estudio.	198
Figura 7.12	Esquema de cambio de referencia en modo rampa.	199

Figura 7.13	Magnitud de la respuesta frecuencial de un generador de rampas y su aproximación por un sistema de primer orden.	202
Figura 7.14	Seguimiento de referencias r_{u_2} en modo rampa.	204
Figura 8.1	Estructura de control serie MISO 1×2	206
Figura 8.2	Estructura de control serie generalizada para un sistema MISO $1 \times n$. p_n corresponde con la planta que trabaja en alta frecuencia.	208
Figura 8.3	Modificación de la estructura de control serie para el control de un sistema MISO $1 \times n$	211
Figura 8.4	Procedimiento empleado en el <i>loop-shaping</i> de controladores para la estructura serie.	218
Figura 9.1	Esquema de funcionamiento del ATAD.	222
Figura 9.2	Magnitud de la respuesta frecuencial escalada de las plantas.	226
Figura 9.3	Control de ATAD. <i>Loop-shaping</i> del controlador $c_2(z)$	228
Figura 9.4	Control de ATAD. <i>Loop-shaping</i> del controlador $c_1(z)$	229
Figura 9.5	Especificaciones y respuestas frecuenciales.	230
Figura 9.6	Control de ATAD. Respuestas temporales frente a perturbación.	231
Figura 9.7	Control de ATAD. Respuestas temporales ante un cambio en la referencia del caudal de aireación ($\Delta r_{Q_a} = 2000m^3/\text{día}$).	232
Figura 10.1	Esquema de control del CSTR doblemente refrigerado.	237
Figura 10.2	Estructura del modelo lineal de pequeña señal del CSTR.	243
Figura 10.3	Escalado de las acciones de control.	247
Figura 10.4	Esquema de control para gobernar el CSTR	247
Figura 10.5	Magnitud de la respuesta frecuencial de los modelos lineales con incertidumbre.	248
Figura 10.6	Secuencia de diseño para el CSTR. Contornos en el paso 0.	250
Figura 10.7	Secuencia de diseño para el CSTR. Contornos en el paso I y diseño de la rama $l_3(j\omega)$	252
Figura 10.8	Secuencia de diseño para el CSTR. Diseño de la rama $l_2(j\omega)$	253

Figura 10.9	Secuencia de diseño para el CSTR. Contornos obtenidos después del diseño de la rama $l_2(j\omega)$. . .	254
Figura 10.10	Secuencia de diseño para el CSTR. Diseño de la rama $l_3(j\omega)$	255
Figura 10.11	Magnitud de las respuestas frecuenciales de lazo cerrado: (izq.) rechazo de perturbaciones; (dcha.) estabilidad	256
Figura 10.12	Respuesta temporal.	257
Figura 10.13	Respuesta temporal de las acciones de control. . .	258
Figura 10.14	Magnitud de $c_{i=1,2,3}(j\omega)$ y $c_{i,t}(j\omega)$	258
Figura 10.15	Comparativa con los controladores SISO.	259
Figura 10.16	Diseño de $f_2(j\omega)$. Magnitud y/r_{u_2}	261
Figura 10.17	Respuesta del sistema para un cambio en r_{u_2}	262
Figura 11.1	Estructuras de control SISO para el seguimiento de referencias.	267
Figura 11.2	Regiones solución en las especificaciones de <i>tracking</i> clásico y <i>error tracking</i>	269
Figura 11.3	Plantas en paralelo gobernadas en lazo abierto. . .	272
Figura 11.4	Sistema MISO gobernado en lazo abierto con controlador maestro.	277
Figura 11.5	Sistema MISO gobernado en lazo abierto con controlador maestro y filtros de rama.	279
Figura 11.6	Magnitud de los controladores $g_{1,s}$, $g_{2,s}$ y g_e	280
Figura 11.7	Acciones de control $u_{1,s}$, $u_{2,s}$ y u_e , empleadas para seguir un escalón unitario.	280
Figura 11.8	Magnitud de los controladores $g_e g_1$, $g_e g_2$ y g_e . . .	282
Figura 11.9	Acciones de control u_1 , u_2 y u_e , empleadas para seguir un escalón unitario con controlador maestro y esclavos.	282
Figura 12.1	Estructura de control QFT MISO para servosistemas.	285
Figura 12.2	Estudio del reparto de la prealimentación a partir de los controladores $\bar{k}_{1,2}$	301
Figura 12.3	Magnitud de las respuestas frecuenciales de p_1 , p_2 y p_{A_t}	302
Figura 12.4	Demanda de realimentación para las plantas p_1 y p_2	303
Figura 12.5	Secuencia de diseño (<i>loop-shaping</i>) de controladores de realimentación	305

Figura 12.6	Diseño del controlador de prealimentación maestro g_e	307
Figura 12.7	Cumplimiento robusto de especificaciones.	307
Figura 12.8	Seguimiento de referencias para un escalón unitario en $t = 1$ s.	308
Figura 12.9	Evolución de las acciones de control.	309
Figura 12.10	Magnitud de los controladores (realimentación y prealimentación) y de las ramas (realimentación y prealimentación).	311
Figura 12.11	Envolventes de las curvas de magnitud de las respuestas frecuenciales de p_1 y p_2	312
Figura 12.12	Estudio del reparto de la prealimentación a partir de los controladores $\bar{k}_{1,2}$	313
Figura 12.13	Magnitud de la respuesta frecuencial de las plantas p_{A_t} y $p_{A_t}^*$	315
Figura 12.14	Demanda de realimentación para las plantas.	316
Figura 12.15	<i>Loop-shaping</i> de los controladores: (sup.) $c_{1,2}$, (inf.) $c_{1,2}^*(j\omega)$	318
Figura 12.16	<i>Loop-shaping</i> de los controladores g_e y g_e^*	319
Figura 12.17	Error de seguimiento y estabilidad robustos en el dominio de la frecuencia: (sup.) con $g_{1,2}$ y $c_{1,2}$; (inf.) con $g_{1,2}^*$ y $c_{1,2}^*$	320
Figura 12.18	Magnitud de las respuestas frecuenciales de los elementos de control y de las funciones de rama.	321
Figura 12.19	Respuestas temporales para un cambio en la referencia.	322
Figura 12.20	Magnitud de las respuestas frecuenciales para la acción de control.	325
Figura 13.1	Estructura de control QFT MISO para rechazo de perturbaciones medibles.	329
Figura 13.2	Estudio del reparto de la prealimentación a partir de los controladores $\bar{k}_{1,2}$	334
Figura 13.3	Magnitud de las respuestas frecuenciales de p_1 , p_2 y p_{F_t}	335
Figura 13.4	Demanda de realimentación para las plantas p_1 y p_2	336
Figura 13.5	<i>Loop-shaping</i> de controladores de realimentación c_j	337
Figura 13.6	Diseño del controlador masestro g_e	337

Figura 13.7	Cumplimiento de especificaciones frecuenciales. (izq.) <i>Performance</i> del error en la salida. (dcha.) Estabilidad.	338
Figura 13.8	Rechazo de perturbación escalón -1 en $t = 1s$. . .	339
Figura 13.9	Evolución temporal de las acciones de control u_1 y u_2	340
Figura 13.10	Magnitud de los elementos de control y las funciones de rama para la realimentación y la prealimentación.	341
Figura 13.11	Magnitud de las acciones de control frente a perturbaciones $T_{u_{d_i}}$ y frente al ruido $T_{u_{v_i}}$	342
Figura A.1	Incertidumbre paramétrica en el espacio de parámetros \mathcal{Q}	357
Figura A.2	Plantillas (<i>templates</i>) QFT.	359
Figura A.3	Estructura de control SISO.	359
Figura A.4	Cotas W_d empleadas en el rechazo de perturbaciones.	362
Figura A.5	Cotas W_u y W_l empleadas en el seguimiento de referencias	365
Figura A.6	Cálculo manual del contorno de estabilidad	368
Figura A.7	Calculo manual del contorno de seguimiento de referencias	369
Figura A.8	Calculo manual del contorno de rechazo de perturbaciones	371
Figura A.9	<i>Loop-shaping</i> de controladores.	377
Figura A.10	Diseño del prefiltro	378
Figura A.11	Validación de diseños QFT	380
Figura B.1	Criterio de Nyquist para tres funciones $l_i(j\omega)$. . .	382
Figura B.2	Región de exclusión para garantizar de forma simultanea un margen de fase y ganancia.	383
Figura B.3	Estabilidad en base a la función sensibilidad. . . .	384
Figura B.4	Márgenes de estabilidad relativa definidos mediante la función sensibilidad.	385
Figura B.5	Círculos M en el plano de Re-Im.	387
Figura B.6	Márgenes de estabilidad relativa definidos mediante la función sensibilidad complementaria. . .	389
Figura B.7	Comparación de las regiones de exclusión generadas mediante la acotación de S y T	391
Figura B.8	Estabilidad robusta en sistemas con polos RHP. .	392

Figura B.9	Estabilidad robusta en el plano Mod-Arg.	394
Figura B.10	Estabilización de sistema inestable en el plano Mod-Arg.	395

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4.1	Reparto de tareas para una menor cantidad de realimentación.	102
Tabla 4.2	Reparto de la realimentación a lo largo de la frecuencia.	111
Tabla 4.3	(sup) Demanda de realimentación; (inf) Reparto de la realimentación.	115
Tabla 6.1	Reparto frecuencial de tareas deseado.	163
Tabla 6.2	Reparto de la realimentación para el ejemplo 2.	169
Tabla 9.1	Puntos de operación del ATAD.	223
Tabla 9.2	Incertidumbre paramétrica del sistema	224
Tabla 10.1	Datos del reactor CSTR.	242
Tabla 10.2	Incertidumbre en los parámetros de las plantas.	248
Tabla 12.1	Reparto de las tareas de prealimentación para lograr la menor acción de control.	300
Tabla 12.2	Reparto de las tareas de realimentación para lograr la menor ganancia de controladores de realimentación	304
Tabla 12.3	Reparto de las tareas de prealimentación según dos criterios.	314
Tabla 12.4	Reparto de las tareas de realimentación para minimizar esta, a partir de los dos criterios de prealimentación ya adoptados.	317
Tabla 13.1	Reparto de las tareas de prealimentación para un menor consumo de acción de control.	334
Tabla 13.2	Reparto de las tareas de realimentación para una menor cantidad de realimentación	336

ACRONIMOS

MIMO Multiple Input Multiple Output

SISO Single Input Single Output

SIMO Single Input Multiple Output

MISO Multiple Input Single Output

TISO Two Input Single Output

DISO Dual Input Single Output

LHP Left Half Plane

RHP Right Half Plane

NMP Non Minimum Phase

MP Minimum Phase

QFT Quantitative Feedback Theory

VPC Valve Position Control

CVPC Conventional Valve Position Control

MVPC Modified Valve Position Control

DVPC Direct synthesis Valve Position Control

MPC Model Predictive Control

IMC Internal Model Control

GMPC Generalised Model Predictive Control

CARIMA Auto Regressive Integrated Moving Average

HCCI Homogeneous Charge Compression Ignition

TLBF Temperature Limited Feed-Batch

DQO Demanda Química de Oxígeno

CSTR Continuous Stirred-Tank Reactor

DSOFSMC Decoupling Self-Organizing Fuzzy Sliding Mode Control

ANIF National Ignition Facility

ATAD Autothermal Thermophilic Aerobic Digestion

SRT Solid Retention Time

Parte I

INTRODUCCIÓN Y REVISIÓN DEL ESTADO DEL
ARTE

INTRODUCCIÓN

1.1 SISTEMA MISO

Tradicionalmente, el estudio de los sistemas de múltiples variables ha ocupado un lugar de relevancia en la Ingeniería de Control, por responder en gran medida a muchos problemas reales y de índole práctico. Un grupo importante de estos sistemas corresponde con una disposición en paralelo de las plantas, que se conoce como sistema multivariable o MIMO (*multiple-input-multiple-output*). Dentro de dicho grupo los sistemas cuadrados, donde se gobiernan n variables mediante la manipulación de n acciones de control, son los más estudiados. No obstante, los sistemas físicos en general pueden responder a ordenaciones no cuadradas. Algunas de las disposiciones no cuadradas más conocidas son los sistemas SIMO (*single-input-multiple-output*), con una única variable manipulable y varias salidas objeto de control, también conocidos como sistemas subactuados; y los sistemas MISO (*multiple-input-single-output*) con múltiples entradas de actuación independientes para gobernar una única salida, que se corresponderían con sistemas sobreactuados.

Los sistemas MISO, de dimensión $1 \times n$, son el objeto de estudio de la presente tesis. En particular, aquellos en los que la única¹ variable que puede medirse o que existe físicamente es la salida objeto de control. Este tipo de sistemas es muy frecuente en multitud de aplicaciones reales. En la industria de procesos pueden encontrarse configuraciones MISO en pequeños subsistemas [4, 3], en grandes equipos productivos [131, 55, 119] o en la gestión de plantas [79], entre otros. El control de motores térmicos [78, 9, 120, 74] en la industria de la automoción y los desarrollos realizados para sistemas de almacenamiento de datos [127, 90, 41]

¹ Dada la disposición de n plantas en paralelo, en ocasiones también son denominados sistemas MISO de salidas individuales no medibles

son otros ejemplos en los que la configuración MISO presenta gran relevancia².

En términos de control, los sistemas MISO disponen de n variables manipulables y, por tanto, n grados de libertad linealmente independientes para el diseño de control. Este hecho los diferencia de los sistemas MIMO ($n \times n$), donde los n grados de libertad deben atender a objetivos de control sobre n salidas o variables a controlar. En tanto en cuanto existe una sola salida medible y objeto de control, el caso MISO se asemeja a un sistema SISO (*single-input-single-output*). Sin embargo, en este último las especificaciones de control y la estrategia de diseño prácticamente conducen a un único controlador que satisface dichos requerimientos con la mínima cantidad de realimentación. En el caso MISO, la toma de decisiones no es tan evidente. Al disponer de n acciones de control (o grados de libertad) existen múltiples formas de determinar cómo dichas variables pueden trabajar para alcanzar el objetivo común. Habitualmente, se buscan aquellas soluciones que atienden de un modo u otro a las acciones de control, variables manipulables o cantidad de realimentación, ya que éstas tienen una relación directa con costes de tipo económico o con limitaciones de índole práctico.

Tras una exhaustiva revisión de los trabajos existentes en la literatura científica es posible clasificar las estrategias de control MISO en colaborativas y no-colaborativas. Las no-colaborativas emplean únicamente una acción de control en un instante de tiempo. Por el contrario, las estrategias de control colaborativo emplean los puntos fuertes de cada una de las plantas para conseguir una mejora en el *performance* de la variable controlada, minimizar las limitaciones sobre las variables manipuladas o las salidas individuales, o simplemente regular su intervención en función del coste de operación. El presente trabajo de investigación se centra en esta segunda alternativa de control, el colaborativo.

1.2 PROBLEMÁTICA

La gran variedad de aplicaciones en campos diversos ha producido el afloramiento de numerosas estrategias de diseño MISO colaborativas junto con múltiples arquitecturas de control. Como prueba de ello, pese a que todas persiguen un fin similar, no existe un criterio uniforme sobre la designación del problema de control. La denominación más extendida

² Una relación exhaustiva de aplicaciones se presenta en la [Sección 2.5](#).

es *Mid-Ranging Control* [6, 3, 56, 104, 55, 119], empleada por numerosos autores para dar solución a problemas de control existentes en la industria del proceso [5, 105, 143, 144]. Otras denominaciones como VPC (*Valve Position Control*) [2, 3, 4, 82], *Habituating Control* [58, 104, 5], *Main-vernier Control* [93, 51, 113], *Cooperative-feedback Control* [47], *Load Sharing control* [34, 35, 32], *PQ Design Method* [128, 14], son comunes en la literatura científica. Esta dispersión del conocimiento dificulta su aplicación. Es necesaria una labor de síntesis sobre el fundamento y conceptos clave de estos sistemas, así como de las arquitecturas que le son propias.

El control colaborativo se fundamenta en el empleo de al menos dos plantas para el gobierno de una única variable, lo que permite mejorar el *performance* de la variable controlada, minimizar las limitaciones sobre las variables manipuladas o las salidas individuales, o simplemente regular su intervención en función del coste de operación. Esta afirmación, pese a ser intuitivamente cierta, debe ser validada de forma rigurosa. En esta línea es necesario determinar cuándo la colaboración entre las plantas es posible y cuantificar los beneficios que se obtienen de la misma. Los trabajos existentes en la literatura científica reparten las tareas de control entre las diferentes variables de actuación disponibles, pero no analizan los beneficios reportados por dicha colaboración. Del mismo modo, la selección de las tareas asignadas a cada entrada no es transparente y en muchos casos atiende a criterios económicos o conocimientos *ad-hoc* del proceso. En conclusión, es necesario realizar un estudio que determine de forma cuantitativa cuándo la colaboración entre las acciones de control disponibles reporta beneficios en términos de control: reducción de la acción de control, reducción de la cantidad de realimentación o del coste de ésta, o un mejor aprovechamiento del rango de operación. Esto permitiría poder establecer criterios de diseño de cómo realizar el reparto colaborativo entre las plantas, y en base a ellos desarrollar una metodología estándar de diseño de los elementos de control.

Pese a existir numerosas estrategias para acometer el diseño de control MISO, la mayoría no tienen en cuenta la incertidumbre, inherente al control realimentado de todo sistema real, impidiendo alcanzar diseños robustos. La Teoría de Realimentación Cuantitativa o QFT (*Quantitative Feedback Theory*), propuesta por Horowitz [61], es una potente metodología para el diseño de sistemas de control robusto. Entre sus puntos fuertes destaca su flexibilidad para, de una forma sencilla y transparente, tener en cuenta los compromisos de diseño que son propios del control

realimentado, lo que garantiza su éxito en la práctica. En la literatura científica pueden encontrarse algunos diseños MISO realizados bajo las premisas QFT [78, 52, 42]. No obstante, éstos únicamente responden a casos particulares, y no estandarizan el diseño robusto y cuantitativo para plantas MISO colaborativas.

Por último, en los trabajos existentes sobre el control de sistemas MISO no existe una diferenciación entre reguladores y servo-sistemas, fundamentalmente porque no se incluye la incertidumbre como parte del diseño. Como demostró Horowitz [61], para los sistemas SISO, el rechazo de perturbaciones y el seguimiento de referencias deben enfocarse empleando estrategias diferentes, por tratarse de problemas de distinta naturaleza. Por un lado, los sistemas reguladores deben enfrentarse a perturbaciones no medibles, obligando a emplear estructuras de control en lazo cerrado, pese a considerarse modelos de planta sin incertidumbre paramétrica. Esto es debido a que, cuanto menos, no se posee información de la entrada de perturbación. Además, debe tenerse en cuenta que, atendiendo o no la incertidumbre en el diseño, los modelos de planta en los que se basa el diseño de control son simplificaciones del comportamiento real, lo que lleva intrínsecamente aparejado la presencia de incertidumbre. Por otro lado, los servo-sistemas puramente teóricos podrían gobernarse en lazo abierto si consideramos perfectos los modelos de las plantas. Si cierta incertidumbre se contempla en el diseño, son necesarias estructuras de control con más de un grado de libertad, en las que los controladores de realimentación son los encargados de reducir la sensibilidad a la incertidumbre (objetivo que es compartido con el rechazo de perturbaciones, siempre presentes en un sistema real), y los controladores de prealimentación aseguran el comportamiento dinámico deseado en el seguimiento de la referencia para el conjunto de plantas. Las estrategias de colaboración entre plantas MISO que se desprenden de los trabajos hasta la fecha son adecuadas para sistemas reguladores. Sin embargo, su extrapolación al caso de servosistemas no responde a criterios debidamente fundamentados. El adecuado diseño de servosistemas MISO es por tanto un campo inexplorado hasta la fecha. Se deben considerar controladores de realimentación y prealimentación, asignando debidamente las funciones de cada uno en el problema colaborativo.

1.3 OBJETIVOS Y APORTACIONES

En el marco descrito, el objetivo final del presente trabajo es desarrollar estrategias de diseño colaborativas que permitan alcanzar controladores robustos para sistemas MISO de salidas individuales no medibles. La filosofía de trabajo será acorde a la Teoría de Realimentación Cuantitativa (QFT), por lo tanto, se empleará una cuantificación de la acción de control y de la cantidad de realimentación en búsqueda de la solución QFT óptima.

Se estudiarán las arquitecturas de control más adecuadas, y se desarrollarán las metodologías de diseño que dan solución al problema del rechazo robusto de perturbaciones (reguladores), al problema del seguimiento robusto de referencias (servosistemas o *trackers*) y al problema de rechazo robusto de perturbaciones cuando éstas se pueden medir. Las metodologías de diseño presentadas se fundamentarán en una cuantificación frecuencial del esfuerzo de realimentación y prealimentación, con el fin de satisfacer las especificaciones de control (*performance* y estabilidad) con el menor consumo de acción de control.

En cuanto al problema del rechazo robusto de perturbaciones, se definirá cómo diseñar en el dominio de la frecuencia n controladores tal que la acción de control en cada actuador sea la menor posible. Esto se traducirá en que la cantidad de realimentación (ganancia de los controladores) sea la menor posible en cada rama a lo largo de la frecuencia. Será necesario emplear una etapa de análisis y planificación de las tareas de realimentación asignadas a cada una de las plantas en función de la frecuencia, que permita explotar los potenciales beneficios de cada una de las plantas. La etapa de diseño de los controladores establecerá la metodología de diseño de los n controladores para satisfacer el reparto frecuencial planificado entre ramas.

El problema del seguimiento robusto de referencias y el del rechazo robusto de perturbaciones medibles son de naturaleza más compleja en tanto en cuanto se requiere realimentación y prealimentación. Se definirá cómo diseñar en el dominio de la frecuencia n controladores de realimentación y n controladores de prealimentación junto con un controlador maestro de prealimentación. Serán necesarias dos etapas de planificación. La primera determinará, en función de las características frecuenciales de las plantas, cómo utilizar los controladores de prealimentación de forma que el consumo de acción de control sea más pequeño. En la segunda etapa de planificación se determinará el reparto

de la realimentación entre las plantas para cada frecuencia de forma que los controladores presenten el menor ancho de banda posible. De acuerdo a los criterios de reparto, se establecerá la metodología de diseño de los elementos de control para llevarla a cabo.

Otras aportaciones de la presente tesis son:

- Clasificación de sistemas MISO y organización del estado del arte. Se pretende realizar una unificación de arquitecturas de control MISO, resumiéndose sus características fundamentales. También se clasificarán las estrategias de diseño, detallándose sus fundamentos, y las aportaciones de tipo práctico en función del campo de aplicación. Dado que la información existente en la literatura científica es muy heterogénea y presenta denominaciones diferentes para problemas similares en función de los autores que la describen, se considera que la clasificación pretendida puede ser valiosa para entender las diferentes aportaciones.
- Colaboración en sistemas MISO. Se presentará un análisis detallado de la colaboración en sistemas MISO. Este estudio permitirá comprender cuándo la colaboración entre las ramas del sistema es posible y los beneficios esperados de la misma. Las conclusiones alcanzadas pueden ser empleadas por el diseñador para determinar los objetivos de control para un sistema MISO, independientemente de la estrategia empleada para el diseño de los controladores de realimentación.
- Estabilidad MISO. Se presentarán dos alternativas para garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Su diferencia radica en si los márgenes de estabilidad se refieren a la función de lazo total, o para las funciones de lazo de cada rama.
- Arquitecturas de control MISO. Se propondrán varias arquitecturas, presentando sus ecuaciones de funcionamiento, así como sus puntos fuertes y débiles. Para los sistemas reguladores, se presentarán modificaciones a las estructuras clásicas que permitirán controlar el punto de operación del sistema sin incrementar la dificultad de diseño de los controladores de realimentación. Siendo el punto de operación de algunas variables de actuación regulable mediante una consigna, se incorporarán controladores de prealimentación y su método de diseño. Como se ha indicado anteriormente, las arquitecturas de control para el seguimiento de referencias y rechazo

de perturbaciones medibles son totalmente originales de este trabajo.

- Cálculo de *bounds* QFT. Los nuevos problemas de control resueltos precisarán de una inecuación específica que formula la especificación de control en el dominio de la frecuencia. Asimismo, será preciso desarrollar los algoritmos oportunos que resuelvan la misma para independizar el diseño del controlador de realimentación del de prealimentación. El cálculo de los *bounds* implicará la resolución de una inecuación de orden cuarto, mientras que las inecuaciones trabajadas hasta la fecha son de orden dos.

1.4 ORGANIZACIÓN DE LA UNIDAD TEMÁTICA

El trabajo de investigación realizado se organiza en cinco partes principales, que incorporan en su conjunto catorce capítulos. Una sexta parte incluye cuatro anexos.

La primera parte del documento, titulada «Introducción y revisión del estado del arte», está formada por el [Capítulo 1](#) y [Capítulo 2](#). El primer capítulo presenta la introducción al trabajo, donde se describen los sistemas MISO objeto de control en esta tesis, la problemática a abordar y los objetivos y aportaciones concretas de la misma. El segundo capítulo presenta una profunda revisión del estado del arte referente al control de sistemas MISO. Se abordan los aspectos básicos, las arquitecturas de control y una extensa revisión de las estrategias de diseño más empleadas en la literatura científica. Por último, se organizan por campos de aplicación varios trabajos donde se ha utilizado con éxito el control MISO.

La segunda parte del documento, titulada «Análisis y solución QFT al problema del regulador» consta de cuatro capítulos. El [Capítulo 3](#) analiza el coste de la realimentación en los sistemas SISO, que conduce a la determinación del diseño óptimo. Paralelamente en los sistemas MISO se habla del consumo de acción de control vinculada a la cantidad de realimentación en cada frecuencia para cada rama. Esto desemboca en cuándo las ramas de un sistema MISO pueden colaborar y los beneficios esperados de dicha colaboración. Los resultados presentados corresponden con los fundamentos a partir de los que se articulan las estrategias de diseño QFT MISO en busca de un diseño óptimo. De acuerdo a estos criterios, el [Capítulo 4](#) presenta la metodología de diseño QFT MISO

básica, aplicable a sistemas en los que las plantas son de fase mínima. La arquitectura de control empleada es la de controladores que se disponen en paralelo, siendo ésta la más versátil. A continuación, el [Capítulo 5](#) describe la estabilidad de los sistemas MISO. Se muestran dos posibles formas, atendiendo a la función de lazo total (combinación de todas las ramas) o atendiendo a la función de rama, que considera las variaciones en cada una de las plantas de forma independiente. Por último, el [Capítulo 6](#) presenta la extensión de la metodología de diseño de controladores a sistemas MISO cuyas plantas pueden contener retardos y polos o ceros en el semiplano derecho. En él se muestran algunos ejemplos de interés que ilustran la complejidad de este tipo de problemas.

La tercera parte del documento, titulada «Gestión de las acciones de control», consta de cuatro capítulos. Se afrontan aspectos referentes al control del punto de operación del sistema, que se encuentra relacionado directamente con el gobierno de las acciones de control en régimen permanente. El [Capítulo 7](#) muestra la importancia de gestionar adecuadamente el punto de operación con algunos ejemplos de sistemas reales. En la arquitectura paralelo propuesta en el [Capítulo 4](#) se añaden referencias para las acciones de control. En el [Capítulo 8](#), se propone una arquitectura en la que los controladores se disponen en serie. Se muestran sus ventajas respecto a la generalización para n plantas de la estructura serie clásica empleada para dos plantas. Este capítulo se incluye en esta unidad temática ya que el control MISO con estructura serie es el que más evidencia la importancia del punto de operación, tal y cómo sugiere la designación *mid-ranging* de la literatura científica. Asimismo, en este capítulo se presenta una modificación del procedimiento de diseño de los controladores robustos, adaptado a la nueva arquitectura. Finalmente, siendo esta unidad temática la que incorpora conceptos de índole más práctico, se incluyen en ella dos capítulos que muestran la utilidad práctica de la metodología desarrollada para el control procesos de complejos. El [Capítulo 9](#) presenta un ejemplo de aplicación para un digestor de fangos ATAD (*Autothermal Thermophilic Aerobic Digestion*), que se emplean en las estaciones depuradoras de aguas residuales. El [Capítulo 10](#) presenta el control de un reactor CSTR (*Continuous Stirred Tank Reactor*) de uso muy extendido en la industria de procesos.

Por tanto, la segunda y tercera parte del documento resuelven el control de sistemas MISO empleando controladores de realimentación, es decir, donde fundamentalmente se establecen especificaciones de comportamiento para el rechazo de perturbaciones y para la estabilidad.

Aunque se contemple el cambio del punto de operación sobre algunas de las acciones de control mediante referencias precedidas de prefiltros, el criterio de reparto de la banda frecuencial entre plantas obedece exclusivamente a tratar de reducir la cantidad de realimentación lo más posible en cada rama y en cada frecuencia, lo cual también minimiza la acción de control.

La cuarta parte del documento, titulada «Dos grados de libertad: realimentación y prealimentación», incorpora controladores de prealimentación cuando las señales externas son conocidas. Este es el caso del seguimiento robusto de referencias (servosistemas), y también el caso en el que las perturbaciones puedan medirse. En ambos casos, reducir al máximo la acción de control en cada actuador no sólo dependerá de la cantidad de realimentación sino también de la cantidad de prealimentación. Por tanto, será preciso cuantificar por qué actuador es más conveniente canalizar cada una (participación de las plantas en cada frecuencia), por lo que el problema es diferente al estudiado en las unidades temáticas anteriores. El [Capítulo 11](#) analiza las alternativas existentes en la literatura científica para el control QFT de servosistemas SISO. A continuación, se analizan los efectos de la prealimentación en los sistemas MISO, estudiando cuándo las plantas son susceptibles de colaborar y los beneficios esperados en caso de ser posible. En este capítulo se alcanzan conclusiones importantes referentes a la colaboración MISO en servosistemas, que actúan como fundamentos de las metodologías de diseño propuestas en capítulos posteriores. En el [Capítulo 12](#) se presenta una solución al problema de seguimiento QFT MISO. La solución presentada consta de una nueva arquitectura de control, que incorpora controladores de prealimentación y realimentación, y de un nuevo procedimiento de diseño orientado a minimizar la acción de control en cada actuador. Por último, el [Capítulo 13](#), aborda el problema de rechazo de perturbaciones que pueden medirse y, por tanto, emplearse elementos de control en prealimentación. Se incorporan en esta sección porque la solución matemática y el criterio de reparto son los mismos que para los servosistemas, pese a que en este caso el objetivo sea anular la influencia de una señal conocida (perturbación medible) y en el anterior fuera seguir una señal conocida (referencia).

La quinta parte del documento, titulada «Conclusiones», consta únicamente del [Capítulo 14](#). En él se presentan las conclusiones del trabajo, detallando los aspectos más destacados de las mismas. Por último, se indican las posibles vías de continuación y líneas de investigación activas.

La sexta parte del documento contiene los anexos, en los que se muestra contenido adicional que puede facilitar la lectura y comprensión del trabajo. El [Apéndice A](#) muestra una introducción a la teoría de la realimentación cuantitativa o QFT. En ella se presenta una breve evolución histórica, los fundamentos y objetivos, así como el método básico empleado para el diseño de sistemas de control SISO. El [Apéndice B](#) presenta información relativa a la estabilidad en sistemas SISO. En él se resumen los conceptos principales referentes a la estabilidad relativa, y a cómo ésta se garantiza en QFT. Los conceptos analizados, si bien son básicos, son necesarios para entender los desarrollos efectuados en el [Capítulo 5](#) para sistemas MISO. El [Apéndice C](#) muestra las ecuaciones que describen el comportamiento del reactor CSTR doblemente refrigerado empleado en el [Capítulo 10](#). En este anexo se presentan las ecuaciones en régimen permanente, el modelo dinámico no lineal y el proceso de linealizado empleado. Por último, para el cálculo de los *bounds* QFT, que afecta al [Capítulo 12](#) y al [Capítulo 13](#), ha sido necesario desarrollar y resolver una nueva inecuación, lo cual se recoge en el [Apéndice D](#).

ESTADO DEL ARTE

Como se describe en el [Capítulo 1](#), los sistemas MISO corresponden con todos los sistemas de control que presentan más de una acción de control para gobernar una única variable controlada. El presente capítulo realiza una descripción de los diferentes tipos de sistemas MISO, sus posibilidades de control, las arquitecturas y las estrategias empleadas en la literatura científica. Por último, se describen una serie de aplicaciones en las que se muestra la utilidad del control MISO.

El objetivo de este capítulo es introducir los sistemas MISO y realizar una revisión del estado de la técnica. Este capítulo es el punto de partida a partir del cual se identifican las necesidades existentes y que permite al lector una mejor comprensión del problema de control estudiado.

2.1 DEFINICIÓN DE SISTEMA MISO

Tradicionalmente, los sistemas de control se han clasificado en dos grandes grupos: monovariantes y multivariantes. El primer grupo representa a los sistemas en los que disponemos de una única variable controlada que debe ser gobernada mediante el empleo de una única acción de control. Por el contrario, el segundo grupo, engloba a aquellos sistemas en los que se dispone de más de una entrada manipulable y/o más de una variable gobernada. Atendiendo a la denominación clásica [137], un sistema multivariable ($m \times n$) es aquel que dispone de m variables controlables mediante el empleo de n acciones de control, que en el caso más simple se reduciría a un sistema monovariante ($n = m = 1$). Véase como siguiendo esta notación pueden diferenciarse tres tipos de sistemas:

- Sistemas cuadrados ($m = n$). Se corresponden con sistemas que presentan igual número de entradas y salidas; y habitualmente

han acuñado el nombre de sistemas multivariantes o MIMO. Han sido los más estudiados en ingeniería de control y suelen ser gobernados asociando parejas entrada-salida. Entonces, hay una entrada principal para conseguir el *performance* requerido en una determinada salida. Esto no implica que las demás entradas puedan intervenir convenientemente en dicha salida, un ejemplo de lo cual es el uso de desacopladores; o incluso cuando se diseñan controladores diagonales éstos también tienen en cuenta los acoplamientos cruzados. Pero de un modo u otro, se presupone la diagonal-dominancia de la planta multivariable, que define el emparejamiento principal entradas-salidas.

Debe tenerse en cuenta que muchos sistemas gobernados como cuadrados no son estructuralmente cuadrados, pero son gobernados como si lo fueran eliminando las relaciones entradas-salida menos relevantes con el fin de simplificar el diseño de control.

- Sistemas sobre-actuados ($m < n$). Se corresponden con los sistemas que presentan un número de variables controlables menor al número de entradas de actuación. En estos casos, en lugar de emplear una actuación principal para cada salida, la colaboración de varias actuaciones se emplea para mejorar el *performance* de una misma variable controlada. Los sistemas sobre-actuados típicos son los de dimensiones $1 \times n$, que son el objeto de la presente tesis, y que denominaremos como sistemas MISO. De hecho, cuando $m > 1$ el problema se complica y suele afrontarse como multivariable cuadrado $m = n$, es decir, eliminando las entradas de actuación excedentarias, y procediendo como es habitual en un control MIMO (diagonal dominancia y emparejamiento principal de entradas-salidas).
- Sistemas sub-actuados ($m > n$). Engloba a todos aquellos sistemas en los que se dispone de un número de variables controlables mayor al de variables de actuación. Nótese cómo en este caso la dificultad radica en como gestionar las acciones de control para gobernar con cada una de ellas más de una salida. Dentro de este grupo el caso más sencillo son los sistemas SIMO, de dimensiones $m \times 1$.

Esta clasificación resulta incompleta si se pretende caracterizar a todos los posibles sistemas de múltiples variables. Véase como ejemplo el

control en cascada, que pese a ser en esencia un control SISO desde el punto de vista de la clasificación anterior, presenta varios puntos de medida. El número de sensores disponibles tiene una gran importancia en la arquitectura de control aplicable y sobre todo en el *performance* de lazo cerrado. Horowitz en [66] afirma: “*The number of independent sensors determines the number of independent loop transmissions (L_i), the functions which provide the benefits of feedback.*”

Si tenemos en cuenta el número de sensores independientes podemos diferenciar entre sistemas MISO con salidas individuales accesibles y no accesibles. Los primeros (Figura 2.1a) son frecuentes en aplicaciones en las que varios equipos contribuyen en la búsqueda de un objetivo común: generación de energía [102], sistemas de producción descentralizados [35], y flotas de vehículos no tripulados [42], entre otros. Al disponer de varios equipos con salidas individuales accesibles, la topología de control aplicable es flexible, permitiendo el empleo de las $n + 1$ medidas

$$y_{i=1,\dots,n}, \quad y = \sum_{i=1}^n y_i + d,$$

en complejas estructuras multilazo [65].

Por otro lado, los sistemas MISO con salidas individuales no medibles (Figura 2.1b), objeto de esta tesis, son el resultado de procesos o sistemas en los que múltiples variables influyen en una única variable objeto de control. En estos casos, las salidas individuales no son medibles, debido a que no existen sensores disponibles, o sencillamente porque no existen físicamente. Este tipo de sistemas son muy frecuentes en la práctica, tal y como describen las aplicaciones recogidas en la Sección 2.5. A modo de ejemplo, en la industria de procesos [58, 132] se puede destacar: el control de temperatura en intercambiadores de calor, donde se manipulan los caudales de fluido calefactor y *bypass*; ó el control de temperatura en reactores químicos, que manipula los caudales de la chaqueta de refrigeración y de reactivo.

En este trabajo de investigación se presenta un estudio de los sistemas MISO con salidas individuales no accesibles. Téngase en cuenta que las estrategias de control desarrolladas pueden ser aplicadas en sistemas MISO con salidas individuales medibles. Sin embargo, las prestaciones alcanzadas nunca podrán ser equivalentes a las logradas con estructuras de control que emplearán la información de todas las señales disponibles.

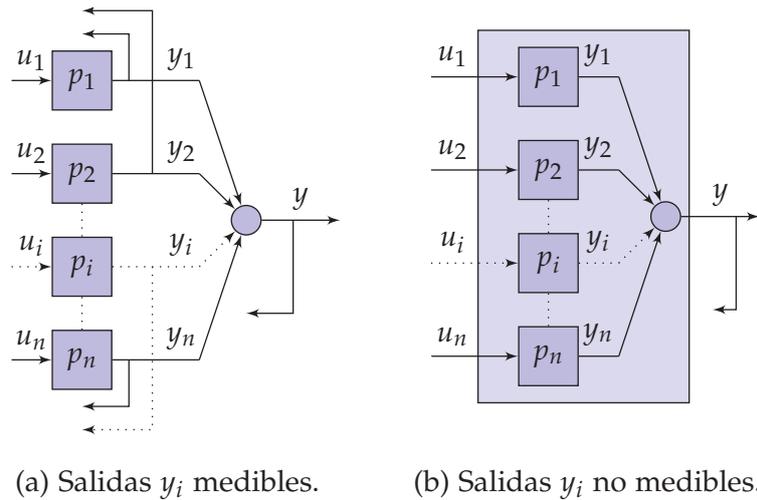


Figura 2.1: Tipos de sistemas MISO.

2.2 CONTROL COLABORATIVO *vs.* NO-COLABORATIVO

Dentro de los sistemas MISO con salidas individuales no accesibles podemos diferenciar las estrategias de control colaborativas y las no colaborativas. Las primeras buscan explotar las características frecuenciales de las plantas $p_{i=1,\dots,n}$, para conseguir una mejora en el *performance* de la variable controlada y , minimizar las limitaciones sobre las variables manipuladas u_i o las salidas individuales y_i . Por el contrario, las estrategias no-colaborativas buscan la reducción del número de acciones de control manipuladas ó se centran en el estacionario. En esencia, estas últimas tratan de reducir el problema MISO a un problema SISO equivalente.

La estrategia de control no-colaborativo más simple se muestra en la [Figura 2.2](#) y consiste en el empleo de un único lazo de realimentación SISO junto con una única acción de control. Para ello, se selecciona el emparejamiento entrada-salida más ventajoso para gobernar el régimen estacionario y el resto de variables manipuladas $u_{i \neq n}$ son fijadas a un valor constante de acuerdo al punto de operación (estacionario) deseado y calculado previamente para la salida. De este modo, el controlador de realimentación c puede ser diseñado de forma sencilla empleando estrategias de control SISO. Las acciones de control $u_{i \neq n}$ permanecerán constantes en todo momento, salvo que se desee modificar el punto de operación del sistema.

En muchas ocasiones, la manipulación de una única acción de control es insuficiente para gobernar un amplio rango de puntos de operación (limitaciones en régimen estacionario), o inapropiada en el caso de

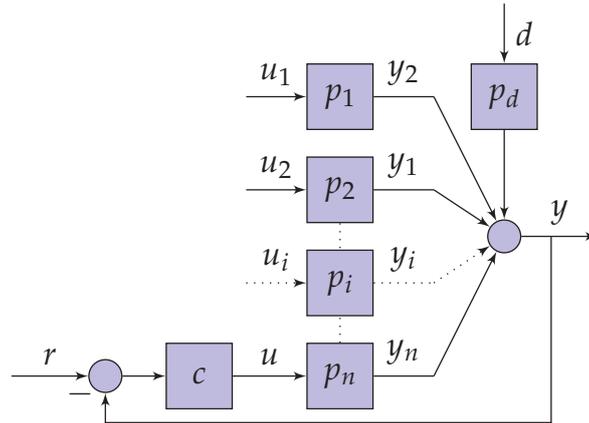


Figura 2.2: Control de sistema MISO con una única variable.

plantas con actuadores asimétricos en las que unos trabajan con magnitudes positivas y otros con negativas. Para incrementar la capacidad y las prestaciones de las instalaciones, se emplea la estructura de “control de rango partido” (*split-range control*) [6, 89, 138] de la Figura 2.3. Su empleo es muy común en procesos de calentamiento / enfriamiento, control de caudal en reactores químicos, control de pH en procesos de tratamiento de residuos, etc. En esencia, la estrategia de control es SISO, ya que el controlador c se diseña para una única relación entrada-salida y planta. La acción de control u calculada por dicho controlador es transformada por un selector sin dinámica asociada en cada una de las acciones de control individuales $u_{1,\dots,n}$. Para ello, se emplean características estáticas que relacionan $u - u_{1,\dots,n}$ (Figura 2.4). En este caso la problemática consiste en definir el selector adecuado junto con la planta p que agrupa una planta o un conjunto de ellas, para diseñar el controlador c .

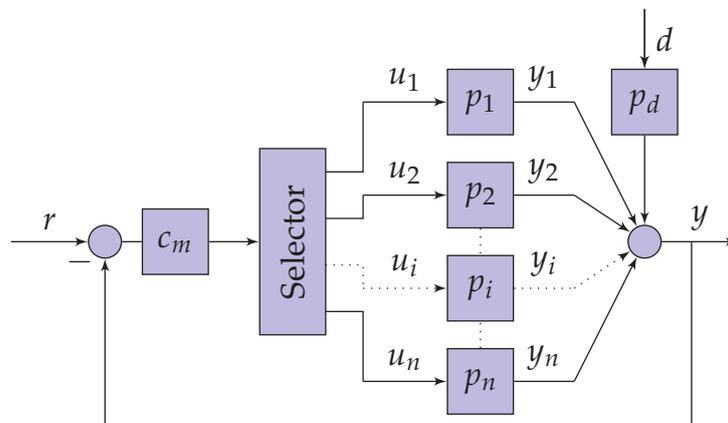


Figura 2.3: Control de rango partido.

Véase como ejemplo el control de temperatura mediante el empleo de un calefactor y un refrigerador gobernados con u_1 y u_2 respectivamente. En este caso el elemento calefactor (u_1) no puede emplearse para producir una rápida reducción de la temperatura controlada. Del mismo modo, el refrigerador (u_2) no puede emplearse para conseguir incrementos rápidos de temperatura. En estos casos el control de rango partido puede satisfacer las necesidades de control. Si se emplea el selector (a) mostrado en [Figura 2.4](#) para plantas con rango opuesto, una acción de control positiva (indicando que la temperatura es inferior a la deseada) producirá la desconexión de elemento refrigerador $u_2 = 0$ y la conexión del elemento calefactor $u_1 = u$. En el caso opuesto, ante una acción de control negativa (temperatura superior a la deseada), será el elemento refrigerador el que se encargue de la regulación del sistema.

El control de la presión de vapor en una tubería principal mediante el empleo de varias calderas corresponde con otro ejemplo típico de control de rango partido. En este caso se emplea el selector (b) de la [Figura 2.4](#), permitiendo la conexión de calderas adicionales cuando la demanda aumenta. De este modo, en un instante de tiempo se emplean de forma simultánea las calderas estrictamente necesarias, manteniéndose el resto en reposo.

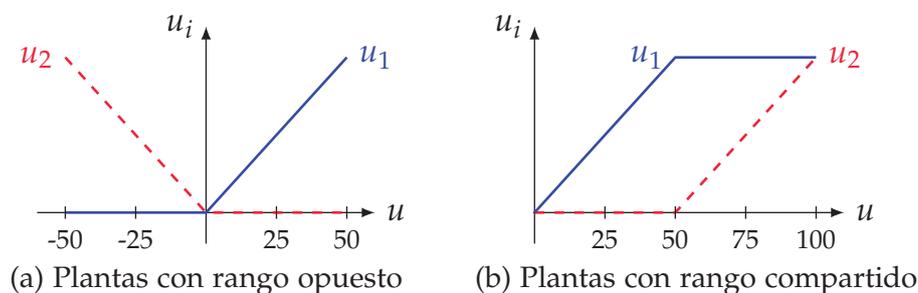


Figura 2.4: Dos ejemplos de selector *split-range*.

Véase cómo el control de rango partido permite que todas las plantas $p_{i=1,\dots,n}$ sean susceptibles de intervenir para gobernar el sistema¹. Pese a ello podemos clasificar esta estructura de control dentro de las no colaborativas, puesto que la utilización de las mismas depende del punto de trabajo. Es decir, dependiendo del punto de operación y de la magnitud de la perturbación, es posible que únicamente se emplee una acción de control para gobernar el sistema.

¹ Esto no ocurriría cuando se reduce el sistema MISO a un SISO equivalente.

La característica principal de las estrategias de control colaborativas es que la contribución de las plantas tiene una interpretación frecuencial (o temporal), por lo que no depende sólo del estacionario del punto de operación y de la perturbación, sino de sus cambios temporales y de las características frecuenciales de cada una de las plantas. De este modo, tratan de emplear cada una de las plantas p_i en las frecuencias en las que reportan mayores beneficios al lazo de control. Entonces, las estrategias de control colaborativas, objeto de esta tesis, emplearán todas las plantas disponibles² $p_{i=1,\dots,n}$ para rechazar una perturbación $d(t)$ o seguir una referencia $r(t)$. Este comportamiento será independiente del punto de operación de partida $y(t=0)$, $u_{i=1,\dots,n}(t=0)$.

2.3 ARQUITECTURAS DE CONTROL COLABORATIVO

A continuación, se presentan las arquitecturas de control empleadas en el control colaborativo de sistemas MISO. Pese a que en la literatura científica se presenten múltiples arquitecturas de control, éstas pueden ser clasificadas en dos grandes grupos: la estructura de control serie ([Figura 2.5](#)), que debe su nombre a que la acción de control calculada por el controlador i , interviene en la que será calculada por el controlador $i+1$; y la estructura de control paralelo ([Figura 2.8](#)), donde los n controladores trabajan de forma independiente. En esta tesis, dichas estructuras se han generalizado para n entradas manipulables, mientras que en la literatura científica se describen normalmente para sólo dos actuadores, $n=2$.

2.3.1 Estructura de control serie

La estructura de “control serie” [58], también conocida como estructura de “rango medio” (*mid-ranging*) [6] y como estructura de “control en cascada” [137], es una generalización de las estructuras propuestas por Shinskey [131] y Luyben [96] para el control de válvulas en la industria del proceso. Esta arquitectura de control está pensada para que ante una perturbación se produzca una intervención secuencial de lazos, hablando en términos temporales. Así el lazo principal y más rápido, $c_1^* p_1$ en la [Figura 2.5](#), es el primero en reaccionar; nótese como éste es el

² Se considera en este punto que todas las plantas reportan beneficios. Esta afirmación sólo es adecuada bajo ciertas condiciones expuestas en el [Capítulo 3](#).

único que realimenta directamente la salida³. A continuación, el segundo lazo en orden creciente de rapidez $c_2^*p_2$ al realimentar u_1 y advertir cambios respecto al punto de operación r_{u_1} hace colaborar a la segunda planta más rápida. El lazo auxiliar más lento, $c_n^*p_n$ en la Figura 2.5, se apoderará de las frecuencias bajas y en particular del estacionario. De esta forma se produce una reacción temporal en cadena, de manera que se aprovecha la rapidez inherente a cada planta (las frecuencias donde cada planta tiene más magnitud) y a la vez se evita que las plantas trabajen en las frecuencias en las que no aportando beneficios, podrían saturarse o fatigarse innecesariamente sus actuadores. Entonces en el rechazo de una perturbación en el régimen permanente los lazos rápidos (normalmente con actuadores o plantas más caros) vuelven al punto de operación, mientras que los lazos lentos (normalmente con actuadores o plantas más baratos) son los aportan la acción necesaria para compensar la desviación de la salida. Además el punto de operación del sistema (estacionario) puede modificarse cambiando la referencia de las variables rápidas.

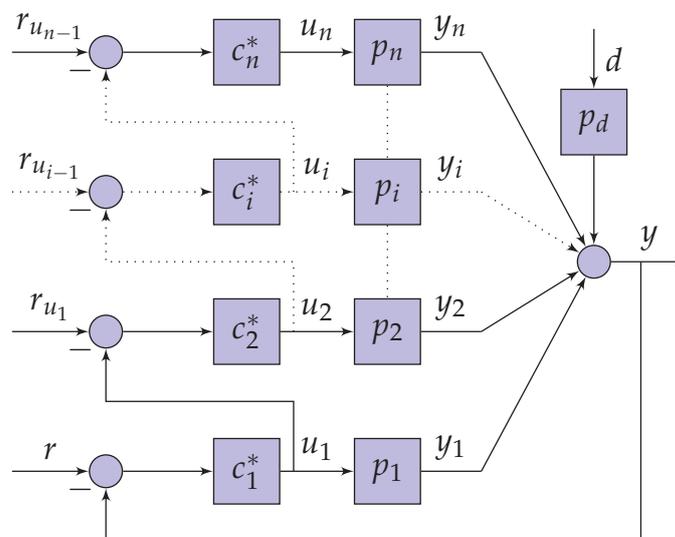


Figura 2.5: Estructura de control serie.

Las variables para las que se plantean señales de referencia serán: la respuesta del sistema y , junto con las acciones de control $u_{i=1,\dots,n-1}$ aportadas por los controladores ($c_{i=1,\dots,n-1}^*$); téngase en cuenta que el conjunto planta actuador más lento $c_n^*p_n$ es el encargado de gobernar el estacionario, por lo que carece de sentido fijar una referencia a la acción de control u_n . Entonces, las respuestas de las variables del sistema

³ El superíndice "*" se emplea para diferenciar los controladores serie de los paralelo.

frente a las entradas externas $(r, r_{u_{i=1,\dots,n-1}}, d)$ para el esquema de control realimentado serie responden a:

$$y = \frac{l_t}{1+l_t}r + \frac{l_{i+1}}{1+l_t}r_{u_{i=1,\dots,n-1}} + \frac{p_d}{1+l_t}d, \quad (2.1)$$

$$y_i = \frac{(-1)^{i+1}l_i}{1+l_t}(r - p_d d) + \frac{(-1)^i p_i l_{-j} \prod_{k=1}^i c_k^*}{1+l_t} r_{j \geq i} + \frac{(-1)^{(i-j+1)} p_i \prod_{k=j}^i c_k^*}{1+l_t} r_{j < i}, \quad (2.2)$$

$$u_i = \frac{(-1)^{i+1}l_i/p_i}{1+l_t}(r - p_d d) + \frac{(-1)^i l_{-j} \prod_{k=1}^i c_k^*}{1+l_t} r_{j \geq i} + \frac{(-1)^{(i-j+1)} \prod_{k=j}^i c_k^*}{1+l_t} r_{j < i}, \quad (2.3)$$

donde l_i , l_t y l_{-j} están determinados por:

$$l_i = p_i \prod_{k=1}^i c_k^*, \quad (2.4)$$

$$l_t = \sum_{i=1}^n (-1)^{(i+1)} l_i, \quad (2.5)$$

$$l_{-i} = \sum_{j=i+1}^n \left[(-1)^{(j-1-i)} p_j \prod_{k=i+1}^j c_k^* \right]. \quad (2.6)$$

En (2.4)-(2.6) se comprueba cómo la complejidad del problema aumenta con el número de plantas⁴.

La ventaja principal de la estructura serie radica en que el reparto frecuencial de las tareas asignadas a cada una de las plantas queda fijado por la estructura de control. Su principal limitación es que no permite hacer frente a diseños en los que la ordenación “lento - rápido” no pueda establecerse de forma unívoca y creciente entre las plantas.

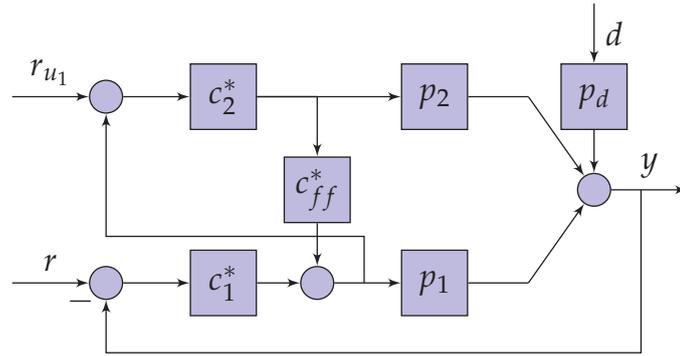
⁴ Tradicionalmente la estructura serie es empleada en sistemas MISO 1×2 .

Normalmente sólo se establecen especificaciones de *performance* dinámico para la variable y ; que en un problema de regulación sufre desviaciones debido a d y a posibles cambios esporádicos en el punto de operación $r_{u_{i=1,\dots,n-1}}$. En este último caso, además se debe asegurar que las acciones de control $u_{i=1,\dots,n-1}$ alcancen $r_{u_{i=1,\dots,n-1}}$ en el estacionario. En (2.1) se advierte que un cambio del punto de operación estacionario r_{u_i} para la acción de control u_i produce una distorsión en la salida y . Para limitar este efecto indeseado se emplean modificaciones de la estructura serie que permiten desacoplar la salida y de las referencias r_{u_i} . Aström y Hägglund [6] proponen el empleo de un controlador de desacoplo c_{ff}^* como el ejemplo en la Figura 2.6a. Para un sistema con dos plantas $p_{i=1,2}$, éste deberá ser sintonizado según: $c_{ff}^* = -p_2/p_1$, asegurando que sea realizable. Por el contrario, Henson y otros [58] proponen el empleo de un controlador en prealimentación f^* (considérese la Figura 2.6b con $f_1^* = f^*$, $f_2^* = 0$), que se sintonizaría según: $f^* = -c_2^*p_2/(p_1 - c_2^*p_2)$. La ventaja de esta segunda opción radica en que la función de lazo resultante l_t en (2.5) no depende de f^* , lo que independiza el diseño de los controladores de realimentación $c_{i=1,2}^*$. Por el contrario, el empleo de c_{ff}^* en la estructura de la Figura 2.6a, produce una distorsión de l_t que deberá ser tomada en cuenta para el diseño de $c_{i=1,2}^*$. Gayadeen y Heath [43] utilizan una estructura serie con dos prefiltros f_1^* y f_2^* en la implementación de su estrategia de control. El empleo de arquitecturas de cuatro grados de libertad, c_1^* , c_2^* , f_1^* y f_2^* como en la Figura 2.6b es lo más apropiado en sistemas MISO 1×2 para luego establecer equivalencias entre las estructuras serie y paralelo.

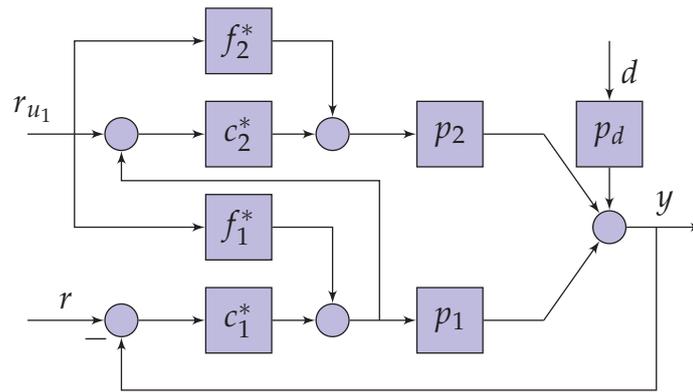
2.3.2 Estructura de control paralelo

La estructura de “control paralelo” [58], también conocida como estructura de “control centralizado” [137], es una generalización de las estructuras de control propuestas por Chla y Brosilow [20] y Popiel y otros [118]. La arquitectura presentada en la Figura 2.7 trata de englobar las múltiples variantes que aparecen en la literatura científica a la hora de abordar el diseño. De entre ellas se destacan:

- Control con maestro-esclavos (Coordinado). En este caso el controlador maestro c_m es el principal responsable de calcular la cantidad de realimentación necesaria en cada instante para gobernar el sistema. Los controladores $c_{i=1,\dots,n}$ actúan como meros filtros de rama



(a) Desacoplo con controlador.



(b) Desacoplo con prefiltro.

Figura 2.6: Estructuras serie con desacoplo de r_{u1} .

$f_{i=1,\dots,n}$, repartiendo o atenuando dicho esfuerzo de control entre las diferentes plantas del sistema.

- Control mediante controladores de rama (Independiente). En este caso el controlador maestro es omitido $c_m = 1$, transfiriéndose su cometido a los controladores de rama c_i , que aumentan sus competencias. Nótese que existe un equivalente matemático directo del control coordinado $(c_m, f_{i=1,\dots,n})$ al control independiente $(c_{i=1,\dots,n})$ determinado por: $c_i = c_m f_i$. Sin embargo, la transformación inversa no es de solución matemática única.
- Control SISO equivalente. En este caso se emplea únicamente el controlador maestro c_m , fijando los controladores de rama a $c_{i=1,\dots,n} = 1$. El controlador maestro c_m se diseña aplicando técnicas SISO para la suma de plantas $p_e = \sum_{i=1}^n p_i$. Esta estructura sigue siendo colaborativa y reparte adecuadamente la realimentación entre plantas⁵

⁵ Afirmación solo válida bajo ciertas condiciones (más información en el [Capítulo 3](#)).

para el mejor *performance*, pero el problema es que todas las plantas reciben la misma acción de control, siendo excitadas incluso en las frecuencias donde no aportan beneficios.

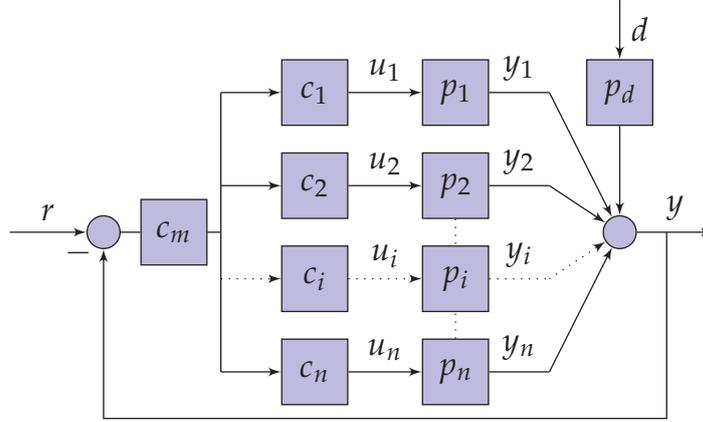


Figura 2.7: Estructura de control paralelo.

La diferencia principal de la arquitectura paralelo (tómese como referencia la más genérica con $c_m = 1$ y controladores de rama c_i) con respecto a la arquitectura serie, radica en que en la primera los n controladores reciben la señal de error ($r - y$), de forma que pueden trabajar de forma independiente con la medida de la variable objeto de control. Entonces, las frecuencias de trabajo de cada rama dependen del criterio del diseñador, siendo por tanto, la arquitectura más versátil. La contrapartida es la dificultad a la hora de abordar el diseño de los controladores.

Tomando como referencia la estructura de control paralelo genérica de la [Figura 2.7](#), la respuesta de las variables del sistema en función de las entradas externas está determinada por:

$$y = \frac{l_t}{1 + l_t} r + \frac{p_d}{1 + l_t} d, \quad (2.7)$$

$$y_i = \frac{c_m c_i p_i}{1 + l_t} r - \frac{p_d c_m c_i p_i}{1 + l_t} d, \quad (2.8)$$

$$u_i = \frac{c_m c_i}{1 + l_t} r - \frac{p_d c_m c_i}{1 + l_t} d, \quad (2.9)$$

donde la función de lazo total l_t está determinada por:

$$l_t = \sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n c_m c_i p_i. \quad (2.10)$$

Nótese cómo por el momento no se contempla la modificación del punto de operación mediante el empleo de referencias r_{u_i} para las acciones de control u_i . Considerando únicamente el comportamiento de la variable controlada, pueden obtenerse equivalentes que permiten pasar de la estructura serie a la paralelo (2.11) y viceversa (2.12) (c_i^* controladores de la estructura serie; c_i controladores de la estructura paralelo). Estas relaciones están determinadas por:

$$c_i = (-1)^{i+1} \prod_{k=1}^i c_k^*, \quad \forall i \in (1, n), \quad (2.11)$$

$$c_i^* = \frac{-c_i}{c_{i-1}}, \quad \forall i \in (2, n); \quad c_1^* = c_1. \quad (2.12)$$

Analizando (2.11) se observa que cualquier diseño realizado para la estructura serie (todos los c_i^* son realizables) será implementable en la estructura paralelo. Sin embargo, analizando (2.12) puede comprobarse que la operación inversa no siempre es posible (todos los c_i son realizables), ya que pueden obtenerse controladores no propios. La condición necesaria y suficiente para la reversibilidad está determinada por:

$$(D_i + N_{i-1}) - (N_i + D_{i-1}) \geq 0; \quad \forall i \in (2, n), \quad (2.13)$$

donde N representa el número de polos y D el número de ceros de los controladores paralelo. Por todo ello, la estructura paralelo permite resolver casos que no son abordables con la estructura serie.

Cuando se desea gobernar el punto de operación, la estructura paralelo mostrada en la Figura 2.8 debe ser modificada. La estructura más general corresponde con la de la Figura 2.8, propuesta por Eitelberg [36]. En este caso el punto de operación es controlado inyectando las referencias r_{u_i} moduladas por controladores de prealimentación f_i en la entrada de las plantas p_i . En la representación mostrada en la Figura 2.8 se contemplan referencias r_{u_i} para todas las acciones de control. Como se describió para la estructura serie, un sistema MISO únicamente puede tener fijado el valor estacionario en $n - 1$ acciones de control, dado que una de ellas debe absorber en régimen estacionario las posibles perturbaciones. No obstante, dado que la estructura paralelo no determina la ordenación de las frecuencias de trabajo, se ha decidido incluir todas

las referencias r_{u_i} pese a que una de ellas debe permanecer libre. Si se considera la ordenación lento/rápido de la estructura serie, en la que p_n trabaja en régimen permanente, deberá hacerse $f_n = 0$. Las ecuaciones de comportamiento del sistema completo están determinadas por:

$$y = \frac{l_t}{1+l_t}(r - v - p_d d) + \frac{p_i}{1+l_t} r_{u_i}, \quad (2.14)$$

$$y_i = \frac{l_i}{1+l_t}(r - v - p_d d) - \frac{p_j l_i}{1+l_t} r_{u_{j \neq i}} + \frac{(1+l_t - l_i) p_j}{1+l_t} r_{u_i}, \quad (2.15)$$

$$u_i = \frac{l_i/p_i}{1+l_t}(r - v - p_d d) - \frac{p_j l_i/p_i}{1+l_t} r_{u_{j \neq i}} + \frac{1+l_t - l_i}{1+l_t} r_{u_i}, \quad (2.16)$$

que pese a aumentar en complejidad siguen siendo notablemente más simples que las obtenidas para la estructura serie.

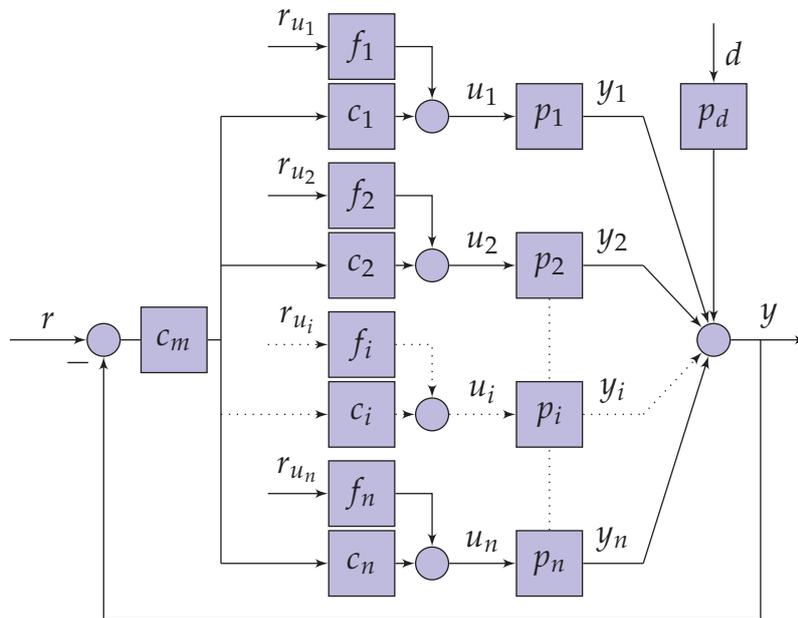


Figura 2.8: Estructura de control paralelo con control del punto de operación.

En la literatura científica pueden encontrarse modificaciones de la estructura anterior específicas para sistemas MISO 1×2 . En esta línea Henson y otros [58] presentan la arquitectura de control de la Figura 2.9. En este caso el prefiltro f_2 es el encargado de desacoplar la respuesta del sistema y de posibles cambios en el punto de operación deseado para

la variable manipulable r_{u_1} . Para lograrlo, deberá ser sintonizado según: $f_2 = -f_1 p_1 / p_2$. El prefiltro f_1 será diseñado para forzar la dinámica deseada en la respuesta de u_1 frente a cambios en r_{u_1} . Las ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema de la [Figura 2.9](#) son:

$$y = \frac{l_t}{1 + L_t} r + \frac{p_d}{1 + l_t} d + \frac{f_1 p_1 + f_2 p_2}{1 + l_t} r_{u_1}, \quad (2.17)$$

y

$$u_1 = \frac{c_m c_1}{1 + l_t} r - \frac{c_m c_1}{1 + l_t} d + \frac{f_1 (1 + p_2 c_2 c_m) + f_2 p_2 c_1}{1 + l_t} r_{u_1}. \quad (2.18)$$

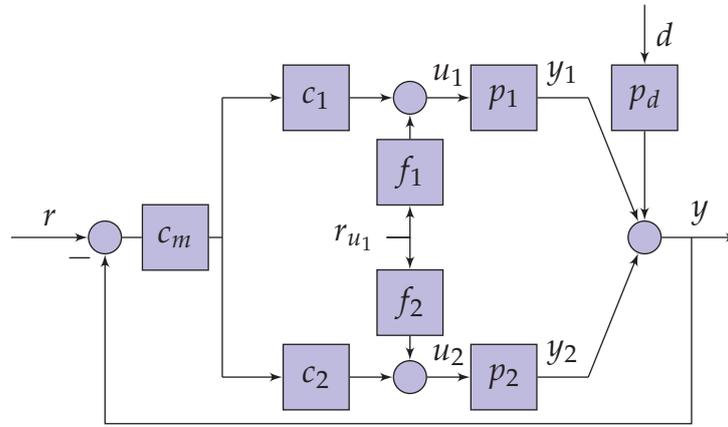


Figura 2.9: Estructura de control paralelo 1×2 con desacoplo de r_{u_1} .

Por último, la estructura de control de la [Figura 2.10](#), conocida como “estructura paralelo con control en cascada de salida total” es descrita por Eitelberg [32, Figura 2.3] a partir de la propuesta en [132, Figura 6.9]. En esta arquitectura se emplea un prefiltro maestro f_m que incorpora la referencia, un controlador de realimentación maestro c_m , un controlador para las acciones de control c_u y controladores o filtros de rama $c_{i=1,\dots,n}$ (denominados HIC_i por Shinsky). Se establecen dos lazos de control en cascada. El lazo interno gobernado por c_u es el encargado de garantizar que la acción de control calculada por c_m en el lazo externo sea aportada por los controladores $c_{i=1,\dots,n}$. Para ello, realimenta la suma de todas las acciones de control $u_{i=1,\dots,n}$ inyectadas en las plantas $p_{i=1,\dots,n}$. El lazo externo es el encargado de gobernar la respuesta total del sistema, para lo que emplea la realimentación de la variable controlada. El comportamiento de ésta responde a

$$y = \frac{p_e c_m f_m}{1 + p_e c_m} r + \frac{p_d}{1 + p_e c_m} d - \frac{p_e c_m}{1 + p_e c_m} n, \quad (2.19)$$

donde la planta equivalente p_e depende del lazo interno y está determinada por

$$p_e = \frac{c_u \sum_{i=1}^n p_i c_i}{1 + c_u \sum_{i=1}^n c_i}. \tag{2.20}$$

Además, en la estructura de control de la [Figura 2.10](#) se añade el prefiltro f_m con el fin de distinguir el problema de seguimiento, cuando r puede cambiar, del problema del regulador, donde r se mantiene constante.

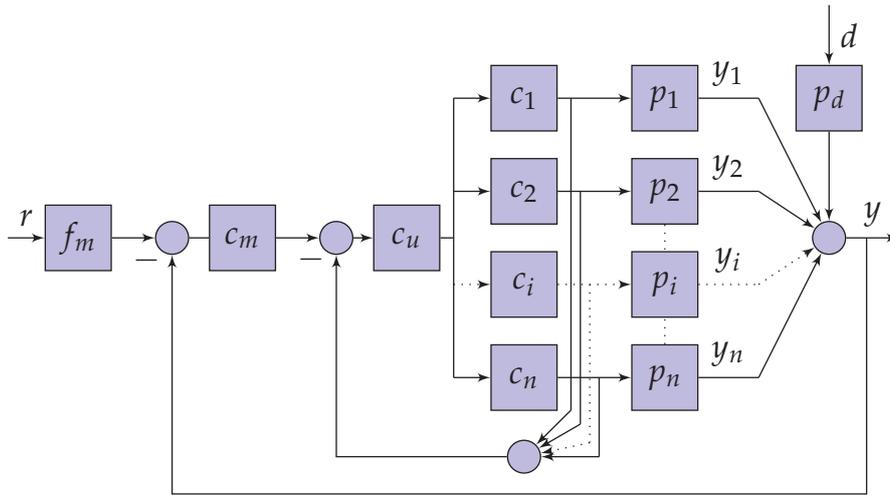


Figura 2.10: Estructura de control paralelo con control en cascada de salida total.

2.4 ESTRATEGIAS DE DISEÑO COLABORATIVO

A continuación, se presentan las estrategias de diseño MISO colaborativo que más éxito han presentado en la literatura científica. Todas ellas emplean de forma directa o indirecta alguna de las arquitecturas de control descritas en la sección anterior. Como se apreciará más adelante algunas de ellas presentan filosofías de trabajo muy similares, difiriendo únicamente en algunos detalles. El objetivo de la presente sección no es determinar las bondades de cada una de ellas, sino efectuar una pequeña descripción que permita conocer al lector los fundamentos sobre los que se sustentan. Se ha buscado un equilibrio entre extensión y detalle en las descripciones dadas, por lo que han sido omitidos todos los conceptos que no se han considerado imprescindibles.

2.4.1 VPC (*valve position control*)

Debe su nombre a que esta estrategia originalmente se aplicó en el control de variables en la industria del proceso mediante el accionamiento de válvulas. El control del posicionamiento de estos actuadores, sirve para aportar la cantidad de acción de control calculada por los controladores de realimentación que regulan la variable del proceso. La esencia del control VPC (*Valve Position Control*) consiste en introducir un segundo lazo de control (Figura 2.5, con $i = 2$) en el tradicional sistema de regulación SISO. Este segundo lazo realimenta la variable manipulable del primer lazo con el fin de minimizar o limitar su uso y al mismo tiempo mantener la controlabilidad del sistema global. El problema de fondo es que el actuador del lazo principal es de mayor resolución y dinámicamente más rápido, pero su utilización es más cara; mientras que el actuador añadido suele ser de mayor capacidad y dinámica más lenta, por lo que su empleo es más económico. Como cualquier esquema de control realimentado se pretende que ante cualquier perturbación eventual se recupere la referencia para la variable controlada. Y el modo novedoso de conseguirlo es que el transitorio sea dominado por la acción de control *rápida* (con mayor contenido frecuencial). Finalizado el transitorio, esta acción de control retorna a su punto de operación inicial (para reducir su uso y minimizar el gasto), y la acción de control secundaria se apodera lentamente del estacionario. Con este propósito, los primeros diseños VPC siempre utilizaban un control integral puro en el lazo secundario.

Con estos objetivos, los precursores del VPC [39, 130, 131] proponen la síntesis de los controladores en dos etapas. En la primera, se diseña el lazo principal (más rápido), sintonizándose un controlador de tipo PI:

$$c_1^* = k_{c_1} \left(1 + \frac{1}{T_{i_1} s} \right). \quad (2.21)$$

Para ello, se considera que la planta lenta p_2 es actuada en modo manual, por lo que no se tiene en cuenta en el diseño de c_1^* . La especificación de este diseño es garantizar cierto *performance* en la respuesta y ante perturbaciones d tal que sea recuperada la consigna r . Como resultado implicará cierta actuación u_1 . En una segunda etapa, un controlador de tipo integral puro es sintonizado para el lazo secundario (más lento)

$$c_2^* = \frac{1}{T_{i_2} s}, \quad (2.22)$$

con el objetivo de minimizar el empleo de u_1 , que tras el transitorio demandado por el lazo rápido debe volver a su punto de operación inicial r_{u_1} . Entonces, se diseña el tiempo integral T_{i_2} para condicionar una determinada constante de tiempo de desconexión del lazo rápido τ_r (retorno a su punto de operación inicial). Elegida una τ_r , se determina la frecuencia $\omega_r = 1/\tau_r$, y finalmente la fórmula del controlador c_2^* en (2.22) queda definida a partir de la condición de cruce de magnitudes de las dos ramas:

$$|c_1^*(j\omega_r)c_2^*(j\omega_r)p_2(j\omega_r)| = |c_1^*(j\omega_r)p_1(\omega_r)|. \quad (2.23)$$

La selección del parámetro de diseño τ_r suele realizarse mediante prueba y error, utilizándose conocimientos *ad-hoc* de las plantas. Téngase en cuenta, por ejemplo, que en la sintonía de T_{i_2} según (2.23) no se ha valorado cómo la adición de c_2^* afecta a la estabilidad del conjunto. Para simplificar el problema de diseño y reducir las interacciones entre los dos lazos de control, se recomienda emplear una estrategia conservativa: lenta desconexión de la planta rápida.

Yu y Luyben [160] ponen de manifiesto la dificultad en la sintonía de los controladores c_1^* en (2.21) y c_2^* en (2.22) de la estructura VPC cuando existen diferencias importantes entre las constantes de tiempo de los lazos rápido y lento o cuando las plantas presentan polos inestables. En estos casos, la metodología convencional que sintoniza los controladores para que el módulo de las funciones de lazo cerrado (salida - entradas de referencia) no supere cierto máximo (habitualmente 2dB) es insuficiente, tanto para el caso de plantas estables como para plantas inestables. Las deficiencias dan lugar a comportamientos temporales muy poco amortiguados y sistemas condicionalmente estables incluso para plantas estables; aunque su ventaja es que se reduce el empleo de la acción de control cara. Proponen la mejora de introducir alguna especificación de baja frecuencia: limitar la fase de la función de lazo abierto o utilizar el "ratio de estabilidad" [98], ambos con el fin de cuantificar la controlabilidad del sistema. Una mayor controlabilidad, mejora el *performance* y la estabilidad, pero es contrapuesto a minimizar el empleo de la actuación cara (objetivo por el cual se añade el lazo extra del VPC). El punto de inflexión está relacionado con encontrar una T_{i_2} óptima. Para su cálculo proponen diagramas de sintonía que tienen en cuenta, además del criterio convencional, alguno de los criterios de controlabilidad mencionados. Son aplicables a plantas estables modeladas como sistemas de

primer orden con retardo, y a plantas inestables modeladas como sistemas de tercer orden.

Allison y Ogawa [4] realizan una revisión del problema VPC, estableciendo las siguientes definiciones:

- CVPC (*Conventional Valve Position Control*). Se renombra de este modo la estrategia de diseño VPC primitiva (c_1^* controlador PI, c_2^* controlador I) que se aplicaba a la estructura de la [Figura 2.5](#).
- MVPC (*Modified Valve Position Control*). Empleando la estructura de la [Figura 2.5](#), se desarrolla una estrategia de diseño que consta de dos pasos. En el primero se diseña c_1^* como un controlador de tipo PI para la planta rápida p_1 , que es modelada como un sistema de primer orden sin retardo caracterizado por k_1 y τ_1 . Se aplica la metodología *lambda-tuning* (ver Aström y Hägglund [6]) para lograr una cierta dinámica de primer orden del sistema en lazo cerrado ($y/r = g_y$), caracterizada por una constante de tiempo λ_y . El controlador resultante es

$$c_1^* = k_{c_1} \left(1 + \frac{1}{T_{i_1}s} \right); \quad T_{i_1} = \tau_1; \quad k_{c_1} = \frac{T_{i_1}}{k_1 \lambda_y}. \quad (2.24)$$

En el caso particular de que la planta rápida responda a una ganancia pura ($p_1 = k_1$), se diseñará c_1^* como un controlador integral puro,

$$c_1^* = \frac{1}{T_{i_1}s}; \quad T_{i_1} = \lambda_y k_1, \quad (2.25)$$

para garantizar la dinámica g_y .

Diseñado c_1^* y considerando p_2 un sistema de primer orden con retardo, caracterizado por una ganancia k_2 , una constante de tiempo τ_2 y un retardo h_2 ; se define p_{12} como la relación u_1/u_2 que responde a

$$p_{12} = \frac{-p_2}{p_1} g_y = \frac{-k_2(\tau_1 s + 1)e^{-h_2 s}}{k_1(\tau_2 s + 1)(\lambda_y s + 1)} \approx \frac{k_{12}}{\tau_{12} s + 1}, \quad (2.26)$$

donde

$$k_{12} = \frac{-k_2}{k_1}; \quad \tau_{12} = \tau_2 + \lambda_y - \tau_1 + h_2 > 0, \quad (2.27)$$

siempre que $\tau_{12} \gg h_2$ [6].

En el segundo paso de diseño se sintoniza c_2^* como un PI para la planta p_{12} en (2.26) aplicando *lambda-tuning* con el objetivo de lograr un comportamiento en lazo cerrado $u_1/r_{u_1} = g_u$ de primer orden, caracterizado por una constante de tiempo λ_u . El controlador resultante es

$$c_2^* = k_{c_2} \left(1 + \frac{1}{T_{i_2} s} \right); \quad T_{i_2} = \tau_{12}; \quad k_{c_2} = \frac{T_{i_2}}{k_{12} \lambda_u}. \quad (2.28)$$

Se recomienda seleccionar $\lambda_u \gg \lambda_y$ para limitar las interacciones entre ambos lazos de control.

- DVPC (*Direct Synthesis Valve Position Control*). Se utiliza la estructura de la Figura 2.6b, con el fin de poder establecer una comparativa con la *síntesis directa* propuesta por Henson y otros [58] en su estrategia *habituating control* para la Figura 2.6b (véase Subsección 2.4.2). En DVPC, los controladores se calculan según

$$c_1^* = \frac{g_y(p_2^* - p_2 g_u)}{(1 - g_y)p_1 p_2^*}, \quad (2.29)$$

$$c_2^* = \frac{p_1 g_u}{p_2^* - p_2 g_u}, \quad (2.30)$$

$$f^* = \frac{p_2}{p_2^*} g_u, \quad (2.31)$$

donde p_2^* es la aproximación de fase mínima de p_2 , y g_y y g_u representan los modelos dinámicos deseados en lazo cerrado.

Se debe destacar que la estrategia VPC ha tenido una gran aceptación en la industria de proceso. Prueba de ello es que suele ser descrita en la literatura básica referente al control de procesos [132, 99, 96].

2.4.2 Control habituating

Henson y otros [58] presentan una estrategia de diseño para sistemas MISO conocida como *Habituating Control*. Nace del estudio de sistemas biológicos [50, 81], poniendo especial énfasis en el sistema de control de la presión sanguínea conocido como *baroreceptor reflex* [85]. Henson y otros [58] estudian como coordinar las acciones de control disponibles para conseguir una mejora en el *performance* con el menor coste de manipulación (gasto de acción de control). En la búsqueda de este objetivo establecen dos técnicas de diseño. Una se basa en la síntesis directa de controladores y la otra utiliza los fundamentos del control MPC (*Model Predictive Control*). Ambas están pensadas para sistemas con dinámicas claramente diferenciadas: una planta “lenta y barata”, que se denomina como primaria (p_2); junto con una planta “rápida y cara”, que se denomina como secundaria (p_1). Además de reducir el coste de manipulación, se proponen otros objetivos secundarios como la síntesis directa de controladores que reduzca la necesidad de conocimientos *ad-hoc* necesarios si se diseña empleando VPC; o tratar de reducir los efectos negativos producidos por la saturación de las acciones de control.

SÍNTESIS DIRECTA DE CONTROLADORES.

Se definen las dinámicas de lazo cerrado deseadas para funciones de transferencia salida/entrada en una cierta estructura de control, y a continuación se despejan los controladores que dan solución a las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema.

Por ejemplo, para un sistema MISO 1×2 se eligen tres objetivos de control: la dinámica deseada para la salida $g_y = y/r$, la dinámica deseada para la acción de control secundaria $g_u = u_1/r_{u_1}$ y cómo desacoplar ambas intervenciones mediante $y/r_{u_1} = 0$.

Si se emplea la estructura paralelo de la [Figura 2.9](#), las variables del sistema se interrelacionan por las ecuaciones

$$y = \frac{c_1 p_1 + c_2 p_2}{1 + c_1 p_1 + c_2 p_2} r + \frac{p_d}{1 + c_1 p_1 + c_2 p_2} d + \frac{f_1 p_1 + f_2 p_2}{1 + c_1 p_1 + c_2 p_2} r_{u_1}, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= (y - r)c_1 + r_{u_1} f_1, \\ u_2 &= (y - r)c_2 + r_{u_1} f_2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Entonces, han de satisfacerse tres objetivos mediante la sintonía de cuatro elementos de control (f_1, f_2, c_1, c_2). A partir de las ecuaciones anteriores y para plantas de fase mínima pueden calcularse como

$$f_1 = g_u; \quad f_2 = \frac{-p_1}{p_2} g_u; \quad c_2 = \frac{g_y - (1 - g_y)p_1 c_1}{(1 - g_y)p_2}. \quad (2.34)$$

Nótese como f_1 y f_2 quedan unívocamente definidos, mientras que c_1 es expresado en función de c_2 ó viceversa, debido a la existencia de más incógnitas que ecuaciones.

Si se emplea la estructura serie de la [Figura 2.6b](#), con $f_2^* = 0$ y $f^* = f_1^*$, las ecuaciones que interrelacionan las variables del sistema son

$$y = \frac{c_1^* p_1 - c_1^* c_2^* p_2}{1 + c_1^* p_1 - c_1^* c_2^* p_2} r + \frac{p_d}{1 + c_1^* p_1 - c_1^* c_2^* p_2} d + \frac{c_2^* p_2 + f^*(p_1 - c_2^* p_2)}{1 + c_1^* p_1 - c_1^* c_2^* p_2} r_{u_1}, \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= (y - r)c_1^* + r_{u_1} f^*, \\ u_2 &= (r_{u_1} - u_1)c_2^*; \end{aligned} \quad (2.36)$$

en las que aparecen tres grados de libertad a diseñar (c_1^*, c_2^* y f^*) para satisfacer los mismos tres objetivos de control anteriores. Despejando se calculan

$$f^* = g_u; \quad c_2^* = \frac{-p_1 g_u}{p_2(1 - g_u)}; \quad c_1^* = \frac{g_y(1 - g_u)}{p_1(1 - g_y)}. \quad (2.37)$$

Nótese cómo en este caso, f^* es el encargado de lograr la dinámica g_u , c_1^* se ocupa de la dinámica g_y , y c_2^* asume las tareas de desacoplo $y/r_{u_1} = 0$.

Si la planta secundaria p_2 (lenta) presentara comportamientos de fase no mínima (retardos o ceros en el semiplano derecho), los elementos de control en (2.34) para una estructura paralelo no serían realizables. En estos casos, se recomienda partir de una estructura serie cuyos elementos de control se calcularían de la siguiente forma. Primero, con las relaciones (2.35)-(2.36) y los objetivos $y/r = g_y$ e $y/r_{u_1} = 0$, se obtiene

$$c_2^* = \frac{-p_1 f^*}{p_2(1 - f^*)}, \quad c_1^* = \frac{g_y}{(1 - g_y)(p_1 - p_2 c_2^*)}. \quad (2.38)$$

Nótese que c_2^* no es a priori realizable, ya que en su denominador aparece p_2 que es de fase no mínima. Para solventarlo se empleará f^* , que además debe encargarse del tercer objetivo de control $u_1/r_{u_1} = g_u$. Esto es asumible en la práctica, puesto que la consigna r_{u_1} rara vez se modifica. Entonces, se propone el empleo de $f^* = p_2 g_u / p_2^*$, donde p_2^* es la aproximación de fase mínima de la planta p_2 . Los elementos de control realizables finales son

$$f^* = \frac{p_2}{p_2^*} g_u, \quad c_2^* = \frac{-p_1 g_u}{(p_2^* - p_2 g_u)}, \quad c_1^* = \frac{g_y (p_2^* - p_2 g_u)}{(1 - g_y) p_1 p_2^*}. \quad (2.39)$$

Una vez calculados, es posible obtener un equivalente en la estructura paralelo empleando la transformación

$$f_1 = \frac{p_2}{p_2^*} g_u, \quad f_2 = \frac{-p_1}{p_2^*} g_u, \quad c_1 = c_1^*, \quad c_2 = \frac{g_y g_u}{(1 - g_y) p_2^*}. \quad (2.40)$$

MPC (*model predictive control*).

Para un sistema MISO 1×2 , Henson y otros [58] calculan la ley de control $U(k)$ que minimiza la función de coste

$$\begin{aligned} \min_{U(k)} \Phi = & \sum_{j=1}^P \left\{ \gamma_j [r(k+j) - \hat{y}(k+j|k)]^2 \right. \\ & + \beta_{1j} [r_{u_1}(k+j-1) - u_1(k+j-1|k)]^2 \\ & \left. + \beta_{2j} [r(k+j-1|k) - u_2(k+j-2|k)]^2 \right\}, \quad (2.41) \end{aligned}$$

donde P es el horizonte de predicción, $\hat{y}(k+j|k)$ es el valor estimado para $y(k+1)$ basado en la información hasta el instante k , $u_i(k+j|k)$ es el valor calculado para $u_i(k+j)$ basado en la información hasta el instante k , y $\{\gamma_j, \beta_{1j}, \beta_{2j}\}$ son los coeficientes de ponderación. El vector $U(k)$ es definido según

$$U(k) = [u_1(k|k), \dots, u_1(k+M-1|k), u_2(k|k), \dots, u_2(k+M-1|k)]^T, \quad (2.42)$$

donde M indica el horizonte de control.

Para acotar los errores de modelado, la salida estimada es calculada según

$$\hat{y}(k+j|k) = \tilde{y}(k+j|k) + (y(k) - \tilde{y}(k|k)), \quad (2.43)$$

donde $\tilde{y}(k+j|k)$ es la salida del modelo en el instante $k+j$ obtenida con la información hasta el instante k , e $y(k)$ es la salida del sistema medida en el instante k . Puesto que (2.41) sólo contiene las primeras M muestras de control, las salidas futuras del modelo se calculan tomando

$$u_i(k+j|k) = u_i(k+M-1|k) \quad \forall j \geq M, \quad i \in [1,2] \quad (2.44)$$

La primera muestra calculada para cada entrada son las inyectadas en el sistema $u_1(k) = u_1(k|k)$, $u_2(k) = u_2(k|k)$. Un nuevo problema de optimización-predicción se resuelve para el siguiente intervalo de muestreo $k+1$.

Alvarez-Ramirez y otros [5], también emplean la denominación *Habituating Control* para establecer una nueva estrategia de diseño focalizada en garantizar la estabilidad del sistema MISO cuando las plantas contienen comportamientos de fase no mínima. Para un sistema TISO (*Two Inputs Single Output*), las plantas responden a

$$p_{i=1,2} = \frac{N_i}{D_i} e^{-h_i s}, \quad (2.45)$$

donde N_i y D_i son los polinomios en la variable s del numerador y del denominador, respectivamente. Los retardos cumplen $h_2 \geq h_1$.

Dentro de una estructura paralelo con maestro-esclavos (Figura 2.7, $i = 1,2$) se propone que los controladores ó filtros de rama c_1 y c_2 sean diseñados según

$$c_1 = \alpha \frac{N_2^+ D_1}{N_1^- Q} e^{-h_{12} s}, \quad c_2 = (1 - \alpha) \frac{N_1^+ D_2}{N_2^- Q}, \quad (2.46)$$

donde $N_i = N_i^+ N_i^-$. El polinomio del numerador N_i^+ contiene las dinámicas RHP (*Right Half Plane*), incluidas las pertenecientes al eje imaginario. El polinomio N_i^- contiene las dinámicas LHP (*Left Half Plane*). Q es un polinomio en s cuyo orden deberá ser seleccionado para que los controladores sean realizables, y además su coeficiente del término de menor orden debe cumplir $Q(0) = 1$. La constante h_{12} representa la diferencia entre los retardos h_2 y h_1 ($h_{12} = h_2 - h_1$). La variable α corresponde con el coeficiente de reparto de la acción de control entre las dos ramas, denominado "divisor".

El controlador maestro c_m se diseña para la planta

$$H = \frac{N_1^+ N_2^+}{Q}, \quad (2.47)$$

que contiene las dinámicas de fase no mínima de las plantas p_1 y p_2 . Se recomienda el empleo de un controlador integral puro como controlador maestro

$$c_m = \frac{k_i}{s}. \quad (2.48)$$

Por último, se elige el divisor α . Téngase en cuenta que este parámetro determina la influencia de cada una de las plantas en la regulación del sistema: si $\alpha = 0 \rightarrow u_1 = 0$ y si $\alpha = 1 \rightarrow u_2 = 0$. La selección de α puede realizarse minimizando la siguiente función de coste

$$\min_{(u_1, u_2)} \frac{1}{2} [\alpha (c_1 u_1)^2 + (1 - \alpha) (c_2 u_2)^2]. \quad (2.49)$$

McLain y otros [104] presentan la extensión del *Habituating Control* a sistemas MISO no lineales. En trabajos anteriores [28, 103], una acción de control se empleaba para linearizar el sistema y la otra para estabilizarlo, mientras que McLain y otros [104] utilizan ambas entradas para el control. Al igual que en Henson y otros [58] se emplea una estrategia MPC, definiendo una función de coste que penaliza la distorsión del punto de operación. La diferencia principal con respecto a los sistemas lineales [58] es que en aquellos se buscaba devolver las acciones de control que no contribuyen al estacionario a su punto de operación original tras el transitorio. Sin embargo, en los sistemas no lineales, el objetivo es devolver el conjunto de variables del sistema a las proximidades del punto de operación.

Las estrategias de control que se incluyen bajo el epígrafe de *Habituating Control* se han utilizado con éxito en el control de reactores / separadores [105], reactores CSTR [144], reactores aerobios empleados en el tratamiento de aguas residuales [143] y en el control de glucosa en pacientes [141], entre otras aplicaciones.

2.4.3 Control de rango medio (*mid-ranging*)

La denominación control de rango medio hace referencia al control de sistemas MISO con una actuación rápida y otra lenta, de forma que

ambas intervienen en la regulación de la salida, y la actuación rápida fluctúa alrededor de un punto de operación (*mid-range*). Para ello utilizan algún tipo de arquitectura serie (véase [Subsección 2.3.1](#)), y suelen tomar como precursora la metodología de diseño VPC (véase [Subsección 2.4.1](#)). Las aplicaciones resueltas bajo esta estrategia son comunes en la industria del proceso.

Karlsson y otros [83] utilizan la estrategia *mid-ranging* para el control de la humedad en la sección de secado de una máquina de papel. Se emplea la estructura serie de la [Figura 2.6a](#). El controlador *feedforward* de desacoplo entre lazos se calcula según

$$c_{ff}^* = \frac{-p_2}{p_1}. \quad (2.50)$$

Los controladores de realimentación se diseñan bajo el enfoque IMC (*Internal Model Control*),

$$c_i^* = \frac{q_i}{1 - q_i p_i} = \frac{T_i p_i^+}{1 - T_i p_i^+ p_i}, \quad i = 1, 2; \quad (2.51)$$

donde q_i es el parámetro de control en la arquitectura IMC. Éste se calcula con p_i^+ , la inversa realizable del modelo de la planta p_i , y con T_i , el *performance* deseado en lazo cerrado. Éste último debe elegirse con un número de polos suficiente en consonancia con los que posea p_i para que resulte un c_i^* realizable. La velocidad de respuesta elegida para el lazo lento y para el rápido se recomienda que difieran de cinco a diez veces.

En un trabajo posterior, Karlsson y otros [84] completan su estrategia de diseño anterior añadiendo a la estructura serie de la [Figura 2.6b](#) un controlador *feedforward* encargado de mejorar el rechazo de perturbaciones medibles. Este controlador actúa sobre la acción de control u_1 , que en este caso pasará a estar determinada por

$$u_1 = c_1^*(r - y) + c_{ff}^* u_2 + c_{ff_d}^* d. \quad (2.52)$$

Definido el modelo de la perturbación como p_d , el controlador *feedforward* se calcula según

$$c_{ff_d}^* = \frac{-p_d}{p_1}, \quad (2.53)$$

o su aproximación realizable.

Gayadeen y Heath [43] parten de una arquitectura IMC multivariable, de fácil correspondencia con una estructura MISO paralelo, sobre la que proponen su estrategia *mid-ranging*. Las especificaciones de control en lazo cerrado se fijan con las funciones de sensibilidad complementaria deseadas: T_f para el *performance y/r* con ambas actuaciones (plantas), y T_s para el *performance y/r* sólo con la actuación (planta) lenta. Si las plantas $p_{i=1,2}$ contienen elementos de fase no mínima (ceros RHP o retardos), éstos deben incluirse en T_s y en T_f , de forma que T_s/p_1 , T_s/p_2 y T_f/p_1 sean realizables y estables (suponiendo que p_2 es más lenta que p_1). Considerando que los modelos de las plantas son perfectos, se establece la siguiente metodología de diseño:

1. Para lograr T_s , se diseña el controlador de realimentación $q_2 = T_s/p_2$ de la arquitectura IMC.
2. Para lograr T_f , se completa el diseño de la arquitectura IMC con el controlador de realimentación $q_1 = (T_f - T_s)/p_1$.
3. Para el desacoplo entre la referencia de la variable de actuación lenta y la salida se diseñan los prefiltros con alguno de los siguientes criterios:
 - a) $f_1 = 1$ y $f_2 = -p_1/p_2$.
 - b) $f_1 = p_2/p_2(0)$ y $f_2 = -p_1/p_2(0)$.
 - c) $f_1 = hp_2^-$ y $f_2 = -hp_1/p_2^+$; donde $p_2 = p_2^+ p_2^-$, p_2^+ contiene los elementos de p_2 de fase mínima y p_2^- los de fase no mínima (ceros y retardos). h es obtenido para que se cumpla la relación $hp_2^-(0) = 1$.

Diseñados los grados de libertad de una arquitectura IMC paralelo, se deducen sus equivalentes en una estructura MISO serie como la de la [Figura 2.6b](#):

$$c_1^* = \frac{q_1}{1 - p_1 q_1 - p_2 q_2}, \quad c_2^* = \frac{-q_2}{q_1}, \quad f_1^* = f_1, \quad f_2^* = f_2. \quad (2.54)$$

Heath y Gayadeen [57] determinan las propiedades que debe cumplir un diseño de control MISO para garantizar su estabilidad y *performance* en términos robustos. Estas condiciones están determinadas a partir de

modelos con incertidumbre multiplicativa. Se considera que la respuesta del sistema estará determinada por

$$y = \sum_{i=1}^n p_i(1 + W_i\Delta_i)u_i, \quad (2.55)$$

donde p_i se corresponde con los modelos nominales de cada una de las plantas, W_i con los pesos dependientes de la frecuencia, y Δ_i con la incertidumbre de cada planta p_i .

Definido el modelo de comportamiento se establecen las condiciones de estabilidad y *performance* robustos dado un único grado de libertad en el diseño, C , con $n \times 1$ controladores c_i , que gobierna un sistema de plantas $1 \times n$ con incertidumbre

- Estabilidad robusta

$$\left(\sum_{i=1}^n |S(j\omega)p_i(j\omega)c_i(j\omega)W_i(j\omega)| \right)^2 \leq 1, \quad (2.56)$$

donde $S(j\omega)$ representa la función sensibilidad nominal

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n p_i(j\omega)c_i(j\omega)}. \quad (2.57)$$

A partir de (2.56) y (2.57) puede obtenerse la siguiente condición de estabilidad robusta

$$\sum_{i=1}^n |p_i(j\omega)c_i(j\omega)W_i(j\omega)| \leq \left| 1 + \sum_{i=1}^n p_i(j\omega)c_i(j\omega) \right|. \quad (2.58)$$

- *Performance* robusto

$$\left(\sum_{i=1}^n |S(j\omega)p_i(j\omega)c_i(j\omega)W_i(j\omega)| + |S(j\omega)W_p(j\omega)| \right)^2 \leq 1, \quad (2.59)$$

donde W_p se corresponde con una incertidumbre multiplicativa ficticia situada tras las plantas p_i , dando lugar a la siguiente respuesta del sistema

$$y = \sum_{i=1}^n p_i(1 + W_i\Delta_i)(1 + W_p\Delta_p)u_i. \quad (2.60)$$

A partir de (2.59) y (2.57) puede obtenerse la siguiente condición de *performance* robusto

$$\sum_{i=1}^n |p_i(j\omega)c_i(j\omega)W_i(j\omega)| + |W_p(j\omega)| \leq \left| 1 + \sum_{i=1}^n p_i(j\omega)c_i(j\omega) \right|. \quad (2.61)$$

Allison y Isaksson [3] presentan su estrategia de diseño de controladores *mid-ranging* mediante MPC (similar a la propuesta por Henson y otros [58]). En este caso, la estrategia de diseño se basa en el GPC (*Generalised Model Predictive Control*) propuesto por Clarke y otros [21]. Las acciones de control son actualizadas empleando el algoritmo *one-step optimal saturation correction algorithm* de Segall y otros [129]. La función de coste a minimizar es:

$$J = E \left\{ \sum_{j=1}^{ny} (y_{t+j} - r_{t+j}) + \sum_{j=1}^{nu_1} \rho_1 (\Delta u_{1,t+j-1})^2 + \sum_{j=1}^{nu_2} \rho_2 (\nabla u_{2,t+j})^2 \right\}, \quad (2.62)$$

donde ny y nu_i representan los horizontes de predicción que serán fijados a $ny = nu_1 = nu_2 = 1$; Δu_1 representa el incremento de la acción de control u_1 con respecto de su punto medio de trabajo \bar{u}_1 . La predicción de y_t se realiza mediante un modelo CARIMA (*Auto Regresive Integrated Moving Average*) con estructura

$$A(z^{-1})y_t = B_1(z^{-1})u_{1,t-k_1} + B_2(z^{-1})u_{2,t-k_2} + C(z^{-1})v_t/\nabla, \quad (2.63)$$

donde A , B_i , C son polinomios en potencias negativas de z , y k_i representa el retardo de las entradas u_i ; v_t es un ruido blanco con varianza σ^2 .

Partiendo de diseños de control realizados de acuerdo a estrategias *mid-ranging* como las anteriores, Haugwitz y otros [56] analizan la corrección *anti-windup* de los controladores dentro de la estructura serie de la Figura 2.5. Se demuestra cómo el uso de los esquemas *anti-windup* estándar produce una degradación innecesaria del *performance* durante la saturación. La justificación reside en que la acción de control secundaria, u_2 , es calculada a partir de la acción de control primaria, u_1 , que en caso de saturar estará limitada a $u_1 = u_{1_{\max}}$ por la estructura *anti-windup*

de c_1^* . Entonces, la acotación de u_1 reduce innecesariamente la potencia de u_2 debido a su disposición en cascada. Se propone un diseño según la estructura *anti-windup* estándar para recuperar el *performance*. Alternativamente se presenta un nuevo esquema *anti-windup* que utiliza una constante k_s para incrementar la proporción de acción de control u_1 que llega a c_2^* cuando la primera se encuentra saturada. La selección del parámetro k_s es determinante en el desempeño del sistema final, puesto que incrementa el ancho de banda del controlador c_2^* . Se propone utilizar aquel valor que minimiza la función de coste

$$J = \int_0^{t_f} [(r - y)^2 + \rho u_2^2] dt, \quad (2.64)$$

donde ρ es un parámetro que penaliza la cantidad de acción de control u_2 . Las mejoras introducidas por Haugwitz y otros [56] se ilustran mediante el control de un sistema de refrigeración.

Gayadeen y Heath [43] también completan la estrategia de diseño *mid-ranging* descrita en párrafos anteriores con una solución *anti-windup* basada en la modificación de la estructura IMC propuesta por Zheng y otros [165].

La estrategia de control *mid-ranging* ha sido aplicada con éxito en diversos procesos reales, destacando el control de bioreactores [145], la regulación de pH [119], y en la fabricación de papel [119], entre otros. Como en el caso del VPC, en la literatura básica de control de procesos [6], se incluye una breve descripción del concepto *mid-ranging*.

2.4.4 Control cooperativo

Wang y otros [148] recurren a un sistema MISO 1×2 como una extensión del SISO en el que la saturación de la acción de control impide alcanzar el *performance* deseado (*output unreachability under input constraint*). Es decir, el empleo de la acción de control secundaria u_2 (planta adicional p_2) está supeditado a que existan saturaciones en la acción de control primaria u_1 (planta principal p_1). En realidad, sólo p_1 se encuentra dentro de un lazo clásico de control realimentado⁶ (c_1), mientras que la intervención de p_2 se gestiona por un algoritmo de control específico para u_2 de acuerdo a los siguientes criterios:

⁶ Nótese como esta estrategia de diseño no es estrictamente colaborativa. Se ha decidido su inclusión en la presente sección por presentar denominación común a algunas estrategias colaborativas expuestas posteriormente.

- El cambio de u_2 sólo debe ser activado cuando el rechazo de la perturbación o el nuevo punto de operación (consigna) sean imposibles de satisfacer con sólo la entrada u_1 (planta p_1). En caso contrario, u_2 permanecerá constante.
- Dichos cambios en u_2 serán incrementos/decrementos de amplitud mínima y el número de conmutaciones ha de ser mínimo.

Para poder determinar si se precisa o no la cooperación, se estudian los siguientes aspectos:

- Alcanzabilidad de la consigna en régimen permanente. Considerando constante la acción de control secundaria $u_2 = \bar{u}_2$, la respuesta del sistema en régimen permanente estará determinada por

$$y(\infty) = p_1(0)u_1(\infty) + p_2(0)\bar{u}_2 + \omega_d(\infty), \quad (2.65)$$

donde ω_d representa la distorsión en la salida y introducida por la perturbación d , es decir, $\omega_d = p_d d$. Nótese que las plantas están expresadas en el dominio de la frecuencia (funciones de transferencia $p_i(s)$), mientras que las variables del sistema lo están en el dominio del tiempo.

Considerando que la acción de control primaria se encuentra limitada en el intervalo $u_1 \in [u_{1_{\min}}, u_{1_{\max}}]$, la capacidad estática de la planta $p_1(0)$ estará acotada tal que $y_1 \in [y_{1_{\min}}, y_{1_{\max}}]$, donde

$$\begin{cases} y_{1_{\min}} = \min[p_1(0)u_{1_{\min}}, p_1(0)u_{1_{\max}}] \\ y_{1_{\max}} = \max[p_1(0)u_{1_{\min}}, p_1(0)u_{1_{\max}}] \end{cases} \quad (2.66)$$

Si se desea error estacionario nulo, $y(\infty) = r(\infty)$, la condición de alcanzabilidad de cierta consigna $\bar{r} = r(\infty)$ sin necesidad de cambio en $u_2 = \bar{u}_2$, está determinada por

$$y_{1_{\min}} + p_2(0)\bar{u}_2 + \omega_d(\infty) \leq \bar{r} \leq y_{1_{\max}} + p_2(0)\bar{u}_2 + \omega_d(\infty), \quad (2.67)$$

que precisa conocer el valor de la perturbación $d(\infty)$, para calcular $\omega_d(\infty) = p_d(0)d(\infty)$.

- Predicción de la perturbación. Para perturbaciones no medibles, se propone una estimación de las mismas $\hat{d}(t)$. A partir de los

modelos de las plantas $p_1(s)$ y $p_2(s)$, y las señales de actuación $u_1(t), u_2(t)$, se podría estimar la componente regulable de la salida, $\hat{y}_u(t)$, que restada de la salida medible $y(t)$, serviría para reconstruir $\hat{\omega}(t)$, lo que en principio sería suficiente para evaluar (2.67). No obstante, considerando que lo que se precisa es el estacionario y puesto que $\hat{d}(t)$ alcanzará éste antes que $\hat{\omega}(t)$, se considera estimar $\hat{d}(t)$ a partir de $\hat{\omega}(t)$ y una aproximación realizable del modelo de perturbación $p_d^{-1}(s)$. Entonces, transcurrido un tiempo $t = T$, y a falta de información sobre el futuro de la perturbación, se tomará $\hat{d}(\infty) = \hat{d}(T)$, que se calcula con la información de $\{u_1(t), u_2(t), y(t), t \in [0, T]\}$ y el método indicado.

Con la predicción de la perturbación $\hat{d}(t)$, la condición (2.67) de alcanzabilidad de la consigna para determinar si es necesario modificar la acción de control secundaria $u_2(t)$, se modifica a

$$\hat{d}(T) \geq \frac{1}{p_d(0)} [u_{1_{\max}} + p_2(0)\bar{u}_2 - \bar{r}] \quad (2.68a)$$

$$\hat{d}(T) \leq \frac{1}{p_d(0)} [u_{1_{\min}} + p_2(0)\bar{u}_2 - \bar{r}] \quad (2.68b)$$

No obstante, se prevén transitorios rápidos en $\hat{d}(T)$ que no aparecerían en $d(\infty)$. Y éstos resultan en un incumplimiento indeseado de (2.68). Entonces, se establece un periodo de observación T_o que vigilaría un incumplimiento reiterado de (2.68), esto es

$$\hat{d}(T - \tau) > \frac{1}{p_d(0)} [u_{1_{\max}} + p_2(0)\bar{u}_2 - \bar{r}], \quad \tau \in [0, T_o] \quad (2.69a)$$

$$\hat{d}(T - \tau) < \frac{1}{p_d(0)} [u_{1_{\min}} + p_2(0)\bar{u}_2 - \bar{r}], \quad \tau \in [0, T_o] \quad (2.69b)$$

donde $T_o \in [0.2T_p, 1.5T_p]$ (recomendado $0.5T_p$). T_p representa la constante de tiempo equivalente del proceso.

Determinada la condición de activación del algoritmo de cambio de u_2 , el siguiente paso es determinar la cantidad que debe modificarse, Δu_2 , para lograr la consigna \bar{r} . Substituyendo \bar{u}_2 por $u_2(0) + \Delta u_2$ en (2.68), se despejarían los incrementos como

$$\Delta u_2 = \frac{1}{p_2(0)} [\bar{r} + p_d(0)\hat{d}(T) - u_{1_{\max}}] - u_2(0) \quad (2.70a)$$

$$\Delta u_2 = \frac{1}{p_2(0)} [\bar{r} + p_d(0)\hat{d}(T) - u_{1_{\min}}] - u_2(0), \quad (2.70b)$$

respectivamente para el cumplimiento de (2.69a) y de (2.69b). En [148] se comentan diversas razones por las que dicho Δu_2 resultaría demasiado conservador, por lo que propone incorporar un factor corrector $\beta > 1$, tal que finalmente los incrementos del algoritmo de cambio son

$$\Delta u_2 = \frac{1}{p_2(0)} \left[\beta(r + p_d(0)\hat{d}(T)) - u_{1_{\max}} \right] - u_2(0) \quad (2.71a)$$

$$\Delta u_2 = \frac{1}{p_2(0)} \left[\beta \left(r + p_d(0)\hat{d}(T) \right) - u_{1_{\min}} \right] - u_2(0), \quad (2.71b)$$

recomendándose $\beta \in [1.05, 1.5]$, y por defecto, $\beta = 1.2$.

Giovanini [46, 47], trabaja en la misma línea que Wang y otros [148], proponiendo el empleo de lo que denomina “control de estructura flexible” para solucionar la no alcanzabilidad de la salida deseada debido a restricciones en la entrada. Se consideran dos posibles plantas, la primaria p_1 y la secundaria p_2 , y se presentan dos alternativas:

- Protección preventiva o *feedforward*, que emplea términos de prealimentación hasta el actuador de p_2 desde la referencia r , y desde las perturbaciones d si éstas fueran medibles y su modelo p_d conocido. La acción de control prealimentada secundaria se calcula

$$u_2 = \eta r p_1^{-1}(0)c_2 + \eta d p_1^{-1}(0)p_d(0)c_2, \quad \eta \geq 0, \quad (2.72)$$

donde η es un factor de reparto estacionario del control entre la realimentación sobre p_1 y la prealimentación sobre p_2 . El controlador en la cadena de prealimentación c_2 satisface la dinámica deseada para y_2 . Por su parte, el controlador c_1 forma parte del lazo de realimentación principal que es único.

- Protección reactiva o *feedback*, que transfiere el control realimentado de la planta p_1 a la planta p_2 , y viceversa, en función de la saturación de u_1 . La función no lineal de selección es

$$f(u_1) = \begin{cases} u_1(t) - u_{1_{\max}}, & u_1(t) > u_{1_{\max}} \\ 0 & u_1(t) \leq u_{1_{\max}} \end{cases} \quad (2.73)$$

que decide si el control realimentado se cierra solamente a través de c_1 y p_1 , o si lo hace a través de $c_1 c_2$ y p_2 . En esencia, este método se trata de un control de rango partido como el de la Figura 2.3, no existiendo interacción entre ambos lazos de control.

Como mejora se propone la cooperación de los dos lazos, utilizándose la función de selección

$$f(u_1) = \begin{cases} u_1(t) - (1 - \eta)u_{1\max}, & u_1(t) > u_{1\max} \\ \eta u_1(t), & u_{1\min} \leq u_1(t) \leq u_{1\max} \\ 0, & u_1(t) \leq u_{1\min} \end{cases} \quad (2.74)$$

que para $\eta = 0$ anularía la colaboración reduciéndose a (2.73). Sin embargo, cuando $\eta > 0$ la intervención de u_2 previene la saturación de u_1 . No obstante, nótese que durante esta colaboración las plantas efectivas serían p_1 y ηp_2 , lo que puede contradecir el criterio de ordenación deseado rápido-lento. Además, cuando se pasa de la colaboración al dominio absoluto de la planta secundaria, se produciría un salto de ηp_2 a p_2 . Para paliar estos defectos, se propone utilizar

$$f(u_1) = \begin{cases} u_1(t) - \bar{u}_{1\max} + \eta(u_{1\max} - \kappa), & u_1(t) > u_{1\max} \\ \eta(u_1(t) - \kappa), & \kappa \leq u_1(t) \leq u_{1\max} \\ 0, & u_1(t) < \kappa \end{cases} \quad (2.75)$$

que incluye un parámetro adicional κ que acomoda la amplitud del rango común de trabajo, mientras que η gestiona la intensidad de dicha colaboración.

Con estas premisas, los trabajos incluyen una explicación exhaustiva del diseño de los controladores c_1 y c_2 de acuerdo a la metodología IMC y a la metodología clásica de cancelación. Por último, se establecen los rangos recomendados para los parámetros κ y η .

2.4.5 Método PQ

Schroeck y otros [127] proponen la técnica de diseño PQ para sistemas DISO (*Dual Input Single Output*). Se apoya en la estructura paralelo de la Figura 2.7 con controlador maestro c_m y esclavos $c_{i=1,2}$. El método de diseño propuesto reduce el problema DISO a dos problemas SISO, que se abordan desde un enfoque frecuencial. El primer diseño SISO determina el reparto frecuencial de las tareas de control entre p_1 y p_2 . Para ello se emplea un sistema realimentado auxiliar, que da nombre al método. Sus funciones de lazo abierto, planta y controlador son, respectivamente,

$$PQ = \frac{c_2 p_2}{c_1 p_1}, \quad P = \frac{p_2}{p_1}, \quad Q = \frac{c_2}{c_1}, \quad (2.76)$$

asumiéndose P realizable. Entonces, su ecuación característica está determinada por

$$1 + \frac{c_1 p_1}{c_2 p_2} = 1 + PQ \quad (2.77)$$

Las consideraciones fundamentales respecto al diseño de Q , que se aconseja realizar mediante técnicas frecuenciales, son:

- Ceros RHP. Las raíces de la ecuación característica (2.77) serán los ceros de la planta equivalente $p_e = c_1 p_1 + c_2 p_2$ en el segundo problema SISO a resolver con el controlador maestro c_m . Por tanto, el diseño de Q debe garantizar la estabilidad de $1 + PQ$, para evitar ceros en el semiplano derecho (RHP) que limiten el ancho de banda del sistema final en lazo cerrado.
- Contribución relativa en la salida (magnitud relativa). Los sistemas MISO se conciben normalmente para que cada planta contribuya a la salida en un rango de frecuencias diferente. Por ejemplo, se considerará que la magnitud de la salida de p_1 en altas frecuencias predomine sobre la de p_2 , y a la inversa en bajas frecuencias. Por tanto, el diseño de Q debe realizarse tal que $|PQ(j\omega)| \gg 1$ en bajas frecuencias, y $|PQ(j\omega)| \ll 1$ en altas frecuencias.
- Interferencia destructiva (fase relativa). La premisa anterior conlleva a que en ciertas frecuencias las magnitudes de ambas salidas serán similares. Serían iguales en la frecuencia de cruce de PQ , esto es $|PQ(j\omega)| = 1$. En estas frecuencias, el desfase entre las salidas de p_1 y p_2 debe ser inferior a 180° , ya que si se ponen en contrafase, la magnitud total caería drásticamente, comprometiendo no sólo el *performance* sino también la estabilidad. Entonces, se diseña Q para garantizar un margen de fase mayor de 60° . Simultáneamente esto garantiza que no aparecerán ceros RHP para el segundo diseño SISO.

Una vez diseñado Q , se descompone en fórmulas c_1 y c_2 realizables. Para garantizar órdenes bajos, se recomienda el elegir un c_1 lo más sencillo posible. Si Q es realizable, $c_1 = 1$ es un opción razonable. Cualquier factor común en c_1 y c_2 debe extraerse al controlador maestro c_m .

En una segunda etapa se efectúa el segundo diseño SISO. En este caso se diseña el controlador maestro c_m para la planta $p_e = c_1 p_1 +$

$c_2 p_2$, de forma que el conjunto cumpla con las especificaciones de diseño. Se recomiendan técnicas frecuenciales para satisfacer las necesidades finales de ancho de banda y estabilidad.

Pese a ser descrita para un sistema DISO, la estrategia puede ser extendida a un sistema MISO de n entradas de forma sencilla. Para ello deberán realizarse $(n - 1)$ diseños DISO, que serán realizados agrupando las plantas o conjuntos de plantas ya diseñadas de dos a dos. Diseñados los controladores maestro-esclavos en una etapa, se obtiene un equivalente matemático del conjunto que actúa como una única planta en el siguiente paso de diseño. Para simplificar el problema se recomienda comenzar los diseños partiendo de las plantas que trabajan en alta frecuencia y finalizarlo en las de baja frecuencia.

Esta estrategia de diseño ha sido empleada en el control de sistemas de almacenamiento de datos [127, 163]. También pueden encontrarse diseños para sistemas de tracción vehículos [14] y sistemas de inyección [49].

2.4.6 Reparto de cargas (load-sharing)

Eitelberg es uno de los autores que más interés ha mostrado en el estudio de los sistemas MISO. Prueba de ello son sus numerosas publicaciones [36, 32, 34, 35], entre las que se incluye un libro dedicado en exclusiva al control MISO y sus aplicaciones. En sus trabajos presenta dos estructuras de control paralelo ⁷ que denomina:

- *Reparto de carga independiente.* Se corresponde con una estructura paralelo sin controlador maestro, $c_m = 1$, y n medidas de la variable controlada y ; siendo aplicable en plantas distribuidas espacialmente. La inclusión de estas medidas adicionales implica el empleo de n sensores, y por tanto, n fuentes de ruido $v_{i=1,\dots,n}$, dentro de cada uno de los n lazos de control. Estos se cierran utilizando n referencias $r_{i=1,\dots,n}$, que se incorporan a sus respectivos lazos realimentados a través de n prefiltros $f_{i=1,\dots,n}$. En este caso los controladores $c_{i=1,\dots,n}$, en vez de en la cadena directa, se disponen en la cadena de realimentación, dando lugar a acciones de control

$$u_i = r_i f_i - c_i (y + v_i). \quad (2.78)$$

⁷ Consisten en modificaciones de la estructura de control mostrada en la [Figura 2.7](#)

La respuesta de la variable controlada responde a

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n p_i f_i r_i}{1 + l_t} + \frac{p_d}{1 + l_t} d - \frac{\sum_{i=1}^n l_i v_i}{1 + l_t}, \quad (2.79)$$

donde las funciones de lazo abierto se definen como

$$l_t = \sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n c_i p_i. \quad (2.80)$$

- *Reparto de carga coordinado.* Se corresponde con una estructura paralelo con controlador maestro, c_m , y esclavos o de rama, c_i , en cadena directa. Existe un único sensor, es decir, una única medición de la salida y , y una única fuente de ruido v . Las únicas diferencias con respecto de la estructura de la [Figura 2.8](#) son la existencia de un prefiltro maestro f_m empleado para incorporar especificaciones de control para cambios en la referencia r , y que las referencias r_{u_i} son denominadas como *bias* $b_{i=1,\dots,n}$. En este caso, cada acción de control está determinada por

$$u_i = b_i f_i + c_m c_i (r_m f_m - v - y). \quad (2.81)$$

Y la respuesta de la variable controlada por

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n p_i f_i b_i}{1 + l_t} + \frac{l_t f_m}{1 + l_t} r + \frac{p_d}{1 + l_t} d - \frac{l_t}{1 + l_t} v, \quad (2.82)$$

con las funciones de lazo mostradas en [\(2.80\)](#).

La metodología de diseño de los controladores es desarrollada ampliamente en [\[36\]](#) a través de “once notas de diseño”. A continuación, se resumen aquellos aspectos más significativos.

Las dos estructuras de control paralelo propuestas presentan una relación idéntica entre la perturbación d y la salida del sistema y . Por tanto, la misma función de lazo abierto l_t resuelve en ambas el problema del regulador (*performance* deseado para el rechazo de la perturbación en lazo cerrado). Entonces, se estudia cómo repartir la ganancia de la función de lazo abierto total l_t entre las diferentes ramas l_i .

Primeramente se analiza el efecto en cada salida individual y_i (aportación de cada planta p_i) producido por una distorsión entre los ruidos del sensor de dos ramas ($v_i - v_j$); relación que se corresponde también con el efecto en cada salida individual y_i producido por la diferencia

de las referencias de dos ramas ($f_i r_i / c_i - f_j r_j / c_j$). A estas relaciones las denomina *supply distribution cross sensitivities*, en adelante funciones de sensibilidad cruzada, calculándose con

$$S_{ij} = S_{ji} = \frac{l_i l_j}{l_{sh}(1 + l_t)}, \quad (2.83)$$

donde l_{sh} se corresponde con los elementos comunes a las dos ramas l_i , l_j . Si la magnitud de la sensibilidad cruzada S_{ij} es elevada, las salidas individuales y_i e y_j saturarán, comprometiendo el desempeño del sistema global.

En la estructura de “reparto de carga independiente”, el empleo de controladores de alta ganancia en la misma frecuencia para dos ramas distintas, aumenta su sensibilidad cruzada. Para evitarlo, deberá mantenerse un reparto frecuencial tal que en cada rango de frecuencias ω^* sea una sola rama la que contribuya a la ganancia de lazo, es decir: $|l_t(\omega^*)| \approx |l_i(\omega^*)|$ y $|l_{j \neq i}(\omega^*)| \ll |l_t(\omega^*)|$. Y así, la sensibilidad cruzada en cada frecuencia será mínima

$$S_{ij} = S_{ji} = \frac{l_i l_j}{l_{sh}(1 + l_t)} \approx \frac{0}{l_t} = 0 \quad (2.84)$$

En la estructura “reparto de carga coordinado”, es mucho más sencillo asegurar una sensibilidad cruzada de magnitud pequeña en cada frecuencia. En este caso el elemento común a dos ramas l_{sh} coincide con el controlador maestro c_m . Por tanto, la sensibilidad cruzada puede minimizarse transfiriendo la magnitud necesaria $|l_t|$ al controlador maestro y empleando los controladores de rama $c_{i=1, \dots, n}$ como meros filtros que limiten la magnitud de cada rama a un intervalo frecuencial. Como en el caso anterior, si el diseño cumple $|l_t(\omega^*)| \approx |l_i(\omega^*)|$ y $|l_{j \neq i}(\omega^*)| \ll |l_t(\omega^*)|$, la sensibilidad cruzada en (2.83) es mínima. Los filtros se diseñan tal que $|c_i| \approx 1$ en las frecuencias en las que trabaja la planta p_i y $|c_i| \approx 0$ en el resto de frecuencias.

Bajo las anteriores premisas, se establecen las propiedades que debe cumplir cada una de las ramas l_i incorporadas al lazo de control dentro de un procedimiento secuencial. Una vez diseñadas $i - 1$ ramas, la contribución al *performance* de lazo cerrado de la nueva rama l_i a diseñar está determinada por

$$\frac{1}{1 + l_t} = \frac{1}{1 + l_{i-1}} \frac{1}{1 + l_i^*}, \quad (2.85)$$

donde

$$l_i^* = \frac{l_i}{1 + l_{i-1}}; \quad l_{i-1} = \sum_{i=1}^{i-1} l_i. \quad (2.86)$$

Se diseñará el controlador c_i siguiendo las siguientes consideraciones:

- Asumiendo que el sistema de partida ($i - 1$ ramas diseñadas) es estable, la estabilidad del sistema global estará garantizada siempre que $1/(1 + l_i^*)$ sea estable y no existan cancelaciones de polos-ceros situados en el semiplano derecho. De este modo podemos garantizar la estabilidad del sistema global a partir de l_i^* utilizando técnicas SISO.
- La rama l_i se añade al sistema para conseguir un incremento en el ancho de banda del sistema en lazo cerrado. La frecuencia de cruce de rama ω_{h-o} , determinada por

$$|l_i(\omega_{h-o})| = |l_{-i}(\omega_{h-o})|, \quad (2.87)$$

fija la pulsación a partir de la cual l_i trabajará en solitario incrementando el ancho de banda (*performance* del sistema). Un cambio en la perturbación d , producirá un fenómeno transitorio en la rama i con una constante de tiempo aproximada de $\tau_i = 1/\omega_{h-o}$.

Además de los problemas típicamente MISO, en [36] se analizan otros problemas de múltiples variables desde la perspectiva *load - sharing*, como es el caso de las estructuras de control en cascada, *sin y con modificación de planta*, o el caso de sistemas MIMO que pueden controlarse como sistemas MISO. También, describe cómo emplear las salidas individuales y_i , si fueran medibles, en nuevas estructuras de control multilazo. A pesar de incluirse el prefiltro f_m no se especifica cómo diseñar éste para un supuesto cambio en la referencia (distinción entre servosistemas y reguladores).

2.4.7 Control robusto QFT

Dentro del control robusto cuantitativo, Horowitz [61, págs. 400-412] propone el empleo de estructuras multilazo que trabajan con las medidas de las salidas de cada una de las plantas $y_{i=1,\dots,n}$, buscando una

reducción del “coste de realimentación”. Éste se cuantifica cómo la amplificación en el actuador de señales de alta frecuencia provenientes de los sensores. En este trabajo se resalta que si las salidas individuales $y_{i=1,\dots,n}$ no son medibles (como es el caso que nos ocupa en esta tesis) el problema debe reducirse a un diseño SISO para la suma de plantas (Figura 2.7 con $c_{i=1,\dots,n} = 1$). Entonces, se propone diseñar un controlador robusto c_m para $p_e = \sum_{i=1}^n p_i$ aplicando la metodología clásica QFT (*Quantitative Feedback Theory*) para sistemas SISO⁸ [65, 70].

También dentro del control robusto QFT, Jayasuriya y Franchek [78] y Gutman y otros [52] emplean estructuras con n controladores en paralelo (Figura 2.7 con $c_m = 1$), para dar solución al problema MISO del regulador. En ambos casos, los diseños son realizados para plantas con limitaciones (acción de control máxima, retardos, etc.) en las que los objetivos de control no pueden satisfacerse con una única planta. Los dos autores proponen una estrategia de diseño secuencial en la que se añaden plantas (ramas) al lazo de control hasta poder satisfacer los objetivos de control en lazo cerrado. Por tanto, ambas estrategias emplearán el número mínimo de plantas en paralelo.

Se definen las especificaciones de control acotando la magnitud de las respuestas en frecuenciales de lazo cerrado. Estas especificaciones deben ser cumplidas por todos los elementos dentro del espacio de parámetros \mathcal{Q} que define la incertidumbre del sistema⁹. Se establecen las siguientes restricciones de diseño:

- Estabilidad robusta:

$$\left| \frac{l_t}{1 + l_t} \right| \leq W_s; \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \quad (2.88)$$

- Rechazo robusto de perturbaciones d que se incorporan a la salida y a través de un modelo p_d :

$$\left| \frac{p_d}{1 + l_t} \right| \leq W_d; \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \quad (2.89)$$

- Limitación robusta de cada acción de control ante un cambio en la perturbación:

$$\left| \frac{p_d c_i}{1 + l_t} \right| \leq W_{u_i}; \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \quad (2.90)$$

⁸ Una descripción detallada de la misma es presentada en el [Apéndice A](#).

⁹ Una descripción detallada de la definición de incertidumbre empleada en QFT se presenta en la [Subsección A.2.1](#).

Se propone el empleo de una estrategia de diseño secuencial en la que se separan los lazos ya diseñados l_{-i} del lazo a diseñar l_i , como en (2.85). Es decir, se emplean los fundamentos de la metodología de diseño expuesta por Eitelberg [36] para el *Load Sharing*. De este modo, utilizando (2.85) en las inecuaciones (2.89) y (2.90), se obtienen inecuaciones con un solo grado de libertad que permiten obtener uno de los controladores c_i . En el paso de diseño i , las inecuaciones (2.88)-(2.90) pueden ser modificadas para establecer condiciones sobre l_i^* . Dado que $l_i^* = c_i p_i^*$, con $p_i^* = p_i / (1 + l_{-i})$, estas condiciones determinan el controlador c_i que da solución al problema de control. Por lo tanto, se establecen las siguientes restricciones de diseño:

- El rechazo robusto de la perturbación queda garantizado por

$$\left| \frac{1}{1 + l_i^*} \right| \leq |W_d| \left| \frac{p_d}{1 + l_{-i}} \right|^{-1}; \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \quad (2.91)$$

- Para garantizar la limitación robusta de las acciones de control $u_{j \neq i}$ se debe cumplir

$$\left| \frac{1}{1 + l_i^*} \right| \leq |W_d| \left| \frac{p_d / c_{j \neq i}}{1 + l_{-i}} \right|^{-1}; \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \quad (2.92)$$

- Para garantizar la limitación robusta de las acciones de control u_i se debe cumplir

$$\left| \frac{l_i^*}{1 + l_i^*} \right| \leq |W_d| \left| \frac{p_d / p_i}{1 + l_{-i}} \right|^{-1}; \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \quad (2.93)$$

- La estabilidad robusta del conjunto se garantiza mediante la estabilidad robusta del nuevo término añadido al lazo de control

$$\left| \frac{l_i^*}{1 + l_i^*} \right| \leq W_s; \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (2.94)$$

si se asegura además que no hay cancelaciones de polos-ceros inestables.

Una vez calculados los contornos de diseño QFT que expresan las especificaciones robustas en términos de la función de lazo abierto nominal para l_i^* , pueden observarse dos situaciones:

- Los contornos obtenidos para las inecuaciones (2.91)-(2.94) son compatibles [45], es decir, pueden satisfacerse todos de forma simultánea en las frecuencias previstas. En este caso se realiza el *loop-shaping* de l_i^* para cumplir con dichas condiciones. El diseño finaliza en este paso, no siendo necesario añadir más plantas al lazo de control.
- Los contornos obtenidos para las inecuaciones (2.91)-(2.94) son incompatibles, es decir, no pueden satisfacerse todos de forma simultánea en alguna frecuencia de diseño. En este caso se realiza el *loop-shaping* de l_i^* , intentando cumplir con el mayor número de condiciones posibles. Se establece el siguiente criterio de prioridad:
 1. Condiciones de estabilidad.
 2. Condiciones de *performance* en el rechazo de perturbaciones.
 3. Condiciones que expresan limitaciones en las acciones de control.

Será necesario añadir una nueva planta p_{i+1} , y por tanto recurrir a una nueva etapa de diseño para cumplir con las especificaciones de diseño violadas en el paso i .

García-Sanz y Hadaegh [42] proponen el empleo de QFT para el diseño de controladores de aeronaves en formación. Plantean una estrategia de diseño bajo la estructura paralelo con control en cascada de salida total de la Figura 2.10, a la que se añaden perturbaciones $d_{u_{i=1,\dots,n}}$ que se incorporan a la entrada de las plantas $p_{i=1,\dots,n}$. El diseño se realiza en tres pasos, sintonizando primero los controladores internos y después los externos, como sigue:

1. En el primer paso se diseñan los controladores $c_{i=1,\dots,n}$. Estos determinan las frecuencias en las que trabaja cada una de las plantas $p_{i=1,\dots,n}$, y son diseñados como filtros pasa bajos, pasa banda o pasa altos. La selección de las frecuencias de trabajo es libre, según el criterio del diseñador.
2. En el segundo paso se diseña el controlador de las acciones de control c_u . Su objetivo es garantizar que la acción de control calculada por c_m sea aplicada entre los n controladores $c_{i=1,\dots,n}$. El segundo objetivo del controlador c_u es reducir el efecto de las perturbaciones $d_{u_{i=1,\dots,n}}$, que pueden introducirse inmediatamente después de

los controladores $c_{i=1,\dots,n}$. Si las perturbaciones $d_{u_{i=1,\dots,n}}$ son despreciables ó si no pueden ser medidas ni estimadas, el lazo interno puede ser eliminado.

3. En el tercer y último paso se diseñan los elementos de control maestros, controlador c_m y prefiltro f_m . Diseñados los controladores internos la planta p_e queda fijada según (2.20) y contiene una incertidumbre determinada. Por tanto, se diseñan c_m y f_m aplicando QFT SISO.

2.4.8 Control robusto en el espacio de parámetros

Besson y Shenton [9] presentan una estrategia de diseño robusto basada en un diseño iterativo sobre el espacio de parámetros del controlador. La metodología es una extensión de la propuesta realizada para sistemas SISO en [8]. Se desarrolla para un sistema MISO formado por n plantas $p_{i=1,\dots,n}$, trabajando en una estructura paralelo sin controlador maestro (Figura 2.7 con $c_m = 1$). En ella se añaden: perturbaciones v_i que se incorporan a la entrada de cada planta p_i , y una entrada n que se incorpora sin dinámica en la cadena de realimentación representando el ruido de medida del sensor. La perturbación d es incorporada en la variable controlada sin dinámica adicional ($p_d = 1$). La señal de error es $e = r - y$. A partir de la función sensibilidad

$$S = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n p_i c_i}, \quad (2.95)$$

se determinan la relaciones entre cualquier pareja entrada-salida del sistema. Se denomina $S_{\alpha\beta}$ a la relación entre la entrada α y la salida β . Se analizan las siguientes relaciones:

1. Sensibilidad primaria $S_{\alpha\beta} = \pm S$; para las entradas $\alpha \in \{d, n, r\}$ y la salida $\beta = e$.
2. Sensibilidad complementaria $S_{\alpha\beta} = \pm \sum_{i=1}^n p_i c_i S$; para las entradas $\alpha \in \{n, r\}$ y la salida $\beta = y$.
3. Sensibilidad ante perturbaciones $S_{\alpha\beta} = \pm p_i S$; para la entrada $\alpha \in \{v_i\}$ y las salidas $\beta = \{y, e\}$.
4. Sensibilidad del esfuerzo de control $S_{\alpha\beta} = \pm c_i S$; para las entradas $\alpha \in \{d, n, r\}$ y la salida $\beta = u_i$.

5. Sensibilidad cruzada $S_{\alpha\beta} = \pm p_i c_j S$, $j \neq i$; para las entradas $\alpha \in \{v_i\}$ y las salidas $\beta = u_j$.
6. Sensibilidad complementaria parcial $S_{\alpha\beta} = \pm p_i c_i S$; para las entradas $\alpha \in \{d, n, r\}$ y la salida $\beta = y_i$.

Las condiciones de diseño son establecidas mediante el empleo de funciones $W_{\alpha\beta}$, de forma que el sistema en lazo cerrado cumpla:

$$\|W_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}\|_{\infty} \leq 1. \quad (2.96)$$

Como ocurre en QFT, esta condición será evaluada para un conjunto discreto de frecuencias $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, dando lugar a

$$\|W_{\alpha\beta}(\omega) S_{\alpha\beta}(j\omega)\|_{\infty} \leq 1, \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (2.97)$$

El procedimiento de diseño consiste en fijar $n - 1$ controladores y obtener las restricciones para el controlador libre c_k , en cada una de las frecuencias discretas. Estas restricciones son trasladadas al espacio de parámetros del controlador, donde son sintonizados los parámetros dos a dos en un proceso iterativo.

Se plantean condiciones de diseño para las funciones sensibilidad (3, 5, 6) en un sistema con dos plantas p_1 y p_2 . Por ejemplo, la condición para la sensibilidad ante la perturbación v_2 en la salida está determinada por

$$\left| \frac{p_2 W_3}{1 + p_1 c_1 + p_2 c_2} \right| \leq 1. \quad (2.98)$$

Elegido un controlador c_1 , se reescribe la condición anterior aislando c_2

$$\left| c_2 - \frac{1 + p_1 c_1}{-p_2} \right| \geq W_3. \quad (2.99)$$

La interpretación gráfica de (2.99), determina que las soluciones válidas para c_2 en cada frecuencia se corresponden con los puntos del plano complejo que se encuentran alejados una distancia W_3 del lugar geométrico $-(1 + p_1 c_1)/p_2$. De esta forma se determinan las regiones en el plano complejo en cada frecuencia que son solución para $c_i(j\omega)$. Después, son transformadas en regiones en el espacio de parámetros del controlador. Para ello, primero se describe cada controlador c_i como un producto de controladores c_{ic} de segundo orden

$$c_i = \prod_{c=1}^N c_{ic}; \quad N \geq 1, \quad (2.100)$$

donde cada elemento c_{ic} está determinado por

$$c_{ic} = \frac{b_{ic_2}s^2 + b_{ic_1}s + b_{ic_0}}{a_{ic_2}s^2 + a_{ic_1}s + a_{ic_0}}. \quad (2.101)$$

En cada iteración, se diseñan únicamente dos de los cinco parámetros del elemento de control c_{ic} , fijando el resto de parámetros de c_{ic} y el resto de elementos del producto que componen c_i (véase [8]). De este modo, el conjunto de regiones solución en el plano complejo para cada frecuencia discreta se superponen en un único plano bidimensional, en el que los ejes se corresponden con los valores de los dos parámetros a diseñar. Así, se define la región solución en el plano de parámetros. Seleccionado un punto solución, quedan fijados dos parámetros de c_{ic} , continuándose con otra pareja de parámetros en c_{ic} . Una vez diseñados todos los parámetros de c_{ic} , se continua con el diseño del resto de elementos c_{ic} en c_i . Este procedimiento iterativo se repite hasta diseñar todos los parámetros de los n controladores $c_{i=1,\dots,n}$. El uso de herramientas CAD es imprescindible para aplicar dicha metodología.

2.4.9 Control *main-vernier*

Lurie y Enright [93, Capítulo 2.7] presentan la arquitectura paralelo de la Figura 2.7 sin controlador maestro, $c_m = 1$, y la estructura serie de la Figura 2.5, utilizadas cuando existen dos actuadores uno de mayor rapidez (*vernier*) y otro de mayor capacidad (*main*). Los autores describen como la estructura paralelo resulta más sencilla para comprender este modo de funcionamiento *main-vernier*, pero el diseño de los controladores es mucho más complejo que en la estructura serie, ya que los controladores de rama deben ocuparse no sólo del *performance* sino también de las bandas de trabajo de cada planta (véase Sección 2.3).

Para una estructura paralelo, Lurie y Enright [93] determinan que la estabilidad de un sistema formado por dos plantas p_1 y p_2 está condicionada por la estabilidad de la función $W = p_1c_1/p_2c_2$, siguiendo el mismo razonamiento que el método PQ de Schroeck y otros [127] (véase Subsección 2.4.5). Garantizar la estabilidad de W implica una limitación en la relación entre las pendientes de las magnitudes de las ramas l_1 y l_2 ($l_1 = p_1c_1$, $l_2 = p_2c_2$). Esto obliga a transiciones suaves a lo largo de la frecuencia cuando una rama pasa a tomar el control mientras que la otra se desconecta, y viceversa. En base a este estudio y buscando un

método simple de diseño, se propone determinar uno de los controladores, de forma que el otro quede determinado por la relación $l_2 = 1 - l_1$. La principal desventaja es que este procedimiento es muy sensible a la incertidumbre paramétrica, impidiendo su empleo como estrategia de control robusto.

En [93] se presentan ejemplos de diseño reales mediante su estrategia *main-vernier*, tales como el control de un interferómetro [51, 116], o el regulador DC de un radar [23].

2.5 APLICACIONES

Las estrategias de control descritas en la Sección 2.4 han sido aplicadas a multitud de sistemas reales. A continuación se describen algunas de las aplicaciones para las que se han desarrollado estrategias de control MISO.

2.5.1 Procesos industriales

El campo en el que las estrategias de control MISO han presentado mayor impacto es la industria de procesos [82]. La naturaleza multivariable de todo proceso industrial facilita la búsqueda de estrategias de control MISO colaborativas. En la literatura científica se encuentran multitud de ejemplos, que abarcan desde pequeños subsistemas que actúan en los niveles inferiores de una estructura de control jerárquica, hasta sistemas de planificación que se encargan de la gestión de grandes procesos productivos.

Dentro de las aplicaciones más frecuentes destaca el control de presión y caudal [3, 4, 92]. En estos casos suelen emplearse dos válvulas con diferente resolución o un conjunto bomba-válvula, en el que la válvula es empleada como actuador de precisión. Además de en pequeños subsistemas, las estrategias MISO han sido aplicadas con éxito en la gestión de grandes procesos, destacando el control de presión en columnas de destilación [39, 130, 131] y el control de temperatura en reactores químicos [104, 160].

Pese a ser empleadas desde la década de los setenta, las estrategias MISO siguen dando solución en la actualidad a multitud de problemas dentro de la industria del proceso. A continuación se muestran algunos ejemplos de aplicación presentados a lo largo de los últimos quince años.

- Eitelberg [32] propone el control de la temperatura en el interior de una cámara empleando dos elementos calefactores. El sistema descrito es configurado habitualmente como un sistema MIMO 2×2 , donde cada elemento calefactor es empleado para controlar la temperatura registrada por cada una de las sondas de temperatura disponibles ¹⁰. En su trabajo Eitelberg propone emplear como variable de control la temperatura media, que en este caso es manipulada mediante el gobierno de los dos actuadores de forma coordinada.
- Monroy-Loperena y otros [105] presentan un control MISO colaborativo de un proceso compuesto por un reactor/separador con corriente de recirculado (RSR). En este caso el objetivo es mantener la concentración del producto a un valor fijo. Como variables de control se emplea la temperatura del reactor y la cantidad de vapor empleada en la columna de destilación. En dicho trabajo se emplea una estructura de control paralelo con controlador maestro y esclavos.
- En la industria del papel, el control de la humedad de la hoja de papel fabricada es de vital importancia para obtener un producto de calidad. Las perturbaciones producidas por cambios en la materia prima puede producir que gran parte de producto fabricado deba ser desechado. Para solucionar estos problemas se han buscado estrategias de control más agresivas, que permiten mejorar el comportamiento dinámico del sistema. Karlsson y otros [83] presentan una estrategia de control MISO para la cámara de secado, en la que emplean como actuadores la presión de vapor y la humedad del aire de la cámara. En [84] se añaden a la estructura de control señales *feedforward* que incorporan información sobre las perturbaciones medibles.
- Velut y otros [145] presentan una estrategia de control para un bio-reactor operado en modo *batch*, que trabaja cerca de su capacidad máxima de transferencia de oxígeno. El método presentado combina las ventajas de la estrategia de alimentación de sondeo y la técnica TLFB (*Temperature Limited Fed-Batch*). Cuando se alcanza la máxima capacidad de transferencia de oxígeno del reactor, la temperatura es disminuida para reducir la demanda de oxígeno. Para

¹⁰ Una de ellas se encuentra situada en la parte superior de la cámara y la otra en la parte inferior.

lograr un buen control del oxígeno disuelto, una estructura de control *mid-ranging* manipula tanto la velocidad del agitador como la temperatura del reactor.

- Haugwitz y otros [55] presentan el modelado y control de un nuevo tipo de reactor. El reactor de placas, presenta una estructura similar a la de un intercambiador de calor, garantizando una transferencia de calor adecuada, característica esencial en reacciones altamente exotérmicas. El trabajo presenta un sistema de refrigeración operado mediante una estructura de control MISO serie. El empleo de un control MISO permite optimizar el equipamiento hidráulico empleado para llevar a cabo la extracción de calor del reactor. Los controladores son diseñados empleando estrategias MPC.
- Velasco-Pérez y Álvarez Ramírez [143] proponen el control de un reactor aerobio empleado en el tratamiento de aguas residuales. Se emplea una estructura de control paralelo con maestro y esclavos cuyo objetivo es regular la DQO (*Demanda Química de Oxígeno*) en la salida del proceso. Para lograrlo se emplea el flujo de alimentación como variable primaria, y el flujo de recirculación como variable secundaria.
- En [144] se describe el control de un reactor CSTR (*Continuous Stirred-Tank Reactor*). En este caso se emplea una estrategia MISO que manipula simultáneamente el caudal inyectado en la chaqueta refrigeradora y la tasa de dilución del reactor (reactante). Mediante la manipulación de dichas variables se gobierna la concentración de salida del reactor. Los controladores empleados son diseñados siguiendo la metodología propuesta en [5] para una estructura paralelo con controlador maestro y esclavos.
- Prado-Rubio y otros [119] presentan el control del pH en un bioreactor integrado en un proceso de separación de membrana accionada eléctricamente REED (*Reverse Electro-Enhanced Dialysis*). Para gobernar el pH el sistema emplea como variables manipuladas la densidad de corriente eléctrica junto con la concentración de entrada al canal de hidróxido de dializado. El bioreactor es operado periódicamente, manteniendo un pH deseado en la salida entre periodos y restableciendo la densidad de corriente. Los resultados muestran como se consigue un rendimiento adecuado dentro de una gran parte de la ventana de operación.

- Johnsson y otros [80] presentan una estructura de control serie modificada para el control de procesos no estacionarios. La modificación consiste en emplear como referencia de la acción de control *rápida* (r_{u_1} en la Figura 2.5) la acción de control *lenta* u_2 . De este modo, se produce un cambio continuo en el *set point* del lazo que gobierna la acción de control u_1 , produciendo que el sistema nunca alcance el régimen estacionario. Como aplicación directa muestra el gobierno del oxígeno disuelto en un bioreactor, empleando como acciones de control la velocidad de agitación y el caudal de gases extraídos del interior del reactor.

2.5.2 Motores de combustión interna

Uno de los campos en los que más se ha aplicado el control MISO es al gobierno de motores de combustión interna. Los primeros diseños [151, 78, 9] buscaban controlar la velocidad de rotación de un motor de inyección v6 mediante la manipulación del avance del tiempo de encendido y la válvula de aire de ralentí. Estos trabajos empleaban como punto de partida el modelo del sistema propuesto por Williams y otros [151], para el que se diseñaron estrategias de control robustas fundamentadas en H_∞ , QFT, y el diseño en el espacio de parámetros del controlador. Pese a ser un problema analizado hace más de dos décadas, nuevos diseños que afrontan problemas similares en diferentes tipos de motores son publicados regularmente; prueba de ello son los trabajos [117, 72]. En muchos casos, estos diseños buscan una reducción del consumo, o la aplicación de los conceptos anteriores a nuevos motores. Véase como ejemplo el trabajo propuesto por Gorzelic y otros [49], en que se presenta un control MISO para motores turbo. La diferencia principal con los anteriores es que en este caso, se emplean como actuadores la válvula del acelerador y la válvula de descarga que controla la cantidad de gases de escape empleados en el compresor del turbo.

En la actualidad, la comunidad científica centra sus esfuerzos en el desarrollo de motores que reduzcan las emisiones de agentes contaminantes y mejoren la eficiencia, de forma que se reduzca el consumo de combustibles fósiles. En esta línea los motores HCCI (*Homogeneous Charge Compression Ignition*), conocidos en castellano como motores de mezcla homogénea y encendido por compresión, presentan un amplio potencial de desarrollo. Este tipo de motores pueden considerarse como un híbrido entre motor diésel y gasolina, ya que el combustible

empleado es gasolina pero el proceso de combustión es realizado por auto-ignición, como si se tratase de un motor diésel. Este tipo de motores pueden ser gobernados empleando estrategias MISO [120, 73, 75] en las que se emplean como acciones de control el tiempo de cerrado de la válvula de extracción y el tiempo de inyección de combustible; para controlar la fase de combustión.

2.5.3 *Sistemas de almacenamiento de datos*

El incremento de la capacidad en los sistemas de almacenamiento de datos (HDs, unidades ópticas, etc) ha sido logrado gracias al aumento de la densidad de almacenamiento. Este aumento implica que el posicionamiento del cabezal encargado de realizar las tareas de lectura/escritura deba ser cada vez más preciso. Los primeros dispositivos empleaban un único servomotor (*voice coil*) para realizar el control de la posición de dicho cabezal. No obstante, las limitaciones mecánicas de este tipo de motores impiden su empleo en sistemas de alta densidad. Para solucionar las limitaciones se emplean sistemas con dos grados de libertad, en los que el movimiento es producido por la combinación de un servomotor junto con un actuador piezoeléctrico. Nótese cómo éste es un claro ejemplo de sistema en el que se dispone de un actuador muy preciso pero con poca capacidad ¹¹ (actuador piezoeléctrico) junto con un actuador poco preciso con gran capacidad (*voice coil*). Algunos de los primeros diseños fueron presentados a principios del siglo XXI; algunos ejemplos se muestran en [128, 127, 163, 86]. Los dos primeros trabajos [128, 127] emplean la estrategia *PQ Method*, mientras que Zhai y otros [163] y Kobayashi y Horowitz [86] emplean modificaciones de la estructura paralelo y serie, respectivamente. Prueba de la creciente importancia del control MISO en el control de sistemas de almacenamiento de datos, es el trabajo presentado por Al Mamun y otros [1], en el que se presenta una revisión del estado del arte que describe las diferentes arquitecturas de control MISO aplicadas a este tipo de sistemas.

En la actualidad, la continua evolución de este tipo de sistemas produce que sigan apareciendo de forma regular aportaciones científicas. Estos trabajos presentan nuevas estrategias de diseño [90, 41] o se centran en la resolución de algunos problemas particulares, como puede

¹¹ Los actuadores piezoeléctricos son capaces de producir desplazamientos de amplitud muy limitada.

ser la reducción del desplazamiento del actuador secundario [87], la reducción de las saturaciones [29], o el empleo de incertidumbre [59] en los modelos de la planta. Por último, Du y otros [30] en su trabajo más reciente presentan una estructura de control que emplea tres actuadores. En este caso se incorpora un actuador térmico, que presenta una menor vulnerabilidad ante vibraciones. De este modo se consigue aumentar el ancho de banda del conjunto. Esta última aportación hace suponer que el empleo de estructuras de control MISO en este campo todavía presenta un amplio potencial de aplicación, sobre todo en sistemas con más de dos entradas, por ser los menos desarrollados.

2.5.4 *Sistemas mecánicos*

Los servomecanismos que requieren de una elevada precisión representan un campo de potencial aplicación para las estrategias de diseño MISO. En estos casos pueden emplearse diferentes tipos de accionamientos para conseguir un movimiento coordinado más preciso, o que permita un mayor ancho de banda. Las aplicaciones pueden ser muy diversas, y pueden clasificarse por el tipo de actuadores empleados para llevar a cabo el movimiento. A continuación se muestran algunos ejemplos.

- Schneider y otros [126] presentan un diseño coordinado para llevar a cabo mecanizados de alta precisión. En este caso el movimiento se realiza empleando un robot industrial convencional, junto con un mecanismo de compensación externa. Como se muestra en el trabajo, la combinación de estos dos elementos permite alcanzar un mayor ancho de banda en el control de la posición relativa entre la herramienta y la pieza a mecanizar. Se emplea la estructura de control serie con controladores diseñados empleando la estrategia DVPC.
- En la literatura científica se han presentado varios trabajos [166, 125, 124, 147] que emplean como sistema de validación un posicionador lineal. El objetivo de control es gobernar la posición del servomecanismo, empleando como actuadores un motor lineal y un actuador piezoeléctrico. En los trabajos presentados se demuestra que un control coordinado de los actuadores permite un mejor *performance* que un control clásico con un único grado de libertad.

- Chiang [19] desarrolla un sistema de posicionado cartesiano que emplea actuadores neumáticos junto con un actuador piezoeléctrico. Los actuadores neumáticos permiten un desplazamiento amplio (carrera de 250mm), por lo que son empleados para realizar un pre-posicionado de poca precisión. El actuador piezoeléctrico con precisión de 20nm, es empleado para realizar el posicionado de precisión. Los controladores son diseñados empleando una estrategia DSOFSMC (*decoupling self-organizing fuzzy sliding mode control*) e implementados en una estructura de control paralelo.
- Bozchalooi y Youcef-Toumi [13] emplean un sistema de actuación con varios grados de libertad para un microscopio de fuerza atómica AFM (*Atomic Force Microscope*) de alta velocidad. En este trabajo se propone una modificación del sistema de actuación, en el que se añade un actuador piezoeléctrico para mejorar el *performance* del sistema. Pruebas de validación en un sistema real determinan que las estrategias MISO reportan mejores resultados que el control clásico.
- Grogan y otros [51] emplean una estructura de control con tres grados de libertad para un interferómetro astronómico. En este caso los tres actuadores corresponden con un motor, un servo (*voice coil*) y un actuador piezoeléctrico. La estructura de control empleada puede considerarse como una estructura de control serie sin referencias para las acciones de control.

2.5.5 Otras aplicaciones

A continuación, se presentan algunos ejemplos más de aplicación en los que el control MISO ha sido implementado de forma exitosa.

- Sun y otros [141] analizan el empleo de una estructura de control con doble actuación para el gobierno de los niveles de glucosa. En este caso se emplean como acciones de control la insulina y la glucosa suministradas. La lógica de control es diseñada empleando MPC. Los resultados de simulación muestran que el sistema doblemente actuado presenta mejores resultados que cuando se emplea únicamente la glucosa suministrada como acción de control.
- Soltesz y otros [139] proponen el empleo de un nuevo sistema de control para la administración de fármacos en el control de la pro-

fundidad hipnótica. Se propone el empleo de *propofol* (empleado en el caso SISO) junto con el de *remifentanil*, que presenta un tiempo de metabolización mucho más rápido que el primero. La combinación de la administración de los fármacos permite lograr un control con mayor ancho de banda. En cuanto a la estructura de control se emplea una variante de la estructura de control paralelo.

- Dayton y Haid [24] presentan un sistema de control de temperatura criogénica para la instalación NIF (*National Ignition Facility*). El sistema de control emplea una arquitectura serie, cuyos controladores son diseñados empleando una extensión de las tablas de Ziegler-Nichols.

Parte II

ANÁLISIS Y SOLUCIÓN QFT AL PROBLEMA DEL REGULADOR

COLABORACIÓN EN SISTEMAS MISO

El presente capítulo analiza de forma detallada bajo que circunstancias las plantas disponibles en un sistema MISO son susceptibles de colaborar. Dicho estudio es fundamental antes de llevar a cabo cualquier estrategia de diseño colaborativa, ya que pueden darse casos en los que no es posible llevar a cabo dicha colaboración, o que los beneficios obtenidos de la misma sean insignificantes o poco prácticos desde un punto de vista coste/beneficio. El estudio realizado emplea plantas lineales sin limitaciones, buscando una estrategia general que deberá ser modulada en función de las limitaciones inherentes a todo sistema real. Las conclusiones alcanzadas en el presente capítulo representan los fundamentos sobre los que se han desarrollado las estrategias de control MISO QFT que afrontan el problema del regulador.

3.1 FUNDAMENTOS QFT PARA SISTEMAS SISO

A continuación, se presentan dos conceptos clave en todo diseño QFT, el coste de la realimentación y el diseño óptimo QFT. El objetivo de la presente sección es repasar detalladamente dichos conceptos, estableciendo de forma clara e inequívoca cómo debe ser un diseño SISO. Las descripciones realizadas en esta sección, actuarán como punto de partida para en la [Sección 3.2](#) alcanzar conclusiones sobre cómo deben gobernarse los sistemas MISO.

3.1.1 *Coste de la realimentación*

El objetivo del control realimentado es garantizar cierto comportamiento en la variable controlada a pesar de la incertidumbre sobre el modelo del sistema y sobre las perturbaciones no medibles. La forma de

llevarlo a cabo se fundamenta en medir la salida y tras compararla con el objetivo (referencia), actuar de manera conveniente según dictamine la estructura de control. Pero estos beneficios conllevan un precio. Por un lado, el gasto en acción de control para conseguir el comportamiento deseado. Y por el otro, un coste que no aporta beneficios y por lo que se trata verdaderamente del coste de la realimentación (*cost of feedback* [66]). Éste hace referencia a la amplificación de ruidos de alta frecuencia introducidos por el sensor, de modo que a mayor cantidad de realimentación, mayor es la amplificación de ruidos, sobre todo, en la acción de control.

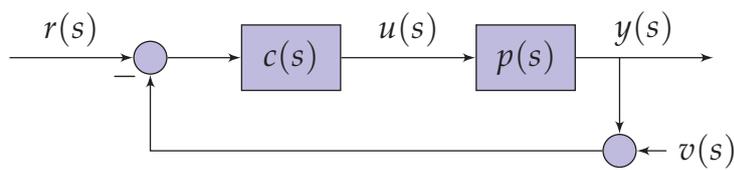


Figura 3.1: Estructura de control SISO.

Para ilustrar este concepto, considérese que se dispone de un sistema SISO sin incertidumbre que es gobernado mediante el empleo de una estructura de control en lazo cerrado como la de la [Figura 3.1](#). En este caso, la amplificación de ruidos en la acción de control ¹ está determinada por

$$T_{u_v}(j\omega) = \frac{-c(j\omega)}{1+l(j\omega)} = \frac{-1}{p(j\omega)} \frac{l(j\omega)}{1+l(j\omega)} = \frac{-1}{p(j\omega)} T(j\omega). \quad (3.1)$$

Los requisitos de diseño en baja frecuencia² ($\omega \ll \omega_{cg}$) son proporcionar una baja sensibilidad, para lo que la función de lazo abierto $l(j\omega)$ debe presentar alta magnitud. De forma aproximada podemos garantizar que $|l(j\omega)| \gg 1$ en $\omega < \omega_{cg}$ y, por tanto, la sensibilidad complementaria $|T(j\omega)| \approx 1$ en $\omega < \omega_{cg}$. Teniendo en cuenta la relación anterior, puede aproximarse $T_{u_v}(j\omega)$ en baja frecuencia por

$$|T_{u_v}(j\omega)| \approx \left| \frac{1}{p(j\omega)} \right|, \quad \forall \omega < \omega_{cg}. \quad (3.2)$$

¹ Relación entre la acción de control u y la señal de ruido v .

² Frecuencias inferiores a la frecuencia de cruce de ganancia ω_{cg} .

Obsérvese cómo la amplificación de ruidos³ en la acción de control es independiente del controlador empleado, dependiendo únicamente del módulo de la planta.

Por otro lado, en alta frecuencia, una vez superada la frecuencia de cruce de ganancia ω_{cg} , que determina de forma indirecta el ancho de banda del sistema, la función de lazo abierto tiende a cero reduciendo progresivamente su magnitud debido al efecto de los polos. En estas frecuencias ($\omega > \omega_{cg}$) puede considerarse $|l(j\omega)| \ll 1$, permitiendo aproximar $T_{uv}(j\omega)$ por

$$|T_{uv}(j\omega)| \approx \left| \frac{l(j\omega)}{p(j\omega)} \right|, \quad \forall \omega > \omega_{cg}. \quad (3.3)$$

En función de la relación existente entre $l(j\omega)$ y $p(j\omega)$ el ruido v será amplificado o atenuado en u . Si se considera que $c(j\omega)$ es estrictamente propio, existirá una pulsación ω_G en la que se cumpla $|l(j\omega_G)| = |p(j\omega_G)|$. Por lo tanto, frecuencias inferiores a ω_G darán lugar a amplificación de ruidos y frecuencias superiores a ω_G atenuarán el ruido $v(t)$ introducido por el sensor (ver [Figura 3.2](#)).

En conclusión, existe un intervalo frecuencial $\omega_{cg} < \omega < \omega_G$ en el que se produce amplificación de ruidos sin obtener beneficio alguno. A este fenómeno se le conoce como *cost of feedback* [66]. Véase cómo en frecuencias anteriores a ω_{cg} también se obtiene $|T_{uv}(j\omega)| > 1$, pero en estas frecuencias se obtienen beneficios de la realimentación, por lo que no puede asociarse esta amplificación con un coste.

Por último, analícese $T_{uv}(j\omega)$ en la [Figura 3.2](#). En ella puede comprobarse el comportamiento descrito anteriormente. Obsérvese cómo en baja frecuencia $|T_{uv}(j\omega)|$ se corresponde con la inversa del módulo de la planta. A medida que la frecuencia aumenta, se observa un incremento de $|T_{uv}(j\omega)|$ debido a la reducción de la ganancia de la planta en (3.1). En el entorno de la frecuencia de cruce de ganancia ω_{cg} , lo más habitual es que la especificación de estabilidad robusta domine sobre el resto. Por lo tanto, si se considera que el sistema cumple dicha condición de forma estricta, puede aproximarse la función sensibilidad complementaria por

$$|T(j\omega_{cg})| = \left| \frac{l(j\omega_{cg})}{1 + l(j\omega_{cg})} \right| \approx W_s, \quad (3.4)$$

³ Aunque se trata de señales que toman amplitudes importantes a partir de cierta frecuencia, teóricamente un control sin limitaciones (ancho de banda infinito) si que plantearía este caso.

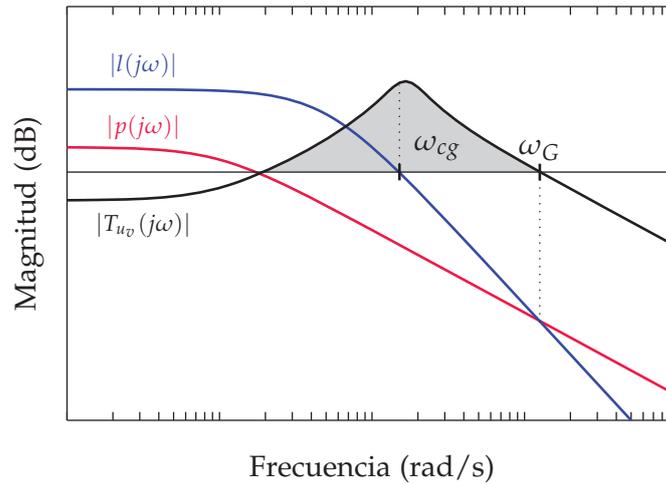


Figura 3.2: Coste de la realimentación en un sistema SISO.

donde W_s se corresponde con la cota máxima que define la estabilidad relativa⁴ del sistema. Es decir, la máxima amplificación de ruidos puede obtenerse sustituyendo (3.4) en (3.1), dando lugar a

$$|T_{u_v, \text{máx}}| = |T_{u_v}(\omega_{cg})| \approx \left| \frac{W_s}{p(j\omega_{cg})} \right|. \quad (3.5)$$

Pasada la frecuencia de cruce de ganancia, en la que se produce la máxima amplificación de ruidos, comienza a decrecer ésta última $|T_{u_v}(j\omega)|$. Dicha reducción es debida a la pérdida de magnitud en $l(j\omega)$ y se mantiene a lo largo de la frecuencia. Compruébese en la [Figura 3.2](#) cómo a partir de ω_G el sistema deja de amplificar la señal de ruido, frecuencia a partir de la cual desaparece el coste de la realimentación.

En conclusión, queda demostrado que todo diseño de control realimentado lleva asociado un coste. El objetivo de todo ingeniero de control debe ser minimizar dicho coste en la medida posible. Para ello debe reducirse el ancho de banda del sistema en lazo cerrado al mínimo estrictamente necesario⁵. De este modo la zona de amplificación de ruidos se desplaza a la región de bajas frecuencias, donde la magnitud del ruido presenta menor importancia.

⁴ Alejamiento del punto crítico.

⁵ Se debe evitar emplear especificaciones de diseño agresivas si no son estrictamente necesarias. Dado que todos los sistemas reales son estrictamente propios, el aumento de la frecuencia ω_{cg} implica un mayor pico de amplificación de ruidos ya que $|p(j\omega)|$ presenta menor magnitud en alta frecuencia.

3.1.2 Diseño QFT óptimo

Para determinar si un diseño es adecuado, debe determinarse de forma clara qué se considera un diseño óptimo. En la literatura científica pueden encontrarse numerosas descripciones en función de los objetivos perseguidos. Un diseño óptimo desde la perspectiva QFT de Horowitz [67, 65] es aquel que satisface los requisitos de *performance* estrictamente necesarios en la banda de control funcional. De este modo, la banda de frecuencia donde ya no se obtienen beneficios de la realimentación (se habla de coste) se desplaza a la región de bajas frecuencias, en la que la presencia e intensidad del ruido es menor. Entonces, para que el diseño sea adecuado, los requisitos de *performance* deben alcanzarse empleando en la banda útil, $\omega \ll \omega_{cg}$, una función de lazo con la ganancia $|l(j\omega)|$ estrictamente necesaria. De este modo, la ganancia del lazo en la banda de frecuencia donde ya no se obtienen beneficios de la realimentación (zona en la que se produce el *cost of feedback*) puede ser minimizada. Esta afirmación se justifica con la tercera integral de Bode [11], que describe matemáticamente la relación entre la ganancia de lazo a lo largo de la frecuencia, conocido como efecto «cama de agua» (*waterbed*). Además de los requisitos impuestos por las condiciones de *performance*, los márgenes de estabilidad relativa condicionan la velocidad de caída de $|l(j\omega)|$ a partir de $\omega > \omega_{cg}$. Por todo ello, el diseño se realiza en orden creciente de frecuencias, de bajas hacia altas frecuencias. Y la estrategia de búsqueda del diseño óptimo es aquella que busca minimizar en cada frecuencia el coste de la realimentación. En Gera y Horowitz [44] y Horowitz y Sidi [67] se presenta una definición matemática y precisa del problema de diseño óptimo descrito.

No obstante, existe otra perspectiva de diseño óptimo que, a pesar de no ser propia de QFT, presenta interés desde un punto de vista práctico y es habitual en otros métodos de diseño frecuenciales realizados mediante el *loop-shaping* de $l(j\omega)$. Esta parte de la elección de un ancho de banda, ω_{cg} , de acuerdo a restricciones de índole práctico. Las restricciones pueden provenir por limitaciones debidas al tiempo de muestreo, desconocimiento de los modelos de las plantas en alta frecuencia, latencias debidas a la instrumentación, etc. Elegido el ancho de banda, queda determinado el *cost of feedback*. En este caso, el diseño óptimo es aquel que maximiza los beneficios de la realimentación. Es decir, el que garantiza que $|l(j\omega)|$ para $\omega < \omega_{cg}$ alcance los valores mayores posibles. Nuevamente, los márgenes de estabilidad limitan la velocidad de creci-

miento de la ganancia de lazo al disminuir la frecuencia hasta alcanzar la banda útil ($\omega \ll \omega_{cg}$) donde se obtienen beneficios de la realimentación. En esta segunda estrategia de diseño óptimo se diseña de altas a bajas frecuencias. La denominaremos maximizar los beneficios de la realimentación y se describe ampliamente en [61, 93, 94]. En el presente documento, si no se dice lo contrario, aplicaremos el concepto de óptimo que busca minimizar el coste de la realimentación.

Por último, hay que destacar que las descripciones anteriores son adecuadas para sistemas sin limitaciones. Cuando las plantas presentan restricciones en el ancho de banda, las condiciones que determinan el diseño óptimo deben ser adaptadas. Los sistemas que presentan limitaciones en el ancho de banda se corresponden con los sistemas que no son de fase mínima. Puede tratarse de plantas con retardos o con ceros en el semiplano derecho (ceros RHP), cuyo ancho de banda máximo está limitado (estos son los sistemas de fase no mínima). O puede tratarse de plantas con polos inestables (polos RHP), que demandan un ancho de banda mínimo para poder ser estabilizadas. Las definiciones de diseño óptimo para este tipo de sistemas aparecen en [67, 68], para los sistemas con retardos o ceros RHP, y en [44] para los sistemas con polos RHP.

Conocida la definición de óptimo a emplear en el presente trabajo, a continuación, se presenta una descripción del proceso de diseño QFT SISO, en el que se analiza como alcanzar un diseño óptimo según la descripción propuesta por Horowitz. En QFT los objetivos de *performance* de lazo cerrado son fijados mediante el empleo de cotas que limitan la magnitud de la respuesta en frecuencia. Por ejemplo, el *performance* para el rechazo de perturbaciones en la salida⁶, está determinado por la función sensibilidad, que deberá cumplir

$$|T_d(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + l(j\omega)} \right| \leq W_d(\omega); \quad (3.6)$$

donde $W_d(\omega)$ se corresponde con la cota máxima que determina el comportamiento de lazo cerrado (ver [Subsección A.2.2](#)).

Como se describe en el [Apéndice A](#), las restricciones impuestas por las inecuaciones que garantizan el *performance* son evaluadas únicamente en un conjunto discreto de frecuencias. De este modo, en una frecuencia

⁶ En este caso se considera que la perturbación presenta una dinámica $p_d(j\omega) = 1$.

discreta ω_1 , en la que la cota superior $W_d(\omega)$ corresponde con $W_d(\omega_1) = w_d$, la especificación puede expresarse según

$$\left| \frac{1}{1 + l(j\omega_1)} \right| \leq w_d. \quad (3.7)$$

Por lo que en el caso límite, se tiene

$$\left| \frac{1}{1 + l_{\min}(j\omega_1)} \right| = w_d. \quad (3.8)$$

Por lo tanto, se define $l_{\min}(j\omega_1)$ como el contorno perteneciente al plano complejo que garantiza la condición de diseño por la mínima (véase la [Figura 3.3](#)). En el caso que nos ocupa, los puntos que definen $l_{\min}(j\omega_1)$ cumplen⁷

$$|l_{\min}|^2 + 2|l_{\min}| \cos \theta + \left(1 - \frac{1}{w_d^2}\right) = 0, \quad (3.9)$$

donde θ se corresponde con la fase de la función de lazo abierto $l(j\omega) = |l(j\omega)| \angle \theta(j\omega)$.

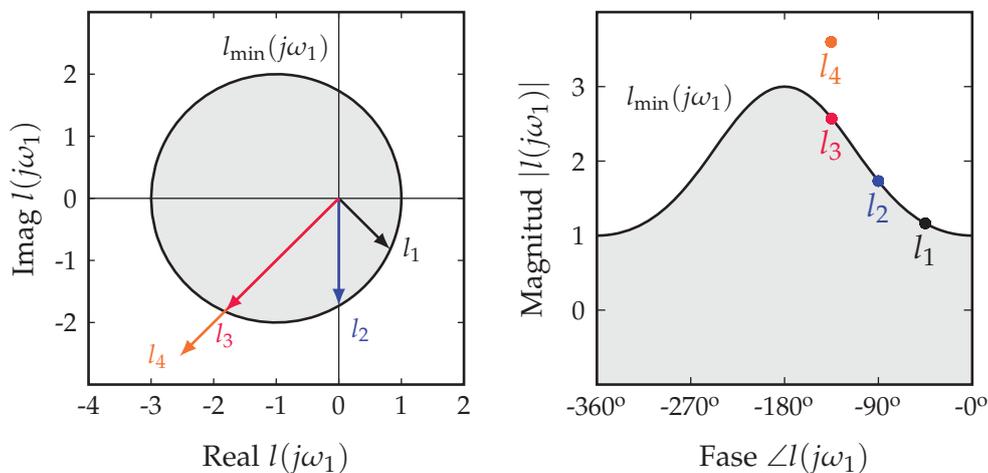


Figura 3.3: Restricción de la función de lazo abierto para $w_d = 0.5$.

La [Figura 3.3](#) muestra como la especificación (3.7) puede cumplirse mediante el empleo de infinitas combinaciones de magnitud-fase, siempre que éstas se encuentren fuera de la región sombreada delimitada por $l_{\min}(j\omega_1)$. Se analizarán las cuatro opciones de diseño $l_{1,\dots,4}$. Confirmado que todas ellas cumplen la condición de *performance* (3.7), ¿cuáles la satisfacen de forma óptima?. Compárense en primer lugar los diseños l_3 y l_4 .

⁷ Se omite la dependencia con la frecuencia para simplificar la notación.

Dado que en la frecuencia ω_1 la función de lazo abierto está determinada por $l(j\omega_1) = c(j\omega_1)p(j\omega_1)$, puede garantizarse que $|c_4(j\omega_1)| > |c_3(j\omega_1)|$. Es decir, dada una fase de diseño θ , la función de lazo abierto que garantiza el cumplimiento de la especificación con menor magnitud es aquella que se sitúa sobre el contorno l_{\min} . Analícese en segundo lugar la relación entre $l_1(j\omega)$, $l_2(j\omega)$ y $l_3(j\omega)$. Todos los diseños pertenecen a l_{\min} , pero puede establecerse la siguiente relación entre la magnitud de los controladores: $|c_3(j\omega_1)| > |c_2(j\omega_1)| > |c_1(j\omega_1)|$, puesto que $p(j\omega_1)$ es única. Como se ha descrito anteriormente, para alcanzar un diseño óptimo debe garantizarse la condición de *performance* con una función de lazo abierto de magnitud mínima. Por lo tanto, el diseño óptimo será aquel que presente una $l(j\omega)$ que se sitúe sobre los contornos $l_{\min}(j\omega)$ en todas las frecuencias de diseño, y además, lo hace buscando las fases de diseño que demandan un l_{\min} de menor magnitud. No debe seleccionarse estrictamente el punto de mínimo módulo en cada frecuencia discreta de diseño, ya que puede hacer el diseño inabordable en el resto de frecuencias. Pero siempre que sea posible, deberá emplearse un camino de fases que busque las regiones que demanden menor magnitud teniendo en cuenta todas las fases de diseño a lo largo de la frecuencia (l_1 en el caso que nos ocupa). Aunque pueda parecer que en bajas frecuencias estas pautas de diseño son irrelevantes (una mayor magnitud del controlador no implica mayor T_{uv} en baja frecuencia), es importante tenerlas en cuenta ya que la magnitud del controlador en media-alta frecuencia está ligada a la de baja frecuencia⁸, tal y como establecen las integrales de Bode [11].

3.2 FUNDAMENTOS CUANTITATIVOS Y COLABORACIÓN EN SISTEMAS MISO

En esta sección se presenta una cuantificación de la acción de control en sistemas MISO, así como un estudio de las condiciones a satisfacer para que exista una colaboración efectiva entre las plantas que forman el sistema. Como en la [Sección 3.1](#), se considera que las plantas son de fase mínima y, a priori, no se definen limitaciones sobre la acción de control. Por tanto, los objetivos de control (*performance* y márgenes de estabilidad) pueden lograrse empleando una única planta del conjunto

⁸ No puede reducirse la magnitud del controlador de forma drástica en un breve intervalo de frecuencias.

MISO o una combinación de las mismas. Este enfoque es diferente al empleado en muchas de las estrategias de diseño presentadas en la [Sección 2.4](#), donde el empleo de arquitecturas MISO tenía como objetivo la reducción de los costes de producción, maximizar la producción, vencer limitaciones de las plantas, etc.

3.2.1 Acción de control en sistemas MISO

En los sistemas SISO, el problema principal del control en lazo cerrado era el coste de la realimentación. En los sistemas MISO, existen múltiples alternativas para alcanzar los objetivos de *performance* deseados, ya que se dispone de n grados de libertad (acciones de control). Por lo tanto, se analizará la acción de control en cada una de las ramas con el fin de determinar la mejor alternativa.

Asumiremos $p_d(s) = 1$, considerando que esta planta actúa como un mero escalado frecuencial de cómo d afecta a cada acción de control u_i . En tal caso la función de lazo cerrado de cómo la perturbación d y el ruido v afectan a la acción de control u_i es la misma. Se obtiene

$$T_{u_i}(j\omega) = \frac{c_i(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)}, \quad (3.10)$$

donde $l_t(j\omega)$ corresponde con la función de lazo abierto global, que está determinada por

$$l_t(j\omega) = \sum_{i=1}^n l_i(j\omega) = c_m(j\omega) \sum_{i=1}^n p_i(j\omega), \quad (3.11)$$

para una estructura con únicamente un controlador maestro c_m ([Figura 2.7](#) con $c_i(j\omega) = 1$), por

$$l_t(j\omega) = \sum_{i=1}^n l_i(j\omega) = \sum_{i=1}^n c_i(j\omega) p_i(j\omega), \quad (3.12)$$

para una estructura de controladores $c_{i=1,\dots,n}$ en paralelo ([Figura 2.7](#) con $c_m(j\omega) = 1$), y por

$$l_t(j\omega) = \sum_{i=1}^n \left[(-1)^{i+1} p_i(j\omega) \prod_{k=1}^i c_k^*(j\omega) \right], \quad (3.13)$$

para una estructura de controladores $c_{i=1,\dots,n}^*$ en serie ([Figura 2.5](#)).

Considérese para este estudio la estructura con controladores en paralelo por ser la más general y versátil⁹.

Para una mejor interpretación del consumo de acción de control T_{u_i} , puede multiplicarse el numerador y denominador por la planta p_i y por la función de lazo abierto l_t , obteniéndose

$$T_{u_i}(j\omega) = \frac{c_i(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \frac{p_i(j\omega) l_t(j\omega)}{p_i(j\omega) l_t(j\omega)}. \quad (3.14)$$

Relación que puede reescribirse según

$$T_{u_i}(j\omega) = \frac{l_t(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \frac{l_i(j\omega)}{l_t(j\omega)} \frac{1}{p_i(j\omega)} = T(j\omega) \frac{l_i(j\omega)}{l_t(j\omega)} \frac{1}{p_i(j\omega)}. \quad (3.15)$$

De este modo, la función de transferencia de interés en el caso MISO queda expresada de forma similar a la empleada en la [Subsección 3.1.1](#) para el caso SISO. Comparando ambas, ahora aparece un término adicional $l_i(j\omega)/l_t(j\omega)$, que como se describirá posteriormente es determinante para la cuantificación de la cantidad de realimentación demandada.

Una vez que la acción de control se encuentra expresada en función de la sensibilidad complementaria ($T(j\omega)$) del conjunto MISO, y dado que los controladores de realimentación son diseñados para que ésta se comporte según unos criterios de *performance* establecidos, es posible efectuar las aproximaciones empleadas en la [Subsección 3.1.1](#) para el caso SISO.

Como en todo diseño de control, el objetivo del sistema MISO en baja frecuencia¹⁰ ($\omega < \omega_{cg}$) es proporcionar baja sensibilidad, para lo que la función de lazo abierto global $l_t(j\omega)$ debe presentar alta magnitud. De forma aproximada, podemos garantizar que si $|l_t(j\omega)| \gg 1$ en $\omega < \omega_{cg}$, la función sensibilidad complementaria cumple $|T(j\omega)| \approx 1$ en $\omega < \omega_{cg}$. Teniendo en cuenta la relación anterior, puede aproximarse $T_{u_i}(j\omega)$ en baja frecuencia por

$$|T_{u_i}(j\omega)| \approx \left| \frac{1}{p_i(j\omega)} \right| \left| \frac{l_i(j\omega)}{l_t(j\omega)} \right|, \quad \forall \omega < \omega_{cg}. \quad (3.16)$$

⁹ El resto de estructuras pueden ser transformadas de forma directa en una estructura paralelo (ver [Sección 2.3](#)).

¹⁰ Se considera ω_{cg} la pulsación en la que la función de rama global $l_t(j\omega)$ cruza la magnitud de 0 dBs.

Obsérvese como la acción de control depende de la magnitud de la planta (tal como ocurre en el caso SISO) y de la relación entre la magnitud de la rama l_i y la rama total l_t . Definiendo

$$x_i(\omega) = \frac{|l_i(j\omega)|}{|l_t(j\omega)|}, \quad (3.17)$$

puede reescribirse (3.16) como

$$|T_{u_i}(j\omega)| \approx \left| \frac{x_i(\omega)}{p_i(j\omega)} \right| = |T_{u_i, \text{SISO}}(j\omega)| x_i(\omega), \quad \forall \omega \ll \omega_{cg}. \quad (3.18)$$

En esencia, la acción de control resultante en baja frecuencia corresponde con la obtenida si se emplea la planta p_i en solitario, $|T_{u_i, \text{SISO}}|$, ponderada por la relación x_i entre la magnitud de las ramas l_i y l_t . De ello se deduce que en las frecuencias en las que $x_i(\omega)$ cumpla $x_i(\omega) < 1$, la planta i demandará una acción de control menor, para satisfacer las necesidades de *performance* en baja frecuencia, que la demandada si la planta p_i trabajara en solitario dentro de un lazo SISO. Además, la magnitud de T_{u_i} será menor cuanto menor sea el factor $x_i(\omega)$. Del mismo modo, se deduce que en los casos en los que se cumpla $x_i(\omega) > 1$ el sistema MISO empleará una acción de control u_i mayor que la demandada por la planta trabajando en solitario. Es evidente, que estos casos son indeseados y deberán ser evitados en la medida que sea posible. Posteriormente, la [Subsección 3.2.2](#) mostrará la relación entre los diferentes coeficientes x_i necesarios para lograr l_t , dando pautas sobre cómo deben contribuir las diferentes ramas a lo largo de la frecuencia para alcanzar de forma combinada la función l_t , demandada por la especificación de comportamiento en lazo cerrado.

Véase como en los sistemas MISO, el estudio de la magnitud de las acciones de control en baja frecuencia tiene la misma o mayor importancia que el estudio de los efectos producidos en alta frecuencia. Esta es una diferencia notable con respecto del caso SISO, en el que la magnitud de la acción de control en baja frecuencia estaba determinada exclusivamente por el módulo de la planta, y por lo tanto, no podía ser objeto de diseño.

Estudiada la acción de control en baja frecuencia, se analiza la misma en alta frecuencia. Una vez superada la frecuencia de cruce de ganancia ω_{cg} puede considerarse $|l_t(j\omega)| \ll 1$, obteniéndose

$$|T_{u_i}(j\omega)| \approx |l_t(j\omega)| \left| \frac{1}{p_i(j\omega)} \right| \left| \frac{l_i(j\omega)}{l_t(j\omega)} \right| = |c_i(j\omega)|, \quad \forall \omega > \omega_{cg}. \quad (3.19)$$

Como en el caso SISO, la acción de control en alta frecuencia depende del módulo del controlador c_i (cantidad de realimentación). En función del controlador c_i empleado en cada una de las ramas, el ruido será amplificado o atenuado en dicha rama. Si se considera que todos los controladores $c_i(j\omega)$ son estrictamente propios, existirá una pulsación ω_{G_i} a partir de la cual el módulo del controlador c_i será inferior a la unidad, momento a partir del cual el ruido es atenuado y deja de asociarse un coste a la realimentación.

Tal como ocurre en el caso SISO, la magnitud de los controladores c_i , no puede reducirse de forma drástica en el entorno de la pulsación de cruce de ganancia, puesto que se compromete la estabilidad del conjunto MISO. Si se analiza el problema en términos de la rama total l_t , el valor de mayor amplificación de ruidos se producirá en la pulsación de cruce de ganancia, momento en el que la función sensibilidad complementaria (implicada en el cálculo de u_i) presenta su magnitud máxima, que será aproximadamente igual a la definida por la especificación de estabilidad robusta¹¹. En conclusión, la acción de control máxima está determinada por

$$\begin{aligned} |T_{u_i}(j\omega_{cg})| &\approx \left| \frac{W_s}{p_i(j\omega_{cg})} \right| x_i(\omega_{cg}) \\ &= |T_{u_i, \text{SISO}}(j\omega)| x_i(\omega_{cg}), \quad \forall \omega \ll \omega_{cg}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Del mismo modo que en el caso anterior, la acción de control máxima (o la amplificación de ruidos máxima) se corresponde con la obtenida para la planta p_i trabajando en solitario dentro de un lazo SISO, ponderada por el factor $x_i(\omega_{cg})$ que indica cómo contribuye la rama l_i a la consecución de l_t en la pulsación de cruce de ganancia. La magnitud de T_{u_i} máxima determina de forma directa la amplificación de ruidos en el actuador de la planta i , dado que a mayor magnitud, mayor será el intervalo frecuencial necesario para que la magnitud T_{u_i} decrezca, y por lo tanto, ω_{G_i} (pulsación a partir de la cual la rama i deja de amplificar ruido) se desplaza a la región de alta frecuencia.

Del estudio de (3.20) se deduce que mientras el factor $x_i(\omega_{cg})$ cumple $x_i(\omega_{cg}) < 1$, la amplificación de ruidos será inferior a la obtenida si la planta p_i se encargase de la regulación del sistema en solitario. Por

¹¹ Se considera que la estabilidad se impone en términos de la función de rama total. Es decir, para garantizar la estabilidad del conjunto MISO, se evita que l_t penetre en el *M-circle* definido por la cota W_s .

el contrario, cuando se cumpla $x_i(\omega_{cg}) > 1$, se producirá un desplazamiento a la región de alta frecuencia de ω_{G_i} , que conllevará una mayor amplificación de ruidos si se compara con la de la planta trabajando en solitario.

En conclusión, las acciones de control en los sistemas MISO deben ser evaluadas en todo el espectro frecuencial, puesto que además de depender del módulo de las plantas y de las especificaciones de diseño, dependen de forma directa de la contribución de l_i en la consecución de l_t . En principio, cuanto mayor sea el módulo de la planta menor será la acción de control demandada por la misma. Por el contrario, cuanto menor sea la contribución de una rama a la consecución de la función de rama total, menor será la acción de control demandada por dicha rama. Véase como reducir la contribución x_i de una planta, implica el empleo de un controlador de menor magnitud, dada la relación

$$c_i = x_i(\omega) \frac{l_t(\omega)}{p_1(\omega)}. \quad (3.21)$$

Por lo tanto, si se desea reducir la acción de control demandada, deberá reducirse la cantidad de realimentación (ganancia del controlador $|c_i(j\omega)|$) en cada una de las ramas. En adelante y para el problema del regulador (rechazo de perturbaciones), emplearemos indistintamente la terminología cantidad de realimentación o acción de control, en una rama, para hacer referencia a $|c_i(j\omega)|$. Por último, debe tenerse en cuenta que reducir la cantidad de realimentación de una rama (la contribución en la consecución de l_t), implica que otra rama deberá encargarse de dichas tareas, demandando una mayor realimentación en dicha rama, que conlleva un mayor gasto de acción de control en la nueva rama. Dicho de otro modo, reducir en una pulsación el factor $x_i(\omega)$, producirá un aumento en los factores $x_{j \neq i}(\omega)$, implicando que aumente la acción de control las ramas $j \neq i$.

3.2.2 Colaboración en sistemas MISO

En la sección anterior se ha analizado de forma detallada como la acción de control en sistemas MISO depende de las especificaciones de control deseadas (*performance y/d* y estabilidad), de los módulos de las plantas que componen el sistema y de la contribución de cada una de las ramas l_i en la conformación de la función de lazo abierto total l_t para

satisfacer las especificaciones. En última instancia, el objetivo del diseñador debe ser satisfacer los objetivos de control empleando el menor controlador en cada una de las ramas. Si se logra el objetivo propuesto, se reducirá la amplificación de ruidos de alta frecuencia y el valor de régimen permanente necesario para combatir perturbaciones. Estas dos ventajas reducirán la fatiga en los actuadores y permitirán combatir perturbaciones o seguir referencias de mayor amplitud.

La presente sección analiza cómo deben ser las ramas del sistema MISO para que éstas puedan colaborar en la consecución del objetivo de control propuesto. Además, se analiza cuándo es interesante desde un punto de vista práctico forzar dicha colaboración. Es decir, se describen las condiciones a cumplir por el diseño MISO para que el empleo de más de una acción de control repercuta en un beneficio operativo. Las conclusiones alcanzadas en la presente sección constituyen los cimientos sobre los que se articulan los procedimientos de diseño presentados en capítulos posteriores.

Considérese el problema de rechazo de perturbaciones analizado en la [Sección 3.1](#). En este caso, la especificación (3.6) puede expresarse según

$$|T_d(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_d(\omega). \quad (3.22)$$

En la frecuencia discreta ω_1 , la especificación anterior se especifica como

$$|T_d(j\omega_1)| = \left| \frac{1}{1 + l_t(j\omega_1)} \right| \leq w_d. \quad (3.23)$$

De donde se deduce que existe una función de lazo abierto $l_t(j\omega_1)$ que satisface por la mínima la condición de diseño. Siguiendo los mismos pasos que en la [Subsección 3.1.2](#) puede obtenerse el contorno $l_{t,\text{mín}}(j\omega_1)$ que define la región en la que se satisface la condición de forma estricta. En este caso $l_{t,\text{mín}}$ se encuentra definido por

$$|l_{t,\text{mín}}|^2 + 2|l_{t,\text{mín}}| \cos \theta_t - (1 - w_d^2) = 0, \quad (3.24)$$

y presenta la misma forma y dimensión que el contorno $l_{\text{mín}}(j\omega_1)$ presentado en la [Figura 3.3](#). Nuevamente, existirá un punto en $l_{t,\text{mín}}(j\omega_1)$ que satisface la condición empleando una magnitud mínima. A este punto le denominamos $l_{t,\text{op}}(j\omega_1)$. Tal como ocurre en el problema SISO, este punto demandará menor cantidad de realimentación y, por lo tanto, corresponderá con el punto óptimo de diseño. Las mismas consideraciones

analizadas en la [Subsección 3.1.2](#) para sistemas SISO deben tenerse en cuenta para la selección del óptimo MISO.

Por el momento, el problema es idéntico al problema SISO, dado que se trata de satisfacer la condición de diseño empleando la función de lazo abierto total de ganancia mínima. La diferencia principal con respecto al caso SISO radica en que en el problema MISO existen infinitas combinaciones de rama que dan como resultado $l_{top}(j\omega_1)$. Es decir, existen infinitos diseños de control que satisfacen

$$l_{top}(j\omega_1) = \sum_{i=1}^n l_{i_a}(j\omega_1) = \sum_{i=1}^n l_{i_b}(j\omega_1) = \cdots = \sum_{i=1}^n l_{i_z}(j\omega_1), \quad (3.25)$$

donde el subíndice a, b, \dots, z designa cada una de las posibles soluciones del problema de control. Véase como ejemplo la [Figura 3.4](#). En ella se presentan cuatro alternativas para conseguir que un sistema MISO con dos ramas l_1 y l_2 , en una frecuencia ω_1 , presente una función de lazo abierto $l_t(j\omega_1)$ que recaer en una fase determinada sobre $l_{t,mín}(j\omega_1)$. Dado que los cuatro diseños presentan la misma $l_t(j\omega_1)$, su *performance* de lazo cerrado será idéntico en dicha frecuencia. Por lo tanto, si para un mismo *performance* existen diferentes alternativas, debe determinarse cual de ellas da lugar al diseño más adecuado. Para ello, debe analizarse la acción de control (cantidad de realimentación) empleada en cada uno de los casos para lograr el mismo objetivo.

Analícense en primer lugar los diseños a y b . La magnitud de la rama l_1 en los dos casos cumple $|l_{1_a}(\omega_1)| > |l_{1_b}(\omega_1)| > |l_t(\omega_1)|$, hecho que implica que el factor x_1 cumpla $x_{1_a}(\omega_1) > x_{1_b}(\omega_1) > 1$. Recuérdese que el factor de reparto x_i tenía una influencia directa en la cantidad de realimentación (acción de control) demandada por la rama i . Tanto en el caso a como en el b , se obtiene un coeficiente de reparto para la planta p_1 mayor a la unidad, implicando que el sistema MISO demanda una acción de control en la frecuencia ω_1 superior a la demandada por la planta p_1 trabajando en solitario en un lazo de control SISO. Es decir, no se está obteniendo ningún beneficio del empleo de dos ramas de control, puesto que el gasto de acción de control aumenta con respecto del caso SISO.

En segundo lugar, analícense las soluciones de control c y d . En este caso, las magnitudes de las ramas satisfacen $|l_{1_d}(\omega_1)| < |l_{1_c}(\omega_1)| < |l_t(\omega_1)|$ y $|l_{2_d}(\omega_1)| = |l_{2_c}(\omega_1)|$. Y por lo tanto, los coeficientes de reparto satisfacen $x_{1_d}(\omega_1) < x_{1_c}(\omega_1) < 1$ y $x_{2_c}(\omega_1) = x_{2_d}(\omega_1) < 1$. Véase como todos los coeficientes de reparto son inferiores a la unidad, y por lo tanto, en

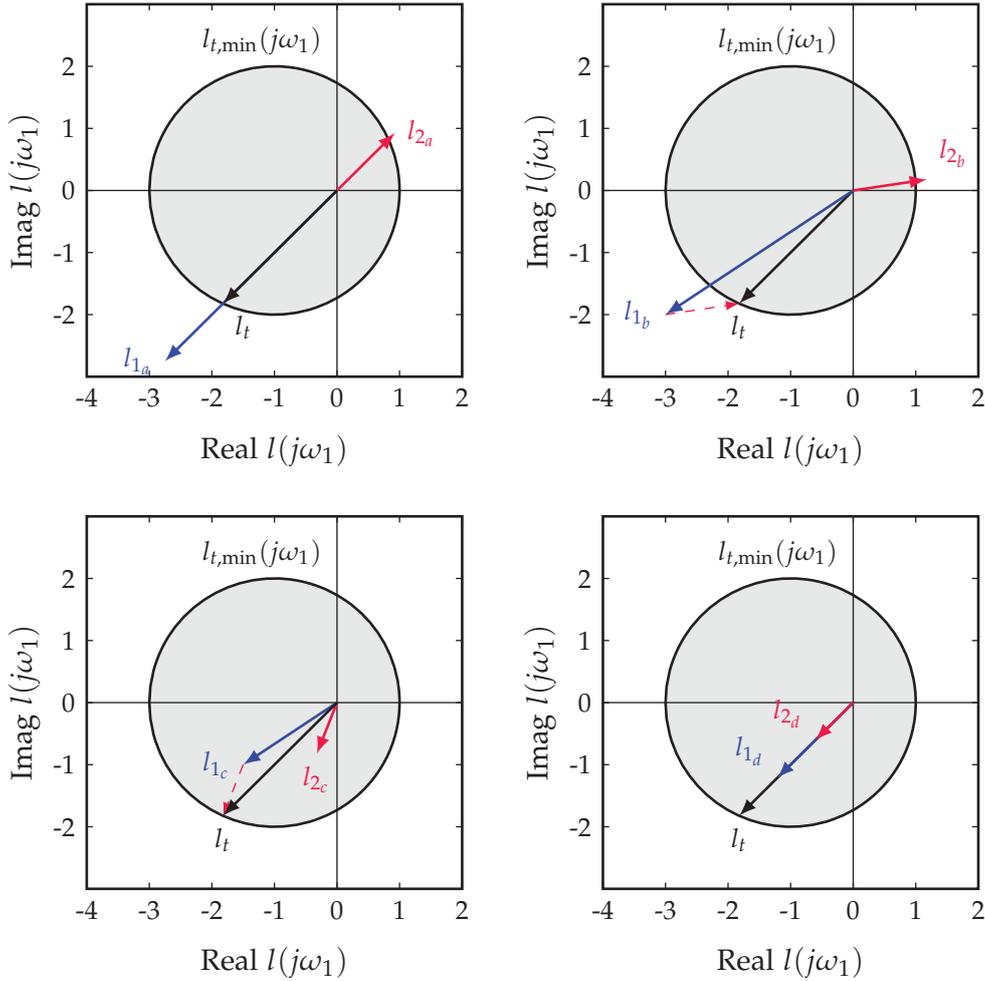


Figura 3.4: Ejemplos de diseño de l_1 y l_2 que dan lugar a una misma l_t .

los dos casos de diseño, las acciones de control demandadas serán inferiores (en la pulsación evaluada) a las de las plantas trabajando de forma individual en lazos SISO. En conclusión, puede determinarse que en los dos casos se obtiene una mejora, pero ésta es más importante en la opción de diseño d , puesto que para un mismo gasto de acción de control u_2 , se obtiene una menor magnitud en u_1 . Además, puede comprobarse como una vez fijada la rama $l_{2d}(j\omega_1)$, no existe ninguna rama $l_1(j\omega_1)$ que presente un módulo inferior al de $l_{1d}(j\omega_1)$. Es decir, una vez fijada la rama l_2 , el diseño $l_{1d}(j\omega_1)$ puede considerarse óptimo.

Las conclusiones anteriores se derivan de que las ramas se combinan para generar la función de rama total a partir de sumas vectoriales. Para que los módulos de las ramas se combinen de forma perfecta (den lugar a un módulo máximo) éstas deben encontrarse en fase. Si se garantiza

que todas las ramas del sistema MISO se encuentran en fase, en todas las frecuencias, el sistema cumplirá

$$|l_t(j\omega)| = \sum_i^n |l_i(j\omega)|. \quad (3.26)$$

Y se garantizará que el módulo de cada una de las ramas es aprovechado totalmente para generar l_t . En estos casos, puede asumirse que se logra una *colaboración perfecta* ente las ramas.

Cuando las ramas no se encuentran en fase, pueden presentarse dos situaciones. La primera, corresponde a los casos en los que el desfase entre las ramas es pequeño. En estas situaciones los módulos de las ramas serán inferiores al de la rama total $|l_t(j\omega)| > |l_i(j\omega)|$ (ver caso *c* en la [Figura 3.3](#)). Pese a ello, se considera que las ramas colaboran, puesto que sus módulos se combinan para dar lugar a una rama total de mayor magnitud. La segunda situación corresponde a los casos en los que el desfase entre ramas es elevado. En estas situaciones el módulo de alguna de las ramas del sistema será mayor que el de la rama total $|l_t(j\omega)| < |l_j(j\omega)|$. Se considera que no existe colaboración entre las ramas, ya que éstas en lugar de colaborar, compiten por la regulación del sistema, degradando sus efectos y dando lugar a acciones de control superiores a las necesarias. Por lo tanto, el diseñador deberá evitar dichas situaciones.

Si se desea cuantificar el desfase máximo entre las ramas para obtener una colaboración, debe analizarse el módulo de la rama total y compararse con el de las ramas individuales. Por simplicidad, supóngase que se dispone de un sistema compuesto por dos ramas. La magnitud de la función de lazo abierto total está determinada por

$$|l_t| = |l_1 + l_2| = \sqrt{|l_1|^2 + |l_2|^2 + 2|l_1||l_2|\cos(\theta_1 - \theta_2)}, \quad (3.27)$$

donde $l_1 = |l_1|\angle\theta_1$ y $l_2 = |l_2|\angle\theta_2$. El módulo de l_t será superior al de la rama l_1 siempre que se cumpla

$$|l_2| \geq 2|l_1|\cos(\theta_1 - \theta_2). \quad (3.28)$$

Dado que la condición anterior queda garantizada para desfases inferiores a $\pm 90^\circ$, puede considerarse éste como el desfase límite si se desea alcanzar algún tipo de colaboración entre ramas.

Por el momento se han alcanzado las siguientes conclusiones:

- Las condiciones de *performance* deben lograrse empleando funciones de lazo abierto total l_t de ganancia mínima, puesto que esto repercute en el empleo de menor acción de control (cantidad de realimentación) en las ramas.
- Las ramas del sistema colaboran perfectamente si se encuentran en fase. Si se desea que dos o más ramas colaboren en las tareas de control, en una frecuencia discreta, deberá reducirse su desfase. En todo caso, si se desea una colaboración entre ramas, deben evitarse desfases entre éstas superiores a $\pm 90^\circ$.

Llegados a este punto, queda una única cuestión por resolver. Esta concierne al grado de participación o colaboración que debe asignarse a cada una de las plantas, en cada una de las frecuencias. Es decir, definida en la frecuencia ω_1 , la función de lazo abierto deseada $l_t(\omega_1)$, y garantizado un desfase nulo entre las ramas ¿cuánto debe contribuir la rama l_i en la consecución de l_t ? . O dicho de otro modo, ¿cómo deben asignarse los factores de reparto $x_i(\omega_1)$ de cada una de las ramas en dicha frecuencia para conseguir $l_t(\omega_1)$?

Para simplificar el problema, supónganse plantas sin incertidumbre, que presentan todos sus polos y ceros en el semiplano izquierdo. En estos casos pueden emplearse controladores ideales determinados por

$$c_i(j\omega) = x_i(\omega) \frac{l_t(j\omega)}{p_i(j\omega)}. \quad (3.29)$$

Bajo esta suposición, cada una de las ramas l_i toma la forma

$$l_i(j\omega) = x_i(\omega) \frac{l_t(j\omega)}{p_i(j\omega)} p_i(j\omega) = x_i(\omega) l_t(j\omega), \quad (3.30)$$

y la rama total cumple

$$l_t(j\omega) = l_t(j\omega) \sum_{i=1}^n x_i(\omega). \quad (3.31)$$

Para obtener una rama total adecuada bastará con seleccionar los coeficientes de reparto $x_i(\omega)$ de forma que satisfagan

$$\sum_{i=1}^n x_i(\omega) = 1, \quad \forall x_i(\omega) \leq 1. \quad (3.32)$$

Véase como todos los controladores presentan una parte común ($l_t(j\omega)$) y una parte propia ($x_i(\omega) / p_i(j\omega)$), que depende de la planta y del factor

de reparto. Si se desea cuantificar y reducir el módulo del controlador de cada una de las ramas¹², deberán analizarse las relaciones entre los coeficientes de reparto y los módulos de las plantas. Para minimizar el controlador de todas las plantas, debe buscarse un equilibrio entre todas ellas. Esto puede lograrse planteando un sistema con n ecuaciones y n incógnitas (factores de reparto $x_i(\omega)$). El sistema de ecuaciones a resolver está compuesto por la ecuación (3.32) y $n - 1$ ecuaciones

$$\frac{x_i(\omega)}{|p_i(\omega)|} = \frac{x_{i+1}(\omega)}{|p_{i+1}(\omega)|}, \quad i = 1, \dots, n - 1. \quad (3.33)$$

A continuación, se muestran algunos ejemplos de aplicación:

- Sistema con dos ramas cuyas plantas tienen igual módulo, $|p_1| = |p_2|$. En este caso, los coeficientes de reparto ideales son: $x_1 = 1/2$ y $x_2 = 1/2$.
- Sistema con dos ramas tal que la relación entre los módulos de las plantas cumple: $|p_1| = 10|p_2|$. En este caso, los coeficientes de reparto ideales son: $x_1 = 10/11$ y $x_2 = 1/11$.
- Sistema con tres ramas tal que la relación entre los módulos de las plantas cumple: $|p_3| = |p_1|/10 = |p_2|/5$. En este caso, los coeficientes de reparto ideales son: $x_1 = 10/16$, $x_2 = 5/16$ y $x_3 = 1/16$.

Téngase en cuenta que estas operaciones de reparto deben realizarse en cada una de las frecuencias de diseño, para obtener la contribución de cada rama a lo largo de la frecuencia. En los ejemplos presentados se ha omitido la dependencia con la frecuencia para simplificar la notación.

Las propuestas presentadas en los ejemplos anteriores representan el caso ideal, en el que se fuerza a las ramas a colaborar por pequeños que sean los beneficios de dicha colaboración, o sea siempre que se encuentren en fase. Sin embargo, desde un punto de vista práctico carece de sentido hacer trabajar a una planta para lograr que otra disminuya en un pequeño porcentaje su acción de control (ver segundo ejemplo). En estas situaciones parece lógico hacer que una única planta se encargue de todas las tareas de control, inhibiendo a las plantas peor condicionadas y conservando su acción de control para emplearla en las frecuencias en la que realmente son necesarias. Esta afirmación puede no ser cierta

¹² Recuérdese que este es uno de los objetivos de diseño.

en casos en los que el sistema de control se encuentre tan mal condicionado que se requiera la colaboración entre las ramas por pequeños que sean los beneficios, pero será una regla para la mayor parte de los diseños.

Para establecer la toma de decisiones puede definirse un ahorro mínimo de acción de control, a partir del cual se considera oportuna la colaboración. Es decir, puede determinarse un umbral y a partir del mismo decidir si la colaboración es interesante o no. En este trabajo se considera, por defecto, que la colaboración es adecuada si la acción de control (cantidad de realimentación) resultante es $2/3$ de la obtenida por la planta trabajando en solitario. A efectos prácticos, para un sistema con dos plantas esta condición implica que el módulo de la planta de mayor magnitud, como máximo, debe ser el doble que el de la planta de menor magnitud. Es decir, $|p_1| = 2|p_2|$. Si se define la diferencia entre los módulos de las plantas como $|p_1| = \alpha|p_2|$, puede determinarse el valor de α máximo según

$$\alpha = \frac{1}{\frac{100}{\rho} - 1}, \quad (3.34)$$

donde ρ determina el porcentaje de la acción de control (cantidad de realimentación) empleada si se compara con la obtenida por la planta en solitario. Por ejemplo, si se desea que la colaboración de lugar a que la planta consuma un 80% de la acción de control SISO, el coeficiente α deberá cumplir

$$\alpha = \frac{1}{\frac{100}{80} - 1} = 4. \quad (3.35)$$

Es decir, la planta de módulo máximo deberá ser como máximo cuatro veces mayor que la de la planta de módulo mínimo.

Este criterio puede extenderse a sistemas que presenten n ramas en paralelo susceptibles de colaborar. En estos caso se emplea

$$\alpha = \frac{n - 1}{\frac{100}{\rho} - 1}, \quad (3.36)$$

donde n corresponde con el número de plantas que intervienen en la colaboración. Véase como último ejemplo un sistema con dos plantas en el que se desea una reducción de la acción de control del 50%. Para un sistema con dos plantas, el coeficiente α debe cumplir

$$\alpha = \frac{1}{\frac{100}{50} - 1} = 1; \quad (3.37)$$

corroborando que las plantas deben ser iguales para tal fin. Por el contrario, si se dispone de tres plantas, la diferencia entre sus magnitudes estará determinada por

$$\alpha = \frac{3 - 1}{\frac{100}{50} - 1} = 2, \quad (3.38)$$

indicando que no es necesario que dichas plantas sean exactamente iguales. Queda claro que un mayor número de plantas permite un mayor número de opciones de reparto, así como un aumento de la reducción de la ganancia de los controladores de las ramas.

Normalmente, cuando se trabaja con diagramas frecuenciales¹³ en los que la magnitud de las plantas es expresada en dB será interesante expresar el coeficiente α en dichas unidades. De este modo podrá determinarse si la colaboración entre las plantas es interesante observando la diferencia en la altura de los contornos de magnitud, como se describirá en capítulos más adelante. Véase como para un sistema con dos plantas sin incertidumbre, la colaboración será interesante en las frecuencias en las que los módulos de dichas plantas difieren una cantidad inferior a 6dBs ($20 \log_{10} 2 \approx 6$).

3.3 CONCLUSIONES SOBRE LA COLABORACIÓN MISO

Del estudio realizado en la [Sección 3.2](#) se extraen una serie de conclusiones que permiten determinar como realizar un diseño MISO de forma adecuada. A continuación se resumen las mismas:

1. Las ramas de un sistema con plantas en paralelo colaboran de forma perfecta cuando se encuentran en fase. Esta colaboración perfecta se reduce cuando el desfase entre las ramas aumenta. A efectos prácticos, la colaboración queda garantizada siempre que el desfase entre ramas sea inferior a 90° . Esta condición es conservadora. De forma estricta, una rama l_i colabora con un conjunto de ramas l_{t-i} si cumple

$$|l_n(j\omega)| \geq -2|l_{t-i}(j\omega)| \cos(\theta_{t-i}(j\omega) - \theta_i(j\omega)). \quad (3.39)$$

Téngase en cuenta que la relación anterior depende de la frecuencia.

¹³ Los diseños QFT se desarrollan a partir de diagramas de *Bode* y *Nichols*.

2. Si las ramas de un sistema MISO colaboran, los módulos de los controladores c_i , obtenidos para cada una de las ramas, serán inferiores a los controladores $c_{i,s}$, obtenidos si se regula el sistema empleando un lazo de control SISO en el que solo se emplea la planta p_i . En estos casos se satisface

$$|c_i(j\omega)| \leq |c_{i,s}(j\omega)|. \quad (3.40)$$

3. El empleo en una frecuencia discreta de una planta $p_k(j\omega)$ carece de interés si existe una planta o conjunto de plantas $p_{i \neq k}(j\omega)$ con magnitud muy superior a la de $p_k(j\omega)$ en dicha frecuencia. En estos casos, será más adecuado inhibir la planta en dicha frecuencia y conservar su acción de control para emplearla en las frecuencias en las que realmente reporta beneficios.
4. Las plantas que no reportan beneficios en alta frecuencia deben ser inhibidas del lazo de control en dichas frecuencias para evitar la fatiga de los actuadores.
5. Las plantas que no reportan beneficios al lazo de control en baja frecuencia deben ser inhibidas en dichas frecuencias para conservar un mayor rango de actuación y reducir las posibilidades de saturación.
6. La estructura de control MISO con un único controlador maestro no resulta adecuada para el control de sistemas MISO, puesto que no permite inhibir las plantas en las frecuencias en las que no es interesante su empleo.
7. Para poder alcanzar un diseño MISO $1 \times n$ adecuado, es necesario emplear arquitecturas de control que presenten al menos n grados de libertad para el control en lazo cerrado (estructura serie, estructura paralelo con $c_m(j\omega) = 1$ y estructura paralelo con maestro-esclavos). Estas estructuras permiten satisfacer las condiciones de *performance* con la planta/plantas mejor condicionadas en cada frecuencia, desconectando del lazo de control las plantas que no reportan beneficios.

 METODOLOGÍA DE DISEÑO MISO QFT

A continuación, se presenta una nueva metodología de diseño QFT MISO para sistemas reguladores. La estrategia de diseño propuesta permite alcanzar diseños robustos y que emplean la menor cantidad de realimentación en cada frecuencia para cada una de las plantas que forman el sistema MISO.

4.1 ESTRUCTURA Y FUNDAMENTOS

Considérese la estructura de la [Figura 4.1](#). Cada planta en paralelo p_i , con $i = 1, \dots, n$, define el efecto de la variable manipulable u_i sobre la única variable controlada y . La planta p_d define como las perturbaciones no medibles d desvían la salida y del punto de consigna r . Un conjunto de controladores en paralelo c_i , con $i = 1, \dots, n$, son diseñados para minimizar dicha desviación. Cada c_i calcula la acción de control u_i en función de la única medida de la salida y . Dicha medición es alterada por ruidos de alta frecuencia v . De acuerdo a la estructura de control, las funciones de lazo cerrado que determinan el comportamiento del sistema son

$$y = \frac{p_d}{1 + l_t} d - \frac{l_t}{1 + l_t} v, \quad (4.1)$$

$$y_i = -\frac{l_i p_d}{1 + l_t} d - \frac{l_i}{1 + l_t} v, \quad (4.2)$$

$$u_i = -\frac{c_i p_d}{1 + l_t} d - \frac{c_i}{1 + l_t} v, \quad (4.3)$$

donde $l_i = p_i c_i$ es la función de transferencia de lazo abierto de cada una de las ramas y

$$l_t = \sum_{i=1}^n l_i, \tag{4.4}$$

es la función de lazo abierto total.

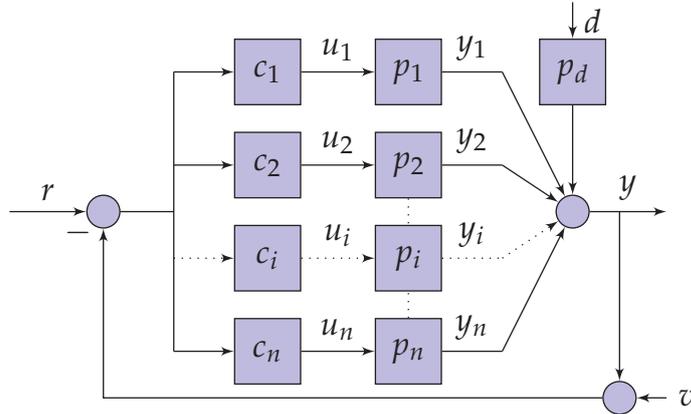


Figura 4.1: Estructura de control MISO para sistemas reguladores.

En el diseño de los controladores se tiene en cuenta las incertidumbre paramétrica¹ en los modelos de las plantas. Para ello, se define el vector $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_m]$, que contiene todos los parámetros que aparecen en las funciones de transferencia

$$\mathcal{P} = \{p_1(j\omega), p_2(j\omega), \dots, p_n(j\omega), p_d(j\omega)\}. \tag{4.5}$$

Cada parámetro q_i varía entre un rango superior e inferior. Por lo tanto, el vector de incertidumbre \mathbf{q} pertenece a un hiper-rectángulo en \mathbb{R}^m llamado espacio de la incertidumbre \mathcal{Q} . Es decir,

$$\mathbf{q} \in \mathcal{Q} \triangleq \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m \mid q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, i = 1, \dots, m\}. \tag{4.6}$$

El propósito del control QFT es hacer cumplir las especificaciones de lazo cerrado para todos los elementos dentro del espacio de la incertidumbre. En este caso, las especificaciones incluyen la estabilidad robusta²

$$\left| \frac{l_t(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_s(\omega); \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \tag{4.7}$$

¹ Ver [Apéndice A](#) para obtener una descripción más detallada de la definición de incertidumbre.
² En este capítulo se emplea una primera condición de estabilidad generada como una extensión del método SISO. Un estudio detallado de las condiciones de estabilidad se presenta en el [Capítulo 5](#).

y el rechazo robusto de perturbaciones

$$\left| \frac{p_d(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_d(\omega); \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (4.8)$$

donde $W_s(\omega)$ y $W_d(\omega)$ son las tolerancias superiores para la magnitud de cada respuesta frecuencial en lazo cerrado³. Como en el caso SISO, las especificaciones de diseño son evaluadas y garantizadas únicamente en un conjunto discreto de frecuencias, que denominamos Ω .

La metodología de diseño propuesta emplea dos etapas de diseño. En la primera se establece el reparto frecuencial de la realimentación, de forma que se maximicen los beneficios de cada una de las plantas y se reduzca al máximo el coste de la realimentación (Sección 4.2). Este reparto de tareas se lleva a cabo de forma cuantificada y teniendo en cuenta la incertidumbre paramétrica. En la segunda etapa de diseño se lleva a cabo el *loop-shaping* de controladores para que el sistema trabaje según el reparto de tareas establecido en la primera etapa de diseño (Sección 4.3).

4.2 REPARTO FRECUENCIAL DE LA REALIMENTACIÓN

La esencia del método es cuantificar la cantidad de realimentación. Para ello, se evalúa en primer lugar la cantidad de realimentación $|c_i(j\omega)|$ que cada planta $|p_i(j\omega)|$ demanda trabajando en solitario para cumplir las especificaciones de control (4.7) y (4.8). Es decir, se asume $c_{j \neq i}(j\omega) = 0$. La ganancia requerida es expresada gráficamente con contornos QFT evaluados en la frecuencia ω , denominados $\beta_{c_i}(\omega)$. El cálculo de los contornos $\beta_{c_i}(j\omega)$ se realiza en dos etapas⁴. En primer lugar, se emplea la instrucción *sisobnds* de la *Terasoft QFT Toolbox* [12] para calcular los *bounds* que garantizan la estabilidad robusta (4.7) y el rechazo robusto de perturbaciones (4.8). En un segundo paso, se elimina el módulo de la planta nominal realizando en cada frecuencia la operación

$$\beta_{c_i}(\omega) = \beta_{l_i}(\omega) / |p_{i_o}(\omega)|. \quad (4.9)$$

Nótese que a diferencia de los contornos QFT tradicionales, éstos expresan en el eje vertical la ganancia del controlador, no la ganancia de

³ La selección de las cotas $W_s(\omega)$ y $W_d(\omega)$ es realizada del mismo modo que en los sistemas SISO, ya que se establecen para el conjunto del sistema. Véase el Apéndice A y Apéndice B para una descripción más detallada.

⁴ Puede realizarse en un único paso de diseño empleando la instrucción *genbnds* y una planta nominal $p_{i_o}(j\omega)^* = 1 \angle \theta_i$. Planta con módulo unitario y fase igual a la de $p_{i_o}(j\omega)$.

la función de lazo abierto nominal $|l_{i_0}(j\omega)|$. Estos contornos no son empleados para el diseño de controladores, sino como comparación gráfica de la demanda de la realimentación en cada fase de diseño $\angle l_{i_0}(j\omega)$ para cada planta. Una vez que todos los contornos son calculados para una frecuencia discreta, se selecciona la fase de diseño Θ_d para realizar la comparación de contornos de acuerdo al siguiente criterio:

- a) Si uno de los contornos, por ejemplo $\beta_{c_k}(\omega)$, tiene una magnitud *sensiblemente* inferior al resto en la frecuencia de diseño Θ_d , entonces la regulación en dicha frecuencia debe ser realizada empleando la función de lazo abierto $l_k(j\omega)$, y el resto de ramas deben ser inhibidas reduciendo todo lo posible la magnitud de los controladores $c_{i \neq k}(j\omega)$. Una diferencia en magnitud de $20 \log m$ dB es una guía práctica para establecer la diferencia mínima entre las alturas, donde m corresponde con el número de plantas susceptibles de colaborar. Esta medida está basada en la reducción de ganancia obtenida en un sistema ideal con m plantas iguales, en el que se reduce m veces la cantidad de realimentación; véase la [Sección 3.2](#) para una explicación más detallada⁵. A modo de ejemplo, la [Figura 4.2](#) muestra el análisis para una estructura con dos ramas, que sugiere que en la frecuencia ω_1 el controlador $c_2(j\omega)$ debe hacerse cargo de las tareas de control sea cual sea la fase de diseño Θ_d seleccionada.
- b) Si varios contornos se sitúan en la parte inferior y sus magnitudes en la fase de diseño Θ_d no difieren *demasiado* entre ellas, sus plantas deben asociarse para compartir las tareas de control. Las ramas que no presenten contornos localizados alrededor del grupo señalado deben ser inhibidas, reduciendo la magnitud de sus controladores. En este caso, mantener una distancia entre los contornos inferior a $\pm 20 \log m$ dB es una regla práctica para determinar si un conjunto de m plantas deben colaborar. En consecuencia, el ejemplo de la [Figura 4.2](#) sugiere que los controladores $c_1(j\omega)$ y $c_2(j\omega)$ deben colaborar en las tareas de control en la frecuencia ω_2 , sea cual sea la fase de diseño Θ_d seleccionada.

⁵ Como se describe en el CASO B de la [Sección 3.2](#) puede establecerse un criterio diferente para determinar si las plantas deben colaborar o no. Para ello basta con determinar el porcentaje de reducción del controlador deseado.

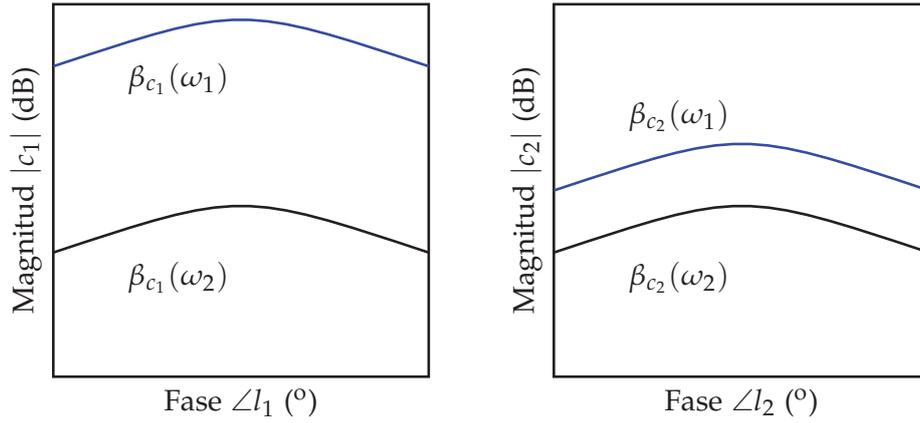


Figura 4.2: Ejemplo de demanda de realimentación en un sistema 1×2 .

4.3 DISEÑO DE CONTROLADORES EN PARALELO

Una vez decidido qué planta o plantas deben hacer frente a las especificaciones en cada frecuencia, se diseñan los n controladores en paralelo. El procedimiento presentado permite reducir el número de iteraciones necesarias para llegar a una solución adecuada. En cada paso de diseño un controlador es diseñado empleando el procedimiento de *loop-shaping* QFT, mientras que el resto de controladores se consideran constantes. Este procedimiento secuencial de diseño de controladores es llevado a cabo empleando la función *genbnds* de la *Terasoft QFT Toolbox* [12], que admite especificaciones generales de la forma

$$\left| \frac{A + BG}{C + DG} \right| \leq W. \quad (4.10)$$

Por lo tanto, si en un momento dado se diseña el controlador $c_k(j\omega)$, la especificación que garantiza la estabilidad robusta (4.7) puede ser expresada según

$$\left| \frac{\sum_{i \neq k} l_i(j\omega) + l_k(j\omega)}{1 + \sum_{i \neq k} l_i(j\omega) + l_k(j\omega)} \right| \leq W_s(\omega), \quad (4.11)$$

y los *bounds* que la garantizan pueden ser calculados mediante el empleo de $A = \sum_{i \neq k} l_i(j\omega)$, $B = p_k(j\omega)$, $C = 1 + \sum_{i \neq k} l_i(j\omega)$, $D = p_k(j\omega)$, $G = c_k(j\omega)$, $W = W_s(\omega)$ en (4.10). La especificación que garantiza el rechazo robusto de perturbaciones (4.8) puede ser expresada según

$$\left| \frac{p_d(j\omega)}{1 + \sum_{i \neq k} l_i(j\omega) + l_k(j\omega)} \right| \leq W_s(\omega), \quad (4.12)$$

y los *bounds* de rechazo de perturbaciones son calculados empleando $A = p_d(j\omega)$, $B = 0$, $C = 1 + \sum_{i \neq k} l_i(j\omega)$, $D = p_k(j\omega)$, $G = c_k(j\omega)$, $W = W_d(\omega)$. Téngase en cuenta que corresponden con *bounds* QFT que imponen condiciones en la función de lazo abierto $l_{k_o}(j\omega)$, y en consecuencia son denominados $\beta_{l_k}(\omega)$.

El procedimiento de diseño comienza ajustando todos los controladores a cero. A continuación, en la primera etapa de diseño, se comienza diseñando la rama/ramas que deben trabajar en baja frecuencia. En un orden creciente de frecuencias, el último paso corresponde con el diseño de la rama/ramas que trabajan en alta frecuencia. Durante cualquiera de los *loop-shapings*, las acciones a realizar en cada frecuencia dependen de la planificación del reparto de la realimentación realizada en la primera etapa. Como es común en un *loop-shaping* QFT, el diseño comienza satisfaciendo las condiciones impuestas por las especificaciones de baja a alta frecuencia. En alta frecuencia (frecuencia *roll-off*), se realiza una reducción brusca de la ganancia de la función de lazo abierto. La novedad del control MISO es que la ganancia lazo abierto también debe ser reducida en las frecuencias en las que la rama no debe colaborar. En consecuencia, se presentan dos objetivos a lograr en una frecuencia discreta ω : cuando una rama debe contribuir al *performance* de lazo cerrado y cuando una rama debe ser inhibida del lazo de control. Este segundo objetivo puede ser debido a que otras ramas se encargan de las tareas de control en dicha frecuencia o porque se ha alcanzado la frecuencia *roll-off* de la rama.

En las frecuencias en las que la rama/ramas deben contribuir a las tareas de diseño, pueden obtenerse las dos opciones de diseño detalladas a continuación. La [Figura 4.3](#) y la [Figura 4.4](#) muestran ejemplos de los dos casos. Los superíndices en los *bounds* indican el paso en el procedimiento de diseño secuencial.

- a) Una única planta $p_k(j\omega)$ es responsable de las tareas de diseño en la frecuencia ω_1 (ver el ejemplo de dos ramas de la [Figura 4.3](#)). En este caso, $l_{k_o}(j\omega_1)$ es situado sobre el *bound* $\beta_{l_k}(\omega_1)$ (ver la [Figura 4.3](#), donde l_{k_o} se corresponde con l_{1_o} y β_{l_k} con $\beta_{l_1}^0$). Finalizado el diseño y actualizados los *bounds*, se observa que el contorno de la rama k que indica la condición mínima no cambia (ver $\beta_{l_1}^1(j\omega_1)$). Sin embargo, como el cumplimiento de la condición de diseño se ha asegurado con $c_k(j\omega)$, el resto de contornos de diseño $\beta_{l_{i \neq k}}(\omega_1)$ delimitan una región de exclusión. Este hecho permite una reducción de la ganancia de las ramas $l_{i \neq k_o}(j\omega)$ en la frecuencia ω_1

cuando se lleven a cabo dichos diseños (comparar $\beta_{l_2}^I(j\omega_1)$ con $\beta_{l_2}^0(j\omega_1)$). Nótese que un sobrediseño del controlador c_k (mayor ganancia que la exigida por el contorno $\beta_{l_k}(\omega_1)$), produciría una mayor contracción de los contornos $\beta_{l_i \neq k}(j\omega_1)$ en el resto de los lazos.

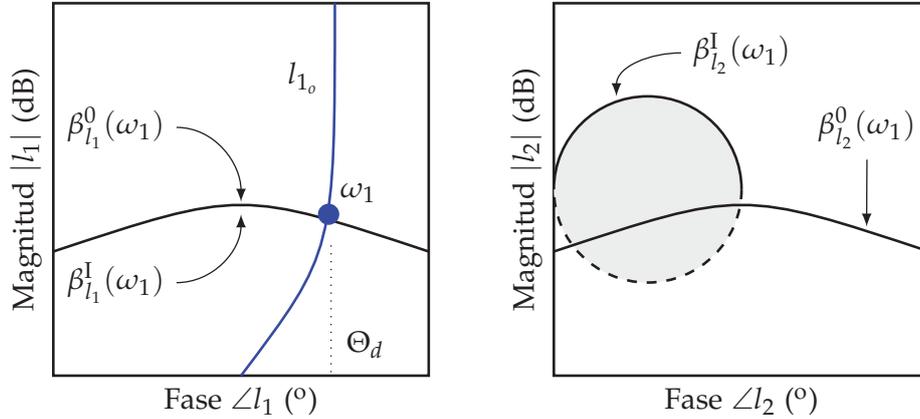


Figura 4.3: *Loop-shaping* para sistema 1×2 en el que una única planta trabaja en la frecuencia ω .

- b) Un grupo de m plantas deben compartir las tareas de control en ω_1 (ver el ejemplo de cuatro ramas de la [Figura 4.4](#), donde $m = 3$). El *loop-shaping* se realiza de forma conjunta tal como se indica. Por conveniencia, denominamos el grupo de plantas que comparten las tareas de control

$$p_{k_i}(j\omega) = \{p_{k_1}(j\omega), p_{k_2}(j\omega), \dots, p_{k_m}(j\omega)\}. \quad (4.13)$$

Se asume que el controlador $c_{k_1}(j\omega)$ es diseñado en primer lugar. El objetivo del diseñador es situar $l_{k_{1_0}}(j\omega_1)$ alrededor de $20 \log m$ decibelios debajo de $\beta_{l_{k_1}}(\omega_1)$ en la frecuencia de diseño Θ_d (ver l_{1_0} y $\beta_{l_1}^0$). Efectuado el diseño de $c_{k_1}(j\omega)$ y actualizados los contornos de diseño, se observa que el contorno $\beta_{l_{k_1}}(\omega_1)$ no cambia (ver $\beta_{l_1}^I$), pero aparece una depresión en el entorno de Θ_d para los *bounds* $\beta_{l_{k_j}}(\omega_1), j = 2, \dots, m$ (ver $\beta_{l_2}^I$ y $\beta_{l_3}^I$). Entonces, el diseño de $l_{k_{2_0}}(j\omega)$ se realiza situando $l_{k_{2_0}}(j\omega_1)$ alrededor de $20 \log(m - j + 1)$, $j = 2$, decibelios por debajo del contorno $\beta_{l_{k_2}}(\omega_1)$; (ver $\beta_{l_2}^I$). Una vez logrado, el contorno $\beta_{l_{k_2}}(\omega_1)$ no cambia (ver $\beta_{l_2}^{II}$), pero la depresión de los contornos $\beta_{l_{k_j}}(\omega_1), j \neq 2$ (ver $\beta_{l_1}^{II}$ y $\beta_{l_3}^{II}$) aumenta. El procedimiento continua del mismo modo. Se violan los *bounds* de diseño

de forma temporal, hasta que es realizado el diseño de $l_{k_{m_0}}(j\omega)$. En este último caso, el objetivo es situar $l_{k_{m_0}}(j\omega_1)$ sobre el contorno $\beta_{l_{k_m}}(\omega_1)$ cuya depresión se ha ampliado con el diseño de cada uno de los controladores anteriores $c_j(\omega_1)$, $j = 1, \dots, m - 1$ (ver $\beta_{l_3}^{\text{II}}$). Cuando este paso finaliza, todos los contornos violados en pasos anteriores ahora cumplen con la especificación (ver $\beta_{l_1}^{\text{III}}$, $\beta_{l_2}^{\text{III}}$ y $\beta_{l_3}^{\text{III}}$). Si las m plantas son idénticas en ω_1 , cada controlador $c_{k_1, \dots, m}(j\omega)$ habrá visto reducida su ganancia $20 \log m$ dB en comparación con la ganancia del controlador obtenido si sólo trabajara una planta en dicha frecuencia; esto es lo esperado según las conclusiones alcanzadas en la [Sección 3.2](#). Como es indicado en la [Sección 4.2](#), magnitudes comprendidas en un rango entre $\pm 20 \log m$ dB son admitidas para la cooperación, aunque este criterio es modificable de acuerdo a lo expuesto en la [Sección 3.2](#) si se desea una menor reducción. Para lograr una reducción de ganancia como la esperada según el estudio previo suelen ser necesarios algunos ajustes adicionales (iteraciones) con el fin de cumplir de forma precisa con cada uno de los $\beta_{l_{k_j}}(j\omega_1)$. Después de diseñar los m controladores encargados del *performance* en ω_1 , los *bounds* del resto de lazos (los que no deben colaborar en el *performance*) presentarán regiones de exclusión (ver $\beta_{l_4}^{\text{III}}$).

En las frecuencias en las que una rama/ramas no deben contribuir al *performance*, pueden surgir una gran variedad de situaciones, especialmente si disponemos de un sistema MISO con más de dos entradas. A continuación, se describen algunas de las más frecuentes. En cualquier caso, los contornos de diseño obtenidos tras cada iteración de diseño permiten evaluar las ventajas y desventajas de cada opción de diseño, como es inherente a cualquier diseño con múltiples grados de libertad.

- Consejos de diseño una vez alcanzada la frecuencia de *roll-off* (ω_r) del lazo k . La reducción de la ganancia de $l_{k_0}(j\omega_r)$ debe presentar un equilibrio entre la máxima atenuación del ruido y el mínimo orden de los controladores. Téngase en cuenta que pueden producirse dos situaciones. Por un lado, pueden aparecer *bounds* $\beta_{l_k}(\omega_r)$ que demandan una cierta realimentación en ω_r , pero existen otros lazos encargados de llevar a cabo el control en dichas frecuencias. En este caso, el lazo $l_{k_0}(j\omega)$ es diseñado violando temporalmente los *bounds* de las frecuencias *roll-off*. Después del diseño del resto de los lazos de control, los contornos $\beta_{l_k}(\omega_r)$ deben ser re-

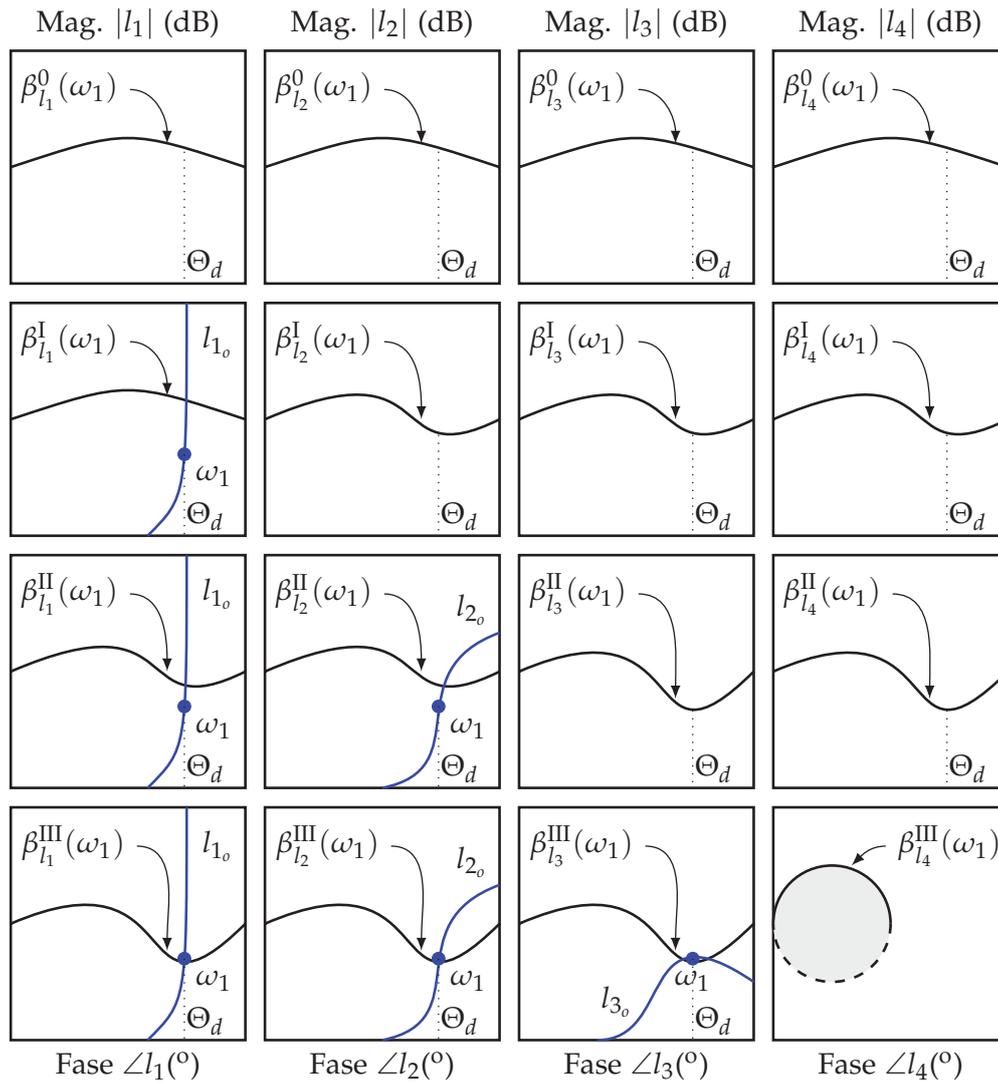


Figura 4.4: Tres plantas colaboran en ω para garantizar la especificación.

dibujados. Si todos los diseños se han realizado de forma adecuada se apreciarán regiones de exclusión en los contornos anteriormente violados, que $l_{k_o}(\omega)$ ahora cumple de forma automática. Pese a ello, futuras iteraciones pueden ser necesarias para optimizar la reducción de ganancia a partir de la frecuencia de *roll-off*. El caso opuesto sucede cuando el lazo k es diseñado en último lugar. En este caso, los contornos $\beta_{l_k}(\omega_r)$, que delimitan las regiones prohibidas, reflejan las restricciones definitivas que debe cumplir $l_{k_o}(j\omega)$ en pos de la máxima reducción de ganancia. En este caso el *loop-shaping* debe ser efectuado como en un sistema SISO.

- Consejos de diseño para las *bajas* frecuencias ω_{lf} en las que la planta k debe ser inhibida. En este caso los contornos $\beta_{l_k}(\omega_{lf})$ de-

limitan regiones de exclusión en ω_{lf} , cuando alguno de los otros lazos de control ya cumple con las especificaciones de control. La restricción para la reducción de la ganancia de $l_{k_o}(j\omega)$ en ω_{lf} viene condicionada por los *bounds* de mayor frecuencia, donde la planta k deberá contribuir en las tareas de control. Una reducción muy brusca de la ganancia del controlador en las frecuencias en las que debe ser inhibido puede producir que sea imposible alcanzar la especificación de diseño en frecuencias superiores empleando un controlador de orden razonable. Por ello, debe llevarse a cabo el proceso de conexión/desconexión de plantas empleando cambios suaves en la magnitud de los controladores.

4.4 EJEMPLOS DE DISEÑO

A continuación, se muestra la resolución de tres ejemplos de diseño, cada uno de ellos destinado a ilustrar una serie de conceptos importantes. El primero, muestra un ejemplo sin incertidumbre y su función es mostrar paso a paso el proceso de diseño. En él se ilustra de forma detallada como realizar el *loop-shaping* de controladores, permitiendo comprender de forma sencilla el procedimiento expuesto en la sección anterior. Se establece una comparativa con el empleo de un único controlador maestro, justificando el empleo de una estructura de control paralelo. El segundo, muestra un ejemplo real con incertidumbre, en el que la perturbación es introducida en el lazo de control a través de una dinámica con incertidumbre. Este segundo ejemplo permite validar la técnica de diseño y exponer las problemáticas que pueden aflorar cuando se intenta llevar a cabo el diseño empleando estrategias que no cuantifican el esfuerzo de control. Por último, se muestra un tercer ejemplo con tres plantas, en el que el reparto de tareas es más complejo de lo habitual. Este último ejemplo permite ilustrar el potencial de la metodología de diseño propuesta y su facilidad de uso cuando el número de plantas es superior a dos⁶.

⁶ Recuérdese que una gran parte de las estrategias evaluadas en la [Sección 2.4](#) solo son compatibles con sistemas MISO 1×2 .

4.4.1 Ejemplo 1: Sistema MISO sin incertidumbre

Se desea gobernar un sistema MISO 1×2 de forma que sea capaz de rechazar perturbaciones en la salida⁷. Los modelos de las plantas sin incertidumbre están determinados por

$$p_1(s) = \frac{1}{10s + 1}, \quad p_2(s) = \frac{0.1}{0.1s + 1}, \quad p_d(s) = 1. \quad (4.14)$$

Dentro de una disposición con plantas en paralelo (Figura 4.1), el problema del regulador tiene como objetivo diseñar $c_{i=1,2}(j\omega)$ para garantizar el cumplimiento de las especificaciones de estabilidad (4.7) y *performance* (4.8) con la menor cantidad de realimentación en cada frecuencia. Para conseguir un margen de fase mínimo de 45° , la tolerancia seleccionada es:

$$W_s = \left| \frac{0.5}{\cos(\pi(180 - MF)/360)} \right|, \quad MF = 45. \quad (4.15)$$

Para el rechazo robusto de perturbaciones, el modelo superior empleado es:

$$W_d(s) = \left| \frac{1.4167s(s + 30)}{(s + 10)(s + 42.5)} \right|. \quad (4.16)$$

El cálculo de contornos QFT y el *loop-shaping* de controladores se realiza para el siguiente vector de frecuencias discretas:

$$\Omega = \{0.1, 0.5, 1, 5, 10, 100\} [\text{rad/s}]. \quad (4.17)$$

Primera etapa: reparto frecuencial de la realimentación

De acuerdo a las explicaciones realizadas en Sección 4.2, se calcula para el vector de frecuencias Ω la cantidad de realimentación demandada por cada una de las plantas $p_1(j\omega)$ y $p_2(j\omega)$. En la Figura 4.5 se muestra la demanda de controlador, solo se representan tres frecuencias pertenecientes a Ω para ilustrar los tres posibles resultados. Se comparan los *bounds* del controlador de los dos sistemas, alcanzando las siguientes conclusiones:

⁷ Se considera que la referencia permanecerá constante en todo momento.

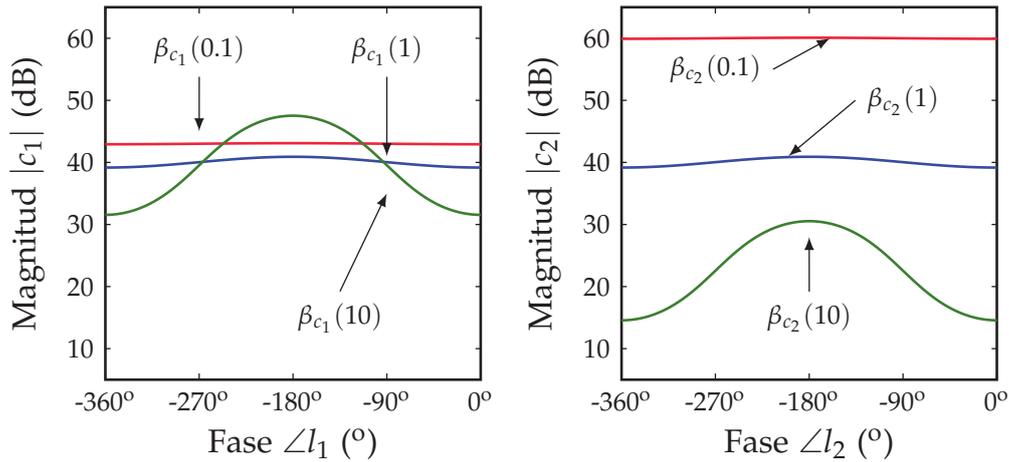


Figura 4.5: Realimentación demandada por cada una de las plantas.

- En baja frecuencia ($\omega < 0.5$), los *bounds* β_{c_1} se sitúan más de $20 \log 2$ dB por debajo de los *bounds* β_{c_2} ; ver $\omega = 0.1$. Por lo tanto, la rama $p_1(j\omega)$ debe asumir la regulación de la salida y , mientras que la rama $p_2(j\omega)$ debe ser inhibida. Los objetivos del *loop-shaping* son: $l_t(j\omega) \approx l_1(j\omega)$ y $l_2(j\omega) \approx 0$ para $\omega < 0.5$.
- En media frecuencia ($0.5 \leq \omega < 2$), las alturas de los *bounds* difieren menos de $20 \log 2$; ver $\omega = 1$. Por lo tanto, las dos plantas deben colaborar. Los objetivos del *loop-shaping* son: $l_1(j\omega) \approx l_2(j\omega)$ para $0.5 \leq \omega < 2$.
- En alta frecuencia ($\omega \geq 2$), los *bounds* β_{c_2} se sitúan más de $20 \log 2$ dB por debajo de los *bounds* β_{c_1} ; ver $\omega = 10$. Los objetivos del *loop-shaping* son: $l_t \approx l_2(j\omega)$ y $l_1(j\omega) \approx 0$ para $\omega \geq 2$.

De acuerdo al estudio anterior, la [Tabla 4.1](#) muestra la planificación del reparto de la realimentación en Ω .

Tabla 4.1: Reparto de tareas para una menor cantidad de realimentación.

ω	0.1	0.5	1	5	10	100
p_1	×	×	×			
p_2		×	×	×	×	×

Segunda etapa: diseño de controladores en paralelo

El diseño secuencial de los controladores $c_1(j\omega)$ y $c_2(j\omega)$ es realizado siguiendo los objetivos mostrados en la [Tabla 4.1](#). La [Figura 4.6](#) y [Figura 4.7](#) ilustran el proceso de diseño en pasos detallados (el número de paso es indicado con super-índices). Los pasos 0, I y II pertenecen a la primera iteración, que explica el diseño de $c_1(j\omega)$ y $c_2(j\omega)$. Las siguientes iteraciones (paso III) son necesarias para conseguir que los dos diseños presenten estrictamente la mínima cantidad de realimentación en cada frecuencia, empleando controladores de orden razonable. La guía de diseño empleada es la indicada en la [Sección 4.3](#), y se describe paso a paso a continuación.

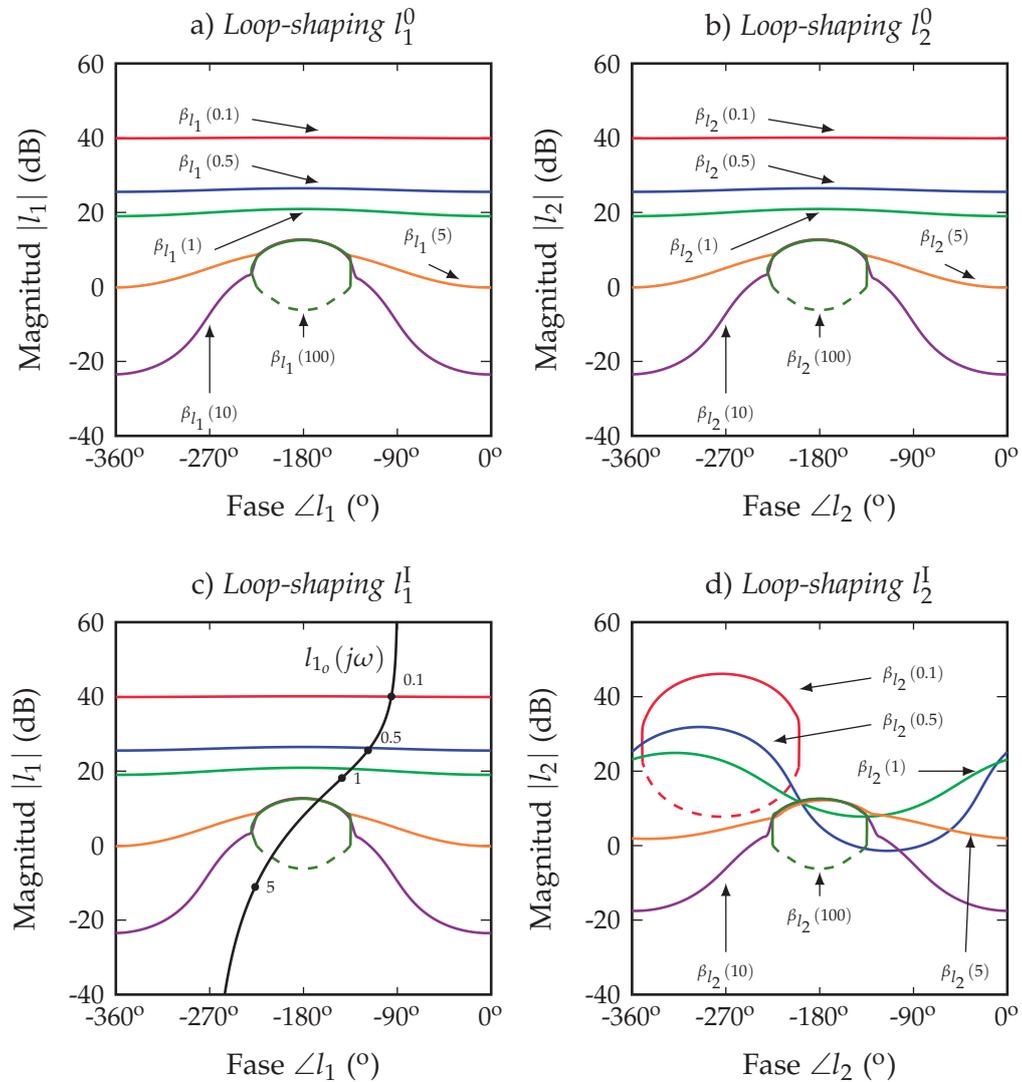


Figura 4.6: Secuencia de diseño (*loop-shaping*).

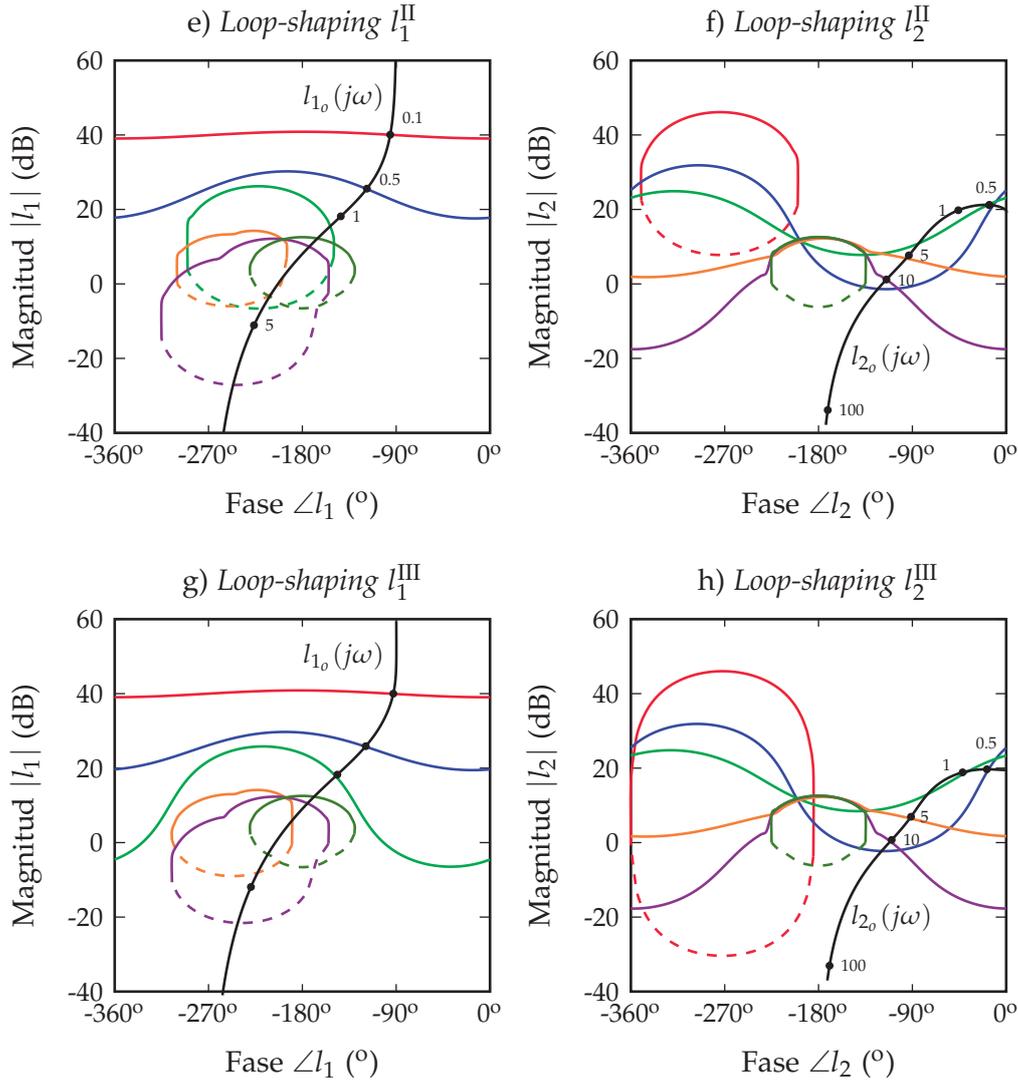


Figura 4.7: Secuencia de diseño (*loop-shaping*).

o.- El cálculo inicial de *bounds* es realizado con $c_2^0(j\omega) = 0$ para el lazo 1 (Figura 4.6 cuadro a) y con $c_1^0(j\omega) = 0$ para el lazo 2 (Figura 4.6 cuadro b).

I.- *Loop-shaping* de $l_1(j\omega)$ (ver Figura 4.6 cuadro c). Para lograr que $l_t(j\omega) \approx l_1(j\omega)$ en $\omega < 0.5$, $l_1(j\omega)$ es situado sobre el *bound* $\beta_{l_1}(0.1)$. Para lograr la colaboración con la planta $p_2(j\omega)$ en $0.5 \leq \omega < 2$, $l_1(j\omega)$ es situado 6 dB por debajo de $\beta_{l_1}(0.5)$ y $\beta_{l_1}(1)$. En $\omega \geq 2$, el objetivo es que $l_t(j\omega) \approx l_2(j\omega)$. Para ello, $\omega \geq 2$ es la frecuencia *roll-off* de $l_1(j\omega)$. La ganancia de lazo es reducida lo máximo posible, violando momentáneamente los *bound* $\beta_{l_1}(5)$, $\beta_{l_1}(10)$ y $\beta_{l_1}(100)$, condiciones de diseño que serán cumplidas cuando se diseñe $l_2(j\omega)$. Como la reducción de ganancia no presenta *bounds*

que guíen el *loop-shaping*, se requerirá un re-diseño de $l_1(j\omega)$ en alta frecuencia. Después del paso I, los controladores son:

$$c_1^I(s) = \frac{417(s + 0.1)}{s(s + 2)^2}, \quad c_2^I(s) = c_2^0(s) = 0. \quad (4.18)$$

Como consecuencia, se obtienen nuevos *bounds* β_{l_2} para el *loop-shaping* de $l_2(j\omega)$. Pueden compararse los nuevos *bounds* en la [Figura 4.6](#) cuadro d, con los *bounds* iniciales mostrados en la [Figura 4.6](#) cuadro b. Obsérvese como aparecen regiones de exclusión en $\beta_{l_2}(0.1)$. Por lo tanto, se deberá reducir la cantidad de realimentación del lazo $l_2(j\omega)$ en $\omega < 0.5$, donde el lazo $l_1(j\omega)$ logra por sí mismo los objetivos de control. Del mismo modo surgen depresiones en $\beta_{l_2}(0.5)$ y $\beta_{l_2}(1)$, donde $l_2(j\omega)$ debe colaborar con $l_1(j\omega)$. Por último, se obtienen los mismos *bounds* que en la etapa inicial para $\omega = \{5, 10, 100\}$, donde sólo $l_2(j\omega)$ es la encargado de las tareas de control.

II.- *Loop-shaping* de $l_2(j\omega)$ (ver [Figura 4.7](#) cuadro f). En primer lugar, se reduce la ganancia de $l_2(j\omega)$ en $\omega < 0.5$ para conseguir que $|l_2(j\omega)| \ll |l_1(j\omega)|$. Entonces se logra que $l_2(j\omega) \approx l_1(j\omega)$. Este ejemplo no necesita el empleo de una red de retraso, lo que permite obtener un controlador $c_2(j\omega)$ de menor orden. En segundo lugar, se sitúa $l_2(j\omega)$ sobre los *bounds* $\beta_{l_2}(j\omega)$ en $\omega = \{0.5, 1, 5, 10\}$; nótese como existe un exceso de realimentación en la frecuencia $\omega = 1$, cuyo propósito es ilustrar el proceso iterativo empleado para optimizar el diseño. Finalmente, se reduce en alta frecuencia $\omega \geq 100$ (frecuencia de *roll-off*) la ganancia de $l_2(j\omega)$ tanto como sea posible; como en un ejemplo clásico de diseño QFT. Después del paso II, los controladores son:

$$c_2^{\text{II}}(s) = \frac{193.2(s + 0.4)(s + 6.3)}{(s + 11)(s^2 + 1.2s + 0.51)}, \quad c_1^{\text{II}}(s) = c_1^I(s). \quad (4.19)$$

Como consecuencia, pueden compararse los nuevos *bounds* β_{l_1} en la [Figura 4.7](#) cuadro e, con los *bounds* del paso anterior en la [Figura 4.6](#) cuadro c. Nótese como ahora $l_1(j\omega)$ cumple con todos los *bounds*. Muéstrese especial atención en la [Figura 4.7](#) cuadro e y [Figura 4.7](#) cuadro f, en las frecuencias en las que las plantas colaboran. El reparto de la realimentación está cerca del óptimo

en $\omega = 0.5$ ($l_1(j\omega)$ y $l_2(j\omega)$ se encuentran sobre sus respectivos *bounds*), pero esto no ocurre en $\omega = 1$. Por lo tanto, es necesario un pequeño reajuste para ahorrar realimentación en esta última frecuencia.

III.- Ambos lazos son rediseñados de forma iterativa en la [Figura 4.7](#) cuadro g y [Figura 4.7](#) cuadro h. Gracias a la ayuda de herramientas software, este proceso es muy sencillo. Los controladores finales son:

$$c_1(s) = c_1^{\text{III}}(s) = \frac{329.7(s + 0.088)}{s(s + 1.5)(s + 2)}, \quad (4.20)$$

y

$$c_2(s) = c_2^{\text{III}}(s) = \frac{225.13(s + 1.1)(s + 6.95)}{(s + 14.81)(s^2 + 1.77s + 1.22)}. \quad (4.21)$$

Puede comprobarse como $l_1(j\omega)$ logra por sí mismo los requisitos de control en $\omega = 0.1$, y comparte las tareas de control con $l_2(j\omega)$ en $\omega = \{0.5, 1\}$. Para ello, $l_1(j\omega)$ se sitúa sobre β_{l_1} en $\omega = \{0.1, 0.5, 1\}$. Del mismo modo, $l_2(j\omega)$ cumple por sí sólo los objetivos de *performance* en $\omega = \{5, 10\}$. Para ello, $l_2(j\omega)$ se sitúa sobre β_{l_2} en $\omega = \{0.5, 1, 5, 10\}$. Nótese como la disposición de los *bounds* permitiría reducir las magnitudes de las ramas en $\omega > 1$ para l_1 , y en $\omega < 0.5$ y $\omega > 10$ para l_2 . Sin embargo, se ha decidido no realizar dichos ajustes dado que debe existir un equilibrio entre el ahorro de realimentación y el orden de los controladores de las ramas.

Análisis y comparaciones

A continuación, se compara el control en paralelo con $c_{i=1,2}(j\omega)$ (4.20) y (4.21), con el control con controlador maestro, $c_m(j\omega)$. El controlador maestro se diseña para la planta equivalente $p_e(j\omega) = p_1(j\omega) + p_2(j\omega)$ para lograr las mismas condiciones de estabilidad y *performance* robustos. Se diseña un único controlador aplicando QFT SISO

$$c_m(s) = \frac{192.6(s + 0.1)(s + 4.4)}{s(s + 1)(s + 8.9)}. \quad (4.22)$$

Para una comparación adecuada, se ha buscado que $l_m = c_m p_e$ cumpla exactamente con los *bounds* de diseño y reduzca lo máximo posible

su ganancia de alta frecuencia. Por lo tanto, es la solución con la menor cantidad de realimentación en cada frecuencia si el sistema presenta una única entrada (óptimo QFT). La Figura 4.8 muestra cómo el módulo del controlador maestro $|c_m(j\omega)|$ presenta un valor aproximadamente igual al de los controladores obtenidos para el diseño MISO. La principal fuente de ahorro de realimentación no proviene de situarse exactamente sobre los *bounds* de diseño (que los diseños SISO y MISO satisfacen), sino de repartir de forma adecuada la realimentación entre las dos ramas. Nótese como $|c_2(j\omega)| \ll |c_m(j\omega)|$ en bajas frecuencias, donde $p_1(j\omega)$ es la encargada de regular la salida, y $|c_1(j\omega)| \ll |c_m(j\omega)|$ en alta frecuencia, donde trabaja $p_2(j\omega)$. De este modo, $c_2(j\omega)$ filtra las bajas frecuencias, eliminando *offsets* innecesarios en el actuador de $p_2(j\omega)$, y $c_1(j\omega)$ filtra las altas frecuencias, reduciendo la amplificación de señales de alta frecuencia (*cost of feedback*) en el actuador de $p_1(j\omega)$.

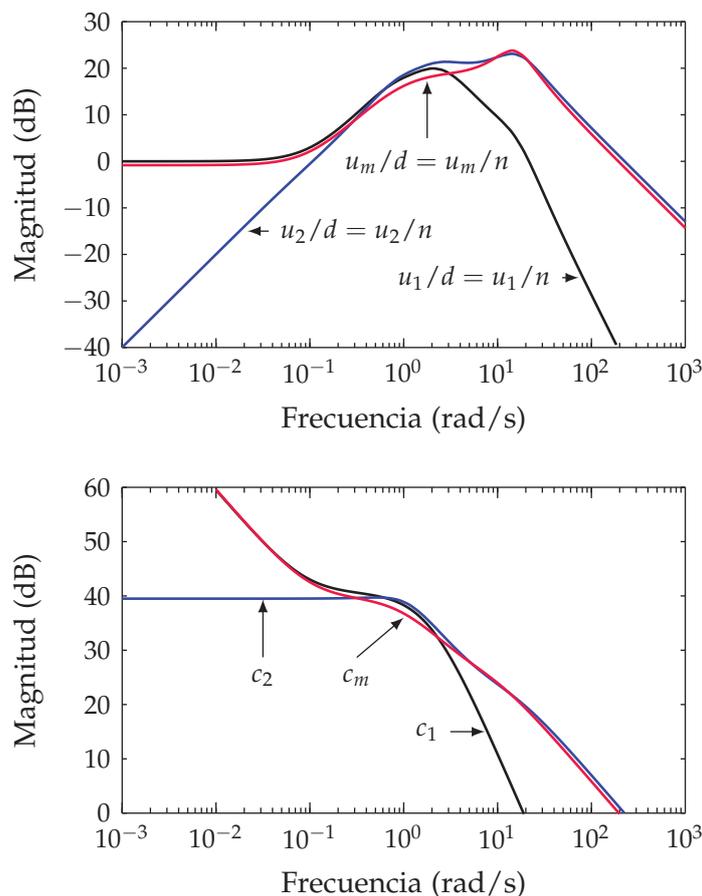


Figura 4.8: Respuesta frecuencial: (sup.) cantidad de realimentación, (inf.) coste de la realimentación en lazo cerrado.

La [Figura 4.9](#) muestra claramente estos beneficios en la respuesta temporal en lazo cerrado. Las entradas externas son: una perturbación de tipo escalón $d(t)$ en $t = 0.5s$, y el ruido del sensor $v(t)$ generado con una fuente de ruido blanco ($Noise\ Power=0.001$, $Sample\ time=0.01$ s). Todas las respuestas son mostradas con y sin la presencia del ruido (líneas azul y verde, respectivamente). Dado que se cumple que $l_1(j\omega) + l_2(j\omega) \approx l_m(j\omega)$ (una mejor aproximación puede lograrse empleando controladores de mayor orden), las funciones de lazo cerrado y/v y y/d son similares para las dos estrategias de control. De acuerdo con ello, el *performance* para $y(t)$ coincide para el control con controlador maestro o con controladores de rama (sólo se muestra una respuesta en la [Figura 4.9](#)), en presencia o ausencia de ruido. Por el contrario, el esfuerzo de control muestra claras diferencias ya avanzadas en la [Figura 4.8](#).

Podemos comparar las acciones de control $u_1(t)-u_2(t)$ con la señal $u_m(t)$ en la [Figura 4.9](#). Por un lado, la variable de control $u_1(t)$ está mucho menos afectada por amplificaciones de las señales de ruido de sensor, lo que evita fatigas innecesarias en el actuador de $p_1(j\omega)$. La cuantificación exacta de este beneficio es la distancia entre $|u_1/v(j\omega)|$ y $|u_m/v(j\omega)|$, lograda principalmente por la reducción de ancho de banda durante el diseño de $l_1(j\omega)$. Por otro lado, la amplificación del ruido $v(t)$ afecta con la misma intensidad a las señales $u_2(t)$ y $u_m(t)$. Sin embargo, $u_2(t)$ retorna al punto inicial en estado estacionario y $u_m(t)$ no. Comprobar cómo se cumple que $u_2(t = \infty) \approx 0$, $u_m(t = \infty) = u_1(t = \infty)$ en el dominio temporal, y que $|u_2/d(\omega = 0)| \approx -\infty$, $|u_m/d(\omega = 0)| \approx |u_1/d(\omega = 0)|$ en el dominio frecuencial. De este modo, para perturbaciones acumulativas, en un primer instante la acción de control $u_2(t)$ responderá rápidamente partiendo de cero, y en consecuencia, dispondrá de todo el rango de operación de la señal u_2 para combatir una perturbación, existiendo un menor riesgo de saturación. Ambas mejoras (la reducción de ruido en $u_1(t)$ y el mantener a cero $u_2(t)$ en régimen estacionario) son valiosas desde un punto de vista práctico, ya que en las plantas físicas, los actuadores y sensores presentan limitaciones y diversas no linealidades.

Como apunte final, los controladores $c_1(j\omega)$ y $c_2(j\omega)$ pueden obtenerse como equivalentes de otras estructuras de control MISO (estructura con *maestro-esclavos* y estructura serie). Recuérdese que los diseños realizados con otras estructuras y metodologías son siempre transformables a una estructura estrictamente paralelo como la de la [Figura 4.1](#), pero el

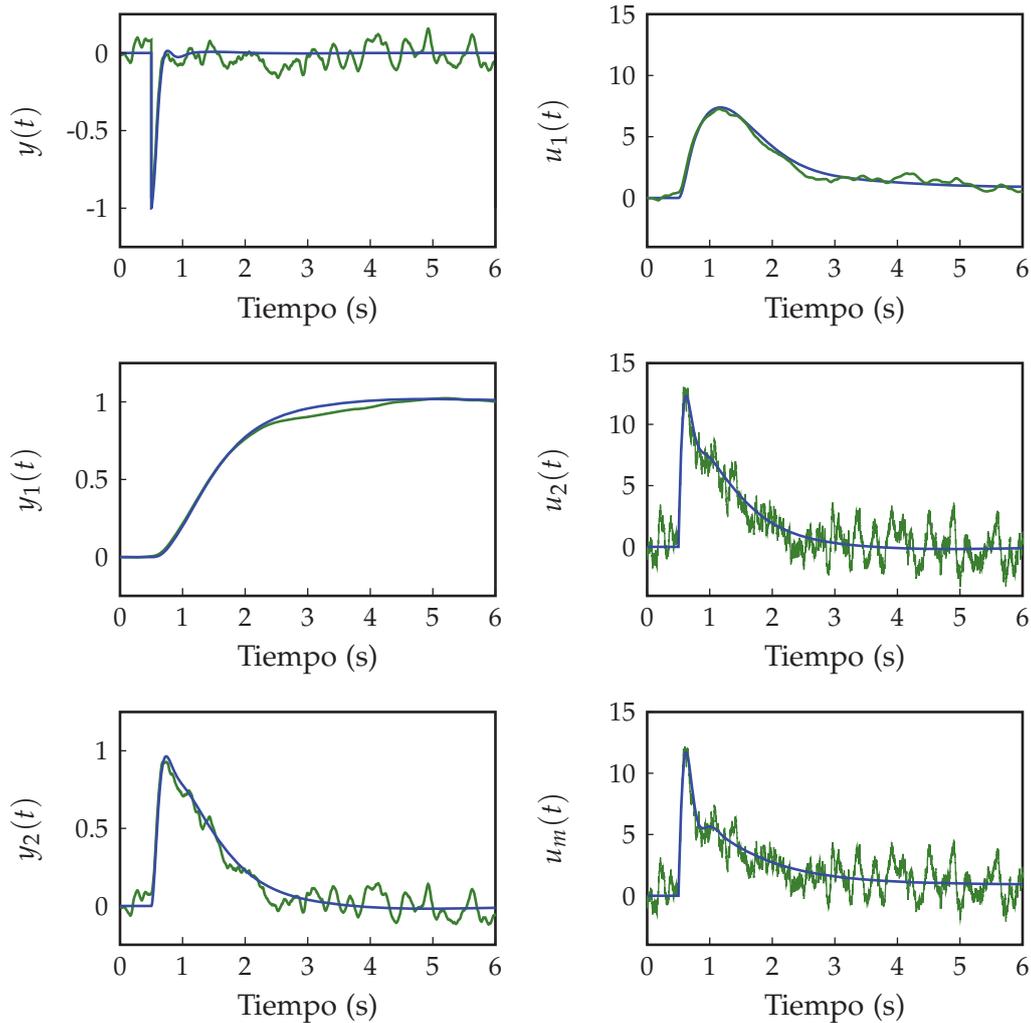


Figura 4.9: Respuesta temporal para el rechazo de perturbaciones.

proceso inverso no siempre es posible. En todo caso, el diseño óptimo QFT con controladores (4.20) y (4.21) probablemente no será alcanzable empleando otras estrategias de diseño que no cuantifican la cantidad de realimentación y las posibilidades de colaboración entre plantas. Además, como se muestra en ejemplos posteriores, existen objetivos y condiciones de diseño para sistemas MISO que son sólo abordables mediante el empleo de la nueva metodología de diseño en paralelo.

4.4.2 Ejemplo 2: Intercambiador de calor

El intercambiador de calor es un ejemplo común de aplicación en ingeniería donde se pueden emplear estrategias de control MISO [58, 100, 47]. La Figura 4.10 muestra el esquema del proceso a controlar, que incluye

un intercambiador de calor, un refrigerador y una caldera. Compruébese cómo la temperatura de salida del intercambiador de calor $T(t)$ puede ser regulada mediante el empleo de dos variables manipulables: el flujo másico del fluido calefactor $\dot{m}_h(t)$ o la señal que gobierna la potencia de calentamiento $\delta(t)$ (determina la temperatura del fluido calefactor). El flujo másico del fluido frío $\dot{m}_c(t)$ actúa como una perturbación cuando cambia la tasa de producción. Una combinación de las plantas PRO-CON comercializada por *Feedback Systems Inc.* [40] permite configurar el esquema mostrado en la [Figura 4.10](#) a escala de laboratorio.

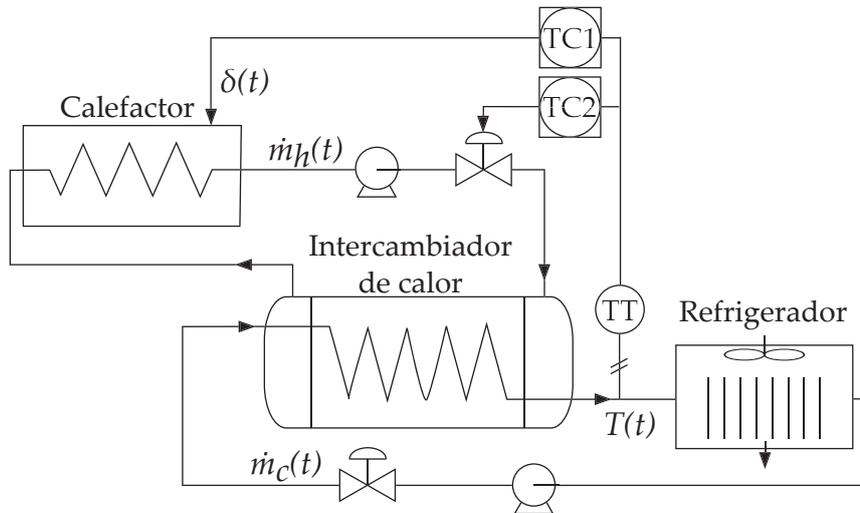


Figura 4.10: Esquema del proceso térmico a controlar.

Alrededor de un determinado punto de operación, pueden obtenerse modelos lineales con la forma

$$p_i(s) = \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}, \tag{4.23}$$

identificados en [121]. Estos expresan las relaciones entre las dos variables manipulables y la variable controlada ($p_1 = T/\delta$ y $p_2 = T/\dot{m}_h$), y la relación entre la perturbación y la salida ($p_d = T/\dot{m}_c$).

Se definen un total de 112 casos de cómo se relaciona cada entrada con la salida. Estos permiten generar la incertidumbre para los coeficientes del numerador y denominador (4.23). La [Figura 4.11](#) muestra la envolvente de las respuestas frecuenciales de las plantas. Puesto que todos los modelos de planta son de fase mínima, sólo se muestra los diagramas de Bode de magnitud.

La especificación de estabilidad robusta (4.7) junto con la cota (4.15) permite obtener un margen de fase mínimo de 45°. El rechazo robusto

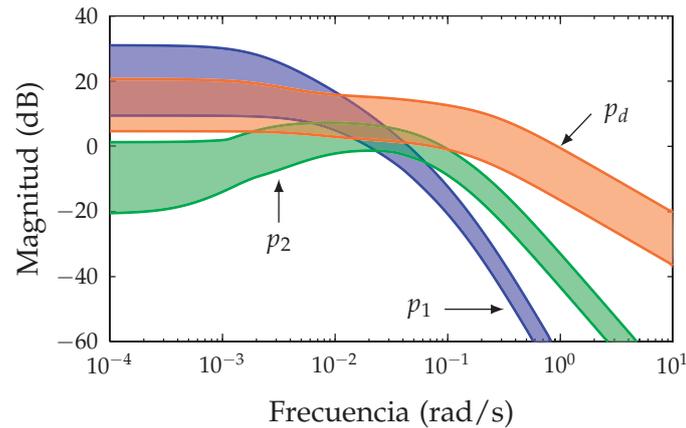


Figura 4.11: Magnitud de la respuesta frecuencial de las plantas.

de perturbaciones es garantizado empleando (4.8) junto con un modelo para la cota superior

$$W_d(s) = \frac{1.2s(s + 1.6)(s + 5)}{(s + 6)(s^2 + 1.6s + 1.778)}. \quad (4.24)$$

Tras aplicar el procedimiento descrito en la Sección 4.2 se determina que el mejor reparto de tareas para minimizar la cantidad de realimentación es el mostrado en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Reparto de la realimentación a lo largo de la frecuencia.

Ω	0.005	0.02	0.05	0.2	0.5	1	10
p_1	×	×					
p_2		×	×	×	×	×	×

Se realizan los *loop-shaping* de $l_{1_o}(j\omega)$ y $l_{2_o}(j\omega)$ (ver Figura 4.12) para conseguir los objetivos propuestos en la Tabla 4.2, obteniendo

$$c_1(s) = \frac{69.5(s + 0.0044)(s + 0.058)}{s(s + 0.018)(s + 0.49)(s + 2.94)}, \quad (4.25)$$

y

$$c_2(s) = \frac{8074.4(s + 0.003)(s + 0.052)(s + 0.54)}{(s + 0.0027)(s + 0.016)(s + 4)(s + 20)}. \quad (4.26)$$

En la Figura 4.13, se ilustra cómo las respuestas de lazo cerrado cumplen con los objetivos de diseño. En ella se muestran únicamente las

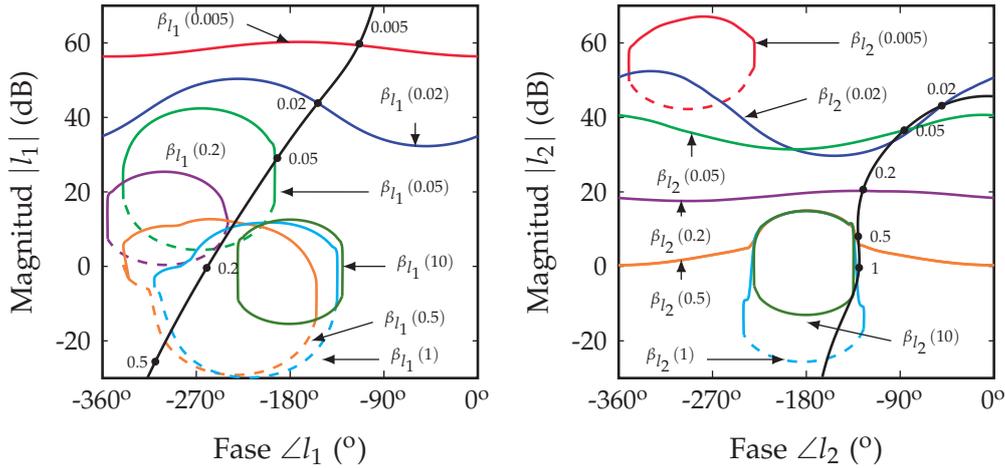


Figura 4.12: Loop-shaping de controladores.

envolventes del conjunto de 112 respuestas correspondientes a cada una de las plantas en el dominio de incertidumbre. Del mismo modo, puede comprobarse como el esfuerzo de control cumple con la planificación prevista en la primera etapa de diseño. En resumen, la originalidad de este ejemplo recae en el carácter práctico de la planta MISO, la robustez de la nueva metodología (se consideran modelos con incertidumbre), y el reto de incorporar la entrada de perturbación a través de un modelo con incertidumbre.

Con el objetivo de realizar comparaciones, se diseña un controlador maestro

$$c_m(s) = \frac{280(s + 0.0044)(s + 0.058)(s + 0.38)(s + 0.58)}{s(s + 0.018)(s + 0.49)(s + 4)(s + 20)}, \quad (4.27)$$

para la suma de plantas $p_e(s) = p_1(s) + p_2(s)$, que permite obtener las mismas especificaciones de control robusto.

La disposición en paralelo y la estructura con controlador maestro se comportan igual si se atiende al *performance* de la salida. Sin embargo, el empleo de controladores en paralelo es superior si se evalúan las señales obtenidas para las acciones de control. Las mismas razones y beneficios comentados en el ejemplo 1 pueden ser extendidos a este ejemplo.

En segundo lugar, se realiza una comparación entre la estructura paralelo y la estructura con maestro-esclavos. La estructura con maestro-esclavos (Figura 2.7 con $c_m(j\omega) \neq 1, c_1(j\omega) \neq 1, c_2(j\omega) \neq 1$) puede considerarse un caso particular de la estructura en paralelo ($c_m(j\omega) = 1$), pero cómo se demostrará a continuación esta última es más versátil. Atendiendo a su funcionamiento, podemos renombrar el controlador esclavo

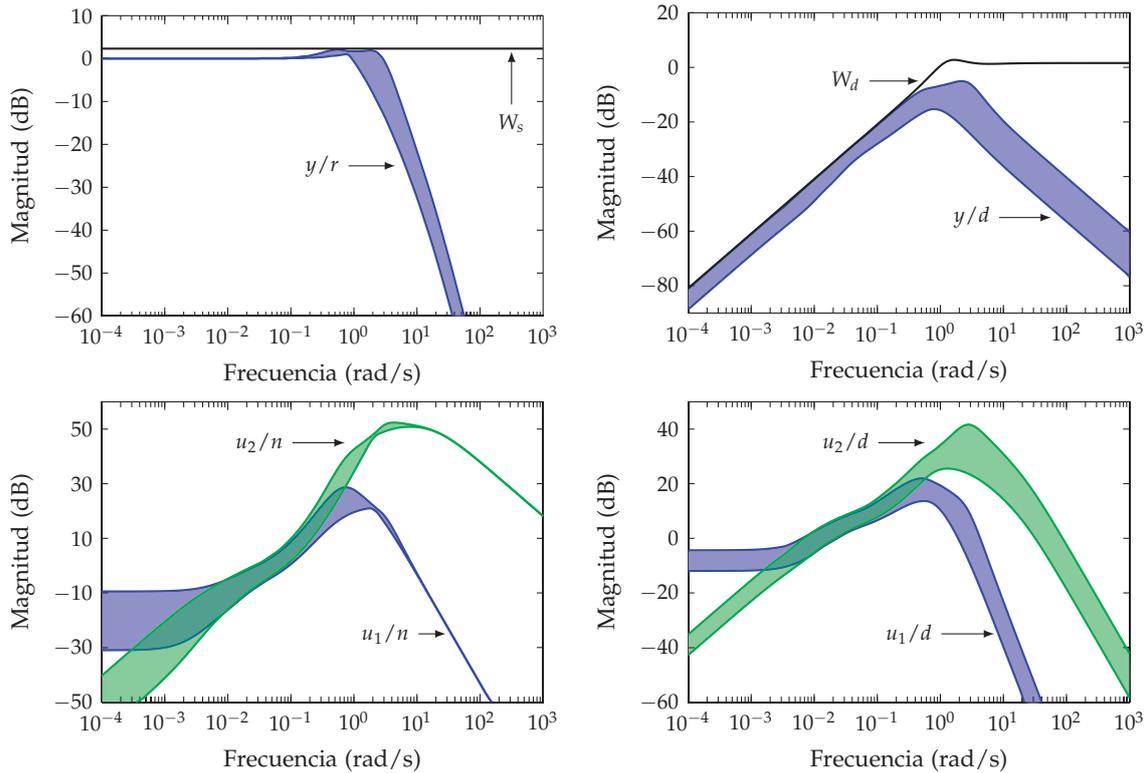


Figura 4.13: Magnitud de la respuesta frecuencial en lazo cerrado. Especificaciones y Acciones de control.

$c_1(j\omega)$ como filtro $f_1(j\omega)$ y el controlador esclavo $c_2(j\omega)$ como filtro $f_2(j\omega)$. Se supone que $c_1(j\omega)$ (4.25) y $c_2(j\omega)$ (4.26) ya han sido diseñados para una estructura de control en paralelo. Entonces, podemos obtener controladores equivalentes para la estructura con maestro-esclavos. Los controladores equivalentes deben cumplir: $c_m(j\omega)f_1(j\omega) = c_1(j\omega)$ y $c_m(j\omega)f_2(j\omega) = c_2(j\omega)$. Una solución práctica puede ser diseñar en primer lugar el controlador maestro $c_m(j\omega)$ en (4.27), el performance logrado por éste debe coincidir con el logrado empleando el conjunto $c_1(j\omega)$ (4.25) y $c_2(j\omega)$ (4.26). En segundo lugar, para superar las limitaciones que presenta el control con maestro en estructuras paralelo, se diseñan los filtros $f_1(j\omega)$ y $f_2(j\omega)$ según: $f_1(j\omega) = c_1(j\omega)/c_m(j\omega)$ y $f_2(j\omega) = c_2(j\omega)/c_m(j\omega)$, donde $c_1(j\omega)$ (4.25), $c_2(j\omega)$ (4.26). Este procedimiento también puede realizarse en el Ejemplo 1. El procedimiento inverso, es decir, la síntesis directa de los filtros $f_1(j\omega)$, $f_2(j\omega)$ y el controlador $c_m(j\omega)$ aparentemente puede realizarse con éxito en el Ejemplo 1. Sin embargo, es extremadamente difícil llevarlo a cabo en el segundo ejemplo por los siguientes motivos. La metodología con controladores maestro-esclavos comienza con el diseño de los filtros, y después,

realiza el diseño del controlador maestro. Como primera dificultad, los filtros deben lograr el reparto frecuencial de las tareas de control, pero su diseño *manual* no emplea un criterio que cuantifique la realimentación. Además, la incertidumbre en los modelos de las plantas ($p_1(j\omega)$, $p_2(j\omega)$) dificulta la selección de la frecuencia de corte de los filtros. Otra dificultad es que las perturbaciones son introducidas en el lazo de control a través de un modelo dinámico ($p_d(j\omega)$) que impide predecir cual es el mejor reparto frecuencial de la realimentación entre las plantas en paralelo ($p_1(j\omega)$, $p_2(j\omega)$), y por tanto, complica la parametrización de los filtros. Una vez seleccionados los filtros de rama, el controlador maestro debe ser diseñado, teniendo en cuenta la suma de las ramas que contienen plantas y filtros. En esta etapa, la reducción de ganancia de los filtros puede producir graves problemas: filtros muy selectivos producen una rápida atenuación de la ganancia, pero introducen fase negativa en la rama. Entonces, las ramas pueden encontrarse en contrafase en algunas frecuencias. En estos casos, el controlador maestro no puede lograr que las plantas colaboren dónde deben, puesto que la suma vectorial $l_t(j\omega) = l_1(j\omega) + l_2(j\omega)$ presenta un menor módulo que las ramas $l_1(j\omega)$ y $l_2(j\omega)$.

4.4.3 Ejemplo 3: Sistema MISO 1×3

A pesar de existir una gran cantidad de sistemas reales que presentan más de dos entradas manipulables para gobernar una única salida, pocas aplicaciones han sido documentadas hasta el momento [51]. De hecho, sólo unos pocos trabajos científicos incorporan desarrollos para sistemas con n entradas [78, 36, 52, 9, 127], dado el incremento de la complejidad que lleva a cabo su consideración. En este sentido, el siguiente ejemplo pretende demostrar el potencial de la nueva metodología de diseño. Considérese un sistema con tres entradas manipulables y una única salida objeto de control, cuyas funciones de transferencia están determinadas por

$$p_i(s) = \frac{k_i(a_i s + 1)}{(b_i s + 1)(c_i s + 1)}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (4.28)$$

que es particularizado para cada entrada i por $k_1 = 100$, $k_2 = 10$, $k_3 = 1$, $a_1 = 10$, $a_2 = a_3 = 0$, $b_1 = 1000$, $b_2 = b_3 = 0.01$, $c_1 = 0.1$, $c_2 = c_3 = 0$. Las perturbaciones son añadidas directamente en la salida sin dinámica asociada, $p_d(j\omega) = 1$. La dificultad de este ejemplo recae en

que posee tres actuadores; la incertidumbre paramétrica ha sido excluida de los modelos de las plantas $p_i(j\omega)$. La estabilidad robusta y el rechazo robusto de perturbaciones pueden ser logrados garantizando (4.7) con cota (4.15) y (4.8) con cota (4.16), respectivamente.

La sección superior de la [Tabla 4.3](#) muestra la cantidad de realimentación $|c_i|$ demandada por cada una de las ramas $c_i p_i$ en la fase de diseño $\Theta_d \approx -90^\circ$ si dichas ramas tuviesen que garantizar el cumplimiento de las especificaciones trabajando en solitario⁸. En consecuencia con la parte superior de la [Tabla 4.3](#) se selecciona el reparto de tareas entre ramas, que es mostrado en la sección inferior de la [Tabla 4.3](#). Revítese el criterio de selección del reparto frecuencial de tareas de control indicado en la [Sección 4.2](#) si surgen dudas sobre el porqué de la selección hecha.

Tabla 4.3: (sup) Demanda de realimentación; (inf) Reparto de la realimentación.

Ω	0.001	0.01	0.05	0.1	0.5	1	5	10	100
$ c_1 _{\text{dB}}$	43	40	39	37	26	20	6	-3	20
$ c_2 _{\text{dB}}$	60	40	27	23	20	20	19	13	40
$ c_3 _{\text{dB}}$	80	60	46	40	26	20	5	-6	3
Ω	0.001	0.01	0.05	0.1	0.5	1	5	10	100
p_1	×	×			×	×	×	×	
p_2		×	×	×	×	×			
p_3					×	×	×	×	×

De acuerdo a los resultados mostrados en la [Tabla 4.3](#), el *loop-shaping* de cada una de las ramas $l_i(j\omega)$ es realizado de forma secuencial (los diseños finales se muestran en la [Figura 4.14](#)). Los controladores alcanzados son:

$$c_1(s) = \frac{584.7(s + 0.0007)(s + 0.39)(s + 7.68)(s^2 + 0.132s + 0.009)}{s(s + 0.0068)(s + 0.08)(s + 9)(s + 86)(s^2 + 0.98s + 0.33)}, \quad (4.29)$$

$$c_2(s) = \frac{32.4(s + 0.1)}{(s + 0.0087)(s + 0.63)(s + 5.27)}, \quad (4.30)$$

⁸ En los ejemplos anteriores se representaban las necesidades de realimentación empleando la diagramas de *Nichols*, que muestran las necesidades de diseño en todas las posibles fases de diseño $[-360^\circ, 0^\circ]$. Aquí se simplifica el resultado a una única fase de diseño. Nótese como la selección de la fase de diseño es una de las tareas del diseñador.

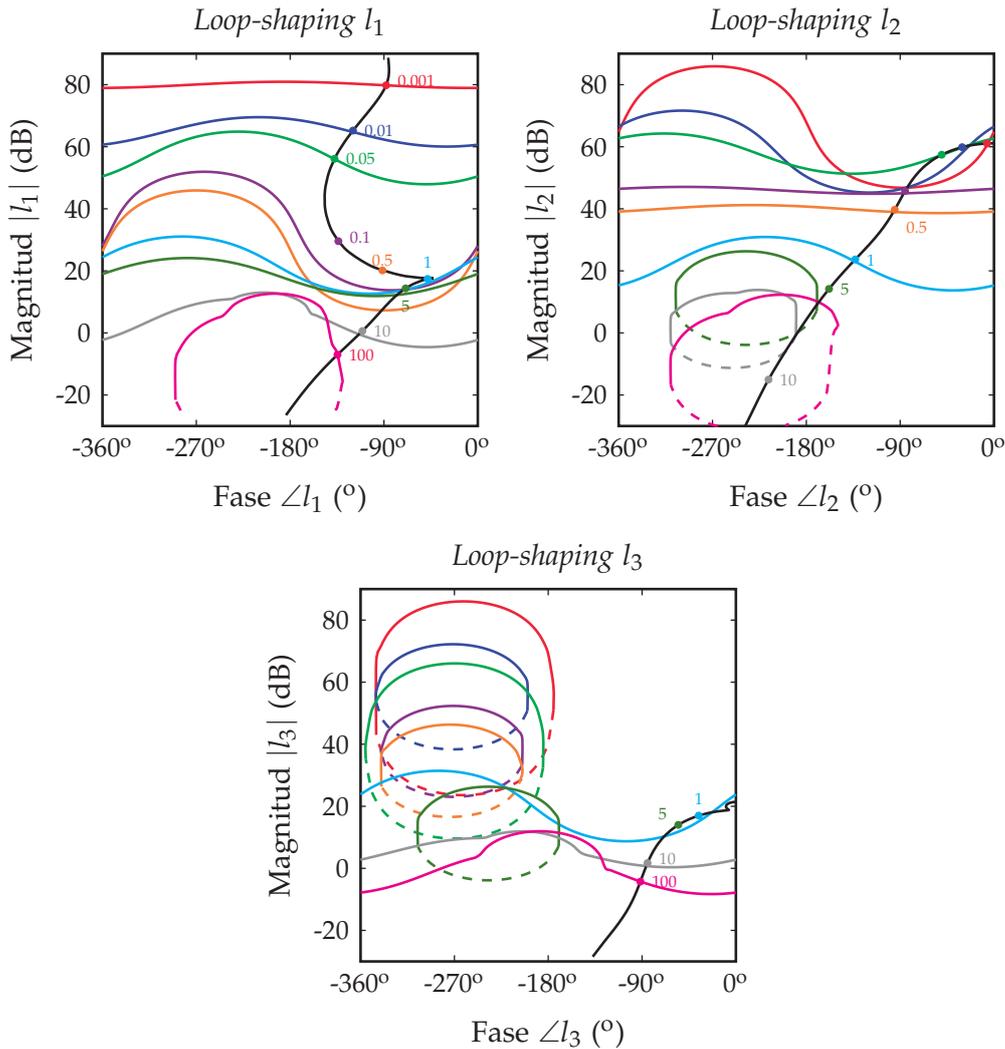


Figura 4.14: Loop-shaping de los tres controladores en paralelo.

y

$$c_3(s) = \frac{6.155(s + 0.01)}{(s + 0.007355)(s + 0.7128)}. \tag{4.31}$$

La Figura 4.15 muestra el reparto de la realimentación a lo largo de la frecuencia (Tabla 4.3) en términos de las ramas de lazo abierto $|l_i(j\omega)|$, y su contribución a la función de lazo abierto total $|l_t(j\omega)| = |l_1(j\omega) + l_2(j\omega) + l_3(j\omega)|$.

La originalidad de este ejemplo teórico recae principalmente en dos desafíos: enfrentarse al problema del regulador en sistemas con más de dos entradas manipulables, y hacer frente a sistemas con plantas en paralelo cuando parte de las plantas deben trabajar en bandas de frecuencia disjuntas. Nótese como $p_1(j\omega)$ trabaja primero en $\omega \in [0.001, 0.01]$

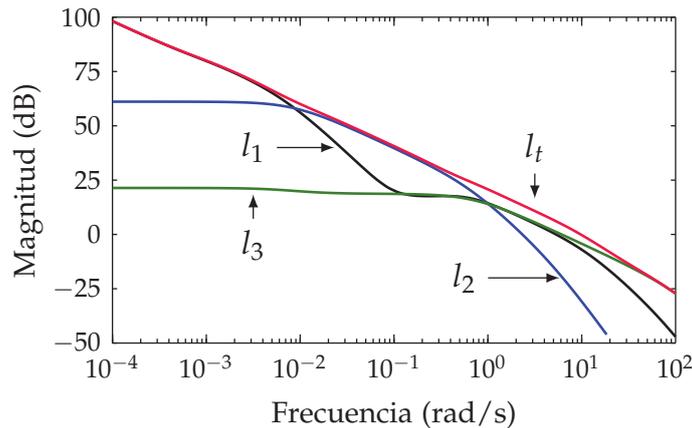


Figura 4.15: Magnitud de la respuesta frecuencial en lazo abierto.

y después en $\omega \in [0.5, 10]$. Esto produce que no exista un equivalente a $c_1(j\omega)$ (4.29), $c_2(j\omega)$ (4.30), $c_3(j\omega)$ (4.31) en una estructura serie (Figura 2.5). Renómbrense los controladores de la estructura serie según: $c_1^s(j\omega)$, $c_2^s(j\omega)$, $c_3^s(j\omega)$. Los controladores equivalentes para la estructura serie, partiendo de los de la estructura paralelo, son: $c_1^s(j\omega) = c_1(j\omega)$, $c_2^s(j\omega) = -c_2(j\omega)/c_1(j\omega)$, $c_3^s(j\omega) = -c_3(j\omega)/c_2(j\omega)$; lo que produciría un controlador $c_3(j\omega)^s$ no propio (con mayor número de ceros que de polos). El diseño de $c_i^s(j\omega)$ directamente empleando una estrategia para la estructura serie no es viable en este ejemplo, ya que el reparto frecuencial de las tareas de control (Tabla 4.3) no permite una ordenación de las plantas más rápidas a las más lentas⁹ ($p_1(j\omega)$ trabaja en intervalos discontinuos de frecuencia). Es decir, la estructura serie está concebida para que cada planta trabaje en un sólo intervalo de frecuencia. Una descripción más detallada de la estructura serie y del diseño de controladores QFT para dicha estructura se presenta en el Capítulo 8.

⁹ La estructura serie sólo es adecuada si las plantas pueden ordenarse en forma que cada planta trabaje en un único rango de frecuencias. Perderá interés si las plantas deben compartir tareas de control en una determinada banda de frecuencia y carecerá de sentido su empleo si una o varias plantas deben trabajar en frecuencias disjuntas.

ESTABILIDAD EN SISTEMAS MISO

La estrategia de diseño presentada en el [Capítulo 4](#) garantiza la estabilidad del sistema de control mediante el empleo de una única inecuación de diseño, tal como ocurre en un diseño QFT SISO. En el capítulo anterior se omitió la justificación de dicha inecuación, así como las condiciones a cumplir durante el *loop-shaping* de controladores, con el fin de simplificar la interpretación del método de diseño.

El presente capítulo analiza de forma detallada las condiciones a cumplir durante el diseño secuencial de los lazos del sistema MISO, para que se garantice la estabilidad del conjunto en lazo cerrado. En primer lugar, en la [Sección 5.1](#) se evalúan las condiciones a cumplir por el sistema cuando la estabilidad en lazo cerrado se establece acotando las variaciones máximas en la magnitud y fase en la función de lazo total l_t . Estas corresponden con las condiciones empleadas hasta el momento en el [Capítulo 4](#). A continuación, en la [Sección 5.2](#), se describen nuevas inecuaciones que permiten garantizar la estabilidad del conjunto MISO acotando las variaciones máximas en la magnitud y fase de cada una de las plantas p_i que forman parte del sistema.

Por último, en la [Sección 5.3](#), se presentan las particularidades del diseño cuando se aplican las inecuaciones descritas en secciones anteriores al diseño QFT MISO. En esta sección se describe como efectuar el *loop-shaping* de controladores para alcanzar diseños óptimos desde el punto de vista QFT.

Todos los resultados alcanzados en el presente capítulo para los sistemas MISO se obtienen a partir de las condiciones de estabilidad de los sistemas SISO (véase [Apéndice B](#)) dentro del marco de diseño QFT.

5.1 ESTABILIDAD MISO REFERIDA AL CONJUNTO DE RAMAS

Como se describió en el [Capítulo 4](#), un sistema MISO gobernado mediante el empleo de la arquitectura de control paralelo de la [Figura 4.1](#), presenta un comportamiento en lazo cerrado determinado por

$$y = \frac{p_d(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)}d - \frac{l_t(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)}v, \quad (5.1)$$

donde $l_i(j\omega) = p_i(j\omega)c_i(j\omega)$ corresponde con la función de transferencia de lazo abierto de cada una de las ramas, y

$$l_t(j\omega) = \sum_{i=1}^n l_i(j\omega) \quad (5.2)$$

con la función de lazo abierto total.

La estabilidad del sistema en lazo cerrado será garantizada si el sistema es estable externa e internamente. Es decir, si todas las posibles funciones de transferencia de lazo cerrado (y/d , y/n , u_i/d , etc.) presentan sus polos en el semiplano izquierdo. Recuérdese que para que en un sistema SISO se garantice la estabilidad interna, debe garantizarse que las raíces de

$$n_p(s)n_c(s) + d_p(s)d_c(s) = 0, \quad (5.3)$$

donde $p(s) = n_p(s)/d_p(s)$ y $c(s) = n_c(s)d_c(s)$; pertenecen al semiplano izquierdo. La condición anterior no se cumple cuando existen cancelaciones de polos inestables con ceros RHP. Para comprobar dicha afirmación, considérese una planta

$$p(s) = \frac{n_p(s)}{d_p(s)d_p(-s)}, \quad (5.4)$$

donde $d_p(-s)$ contiene los polos inestables de la planta $p(s)$; y un controlador $c(s) = n_c(s)d_p(-s)/d_c(s)$, que contiene en su numerador a los términos inestables de $p(s)$. En este caso (5.3) toma la siguiente expresión

$$n_p(s)n_c(s)d_p(-s) + d_p(s)d_p(-s)d_c(s) = d_p(-s)(n_p(s)n_c(s) + d_p(s)d_c(s)) = 0, \quad (5.5)$$

Presentando siempre raíces en el semiplano derecho, y por lo tanto, dando lugar a sistemas que no garantizan la estabilidad interna.

En el caso MISO, de forma similar al caso SISO, la estabilidad interna queda garantizada si las raíces de la ecuación característica

$$\prod_{i=1}^n d_{p_i}(s)d_{c_i}(s) + \sum_{i=1}^n n_{p_i}(s)n_{c_i}(s) \prod_{j \neq i} d_{p_j}(s) = 0, \quad (5.6)$$

donde las plantas p_i corresponden con $p_i(s) = n_{p_i}(s)/d_{p_i}(s)$, y los controladores c_i con $c_i(s) = n_{c_i}(s)d_{c_i}(s)$; se encuentran en el semiplano izquierdo. Si se establecen cancelaciones entre los polos inestables de la planta p_i y los ceros del controlador c_i ,

$$p_i(s) = \frac{n_{p_i}(s)}{d_{p_i}(s)d_{p_i}(-s)}, \quad c_i(s) = \frac{n_{c_i}(s)d_{p_i}(-s)}{d_{v_i}(s)}, \quad (5.7)$$

la ecuación característica (5.6) toma la forma

$$\prod_{i=1}^n d_{p_i}(s)d_{p_i}(-s)d_{c_i}(s) + \sum_{i=1}^n n_{p_i}(s)n_{c_i}(s)d_{c_i}(-s) \prod_{j \neq i} d_{p_j}(s)d_{p_j}(-s) = 0. \quad (5.8)$$

Ecuación de la que pueden extraerse como factor común las raíces inestables canceladas por los controladores

$$d_{p_i}(-s) \left[\prod_{i=1}^n d_{p_i}(s)d_{c_i}(s) + \sum_{i=1}^n n_{p_i}(s)n_{c_i}(s) \prod_{j \neq i} d_{p_j}(s) \right] = 0, \quad (5.9)$$

y que por lo tanto, incumple la condición para que se garantice la estabilidad interna del sistema (todas sus raíces deben ser positivas).

En conclusión, para que un sistema MISO sea estable internamente, deberán evitarse en todas las ramas las cancelaciones entre ceros y polos RHP. Además, para garantizar la estabilidad externa, deberá asegurarse que la función de lazo abierto total l_t cumple con el criterio de Nyquist.

Despreciando el carácter multilazo del sistema y teniendo en cuenta únicamente la función de lazo abierto total $l_t(j\omega)$, podemos garantizar la estabilidad del sistema mediante la restricción de la función sensibilidad

$$|S(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq \mu_s, \quad (5.10)$$

o sensibilidad complementaria

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{l_t(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq \mu_t, \quad (5.11)$$

tal como si se tratase de un sistema SISO¹.

La estrategia de diseño presentada en el [Capítulo 4](#) empleaba un cierre secuencial de lazos, traducido en un diseño secuencial de controladores. Por lo tanto, cuando se efectúa el *loop-shaping* del controlador $c_k(j\omega)$, se considera que el resto de controladores $c_{i \neq k}(j\omega)$ son constantes. La inecuación (5.10) puede reescribirse según

$$|S(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + l_{-k}(j\omega) + l_k(j\omega)} \right| \leq \mu_s, \quad (5.12)$$

donde

$$l_{-k}(j\omega) = \sum_{i \neq k} l_i(j\omega) = \sum_{i \neq k} p_i(j\omega) c_i(j\omega) = l_t(j\omega) - l_k(j\omega), \quad (5.13)$$

aglutina al conjunto de ramas a las que c_k no pertenece. Del mismo modo, la inecuación (5.11) pueden reescribirse según

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{l_{-k}(j\omega) + l_k(j\omega)}{1 + l_{-k}(j\omega) + l_k(j\omega)} \right| \leq \mu_t. \quad (5.14)$$

Uno de los problemas asociados al aplicar el procedimiento de diseño descrito en el [Capítulo 4](#) cuando se emplean las inecuaciones (5.12) o (5.14), es que los contornos de diseño QFT obtenidos para llevar a cabo el *loop-shaping* no se encuentran centrados en el punto $(-180^\circ, 0\text{dB})$. El desplazamiento de los contornos de estabilidad respecto al punto crítico de estabilidad no es habitual en QFT y dificulta su interpretación para lograr un diseño estable. A continuación, se analiza de forma detallada las condiciones a cumplir por l_k para que un sistema MISO garantice las inecuaciones (5.10) y (5.11). Además se presenta un estudio de las regiones de exclusión acotadas en el plano Real-Imag de l_k y Mod-Arg de l_k . Este estudio permite una mejor comprensión del significado de la inecuación, así como de sus limitaciones.

¹ Condición empleada en los diseños realizados en el [Capítulo 4](#).

5.1.1 Estabilidad MISO en el plano Real-Imag

Como en el caso SISO, el estudio de las condiciones de estabilidad se realiza empleando el criterio de Nyquist en el plano complejo Real-Imag. Considérese en primer lugar un sistema MISO conformado por plantas MP, es decir, con todos sus polos y ceros situados en el semiplano izquierdo. Como en el caso SISO, el criterio de Nyquist establece que el sistema será estable en lazo cerrado siempre que $l_t(j\omega)$ no presente rodeos al punto -1 . La diferencia principal con respecto al problema SISO radica en que $l_t(j\omega)$ comprende la rama a diseñar $l_k(j\omega)$ y el resto de ramas $l_{-k}(j\omega)$. Por lo tanto, desde el punto de vista de la rama a diseñar $l_k(j\omega)$ aparece una *función crítica* $-1 - l_{-k}(j\omega)$ para la estabilidad, dada la relación

$$1 + l_{-k}(j\omega) + l_k(j\omega) = 0 \rightarrow l_k(j\omega) = -1 - l_{-k}(j\omega). \quad (5.15)$$

En conclusión, el número de rodeos de $l_k(j\omega)$ a $-1 - l_{-k}(j\omega)$ determina el número de polos inestables del sistema en lazo cerrado. La dificultad radica en que $-1 - l_{-k}(j\omega)$ es un punto crítico diferente para cada frecuencia. Estudiar los rodeos a una función dependiente de la frecuencia puede llegar a ser complejo, y debe definirse de forma clara qué condiciones deben cumplirse para garantizar la estabilidad del sistema.

En la [Figura 5.1](#) puede observarse la traza en el plano complejo de una función $l_k(j\omega)$ con tres ganancias de control diferentes para la misma planta. También se representa la función crítica de estabilidad para $l_k(j\omega)$, denominada $e_k(j\omega) = -1 - l_{-k}(j\omega)$. A continuación, se analiza la estabilidad para cada uno de los casos.

- $l_{k_1}(j\omega)$ no se cruza con $e_k(j\omega)$ y deja en todo momento a $e_k(j\omega)$ a su izquierda si avanzamos hacia frecuencias crecientes. En este caso el sistema será estable, puesto que $l_k(j\omega)$ no rodea a ninguno de los puntos $e_k(j\omega)$.
- $l_{k_2}(j\omega)$ se cruza con $e_k(j\omega)$ en alguna frecuencia. El sistema podrá ser estable o inestable en función de las posiciones relativas de los lugares geométricos $l_{k_2}(j\omega)$ y $e_k(j\omega)$ en frecuencias específicas. Corresponde con el caso más complejo, ya que no puede determinarse la estabilidad con la información disponible en el diagrama.

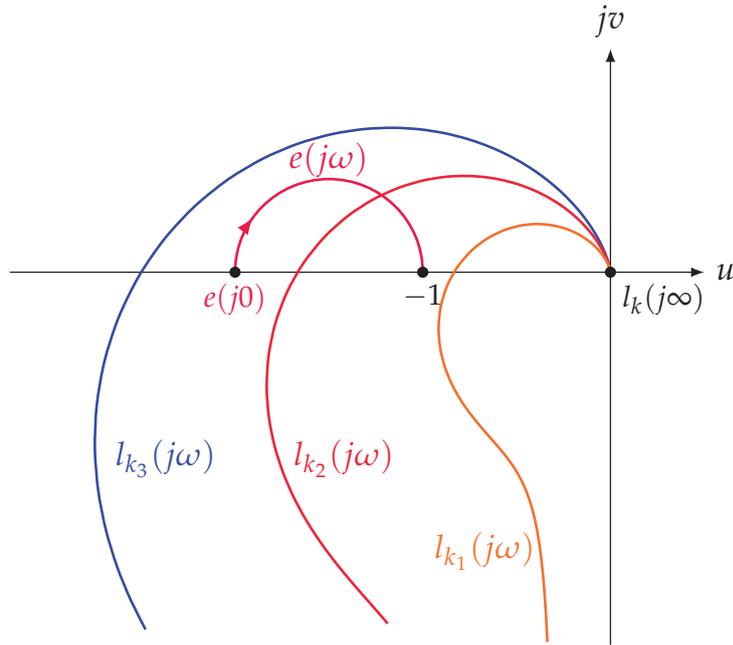


Figura 5.1: Criterio de Nyquist MISO para tres funciones $l_k(j\omega)$.

- $l_{k_3}(j\omega)$ no se cruza con $e_k(j\omega)$ y deja en todo momento a $e_k(j\omega)$ a su derecha si avanzamos hacia frecuencias crecientes. El sistema será inestable, puesto que los puntos críticos son rodeados por $l_{k_2}(j\omega)$.

Cuando $l_k(j\omega)$ y $e_k(j\omega) = -1 - l_{-k}(j\omega)$ se cruzan, el primer paso es obtener la pulsación de cruce ω_c en la que $l_k(j\omega_c)$ corta a $e_k(j\omega)$. Entonces, el punto crítico de estabilidad en dicha frecuencia es $e_k(j\omega_c)$. A continuación, se analiza su posición con respecto a $l_k(j\omega_c)$ para determinar la estabilidad. Se presentan dos opciones (ver [Figura 5.2](#)):

- $e_k(j\omega_c) = A$. En este caso $l_k(j\omega_c)$ deja al punto A a la izquierda en el sentido creciente de frecuencias. Es decir, no se presentan rodeos al punto crítico de estabilidad y el sistema en lazo cerrado es estable.
- $e_k(j\omega_c) = B$. En este caso $l_k(j\omega_c)$ deja al punto B a la derecha en el sentido creciente de frecuencias. Es decir, se produce un rodeo al punto crítico de estabilidad, y por lo tanto, el sistema en lazo cerrado presenta polos inestables.

A continuación, se justifica el criterio anterior estudiando la posición de funciones de lazo respecto al punto crítico clásico -1 (como en el caso SISO). La función de lazo abierto total $l_t(j\omega)$ se reescribe

$$l_t(j\omega) = l_k(j\omega) + l_{-k}(j\omega) = l_k(j\omega) - e_k(j\omega) - 1. \tag{5.16}$$

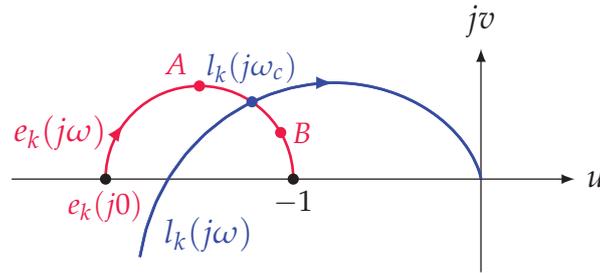


Figura 5.2: Puntos que determinan la estabilidad MISO cuando $l_k(j\omega)$ corta a $e_k(j\omega) = -1 - l_{-k}(j\omega)$.

Considerando la frecuencia de cruce crítica ω_c , la función $-e_k(j\omega_c) - 1$ toma un valor concreto, para el cual expresamos la función de lazo abierto total como

$$l_t^*(j\omega) = l_k(j\omega) - e_k(j\omega_c) - 1. \tag{5.17}$$

En la [Figura 5.3](#) se obtienen las funciones $l_{t_1}^*(j\omega)$ y $l_{t_2}^*(j\omega)$, que corresponden con $e_k(j\omega_c) = A$ y $e_k(j\omega_c) = B$, respectivamente, en el ejemplo mostrado en la [Figura 5.2](#). Puede comprobarse como $l_{t_1}^*(j\omega)$ no presenta rodeos al punto -1, dando lugar a un sistema estable en lazo cerrado. Por el contrario, $l_{t_2}^*(j\omega)$ presenta un rodeo, dando lugar a un sistema inestable. Es decir, se confirman las conclusiones ya indicadas anteriormente.

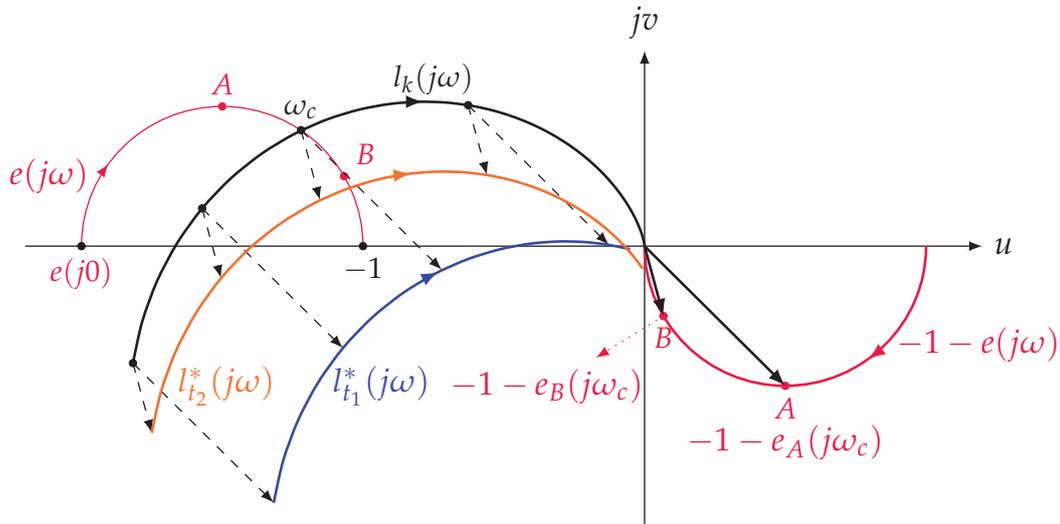


Figura 5.3: Criterio de Nyquist MISO respecto a -1 .

Como en el caso SISO, cuando se realiza el diseño de un sistema de control no sólo se busca que el sistema sea estable (estudio de la estabilidad absoluta), sino que lo sea con unos ciertos márgenes (estudio

de la estabilidad relativa). De este modo, se garantiza que distorsiones desconocidas en la función de lazo abierto dentro de unos ciertos márgenes no produzcan comportamientos inestables. Como se describe en el [Apéndice B](#), la forma tradicional de hacerlo es establecer restricciones en la magnitud máxima de la función sensibilidad S o de la función sensibilidad complementaria T . Esta idea es extrapolada a continuación a los sistemas MISO.

Considérese en primer lugar la función sensibilidad $S(j\omega)$ cuyo pico de magnitud máximo es μ_s , que ha sido seleccionado según los criterios expuestos en la [Sección B.1](#). La inecuación puede expresarse según

$$\begin{aligned} |S(j\omega)| &= \left| \frac{1}{1 + l_t(j\omega)} \right| = \left| \frac{1}{1 + l_k(j\omega) + l_{-k}(j\omega)} \right| \\ &= \left| \frac{1}{l_k(j\omega) - e_k(j\omega)} \right| \leq \mu_s, \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde $|l_k(j\omega) - e_k(j\omega)|$ se relaciona de forma directa con μ_s a partir de

$$|l_k(j\omega) - e_k(j\omega)| \geq \alpha = \mu_s^{-1}. \quad (5.19)$$

Expresando $l_k(j\omega)$ y $e_k(j\omega)$ en coordenadas rectangulares (Real-Imag) según: $l_k(j\omega) = u(j\omega) + jv(j\omega)$, $e_k(j\omega) = u_e(j\omega) + jv_e(j\omega)$; se sustituyen en la inecuación y se obtiene

$$(u(j\omega) - u_e(j\omega))^2 + (v(j\omega) - v_e(j\omega))^2 \geq \alpha^2, \quad (5.20)$$

El límite acotado por la inecuación anterior en el plano de la función de lazo abierto l_k en cada frecuencia discreta representa una circunferencia de radio α centrada en

$$u = u_e(j\omega); \quad v = v_e(j\omega). \quad (5.21)$$

Es decir, se generan un conjunto de circunferencias (una por cada frecuencia discreta) que definen la región de exclusión para $l_k(j\omega)$, como se ilustra en la [Figura 5.4](#).

También puede definirse la estabilidad relativa acotando el pico máximo de la función sensibilidad complementaria a una magnitud μ_t , que ha sido seleccionada según los criterios expuestos en la [Sección B.1](#):

$$\begin{aligned} |T(j\omega)| &= \left| \frac{l_t(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| = \left| \frac{l_k(j\omega) + l_{-k}(j\omega)}{1 + l_k(j\omega) + l_{-k}(j\omega)} \right| \\ &= \left| \frac{l_k(j\omega) - e_k(j\omega) - 1}{l_k(j\omega) - e_k(j\omega)} \right| \leq \mu_t. \end{aligned} \quad (5.22)$$

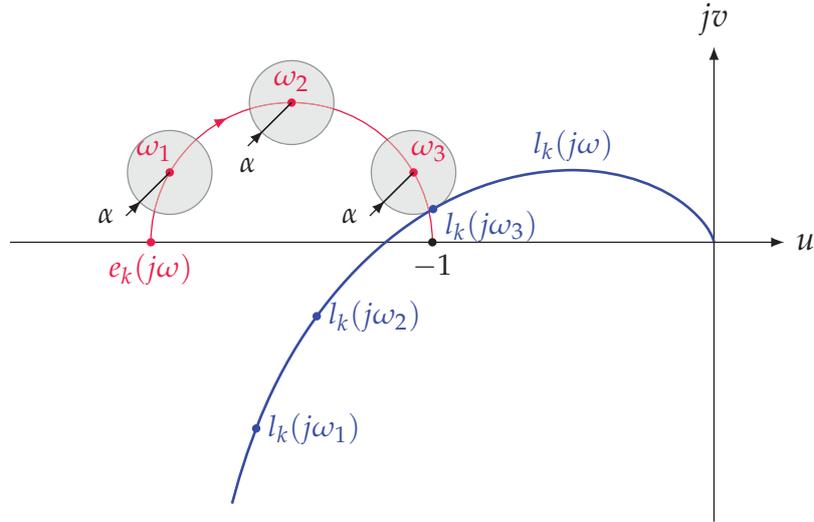


Figura 5.4: Regiones de exclusión para $l_k(j\omega)$ cuando se acota el pico de la función sensibilidad. Y diseño de $l_k(j\omega)$ estable.

Y sustituyendo $l_k(j\omega) = u(j\omega) + jv(j\omega)$ y $e(j\omega) = u_e(j\omega) + jv_e(j\omega)$ se obtiene

$$|T(j\omega)| = \frac{\sqrt{(u(j\omega) - u_e(j\omega) - 1)^2 + (v(j\omega) - v_e(j\omega))^2}}{\sqrt{(u(j\omega) - u_e(j\omega))^2 + (v(j\omega) - v_e(j\omega))^2}} \leq \mu_t. \quad (5.23)$$

Simplificando la notación² y desarrollando la ecuación anterior, se llega a

$$u^2(1 - \mu_t^2) + 2u(u_e(\mu_t^2 - 1) - 1) + (1 - 2u_e + u_e^2(1 - \mu_t^2)) + (1 - \mu_t^2)(v - v_e)^2 \geq 0; \quad (5.24)$$

ecuación que con las transformaciones adecuadas representa una circunferencia en el plano Real-Imag de l_k . Para ello, se agrupan los términos que contienen u según

$$(1 - \mu_t^2) \left[u^2 - 2u \frac{1 - u_e(\mu_t^2 - 1)}{(1 - \mu_t^2)} \right], \quad (5.25)$$

dando lugar a

$$(1 - \mu_t^2) \left(u - \frac{1}{(1 - \mu_t^2)} - u_e \right)^2 - \frac{(1 - u_e(\mu_t^2 - 1))^2}{(1 - \mu_t^2)}. \quad (5.26)$$

² Se omite temporalmente la dependencia de ω

Los términos que no dependen ni de u ni de v , pueden agruparse en el lado derecho de la ecuación dando lugar a

$$\frac{(1 - u_e(\mu_t^2 - 1))^2}{(1 - \mu_t^2)} - (1 - 2u_e + u_e^2(1 - \mu_t^2)); \quad (5.27)$$

expresión que puede simplificarse en

$$\frac{\mu_t^2}{(1 - \mu_t^2)}. \quad (5.28)$$

Por último, se multiplica a ambos lados de la ecuación por $(1 - \mu_t^2)^{-1}$, obteniendo

$$\left(u - \frac{1}{(1 - \mu_t^2)} - u_e\right)^2 + (v - v_e)^2 \geq \frac{\mu_t^2}{(1 - \mu_t^2)^2}. \quad (5.29)$$

El límite demarcado por la inecuación anterior en el plano Real-Imag de l_k se corresponde con una circunferencia centrada en el punto

$$u = \frac{1}{(1 - \mu_t^2)} + u_e, \quad v = v_e; \quad (5.30)$$

con radio

$$r = \left| \frac{\mu_t}{(1 - \mu_t^2)} \right|. \quad (5.31)$$

Teniendo en cuenta que las coordenadas u_e y v_e dependen de la frecuencia, se tiene una familia de circunferencias, que corresponden con *M-circles* desplazados. Véase como la circunferencia obtenida si $l_{-k}(j\omega) = 0$ se corresponde con el círculo M definido por la magnitud μ_t , dado que en este caso se cumple que $e_k(j\omega) = -1$, lo que implica: $u_e = -1$, $v_e = 0$; produciendo que el centro de la circunferencia se sitúe en

$$u = \frac{1}{(1 - \mu_t^2)} - 1 = \frac{\mu_t^2}{(1 - \mu_t^2)}, \quad v = 0. \quad (5.32)$$

Es decir, cada circunferencia se encuentra desplazada a la izquierda del punto $e_k(j\omega)$ una cantidad $|1 - \mu_t^2|^{-1}$. Este desplazamiento lateral es idéntico al obtenido en el caso SISO con respecto al punto -1.

En la [Figura 5.5](#) se muestran las regiones de exclusión para tres frecuencias de diseño, junto con un diseño de $l_k(j\omega)$ estable. En ella queda

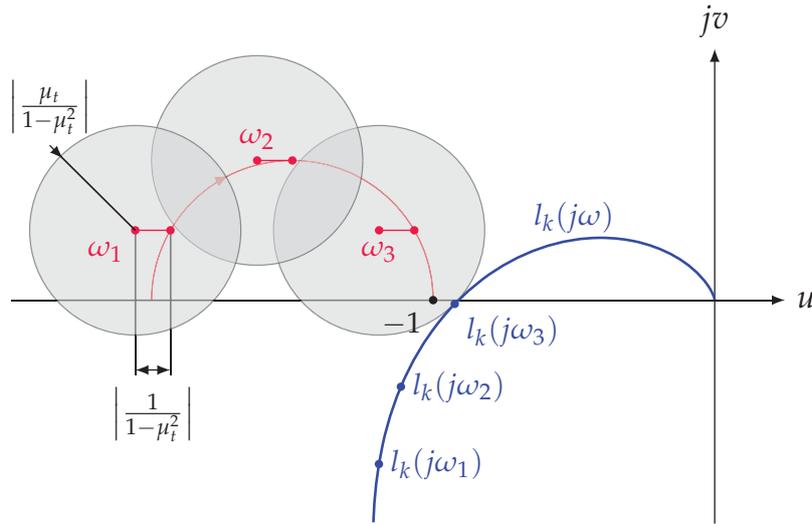


Figura 5.5: Regiones de exclusión para $l_k(j\omega)$ cuando se acota el pico de la función sensibilidad complementaria. Y diseño de $l_k(j\omega)$ estable.

comprobado como la acotación de la función sensibilidad restringe un círculo M equivalente al obtenido para un sistema SISO, pero desplazado en el eje real una magnitud

$$\frac{1}{(1 - \mu_t^2)}. \quad (5.33)$$

Para el trazado del ejemplo mostrado en la [Figura 5.5](#) se ha empleado una cota $\mu_t = 3$, dando lugar a un desplazamiento del centro de la circunferencia en el eje real de -0.125 . El radio de las circunferencias corresponde con 0.375 .

En conclusión, el empleo de las inecuaciones (5.18) y (5.22) permite garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado con unos ciertos márgenes, ya que imponen una región de exclusión para cada lazo l_k respecto a un punto crítico de estabilidad que depende de los demás lazos y que por lo tanto se desplaza con la frecuencia. El problema es que dichas inecuaciones realmente establecen los márgenes de estabilidad deseados para la función de lazo abierto total; y los márgenes resultantes para cada función de lazo están supeditados al diseño secuencial. Así, por ejemplo, si se emplea la inecuación (5.18) junto con una cota μ_s para obtener un margen de ganancia de 5dB, el sistema será estable siempre que el conjunto $l_t(j\omega)$ presente una variación en su magnitud inferior a 5dB. Sin embargo, esta condición no implica que cada una de las ramas $l_i(j\omega)$ que componen $l_t(j\omega)$ pueda cambiar su magnitud 5dB. La definición de márgenes concretos para cada lazo sería lo deseable, ya que la

estabilidad relativa está normalmente asociada al desconocimiento de la planta, o sea, en este caso a cada p_i . El definir márgenes de estabilidad para $l_t(j\omega)$ en vez de para $l_i(j\omega)$ puede resultar especialmente problemático cuando se diseña en el plano Mod-Arg, como es habitual en QFT. La siguiente sección analiza estos problemas.

5.1.2 Estabilidad MISO en el plano Mod-Arg

Conocidos los criterios de estabilidad absoluta para sistemas MISO en el plano complejo Real-Imag de la función de lazo, éstos se extrapolarán al plano Mod-Arg en el que se realiza el *loop-shaping* de controladores QFT (ver [Capítulo 4](#)). Como en el caso SISO, la transferencia de las conclusiones es directa, dada la equivalencia entre ambos planos. Como se ha observado en la [Figura 5.4](#) y la [Figura 5.5](#), cuando empleamos este tipo de especificaciones de diseño, los contornos de exclusión para $l_k(j\omega)$ se desvían en función de $e_k(j\omega) = -1 - l_{-k}(j\omega)$, a diferencia del caso SISO, donde dichos contornos de exclusión eran fijos con referencia en el punto -1 .

En la [Figura 5.6](#) se muestra el efecto que produce el desplazamiento de las regiones de exclusión en el plano Mod-Arg. Como era de esperar el desplazamiento de los contornos es tal que la referencia no corresponde con el punto $(-180^\circ, 0\text{dB})$. Pero además, se observa como estos se deforman, comprimiéndose o expandiéndose cuando la función $e_k(j\omega)$ es diferente de -1 . Atendiendo al fenómeno de compresión de contornos, puede comprobarse como la compresión es mayor cuanto mayor es el módulo de $|e_k(j\omega)|$, pudiendo llegar a ser prácticamente un punto cuando la magnitud de $e_k(j\omega)$ aumenta suficientemente. Es decir, cuando se diseña la rama $l_k(j\omega)$, para un sistema en el que $l_{-k}(j\omega)$ presente alta magnitud en un conjunto discreto de frecuencias, se obtendrán regiones de exclusión para $l_k(j\omega)$ que tienden a transformarse en un punto en dicho conjunto de frecuencias. De hecho, la naturaleza doblemente discreta³ de QFT puede producir que no aparezcan contornos de exclusión, ya que dicho punto puede situarse en una fase no considerada para el cálculo del contorno QFT.

Por norma general, todos los diseños MISO exigen que la función de lazo abierto total $l_t(j\omega)$ presente alta magnitud en baja frecuencia,

³ Se calculan los contornos de diseño para un conjunto discreto de frecuencias en un conjunto discreto de fases.

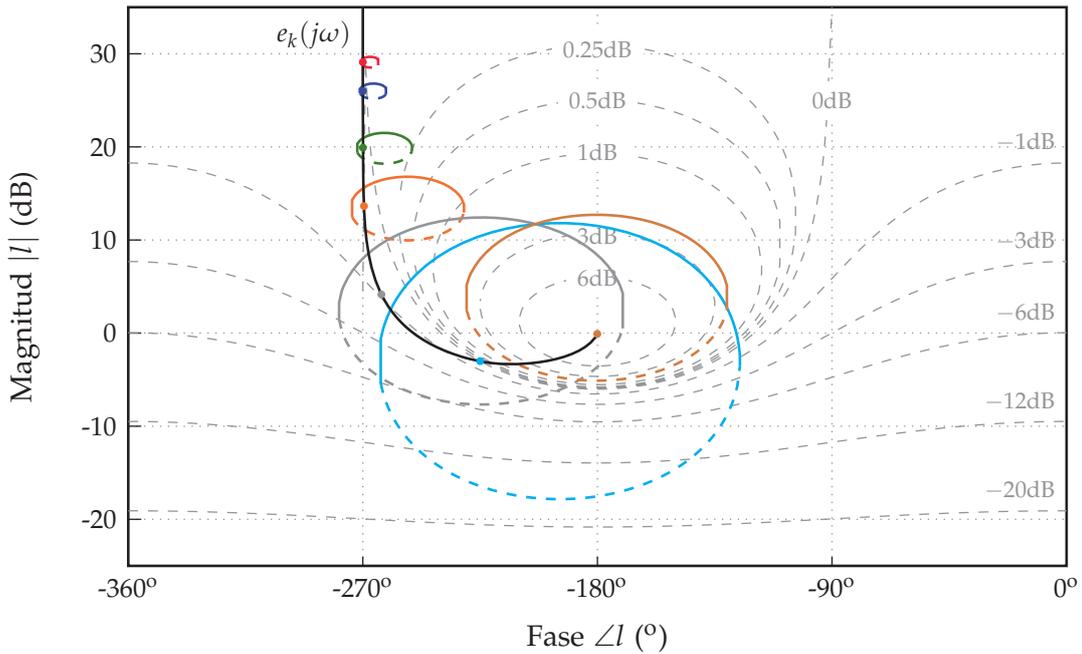


Figura 5.6: Esquema de la transformación de las regiones de exclusión en la carta de Nichols obtenidas mediante la acotación de T .

$|l_t(j0)| \gg 1$, como condición necesaria para un adecuado rechazo de perturbaciones. Dicha magnitud decrece con el aumento la frecuencia, haciéndose menor a la unidad cuando nos aproximamos a la frecuencia de cruce de fase. Por lo tanto, el fenómeno descrito anteriormente será más pronunciado en el diseño de las ramas que trabajan en alta frecuencia, ya que cuando se lleva a cabo su *loop-shaping* las ramas que trabajan en baja frecuencia se encuentran ya diseñadas⁴. En el diseño de las ramas que han de trabajar en alta frecuencia se observarán regiones de exclusión en baja frecuencia muy pequeñas, que pueden incluso llegar a desaparecer. Que este problema se produzca en baja frecuencia reduce su importancia, dado que la estabilidad se determina en medias-altas frecuencias, donde las ramas que aportan magnitud de baja frecuencia se encuentran desconectadas del lazo de control, lo que produce que los contornos de exclusión sean similares a los obtenidos en un diseño SISO.

A continuación, se cuantifica la compresión de los contornos. Estos cálculos permiten comprender por qué tiene lugar la compresión de los mismos, permitiendo una mejor interpretación de los problemas que pueden aparecer cuando se emplean este tipo de especificaciones - (5.18) y (5.22)- para definir la estabilidad robusta.

⁴ Recuérdese que el método de diseño propuesto establece un orden de cierre de lazos en el que las plantas que trabajan en baja frecuencia se diseñan en primer lugar.

En primer lugar, se cuantifica la deformación de los contornos para l_k obtenidos por acotación del pico de la función sensibilidad (5.18) cuando se pasa del plano complejo Real-Imag al plano complejo Mod-Arg. Recuérdese que esta especificación genera regiones de exclusión circulares centradas en el punto $e_k(j\omega)$ y con radio μ_s^{-1} en el plano Real-Imag. En el plano Mod-Arg se obtienen regiones de exclusión centradas en el punto $(\angle e_k(j\omega), 20 \log |e_k(j\omega)|)$, cuyas dimensiones dependen del módulo de $|e_k(j\omega)|$. La distancia relativa entre la altura máxima y mínima de dicha región está determinada por

$$h_{\text{dB}}(j\omega) = 20 \log \frac{|e_k(j\omega)| + \mu_s^{-1}}{|e_k(j\omega)| - \mu_s^{-1}} = 20 \log \frac{\mu_s |e_k(j\omega)| + 1}{\mu |e_k(j\omega)| - 1}, \quad (5.34)$$

ecuación que puede obtenerse restando el módulo máximo y el mínimo del área de exclusión en el plano Real-Imag (Figura 5.7). Del mismo modo, la distancia relativa entre la fase máxima y mínima esta determinada por

$$w(j\omega) = 2 \arctan \frac{\mu_s^{-1}}{|e_k(j\omega)|} = 2 \arctan \left(\frac{1}{|e_k(j\omega)| \mu_s} \right), \quad (5.35)$$

ecuación obtenida calculando el doble de la mayor distorsión en fase.

Puede comprobarse como los valores de $h_{\text{dB}}(j\omega)$ y $w(j\omega)$ decrecen con el incremento de $|e_k(j\omega)|$, obteniéndose para $|e_k(j\omega)| = \infty$ unas dimensiones $h(j\omega) = 0$ y $w(j\omega) = 0$.

Véase como ejemplo un sistema MISO con dos ramas. La rama $l_1(j\omega)$ se encuentra diseñada y presenta en dos frecuencias distintas los siguientes valores: $l_1(j\omega_1) = 99 \angle 0^\circ$, $l_1(j\omega_2) \approx 0 \angle -180^\circ$. Para cada una de las frecuencias se obtiene el contorno $e_k(j\omega)$, dando lugar a dos puntos: $e_1(j\omega_1) = 100 \angle -180^\circ$, $e_1(j\omega_2) \approx 1 \angle -180^\circ$. Si la estabilidad es definida empleando la función sensibilidad $S(j\omega)$ cuyo pico se acota con $\mu_s = 2$, obtenemos las siguientes regiones de exclusión:

- Para ω_1 se obtiene una región de exclusión en el plano Mod-Arg cuya altura es

$$h_{\text{dB}} = 20 \log \frac{100\mu_s + 1}{100\mu_s - 1} = 0.0869 \text{dB}, \quad (5.36)$$

y su anchura es

$$w = 2 \arctan \left(\frac{1}{100\mu_s} \right) = 0.573^\circ. \quad (5.37)$$

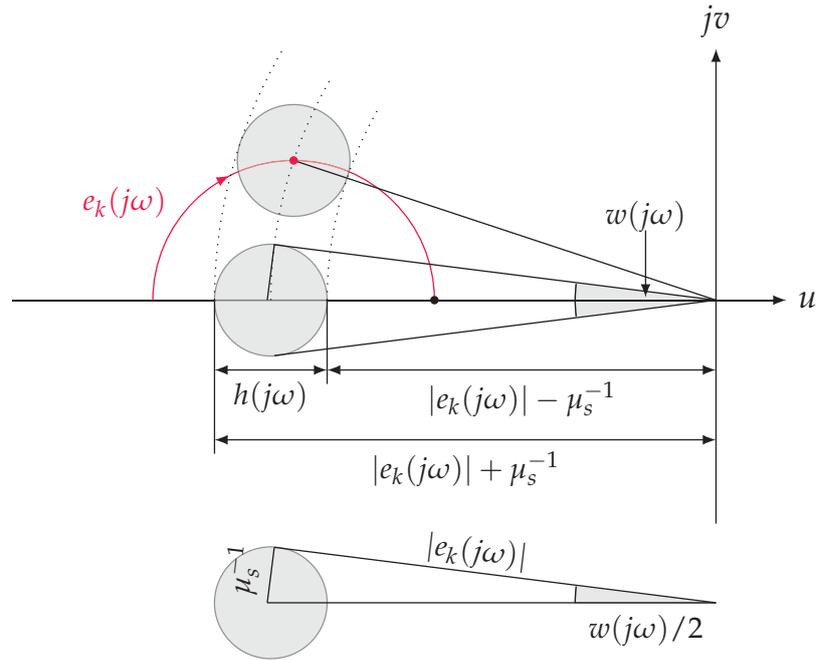


Figura 5.7: Contorno de estabilidad en el plano Real-Imag obtenido por acotación del pico de la función sensibilidad: medidas características para dimensionar el contorno en el plano Mod-Arg.

Es decir, el círculo en el plano Real-Imag se ha transformado prácticamente en un punto del plano Mod-Arg, que puede no ser apreciable si se emplea un cálculo de contornos en frecuencias discretas (estrategia empleada en QFT).

- Para ω_2 se obtiene una región de exclusión en el plano Mod-Arg cuya altura es

$$h_{\text{dB}} = 20 \log \frac{1\mu_s + 1}{1\mu_s - 1} = 9.54\text{dB}, \quad (5.38)$$

y su anchura es

$$w = 2 \arctan \left(\frac{1}{100\mu_s} \right) = 53.13^\circ, \quad (5.39)$$

Es decir, el círculo en el plano Real-Imag se corresponde con una amplia región de exclusión en el plano Mod-Arg, cuyas dimensiones son similares a las de los contornos QFT para sistemas SISO.

A continuación, se cuantifica la deformación de los contornos para l_k obtenidos por acotación del pico de la función sensibilidad complementaria (5.22) cuando se pasa del plano complejo Real-Imag al plano

complejo Mod-Arg. Recuérdese que en este caso, los contornos en el plano Real-Imag son circunferencias (*M-circles*) desplazadas por la función $e_k(j\omega)$ (Figura 5.5). En el plano de Mod-Arg se obtiene una región de exclusión centrada en el punto

$$\arctan \left(\frac{v_e(j\omega)}{\frac{1}{(1-\mu_t^2)} + u_e(j\omega)} \right),$$

$$10 \log \left(\left(\frac{1}{(1-\mu_t^2)} + u_e(j\omega) \right)^2 + v_e(j\omega)^2 \right); \quad (5.40)$$

cuya distancia relativa entre la altura máxima y mínima está determinada por

$$h_{\text{dB}}(j\omega) = 20 \log \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{(1-\mu_t^2)} + u_e(j\omega) \right)^2 + v_e(j\omega)^2 + \mu_t}}{\sqrt{\left(\frac{1}{(1-\mu_t^2)} + u_e(j\omega) \right)^2 + v_e(j\omega)^2 - \mu_t}}, \quad (5.41)$$

ecuación que puede obtenerse restando el módulo máximo y el mínimo del área de exclusión en el plano Real-Imag (Figura 5.8). Del mismo modo, la distancia relativa entre la fase máxima y mínima está determinada por

$$w(j\omega) = 2 \arctan \frac{\frac{\mu_t}{1-\mu_t^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{(1-\mu_t^2)} + u_e(j\omega) \right)^2 + v_e(j\omega)^2}}, \quad (5.42)$$

ecuación obtenida calculando el doble de la mayor distorsión en fase.

Como en el caso anterior, las medidas $h_{\text{dB}}(j\omega)$ y $w(j\omega)$ se reducen con el aumento del módulo de $e_k(j\omega)$, sufriendo un comportamiento similar al obtenido para la función sensibilidad.

Considérese el ejemplo anterior, en este caso empleando una cota $\mu_t = 2$ sobre el pico de la función sensibilidad complementaria $T(j\omega)$. Se obtienen regiones de exclusión con las siguientes características:

- Para ω_1 se obtiene una región de exclusión centrada en el punto $(0^\circ, 40.02\text{dB})$ cuya distancia máxima entre el extremos superior e inferior está determinada por

$$h_{\text{dB}} = 20 \log \frac{100.33 + 2/3}{100.33 - 2/3} = 0.1154\text{dB}, \quad (5.43)$$

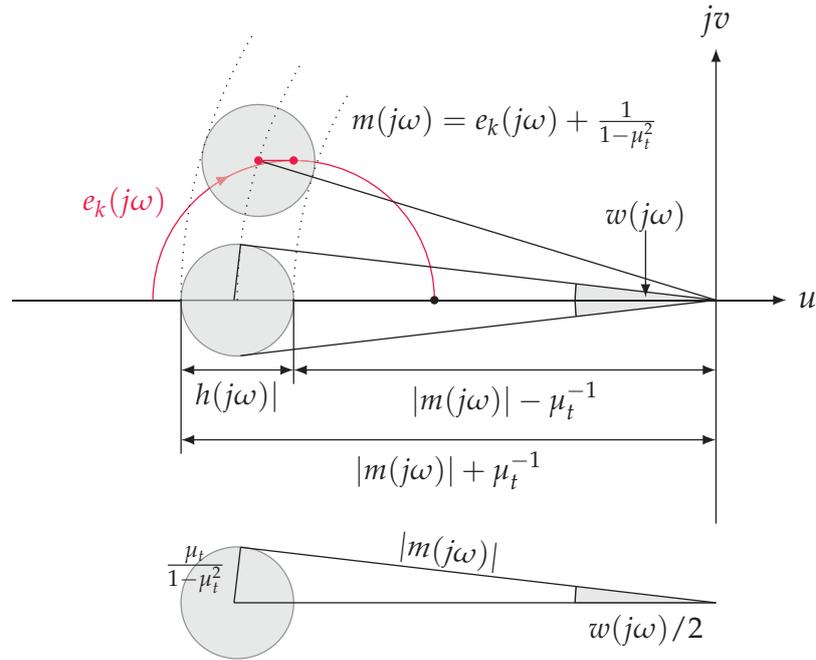


Figura 5.8: Contorno de estabilidad en el plano Real-Imag obtenido por acotación del pico de la función sensibilidad complementaria: medidas características para dimensionar el contorno en el plano Mod-Arg.

el ancho de dicha área de exclusión es

$$w = 2 \arctan \left(\frac{2/3}{100.33} \right) = 0.7614^\circ. \quad (5.44)$$

Es decir, el círculo en el plano Real-Imag se ha transformado prácticamente en un punto en el plano Mod-Arg, el cual puede no ser ni tan siquiera apreciable en una frecuencia discreta.

- Para ω_2 se obtiene una región centrada en el punto $(0^\circ, 2.5\text{dB})$ del plano Mod-Arg cuya distancia máxima entre el extremos superior e inferior está determinada por

$$h_{\text{dB}} = 20 \log \frac{1.33 + 2/3}{1.33 - 2/3} = 9.57\text{dB}. \quad (5.45)$$

El ancho de dicha área de exclusión es

$$w = 2 \arctan \left(\frac{2/3}{1.33} \right) = 53.25^\circ. \quad (5.46)$$

Es decir, el círculo en el plano Real-Imag se corresponde con una amplia región de exclusión en el plano Mod-Arg, cuyas dimensiones son similares a las de los contornos QFT para sistemas SISO.

Llegados a este punto pueden determinarse una serie de conclusiones sobre el significado de las inecuaciones de diseño - (5.18) y (5.22)- analizadas hasta el momento.

1. El cumplimiento de dichas condiciones garantiza la estabilidad del sistema MISO. Los márgenes de estabilidad relativa alcanzados son referidos a la función de lazo abierto total. Es decir, el sistema será estable siempre que el conjunto de ramas $l_t(j\omega)$ presente variaciones en su magnitud o fase inferiores a las establecidas por dichos márgenes. Su empleo puede ser adecuado siempre que se comprendan sus particularidades.
2. Cuando se realiza el *loop-shaping* de controladores en el plano de l_k debe vigilarse la compresión de los contornos de estabilidad. Como en el caso SISO, en todas las frecuencias analizadas aparece un contorno (*bound*) de estabilidad. Dicho contorno pueden encontrarse comprimido hasta tal punto que al manejar fases discretas se reduzca a un punto o incluso desaparezca. En estos casos se debe prestar especial atención en cómo se realiza el *loop-shaping* de l_k , ya que dicho contorno existe y debe ser bordeado debidamente para satisfacer el criterio de estabilidad de Nyquist.
3. Un diseño estable $l_t(j\omega)$ que garantice el cumplimiento de las especificaciones puede encontrarse muy próximo a la inestabilidad debido a variaciones en alguna de sus ramas. Este fenómeno no es habitual si se emplean las estrategias de diseño presentadas en el [Capítulo 4](#), ya que estas favorecen la consecución de diseños suficientemente estables en cada rama. No obstante, si se consideraran únicamente ⁵ especificaciones de estabilidad, podrían obtenerse diseños en los que un pequeño cambio en la magnitud o fase de una de las ramas produciría la inestabilidad del conjunto. La [Figura 5.9](#) muestra un *loop-shaping* que ilustra dicho problema. Los contornos de diseño obtenidos para la rama $l_k(j\omega)$ son generados empleando la inecuación (5.22), junto con una cota $\mu_t = 1.3$. Esta especificación garantiza que el sistema será estable siempre que $l_t(j\omega)$ presente distorsiones en magnitud inferiores a 5dB y distorsiones en fase inferiores a 45° . La figura muestra varios diseños de la rama k . El *loop-shaping* $l_{k_a}(j\omega)$ da lugar a un sistema estable en lazo cerrado. Sin embargo, el *loop-shaping* $l_{k_b}(j\omega)$ da lugar a un sistema

⁵ Se excluyen las especificaciones de *performance*.

inestable en lazo cerrado. Véase como la distorsión en magnitud entre ambos diseños es inferior a 5dB. Queda comprobado como la compresión de los círculos de estabilidad puede producir que diseños estables puedan volverse inestables debido a la presencia de pequeñas variaciones de las plantas.

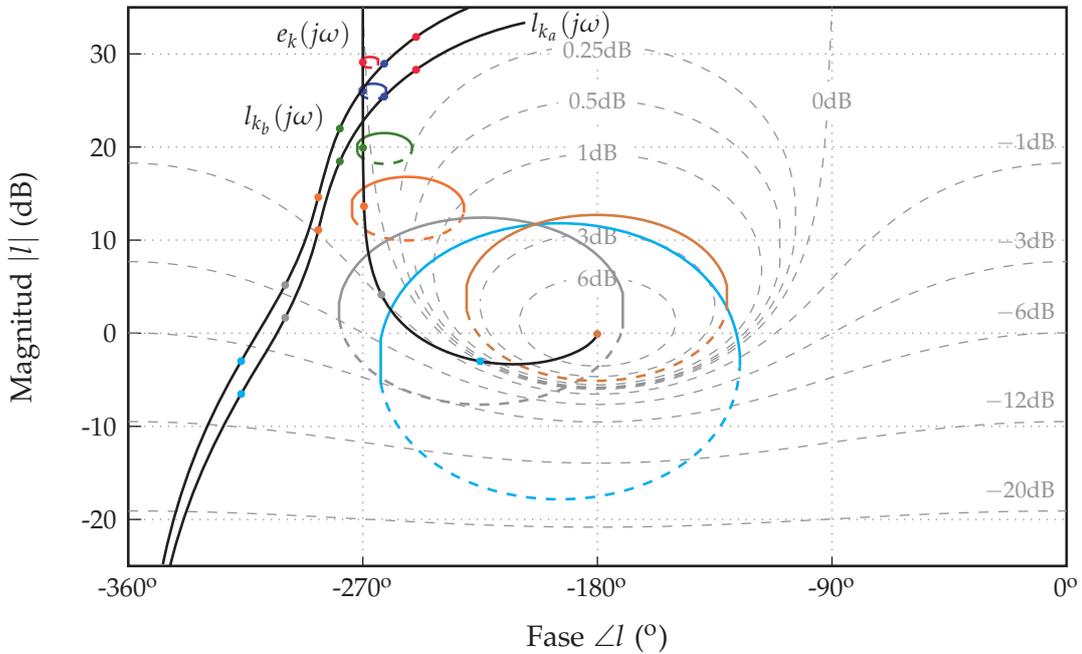


Figura 5.9: Problemas producidos por la compresión de los contornos de estabilidad.

5.2 ESTABILIDAD MISO REFERIDA A CADA RAMA

Para solucionar los problemas presentados en la sección anterior deben emplearse nuevas especificaciones de diseño que garanticen el cumplimiento de márgenes de estabilidad relativos a cada rama, lo cual está ligado al desconocimiento asociado al modelo de cada planta. Si el diseño de control satisface los contornos correspondientes, el sistema será estable si la variación de las plantas es inferior a los márgenes previstos para cada una de ellas. Estas condiciones son mucho más restrictivas que la empleada en la sección anterior y, por lo tanto, darán lugar a controladores que emplean mayor cantidad de realimentación para satisfacer el mismo performance.

La condición de estabilidad descrita en el párrafo anterior requiere que los contornos de estabilidad no se compriman cuando se encuentren desplazados del punto -1 . Es decir, para sistemas sin incertidum-

bre⁶, deberían obtenerse contornos de exclusión con idéntica forma y dimensión a los obtenidos cuando el punto crítico de estabilidad se sitúa en el punto $(-180^\circ, 0\text{dBs})$, para cualquier valor de $e_k(j\omega)$. De este modo, puede garantizarse una mayor robustez en el diseño.

En la sección anterior se ha demostrado que la compresión de los contornos de estabilidad en el plano Mod-Arg, obtenidos mediante el empleo (5.18) y (5.22), es debida a que $e_k(j\omega)$ desplaza el punto crítico de estabilidad. Para solucionar este problema debe incrementarse el tamaño de la región de exclusión en el plano complejo de l_k cuando el módulo de $e_k(j\omega)$ aumenta. De este modo, el incremento en la restricción de diseño se compensa con la compresión de los contornos, dando lugar a regiones de exclusión en el plano de Nichols con el mismo tamaño que las obtenidas cuando $e_k(j\omega) = 0$.

A continuación, se presentan dos nuevas inecuaciones de diseño, que substituyen a (5.18) y (5.22). En primer lugar se estudia la modificación necesaria cuando se desea acotar la sensibilidad complementaria. Para ello analícense las ecuaciones (5.34) y (5.35), que estudian la compresión de los contornos cuando se emplea una acotación de la función sensibilidad (5.18). Del análisis previo se conoce que el tamaño del contorno sólo es adecuado cuando $|e_k(j\omega)| = 1$. En este caso se obtiene

$$\begin{aligned} h_{\text{dB}} &= 20 \log \frac{\mu_s + 1}{\mu_s - 1}, \\ w &= 2 \arctan(\mu_s^{-1}). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Si la cota μ_s se hace más restrictiva (más pequeña) en función del módulo de $e_k(j\omega)$, puede compensarse la compresión del contorno. Si se emplea como cota en (5.18) la función $\mu_s / |e_k(j\omega)|$,

$$\left| \frac{1}{1 + l_{-k}(j\omega) + l_k(j\omega)} \right| \leq \frac{\mu_s}{|e_k(j\omega)|} = \frac{\mu_s}{|1 + l_{-k}(j\omega)|}; \quad (5.48)$$

las ecuaciones que determinan el tamaño de los contornos en el plano de Mod-Arg de l_k pasan a ser

$$h_{\text{dB}}(j\omega) = 20 \log \frac{|e_k(j\omega)| + \mu_s^{-1}|e_k(j\omega)|}{|e_k(j\omega)| - \mu_s^{-1}|e_k(j\omega)|} = 20 \log \frac{\mu_s + 1}{\mu_s - 1}, \quad (5.49)$$

y

$$w(j\omega) = 2 \arctan \frac{\mu_s^{-1}|e_k(j\omega)|}{|e_k(j\omega)|} = 2 \arctan(\mu_s^{-1}). \quad (5.50)$$

⁶ Los estudiados hasta este momento.

Queda demostrado que con la modificación propuesta el tamaño del contorno en el plano de Mod-Arg es constante e independiente de la función $e_k(j\omega)$. Por lo tanto, se obtendrán contornos cuyo centro se sitúa en $e_k(j\omega)$, y presentan idéntica forma y dimensión a la obtenida para un contorno SISO.

La inecuación (5.48) puede ser expresada según

$$\left| \frac{1 + l_{-k}(j\omega)}{1 + l_{-k}(j\omega) + l_k(j\omega)} \right| \leq \mu_s, \tag{5.51}$$

para dejar en el lado derecho únicamente la cota que no depende de la frecuencia.

En el plano complejo Real-Imag de l_k , la modificación anterior, (5.51) frente a (5.18), produce un incremento de las regiones de exclusión. La Figura 5.10 muestra este fenómeno. En ella se presentan las nuevas regiones de exclusión junto con un diseño de $l_k(j\omega)$ estable⁷. En línea discontinua se muestra la función $l_k(j\omega)$ de la Figura 5.4. Véase cómo se viola el contorno para ω_3 , aún cuando éste está determinado por una función $e_k(j\omega)$ con módulo próximo a la unidad.

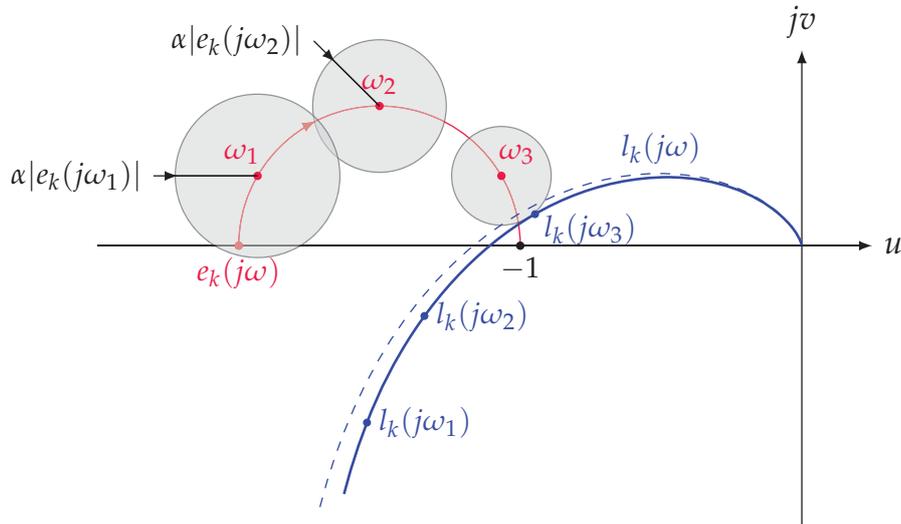


Figura 5.10: Regiones de exclusión obtenidas mediante el empleo de la inecuación (5.51).

La inecuación (5.51) es equivalente a emplear

$$\left| \frac{1}{1 + \frac{l_k(j\omega)}{1+l_{-k}(j\omega)}} \right| \leq \mu_s, \tag{5.52}$$

⁷ Se emplean los mismos datos que en la Figura 5.4, pero en este caso empleando la nueva inecuación de diseño (5.51).

que establece que la función auxiliar $l_k(j\omega)/(1+l_{-k}(j\omega))$ no penetre en una zona circular de radio μ_s^{-1} alrededor del punto -1 en el plano Real-Imag (véase el paralelismo con la [Figura B.4](#) para la función $l(j\omega)$ en un diseño SISO).

Entonces la estabilidad del sistema MISO para cada rama utiliza la función de lazo abierto auxiliar

$$\frac{l_k(j\omega)}{1+l_{-k}(j\omega)}. \quad (5.53)$$

Así, la estabilidad del conjunto MISO acotando la función sensibilidad complementaria es

$$\left| \frac{\frac{l_k(j\omega)}{1+l_{-k}(j\omega)}}{1+\frac{l_k(j\omega)}{1+l_{-k}(j\omega)}} \right| \leq \mu_t, \quad (5.54)$$

donde μ_t representa la cota máxima y se escoge según lo expuesto en el [Apéndice B](#).

A continuación, se estudian las regiones acotadas por la inecuación anterior en el plano Real-Imag de l_k y en el plano Mod-Arg de l_k . Para ello se expresa la inecuación anterior en función de $e_k(j\omega)$, dando lugar a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\frac{l_k(j\omega)}{1+l_{-k}(j\omega)}}{1+\frac{l_k(j\omega)}{1+l_{-k}(j\omega)}} \right| &= \left| \frac{l_k(j\omega)}{1+l_{-k}(j\omega)+l_k(j\omega)} \right| \\ &= \left| \frac{l_k(j\omega)}{-e_k(j\omega)+l_k(j\omega)} \right| \leq \mu_t. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Sustituyendo las componentes Real-Imag de l_k y e_k se obtiene

$$\frac{\sqrt{u^2(j\omega)+v(j\omega)^2}}{\sqrt{(u(j\omega)-u_e(j\omega))^2+(v(j\omega)-v_e(j\omega))^2}} \leq \mu_t. \quad (5.56)$$

Para obtener el contorno de exclusión en las coordenadas Real-Imag de $l_k(j\omega) = u(j\omega) + jv(j\omega)$ se re-ordena convenientemente la expresión anterior. En primer lugar, se eliminan las raíces y se pasa el denominador a la parte derecha de la inecuación⁸

$$u^2 - \mu_t^2 u^2 + 2\mu_t^2 uu_e + v^2 - \mu_t^2 v^2 + 2\mu_t^2 vv_e \leq \mu_t^2 u_e^2 + \mu_t^2 v_e^2. \quad (5.57)$$

⁸ Se elimina la dependencia de la frecuencia para simplificar la notación.

A continuación, se agrupan los términos para expresarlos en función de $u(j\omega)$ y $v(j\omega)$

$$\begin{aligned} & (1 - \mu_t^2) \left[\left(u + \frac{u_e \mu_t^2}{(1 - \mu_t^2)} \right)^2 - \frac{u_e^2 \mu_t^4}{(1 - \mu_t^2)^2} \right] + \\ & (1 - \mu_t^2) \left[\left(v + \frac{v_e \mu_t^2}{(1 - \mu_t^2)} \right)^2 - \frac{v_e^2 \mu_t^4}{(1 - \mu_t^2)^2} \right] \\ & \leq \mu_t^2 (u_e^2 + v_e^2), \quad (5.58) \end{aligned}$$

y se pasan al lado derecho los términos que no dependen de éstos, obteniéndose

$$\left(u + \frac{u_e \mu_t^2}{(1 - \mu_t^2)} \right)^2 + \left(v + \frac{v_e \mu_t^2}{(1 - \mu_t^2)} \right)^2 \leq \left(\frac{\mu_t^2 \sqrt{u_e^2 + v_e^2}}{(1 - \mu_t^2)} \right)^2. \quad (5.59)$$

La ecuación anterior corresponde con la de una circunferencia con centro en

$$\frac{\mu_t^2}{(\mu_t^2 - 1)} e_k(j\omega); \quad \forall \mu_t > 1, \quad (5.60)$$

y radio

$$\left| \frac{\mu_t}{(1 - \mu_t^2)} \right| |e_k(j\omega)|. \quad (5.61)$$

En la [Figura 5.11](#) se muestran las nuevas regiones de exclusión, obtenidas para el mismo ejemplo que en el mostrado en la [Figura 5.5](#). Como en el caso anterior se representan junto a las regiones de exclusión dos diseños de $l_k(j\omega)$. El mostrado con línea continua, representa un diseño estable que no viola los contornos, mientras que el mostrado con línea discontinua corresponde con el de de la [Figura 5.5](#) para la condición de estabilidad (5.22). Este último diseño viola los contornos incluso en alta frecuencia, donde $e_k(j\omega)$ presenta un módulo próximo a la unidad.

Conocido el tamaño de los contornos de exclusión, puede analizarse el tamaño de los mismos en el plano Mod-Arg de l_k . Para ello se siguen los mismos pasos que se ilustraron con la [Figura 5.8](#). El incremento de altura del contorno se calcula

$$h_{dB}(j\omega) = 20 \log \frac{\frac{\mu_t^2}{\mu_t^2 - 1} |e_k(j\omega)| + \frac{\mu_t}{\mu_t^2 - 1}}{\frac{\mu_t^2}{\mu_t^2 - 1} |e_k(j\omega)| - \frac{\mu_t}{\mu_t^2 - 1} |e_k(j\omega)|} = 20 \log \frac{\mu_t + 1}{\mu_t - 1}, \quad (5.62)$$

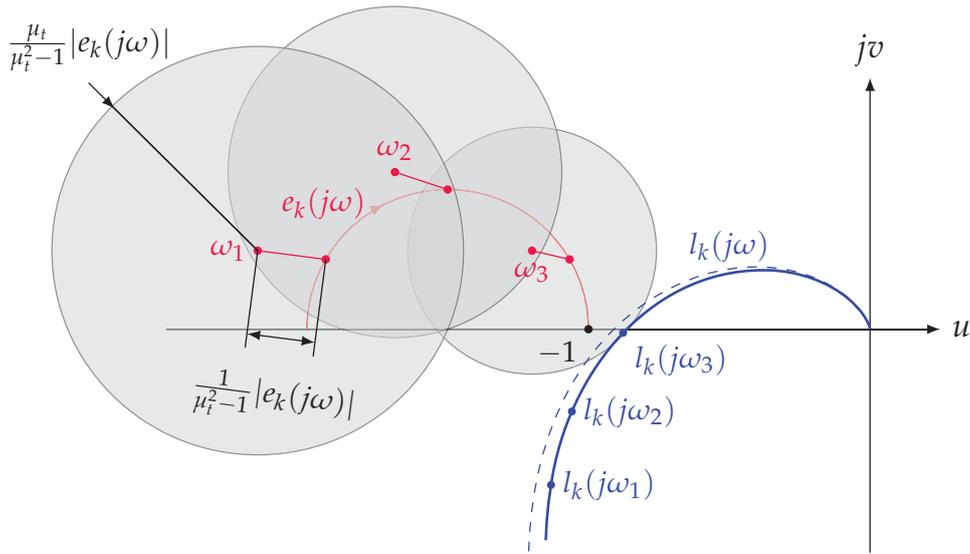


Figura 5.11: Regiones de exclusión obtenidas mediante el empleo de la inecuación (5.54).

que coincide con (5.41) cuando $e_k(j\omega) = -1$. Es decir, presenta el mismo tamaño que el contorno SISO. Y la anchura del contorno está determinada por

$$w(j\omega) = 2 \arctan \frac{\frac{\mu_t}{\mu_t^2-1} |e_k(j\omega)|}{\frac{\mu_t^2}{\mu_t^2-1} |e_k(j\omega)|} = 2 \arctan \left(\mu_t^{-1} \right), \tag{5.63}$$

que coincide con (5.42) cuando $e_k(j\omega) = -1$.

Por tanto, las nuevas especificaciones generan contornos para cada rama en el plano Mod-Arg de dimensiones equivalentes a un diseño SISO, pero desplazados por la función $e_k(j\omega)$. De este modo, los márgenes de estabilidad dan respuesta a posibles variaciones en la magnitud o fase de cada una de las plantas. La Figura 5.12 muestra una comparativa entre los contornos obtenidos empleando las especificación (5.22) y la especificación (5.54). Estos últimos son los que restringen el mismo área en todas las frecuencias, es decir, se establece el mismo margen de cambio de p_k a lo largo de la frecuencia, como ocurre en un diseño SISO de planta única.

En la Figura 5.12 puede apreciarse otro de los problemas de los contornos obtenidos con (5.22). Analícese el tamaño de los contornos obtenidos cuando $e_k(j\omega)$ presenta un módulo inferior a la unidad (contorno de color cian). En este caso, el contorno restringe una área mayor que el contorno obtenido para (5.54). Es decir, aunque hasta ahora se había

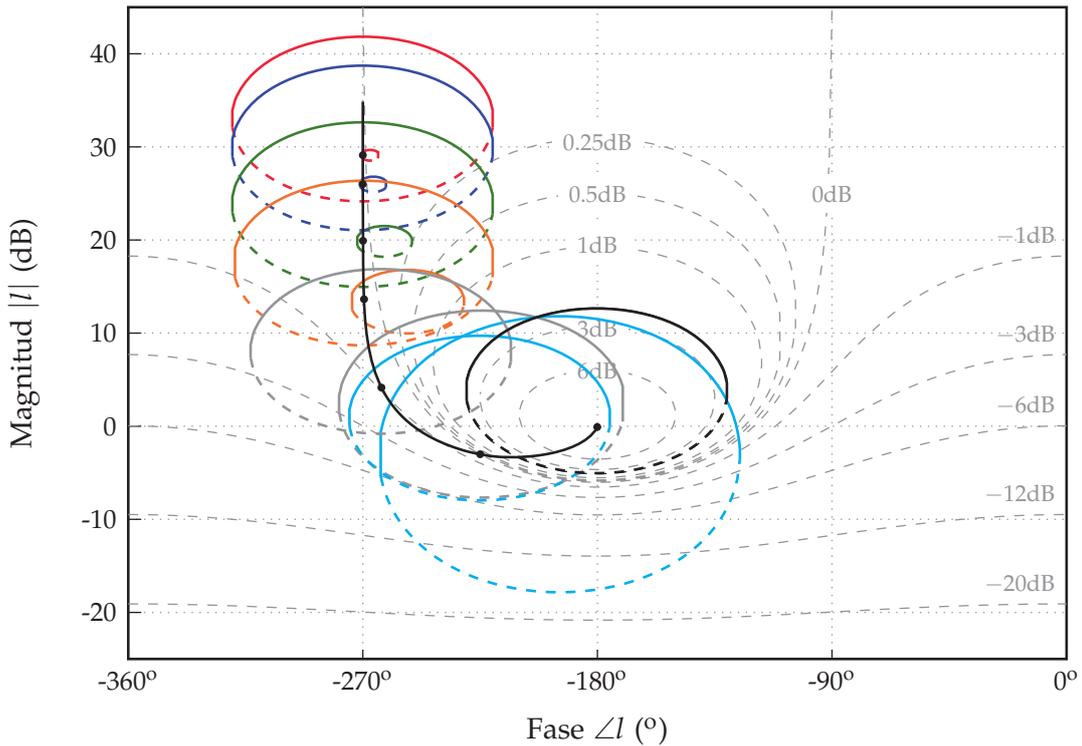


Figura 5.12: Comparativa entre los contornos obtenidos con (5.22) y (5.54).

puntualizado el problema de la compresión de los contornos, también puede darse una expansión de los mismos cuando $|e_k(j\omega)| < 1$. En estos casos las inecuaciones de diseño (5.18) y (5.22) dan lugar a condiciones de diseño más restrictivas.

Desde un punto de vista práctico es más conveniente el empleo de las inecuaciones de diseño (5.51) y (5.54) para definir la estabilidad robusta ya que consideran las variaciones de cada una de las plantas.

5.3 DISEÑO MISO SECUENCIAL ESTABLE

Conocida la forma y ubicación de los contornos de estabilidad obtenidos cuando se afronta un diseño QFT MISO, esta sección describe cómo realizar el *loop-shaping* de cada una de las ramas $l_k(j\omega)$ cuando disponemos de lazos $l_{-k}(j\omega)$ ya diseñados. La diferencia principal con el diseño SISO radica en que ahora los contornos de estabilidad se encuentran dispersos a lo largo del plano Mod-Arg de l_k .

Tal como ocurre en el caso SISO, el sistema será estable si la rama $l_k(j\omega)$ bordea en la frecuencia de *roll-off*⁹ el contorno de estabilidad

⁹ Esta frecuencia marca el descenso de ganancia para ahorrar realimentación.

$\beta_s(\omega)$ por su esquina inferior derecha. En caso contrario el sistema será inestable. Recuérdese que se considera en todo momento que no existen cancelaciones entre ceros y polos RHP, es decir, se considera que el sistema presenta estabilidad interna.

La condición anterior, aparentemente sencilla, puede dar lugar a errores de interpretación. En primera instancia, el diseñador que se enfrenta por primera vez a un diseño MISO puede verse tentado a bordear todos los contornos de estabilidad por su esquina inferior derecha (ver $l_{k_1}(j\omega)$ en [Figura 5.13](#)), tal como lo haría en un diseño SISO. En este caso, el diseño dará lugar a un sistema estable en lazo cerrado¹⁰, pero se incurre en sobrediseño, ya que se retrasa de forma innecesaria la frecuencia de roll-off de la rama $l_k(j\omega)$.

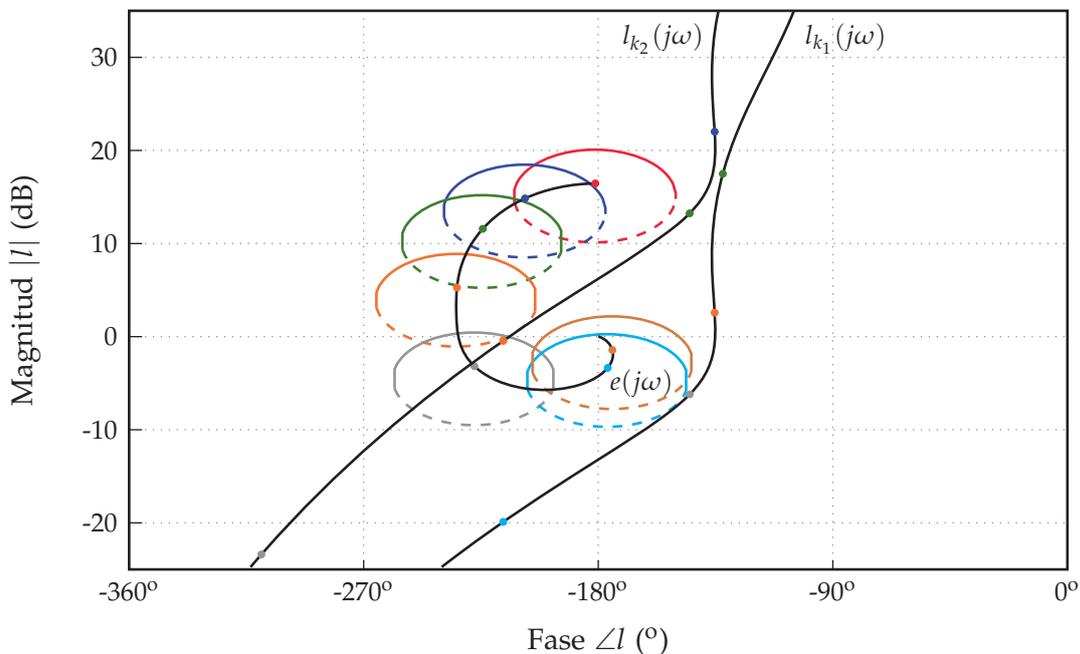


Figura 5.13: Diseños de la rama l_k estables. Sobrediseño para $l_{k_1}(j\omega)$, diseño óptimo para $l_{k_2}(j\omega)$.

Una evaluación más precisa de la condición de estabilidad permite reducir la magnitud de la rama $l_k(j\omega)$ en las frecuencias en las que no reporta beneficios al lazo de control, reduciendo el sobrediseño y permitiendo alcanzar un diseño óptimo desde el punto de vista de QFT (véase $l_{k_2}(j\omega)$ en la [Figura 5.13](#)). Para ello, se toma como referencia la frecuencia de roll-off deseada ω_c . Se deberán dejar a la izquierda todos los contornos $\beta_s(\omega)$ obtenidos para frecuencias $\omega < \omega_c$. En particular

¹⁰ Véase como este diseño representa una situación idéntica a la ilustrada en la [Figura 5.1](#) por la rama $l_{k_3}(j\omega)$.

el contorno $\beta_s(\omega_c)$ se debe bordear por la derecha aproximándose lo más posible a la esquina inferior derecha. Los contornos de estabilidad $\beta_s(\omega)$ de alta frecuencia $\omega > \omega_c$ pueden dejarse a la derecha de la rama $l_k(j\omega)$. Por otro lado, el cierre secuencial de lazos propuesto en la [Sección 4.3](#) facilita el diseño, ya que se efectúa en última instancia el diseño de las ramas que trabajan en alta frecuencia, facilitando la obtención de un diseño estable. A continuación se ilustran estas peculiaridades.

5.3.1 Plantas estables

A continuación, se presentan los posibles escenarios cuando ninguna de las plantas del sistema MISO de partida presenta polos en el semiplano derecho (se excluye el eje $j\omega$).

En función de las tareas asignadas a cada una de las ramas, pueden distinguirse tres casos: ramas que trabajan en alta frecuencia, ramas que trabajan en media frecuencia, ramas que trabajan en baja frecuencia. A continuación, se muestran una serie de pautas que representan la evolución de un diseño MISO común si se emplean las pautas descritas en el [Capítulo 4](#).

Ramas que trabajan en baja frecuencia.

Cuando se lleva a cabo el diseño de la rama $l_k(j\omega)$ que trabaja en baja frecuencia, los controladores del resto de ramas se encuentran sin diseñar $c_{i \neq k}(j\omega) = 0$. Este hecho produce que los contornos de estabilidad se encuentren centrados en el punto $(0\text{dB}, -180^\circ)$, dado que $e_k(j\omega) = -1$. Si se siguen las pautas indicadas en la [Sección 4.3](#), el controlador deberá proporcionar una reducción brusca en la ganancia de la rama cuando se alcance la pulsación de *roll-off*, pulsación a partir de la cual la rama debe ser desconectada del lazo de control¹¹. Los contornos de estabilidad serán violados de forma transitoria en medias/altas frecuencias.

Como se observó en la [Sección 4.3](#), cuando se sintonicen los controladores del resto de las ramas, $c_{i > k}$, el sistema global en lazo cerrado será estable¹². En esencia, la incorporación de las ramas $l_{i > k}$ en el diseño secuencial produce una reubicación de los contornos de estabilidad vio-

¹¹ Recuérdese que la frecuencia de *roll-off* es determinada en la primera etapa de diseño, en la que se planifican las tareas asignadas a cada rama.

¹² Siempre que el último diseño cumpla en todas las frecuencias con la condición de estabilidad.

lados inicialmente por l_k , de tal modo que pasarán a ser respetados tras el diseño del último lazo. Si se calculan los contornos de diseño para realizar un nuevo ajuste del controlador de rama, o para validar el diseño, se observará la siguiente disposición de contornos:

- Los contornos de estabilidad en baja frecuencia se encuentran desplazados verticalmente con respecto del punto crítico de estabilidad. Esto es debido a que las ramas que trabajan en medias/bajas frecuencias, presentan cierta magnitud en dichas frecuencias. Pese a ello, los contornos de baja frecuencia no ponen en riesgo la estabilidad del sistema, ya que esta magnitud es inferior a la demandada por la especificación de diseño, y por lo tanto, los contornos se encuentran por debajo de la especificación de *performance*.
- En medias frecuencias las ramas $l_{i \neq k}$ decremantan su magnitud, produciendo un descenso de los contornos de estabilidad. Este descenso se encuentra acompañado por un desplazamiento hacia la izquierda, debido a la reducción de fase en las ramas. Nótese que en dichas frecuencias $l_t(j\omega) \approx l_{-k}(j\omega)$, y considerando que en medias frecuencias la magnitud de $l_t(j\omega)$ sigue siendo muy superior a la unidad podemos aproximar la magnitud de $e_k(j\omega)$ por

$$|e_k(j\omega)| \approx |-l_t(j\omega)| = |l_t(j\omega)|, \quad (5.64)$$

y su fase por

$$\angle e_k(j\omega) \approx -180^\circ + \angle l_t(j\omega). \quad (5.65)$$

El desplazamiento descrito es el encargado de producir que los contornos de estabilidad violados inicialmente cumplan con la condición de diseño, ya que ahora se encuentran a la izquierda de la rama l_k .

- En alta frecuencia, las ramas $l_{i \neq k}$ alcanzan su frecuencia de *roll-off* y reducen bruscamente su magnitud para desconectarse del lazo de control, produciendo que los contornos que en media frecuencia se encontraban desplazados pasen en alta frecuencia a situarse centrados en el punto (0dB, -180°). En estas frecuencias la rama $l_k(j\omega)$ dejará a dichos contornos de alta frecuencia a su derecha. Si todo el proceso de diseño se ha efectuado de forma adecuada, los contornos $\beta_s(\omega)$ anteriores a ω_c se encontrarán a la izquierda de la rama $l_k(j\omega)$ y los contornos $\beta_s(\omega)$ posteriores a ω_c a la derecha de la misma. Siendo ω_c es la frecuencia de *roll-off* para $l_k(j\omega)$.

Ramas que trabajan en media frecuencia.

En media frecuencia, las ramas que trabajan en baja frecuencia se desconectan del lazo de control, dejando las labores de control a la rama/-ramas que deben hacerse cargo del mismo en dichas frecuencias. Del mismo modo, las ramas que únicamente trabajan en alta frecuencia se encuentran desconectadas (se diseñan en último lugar), de modo que se obtiene la siguiente situación:

- En baja frecuencia $e_k(j\omega) = -(1 + l_{-k}) \approx -l_t(j\omega)$. Es decir, los contornos de estabilidad en baja frecuencia se encuentran desplazados verticalmente. Además, si las ramas de baja frecuencia incorporan un integrador (característica habitual en la mayor parte de los diseños) estos se encontrarán desplazados a la izquierda, partiendo de la fase -270° . La estabilidad será garantizada en dichas frecuencias de forma sencilla, ya que la rama $l_k(j\omega)$ se situará en baja frecuencia en el cuadrante $(-180^\circ, 0^\circ]$, evitando la intersección con los contornos.
- En medias frecuencias las ramas que trabajan en baja frecuencia se desconectan del lazo de control, produciendo que los contornos tiendan a acercarse al punto $(0\text{dB}, -180^\circ)$. Una desconexión agresiva de dichas plantas puede producir que los contornos de estabilidad se sitúen en algunas frecuencias a la derecha de la fase -180° , dado que para desconectar las plantas es necesario añadir una serie de polos en el controlador que pueden producir un rápido decremento de la fase, confiriendo a la rama l_{-k} una fase inferior a -180° cuando todavía presenta una magnitud elevada en comparación con la unidad.
- En alta frecuencia $e_k(j\omega) \approx -1$. Es decir, los contornos se encuentran centrados en el origen, tal como si de un diseño SISO se tratase.

El *loop-shaping* de $l_k(j\omega)$ se efectúa como en el caso anterior, cumpliendo con las especificaciones en las frecuencias de trabajo y violando los contornos de estabilidad en frecuencias mayores a la de *roll-off*. Como ocurría en el caso anterior, el diseño posterior del resto de ramas producirá que los contornos inicialmente violados en alta frecuencia se re-ubiquen y pasen a dejar de estar violados. Todos los lazos finalmente cumplirían sus contornos de estabilidad.

Ramas que trabajan en alta frecuencia.

Cuando se efectúa el *loop-shaping* de las ramas que trabajan en alta frecuencia el *loop-shaping* del resto de lazos está ya realizado. Por lo tanto, los nuevos diseños deberán cumplir en todas las frecuencias con las condiciones impuestas por los contornos de estabilidad. Téngase en cuenta que en este caso no existe una rama adicional que pueda corregir las deficiencias de ésta, tal como ocurría en los casos anteriores. Si se ha seguido el procedimiento de diseño propuesto en la [Sección 4.3](#), las ramas ya diseñadas $l_{-k}(j\omega)$ y que trabajan en media/baja frecuencia corresponden con $l_t(j\omega)$, de forma que se cumple $l_t(j\omega) \approx l_{-k}(j\omega)$. Por lo tanto, $e_k(j\omega)$ presentará una magnitud muy elevada para $\omega = 0$ que decrece con la frecuencia. Del mismo modo en alta frecuencia la magnitud de $e_k(j\omega)$ tiende a cero. Si se cumple esta premisa, los contornos de estabilidad $\beta_s(\omega)$ se encontrarán centrados en el punto crítico. Lo más habitual¹³ es que comiencen en la fase -270° y converjan con el aumento de la frecuencia hacia el punto $(0\text{dB}, -180^\circ)$. Como en el caso anterior, una desconexión agresiva de las ramas que trabajan en frecuencias anteriores a las de la rama $l_k(j\omega)$ puede producir que aparezcan de forma puntual contornos desplazados a la derecha de -180° .

Como puede comprobarse la estabilidad queda garantizada de forma sencilla pese a que el estudio inicial pueda parecer complicado. Como puede comprobarse, no es necesario evaluar la pulsación de cruce ω_c , ya que en última instancia es la rama de alta frecuencia la que garantiza la estabilidad del conjunto de los lazos.

5.3.2 *Plantas inestables*

Cuando las plantas que componen el sistema MISO presentan polos en el semiplano derecho (inestables) debe prestarse especial atención cuando se efectúa el *loop-shaping* de controladores. Esto es debido a que la estabilidad requiere de una condición adicional que puede no ser evidente. Recuérdese como en el caso SISO para estabilizar un sistema con polos inestables es necesario aumentar su fase para que se sitúe en el intervalo $(-180^\circ, 0^\circ]$ antes de alcanzar la pulsación de cruce de ganancia. Todo ello, sin penetrar el contorno de estabilidad (ver [Figura B.10](#)). De forma análoga, cada una de las ramas del sistema MISO que presente

¹³ Se considera la existencia de un integrador en $l_{-k}(j\omega)$, empleado en la mayor parte de los casos para eliminar el error en régimen permanente.

polos inestables, deberán aumentar la fase y cruzar de izquierda a derecha la línea descrita por $e_k(j\omega)$ respetando el contorno correspondiente antes de alcanzar la pulsación de cruce ω_c . Téngase en cuenta que se describe la condición como si el diseño fuese a efectuarse en modo *multi sheet* o multi ventana. Esta condición es más compleja de interpretar y puede dar lugar a errores si no se efectúa el diseño de forma adecuada.

Como se describe en el [Capítulo 6](#), para los primeros diseños, se recomienda emplear segmentos verticales acompañados de los contornos de estabilidad, aunque estos no son fundamentales. Su función principal es determinar cuando se ha rebasado la fase crítica, que en este caso se desplaza con la frecuencia.

La [Figura 5.14](#) muestra un ejemplo de aplicación, desarrollado específicamente para ilustrar el problema de diseño. En dicha figura se muestran la función $e_k(j\omega)$ junto con dos diseños para la rama $l_k(j\omega)$. El diseño $l_{k_1}(j\omega)$, pese a penetrar en las regiones de exclusión y parecer más complejo corresponde con un diseño estable. Por el contrario, el diseño $l_{k_2}(j\omega)$, que bordea todos los contornos por la derecha, reporta una configuración inestable en lazo cerrado. Esto es debido a que se precisa un cruce con el lugar geométrico crítico antes de alcanzar ω_c para satisfacer el criterio de Nyquist, por tratarse de una planta inestable.

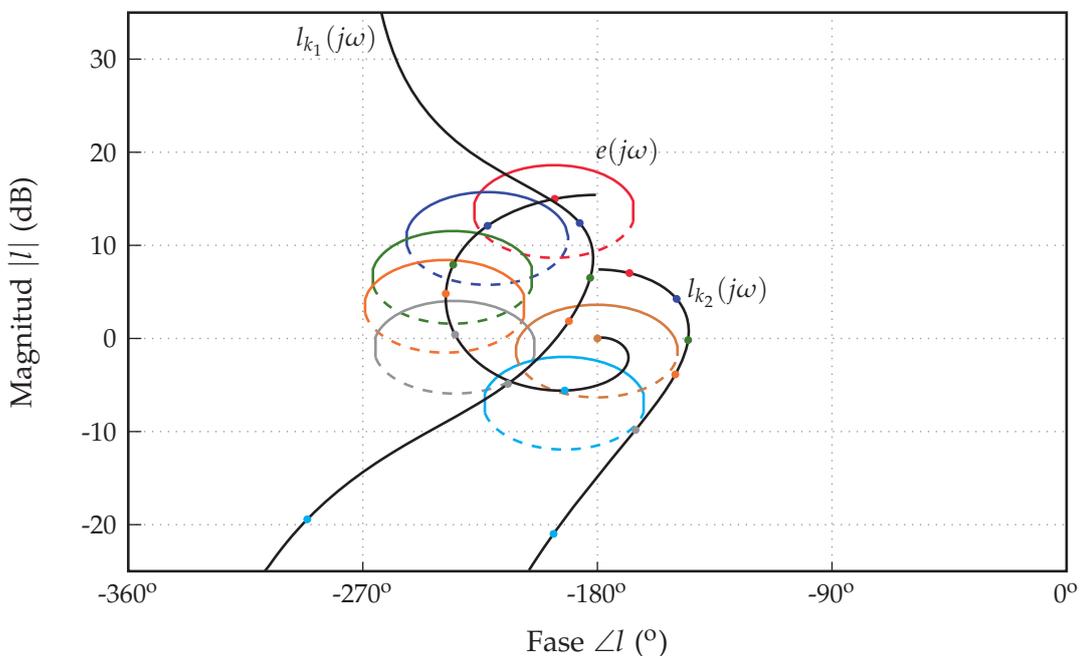


Figura 5.14: Diseños de rama para planta inestable. Estable en lazo cerrado para $l_{k_1}(j\omega)$, inestables para $l_{k_2}(j\omega)$.

O de otro modo, la clave del análisis radica en el número de cruces de izquierda a derecha de $e_k(j\omega)$. Dado que $p_k(j\omega)$ presenta un polo inestable, demanda un cruce por la fase crítica para ser estabilizado. En este caso la fase crítica se desplaza con la función $e_k(j\omega)$, y no se encuentra anclada en -180° . Si se analizan las frecuencias discretas de $e_k(j\omega)$ y $l_{k_2}(j\omega)$, puede comprobarse como $l_{k_2}(j\omega)$ se encuentra en todo momento a la derecha de $e_k(j\omega)$, y por lo tanto no se presentan cruces de izquierda a derecha. Este es el motivo por el cual el sistema resultante en lazo cerrado es inestable. Por el contrario, si se analizan las frecuencias discretas para $l_{k_1}(j\omega)$, puede comprobarse como existe un cruce de izquierda a derecha en baja frecuencia, ya que la primera pulsación (color rojo) se encuentra a la izquierda de $e_k(j\omega)$ y la segunda (color azul) a la derecha. Este cruce se produce antes de la pulsación de cruce ω_c (color gris), por lo que el sistema presenta un cruce por la fase crítica, dando lugar a un sistema estable.

MISO QFT PARA PLANTAS QUE NO SON DE FASE MÍNIMA

Una gran parte de los sistemas MISO reales presentan modelos dinámicos que contienen ceros/polos en el semiplano derecho (RHP) o retardos [2, 83], implicando nuevos retos para el control de los mismos. Como se muestra en la [Sección 2.4](#), la mayor parte de las estrategias de diseño analizan exclusivamente la existencia de una planta rápida y *cara* junto con una planta lenta y *barata*, conteniendo esta última un retardo o cero RHP. Por lo tanto, estas estrategias son poco flexibles y restan generalidad a los procedimientos de diseño. Además, como se ha descrito en el [Capítulo 5](#), los sistemas MISO con plantas que presentan polos en el semiplano derecho suponen un reto de diseño para su estabilización [52]; este tipo de sistemas han sido poco estudiados en la literatura científica.

El presente capítulo extiende la metodología general de diseño presentada en el [Capítulo 4](#) a sistemas donde las plantas pueden presentar polos/ceros RHP o retardos. Como en el método general, el objetivo es que cada controlador emplee la mínima cantidad de realimentación (mínima ganancia) en cada frecuencia para satisfacer el *performance* y estabilidad robustos prescritos. La principal diferencia radica en que ahora se deberán tener en cuenta los problemas/limitaciones impuestos por los polos/ceros RHP y retardos. Para ello, es necesaria una reformulación de los criterios que determinan el reparto de las tareas de control a lo largo de la frecuencia entre las plantas. Para los avances propuestos se parte de las consideraciones de la metodología QFT para sistemas SISO, en cuanto a las limitaciones en el ancho de banda de los sistemas con retardos ó ceros RHP estudiadas en [133, 68, 135], y en cuanto a los requisitos necesarios para estabilizar los sistemas con polos RHP estudiados en [22, 18].

6.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE CONTROL

Tradicionalmente el control de sistemas con comportamientos de fase no mínima (retardos o ceros RHP) o inestables (polos RHP) recibe un tratamiento específico dentro de la teoría de control. Habitualmente se modifican convenientemente las metodologías para sistemas de fase mínima. La metodología QFT MISO propuesta en el [Capítulo 4](#), emplea los contornos $\beta_{c_i}(\omega)$ para establecer cual es el reparto de tareas de control idóneo. Véase como dichos contornos no expresan las limitaciones inherentes a las plantas cuando éstas presentan dinámicas en el semiplano derecho o retardos. Por lo tanto, es de esperar que la planificación del reparto de tareas no sea la adecuada, desembocando en diseños que implican un mayor coste de realimentación o simplemente son inalcanzables. La naturaleza del problema es la misma que aparece en los contornos de diseño $\beta_l(\omega)$ de sistemas SISO cuando la planta no es de fase mínima. Las conclusiones expuestas en [68, 18] para los sistemas SISO se aprovecharán a continuación para extender la metodología propuesta en el [Capítulo 4](#) a sistemas MISO cuyas plantas presentan polos/ceros en el semiplano derecho o retardos.

TERMINOLOGÍA. Dado que existen diferentes denominaciones en la literatura científica, se considera necesario detallar en primer lugar la terminología empleada en el presente documento:

- Un sistema lineal invariante en el tiempo es denominado como sistema de fase mínima (MP) si el sistema y su inversa son causales y estables. Si no se cumplen dichas condiciones el sistema no es MP¹. De acuerdo a dicha definición, un sistema que no presente ceros RHP, polos RHP y retardos es definido como sistema MP.
- Los sistemas que son causales y estables pero su inversa es causal e inestable son denominados como sistemas de fase no mínima (NMP). Por lo tanto, los sistemas NMP no abarcan a todos los sistemas que no son MP. De acuerdo a la definición anterior, un sistema estable con ceros en el semiplano derecho RHP es denominado como sistema NMP. Del mismo modo, los sistemas que contienen retardos no están incluidos dentro de la categoría NMP, salvo que

¹ Nótese que no es equivalente decir que un sistema no es de fase mínima (no es MP) a decir que un sistema es de fase no mínima (es NMP)

se emplee la aproximación de Padé. Otro tipo de sistemas completamente diferentes son los que presentan polos RHP (inestables). En general y para facilitar la comprensión, los sistemas que no se correspondan con los de MP serán definidos en función de su elemento particular, es decir: sistemas con polos RHP, sistemas con ceros RHP, sistemas con retardos, o combinaciones de los anteriores. Sistemas con dinámicas RHP engloba a los sistemas con polos y/o ceros RHP.

- Un sistema con ganancia inversa (o negativa) denota que en estado estacionario presentará una respuesta temporal con signo negativo si la entrada presenta signo positivo. Esta característica no debe ser confundida con la respuesta inversa inicial obtenida en los sistemas con ceros RHP.

6.2 ANTECEDENTES Y ESTUDIO PRELIMINAR

En el [Capítulo 4](#) se ha presentado la metodológica de diseño de controladores robustos que permite obtener controladores $c_{i=1,\dots,n}$ de ganancia mínima cuando las plantas $p_{i=1,\dots,n}$ son MP. Recuérdese que dicha metodología consta de dos etapas:

ETAPA 1: REPARTO DE LA REALIMENTACIÓN. Se planifica el reparto de las tareas de control entre las diferentes plantas, de forma que se extraiga el máximo potencial de las plantas en cada frecuencia. Para ello, primero se calculan en un conjunto de frecuencias discretas contornos QFT denominados $\beta_{c_i}(\omega)$. Estos expresan la magnitud demandada por el controlador $|c_i(j\omega)|$ en cada frecuencia si su rama trabajara en solitario para satisfacer las especificaciones de control robusto. Se presenta un criterio que permite comparar los diferentes $\beta_{c_i}(\omega)$ para determinar en qué frecuencias debe trabajar cada planta, en solitario o en colaboración con otras; o si debe ser inhibida para ahorrar realimentación. Este criterio debe ser modificado cuando se trabaja con plantas que presentan dinámicas RHP o retardos. Dicha modificación corresponde con la principal aportación del presente capítulo.

ETAPA 2: DISEÑO DE CONTROLADORES. Se calculan contornos de diseño $\beta_{l_i}(\omega)$ en un conjunto discreto de frecuencias. Empleando dichos contornos de diseño se realizan los *loop-shaping* de cada

$l_i(j\omega)$ para satisfacer el reparto de tareas planificado en la Etapa 1. Se facilita una serie de reglas que permiten reducir el número de iteraciones. Cuando nos enfrentamos a sistemas que presentan dinámicas RHP o retardos, se debe prestar especial atención a las limitaciones en el ancho de banda. A parte de los retos que estas limitaciones imponen en los *loop-shaping* se considera que el lector posee suficiente habilidad para llevar a cabo los mismos², por lo que no se incluyen descripciones detalladas en los ejemplos incluidos en el presente capítulo.

Antes de enunciar las modificaciones necesarias para afrontar un diseño MISO con dinámicas RHP o retardos, debe hacerse una revisión del método [68, 18] empleado en QFT SISO cuando se tienen plantas con dinámicas RHP o retardos. Considérese $p(s)$ la función de transferencia de una planta cuyo numerador $n(s)$ o denominador $d(s)$ contienen dinámicas RHP o retardos. Ésta puede reescribirse como

$$p(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{n_1(s)n_2(-s)}{d_1(s)d_2(-s)}, \quad (6.1)$$

donde $n_1(s)$ y $d_1(s)$ contienen las dinámicas LHP de numerador y denominador, y $n_2(-s)$ y $d_2(-s)$ las dinámicas RHP y retardos. Siendo $p(s)$ una planta con incertidumbre, la planta nominal podrá expresarse según

$$p_o(s) = \frac{n_o(s)}{d_o(s)} = \frac{n_{1_o}(s)n_{2_o}(-s)}{d_{1_o}(s)d_{2_o}(-s)} \quad (6.2)$$

Se define $p'_o(s)$ como una planta MP con idéntica magnitud a $p_o(s)$:

$$p'_o(s) = p_o(s)a(s) = \frac{n_{1_o}(s)n_{2_o}(s)}{d_{1_o}(s)d_{2_o}(s)}, \quad (6.3)$$

donde

$$a(s) = \frac{n_{2_o}(s)d_{2_o}(-s)}{n_{2_o}(-s)d_{2_o}(s)}. \quad (6.4)$$

En consecuencia, $p'_o(s)$ no presenta ninguna dinámica RHP ni retardos. En el dominio de la frecuencia, las funciones de transferencia (6.2), (6.3)

² En caso contrario se recomienda una nueva lectura y realización paso a paso del Ejemplo 1 mostrado en la [Sección 4.4](#).

y (6.4) pueden ser reescritas como números complejos: $p_o(j\omega) = |p_o|\angle\theta_o$, $p'_o(j\omega) = |p_o|\angle\theta'_o$ y $a(j\omega) = 1\angle\theta_a$, cuya magnitud y fase dependen de la frecuencia. La relación entre estos números complejos viene dada por

$$p_o(j\omega) = |p_o|\angle\theta_o = |p_o|\angle(\theta'_o - \theta_a) = p'_o a^{-1}; \quad \theta'_o = \theta_o + \theta_a. \quad (6.5)$$

Bajo estas premisas, el diseño QFT SISO para plantas con dinámicas RHP y retardos puede llevarse a cabo empleando como plantas nominales $p_o(j\omega)$ o $p'_o(j\omega)$, indistintamente [133, 68, 18]. En el primer caso, los contornos de diseño $\beta_l(\omega)$ no muestran los desfases adicionales introducidos por los elementos RHP o retardos. Estos efectos son inherentes a $p_o(j\omega)$, y en consecuencia, se advertirán durante el *loop-shaping* del $l_o(j\omega)$. En el segundo caso, al utilizar una planta nominal $p'_o(j\omega)$ estable y MP, se producirá un desplazamiento en fase de los contornos de diseño

$$\beta'_l(\omega) = \beta_l(\omega) \cdot 1\angle\theta_a(\omega), \quad (6.6)$$

que refleja las limitaciones del diseño antes de acometerlo. Esta última disposición de contornos es por tanto muy útil en las etapas de análisis, pero requiere de ciertas precauciones si se utiliza para el *loop-shaping* de $l'_o(j\omega)$. La más importante es tener en cuenta el desplazamiento del punto de estabilidad. Dada la relación

$$1 + l(j\omega) = 1 + l'(j\omega)a^{-1}(j\omega) = 0 \rightarrow l'(j\omega) = -a(j\omega), \quad (6.7)$$

el punto de estabilidad crítica es ahora $(0dB, -180^\circ + \theta_a(\omega))$. Por lo tanto, dicho punto se traslada con la frecuencia. En [18] se propone el empleo de segmentos verticales sobre los contornos $\beta'_l(\omega)$ para facilitar la localización de la fase crítica de estabilidad, $-180^\circ + \theta_a(j\omega)$. Esto es especialmente útil en sistemas inestables, que requieren de cierto número de cruces de $l'_o(\omega)$ por la fase crítica según el criterio de estabilidad de Nyquist [22].

Volviendo al problema MISO, además de contornos para el diseño de controladores $\beta_{l_i}(\omega)$ (Etapa 2, Sección 4.3), se utilizan otros contornos que expresan las necesidades de control $\beta_{c_i}(\omega)$ (Etapa 1, Sección 4.2), tal que

$$\beta_{l_i}(\omega) = \beta_{c_i}(\omega)|p_{i_o}(j\omega)|. \quad (6.8)$$

Ambos tipos de contornos, β_{l_i} y β_{c_i} , difieren por tanto en su módulo, pero se calculan para el mismo vector de fases: las fases de diseño $\angle l_{i_o} = \angle(\theta_{i_o} + \phi_i)$, siendo ϕ_i la fase del controlador $c_i(j\omega) = |c_i|\angle\phi_i$.

Dado que en este caso se trabaja con plantas que contienen dinámicas RHP o retardos, el uso de

$$\beta'_{l_i}(\omega) = \beta'_{c_i}(\omega) |p'_{i_o}(j\omega)|, \quad (6.9)$$

surge como otra opción en la primera y segunda etapa de diseño. Téngase en cuenta que los contornos $\beta'_{l_i}(\omega)$ pueden ser calculados empleando la instrucción *genbnds* de la *Terasoft QFT Toolbox*, que permite el cálculo de los contornos con la planta $p_{i_o}(j\omega)$ pero empleando como planta nominal $p'_{i_o}(\omega)$ en (6.3). Todos los contornos implicados en (6.8) y (6.9) son representados en la [Figura 6.1](#) para un sistema con dinámicas RHP³. Se cumple la relación

$$\beta'_l(\omega) = \beta_l(\omega) \cdot 1\angle\theta_a(\omega), \quad (6.10)$$

y

$$\beta'_c(\omega) = \beta_c(\omega) \cdot 1\angle\theta_a(\omega). \quad (6.11)$$

Donde $\theta_{i_a}(\omega)$ es el ángulo de la red (6.4) que relaciona $p_{i_o}(j\omega)$ y $p'_{i_o}(j\omega)$ según (6.2) y (6.3). En la gráfica izquierda de la [Figura 6.1](#), los contornos no reflejan las limitaciones debidas a las dinámicas RHP⁴, y el punto crítico de estabilidad se mantiene fijo en $(0dB, -180^\circ)$. Por lo tanto, las limitaciones aparecerán cuando se efectúe el *loop-shaping* de $l_{i_o}(j\omega)$ (Etapa 2). En la parte derecha de la [Figura 6.1](#) se aprecia un desplazamiento horizontal de los contornos $\beta'_{l_o}(\omega)$ y $\beta'_{c_i}(\omega)$. Estos contornos desplazados permiten apreciar los retos de diseño que introduce el cero RHP. En consecuencia β'_{c_i} puede ser empleado en la toma de decisiones para determinar qué plantas $p_i(j\omega)$ deben colaborar o inhibirse en cada frecuencia de diseño (Etapa 1), ya que muestran las limitaciones de la planta $p_i(j\omega)$ si ésta las tuviera. Los *bounds* $\beta_{l_i}(\omega)$ son más adecuados para llevar a cabo el *loop-shaping* de las ramas $l_{i_o}(j\omega)$ (Etapa 2). La diferencia principal con el método SISO es que en este caso el *loop-shaping* de $l'_{i_o}(j\omega)$ para satisfacer $\beta'_{l_i}(\omega)$ es significativamente más complejo, debido a que las interacciones entre los diferentes lazos producen desplazamientos en los contornos durante el proceso de diseño⁵.

3 Se representan los contornos para un sistema que presenta un cero en el semiplano derecho.

4 Recuérdese que el sistema presenta ceros en el semiplano derecho, y por lo tanto, tiene su ancho de banda limitado.

5 Una descripción más detallada de este fenómeno se presenta en la [Sección 6.3](#)

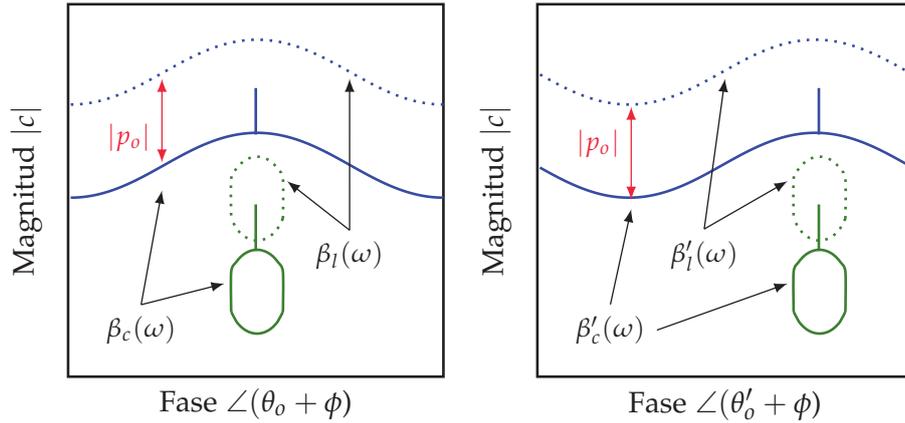


Figura 6.1: Ejemplo de contornos; (izq.) β_c y β_l , (dcha.) β'_c y β'_l .

6.3 MODIFICACIONES DEL MÉTODO GENERAL

A partir de todas las premisas anteriores la metodología de diseño QFT MISO para sistemas con dinámicas RHP o retardos se formula como sigue:

Etapas 1: Reparto de la realimentación

Se calculan los contornos $\beta'_{c_i}(\omega)$ que cuantifican la realimentación necesaria $|c_i(j\omega)|$ en cada frecuencia discreta si la planta $p_i(j\omega)$ trabajara en solitario para satisfacer los requisitos de control. Para el cálculo de dichos contornos se utilizarán plantas MP $p'_{i_o}(j\omega)$ según (6.3). El nuevo criterio de reparto es:

CRITERIO 1: m plantas deben repartirse el esfuerzo de control en una frecuencia discreta ω_1 , si la altura en dB de los m contornos $\beta'_{c_{k=1,\dots,m}}(\omega_1)$ presenta una distancia relativa entre sí inferior a $\pm 20 \log m$ dB⁶ en la fase de diseño deseada Θ_d , y el desfase entre dichos contornos es inferior a $\pm 90^\circ$; y además no existe ningún otro contorno $j \neq k$ con una altura inferior.

Como consecuencia, el resto de plantas $j \neq k$ deberán inhibirse, reduciéndose su ganancia de lazo todo lo posible en ω_1 durante la etapa de diseño. Y también, una sola planta se encargará del control en ω_1 si no se cumple el Criterio 1. Se buscará que m sea máxima ($m \leq n$), ya que una

⁶ Recuérdese que como en el caso MISO para plantas MP este criterio puede ser modificado en función del nivel de colaboración deseado.

mayor colaboración redundará en un mayor ahorro de realimentación (reducción de la ganancia de los controladores).

Nótese que la fase de diseño elegida en cada frecuencia, Θ_d , es única para todos los lazos, y corresponde con la fase en la que mediante el *loop-shaping* (Etapa 2) se desea modificar la ganancia añadiendo el elemento que proceda: ganancia, polo o cero.

Para medir el desfase entre contornos se toman como referencia sus fases críticas de estabilidad, marcadas con un segmento vertical. La nueva condición de argumento sobre el desfase entre contornos es imprescindible para determinar si la colaboración es posible en sistemas con dinámicas RHP o retardos. Analicemos el ejemplo en la [Figura 6.2](#) donde esta condición marca la diferencia. Los contornos $\beta'_{c_1}(\omega)$ y $\beta'_{c_2}(\omega)$ exhiben la misma magnitud en todas las posibles fases de diseño Θ_d en $(-360^\circ, 0^\circ]$, tanto en ω_1 como en ω_2 ; indicando que las dos plantas demandan la misma ganancia. Sin embargo, el desfase entre $\beta'_{c_1}(\omega_1)$ y $\beta'_{c_2}(\omega_1)$ es de 180° , lo que implica que necesitando la misma ganancia de control, ambos lazos se encuentran totalmente en contrafase. Por lo tanto, las magnitudes anulan sus efectos e imposibilitan la colaboración de plantas en ω_1 . Por el contrario, el desfase entre $\beta'_{c_1}(\omega_2)$ y $\beta'_{c_2}(\omega_2)$ es inferior a 90° , por lo que una colaboración entre lazos implicará una reducción de la cantidad de realimentación necesaria en ω_2 respecto a si un sólo lazo se ocupara del control. Dicha reducción de ganancia sería exactamente de $1/2$, si los contornos estuvieran totalmente en fase. Como en este caso su desfase es de 80° , próximo al límite de 90° , la reducción de ganancia con la colaboración será pequeña. La nueva condición de argumento toma especial relevancia en sistemas MISO con polos RHP, ya que el desplazamiento horizontal de los contornos se da en baja frecuencia.

Etapa 2: Loop-shaping de controladores

Se realizan secuencialmente los diseños de los lazos de acuerdo a la planificación de reparto establecida en la etapa anterior.

Ahora se aconseja utilizar como contornos de diseño los $\beta_{l_i}(\omega)$. De este modo en los contornos no aparecen desviaciones en fase debidas a los elementos RHP o retardos, conservándose una referencia en fase común a todos los lazos que puede emplearse como guía en el diseño colaborativo.

Esto no ocurre si se emplean los contornos $\beta'_{l_i}(\omega)$, como se ilustra en el ejemplo de la [Figura 6.3](#). Se parte de un sistema MISO de dos

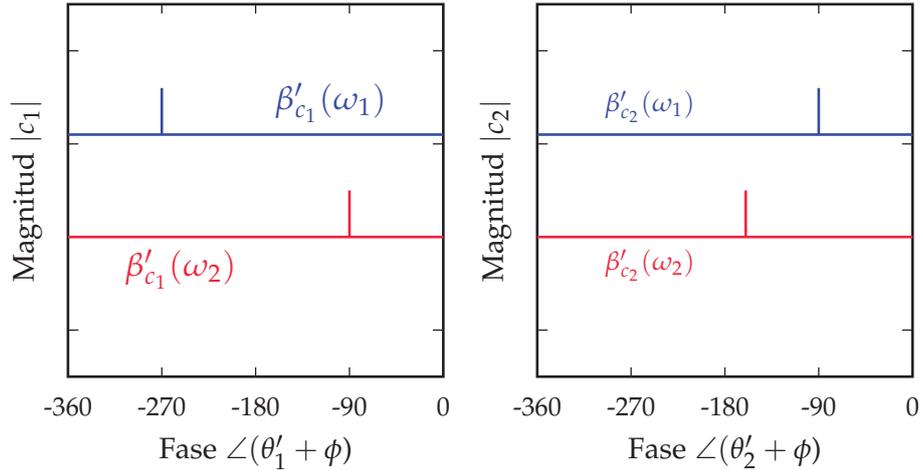


Figura 6.2: Dos plantas que no pueden colaborar en ω_1 pero si en ω_2 .

plantas, siendo $p_2(j\omega)$ NMP y $p_1(j\omega)$ MP, y ya se ha determinado que ambas deben colaborar en ω_1 (Etapa 1). Se emplean de forma errónea contornos $\beta'_{l_i}(\omega)$ para llevar a cabo el proceso secuencial que da lugar al *loop-shaping* de los lazos. Recuérdese que una modificación de $l'_{i_0}(j\omega)$ en la frecuencia ω_1 produce cambios en los contornos $\beta'_{l_j}(\omega_1)$, con $j \neq i$. El número de iteración es indicado mediante el empleo de superíndices. Los contornos de diseño iniciales $\beta_{l_i}^0(\omega_1)$ para cada lazo, son calculados como si cada lazo se ocupara en solitario del control del sistema. A continuación, de acuerdo al procedimiento estándar propuesto en la [Sección 4.3](#), se acomete el diseño colaborativo de $l'_{1_0}(j\omega)$ para la frecuencia ω_1 . Entonces, se reduce la ganancia de $l'_{1_0}(\omega_1)$ en la fase de diseño Θ_d , ya que con el diseño del lazo $i = 2$ se suplirá la deficiencia de ganancia. Para lograr dicho efecto $l'_{1_0}(\omega_1)$ se sitúa por debajo de su contorno inicial $\beta_{l_1}^0(\omega_1)$. La consecuencia esperada es que en el segundo lazo se produzca una depresión en $\beta_{l_2}^I(\omega_1)$ en la fase Θ_d (línea discontinua), lo que permitiría la reducción de ganancia de $l'_{o_2}(\omega_1)$. Sin embargo, como puede apreciarse al comparar $\beta_{l_2}^0(\omega_1)$ y $\beta_{l_2}^I(\omega_1)$, dicha depresión ha aparecido desplazada $\theta_{a_2}(\omega_1)$ (línea continua para $\beta_{l_2}^I(\omega_1)$), ya que los contornos han incorporado las desviaciones NMP según (6.10). Si se hubieran utilizado los contornos $\beta_{l_i}(\omega)$, los resultados hubieran sido los esperados (depresión en Θ_d), ya que no incorporan las limitaciones RHP.

En cualquier caso, debe puntualizarse que en el caso MISO el empleo de los contornos $\beta_{l_i}(\omega)$ no evita el desplazamiento del punto de estabilidad, a diferencia de lo que ocurría en el caso SISO. Como se describió en

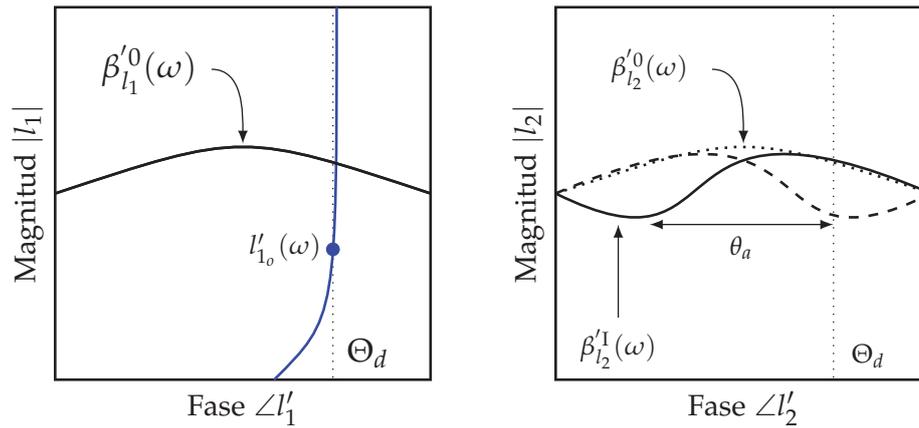


Figura 6.3: Desplazamiento de los contornos β'_{l_i} cuando realizamos el *loop-shaping* del lazo $j \neq i$.

el [Capítulo 5](#) dicho desplazamiento no tiene su origen en las dinámicas RHP o retardos, sino en el carácter multilazo del sistema.

6.4 EJEMPLOS DE DISEÑO DEL MÉTODO EXTENDIDO

A continuación se resuelven dos ejemplos de diseño. La selección de los mismos se ha realizado para que representen los casos más complejos desde un punto de vista de reparto frecuencial de tareas de control. Téngase en cuenta que representan ejemplos puramente teóricos; otros ejemplos de aplicación real de los conceptos presentados se muestran en el [Capítulo 10](#). El primer ejemplo corresponde con un sistema MISO con retardo. En él puede comprobarse cómo la metodología propuesta permite alcanzar diseños robustos, pese a existir incertidumbre en todos los parámetros del sistema (incluido el retardo). La selección de las plantas es tal que impide alcanzar un diseño con la planta con retardo. Del mismo modo, la suma de plantas da lugar a un sistema con limitaciones en el *performance* impidiendo el diseño con un único controlador maestro. El segundo ejemplo presenta la resolución de un sistema con polos inestables. En este caso el reparto de tareas ya no es obvio ya que la planta con polos RHP debe ser estabilizada. Para este segundo ejemplo se presentan dos alternativas de diseño, que dan lugar a sistemas que trabajan en lazo cerrado con un comportamiento completamente diferente.

6.4.1 Ejemplo 1: Sistema MISO con retardos o fase no mínima

Dentro de la arquitectura de control de la [Figura 4.1](#), se considera:

$$p_1(s) = \frac{k}{s/a + 1}, \quad p_2(s) = \frac{k}{s/a + 1} e^{-Ls}, \quad p_d(s) = 1. \quad (6.12)$$

Expresado, se ha elegido que las plantas sólo difieren en fase debido a la existencia de un retardo, como caso más representativo para el análisis de resultados sobre sistemas con retardos. El vector de parámetros $\mathbf{q} = [k, a, L]$ define un espacio de incertidumbre \mathcal{Q} en \mathbb{R}^3 acotado por los intervalos de variación:

$$k \in [1, 2] \quad a \in [1, 4], \quad L \in [0.3, 0.5]. \quad (6.13)$$

Las plantas nominales, $p_{1_o}(s)$ y $p_{2_o}(s)$, se eligen con $k_o = 1$, $a_o = 1$ y $L_o = 0.5$.

Como especificación de estabilidad robusta se emplean i inecuaciones

$$\left| \frac{1 + l_t(j\omega) - l_i(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_s, i = 1, \dots, n; \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (6.14)$$

De este modo se garantizan márgenes de estabilidad para variaciones en cada una de plantas (5.51). Se desea un margen de fase (MF) mínimo de 40° ($MG=3.16$) para lo que se emplea

$$W_s(s) = \left| \frac{0.5}{\cos(\pi(180 - MF)/360)} \right| = 1.462. \quad (6.15)$$

Para el rechazo robusto de perturbaciones (4.8) se elige la cota

$$W_d(s) = \left| \frac{1.5s}{(s + 12)} \right|. \quad (6.16)$$

El vector de frecuencias discretas para el cálculo de los contornos de diseño es

$$\Omega = \{0.1, 0.3, 1, 2, 3, 6, 10, 50\}. \quad (6.17)$$

Etapa 1: Reparto frecuencial de la realimentación

Se calculan los contornos $\beta'_{c_i}(\omega)$. En la [Figura 6.4](#) se muestran las tres frecuencias más representativas, a partir de las cuales se concluye:

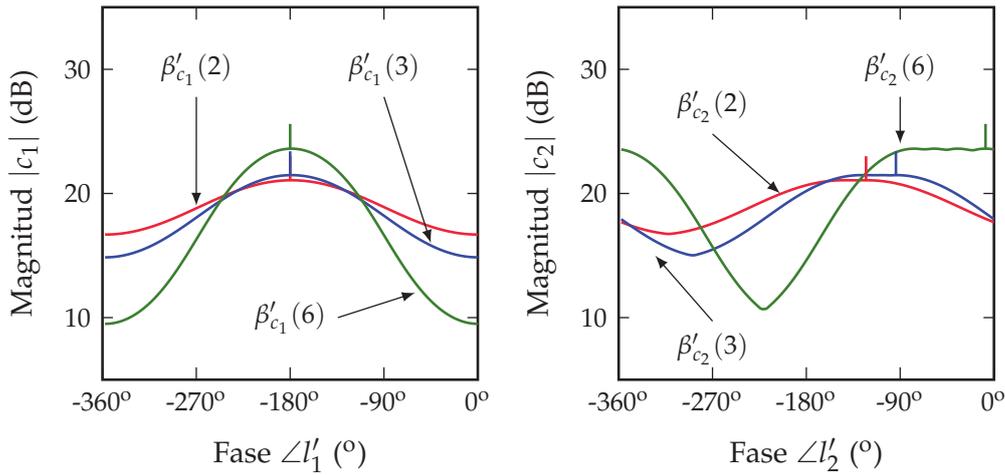


Figura 6.4: Necesidades de control $\beta'_{c_1}, \beta'_{c_2}$.

- En baja frecuencia, $\omega \leq 2$, los contornos $\beta'_{c_1}(\omega)$ y $\beta'_{c_2}(\omega)$ presentan una altura similar en todas las posibles fases de diseño. En concreto las diferencias son menores a $20 \log_{10} 2 = 6$ dB (véanse los contornos para $\omega = 2$). Además, dichos contornos se encuentran desfasados menos de $\pm 90^\circ$, tomándose como referencia sus fases críticas, marcadas con segmentos verticales. Este desfase está determinado por $a_2(j\omega) = e^{j0.5\omega}$, siendo: $\theta_{a_2}(\omega) = 180\pi \times 0.5\omega$ [°]. En conclusión, para $\omega < 2$, las plantas $p_1(j\omega)$ y $p_2(j\omega)$ pueden colaborar repartiéndose el esfuerzo de control.
- En frecuencias $\omega > 2$, el desfase entre los contornos $\beta'_{c_1}(\omega)$ y $\beta'_{c_2}(\omega)$ supera los $\pm 90^\circ$, por lo que no es posible la colaboración entre plantas. Sus posibles aportaciones en magnitud (sugeridas por una diferencia de altura de contornos menor a 6dB en las fases de diseño $[-180^\circ, -90^\circ]$) resultarían en una magnitud menor al realizar la suma vectorial. Entonces, $p_1(j\omega)$ debe asumir el control del sistema en $\omega > 2$, mientras que $p_2(j\omega)$ será inhibida haciendo $l_2(j\omega) \approx 0$, lo que elimina las limitaciones introducidas por su retardo.

En consecuencia, la [Tabla 6.1](#) resume el reparto de tareas deseado para las frecuencias contenidas en Ω (6.17).

Nótese como la diferencia entre $\beta'_{c_1}(\omega)$ y $\beta'_{c_2}(\omega)$ no corresponde únicamente con un desplazamiento horizontal. La deformación en los contornos $\beta'_{c_2}(\omega)$ con respecto a los contornos $\beta'_{c_1}(\omega)$ es debida a la incertidumbre en el parámetro L que modela el retardo de la planta $p_2(j\omega)$.

Tabla 6.1: Reparto frecuencial de tareas deseado.

ω	0.1	0.3	1	2	3	6	10	50
p_1	×	×	×	×	×	×	×	×
p_2	×	×	×	×				

Si no hubiera incertidumbre en el valor de L , la forma de los contornos $\beta'_{c_1}(\omega)$ y $\beta'_{c_2}(\omega)$ sería idéntica, y la única diferencia entre ellos radicaría en un desplazamiento horizontal de los contornos $\beta'_{c_2}(\omega)$. Este comportamiento también ocurriría si se tratara de dos plantas idénticas que presentan un cero en $+a$ y $-a$, respectivamente. En estos casos, los contornos $\beta_{c_1}(\omega)'$ y $\beta'_{c_2}(\omega)$ coincidirían aproximadamente hasta la frecuencia $\omega = 0.1a$; a partir de la cual se produciría un desplazamiento horizontal hacia la derecha de los contornos de la planta que contiene el cero RHP.

Etapa 2: Loop Shaping de controladores

Con los objetivos de la [Tabla 6.1](#) se lleva a cabo el *loop-shaping* de los controladores⁷. La [Figura 6.5](#) muestra la disposición final de los contornos $\beta_{l_{i=1,2}}(\omega)$ y de las funciones de lazo abierto nominal $l_{i=1,2_o}(j\omega)$ que los satisfacen. Nótese como $l_{2_o}(j\omega)$ presenta un retardo⁸. Los controladores resultantes son:

$$c_1(s) = \frac{403.27(s + 0.59)(s + 1.75)(s + 9.46)(s + 62.52)}{s(s + 41.59)(s + 84.57)(s^2 + 7.57s + 16.23)} \quad (6.18)$$

$$c_2(s) = \frac{307.83(s + 2.004)}{s(s + 11.01)(s + 13.42)}. \quad (6.19)$$

Véase como en baja frecuencia, $\omega = 0.1$, la [Figura 6.5](#) muestra el contorno de estabilidad obtenido antes de intersectar los *bounds* de estabilidad robusta y *performance*, de este modo puede comprobarse como la [\(6.14\)](#) evita la compresión de los contornos descrita en el [Capítulo 5](#).

⁷ Analícese en caso de duda la metodología detallada en la [Sección 4.3](#).

⁸ En alta frecuencia aparece una brusca reducción de la fase.

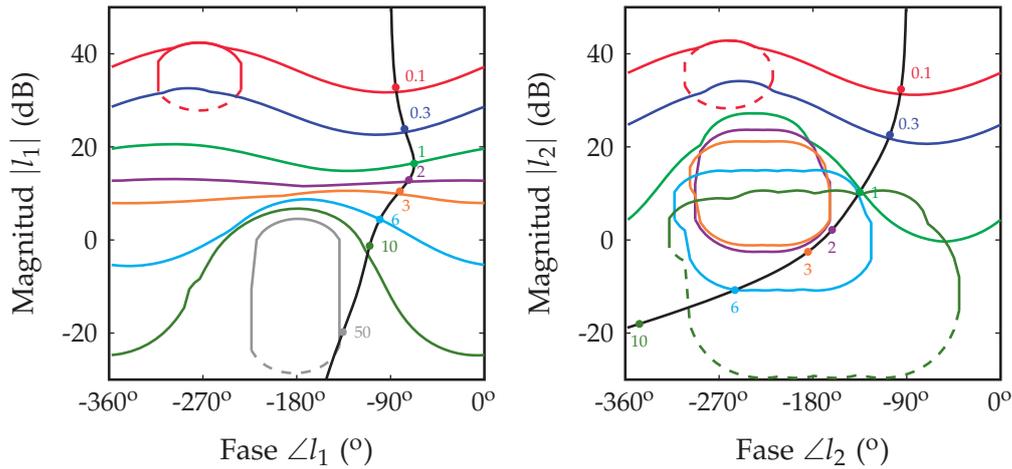


Figura 6.5: *Loop-shaping* de los controladores $c_{i=1,2}$.

Análisis y comparaciones

El orden de los controladores resultantes es elevado ya que el objetivo es obtener aquellas soluciones de control de ganancia mínima en cada frecuencia. Esto permite una comparación más justa con otros controladores. En la práctica la propia naturaleza del método de diseño QFT permite sopesar entre el orden del controlador, minimizar la realimentación o satisfacer las especificaciones. Los controladores (6.18) y (6.19) satisfacen la especificación de estabilidad robusta (6.14) con cota (6.15) y de rechazo robusto de perturbaciones (4.8) con cota (6.16) a lo largo de todo el espectro frecuencial. No se presentan los diagramas que lo justifican dado que pueden obtenerse de forma sencilla. A continuación se presenta un análisis detallado (en el dominio del tiempo y de la frecuencia) del reparto de la realimentación obtenido. Este estudio es muy similar al que se obtiene cuando nos enfrentamos a sistemas MISO que presentan ceros RHP en lugar de retardos.

La Figura 6.6 muestra las respuestas temporales para las plantas nominales. En el instante $t = 0.5$ s. se introduce un cambio escalón de amplitud 5 en la perturbación $d(t)$. El ruido del sensor $v(t)$ es modelado empleando un ruido blanco (potencia= 0.001, tiempo de muestreo=0.01). La respuesta $y_1(t)$ muestra como $p_1(j\omega)$ trabaja en todas las frecuencias, sin retardo inicial. La respuesta $y_2(t)$ evoluciona lentamente, con un retardo inicial de 0.5 segundos. Es decir, $p_2(j\omega)$ comparte con $p_1(j\omega)$ el control en bajas frecuencias, y en particular del régimen permanente. En esta línea, véase el estacionario no nulo de $u_1(t)$ y $u_2(t)$, mientras persista $d(t)$. El efecto del ruido en el sensor es poco apreciable en $u_2(t)$,

puesto que en alta frecuencia la planta $p_2(j\omega)$ se encuentra prácticamente desconectada del lazo de control mediante el empleo de una ganancia muy baja en $c_2(j\omega)$ si se compara con la de $c_1(j\omega)$.

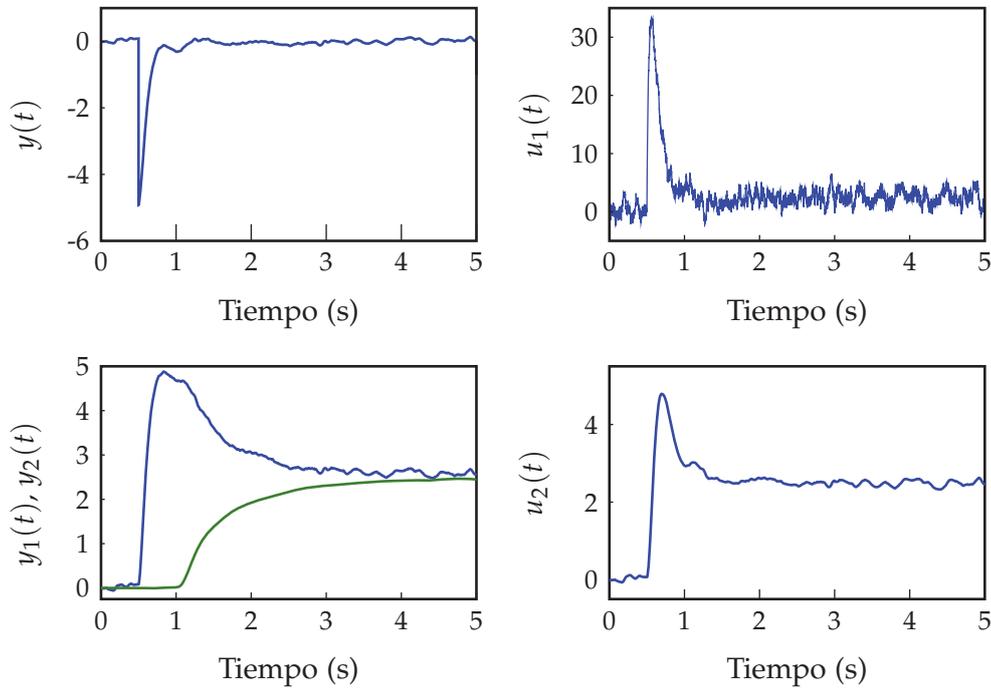


Figura 6.6: Simulación del sistema controlado.

Los controladores obtenidos para la estructura paralelo pueden ser comparados con el controlador

$$c_{1s}(s) = \frac{365.98(s + 0.97)(s + 8.41)(s + 45.19)}{s(s + 9.39)(s + 23.22)(s + 76.77)}, \quad (6.20)$$

calculado mediante el empleo de QFT SISO para $p_1(j\omega)$, ya que esta planta no impone limitaciones de ancho de banda del sistema en lazo cerrado. No es posible emplear únicamente $p_2(j\omega)$ en una estructura de control SISO, ya que el *performance* propuesto empleando (6.16) en (4.8) no es alcanzable sin violar las condiciones de estabilidad determinadas por (6.14) y (6.15) debido al retardo. En la Figura 6.7, puede comprobarse como las magnitudes de $c_1(j\omega)$ y $c_2(j\omega)$ (control MISO) son inferiores a las de $c_{1s}(j\omega)$ (control SISO) en baja frecuencia ($|c_1(j\omega)| \approx |c_2(j\omega)| \approx 0.5|c_{1s}(j\omega)|$), gracias a la colaboración. Sin embargo, en alta frecuencia, donde sólo trabaja $c_1(j\omega)$, la magnitud de éste es similar a la de $c_{1s}(j\omega)$. En resumen, se demuestra la superioridad de un control MISO correctamente ejecutado sobre el único control SISO factible (con $p_1(j\omega)$), en cuanto a que el primero emplea menos cantidad de

realimentación. El ahorro afecta a las bajas frecuencias sin pagar ningún precio en alta frecuencia, todo ello a pesar de incorporar o utilizar una planta adicional con limitaciones (retardo).

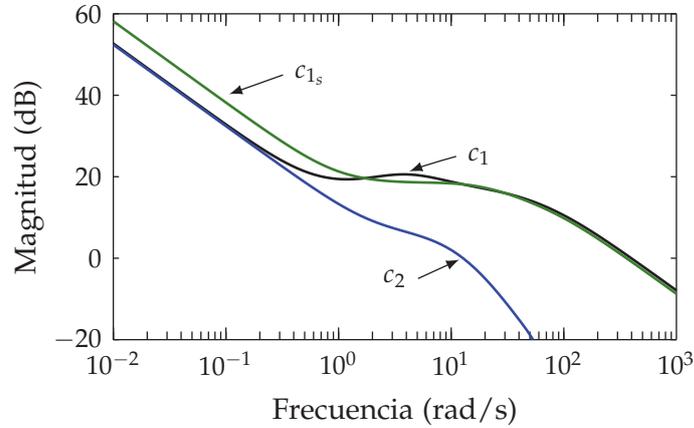


Figura 6.7: Magnitud de los controladores c_1 , c_2 y c_{1s} .

Por último, se estudia la posibilidad de un diseño de control para plantas MISO con retardos utilizando QFT SISO y una estructura de control con un único controlador maestro. En este caso se emplea un controlador $c_e(j\omega)$, que es diseñado para la planta suma $p_e(j\omega) = p_1(j\omega) + p_2(j\omega)$. Dado que el retardo impide una suma de plantas en el dominio «s», se emplea la suma de plantas en el dominio de la frecuencia, que en este caso resulta

$$p_e(j\omega) = |p|(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + j|p|(\sin \theta_1 + \sin \theta_2), \quad (6.21)$$

donde $|p(j\omega)| = |p_1(j\omega)| = |p_2(j\omega)|$. En forma polar se obtiene

$$p_e(j\omega) = |p(j\omega)| \sqrt{2 + 2 \cos(\theta_1(\omega) - \theta_2(\omega))} \\ \angle \arctan \frac{\sin \theta_1(\omega) + \sin \theta_2(\omega)}{\cos \theta_1(\omega) + \cos \theta_2(\omega)}. \quad (6.22)$$

En baja frecuencia se cumple $\theta_1(\omega) \approx \theta_2(\omega)$, obteniéndose $|p_e(j\omega)| \approx 2|p(j\omega)|$, lo cual es congruente con la colaboración de plantas en baja frecuencia lograda con la estructura MISO de dos controladores. Como la fase $\theta_2(\omega)$ crece indefinidamente a partir de cierta frecuencia, periódicamente se cumple que $|\theta_1(\omega) - \theta_2(\omega)|$ es múltiplo de 180° , anulando el módulo de $p_e(j\omega)$ y haciendo ingobernable el sistema. El ejemplo presentado es el caso más desfavorable, en el que no es posible diseñar

$c_e(j\omega)$, porque ambas plantas tienen exactamente el mismo módulo y una de ellas un retardo adicional.

Las ventajas del método presentado para un sistema MISO con ceros RHP serían las mismas. Como salvedad, éstos sistemas siempre permiten el diseño $c_e(j\omega)$ para la suma de plantas. En baja frecuencia éste igualaría en prestaciones a los controladores paralelo. Sin embargo, en alta frecuencia presentaría una ganancia muy superior, ya que el diseño con controlador único no permite desconectar en alta frecuencia las ramas que presenten ceros RHP. En cualquier caso, la presencia de plantas con ceros RHP o retardos junto con plantas MP puede dar lugar a una planta equivalente con limitaciones en el *performance*, dado que no es posible inhibir las señales inadecuadas que llegan a las ramas en alta frecuencia. En estos casos, las especificaciones, si son alcanzables con un único controlador $c_e(j\omega)$, demandarán que en alta frecuencia presente más ganancia que cualquiera de los controladores $c_i(j\omega)$ obtenidos para la estructura paralelo.

6.4.2 Ejemplo 2: Sistema MISO inestable

El sistema MISO a gobernar responde a

$$p_1(s) = \frac{k}{s/a + 1}, \quad p_2(s) = \frac{k}{s/a - 1}, \quad p_d(s) = 1. \quad (6.23)$$

Su espacio de incertidumbre \mathcal{Q} en \mathbb{R}^2 lo define el vector de parámetros $\mathbf{q} = [k, a]$, tal que $k \in [1, 2]$, $a \in [1, 4]$. Las plantas nominales $p_{1o}(s)$ y $p_{2o}(s)$ responden al caso $k = 1$ y $a = 1$.

Las especificaciones de control son las mismas que en el ejemplo anterior (6.14)-(6.15) y (4.8)-(6.16). También se escoge el mismo vector de frecuencias discretas (6.17).

Con estos datos se obtienen las necesidades de control mostradas en la Figura 6.8 a través de los contornos $\beta'_{c_{i=1,2}}(\omega)$. En los sistemas inestables, son posibles dos opciones de control. La más obvia se muestra en las gráficas superiores. Las gráficas inferiores corresponden con el empleo de ganancia inversa en el controlador de la planta $p_1(j\omega)$. Si se elige como fase de diseño $\Theta_d \approx -90^\circ$, las diferencias en altura de los contornos sugieren que es posible la colaboración entre lazos en todas las frecuencias. Sin embargo, la condición de argumento del Criterio 1 (desfases de contornos inferiores a 90°), limita la colaboración a la banda

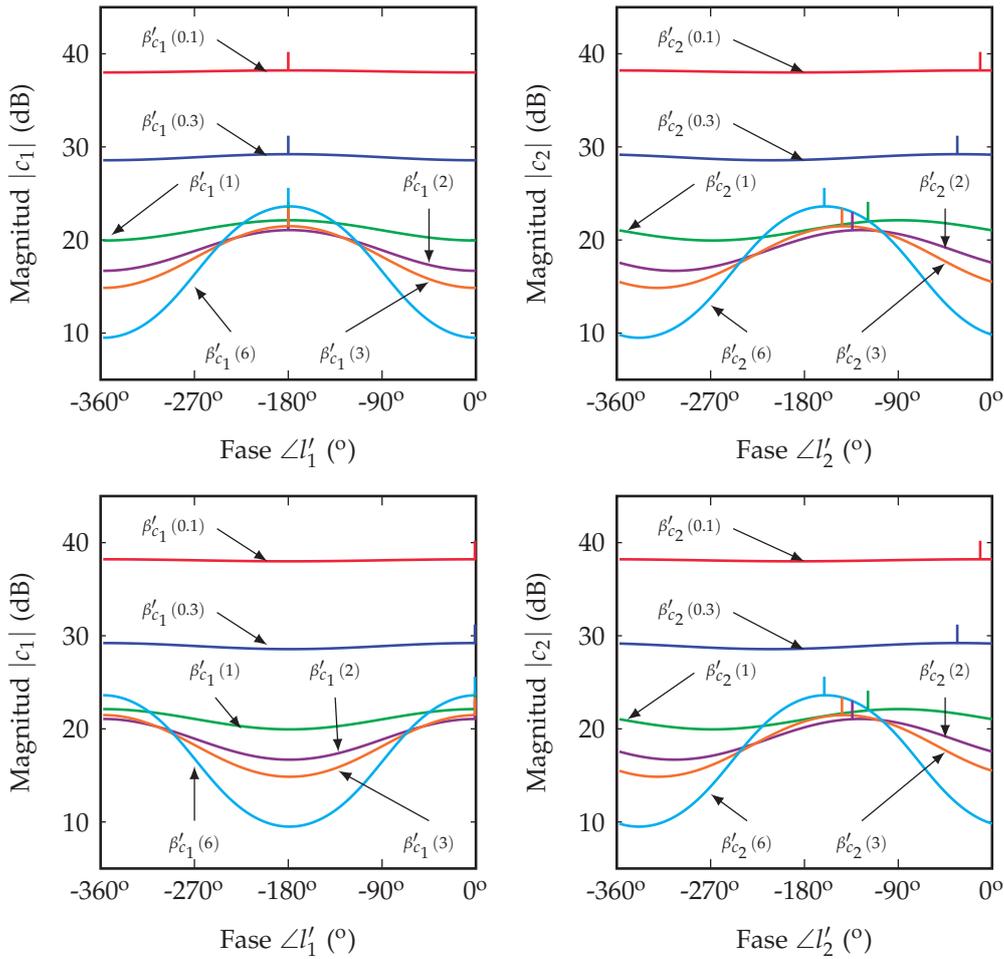


Figura 6.8: Necesidades de control: (sup.) ganancias de control no inversas (inf.) ganancia inversa en c_1 .

$\omega \geq 1$ si se emplean controladores de ganancia no inversa, y a la banda $\omega < 1$ si se emplean un controlador de ganancia inversa para el lazo 1. Por otro lado, el lazo 2 debe trabajar en todo el rango de frecuencias, ya que al ser $p_2(j\omega)$ inestable precisa siempre de una ganancia mínima para ser estabilizado. Es decir, su rama sólo puede ser inhibida más allá de la frecuencia de cruce de fase, donde ya el rechazo de perturbaciones no se considera. Por lo tanto, $p_1(j\omega)$ sólo debe participar en un rango de frecuencias, inhibiéndose su intervención con una ganancia en el controlador muy baja en el resto de frecuencias. Todas estas conclusiones se resumen en la [Tabla 6.2](#). Este análisis revela como el empleo de ramas con polos RHP impone limitaciones de ancho de banda en las plantas MP si las diferencias en fase impiden una colaboración en todo el espectro de frecuencias. Sin embargo, el empleo de la planta inestable puede ser útil para reducir la ganancia de los controladores.

Tabla 6.2: Reparto de la realimentación para el ejemplo 2.

GANACIAS DE CONTROL NO INVERSAS								
ω	0.1	0.3	1	2	3	6	10	50
p_1			×	×	×	×	×	×
p_2	×	×	×	×	×	×	×	×
GANANCIA INVERSA DE CONTROL EN LAZO 1								
ω	0.1	0.3	1	2	3	6	10	50
p_1	×	×						
p_2	×	×	×	×	×	×	×	×

De acuerdo a las planificaciones de reparto, se realizan los *loop-shapings* de ambos lazos (Figura 6.9). Los controladores resultantes son:

$$c_1(s) = \frac{275.53s(s + 0.058)(s + 1.74)(s + 2.37)(s + 59.04)}{(s + 0.035)(s + 0.19)(s + 0.57)(s + 5.35)(s + 34.54)(s + 99.41)} \quad (6.24a)$$

$$c_1(s) = \frac{-3182.5(s + 1.51)}{s(s + 50.67)(s^2 + 5.868s + 16.98)} \quad (6.24b)$$

y

$$c_2(s) = \frac{247.36(s + 0.39)(s + 1.63)(s + 6.5)(s + 49.9)}{s(s + 0.83)(s + 3.62)(s + 25.63)(s + 83.75)} \quad (6.25a)$$

$$c_2(s) = \frac{671.09(s + 0.2293)(s + 33.12)(s^2 + 6.554s + 13.4)}{s(s + 21.59)(s + 105.3)(s^2 + 4.869s + 7.686)} \quad (6.25b)$$

Siendo (6.24a)-(6.25a) la opción de control con ganancias no inversas, y (6.24b)-(6.25b) la opción con ganancia inversa en el lazo 1.

La Figura 6.10 muestra el comportamiento temporal para cinco plantas pertenecientes al dominio de la incertidumbre. Se emplean las mismas entradas de excitación $d(t)$ y $v(t)$ del ejemplo anterior. Las gráficas de la primera columna muestran el comportamiento de acuerdo a lo

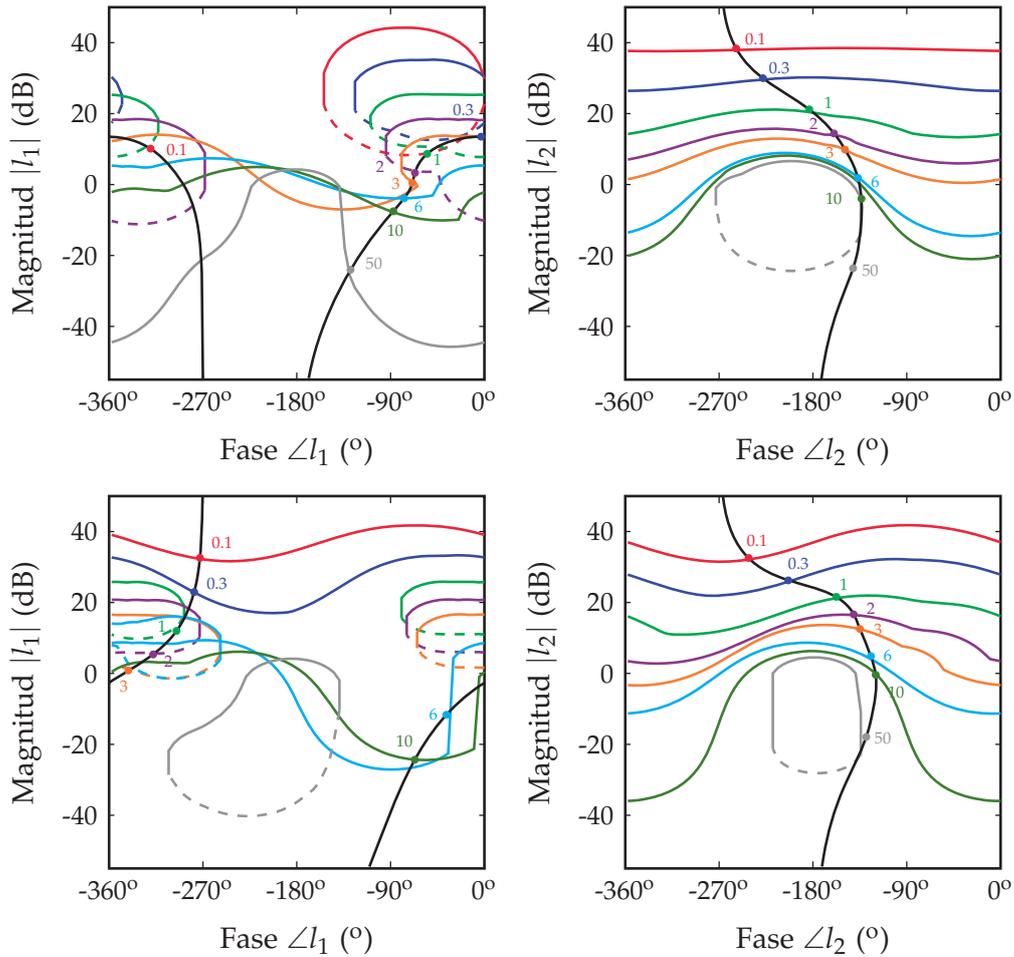


Figura 6.9: *Loop-shapings*: (sup.) ganancias de control no inversas (inf.) ganancia inversa en c_1 .

planificado en la parte superior de la [Tabla 6.2](#). En ellas se observa la correspondencia entre $y_1(t)$ e $y_2(t)$, y entre $u_1(t)$ y $u_2(t)$ en los primeros instantes de tiempo tras la perturbación, denotando la colaboración de $p_1(j\omega)$ y $p_2(j\omega)$ en altas frecuencias. Progresivamente, $y_2(t)$ y $u_2(t)$ cobran más peso en el control, hasta que en régimen permanente $p_1(j\omega)$ es inhibida, dando lugar a $y_1(t) \approx 0$ y $u_1(t) \approx 0$. La segunda columna de gráficas muestra la otra opción de colaboración indicada en la parte inferior de la [Tabla 6.2](#). En este caso, la colaboración se efectúa en baja frecuencia, de ahí la coincidencia en régimen permanente de $y_1(t)$ e $y_2(t)$, y de $u_1(t)$ y $u_2(t)$ en valor absoluto. Por el contrario, en los primeros instantes de tiempo es cuando todo el control es aportado por $y_2(t)$ y $u_2(t)$, es decir la planta $p_2(j\omega)$, mientras que $y_1(t) \approx 0$ y $u_1(t) \approx 0$ al estar inhibida $p_1(j\omega)$. Si observamos la variable controlada $y(t)$ en las dos columnas, podemos comprobar como el *performance* coincide en los dos

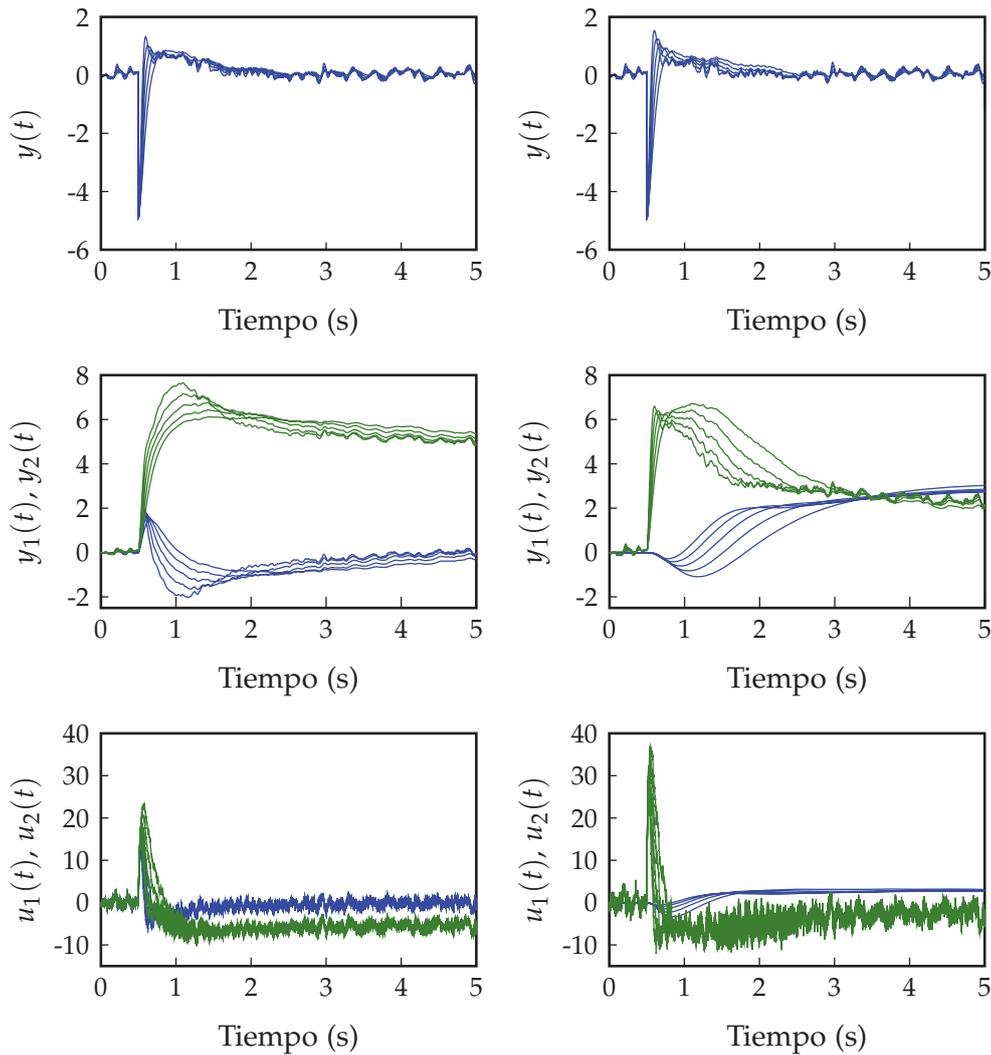


Figura 6.10: Respuestas temporales: (izq.) ganancias no inversas, (dcha.) ganancia inversa en lazo 1.

casos, y es reseñable la presencia de un sobreimpulso debido a las presencia de polos RHP. Sin embargo, atendiendo a las salidas individuales $y_1(t)$ y $y_2(t)$, es interesante destacar que en estos casos se ha trasladado el sobreimpulso indeseable a la respuesta de la planta $y_1(t)$, que no lo presenta en caso de trabajar en solitario. Comparando las acciones de control de la columna izquierda con las de la derecha, cabe señalar que allí donde existe la colaboración entre plantas, las acciones de control se reducen a la mitad. Así el pico en el transitorio de las acciones de control $u_1(t)$ y $u_2(t)$ de la izquierda, se reduce a la mitad respecto al pico en $u_2(t)$ en la derecha. Y por el contrario, el valor estacionario de $u_1(t)$ y $u_2(t)$ en la derecha se reduce a la mitad respecto al valor estacionario de $u_2(t)$ en la izquierda. También, en la opción de la derecha,

como el controlador $c_1(j\omega)$ no deja pasar las altas frecuencias, la ampliación del ruido del sensor en $u_1(t)$ es despreciable, evitando la fatiga del actuador de $p_1(j\omega)$. En la opción de la izquierda, como $u_1(t)$ vuelve a cero en régimen estacionario, el actuador de $p_1(j\omega)$ dispone de todo el rango de control para responder ante un eventual aumento de la perturbación. Todas estas diferencias pueden servir para decantarse por una u otra solución de control colaborativo en función de las necesidades de control.

Ambas opciones de control MISO van a ser comparadas, por separado, con controles SISO dónde sólo intervendría una planta $p_1(j\omega)$ o $p_2(j\omega)$. Los controladores SISO (denotados con el subíndice «s») que satisfacen las especificaciones de diseño son

$$c_{1s}(s) = \frac{365.98(s + 0.9743)(s + 8.408)(s + 45.19)}{s(s + 9.385)(s + 23.22)(s + 76.77)}, \quad (6.26)$$

y

$$c_{2s}(s) = \frac{656.36(s + 0.4952)(s + 0.5373)(s + 29.78)}{s(s + 0.3386)(s + 17.95)(s + 102.4)}. \quad (6.27)$$

La [Figura 6.11](#) muestra la superioridad del control MISO frente al control con una sólo planta en las frecuencias donde colaboran los dos lazos, mientras que en las frecuencias donde sólo trabaja una rama, evidentemente el control MISO se iguala al control SISO correspondiente.

También se compara el control MISO de 2DoF (*Degrees of Freedom*), $c_1(j\omega)$ y $c_2(j\omega)$, con un control MISO de controlador único,

$$c_e(s) = \frac{402.05(s + 0.61)(s + 54.02)(s^2 + 2.66s + 3.12)}{s^2(s + 0.75)(s + 22.49)(s + 151.6)} \quad (6.28a)$$

$$c_e(s) = \frac{293.64(s + 0.55)(s + 1.51)(s + 4.25)(s + 38.59)}{s(s + 5.17)(s + 17.53)(s + 104.6)}, \quad (6.28b)$$

que se diseña para la planta suma equivalente; [\(6.28a\)](#) para $p_e(j\omega) = p_1(j\omega) + p_2(j\omega)$ y [\(6.28b\)](#) para $p_e(j\omega) = -p_1(j\omega) + p_2(j\omega)$. Nótese sobre la [Figura 6.11](#) cómo la reducción de ganancia conseguida con el diseño MISO 2DoF respecto al diseño MISO 1DoF en las frecuencias de no colaboración es mucho mayor que cuando se empleaba un control SISO sobre una sólo planta. Esto se debe a que en dichas frecuencias, la suma vectorial de plantas $p_e(j\omega)$ tiene un módulo menor que cada

planta por separado (ya que su desfase es mayor a $\pm 90^\circ$). La imposibilidad de inhibir una de las plantas produce que se eleve enormemente la ganancia $c_e(j\omega)$. Además, para este ejemplo en particular donde las dinámicas de $p_1(j\omega)$ y $p_2(j\omega)$ están en las mismas frecuencias, la planta $p_e(j\omega) = p_1(j\omega) + p_2(j\omega)$ contendría un derivador. Entonces, con $c_e(j\omega)$ en (6.28a) se produciría una cancelación del modo inestable $s = 0$, violándose los principios de estabilidad interna.

Debe puntualizarse que no se ha contemplado la opción de diseñar controladores $c_{1s}(j\omega)$ o $c_e(j\omega)$ con ganancia inversa por carecer de sentido.

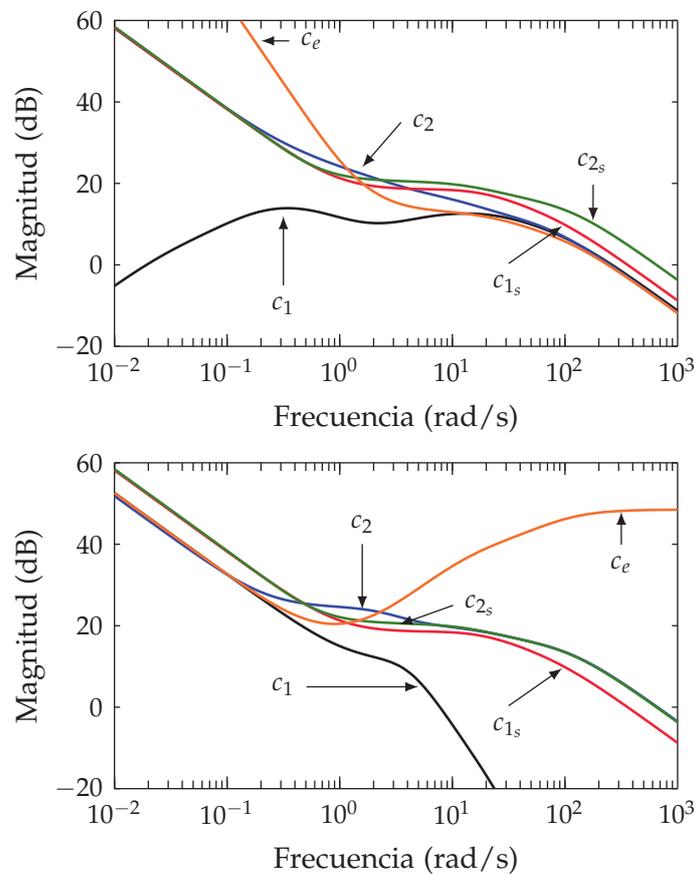


Figura 6.11: Comparativa de controladores: (sup.) controlador MISO de ganancia no inversa, (inf.) controlador MISO con ganancia inversa en lazo 1.

6.5 COMENTARIOS ADICIONALES

La presencia de ceros y polos RHP (o polos RHP y retardos) en la misma rama, puede producir que dicha rama sea inútil en las tareas de

control. En particular este hecho sucede cuando el polo y el cero RHP se encuentran muy próximos. Sin embargo ésta no es una limitación del método MISO, ya que también ocurre en los sistemas SISO.

El método proporcionado también es útil en diseños clásicos en los que no se considera la incertidumbre de la planta. En comparación con los métodos de diseño mostrados en la [Sección 2.4](#), en los que sólo se evaluaban las plantas con ceros NMP y retardos, aquí se estudia el potencial de cada planta en cada frecuencia discreta de diseño, lo que permite mejorar los resultados finales. Debido a su dificultad intrínseca, la participación mas fructífera de plantas inestables no se había explorado hasta ahora en la literatura científica.

Otro de los aspectos interesantes del método es que puede hacer frente a distribuciones de incertidumbre mucho más complejas que las de los ejemplos proporcionados. Por ejemplo, considérese la multiplicación de parámetros con incertidumbre, o modelos obtenidos mediante la identificación experimental o por linealización, en los que podría ser imposible prever los patrones dominantes para una selección meramente intuitiva de las frecuencias de trabajo para cada rama.

Téngase en cuenta que, pese a que los ejemplos presentados son para sistemas 1×2 , el método no está limitado a sistemas de dos plantas como ocurre en la mayoría de ejemplos de la literatura. De hecho, disponer de un gran número de plantas no implica dificultades especiales en el análisis del reparto de la realimentación (etapa 1). Esto hace que el método sea particularmente atractivo para los sistemas reales, ya que puede reducir el número potencial de las plantas a considerar. Téngase en cuenta que la etapa de diseño sí que se complica con el incremento del número de plantas.

Parte III

GESTIÓN DE LAS ACCIONES DE CONTROL

7

CONTROL DE LAS ACCIONES DE CONTROL MISO

Las metodologías de diseño propuestas hasta el momento tienen como objetivo el control robusto de sistemas MISO en torno a un punto de operación arbitrario. Es decir, no tienen en cuenta las implicaciones que tiene el punto de operación en el control del sistema. Esto es debido a que se consideran las plantas como lineales, invariantes en el tiempo, y con rango de actuación infinito. Además, no se tienen en cuenta aspectos que influyen en los sistemas reales, como el coste de manipulación de las variables físicas o las demandas de producción¹.

Ningún sistema real responde a la descripción anterior, por lo tanto, las estrategias de control propuestas deben adaptarse para que tengan en cuenta aspectos funcionales derivados de la manipulación de las acciones de control. En la literatura científica presentada en el [Capítulo 2](#) se advertía de la importancia del control del punto de operación. En la [Sección 7.1](#) se justifica la afirmación anterior, y se muestra como el empleo de una arquitectura de control adecuada que permita modificar el punto de operación, puede producir importantes diferencias en el *performance* del régimen transitorio.

La [Sección 7.2](#) muestra una modificación de la estructura de control paralelo, que incorpora nuevas referencias y controladores de prealimentación. Estas modificaciones permiten establecer referencias para las acciones de control en régimen permanente, sin degradar el *performance* de rechazo de perturbaciones. En la [Sección 7.3](#) se muestran estrategias de diseño para los controladores de prealimentación.

¹ Se ha considerado oportuno efectuar la simplificación descrita para concentrar la atención del lector en los conceptos propios del método de diseño.

7.1 LA IMPORTANCIA DEL PUNTO DE OPERACIÓN

Considérese un sistema MISO lineal con salidas individuales no accesibles (Figura 2.1b). En lazo abierto, el comportamiento en régimen estacionario para plantas estables está determinado por

$$y_{rp} = d_{rp}p_d(0) + \sum_{i=1}^n u_{i,rp}p_i(0). \quad (7.1)$$

Las variables y_{rp} , u_{rp} , d_{rp} representan los valores de régimen permanente de las señales en el dominio temporal². Por otro lado, $p_d(0)$ y $p_i(0)$ está representando la ganancia estática³ de las plantas.

En ausencia de perturbación $d_{rp} = 0$ y fijado un valor deseado para la variable gobernada y_{rp} , existen infinitas combinaciones de acciones de control $u_{i,rp}$ que equilibran la ecuación (7.1). Es decir, el punto de operación inicial del sistema es libre, pudiendo ser seleccionado por el diseñador. Véase como ejemplo un sistema MISO 1×2 sin incertidumbre, cuyas plantas cumplen: $p_1(0) = 5$, $p_2(0) = 0.2$. En este caso, para una consigna $y_{rp} = 0$, el punto de operación se satisface siempre que las acciones de control cumplan $u_{2,rp} = -25u_{1,rp}$, siendo posibles infinitas combinaciones; como por ejemplo: $u_{1,rp} = 0$ y $u_{2,rp} = 0$, o $u_{1,rp} = 0.1$ y $u_{2,rp} = -2.5$.

En los sistemas reales, el punto de operación determina los costes de operación, entendiendo éstos como gastos de acción de control, que se traducen en consumos de energía y/o materias primas, y por lo tanto, conllevan un coste económico. En consecuencia su selección es clave para una adecuada explotación del sistema. Autores como Shinskey [131] y Luyben [97] demuestran en sus trabajos como los sistemas MISO pueden reducir el consumo energético o maximizar la producción de un proceso productivo. Véase como en estos casos el reparto de las tareas de control de acuerdo a los criterios en la Sección 4.2 puede ser contrario a unas condiciones de trabajo óptimas.

El punto de operación seleccionado no es importante únicamente cuando el sistema trabaja en régimen permanente. Además, condiciona el comportamiento del sistema en régimen transitorio. Eitelberg [36] presenta una descripción detallada de la implicación que presenta el em-

² El subíndice «rp» es empleado para indicar que las señales se encuentran en régimen permanente ($t = \infty$). Por ejemplo, $y_{rp} = y(t = \infty)$.

³ Si las plantas son estables, su valor de ganancia estática es finito y, o bien positivo o bien negativo.

pleo de diferentes puntos de operación en el *performance* de rechazo de perturbaciones. En conclusión, determinar cual es el punto de operación adecuado para un sistema MISO no es una tarea sencilla, y responde en la mayor parte de los casos a problemas de optimización o al conocimientos *ad-hoc* del sistema que se desea gobernar.

Véase como ejemplo un sistema hidráulico como el de la [Figura 7.1](#), en el que se emplean dos servoválvulas para controlar el caudal de un proceso. Por simplicidad considérese que las funciones de transferencia de dichas válvulas corresponden con las del Ejemplo 1 presentado en la [Subsección 4.4.1](#) (p_1 servoválvula grande y p_2 servoválvula pequeña). Para este ejemplo se supone que el rango de actuación esta comprendido en $u_{i=1,2} \in (0\% - 100\%)$, lo que implica que las servoválvulas sólo pueden aportar caudal positivo.

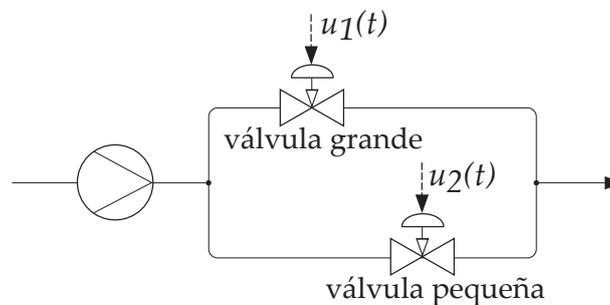


Figura 7.1: Sistema de control de caudal con dos válvulas en paralelo.

Para las pruebas de simulación se fija como referencia $y_{rp} = 10$, y se somete al sistema a una perturbación $d(t)$ de amplitud 1 en $t = 1s$. Los controladores empleados son los obtenidos en el Ejemplo 1 y las simulaciones se realizan en ausencia de ruido de alta frecuencia. La [Figura 7.2](#) muestra, bajo diferentes hipótesis, las respuestas obtenidas para la variable controlada y las acciones de control.

Las respuestas marcadas como « u_2 lineal» (color azul), ilustran el comportamiento del sistema cuando el punto de operación seleccionado corresponde con $\{u_{1,rp} = 10, u_{2,rp} = 0\}$ y además se considera el sistema lineal y sin limitaciones (puramente teórico). En este caso, se observa que el comportamiento dinámico cumple con las condiciones de diseño impuestas en el Ejemplo 1. Las respuestas marcadas como « $u_{2,rp} = 0$ » (color verde), corresponden con los resultados obtenidos para el sistema no lineal (acciones de control limitadas al rango $[0\%, 100\%]$ cuando el punto de operación seleccionado corresponde con $\{u_{1,rp} = 10, u_{2,rp} = 0\}$. En este caso puede comprobarse como la no linealidad en los actuadores

produce que las acciones de control saturan, obteniendo una gran degradación en el *performance* de la variable controlada. Compruébese como pese a presentar dos plantas, el sistema trabaja como un sistema SISO durante los primeros segundos, dada la incapacidad para aportar acción de control negativa en u_2 . Recuérdese que el sistema teórico es estabilizado gracias al empleo de las dos plantas, durante el tiempo que la planta $p_2(j\omega)$ se encuentra desconectada del lazo de control $t \in (1s, 2.7s)$, el sistema presenta una función sensibilidad complementaria

$$T(j\omega) \approx \frac{p_1(j\omega)c_1(j\omega)}{1 + p_1(j\omega)c_1(j\omega)} \quad (7.2)$$

que en este caso es inestable. Es decir, el sistema se encuentra en modo inestable hasta que la desviación de la variable controlada exige un aumento de la acción de control u_2 , momento a partir del cual el sistema recupera su carácter MISO y es estabilizado.

El tercer caso, denominado « $u_{2,rp} = 10$ » (color rojo), muestra el comportamiento del sistema no lineal cuando el punto de operación inicial es fijado a $\{u_{1,rp} = 9, u_{2,rp} = 10\}$ ⁴. Puede comprobarse como en este caso el comportamiento dinámico es muy parecido al del sistema lineal, mejorando el obtenido en el caso anterior. La mejora obtenida es debida a que en este caso u_2 tiene margen para aportar un incremento negativo con respecto del punto de partida, por lo que el sistema trabaja en modo MISO desde el instante inicial. La pequeña distorsión obtenida si se compara la respuesta de la variable controlada con el comportamiento del modelo lineal, es debida a la saturación de $u_2(t)$ en régimen transitorio. Para solucionar este problema puede emplearse el punto de operación $\{u_{1,rp} = 8, u_{2,rp} = 20\}$ (color negro). En este caso, la acción de control $u_2(t)$ tiene margen suficiente para reducir su valor sin llegar a saturar, permitiendo obtener un comportamiento dinámico para la variable controlada idéntico al del modelo lineal.

Vistos los efectos que el punto de operación tiene sobre el comportamiento del sistema, parece evidente que una estrategia de diseño adecuada debe permitir establecer el mismo y cambiarlo en función de las necesidades de operación. Atendiendo a estos requisitos, es evidente que la arquitectura de control presentada en el [Capítulo 4](#) debe ser modificada convenientemente (véase la [Sección 7.2](#); antes se estudian una serie de cuestiones referentes al punto de operación).

⁴ Para ello es necesario incluir una serie de modificaciones que serán presentadas en secciones posteriores.

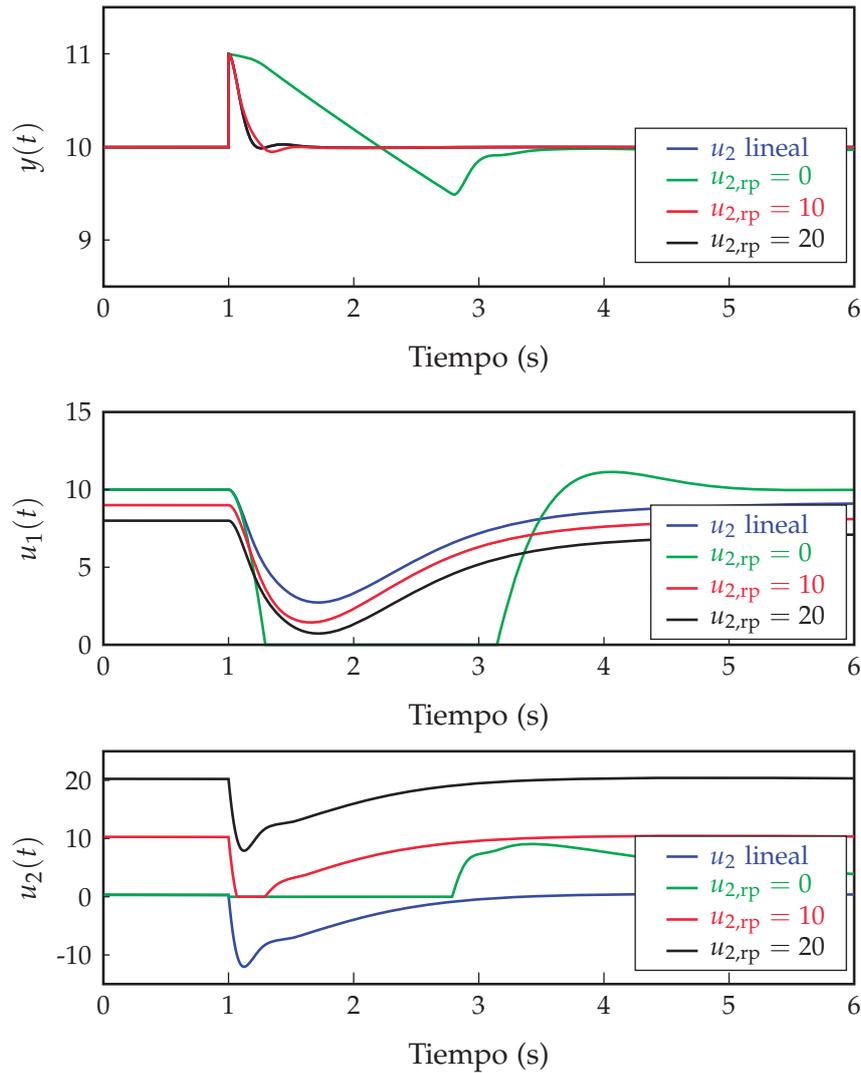


Figura 7.2: Simulación del rechazo de perturbaciones para diferentes puntos de operación.

La primera de estas cuestiones hace referencia al número de acciones de control que deben definirse para conocer el punto de operación de un sistema. En principio, el punto de operación es determinado en función del valor deseado para la variable controlada, las perturbaciones y las acciones de control. Por lo tanto, conocidos y_{rp} , d_{rp} y todas las acciones de control excepto una $u_{k,rp}$, puede obtenerse el valor de dicha acción de control según

$$u_{k,rp} = \frac{1}{p_k(0)} \left[y_{rp} - d_{rp} p_d(0) - \sum_{i \neq k} u_{i,rp} p_i(0) \right]. \quad (7.3)$$

En un sistema real sometido a perturbaciones, puede parecer que no tiene sentido realizar la estimación del valor $u_{k,rp}$, ya que la perturbación

d_{rp} es desconocida, y por lo tanto $u_{k,rp}$ no puede inferirse con precisión. En el ejemplo anterior se observa como después de rechazarse la perturbación el punto de operación cambia, obteniendo una acción de control $u_{1,rp}$ diferente a la de partida. Si se tiene en cuenta la incertidumbre del sistema, este problema se acentúa. En estos casos, incluso en ausencia de perturbación $d_{rp} = 0$, el valor $u_{k,rp}$ es desconocido. Puede obtenerse una aproximación del mismo mediante el empleo de las plantas nominales

$$u_{k,rp} = \frac{1}{p_{k_0}(0)} \left[y_{rp} - \sum_{i \neq k} u_{i,rp} p_{i_0}(0) \right], \quad (7.4)$$

que sólo será adecuado si la incertidumbre es reducida.

El hecho de no poder inferir $u_{k,rp}$ con precisión no es un problema importante. Si se considera que el sistema trabaja en lazo cerrado y el diseño del lazo de control es adecuado, este trabajará en régimen permanente sin error⁵. Es decir, tarde o temprano el lazo de control converge en un punto de equilibrio que satisface $y_{rp} = r_{rp}$. Del mismo modo, si el control se ha diseñado de forma adecuada, puede garantizarse que durante los fenómenos transitorios se producirá siempre un mismo patrón de actuación. Como se demostró en capítulos anteriores, la estrategia de control presentada garantiza que las plantas que trabajan en media-alta frecuencia retornen a su punto de operación una vez rechazada la perturbación. Por el contrario, las plantas que trabajan en baja frecuencia son las encargadas de absorber en régimen permanente los cambios necesarios para alcanzar un nuevo punto de equilibrio.

En conclusión, tiene sentido fijar el valor de régimen permanente para las acciones de control de las plantas que no trabajan en baja frecuencia, ya que el sistema de control garantiza que una vez finalizados los fenómenos transitorios éstas regresen a su punto de partida. Por el contrario, las plantas que trabajan en baja frecuencia presentarán acciones de control desconocidas, ya que en última instancia éstas deben adecuar su valor para alcanzar el equilibrio. Este comportamiento se advierte en las respuestas mostradas en la [Figura 7.2](#).

Préstese atención a la conclusión anterior. Que la acción de control de las plantas que trabajan en baja frecuencia sea desconocida, no implica que deba dejarse al azar. En primera instancia puede pensarse que no es necesaria una estructura de control que contemple la posibilidad de

⁵ Este comportamiento queda garantizado mediante la adición del número necesario de integradores en el lazo de control.

establecer consignas para dichas acciones de control, pero esta conclusión es errónea, ya que si no se establecen unos valores de referencia⁶, el proceso de inicialización será mucho más lento que el obtenido si se establece un valor cercano al de régimen permanente.

El procedimiento más habitual para el cálculo de dichas consignas es el siguiente. Una vez seleccionadas las frecuencias de trabajo de cada una de las plantas⁷, puede distinguirse entre las plantas que trabajan en baja frecuencia y las que trabajan en medias-altas frecuencias. Se selecciona el punto de operación deseado para todas las plantas que trabajan en media/alta frecuencia. Conocidos éstos se calculan los valores de régimen permanente de las m plantas (p_1, \dots, p_m) que trabajan en baja frecuencia según:

$$r_{1,\dots,m|rp} = \frac{1}{mp_{1_o}(0)} \left[y_{rp} - \sum_{i=m+1}^n u_{i,rp} p_{i_o}(0) \right]. \quad (7.5)$$

Debe tenerse en cuenta que en el momento en el que el sistema comienza a trabajar, la incertidumbre y las perturbaciones producirán que las señales $u_{1,\dots,m}$, se desplacen de su valor teórico $r_{1,\dots,m|rp}$, ya que éste representa únicamente un punto de partida aproximado.

7.2 MODIFICACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE CONTROL PARALELO

Se presenta una nueva arquitectura de control paralelo. Como se demuestra en secciones posteriores, esta nueva estructura mantiene intacta la filosofía de diseño empleada hasta ahora. Por tanto, los controladores de realimentación se diseñan siguiendo los procedimientos expuestos en el [Capítulo 4](#) y [Capítulo 6](#). Todas las modificaciones incorporadas tienen como único objetivo una gestión adecuada del punto de operación, es decir, permiten al operador de planta ajustar el mismo sin riesgo de degradar el *performancce* de la variable controlada.

La estructura de control del [Capítulo 4](#) se modifica según la [Figura 7.3](#), que se corresponde con un caso particular de la estructura [Figura 2.8](#) propuesta en la [Sección 2.3](#).

En este caso, las señales r_{u_i} se corresponden con las referencias para las acciones de control en régimen estacionario, es decir, con el punto de operación deseado. De la sección anterior ya se conoce que únicamente

⁶ Conocidos comúnmente como *bias*

⁷ Véanse la [Sección 4.2](#) y la [Sección 6.3](#).

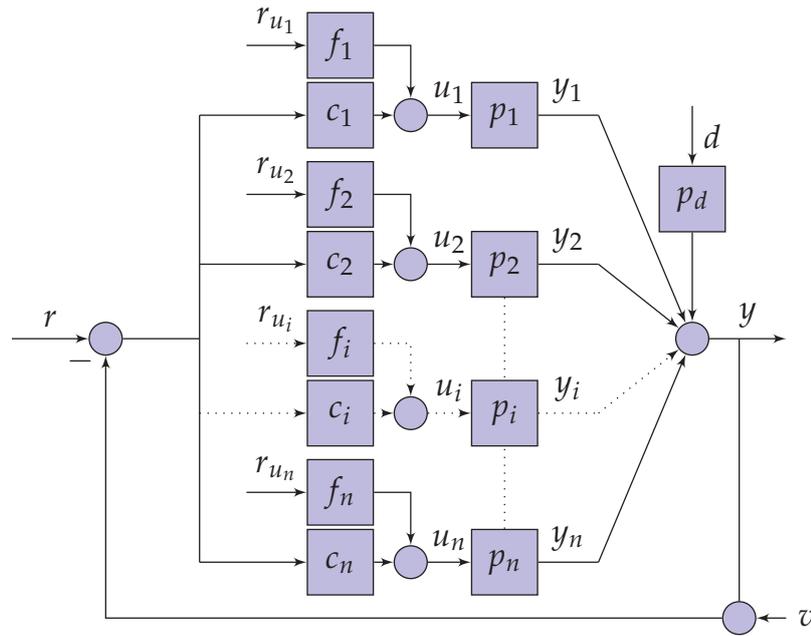


Figura 7.3: Estructura de control paralelo con gestión del punto de operación.

las señales u_i de las plantas que no trabajan en baja frecuencia cumplirán $u_{i,rp} = r_{u_i,rp}$. Para las plantas que trabajan en baja frecuencia las señales r_{u_i} actuarán como *bias* o punto de partida. Los bloques f_i corresponden con controladores de prealimentación empleados para mejorar el comportamiento del sistema ante una eventual modificación del punto de operación⁸. Su diseño se discute en la [Sección 7.3](#). La estructura de control propuesta coincide con la empleada en capítulos anteriores ([Figura 4.1](#)) si se fija el punto de operación $r_{u_i} = 0$.

De acuerdo a la estructura de control de la [Figura 7.3](#), las funciones de lazo cerrado que determinan el comportamiento del sistema son:

$$y = \frac{l_t}{1+l_t}(r-v) - \frac{p_d}{1+l_t}d + \sum_{i=1}^n \frac{p_i f_i}{1+l_t} r_{u_i}, \quad (7.6)$$

$$y_i = \frac{l_i}{1+l_t}(r-v-p_d d) + \frac{(1+l_t-l_i)p_i f_i}{1+l_t} r_{u_i} - \sum_{k \neq i} \frac{p_k l_i f_k}{1+l_t} r_{u_k}, \quad (7.7)$$

$$u_i = \frac{c_i}{1+l_t}(r-v-p_d d) + \frac{(1+l_t-l_i)f_i}{1+l_t} r_{u_i} - \sum_{k \neq i} \frac{p_k c_i f_k}{1+l_t} r_{u_k}; \quad (7.8)$$

⁸ Téngase en cuenta que en la mayor parte de los sistemas reales no es habitual la modificación del punto de operación. Se trata de sistemas reguladores no de *trackers*.

donde l_i y l_t corresponden con las funciones de transferencia de rama y lazo abierto total, respectivamente, estudiadas en capítulos anteriores.

Considérese que los controladores $c_i(j\omega)$ se encuentran ya diseñados mediante el empleo de las técnicas presentadas en el [Capítulo 4](#) y [Capítulo 6](#). Supóngase para un primer análisis de la estructura de control, que el diseño se ha realizado para que sólo la planta $p_1(j\omega)$ trabaje en baja frecuencia. Es decir, su rama presenta una magnitud notablemente superior al resto en la frecuencia $\omega = 0$. Bajo dicha suposición, puede aproximarse, en baja frecuencia, $l_t(j\omega)$ por $l_1(j\omega)$, cumpliendo

$$|l_t(j0)| \approx |l_1(j0)| \gg |l_{i \neq 1}(j0)|. \quad (7.9)$$

En régimen permanente⁹ la variable gobernada cumple

$$y_{rp} = \frac{l_t(0)}{1 + l_t(0)}(r_{rp} - v_{rp}) - \frac{p_d(0)}{1 + l_t(0)}d_{rp} + \sum_{i=1}^n \frac{p_i(0)f_i(0)}{1 + l_t(0)}r_{u_{i,rp}}. \quad (7.10)$$

Conocido que en baja frecuencia la especificación de rechazo robusto de perturbaciones exige que $|l_t(j0)| \approx |l_1(j0)| \gg 1$ y $|l_t(j0)| \gg |p_d(j0)|$, puede simplificarse la expresión anterior por

$$y_{rp} = \frac{l_t(0)}{l_t(0)}(r_{rp} - v_{rp}) - \frac{p_d(0)}{l_t(0)}d_{rp} + \sum_{i=1}^n \frac{p_i(0)f_i(j0)}{l_t(0)}r_{u_{i,rp}}, \quad (7.11)$$

y si se tiene en cuenta que los controladores de prealimentación $f_i(j\omega)$ presentan un valor¹⁰ $|f_i(j0)| = 1$ y que el controlador $c_1(j\omega)$ presenta una magnitud en $\omega = 0$ mucho mayor que la de la planta $p_d(j\omega)$ (porque posee al menos un integrador), finalmente se obtiene

$$y_{rp} = r_{rp} - v_{rp} \approx r_{rp}. \quad (7.12)$$

Es decir, las modificaciones en la estructura de control no afectan en régimen permanente a la variable controlada, ya que la relación entre la salida y las señales r_{u_i} es nula en baja frecuencia. Pese a ello, hay que tener en cuenta que los cambios en las señales r_{u_i} producirán distorsiones transitorias en la variable objeto de control. Como se muestra en la

⁹ Como se indicó en la sección anterior, el sub-índice "rp" indica valores estacionarios de las variables temporales, y el paréntesis "(0)" indica la ganancia estática de la función de transferencia.

¹⁰ Esta afirmación se justificará en la [Sección 7.3](#), en la que se determina el procedimiento de diseño de los filtros f_i .

Sección 7.3, la distorsión en $y(t)$ puede ser atenuada mediante un empleo adecuado de los los controladores de prealimentación $f_i(j\omega)$. Por otro lado, el comportamiento dinámico de la salida ante perturbaciones y ruidos, coincide con el obtenido para la estructura de la **Figura 4.1**, ya que la variable gobernada se relaciona con las señales d y v con la misma función de transferencia de lazo cerrado. Por lo tanto, las estrategias de control presentadas en capítulos anteriores son válidas para esta nueva estructura de control.

Conocido el comportamiento estacionario de la variable gobernada $y_{rp} = y(t = \infty)$, analícese el de las acciones de control. Se tiene

$$u_{i,rp} = \frac{l_i(0)/p_i(0)}{1+l_t(0)}(r_{rp} - v_{rp} - p_d(0)d_{rp}) + \frac{1+l_t(0)-l_i(0)}{1+l_t(0)}r_{u_{i,rp}} - \sum_{k \neq i} \frac{p_k(0)l_i(0)/p_i(0)}{1+l_t(0)}r_{u_{k,rp}}. \quad (7.13)$$

Si se emplean las mismas simplificaciones que en el caso anterior, la acción de control de las plantas que no trabajan en baja frecuencia, $u_{i \neq 1,rp}$, puede aproximarse por

$$u_{i,rp} = r_{u_{i,rp}} \quad \forall i \neq 1. \quad (7.14)$$

La acción de control que ataca a la planta p_1 , que trabaja en baja frecuencia, puede aproximarse por

$$u_{1,rp} = \frac{1}{p_1(0)}(r_{rp} - v_{rp} - p_d(0)d_{rp}) - \sum_{k \neq 1} \frac{p_k(0)}{p_1(0)}r_{u_{k,rp}}. \quad (7.15)$$

Por tanto, todas las acciones de control, excepto $u_{1,rp}$, siguen en régimen permanente a sus respectivas referencias r_{u_i} . Es decir, el empleo de la nueva arquitectura de control, junto con los controladores diseñados según la metodología MISO QFT permite establecer de forma inequívoca el punto de operación del sistema.

La conclusión anterior ha sido obtenida para un sistema MISO en el que únicamente una planta trabaja en baja frecuencia, pero puede extenderse a sistemas MISO en los que varias plantas comparten el esfuerzo de control en régimen permanente. Cuando en lugar de una única planta se dispone de un conjunto de m plantas $p_{1,\dots,m}(j\omega)$ que trabajan en

baja frecuencia¹¹, las acciones de control en régimen permanente están determinadas por

$$u_{i, \text{rp}} = r_{u_{i, \text{rp}}}, \quad \forall i \notin (1, \dots, m); \quad (7.16)$$

para las plantas que no trabajan en baja frecuencia, y por

$$u_{i, \text{rp}} = \frac{1}{mp_i(0)}(r_{\text{rp}} - v_{\text{rp}} - p_d(0)d_{\text{rp}}) + \frac{(m-1)}{m}r_{u_{i, \text{rp}}} - \sum_{k \neq i} \frac{p_k(0)}{mp_i(0)}r_{u_{k, \text{rp}}}, \quad \forall i \in (1, \dots, m); \quad (7.17)$$

para las plantas que trabajan en baja frecuencia. En este segundo caso el comportamiento es idéntico al obtenido cuando una única planta trabaja en baja frecuencia. La única diferencia radica en que todas las plantas que trabajan en baja frecuencia presentarán distorsiones entre $u_{i, \text{rp}}$ y $r_{u_{i, \text{rp}}}$, para $i \in (1, \dots, m)$; ya que el punto de operación debe ser garantizado mediante la acción de control aportada por cada una de ellas.

Téngase en cuenta que los modelos de planta presentan incertidumbre paramétrica. Por lo tanto, para obtener una aproximación del valor de las acciones de control en régimen permanente $u_{i, \text{rp}}$ para $i \in (1, \dots, m)$, deberá substituirse en la ecuación (7.17) las plantas por sus correspondientes valores nominales.

A continuación, se muestra un ejemplo que valida las conclusiones anteriores. Considérese el control del intercambiador de calor mostrado en la [Subsección 4.4.2](#). Si se emplean los controladores (4.25) y (4.26), el conjunto en lazo cerrado presenta un rechazo de perturbaciones tal que la planta $p_1(j\omega)$ trabaja en baja frecuencia y $p_2(j\omega)$ en alta frecuencia. Si se substituye la estructura de control por la de la [Figura 7.3](#), con $n = 2$ y se emplea un prefiltro $f_2(j\omega) = 1$ puede controlarse el valor de régimen permanente de la acción de control u_2 , inyectando señales a través de la entrada r_{u_2} .

La [Figura 7.4](#) muestra la respuesta obtenida si se inyecta una señal escalón unitario a través de la entrada r_{u_2} en el instante de tiempo $t = 1 \text{ min}$. En ella puede comprobarse como en régimen permanente la señal u_2 converge a su valor de referencia $u_2(t = \infty) = r_{u_2}$. Véase como para mantener el nuevo punto de equilibrio, la acción de control

¹¹ Se considera que la colaboración es perfecta. Es decir, todas las ramas que trabajan en baja frecuencia presentan exactamente la misma magnitud $|l_1(j0)| = |l_2(j0)| = \dots = |l_m(j0)|$.

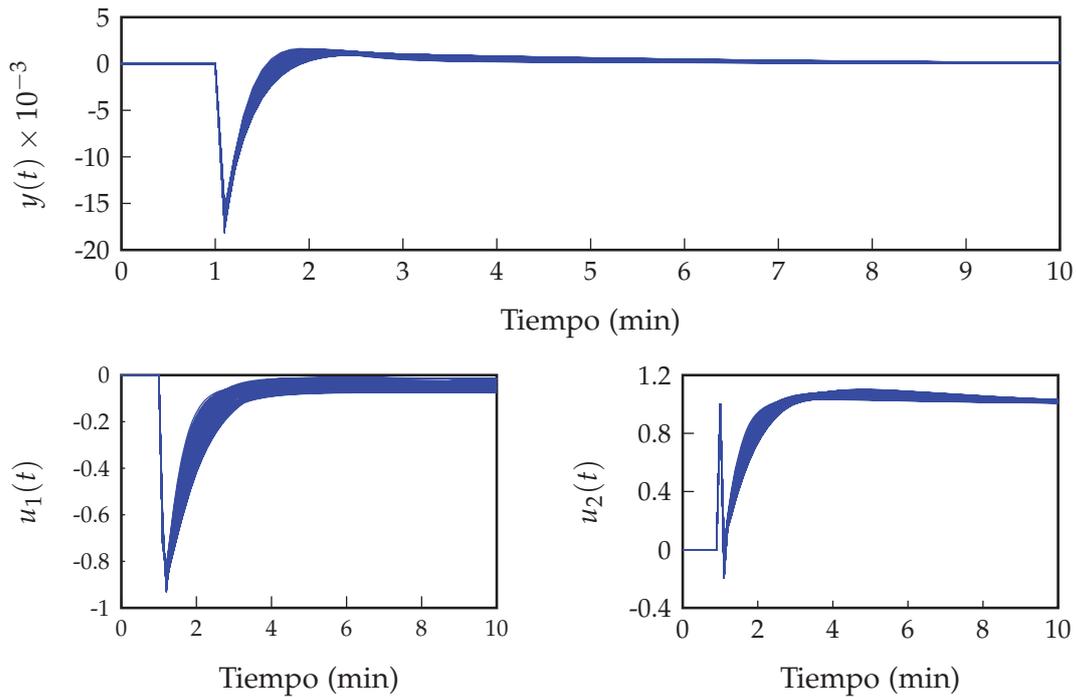


Figura 7.4: Seguimiento de la referencia r_{u_2} para el ejemplo de la [Subsección 4.4.2](#).

u_1 ha debido modificar su valor en régimen permanente. Esta segunda señal no converge a un valor concreto, ya que la incertidumbre en la ganancia de $p_2(j\omega)$ produce que existan tantas combinaciones $u_{1,rp} - u_{2,rp}$ como casos existentes dentro del espacio de la incertidumbre.

El comportamiento obtenido coincide con el esperado y permite validar las conclusiones alcanzadas anteriormente. No obstante, aunque la acción de control ha seguido a la referencia en régimen permanente, lo ha hecho siguiendo un comportamiento dinámico no controlado, puesto que no se establecen condiciones de diseño sobre este. Algunas premisas sobre como efectuar un diseño de los controladores de prealimentación $f_i(j\omega)$ para mejorar este comportamiento se presentan en la [Sección 7.3](#).

Otro de los aspectos destacables es el efecto que tiene el cambio de la referencia r_{u_2} en la variable controlada. Puede comprobarse como la manipulación de la acción de control produce una desviación transitoria de la misma. No obstante, esta retorna a su valor de consigna en régimen permanente. La desviación producida es fruto del comportamiento dinámico de la planta $p_2(j\omega)$, del valor del prefiltro $f_2(j\omega)$ y de las especificaciones de rechazo de perturbaciones de lazo cerrado.

7.3 DISEÑO DE CONTROLADORES DE PREALIMENTACIÓN

A continuación, se muestra el efecto de los prefiltros $f_i(j\omega)$ en la respuesta transitoria del sistema, presentándose algunas pautas para su diseño. El estudio puede encaminarse a la resolución de dos problemas completamente diferentes. Por un lado, la acotación de la distorsión que produce un cambio en r_{u_i} sobre la variable controlada y . Por otro lado, la mejora del comportamiento dinámico u_i en el seguimiento de su referencia r_{u_i} . En la [Subsección 7.3.1](#) se presenta un estudio cuantitativo del comportamiento y/r_{u_i} , que permite diseñar, bajo ciertas premisas, controladores de prealimentación f_i robustos. En la [Subsección 7.3.2](#) se presentan algunos problemas referentes al comportamiento dinámico de las respuestas de seguimiento u_i/r_{u_i} cuando no se emplean controladores de prealimentación ($f_i = 1$). Para su paliación se muestran algunas alternativas sencillas de diseño de f_i . Por último, en la [Subsección 7.3.3](#) se presenta una comparativa entre el empleo de controladores de prealimentación f_i lineales, y el empleo de generadores de referencias r_{u_i} en modo rampa siendo $f_i = 1$. Se muestra la equivalencia entre los dos sistemas y se ilustra como diseñar el generador de referencias para que trabaje de forma adecuada.

7.3.1 *Desviación en la variable controlada*

Como se ha indicado en secciones anteriores, los cambios en las referencias r_{u_i} producen distorsiones sobre la variable controlada y . A continuación, se presenta una estrategia de diseño de controladores de prealimentación $f_i(j\omega)$ robustos, cuyo objetivo es que la variable controlada y presente una distorsión inferior a la de un modelo de comportamiento deseado, cuando se producen cambios en las referencias r_{u_i} . La respuesta de la variable controlada es

$$y(j\omega) = \frac{p_i(j\omega)f_i(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} r_{u_i}(j\omega). \quad (7.18)$$

Dado que los controladores de realimentación $c_i(j\omega)$ son fijados para cumplir con el objetivo de rechazo de perturbaciones no medibles, la función de rama total y el comportamiento determinado por (7.18) sólo depende del prefiltro $f_i(j\omega)$. Si se considera el mismo unitario, la función de transferencia y/r_{u_i} se corresponde con una de rechazo de perturbaciones, con la diferencia de que $p_d(j\omega)$ es substituida por $p_i(j\omega)$.

Por tanto, si se desea que el pico $|y(j\omega)/r_{u_i}(j\omega)|$ no supere una cota específica $W_{u_i}(\omega)$ se recomienda contemplar n especificaciones de rechazo de perturbaciones adicionales

$$\left| \frac{y(j\omega)}{r_{u_i}(j\omega)} \right| = \left| \frac{p_i(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_{u_i}(\omega); \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (7.19)$$

En este caso, los controladores podrán necesitar una cantidad de realimentación mayor que si sólo consideramos $|y(j\omega)/d(j\omega)| \leq W_d(\omega)$, en función de cual sea la especificación robusta más restrictiva. Si $W_{u_i}(\omega) = W_d(\omega)$, esto ocurre para

$$|p_i(j\omega, \mathbf{q})|_{\text{máx}} > |p_d(j\omega, \mathbf{q})|_{\text{máx}}. \quad (7.20)$$

Esta solución, a pesar de ser funcional, no es la idónea desde los postulados de la realimentación cuantitativa. Ésta defiende derivar a la prealimentación aquello que es conocido en el problema de control (como lo es r_{u_i}). De este modo se reduce la cantidad de realimentación, que corrige lo desconocido, y por tanto, se reduce también el coste de la realimentación. Desde esta perspectiva, se plantea el diseño robusto de los prefiltros $f_i(j\omega)$. Supóngase que la tolerancia de desviación para la variable controlada es la misma para perturbaciones que para cambios del punto de operación. Entonces,

$$\left| \frac{p_i(j\omega)f_i(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_d(\omega); \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (7.21)$$

y será necesario el empleo de un prefiltro $f_i(j\omega)$ siempre que se cumple la condición (7.20). En caso de emplear en la inecuación (7.21) una cota $W_{u_i}(\omega)$ diferente a $W_d(\omega)$, será necesario el empleo del prefiltro si se cumple la relación

$$|p_i(j\omega, \mathbf{q})|_{\text{máx}} W_d(\omega) > |p_d(j\omega, \mathbf{q})|_{\text{máx}} W_{u_i}(\omega). \quad (7.22)$$

En el caso de ser necesario el empleo de un prefiltro, éste debe ser diseñado una vez conocidos los controladores de realimentación. Es decir, será necesaria una tercera etapa de diseño. La inecuación (7.21), generalizada para una cota $W_{u_i}(\omega)$, puede ser reescrita según

$$\left| \frac{p_i(j\omega)f_i(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| = |f_i(j\omega)| \left| \frac{p_i(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_{u_i}(\omega); \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (7.23)$$

dando lugar a

$$|f_i(j\omega)| \leq \left| \frac{W_{u_i}(\omega)(1 + l_t(j\omega))}{p_i(j\omega)} \right|; \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}; \quad (7.24)$$

que únicamente acota el módulo máximo de $f_i(j\omega)$. Por lo tanto, los controladores de prealimentación $f_i(j\omega)$ pueden ser diseñados empleando diagramas de Bode, tal como se hace en el diseño del prefiltro en el *tracking* SISO. La diferencia principal es que en el problema que nos ocupa únicamente debe satisfacerse una cota superior.

Pese a ser una inecuación sencilla, hay que destacar que la *Terasoft QFT Toolbox* [12] no presenta una instrucción que permita el diseño interactivo CAD de controladores para la inecuación (7.24). Únicamente se facilita la instrucción *pfshape*, pensada exclusivamente para su empleo en el problema de *tracking* SISO. No obstante, una pequeña modificación de la misma permite el diseño para la inecuación (7.24).

La inecuación de diseño (7.24) sólo evalúa el comportamiento de la salida y frente a cambios en una de las referencias r_{u_i} . Por otro lado, la Sección 7.2 estudiaba el régimen de equilibrio del conjunto de variables considerando $f_i(0) = 1$. Por tanto, todos los $f_i(j\omega)$ deben cumplir $|f_i(j0)| = 1$. Por el contrario, si se satisface (7.24) con $|f_i(j0)| \neq 1$ el sistema cumplirá el comportamiento estacionario deseado para y/r_{u_i} pero no para u_i/r_{u_i} . Esta limitación ($|f_i(j0)| = 1$) restringe enormemente los casos en los que puede aplicarse la estrategia de diseño propuesta, ya que sólo puede garantizarse si

$$|p_i(j0, \mathbf{q})|_{\max} W_d(0) < |p_d(j0, \mathbf{q})|_{\max} W_{u_i}(0). \quad (7.25)$$

A continuación, se muestra un ejemplo en el que se ilustran las deficiencias de la propuesta anterior. Considérese el sistema de tres plantas en la Subsección 4.4.3, que emplea los controladores (4.29), (4.30) y (4.31). La planta $p_1(j\omega)$ es la única que trabaja en baja frecuencia. Por tanto, si empleamos la nueva estructura de la Sección 7.3 con $i = 3$ las únicas referencias susceptibles de cambio¹² son para las acciones de control $u_{i=2,3}$.

Para el estudio actual se establecen dos posibles cotas de diseño

$$W_{u_a}(\omega) = \left| \frac{10(j\omega + 0.01)}{(j\omega + 10)(j\omega + 1)} \right|, \quad (7.26)$$

¹² La de la planta p_1 es meramente un bias

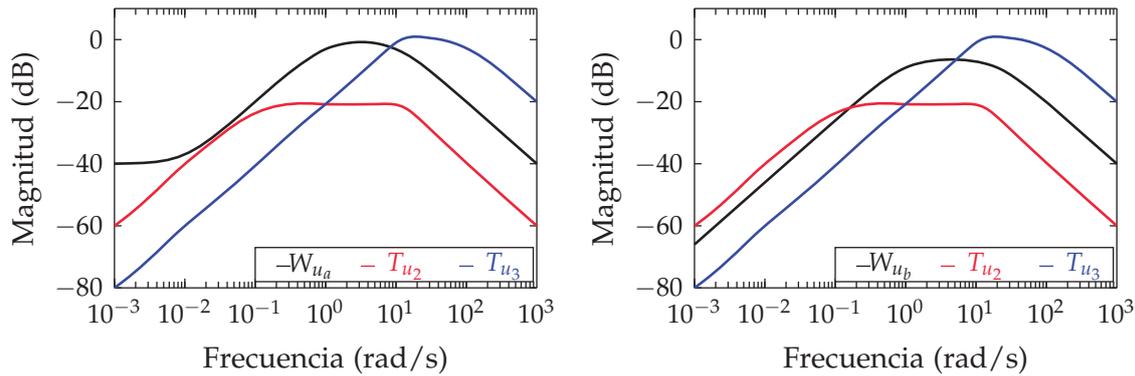


Figura 7.5: Situación de partida para el diseño de $f_i(j\omega)$. Cota W_{u_a} (izq.), cota W_{u_b} (dcha.).

y

$$W_{u_b}(\omega) = \left| \frac{10j\omega}{(j\omega + 20)(j\omega + 1)} \right|. \quad (7.27)$$

Ambas se dibujan en los diagramas de Bode izquierdo y derecho, respectivamente, de la Figura 7.5, siendo W_{u_a} menos restrictiva que W_{u_b} . Para $p_2(j\omega)$ se dibuja $|T_{u_2}(j\omega)| = |y(j\omega)/u_2(j\omega)|$ y para $p_3(j\omega)$ se dibuja $|T_{u_3}(j\omega)| = |y(j\omega)/u_3(j\omega)|$, siendo inicialmente $f_i(j\omega) = 1$. Se pretende cumplir la inecuación (7.23) para $i = 2, 3$. Cuando se emplea W_{u_a} , $|T_{u_2}|$ la satisface para todas las frecuencias empleando $f_2(j\omega) = 1$. Y $|T_{u_3}|$ con $f_3(j\omega) = 1$ sólo incumple W_{u_a} en alta frecuencia, siendo factible un rediseño adecuado de $f_3(j\omega)$ para satisfacerla manteniendo $|f_3(j0) = 1|$. Esta misma situación para el lazo 3 se presenta si empleamos W_{u_b} . Pero el lazo 2 es diferente. Como en éste, $|T_{u_2}|$ viola W_{u_b} en baja frecuencia no es posible un rediseño de $f_2(j\omega)$ que además cumpla $|f_2(j0) = 1|$.

Por tanto, con el fin de cumplir con el estacionario previsto, se puede plantear el caso de o bien relajar la especificación W_{u_i} (p.e. usar W_{u_a} en vez de W_{u_b}) o violar la misma en baja frecuencia (caso de usar W_{u_b}). Téngase en cuenta que una violación de la especificación en baja frecuencia no produce efectos notorios en las respuestas temporales, dada la no correspondencia entre tiempo y frecuencia.

Incluso cuando existe solución al diseño del prefiltro (p.e. rediseño de $f_3(j\omega)$ para que $|T_{u_3}|$ satisfaga W_{u_a} manteniendo $|f_3(j0) = 1|$), el diseño de éste no es trivial. El hecho de que la inecuación sólo presente cota superior¹³ puede producir dudas sobre como llevar a cabo el diseño

¹³ Nótese la diferencia con un *tracking* SISO donde la presencia de cotas superior e inferior guía el diseño

del prefiltro $f_i(j\omega)$. Es obvio que una menor ganancia en el prefiltro produce una menor distorsión en la variable controlada. Para lograr esta disminución de la ganancia, el diseñador puede aportar polos en baja frecuencia. Pero este comportamiento tiene un precio, que no es otro que la dilatación del tiempo necesario para que u_i alcance la consigna r_{u_i} . Recuérdese que la relación entre la acción de control y su referencia está determinada por

$$\frac{u_i(j\omega)}{r_{u_i}(j\omega)} = \frac{(1 + l_t(j\omega) - l_i(j\omega))f_i(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)}, \quad (7.28)$$

y las dinámicas de $f_i(j\omega)$ tienen un impacto directo en el seguimiento de la referencia. Por lo tanto, deberán evitarse los polos/ceros situados en frecuencias bajas si no es como requisito explícito de la especificación de diseño, ya que estos incrementan el tiempo de establecimiento de la respuesta u_i/r_{u_i} .

Para ilustrar este fenómeno se propone el estudio de tres alternativas (a, b, c) para el prefiltro $f_3(j\omega)$. Los tres controladores propuestos son

$$f_{3a}(s) = \frac{1}{s/8 + 1}, \quad f_{3b}(s) = \frac{1}{s/0.8 + 1}, \quad f_{3c}(s) = \frac{1}{s/0.08 + 1}. \quad (7.29)$$

Como se aprecia en la [Figura 7.6](#), los tres prefiltros dan lugar a tres respuestas de lazo cerrado $T_{3_{a,b,c}}$ que cumplen con la cota superior W_{u_a} .

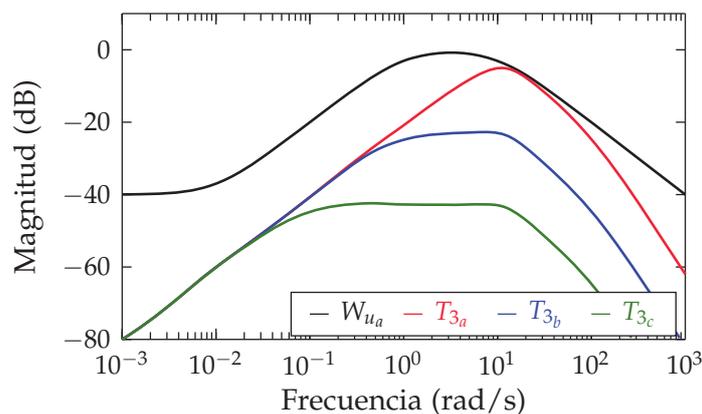


Figura 7.6: Ejemplo de diseño de prefiltros.

En la [Figura 7.7](#) pueden compararse las respuestas temporales cuando se aplica en la referencia r_{u_3} una consigna de tipo escalón unitario en el instante de tiempo $t = 0.5s$. En la gráfica superior se observa el comportamiento dinámico de la salida. Los tres controladores dan lugar a respuestas situadas en la región admisible (sombreada en color gris).

Como era de esperar, el impacto que produce el cambio de la referencia r_{u_3} en la salida y , es inferior para el prefiltro $f_{3_c}(j\omega)$. Sin embargo, un aspecto interesante de las respuestas mostradas en la [Figura 7.7](#), es que, en contra de lo deseado, las respuestas y obtenidas con los prefiltros $f_{3_{b,c}}(j\omega)$ convergen al valor de régimen permanente ($y_{rp} = 0$) en un tiempo mayor que el obtenido para $f_{3_a}(j\omega)$. Esto es debido a que los prefiltros $f_{3_{b,c}}(j\omega)$ contienen dinámicas más lentas que las de $f_{3_a}(j\omega)$, haciendo que el comportamiento determinado por (7.28) sea más lento. En consecuencia, $u_3(t)$ tarda más en alcanzar su valor de régimen permanente, y por lo tanto, $y(t)$ también. En la parte inferior de la [Figura 7.7](#) queda reflejado el comportamiento descrito. En ella puede comprobarse como la acción de control u_3 converge a su valor de régimen permanente más rápido cuando se emplea $f_{3_a}(j\omega)$, permitiendo que se establezcan el resto de señales. Por el contrario, mediante el empleo del prefiltro $f_{3_c}(j\omega)$ el tiempo de establecimiento para u_3 se dilata hasta los 50 segundos, produciendo que $y(t)$ tarde más tiempo en alcanzar su valor de régimen permanente. A pesar de incrementarse el tiempo en que la salida alcanza el equilibrio final hay que destacar que la distorsión en $y(t)$ cuando se emplea esta opción es muy reducida.

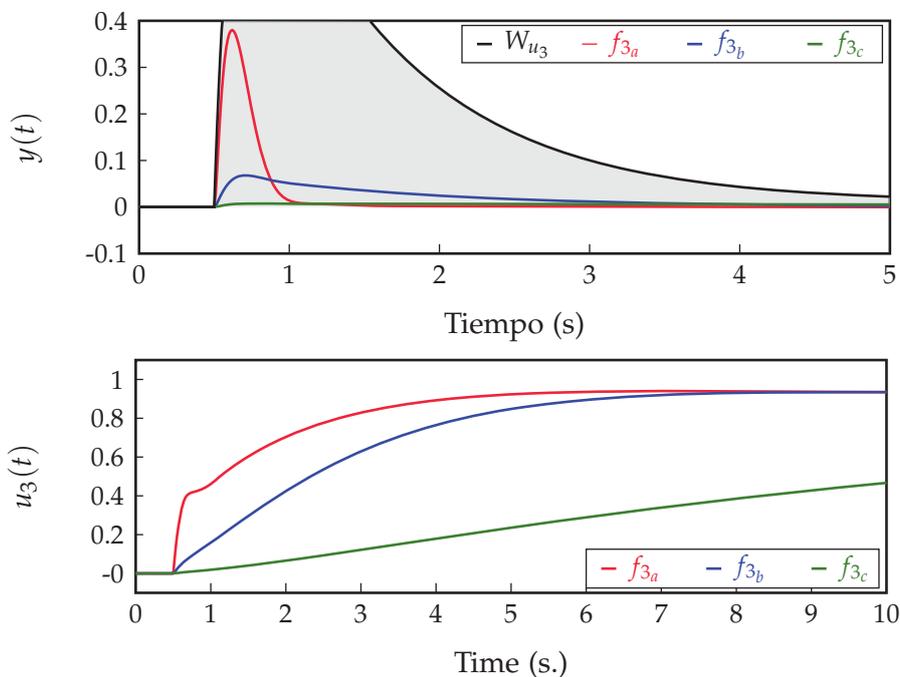


Figura 7.7: Respuestas temporales obtenidas con los prefiltros $f_{3_{a,b,c}}$.

En conclusión, debe prestarse especial atención al diseño de los prefiltros, ya que éstos pueden producir comportamientos inadecuados si no se tienen en cuenta los aspectos anteriores.

7.3.2 Seguimiento de la consigna

En la sección anterior se ha analizado el diseño de prefiltros $f_i(j\omega)$ cuando la especificación de diseño y/r_{u_i} los demanda. A continuación, se analiza como proceder cuando la especificación de diseño y/r_{u_i} se satisface con un controlador de prealimentación unitario $f_i(j\omega) = 1$. Véase como esta hipótesis coincide con la situación mostrada en la [Figura 7.5](#) (izq.). En ella puede observarse como la respuesta frecuencial $y(j\omega)/r_{u_2}(j\omega)$ se encuentra por debajo de la cota $W_u(\omega)$ cuando se emplea un prefiltro unitario $f_2(j\omega) = 1$.

Cuando la especificación de diseño es satisfecha por un prefiltro unitario, éste puede emplearse para mejorar el comportamiento dinámico en el seguimiento de la referencia r_{u_i} . Es decir, la respuesta obtenida cuando se producen cambios en la referencia de la acción de control. Cuando se emplea un prefiltro unitario, el sistema responde presentando un cambio inmediato en u_i cuando se establece una nueva referencia r_{u_i} . En un sistema real, esta variación brusca de la acción de control puede ser perjudicial para los actuadores del sistema. Una vez que la acción de control alcanza el valor de consigna, el sistema reacciona como si de una perturbación se tratase hasta alcanzar el nuevo punto de equilibrio. Este fenómeno es debido a que en alta frecuencia se cumple $l_t(j\infty) = 0$, y por lo tanto la respuesta (7.28) cumple

$$\frac{u_i(j\infty)}{r_{u_i}(j\infty)} = \frac{(1 + l_t(j\infty) - l_i(j\infty))}{1 + l_t(j\infty)} = 1. \quad (7.30)$$

La [Figura 7.8](#) muestra las respuestas de las acciones de control $u_{2,3}$, si se aplica en las referencias r_{u_i} un escalón unitario en $t = 0.5$ s. En las dos respuestas puede observarse el cambio brusco descrito anteriormente. Es evidente que carece de sentido forzar al actuador para que soporte el comportamiento anterior. Imagínese una servoválvula de gran tamaño que es abierta para inmediatamente ser cerrada. Como se observa en la [Figura 7.8](#), el efecto adverso es más pronunciado en las acciones de control de las plantas que trabajan en media frecuencia. En estas plantas se observa que la acción de control retorna al valor previo a la excitación y evoluciona lentamente hasta el valor de consigna. Si se evalúa la

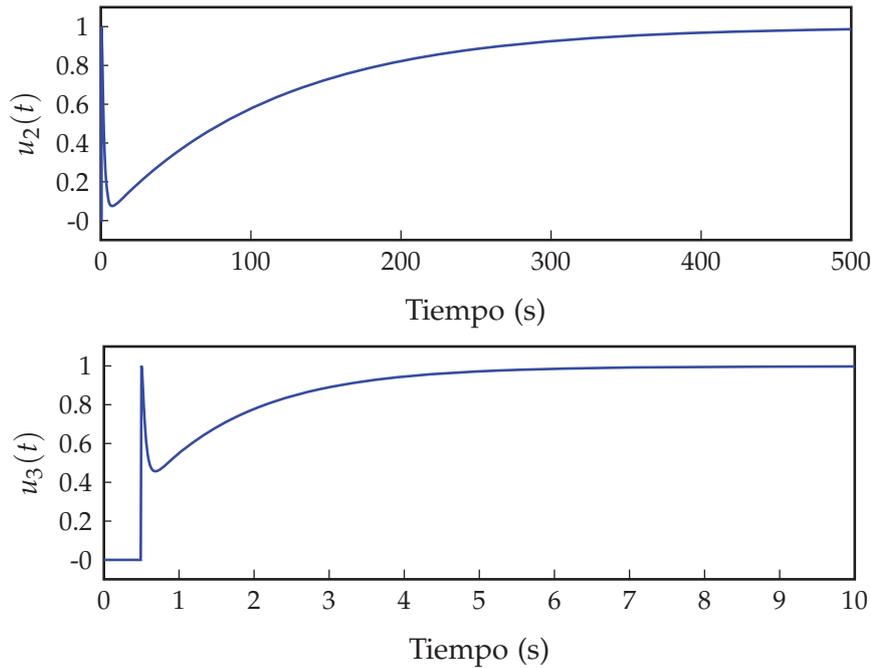


Figura 7.8: Respuestas temporales obtenidas empleando prefiltros unitarios.

ecuación (7.28) puede comprobarse como el diagrama de bode de magnitud corresponde con el de un filtro elimina banda (ver Figura 7.9), en el que la banda de frecuencias rechazadas coincide con la banda de trabajo de la planta $p_i(j\omega)$. Por lo tanto, cuando las plantas trabajan en medias-bajas frecuencias (p_2 en el ejemplo de estudio), las bandas eliminadas se encuentran en frecuencias inferiores, dando lugar a un tiempo de respuesta más lento.

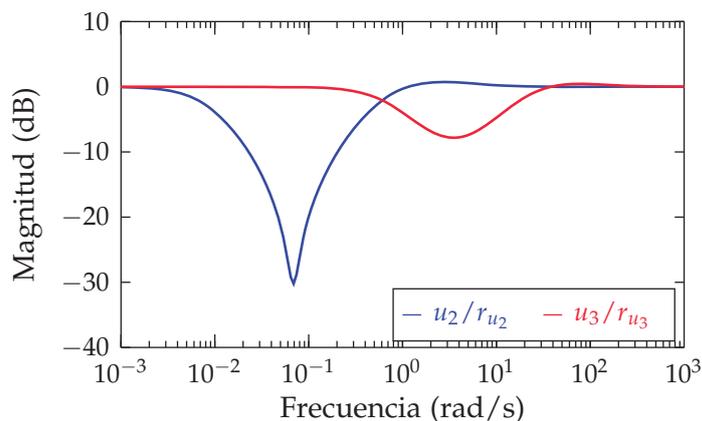


Figura 7.9: Respuestas frecuenciales u_i/r_{u_i} si se emplean prefiltros unitarios.

Desde un punto de vista práctico, si se desean eliminar los rebotes¹⁴ en la respuesta $u_i(t)$, bastará con aplicar un filtro pasa bajos a partir del pico inferior de la magnitud de la respuesta frecuencial. De este modo se eliminan las componentes de alta frecuencia que producen el cambio inmediato de la acción de control.

De forma aproximada, el pico inferior de la respuesta frecuencial corresponde con la frecuencia media de la banda de trabajo. Véase como ejemplo la [Tabla 4.3](#), que determina las frecuencias de trabajo de las plantas del ejemplo actual. En ella se observan las bandas de trabajo para cada una de las plantas. De la misma se puede obtener el valor medio en escala logarítmica, siendo:

- Planta $p_2(j\omega)$: $[0.01, 1] = 10^{[-2, 0]}$. Media $10^{-1} = 0.1$
- Planta $p_3(j\omega)$: $[0.5, 100] = 10^{[-0.3, 2]}$. Media $10^{0.85} \approx 7$

Véase como estos valores se aproximan a las frecuencias de pico mostradas en la [Figura 7.9](#).

Siguiendo este criterio, el prefiltro para la referencia de la acción de control u_2 , que en principio podía ser unitario, debe ser modificado por un filtro pasa bajos con frecuencia de corte $\omega = 0.1$. Se propone el empleo de dos controladores

$$f_{2_a}(s) = \frac{1}{(s/0.1 + 1)}, \quad f_{2_b}(s) = \frac{1}{(s/0.1 + 1)^2}; \quad (7.31)$$

cuya única diferencia radica en el número de polos. Si se emplean estos prefiltros se obtienen las respuestas mostradas en la [Figura 7.10](#). En ella se muestra el comportamiento de la acción de control $u_2(t)$ cuando se emplean los prefiltros anteriores y se comparan con el comportamiento obtenido con un prefiltro unitario¹⁵. En la [Figura 7.10](#) puede comprobarse como los dos controladores de prealimentación evitan el cambio brusco inicial en la acción de control. Del mismo modo, se aprecia que el controlador f_{2_a} produce un pequeño incremento, seguido de un decremento en los instantes iniciales. Esto es debido a que el filtro empleado es poco selectivo y permite el paso de un mayor rango de frecuencias. En la [Figura 7.11](#) se muestran los diagramas de bode de magnitud obtenidos con los tres posibles prefiltros (unitario, f_{2_a} y f_{2_b}). En ella puede

¹⁴ Se considera un comportamiento sin rebotes aquel que no alcanza el valor final en el instante inicial. No confundir con respuestas subamortiguadas.

¹⁵ La figura situada en la parte inferior representa la respuesta inicial de forma ampliada.

comprobarse que se mantiene inalterado el comportamiento en baja frecuencia, pero se eliminan las componentes indeseadas de alta frecuencia.

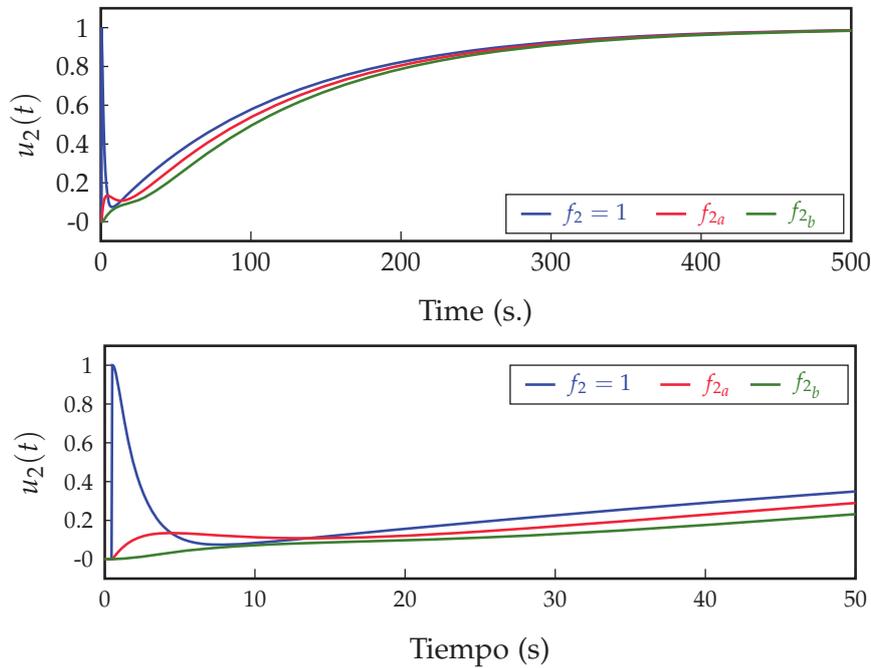


Figura 7.10: Respuesta temporal u_2 , para una referencia de tipo escalón unitario.

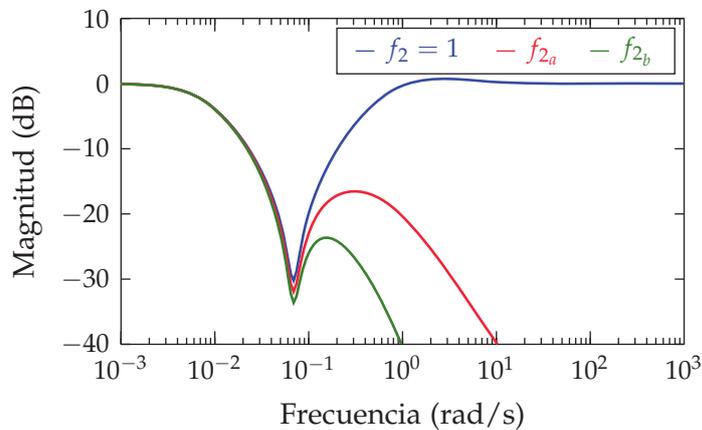


Figura 7.11: Respuestas frecuencial u_2/r_{u_2} para los tres casos de estudio.

Si se desea un comportamiento dinámico más rápido en la evolución de la acción de control $u_2(t)$, no queda otra alternativa que emplear estrategias de diseño de que empleen controladores diseñados para que la magnitud de la respuesta frecuencial de la ecuación (7.28) se mantenga entre dos cotas, tal como se realiza en el *tracking* SISO. Como se ha descrito al inicio del presente capítulo, este tipo de objetivos quedan fue-

ra del alcance del presente trabajo, estableciéndose como objetivos para futuras líneas de investigación.

7.3.3 Referencias en modo rampa

En esta sección, se analizan los generadores de referencias en modo rampa. En estos casos, los cambios en las referencias r_{u_i} para las acciones de control son inyectados empleando rampas, tal como se ilustra en la [Figura 7.12](#). De esta forma, se suaviza el impacto que presentan las variaciones de r_{u_i} sobre la variable controlada y . El objetivo final es substituir el prefiltro f_i (que ahora será unitario) por un generador de referencias adecuado. En principio puede parecer una tarea sencilla, pero como se justificará en la presente sección, la selección de la pendiente de la rampa requiere de un estudio en profundidad del comportamiento del sistema.

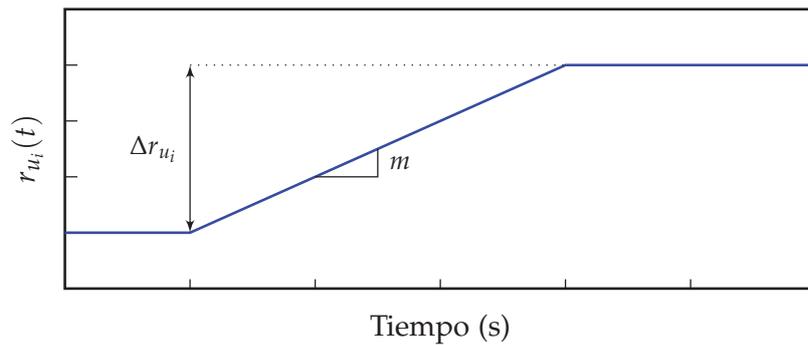


Figura 7.12: Esquema de cambio de referencia en modo rampa.

Para entender mejor el efecto que presenta el empleo de un generador de rampas, puede analizarse su comportamiento en el dominio de la frecuencia. De forma aproximada, emplear un generador de rampas es equivalente a emplear un prefiltro del tipo

$$f(s) = \frac{m}{\Delta r_{u_i}} \frac{(1 - e^{-|\Delta r_{u_i} s|/m})}{s}; \quad (7.32)$$

donde m corresponde con la pendiente de la rampa y Δr_{u_i} con el incremento del punto de operación. Véase como el prefiltro anterior para una acción de control de tipo escalón caracterizada por

$$r_{u_i}(s) = \frac{\Delta r_{u_i}}{s}, \quad (7.33)$$

responde según

$$r_{u_i(s)}f(s) = m\frac{1}{s^2} - m\frac{e^{-|\Delta r_u|s/m}}{s^2}. \quad (7.34)$$

Es decir, presenta dos rampas de igual pendiente y signo contrario retardadas el tiempo necesario para alcanzar el valor deseado. Véase como el tiempo de retraso entre las rampas depende de la pendiente empleada y del valor absoluto de la variación de la referencia.

El prefiltro definido por la ecuación (7.32), depende del incremento de la referencia para la acción de control Δr_{u_i} , y por lo tanto presenta un comportamiento no lineal¹⁶. Además de la variación de la acción de control, el mismo está determinado por el valor deseado para la pendiente de la rampa m . La pregunta principal cuando se efectúa un cambio de referencia en modo rampa no es otra que el valor deseado para la pendiente de la misma. Este valor no es arbitrario y debe seleccionarse de forma adecuada. Si las variaciones en la referencia de la acción de control son inyectadas empleando rampas con poca pendiente, se producirán leves distorsiones en la variable controlada, a costa de incrementar el tiempo de establecimiento del sistema. Por el contrario, pendientes elevadas producirán grandes distorsiones en la variable controlada, a costa de reducir el tiempo de establecimiento del conjunto. A continuación se muestra un estudio del prefiltro definido por (7.32), de forma que se establezca de forma clara cuales son los límites para la pendiente de la rampa m .

Conocida la amplitud del incremento de la referencia Δr_{u_i} y la pendiente del prefiltro m , puede definirse el parámetro ω_c según $\omega_c = m/\Delta r_{u_i}$. Por lo tanto, el prefiltro (7.32) puede ser reescrito según

$$f(s) = \omega_c \frac{(1 - e^{-s/\omega_c})}{s} \quad (7.35)$$

En el dominio de la frecuencia, el filtro equivalente está definido por

$$f(j\omega) = \frac{\omega_c}{j\omega} \left[1 - e^{-j\frac{\omega}{\omega_c}} \right] = \frac{\omega_c}{j\omega} \left[1 - \cos \frac{-\omega}{\omega_c} - j \sin \frac{-\omega}{\omega_c} \right]. \quad (7.36)$$

A continuación, se obtiene el módulo de $f(j\omega)$ para determinar el comportamiento dinámico del mismo. Para obtener el módulo de $f(j\omega)$

¹⁶ Al depender de Δr_{u_i} la función de transferencia del prefiltro cambia en función de la referencia.

se descompone $f(j\omega)$ en su parte real e imaginaria. A continuación, el módulo puede obtenerse como la raíz cuadrada de la suma de cuadrados

$$|f(j\omega)| = \frac{\omega_c}{\omega} \sqrt{1 - 2 \cos \frac{-\omega}{\omega_c} + \cos^2 \frac{-\omega}{\omega_c} + \sin^2 \frac{-\omega}{\omega_c}}. \quad (7.37)$$

Desarrollando la ecuación anterior, el módulo de $f(j\omega)$ puede expresarse según

$$|f(j\omega)| = \frac{\omega_c}{\omega} \sqrt{2 - 2 \cos \frac{-\omega}{\omega_c}} = \frac{\omega_c}{\omega} \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\omega}{\omega_c}}, \quad (7.38)$$

y si se aplica la relación del ángulo mitad, la expresión anterior puede compactarse en

$$|f(j\omega)| = 2 \frac{\omega_c}{\omega} \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\omega}{\omega_c}}{2}} = 2 \frac{\omega_c}{\omega} \sin \frac{\omega}{2\omega_c}. \quad (7.39)$$

Conocido el módulo del prefiltro puede analizarse el comportamiento del mismo en función de la relación ω/ω_c . Analícense los siguientes casos:

- En baja frecuencia $\omega \ll \omega_c$, la relación ω/ω_c presenta un valor próximo a cero. En estos casos puede emplearse la aproximación $\sin(x) \approx x$, dando lugar a

$$|f(j\omega)| = 2 \frac{\omega_c}{\omega} \sin \frac{\omega}{2\omega_c} \approx \frac{\omega_c}{\omega} 2 \frac{\omega}{2\omega_c} = 1. \quad (7.40)$$

Es decir, el filtro equivalente presenta una ganancia unitaria en baja frecuencia. Esta conclusión es lógica, ya que en baja frecuencia (régimen permanente) el valor obtenido en la salida del prefiltro debe ser el mismo que el del escalón aplicado en su entrada.

- En alta frecuencia $\omega \ll \omega_c$, la relación $\sin(\omega/\omega_c)$ oscila entre ± 1 . Si se consideran los valores máximos de la respuesta, puede obtenerse la envolvente de la magnitud a lo largo de la frecuencia. Ésta está determinada por

$$|f(j\omega)| \approx 2 \frac{\omega_c}{\omega}. \quad (7.41)$$

Véase como la magnitud anterior coincide con la que presenta en alta frecuencia un sistema de primer orden con un polo en $2\omega_c$.

En resumen, el generador de rampas puede aproximarse por un filtro de primer orden con frecuencia de corte $2\omega_c$. En la [Figura 7.13](#) puede comprobarse la afirmación anterior. En ella se muestra la magnitud de la respuesta frecuencial de un generador de rampas caracterizado por $\omega_c = 0.1$, junto con la magnitud de la planta

$$p(j\omega) = \frac{j\omega}{0.2} + 1. \quad (7.42)$$

En ella puede comprobarse como las dos respuestas presentan un comportamiento muy similar. La máxima distorsión se obtiene en el entorno de la frecuencia ω_c . Véase como la respuesta frecuencial del generador de referencias presenta en esta frecuencia -1.5dB , superior a los -3dB que presenta el sistema de primer orden.

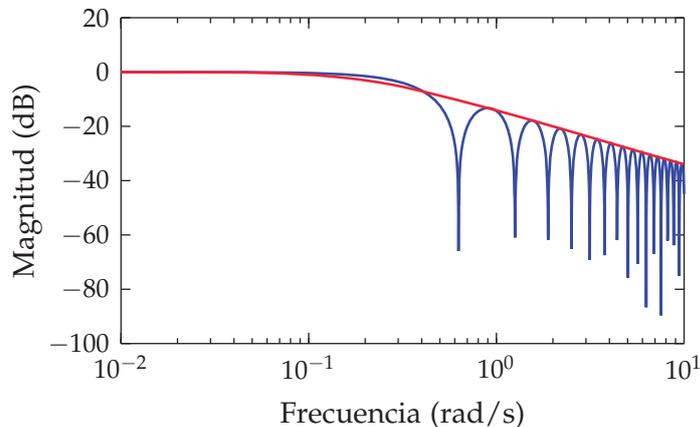


Figura 7.13: Magnitud de la respuesta frecuencial de un generador de rampas y su aproximación por un sistema de primer orden.

El estudio frecuencial anterior puede ser especialmente útil para realizar una selección adecuada de las pendientes del generador de rampas. Gracias a él puede elegirse de forma dinámica la pendiente máxima admisible por el sistema, en función del incremento deseado para la acción de control. El cálculo de la pendiente se realiza empleando $m = \Delta r_{u_i} \omega_c / 2$. Donde la frecuencia de corte ω_c deberá ser seleccionada para atender a los objetivos de diseño. Si solo se tiene en cuenta el objetivo de seguimiento, la frecuencia de corte deberá ser igual o inferior a la frecuencia media de trabajo de la planta p_i , tal como se describió en la [Subsección 7.3.2](#). También puede seleccionarse la frecuencia de corte para limitar el impacto en la variable controlada, en este caso la frecuencia de corte deberá ser seleccionada en función de los requisitos estudiados en la [Subsección 7.3.2](#).

A continuación, se muestran algunos ejemplos de diseño, obtenidos para el ejemplo de tres plantas estudiado anteriormente. Considérese nuevamente el diseño del sistema encargado de aplicar las referencias de la acción de control r_{u_2} . Como se describió en la [Subsección 7.3.2](#), para que no existan rebotes en el seguimiento de r_{u_2} debe emplearse un filtro pasa bajos con frecuencia de corte 0.1 rad/s . Si en este caso se desea emplear referencias en modo rampa y se considera que la variación de la acción de control será $\Delta r_{u_2} = 1$, la pendiente máxima para que el generador de rampas presente un comportamiento adecuado es

$$m = \omega_c \Delta r_{u_2} / 2 = 0.1 \times 1 / 2 = 0.05. \quad (7.43)$$

En la [Figura 7.14](#) se muestran los resultados obtenidos empleando varios generadores de rampas, así como el prefiltro $f_{2a}(j\omega)$ de la [Subsección 7.3.2](#). En ella se aprecia claramente que el empleo de pendientes inferiores 0.05 producen rebotes en el seguimiento de la acción de control, tal como ocurría cuando no se empleaba ningún prefiltro. Además puede comprobarse como el comportamiento del sistema cuando la pendiente es 0.05 coincide en gran medida con el obtenido con el prefiltro $f_{2a}(j\omega)$, corroborando que la aproximación frecuencial es adecuada. Por último, puede observarse como el seguimiento de referencias obtenido cuando las referencias son inyectadas con pendientes inferiores a 0.05 es muy parecido al que se obtendría si se emplearan prefiltros lineales con una frecuencia de corte equivalente.

En la [Figura 7.14](#), también se muestra la distorsión en la variable controlada. Es en este comportamiento donde se aprecia una mayor distorsión entre el empleo del prefiltro lineal y el generador de referencias en modo rampa con pendientes inferiores a 0.05 . Esto es debido a que la referencia r_{u_i} actúa como una perturbación tipo rampa, que el sistema es capaz de rechazar con un error finito en la salida. Por lo tanto, la variable controlada alcanza un valor fijo mientras se aplica la rampa. Valor que posteriormente es eliminado cuando la referencia alcanza un valor constante. Véase en la [Figura 7.14](#) como la variable controlada retorna a su valor de consigna una vez que la referencia alcanza el valor de consigna. Pese a todo, si se analiza el comportamiento para la rampa con pendiente $m = 0.05$, puede comprobarse que la respuesta sigue siendo similar a la obtenida para su prefiltro equivalente.

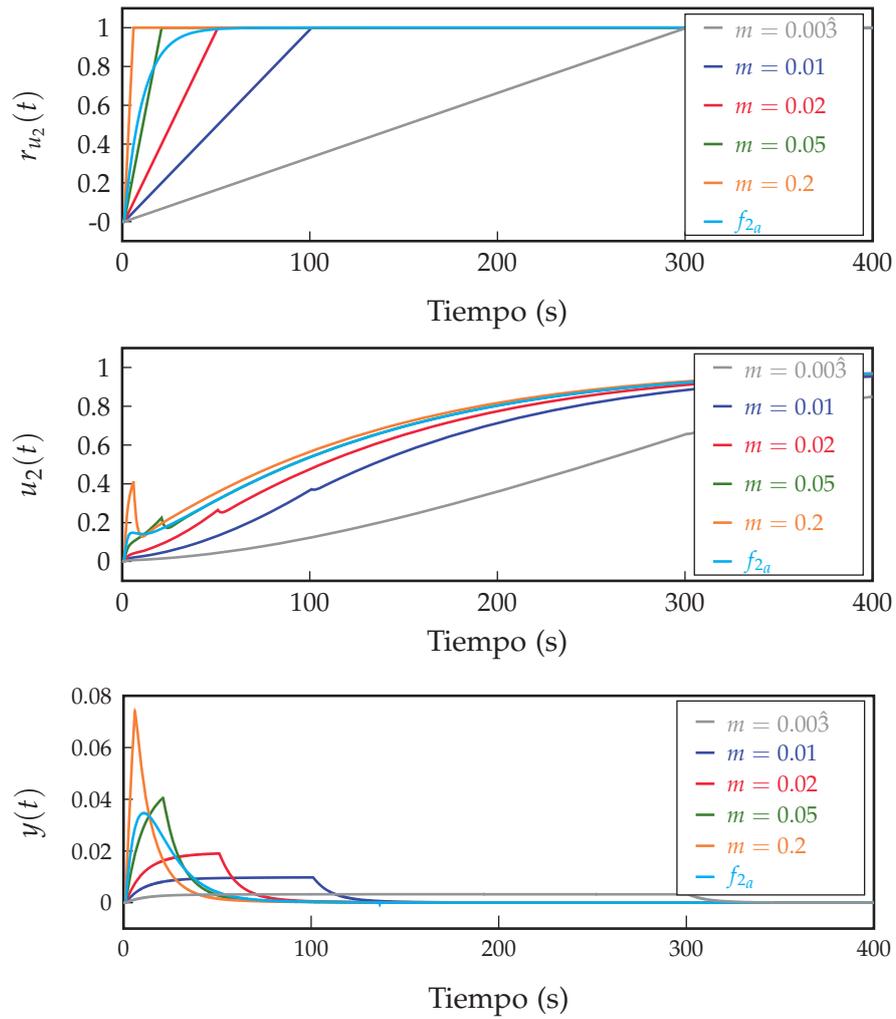


Figura 7.14: Seguimiento de referencias r_{u_2} en modo rampa.

ESTRUCTURA DE CONTROL MISO SERIE PROPUESTA

En este capítulo se analiza en profundidad la estructura de control MISO serie, por ser la más empleada en estrategias de control que presentan una gestión activa del punto de operación. Un estudio preliminar de dicha estructura se ha presentado en la [Subsección 2.3.1](#).

En la [Sección 8.1](#) se muestran las deficiencias de la generalización para sistemas con n actuadores de la estructura serie clásica que se emplea en sistemas con dos actuadores. Como solución, en la [Sección 8.2](#) se propone una estructura MISO serie que reduce la necesidad de integradores a sólo el controlador que afecta a la actuación más lenta. Por último, en la [Sección 8.3](#) se propone una metodología de diseño QFT de los elementos de control de la estructura MISO serie, que emplea fundamentos similares a los de las metodologías presentadas en el [Capítulo 4](#) y [Capítulo 6](#) para estructuras MISO de controladores en paralelo.

8.1 ESTRUCTURAS DE CONTROL SERIE CLÁSICAS

Como puede concluirse del estudio realizado en la [Sección 2.4](#), tradicionalmente el control de sistemas MISO en los que se desea realizar una gestión avanzada del punto de operación, se ha realizado empleando la estructura de control serie. Todos los trabajos analizados en la [Sección 2.4](#) que emplean estrategias de diseño serie utilizan la arquitectura de control de la [Figura 8.1](#), que restringe los sistemas MISO a sólo dos plantas (dos variables de actuación). Además, al igual que en el resto de estructuras serie, la arquitectura está pensada para que se produzca una intervención secuencial de las plantas¹, por lo que la disposición de plantas en la estructura debe ser tal que el diseño posterior de controladores permita que p_2 trabaje en alta frecuencia y p_1 en baja frecuencia.

¹ Ver la [Subsección 2.3.1](#) para una descripción más profunda de la misma.

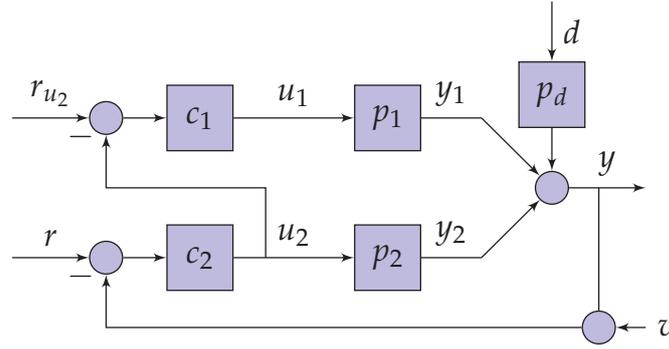


Figura 8.1: Estructura de control serie para un sistema MISO 1×2 .

Las ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema en lazo cerrado están determinadas por

$$y = \frac{l_t}{1 + l_t}(r - v) - \frac{p_d}{1 + l_t}d + \frac{c_1 p_1}{1 + l_t}r_{u_2}, \quad (8.1)$$

$$u_1 = \frac{c_1 c_2}{1 + l_t}(-r + v + p_d d) + \frac{c_1(1 + c_2 p_2)}{1 + l_t}r_{u_2}, \quad (8.2)$$

y

$$u_2 = \frac{c_2}{1 + l_t}(r - v - p_d d) + \frac{-c_1 c_2 p_1}{1 + l_t}r_{u_2}, \quad (8.3)$$

donde la función de lazo abierto total l_t corresponde con

$$l_t = c_2 p_2 - c_1 c_2 p_1. \quad (8.4)$$

Se analizará el comportamiento en baja frecuencia, que en el límite ($\omega = 0$), describe el comportamiento temporal de régimen permanente ($t = \infty$), el cual se representará con el subíndice «rp»; a su vez las ganancias estáticas de las funciones de transferencia se representarán con «(0)». La señal de ruido $v(t)$ introducida por el sensor se considera que, por su propia designación, incluye exclusivamente componentes de alta frecuencia, por lo que $v_{rp} = 0$.

Para cumplir con las especificaciones de *performance* sobre y en (8.1) se cumplirá que $|l_t(j0)| \gg 1$, $|l_t(j0)| \gg |p_d(j0)|$, por lo que la variable controlada en régimen permanente está determinada por

$$y_{rp} = r_{rp} + \frac{c_1(0)p_1(0)}{l_t(0)}r_{u_2,rp}, \quad (8.5)$$

cuando $|c_1(j0)| = \infty$. Es decir, se incluye acción integral en c_1 . Y por tanto, para que $y(t)$ tienda a $r(t)$, sólo queda anular la dependencia de la referencia $r_{u_2}(t)$ en régimen permanente. Y teniendo en cuenta el requisito a cumplir por tratarse de una estructura serie - que $p_1(j\omega)$ trabaje en baja frecuencia y $p_2(j\omega)$ en alta frecuencia- se cumplirá

$$|c_1(j0)c_2(j0)p_1(j0)| \gg |c_2(j0)p_2(j0)|. \quad (8.6)$$

Este hecho implica que se cumpla $|l_t(j0)| \approx |c_1(j0)c_2(j0)p_1(j0)|$, por lo que finalmente la respuesta en régimen permanente puede aproximarse por

$$y_{rp} = r_{rp} + \frac{1}{c_2(0)} r_{u_{2,rp}}. \quad (8.7)$$

Por tanto, si se desea eliminar totalmente la dependencia de r_{u_2} el controlador c_2 debe cumplir $|c_2(j0)| = \infty$, quedando

$$y_{rp} = r_{rp}. \quad (8.8)$$

Del mismo modo, la acción de control u_2 definida por (8.3), en régimen permanente es

$$u_{2,rp} = \frac{c_2(0)}{l_t(0)} (r_{rp} - p_d(0)d_{rp}) + \frac{-c_1(0)c_2(0)p_1(j0)}{l_t(0)} r_{u_{2,rp}}, \quad (8.9)$$

que puede aproximarse finalmente por

$$u_{2,rp} = r_{u_{2,rp}}, \quad (8.10)$$

si se cumplen las condiciones de diseño anteriores.

En resumen, los integradores de c_1 corrigen las desviaciones permanentes de y debidas a perturbaciones en d o debidas a la incertidumbre desconocida de las plantas. Los integradores de c_2 corrigen las desviaciones permanentes de y debidas a posibles cambios en el punto de operación r_{u_2} y también garantizan que dicho punto de operación se alcance en u_2 . Además la concatenación de integradores permite que se cumpla la condición de trabajo de las plantas (8.6). Por todo esto, la mayor parte de estrategias de diseño presentadas en la [Sección 2.4](#) emplean controladores de tipo PI en c_2 , y de tipo I o PI en c_1 .

La [Figura 8.2](#) muestra la generalización de la estructura serie mostrada en la [Figura 8.1](#) para un sistema MISO de n plantas². Esta generalización es la más intuitiva, pero presenta serios problemas, requiriendo de diseños complejos para satisfacer todos los objetivos de control.

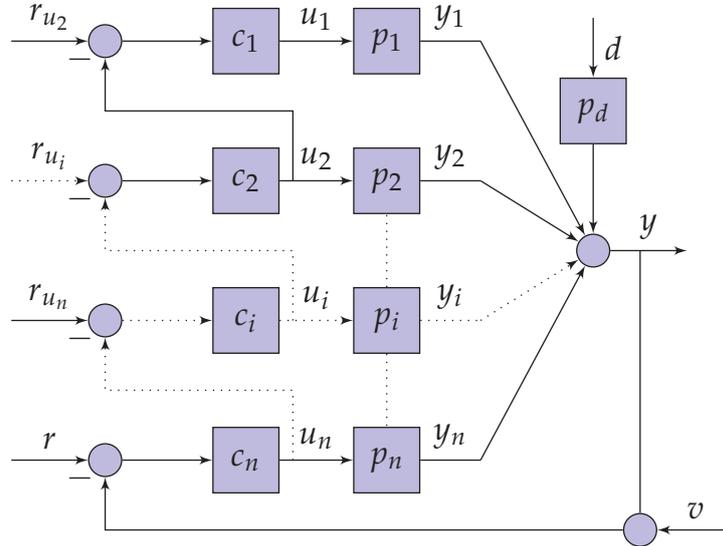


Figura 8.2: Estructura de control serie generalizada para un sistema MISO $1 \times n$. p_n corresponde con la planta que trabaja en alta frecuencia.

En este caso la variable controlada y , está determinada por

$$y = \frac{l_t}{1 + l_t}(r - v) + \sum_{i=2}^n \frac{l_{-i}}{1 + l_t} r_{u_i} + \frac{p_d}{1 + l_t} d, \quad (8.11)$$

donde la función de cada rama l_i está determinada por

$$l_i = p_i \prod_{k=i}^n c_k, \quad (8.12)$$

y la función de lazo abierto total l_t por

$$l_t = \sum_{i=1}^n (-1)^{(n-i)} l_i. \quad (8.13)$$

Se define la función de rama total vista desde la entrada r_{u_i} como

$$l_{-i} = \frac{\sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{(i-k)} l_k}{\prod_{k=i}^n c_k}. \quad (8.14)$$

² Téngase en cuenta que en este capítulo se está empleando una designación de plantas diferente a la mostrada en la [Subsección 2.3.1](#). Ahora, $p_1(j\omega)$ denota la planta que trabaja en más baja frecuencia y $p_n(j\omega)$ la planta que trabaja en más alta frecuencia.

En régimen permanente, empleando las mismas aproximaciones y criterios que en el caso anterior con dos plantas para baja frecuencia, la variable controlada y está determinada por

$$y_{rp} = r_{rp} + \sum_{i=2}^n \frac{l_{-i}(0)}{l_t(0)} r_{u_{i,rp}}, \quad (8.15)$$

demandando un integrador en c_1 para cancelar la influencia de d_{rp} y transmitir la información de r_{rp} , siendo $l_1(j\omega)$ la planta que domina la baja frecuencia. Entonces, además $|l_t(j0)| \approx |l_1(j0)|$, se tiene

$$y_{rp} = r_{rp} + \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^{i-n}}{\prod_{k=i}^n c_k(0)} r_{u_{i,rp}}. \quad (8.16)$$

Por lo que, si se desea que los cambios en el punto de operación de las variables de control $r_{u_{i>1}}$ no afecten al punto de operación de y , será necesario emplear un integrador en todos los controladores $c_{i>1}$. Finalmente, por tanto, todos los controladores c_i tienen un integrador, lo que incrementa la complejidad del diseño para las ramas $i > 1$ por temas de estabilidad. Nótese cómo las funciones de rama $l_i = p_i \prod_{k=i}^n c_k$ arrancan en $\omega = 0$ con una fase de $-90^\circ i$.

La acción de control en las sucesivas plantas está determinada por

$$\begin{aligned} u_i = & \frac{(-1)^{n-i} l_i / p_i}{1 + l_t} (r - v - p_a d) \\ & + \frac{\sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i-1-k} l_k}{1 + l_t} r_{u_i} \\ & + \frac{(-1)^{n-m-1} l_{-m} \prod_{k=m}^n c_k}{1 + l_t} r_{u_{m<i}} \\ & + \frac{-1^{(m-i+1)} \prod_{k=i}^{m-1} c_k \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} l_k}{1 + l_t} r_{u_{m>i}}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Y el régimen permanente de las acciones de control que deben seguir sus referencias sin error ($i > 1$) puede aproximarse por

$$\begin{aligned}
u_{i>1,rp} = & \frac{(-1)^{n-i} l_i(0) / p_i(0)}{l_t(0)} (r_{rp} - p_d(0) d_{rp}) \\
& + \frac{\sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i-1-k} l_k(0)}{l_t(0)} r_{u_{i>1,rp}} \\
& + \frac{(-1)^{n-m-1} l_{-m}(0) \prod_{k=m}^n c_k(0)}{l_t(0)} r_{u_{1<m<i,rp}} \\
& + \frac{-1^{(m-i+1)} \prod_{k=i}^{m-1} c_k(0) \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} l_k(0)}{l_t(0)} r_{u_{m>i>1,rp}}. \quad (8.18)
\end{aligned}$$

Como la rama $l_1(j\omega)$ domina en baja frecuencia sobre el resto ($|l_1(j\omega)| \approx |l_1(j\omega)|$ y $|l_1(j\omega)| \gg |l_{i \neq 1}(j\omega)|$), puede substituirse la expresión anterior por

$$\begin{aligned}
u_{i \geq 1,rp} = & r_{u_{i>1,rp}} + \sum_{1 < m < i} \frac{l_1(0)}{\prod_{k=m}^{i-1} c_k(0)} r_{u_{m,rp}} \\
& + \sum_{m > i > 1} \frac{p_m(0)}{p_i(0) \prod_{k=1}^{i-1} c_k(0)} r_{u_{m,rp}}. \quad (8.19)
\end{aligned}$$

Entonces, como ocurría para la variable controlada, únicamente se satisface la condición $u_{i>1,rp} = r_{u_{i>1,rp}}$ (las variables de control $i > 1$ alcanzan el punto de operación deseado) si los controladores de todas las ramas presentan al menos un integrador. Véase cómo este hecho, unido a la dificultad intrínseca de la estructura de control³, hace poco viable el uso de esta estructura (Figura 8.2) en sistemas reales de más de dos plantas ($n > 2$).

Por tanto, la estructura serie clásica es viable para sistemas de dos plantas Figura 8.1, teniendo presente que los dos controladores han de diseñarse con parte integral. Sin embargo, su generalización para sistemas de más de dos plantas (actuaciones) (Figura 8.2) no es muy adecuada. En este caso, se recomienda el empleo de la estructura de control paralelo, o la modificación de la estructura serie propuesta a continuación (Sección 8.2).

³ Una de las mayores dificultades a la hora de realizar el diseño de los controladores proviene de la existencia de múltiples cambios de signo.

8.2 ESTRUCTURA DE CONTROL SERIE

A continuación, se propone una modificación de la estructura de control serie, cuyo objetivo es lograr el funcionamiento deseado en sistemas MISO con más de dos plantas. Se mantiene la filosofía de trabajo, orden secuencial de intervención de plantas, pero se adapta la estructura para solucionar los problemas que introduce la estructura serie clásica generalizada para un correcto funcionamiento en régimen permanente. En concreto, no será preciso introducir integradores en todas las ramas, sino sólo en la que trabaja en régimen permanente.

La [Figura 8.3](#) muestra la estructura de control propuesta. En ella se aprecia como las referencias para las acciones de control r_{u_i} son introducidas mediante el empleo de controladores de prealimentación f_i y un sumador en la entrada de la planta, de forma similar a como se procedía en la estructura de control paralelo. Los controladores de prealimentación son empleados para atenuar la distorsión de la variable controlada, tal como se describió en la [Sección 7.3](#). Una de las primeras ventajas,

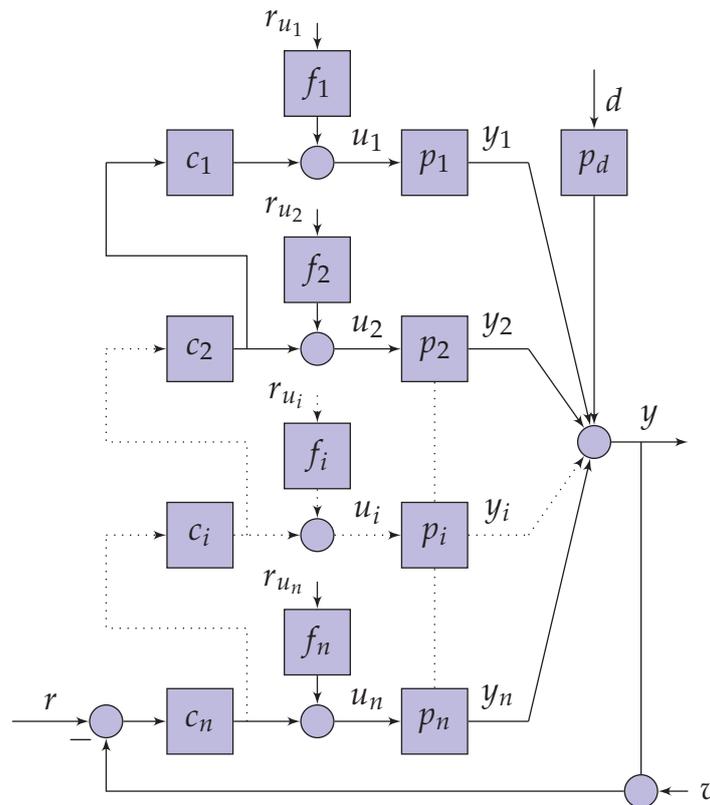


Figura 8.3: Modificación de la estructura de control serie para el control de un sistema MISO $1 \times n$.

que puede observarse a simple vista, es que se eliminan los signos negativos de los comparadores. De este modo, se simplifica la expresión de las ecuaciones de comportamiento en lazo cerrado, que ahora están determinadas por

$$y = \frac{l_t}{1 + l_t}(r - v) - \frac{1}{1 + l_t}p_d d + \sum_{i=2}^n \frac{p_i f_i}{1 + l_t} r_{u_i}, \tag{8.20}$$

y

$$u_i = \frac{l_i/p_i}{1 + l_t}(r - v - p_d d) + \frac{(1 + l_t - l_i)f_i}{1 + l_t} r_{u_i} - \sum_{m \neq i} \frac{f_m p_m l_i/p_i}{1 + l_t} r_{u_m}. \tag{8.21}$$

Donde l_i y l_t se corresponden con

$$l_i = p_i \prod_{k=i}^n c_k, \tag{8.22}$$

y

$$l_t = \sum_{i=1}^n l_i. \tag{8.23}$$

El comportamiento que relaciona la variable gobernada y con respecto a las señales r , v y d , es idéntico al obtenido con la estructura serie clásica (Figura 8.2). La única diferencia radica en que los términos l_i que componen l_t presentan todos sus signos positivos, a diferencia de la estructura clásica, en la que aparecían con signo positivo y negativo de forma alternativa.

En régimen permanente, asumiendo las mismas simplificaciones que se han empleado en secciones anteriores, se tiene

$$y_{rp} = r_{rp} + \sum_{i=2}^n \frac{p_i(0)f_i(0)}{l_1(0)} r_{u_{i,rp}}, \tag{8.24}$$

cuando c_1 contiene un integrador. Condición que se satisface dado que la rama $l_1(j\omega)$ domina en baja frecuencia. Si se considera que todos los controladores de prealimentación son filtros paso bajo con $f_i(0) = 1$, se alcanza

$$y_{rp} = r_{rp}. \tag{8.25}$$

Es decir, la nueva estrategia garantiza un adecuado comportamiento en régimen permanente de la variable controlada y mediante el empleo de

un único integrador, que en este caso deberá añadirse en $c_1(j\omega)$. Ésta es una diferencia sustancial con respecto a la estructura de control anterior, que facilita en gran medida el diseño de los controladores.

La acción de control u_i , en régimen permanente $u_{i,rp}$, puede aproximarse por

$$u_{i,rp} = f_i(0)r_{u_{i,rp}} - \sum_{m \neq i} \frac{f_m(0)p_m(0)l_i(0)/p_i(0)}{l_1(0)} r_{u_{m,rp}}, \quad (8.26)$$

que se transforma en $u_{i>1,rp} = r_{u_{i,rp}}$ si se garantiza la condición impuesta anteriormente para todos los controladores de prealimentación.

Por todo ello, la nueva estructura de control presenta varias ventajas, de entre las que destacan:

1. Se simplifica la notación al evitar el empleo de signos negativos. Estos no son necesarios, ya que el reparto de las bandas de trabajo asignadas a cada una de las plantas depende de la relación entre la magnitud de rama y la magnitud de lazo abierto total, no del empleo de comparadores.
2. Se reduce drásticamente el número de integradores necesarios para garantizar los objetivos de diseño en baja frecuencia: $y_{rp} = r_{rp}$ y $u_{i,rp} = r_{u_{i,rp}}$, para $i > 1$. Además de reducir el orden de los controladores, esto facilita el diseño de los mismos.
3. Se añaden prefiltros que permiten mejorar el comportamiento dinámico del sistema ante un eventual cambio del punto de operación.

8.3 METODOLOGÍA DE DISEÑO MISO QFT SERIE

A continuación, se presenta una modificación de la estrategia de diseño que se propuso en el [Capítulo 4](#) para una arquitectura paralelo, para su empleo junto con la arquitectura de control serie presentada en la [Sección 8.2](#). Los fundamentos de diseño junto con los objetivos se mantienen inalterados, únicamente se describen las modificaciones necesarias para alcanzar un diseño apropiado para la estructura de control serie. Téngase en cuenta que se respetarán en todo momento los objetivos de funcionamiento de la estructura serie. Es decir, que se produzca una intervención secuencial de plantas tal que $p_n(j\omega)$ sea la primera en reaccionar, y $p_1(j\omega)$ la última, y por lo tanto ésta última es la que

se encarga del control en régimen permanente. Se evitará en la medida posible que dos o más plantas trabajen en una misma banda de frecuencia. Cuando la ordenación de bandas de trabajo no sea la descrita, se recomienda emplear la estructura paralelo por ser más versátil.

Se emplea el esquema de control de la [Figura 8.3](#). Como ya se ha justificado, los controladores de realimentación $c_i(j\omega)$ son diseñados para garantizar el *performance* de lazo cerrado de y ante perturbaciones d , y los controladores de prealimentación o prefiltros $f_i(j\omega)$ son empleados para limitar el impacto que tiene el cambio del punto de operación (modificación de las señales $r_{u_i>1}$) sobre la variable controlada.

Como en el [Capítulo 4](#) se tiene en cuenta la incertidumbre paramétrica en los modelos de las plantas, garantizando que las especificaciones de diseño se cumplen para todo el espacio de la incertidumbre.

Como en el caso paralelo, se definen n especificaciones de lazo cerrado para garantizar la estabilidad robusta⁴

$$\left| \frac{l_i(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_s(\omega), \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}; \quad (8.27)$$

y una para el rechazo robusto de perturbaciones,

$$\left| \frac{p_d(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_d(\omega), \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (8.28)$$

De forma adicional pueden establecerse $n - 1$ especificaciones para el cambio robusto del punto de operación,

$$\left| \frac{p_{i \neq 1}(j\omega) f_{i \neq 1}(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_{u_{i \neq 1}}(\omega), \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (8.29)$$

Téngase en cuenta que pese a presentarse las misma inecuaciones que en el [Capítulo 6](#), éstas hacen referencia a otras condiciones de diseño, ya que en este caso $l_t(j\omega)$ está definido por [\(8.23\)](#).

Como en la estrategia de diseño QFT MISO para la estructura paralelo, el método de diseño se divide en tres etapas: reparto frecuencial de la realimentación, *loop-shaping* de controladores de realimentación y *loop-shaping* de los controladores de prealimentación.

⁴ En este caso se garantiza la estabilidad de lazo cerrado empleando la condición derivada de la sensibilidad complementaria, presentada en el [la Sección 5.2](#). Del mismo modo puede emplearse la condición derivada de la sensibilidad, o la condición empleada en el [Capítulo 4](#).

Primera etapa: reparto frecuencial de la realimentación

Como en el método propuesto en el [Capítulo 6](#), la primera etapa de diseño consiste en determinar cual es el mejor reparto de la realimentación⁵. Esta etapa es independiente de la estructura de control (serie o paralelo), dado que para determinar la mejor banda de trabajo de cada planta se analiza la cantidad de realimentación necesaria cuando la planta trabaja en solitario. Por tanto, se siguen los mismos criterios detallados para la estructura paralelo. Igualmente, podrían emplearse otros criterios de selección de las frecuencias de trabajo, como pueden ser las limitaciones físicas de las plantas, los costes económicos, conocimientos *ad-hoc*, etc.

Una vez realizada la selección de las bandas de trabajo se deberá llevar a cabo la ubicación adecuada de las plantas sobre la estructura de control ([Figura 8.3](#)). Es decir, la planta que trabaja en la banda de frecuencia más baja es la denominada p_1 , y así sucesivamente, hasta la que trabaja en la banda de frecuencia más alta que se denomina p_n ⁶.

Segunda etapa: loop-shaping de los controladores

Determinadas las bandas de trabajo, el procedimiento de diseño emplea un cierre secuencial de lazos, en el que los n controladores $c_{i=1,\dots,n}$ son obtenidos en n pasos. Tras asignar inicialmente un valor nulo a todos los controladores $c_{i=1,\dots,n}(j\omega) = 0$, se realiza el cierre secuencial de lazos diseñando en primer lugar el controlador c_n para la planta más rápida p_n y finalizando el diseño con el controlador c_1 para la planta más lenta p_1 . Véase como el orden de cierre de lazos es contrario al empleado en la estructura de control paralelo. Esta decisión se justifica dado que la rama l_k está determinada por los controladores de las ramas $l_{i>k}$. Por lo tanto, para llevar a cabo el diseño de l_k con c_k será necesario haber establecido el valor de los controladores $c_{i>k}$.

En cada etapa de diseño se diseña un único controlador $c_k(j\omega)$. Para ello, se fijan el resto de controladores $c_{i\neq k}(j\omega)$ y se obtienen los contor-

⁵ En caso de dudas se recomienda revisar la [Sección 4.2](#) y [Sección 6.3](#).

⁶ Este paso no es necesario cuando se emplea la estrategia paralelo, ya que todas las plantas son susceptibles de trabajar en baja, media o alta frecuencia. En este caso si es necesario, dado que la estructura está vinculada a una ordenación adecuada de las plantas sobre ella.

nos de diseño QFT para el vector discreto de frecuencias Ω . Las inecuaciones (8.27)-(8.28) pueden ser reescritas según

$$\left| \frac{l_k(j\omega)}{1 + \sum_{i>k}^n l_i(j\omega) + c_k(j\omega) \sum_{j=1}^k \frac{l_j(j\omega)}{c_k(j\omega)}} \right| \leq W_s(\omega) \quad (8.30)$$

y

$$\left| \frac{p_d(j\omega)}{1 + \sum_{i>k}^n l_i(j\omega) + c_k(j\omega) \sum_{j=1}^k \frac{l_j(j\omega)}{c_k(j\omega)}} \right| \leq W_d(\omega). \quad (8.31)$$

Como en los casos anteriores, los contornos de diseño se obtienen empleando la instrucción *genbnds* de la *Terasoft QFT Toolbox* [12], que calcula los *bounds* para una inecuación con formato

$$\left| \frac{A + BG}{C + DG} \right| < W. \quad (8.32)$$

Por lo tanto, si en un momento dado se diseña el controlador $c_k(j\omega)$, los *bounds* que garantizan la estabilidad robusta (8.30) son calculados mediante el empleo de

$$A = 0, \quad B = p_k(j\omega) \prod_{v=k+1}^n c_v(j\omega), \quad C = 1 + \sum_{i>k}^n l_i(j\omega),$$

$$D = \sum_{j=1}^k \frac{l_j(j\omega)}{c_k(j\omega)}, \quad G = c_k(j\omega), \quad W = W_s(\omega).$$

Y para el calculo de los *bounds* de rechazo de perturbaciones (8.31) se emplea

$$A = p_d(j\omega), \quad B = 0, \quad C = 1 + \sum_{i>k}^n l_i(j\omega),$$

$$D = \sum_{j=1}^k \frac{l_j(j\omega)}{c_k(j\omega)}, \quad G = c_k(j\omega), \quad W = W_d(\omega).$$

Véase cómo las ecuaciones propuestas para el cálculo de contornos incorporan a los elementos $c_{j<k}(j\omega)$. Según el procedimiento secuencial propuesto (inicialmente todos los $c_k = 0$ y se va diseñando desde $k = n$ hasta $k = 1$), cuando se diseña el controlador c_k los controladores $c_{j<k}$ cumplen $c_{j<k}(j\omega) = 0$, y por lo tanto las fórmulas anteriores se simplificarían. No obstante, se incluye la formulación completa que posibilita un diseño iterativo (varias secuencias $k = n$ hasta $k = 1$) para mejorar los diseños. Al menos una segunda iteración suele ser necesaria para rediseñar los controladores de los lazos rápidos una vez que se han obtenido los controladores de los lazos lentos.

Los *bounds* calculados imponen condiciones en la función de lazo abierto $l_{k_o}(j\omega)$. Para cada frecuencia ω , se calcula el *bound* intersección entre los que representan cada especificación, es decir, el más desfavorable tal que si no es violado por $l_{k_o}(j\omega)$ se cumplan todas las especificaciones. Le designaremos $\beta_{l_k}(\omega)$, donde ω pertenece al conjunto de frecuencias discretas Ω . Además, en la etapa de reparto de la realimentación se planificó que la rama k trabajara en la banda de frecuencia $\omega_{l_k} \leq \omega \leq \omega_{h_k}$. Entonces, el *loop-shaping* se realiza tal que $l_{k_o}(j\omega)$ empiece a cumplir sus contornos $\beta_{l_k}(\omega)$ a partir de $\omega \geq \omega_{l_k}$ (ver $l_{n_o}(j\omega_1)$ en la [Figura 8.4](#)); la violación de contornos en $\omega < \omega_{l_k}$ es sólo transitoria, ya que en estas frecuencias otros lazos aportarán la ganancia necesaria, que hará que $l_{k_o}(j\omega)$ pase a cumplirlos de forma automática. A partir de la frecuencia de corte superior de la rama, $\omega > \omega_{h_k}$, deberá realizarse una reducción drástica de la magnitud de la rama $l_{k_o}(j\omega)$ (se alcanza la frecuencia de *roll-off*). Cuando se realiza el *loop-shaping* del último controlador $c_1(j\omega)$, el de la planta $p_1(j\omega)$ que trabaja en baja frecuencia, $l_{1_o}(j\omega)$ debe satisfacer los contornos $\beta_{l_1}(\omega)$ en todas las frecuencias discretas en Ω (ver $l_{1_o}(j\omega)$ en la [Figura 8.4](#)). Una vez finalizado este último *loop-shaping*, automáticamente todos los lazos $l_{i_o}(j\omega)$ pasan a cumplir sus *bounds* (incluidos los de las frecuencias que durante el diseño de los respectivos lazos se violaban). En este punto el diseño finaliza y se garantiza el cumplimiento de todas las especificaciones de control en lazo cerrado.

Pueden incluirse etapas adicionales en las que se iteran los diseños en busca de un ajuste más fino. Debe tenerse en cuenta que en el caso serie el proceso iterativo es más complejo que en el caso paralelo, ya que la modificación de una rama afecta a todas las ramas más lentas que ella. Es decir, el rediseño de la rama $l_k(j\omega)$ implica una modificación en todas

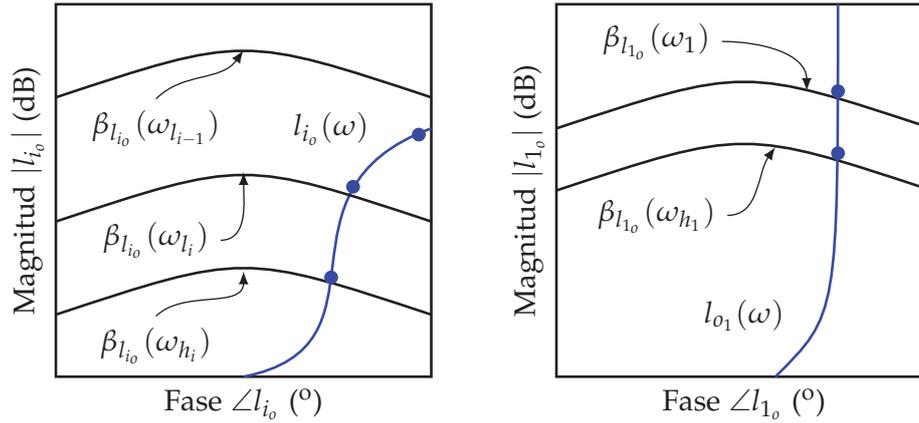


Figura 8.4: Procedimiento empleado en el *loop-shaping* de controladores para la estructura serie.

las ramas $l_{i < k}(j\omega)$. Por este motivo no se recomienda finalizar cualquier re-diseño sin completar la secuencia hasta $c_1(j\omega)$.

Los controladores $c_{i=1,\dots,n}(j\omega)$ son los encargados del reparto de la realimentación entre las plantas a lo largo de la banda de frecuencia. Debe evitarse el empleo de elementos de retraso de fase para reducir la magnitud en baja frecuencia de las ramas que trabajan en alta frecuencia. Téngase en cuenta que estos elementos son vistos por las ramas que trabajan en baja frecuencia, y deberán ser compensados por las mismas. Del mismo modo, debe evitarse el empleo de integradores y ganancias elevadas en los controladores de las plantas que no trabajan en baja frecuencia.

Por último, indicar que si más de una planta debe trabajar en una misma frecuencia discreta de diseño (cuestión que será apreciada en la tabla que indica el reparto de tareas) el *loop-shaping* deberá llevarse a cabo según lo expuesto en [Capítulo 4](#). Por ejemplo, si dos plantas deben colaborar en cierta frecuencia ω , en el diseño de la primera de ellas $l_{k_0}(j\omega)$ se situará por debajo del contorno $\beta_{l_k}(\omega)$ una magnitud $20 \log(2)$ dB, produciéndose una depresión en el contorno de diseño de la segunda planta en colaboración en dicha frecuencia; al diseñarse el lazo de esta segunda planta, los dos lazos pasan a cumplir sus contornos en la frecuencia de colaboración. No obstante, se recomienda no forzar la colaboración de plantas, salvo en casos puntuales. Si el objetivo es que más de una planta efectúe el control del sistema en la misma banda de frecuencia, la estructura paralelo es la más adecuada.

Tercera etapa: loop-shaping de prefiltros

Como en el caso paralelo, una vez diseñados los controladores de realimentación pueden diseñarse los controladores de prealimentación o prefiltros, empleados para limitar la distorsión de la variable controlada cuando se modifica el punto de operación. Para el diseño de estos elementos pueden emplearse las estrategias de diseño descritas en la [Sección 7.3](#), ya que el problema de control una vez diseñados los controladores de realimentación es equivalente.

APLICACIÓN AL CONTROL DE UN ATAD

A continuación, se muestra un ejemplo de aplicación de la estrategia de control MISO serie¹ al control de un ATAD.

9.1 DESCRIPCIÓN DEL PROCESO, MODELOS DINÁMICOS Y OBJETIVOS DE CONTROL.

El sistema a controlar es un digestor aerobio cuyo esquema se presenta en la [Figura 9.1](#). Este tipo de digestores son empleados en el tratamiento de fangos de aguas residuales, en concreto para la estabilización y pasteurización del fango utilizando la tecnología ATAD (*Autothermal Thermophilic Aerobic Digestion*) [88, 140]. En líneas generales, el proceso consiste en el empleo de un depósito cerrado en el que la materia orgánica del influente es degradada (estabilización) por la acción de bacterias aerobias que son oxigenadas mediante el empleo de un sistema de aireación forzada. La reacción exotérmica de biodegradación incrementa la temperatura del digestor, que normalmente es operado en modo *batch*. Entonces, el lote de fango a tratar se mantiene en el digestor durante el tiempo necesario, función de la temperatura, para que se reduzca la concentración de patógenos (pasteurización).

Tradicionalmente el tratamiento ATAD ha sido controlado en lazo abierto, o mediante controladores automáticos que sólo manipulaban el caudal de aireación, Q_a , para regular la temperatura del digestor. En este caso, se propone un control dual que añade la manipulación del tiempo de retención de sólidos SRT - *solid retention time*². De acuerdo

-
- ¹ Como parte de los resultados generados por esta tesis, el mismo control ha sido publicado en [108] siguiendo una estructura MISO paralelo.
 - ² Esta variable es inversamente proporcional al volumen tratado en cada lote, que se controla mediante la bomba de alimentación y evacuación de fango que mueven caudales $Q_{raw} = Q_{out}$. En concreto, $SRT = V_{ATAD} / Q_{raw}$, donde V_{ATAD} es el volumen del digestor.

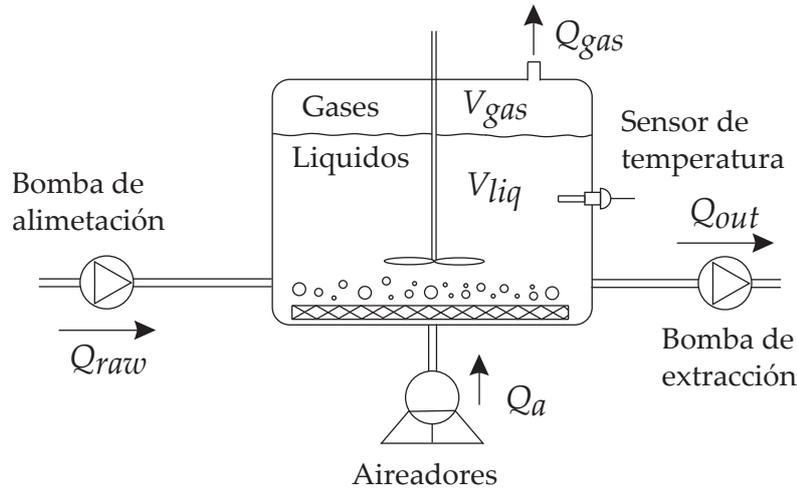


Figura 9.1: Esquema de funcionamiento del ATAD.

a la estructura de control MISO serie (Figura 8.3), $u_2 = Q_a$ y $u_1 = SRT$. El control dual permitirá alcanzar dos objetivos en régimen permanente (referencias en los lazos de control). Por un lado, la temperatura del digestor (salida - y) es regulada de acuerdo a una referencia (r), que se selecciona convenientemente para obtener cierta calidad en el fango tratado. A mayor temperatura, el nivel de pasteurización mejora, pero obviamente se incurre en mayores costes de operación. Por ello, la temperatura de referencia se fija en el valor mínimo que permita cumplir con los niveles de pasteurización exigidos por la legislación vigente en materia de tratamiento de fangos de depuradora. Por otro lado, se fija una referencia para el caudal de aire (r_{u_2}). Su selección puede obedecer a diferentes estrategias. Si se desea reducir el gasto de aireación, se seleccionan valores pequeños de referencia para Q_a . Fijada la temperatura dada del digestor, si se reduce la aireación, se provoca el aumento del SRT , es decir, la disminución de Q_{raw} o cantidad de fango tratado. Por tanto, si se desea aumentar el nivel de producción, otra estrategia de operación es incrementar la referencia para Q_a .

Con el fin de emplear un control lineal, en este caso en el dominio discreto, se adopta como intervalo de muestreo el tiempo de duración del lote de tratamiento, que se considera fijo, y se toma $t_s = 1$ d (día). Entonces, SRT se actualiza cada t_s (implica un cambio del volumen que es tratado en cada lote). En consonancia con el sistema de control discreto, el caudal de aire Q_a se mantiene fijo durante el lote de tratamiento. Esta variable manipulable se actualiza cada t_s . Y finalmente, la variable controlada (y) será la temperatura media del digestor, T_{AVG} , que se calcula a partir de las muestras de temperatura recogidas durante el lote de

un día de duración. Como entradas de perturbación de la temperatura del digestor se considerarán la variación de la temperatura del aire, T_a , y la variación de la temperatura del fango, T_s , a la entrada. El contenido de materia orgánica del fango a tratar también es variable. Su variabilidad será considerada como incertidumbre paramétrica en los modelos dinámicos salida/entrada del sistema.

El reactor utilizado se corresponde con el de un benchmark de simulación no lineal aprobado para la tecnología ATAD [48, 161, 162], que designaremos como AT_BSM. Diferentes análisis del AT_BSM [109, 107, 108] concluyen que el rango admisible de operación de las variables de actuación es:

- $Q_a \in [1.000, 65.000] \text{ m}^3/\text{d}$.
- $SRT \in [10, 15] \text{ d}$.

La variabilidad de las perturbaciones es

- $T_a \in [10, 20] \text{ }^\circ\text{C}$.
- $T_s \in [10, 20] \text{ }^\circ\text{C}$.

Tabla 9.1: Puntos de operación del ATAD.

	SRT [d]	$Q_a [\text{m}^3/\text{d}]$
PO1	15	17180
PO2	14	15300
PO3	13	13500
PO4 (nominal)	12	11800
PO5	11	10220
PO6	10	8730

Los puntos de operación (equilibrio) del sistema se muestran en la [Tabla 9.1](#). Alrededor de ellos, sobre el AT_BSM se realizan experimentos escalón ($\pm 1 \text{ d}$ para SRT , $\pm 1000 \text{ m}^3/\text{d}$ para Q_a , y $\pm 5 \text{ }^\circ\text{C}$ para T_a y T_s) con el fin de identificar modelos dinámicos lineales de pequeña señal. Los modelos identificados para cada una de las variables del sistema se corresponden con sistemas de primer orden

$$p_1(s) = p_{SRT}(s) = \frac{T_{AVG}(s)}{SRT(s)} = \frac{k_{SRT}}{\tau_{SRT}s + 1}, \quad (9.1)$$

$$p_2(s) = p_{Q_a}(s) = \frac{T_{AVG}(s)}{Q_a(s)} = \frac{k_{Q_a}}{\tau_{Q_a}s + 1}, \quad (9.2)$$

$$p_{d_1}(s) = p_{T_a}(s) = \frac{T_{AVG}(s)}{T_a(s)} = \frac{k_{T_a}}{\tau_{T_a}s + 1}, \quad (9.3)$$

$$p_{d_2}(s) = p_{T_s}(s) = \frac{T_{AVG}(s)}{T_s(s)} = \frac{k_{T_s}}{\tau_{T_s}s + 1}. \quad (9.4)$$

cuya incertidumbre paramétrica se recoge en la [Tabla 9.2](#).

Tabla 9.2: Incertidumbre paramétrica del sistema

Uds.		mín	máx	Uds.		mín	máx
k_{Q_a}	[°C d / m ³]	0.00077	0.0012	k_{T_a}	[°C/°C]	0.16	0.21
τ_{Q_a}	[d]	6.65	8.92	τ_{T_a}	[d]	6.47	9.5
k_{SRT}	[°C/d]	1.49	1.96	k_{T_s}	[°C/°C]	0.58	0.59
τ_{SRT}	[d]	6.67	9.51	τ_{T_s}	[d]	6.7	8.72

Los requisitos de comportamiento son los siguientes:

- La temperatura de referencia para T_{AVG} se mantiene constante en 55 °C (lo que asegura los niveles de pasteurización mínimos requeridos).
- Las perturbaciones máximas se corresponden con variaciones escalón de $\pm 5^\circ\text{C}$ en la temperatura del fango T_s o en la temperatura del aire T_a .
- Dada una perturbación de máxima amplitud, la desviación de la temperatura media T_{AVG} deberá ser igual o inferior a 0.6°C .
- Las perturbaciones deberán ser rechazadas en un tiempo máximo de 7 d (días). Se considera que la perturbación se encuentra rechazada cuando la desviación en la temperatura media sobre la referencia es inferior a $\pm 0.05^\circ\text{C}$.

- Tras rechazar una perturbación, el nuevo punto de operación (equilibrio de la salida y acciones de control) deberá ser alcanzado transcurrido un tiempo igual o inferior a 20 días.
- Cuando se modifica el punto de operación del caudal de aire, la distorsión en la temperatura media será igual o inferior a la definida para el rechazo de perturbaciones. Se contemplan cambios máximos en la referencia para el caudal de aire de $\pm 2000 m^3 / \text{día}$.

Para comparar el potencial dinámico de cada planta los modelos en función de transferencia anteriores se escalan de acuerdo a los puntos de operación y a la máxima excursión admisible para las variables. La [Figura 9.2](#) muestra su respuesta frecuencial. Puede verse cómo la magnitud de $p_2 = p_{Q_a}$ es mayor que la de $p_1 = p_{SRT}$ en toda la banda frecuencial $\omega = [0, \infty]$ rad/d. Como cabía esperar, el caudal de aire es la variable manipulable que proporciona una mayor controlabilidad de la temperatura. Por tanto, se determina que $p_2 = p_{Q_a}$ trabaje en alta frecuencia, para entregar el mejor *performance* posible, y que $p_1 = p_{SRT}$ trabaje en baja frecuencia. El reparto frecuencial concreto viene determinado por el requisito de que todas las variables alcancen su equilibrio en un máximo de 20 días. La constante de tiempo equivalente de lazo cerrado deseada es de 5 días, por lo que la rama más lenta no podrá desconectarse hasta 0.2 rad/d. En resumen, el reparto frecuencial es:

- Banda de trabajo para $p_2(j\omega)$: $\omega > 0.2$.
- Banda de trabajo para $p_1(j\omega)$: $\omega \leq 0.2$.

Nótese cómo la participación de la rama rápida será la encargada de conseguir que el rechazo de las perturbaciones se realice en un tiempo inferior a 7 días.

9.2 DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL

A continuación, se presentan los pasos para el diseño del sistema de control. Se emplea la estructura de control serie de la [Figura 8.3](#), particularizada para $n = 2$. Como se indicó anteriormente $p_1 = p_{SRT}$ y $p_2 = p_{Q_a}$. La formulación de las especificaciones de rechazo robusto y de estabilidad robusta sigue las pautas indicadas en la [Sección 8.3](#), inecuaciones (8.27), (8.28) y (8.29).

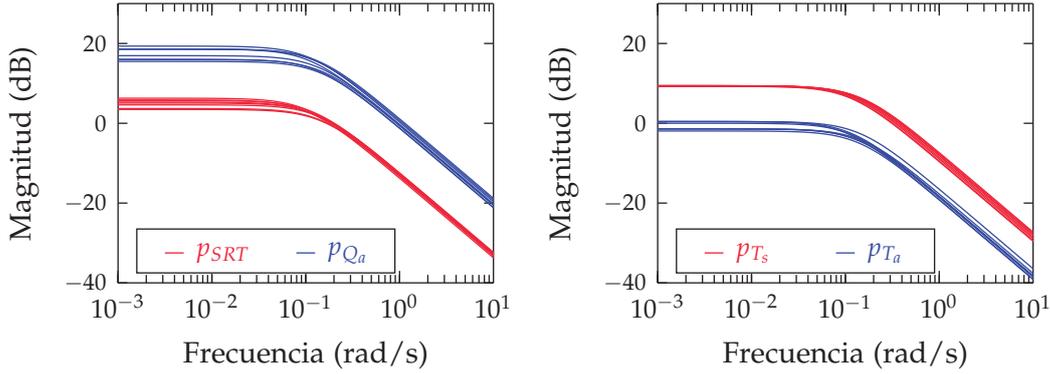


Figura 9.2: Magnitud de la respuesta frecuencial escalada de las plantas.

Los requisitos de control dinámico antes mencionados son relativamente ambiciosos para el intervalo de muestreo de $t_s = 1$ d. Esto exige que el diseño de controladores se realice directamente en el dominio discreto, utilizando la transformada \mathcal{Z} . De esta forma se aprovecha al máximo la banda de frecuencias realmente disponible $[0, \pi/t_s]$ rad/d. Teniendo en cuenta que se emplea un retenedor de orden cero, se calcula el equivalente discreto de las plantas en las ecuaciones (9.1), (9.2), (9.3) y (9.4), para las que se obtiene: $p_{SRT}^{zoh}(z)$, $p_{Q_a}^{zoh}(z)$, $p_{T_a}^{zoh}(z)$ y $p_{T_s}^{zoh}(z)$, respectivamente. En adelante, se utilizará la notación simplificada: $p_1(z) = p_{SRT}^{zoh}(z)$, $p_2(z) = p_{Q_a}^{zoh}(z)$, $p_{d1}(z) = p_{T_a}^{zoh}(z)$ y $p_{d2}(z) = p_{T_s}^{zoh}(z)$. La estabilidad robusta se formula como

$$\left| \frac{p_1(z)c_1(z)c_2(z)}{1 + p_2(z)c_2(z) + p_1(z)c_1(z)c_2(z)} \right|_{z=e^{j\omega t_s}} \leq W_s, \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (9.5)$$

y

$$\left| \frac{p_2(z)c_2(z)}{1 + p_2(z)c_2(z) + p_1(z)c_1(z)c_2(z)} \right|_{z=e^{j\omega t_s}} \leq W_s, \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}; \quad (9.6)$$

tal que para conseguir un margen de fase mínimo de 40° , la tolerancia superior W_s se selecciona según

$$W_s = \left| \frac{0.5}{\cos(\pi(180 - MF)/360)} \right|, MF = 40^\circ. \quad (9.7)$$

El comportamiento de rechazo robusto de perturbaciones se especifica como

$$\left| \frac{p_{d1}(z)}{1 + p_2(z)c_2(z) + p_1(z)c_1(z)c_2(z)} \right|_{z=e^{j\omega t_s}} \leq |W_d(j\omega)|, \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}; \quad (9.8)$$

y

$$\left| \frac{p_{d_2}(z)}{1 + p_2(z)c_2(z) + p_1(z)c_1(z)c_2(z)} \right|_{z=e^{j\omega t_s}} \leq |W_d(j\omega)|, \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (9.9)$$

La cota W_d se corresponde con un modelo de comportamiento que satisface las condiciones dinámicas expuestas en la sección anterior. En concreto,

$$W_d(j\omega) = \frac{1.631 j\omega}{(j\omega + 1)^2}. \quad (9.10)$$

El vector de frecuencias Ω para el diseño es

$$\Omega = \{0.001, 0.005, 0.01, 0.04, 0.08, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.8, 1, \pi/t_s\} \text{ [rad/d]}; t_s = 1d. \quad (9.11)$$

En este ejemplo la selección de la banda de trabajo de cada planta viene condicionada por la propia naturaleza de las plantas y las especificaciones de comportamiento³. Tal y como se justificó en la sección anterior la frecuencia límite entre ramas es $\omega = 0.2$, es decir, se cumplirá:

$$|p_1c_1c_2(z)|_{z=e^{j\omega t_s}} \gg |p_2c_2(z)|_{z=e^{j\omega t_s}}, \omega \in [0, 0.2], \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}; \quad (9.12)$$

$$|p_2c_2(z)|_{z=e^{j\omega t_s}} \gg |p_1c_1c_2(z)|_{z=e^{j\omega t_s}}, \omega \in [0.2, \pi/t_s], \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}; \quad (9.13)$$

De acuerdo a las especificaciones y reparto frecuencial anteriores se efectúa el *loop-shaping* de controladores siguiendo el procedimiento expuesto en la [Sección 8.3](#). En primer lugar se diseña $c_2(z)$, de tal forma que $l_{2_o}(j\omega)$ satisfaga las condiciones de diseño en las frecuencias $\omega > 0.2$. En la [Figura 9.3](#) puede observarse cómo $l_{2_o}(j\omega)$ se sitúa sobre los contornos a partir de $\omega = 0.3$, y los viola en frecuencias $\omega < 0.3$. El sobrediseño observado en la frecuencia $\omega = 0.4$, es debido a que el ancho de banda disponible es tan reducido que no es posible realizar un ajuste más preciso sin violar los contornos de estabilidad en alta frecuencia. Obsérvese cómo en baja frecuencia se evita añadir elementos de retraso de fase que puedan reducir la ganancia de $l_{2_o}(j\omega)$ en $\omega \leq 0.2$, ya que éstos serían

³ Por tanto, no se aplicará el procedimiento propuesto en [Sección 4.2](#)

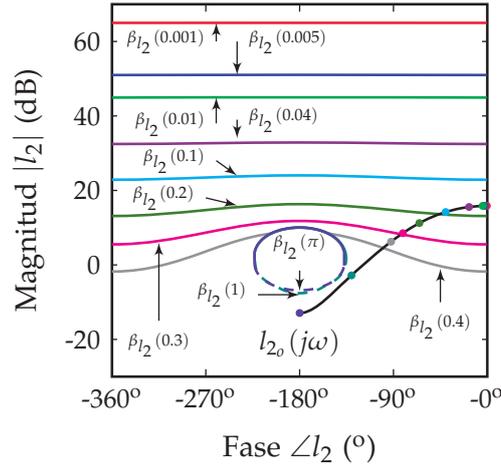


Figura 9.3: Control de ATAD. *Loop-shaping* del controlador $c_2(z)$.

vistos por la rama $l_1(j\omega)$, y posteriormente tratarían de ser cancelados durante el diseño de $c_1(j\omega)$. El controlador resultante es

$$c_2(z) = \frac{5325.5z}{(z - 0.3401)}. \tag{9.14}$$

En segundo lugar, se diseña $c_1(j\omega)$. En este caso el *loop-shaping* de $l_1(j\omega)$ se realiza como si de un diseño SISO se tratara. Es decir, se satisfacen los *bounds* en todas las frecuencias, hasta que una vez alcanzada la frecuencia de *roll-off*, se practica la mayor reducción posible en la magnitud de la rama; véase Figura 9.4. La naturaleza discreta del diseño y el reducido ancho de banda han impedido una reducción más agresiva de la magnitud de la rama. El controlador resultante es

$$c_1(z) = \frac{0.61256z^2}{(z - 1)(z - 0.4775)}. \tag{9.15}$$

Téngase en cuenta que el controlador total (c_{1_t}) que ve realmente la planta $p_1(s)$ corresponde con el producto de ambos controladores

$$c_{1_t}(z) = c_1(z)c_2(z) \frac{0.61256 \times 5325.5z^3}{(z - 1)(z - 0.4775)(z - 0.3401)}, \tag{9.16}$$

y por lo tanto presenta tres polos⁴. En este punto puede apreciarse una de las ventajas de la estructura serie, que no es otra que la reducción del orden de los controladores. En la mayor parte de las ocasiones, empleando dicha estructura se obtendrán controladores de menor orden sin sacrificar la reducción de magnitud deseada en alta frecuencia.

⁴ Además del retenedor de orden cero (ZOH) empleado para inyectar las señales discretas en el proceso continuo.

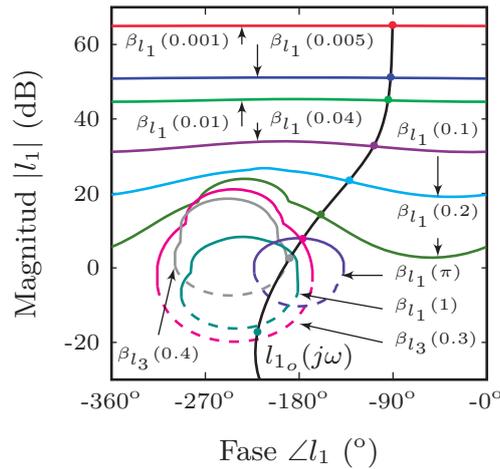


Figura 9.4: Control de ATAD. *Loop-shaping* del controlador $c_1(z)$.

9.3 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Una vez diseñados los controladores de realimentación se analiza el comportamiento del sistema en lazo cerrado. En la [Figura 9.5\(a\)](#) se muestra como las respuestas frecuenciales $|T_{AVG}/T_s|$ para el conjunto de casos de la incertidumbre se sitúan por debajo de la tolerancia establecida W_d . Las respuestas $|T_{AVG}/T_a|$ cumplen igualmente la especificación. En la [Figura 9.5\(b\)](#) se muestra cómo para todas las frecuencias, la función de sensibilidad complementaria para cada lazo está siempre por debajo de la cota W_s . Y finalmente la [Figura 9.5\(c\)](#) muestra el reparto frecuencial entre las dos ramas. Se concluye por tanto, que se satisfacen las condiciones frecuenciales de diseño.

En la [Figura 9.6](#) se presenta la evolución temporal de la temperatura del digester cuando se produce una perturbación de máxima amplitud en la temperatura del fango (incremento brusco de $5\text{ }^\circ\text{C}$ en el instante $t = 1\text{ d}$). Se observa como, para todos los casos previstos dentro de la incertidumbre, la temperatura del digester se desvía del valor de equilibrio pero recupera éste en aproximadamente 6 días (el tiempo de establecimiento se mide cuando la desviación es inferior a $0.05\text{ }^\circ\text{C}$), en consonancia con la especificación que establecía un máximo de 7 días. Además, la desviación máxima es de $0.4\text{ }^\circ\text{C}$, por debajo de los $0.6\text{ }^\circ\text{C}$ que se establecían como requisito. En la [Figura 9.6](#) también se representa la evolución temporal de las acciones de control, que obedecen a la intervención lenta-rápida prescrita. La reacción más rápida es la del caudal de aireación, que presenta una brusca reducción de su magnitud en los instantes iniciales, y así, de forma progresiva recuperar su punto de

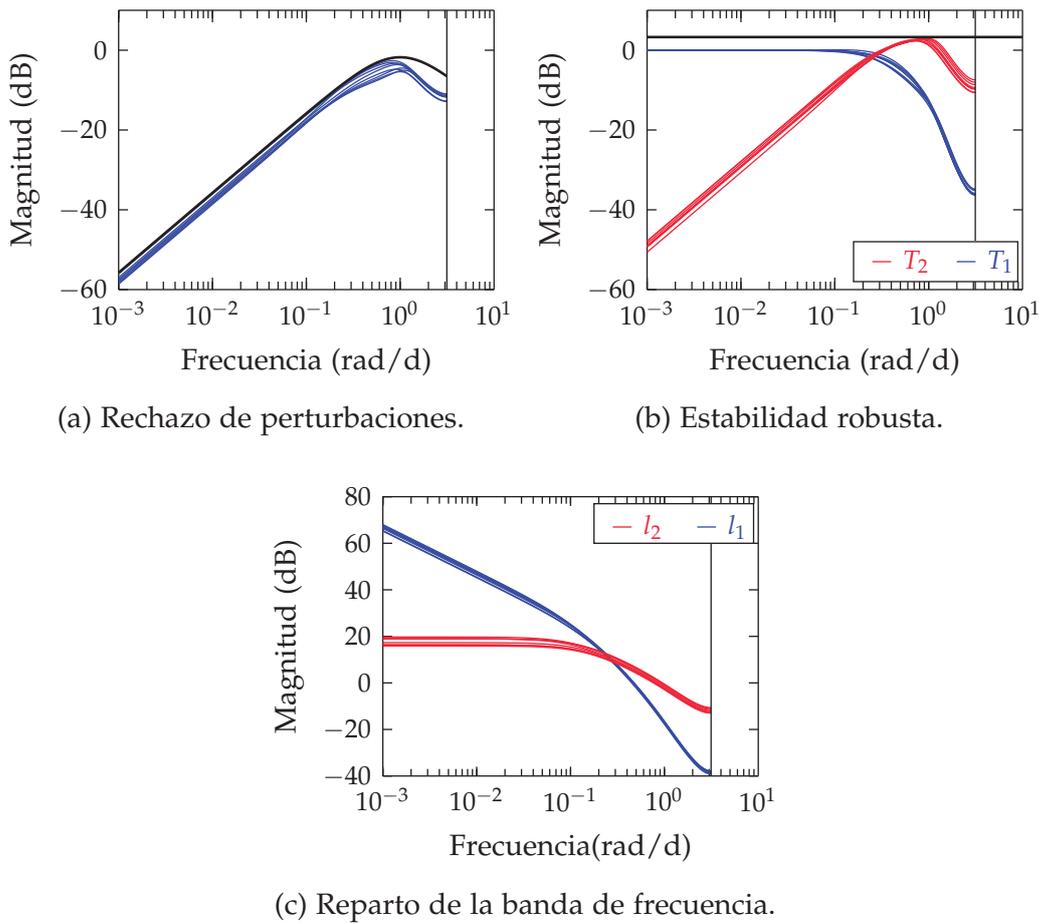


Figura 9.5: Especificaciones y respuestas frecuenciales.

consigna en aproximadamente 4 días. Conforme retorna a su equilibrio, la actuación lenta (tiempo de retención de sólidos -SRT) toma el control del sistema hasta que alcanza un nuevo valor de régimen permanente para compensar la perturbación, ya que esta persiste en el tiempo. Véase como la actuación lenta alcanza su equilibrio transcurridos 15 días desde el inicio de la perturbación, cumpliendo con los requisitos de diseño (máximo de 20 días).

9.4 DISEÑO DE CONTROLADORES DE PREALIMENTACIÓN

Estos se diseñan para corregir la desviación de la variable controlada ante posibles cambios en el punto de operación de las variables de control. En el caso de la estructura serie de la [Figura 8.3](#) (particularizada para $n = 2$), se trata de diseñar el prefiltro f_2 para corregir la desviación de $y = T_{AVG}$ de la referencia $r = 0$ cuando se producen cambios en

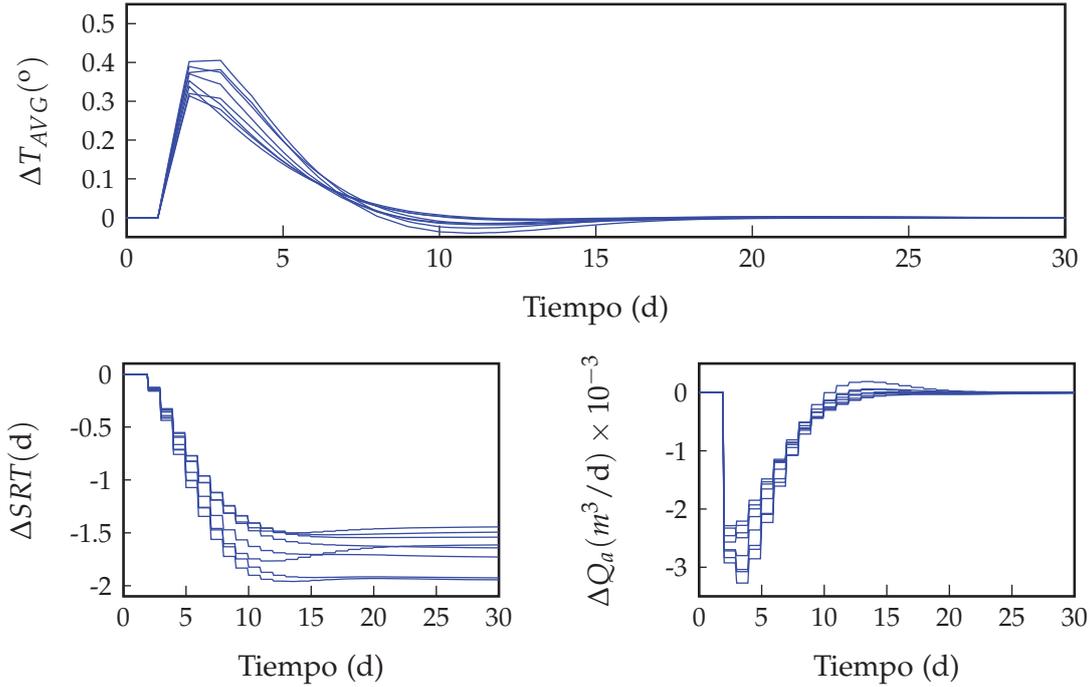


Figura 9.6: Control de ATAD. Respuestas temporales frente a perturbación.

$r_{u_2} = r_{Q_a}$. El requisito de diseño consistía en que para una variación en la referencia del caudal de $\pm 2000 m^3/d$ la distorsión en la temperatura no superara los $0.6 \text{ }^\circ\text{C}$ (que era también el máximo permitido ante cambios en las variables de perturbación propiamente dichas). Por lo tanto, el sistema debe garantizar

$$\left| \frac{2000 p_2(z) f_2(z)}{1 + p_2(z) c_2(z) + p_1(z) c_1(z) c_2(z)} \right|_{z=e^{j\omega t_s}} \leq |W_d(j\omega)|, \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (9.17)$$

utilizándose el mismo modelo de comportamiento W_d que para el rechazo de perturbaciones T_a y T_s . El sistema cumple con la condición anterior empleando un prefiltro unitario, $f_2(z) = 1$. No obstante, se diseña un prefiltro para mejorar en la medida posible la respuesta de $u_2 = Q_a$ ante cambios en su consigna $r_{u_2} = r_{Q_a}$. En este caso, se opta por emplear un filtro pasa bajos de segundo orden, caracterizado por

$$f_2(z) = \frac{(1 - 0.6065)^2 z^2}{(z - 0.6065)^2}. \quad (9.18)$$

En la [Figura 9.7](#) puede observarse la respuesta para un incremento en la referencia $\Delta r_{Q_a} = 2000 m^3/d$. En ella puede observarse como la distorsión de la variable controlada es prácticamente despreciable, desviándose un máximo de $0.12 \text{ }^\circ\text{C}$ respecto al equilibrio (consigna deseada).

Del mismo modo puede comprobarse como el caudal de aire evoluciona lentamente hasta alcanzar su nuevo valor de consigna. Este proceso transcurre en aproximadamente 15 días, tiempo seleccionado en las condiciones iniciales para alcanzar un nuevo punto de operación. Por último, puede observarse como el tiempo de retención de sólidos también alcanza un nuevo valor, congruente con el nuevo punto de operación. Para la misma temperatura del digestor, cuando se emplea un caudal de aire mayor, el tiempo de retención de sólidos disminuye. Esta estrategia de operación del ATAD permite aumentar la producción (cantidad de fango tratado) a costa de un aumento del gasto (caudal de aire). Por tanto, modificando el punto de consigna de la variable de control rápida, pueden conseguirse de forma controlada distintos puntos de operación que pueden resultar de interés desde el punto de vista de la aplicación. Esta versatilidad no es factible en un sistema SISO, donde el único punto de operación posible se modifica a través de la consigna de la variable controlada.

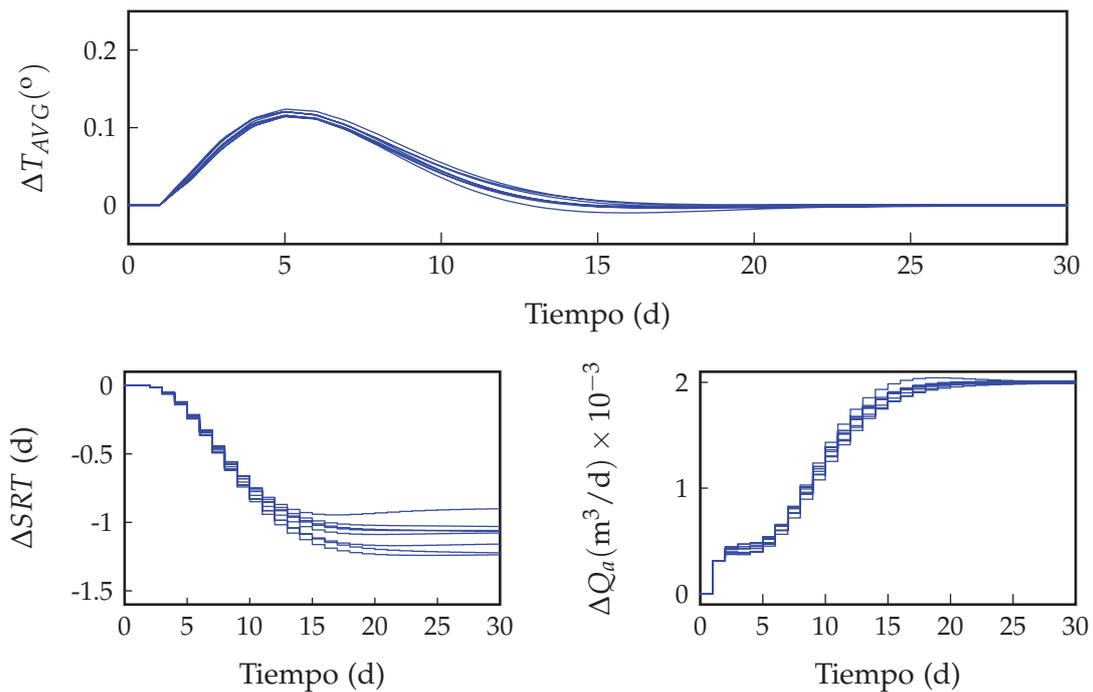


Figura 9.7: Control de ATAD. Respuestas temporales ante un cambio en la referencia del caudal de aireación ($\Delta r_{Q_a} = 2000 m^3 / \text{día}$).

9.5 OTROS RESULTADOS

Para el mismo proceso y con los mismos requisitos de diseño que se describen en la [Sección 9.1](#), en la publicación [108] se presenta una estructura de control MISO de tipo paralelo ([Figura 7.3](#)). El diseño serie presentado en la sección anterior es equivalente al diseño paralelo. En [108] se analizan en profundidad los resultados desde el punto de vista de la aplicación, es decir, el tratamiento del fango en el digestor ATAD. La estructura de control se prueba para el simulador no lineal AT_BSM de acuerdo a escenarios más realistas en cuanto a la variación de la temperatura del fango y del aire, así como teniendo en cuenta la variabilidad en la composición del fango de entrada. Se comparan un control manual, un control SISO a través del caudal de aireación y diferentes estrategias MISO modificando la referencia del caudal de aireación. Para la evaluación se definen y calculan diferentes índices que miden el grado de pasteurización del fango tratado (calidad), el gasto de aireación (coste), y la cantidad de fango tratado (producción). La principal conclusión es que, por un lado, el control automático de la temperatura permite regular el nivel de pasteurización, tanto en estructuras SISO como MISO. Con el fin de ahorrar costes de aireación, se eligen las consignas de temperatura mínimas que aseguran el grado de pasteurización de acuerdo con la legislación. El control realimentado vigila que esta temperatura se mantenga en los rangos de consigna previstos a pesar de las perturbaciones. Y por otro lado, el control del caudal de aire estableciendo una consigna (exclusivo del control MISO) permite además operar el digestor de acuerdo a diferentes estrategias. Modificando dicha consigna se consigue o bien minimizar los costes de aireación, o bien maximizar la producción, o bien ajustar la producción a los requerimientos marcados por los otros elementos del proceso, aguas arriba o aguas abajo del digestor.

APLICACIÓN AL CONTROL DE UN CSTR

En este capítulo se presenta la aplicación de las técnicas de diseño desarrolladas a lo largo del documento a un proceso industrial complejo. En concreto, al control de un CRTR (*Continuous Stirred-Tank Reactor*) exotérmico doblemente refrigerado. A lo largo del capítulo se muestra todo el proceso de diseño, que comprende las siguientes etapas: dimensionado de la instalación, desarrollo del modelo dinámico de comportamiento, diseño de controladores de realimentación, diseño de controladores de prealimentación y análisis de resultados.

El objetivo principal del capítulo es ilustrar las ventajas que reportan las metodologías de diseño, enmarcándolas en un proceso real, en el que la coordinación de las variables de actuación, además de emplear la mínima cantidad de realimentación, reporta beneficios operativos. A lo largo del ejemplo se muestran aspectos importantes desde un punto de vista práctico no analizados hasta ahora, como la linealización entorno a un punto de operación, la transformación de dinámicas no lineales en modelos lineales con incertidumbre, el escalado de las plantas, etc. La consideración de estos conceptos es fundamental para lograr un correcto diseño de control.

10.1 DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

El reactor CSTR es uno de los equipos más empleados en la industria química, ya que interviene en la producción de numerosos materiales sintéticos. La temperatura en el interior del reactor determina de forma directa el estado de la reacción. Este hecho y la facilidad para tomar medidas de la misma (sensores baratos), produce que sea la variable controlada en la mayor parte de las aplicaciones.

En este tipo de reactores pueden llevarse a cabo reacciones endotérmicas y exotérmicas. En el primer caso, la reacción necesita aporte de calor externo para ser activada, por lo que el problema de control es relativamente sencillo. Téngase en cuenta que en el peor de los casos la reacción se apagará lentamente debido a un aporte energético inferior al demandado. Por el contrario, las reacciones exotérmicas generan un calor que debe ser evacuado de forma adecuada, ya que en caso contrario puede producirse un incremento de temperatura ininterrumpido (téngase en cuenta que el aporte de combustible es constante), que deriva en comportamientos inestables. El control de este tipo de reacciones ha sido ampliamente estudiado en la literatura científica [97, 95].

La evacuación del calor generado en la reacción suele llevarse a cabo empleando un fluido refrigerante (normalmente agua fría). Desde un punto de vista tecnológico pueden emplearse tres alternativas. La primera y más extendida consiste en el empleo de chaquetas refrigeradoras (casquillos). La segunda, consiste en el empleo de serpentines situados en el interior del reactor. Por último, pueden emplearse estrategias mixtas que combinan un casquillo y un serpentín [150, 149].

La mayor parte de las estrategias de control existentes en la literatura científica manipulan el caudal del fluido refrigerador para gobernar la temperatura del reactor, empleando estructuras de control SISO. No obstante, el empleo de estrategias que manipulan el caudal del reactivo, o una combinación de los dos caudales (refrigerante y reactivo) pueden ser interesantes para mejorar ciertos aspectos del proceso productivo. Véase como ejemplo un reactor con capacidad de evacuación de calor limitada. En este caso, el gobierno de la temperatura con el caudal de alimentación maximiza la producción si se fija el caudal de refrigeración a su valor máximo. En esta línea, Luyben [97] presenta una estrategia de control para reactores CSTR fundamentada en el control VPC (*Valve Position Control*) propuesto por Shinskey [131]. En ella la temperatura es gobernada mediante el empleo coordinado de los caudales de alimentación del reactivo y del fluido refrigerante, buscando que en régimen permanente el caudal de la chaqueta de refrigeración vuelva a su punto de operación, el cual será fijado próximo al valor máximo. De este modo, las perturbaciones de la temperatura son eliminadas en régimen permanente con la manipulación del caudal de alimentación, permitiendo maximizar el mismo y, por lo tanto, maximizando la producción del equipo.

10.2 DIMENSIONADO Y MODELADO DE LA INSTALACIÓN

En este caso se propone el empleo de un reactor CSTR doblemente refrigerado (casquillo y serpentín) como el de la [Figura 10.1](#), para el control de una reacción exotérmica. El esquema de control presentado en la [Figura 10.1](#), se corresponde con el de la estructura de control MISO serie. En él se muestra como el control debe ser llevado a cabo mediante la manipulación coordinada de los dos caudales de refrigeración, junto con el caudal de alimentación. Se desea que la chaqueta refrigeradora actúe como elemento principal en la extracción del calor generado, mientras que el objetivo del serpentín es actuar como elemento auxiliar que permita una manipulación dinámica más sencilla. Además se desea maximizar la producción (el flujo de producto), lo que implica gobernar en régimen permanente con el flujo de alimentación, tal como se ha descrito anteriormente para la estrategia VPC. Véase como para poder llevar a cabo la estrategia de control de la temperatura con las tres variables de control mencionadas es necesario un lazo de control adicional, encargado de mantener constante el nivel de llenado del reactor (LC en la [Figura 10.1](#)). En el presente trabajo se supone que este control de nivel está en funcionamiento y responde a un comportamiento ideal, por lo que se considera que el volumen en el reactor es constante $V_r = cte$.

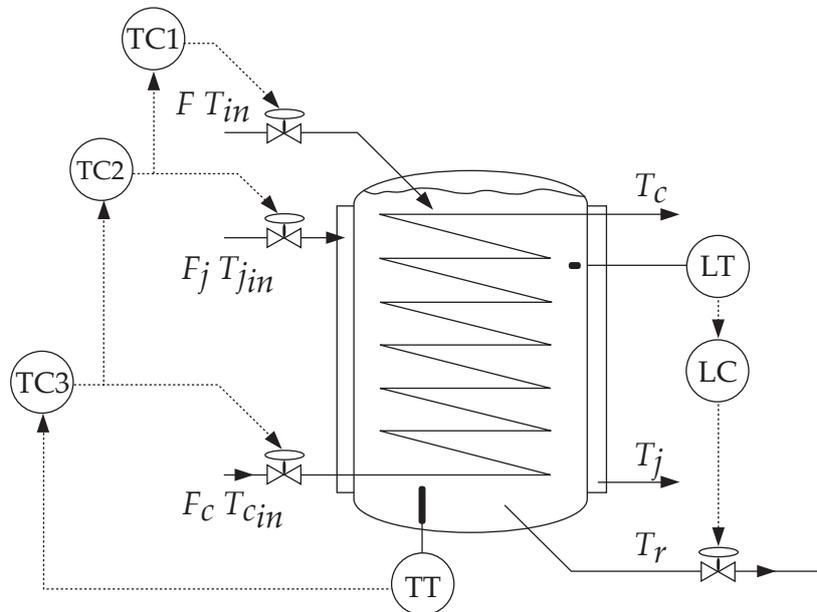


Figura 10.1: Esquema de control del CSTR doblemente refrigerado.

Los parámetros para el dimensionado del reactor se indican en la [Tabla 10.1](#), y coinciden con los presentados en [97, Capítulo 2]. El dimensio-

nado del reactor se lleva a cabo empleando las ecuaciones que gobiernan el régimen estacionario (ver [Sección C.1](#)). En este caso, se emplea una modificación del procedimiento propuesto en [97]. Esta modificación ha sido necesaria para incorporar en el proceso de diseño el segundo circuito de refrigerante, ya que los procedimientos presentados en [97, Capítulo 2] sólo son adecuados para reactores refrigerados o bien con casquillo o bien con serpentín. En nuestro caso el calor extraído del reactor se reparte entre la chaqueta y el serpentín según un factor $\alpha \in [0, 1]$ (ver paso de diseño 8) y, por lo tanto, se emplea un serpentín con un número de espiras¹ $NL = \alpha NL_0$; siendo NL_0 las espiras empleadas cuando el reactor es refrigerado únicamente por este sistema (ver paso de diseño 6).

Fijada la temperatura de trabajo nominal deseada para el reactor T_r [K], la tasa de producción nominal F [m³/s] y el factor de reducción deseado x [%], se emplean los siguientes pasos de diseño para obtener el dimensionado de la instalación:

1. En el primer paso, conocido el factor de reducción deseado (condición de diseño) y la concentración en la entrada $C_{a_{in}}$, se obtiene la concentración C_a en el flujo de salida

$$C_a = C_{a_{in}} - \frac{x C_{a_{in}}}{100}. \quad (10.1)$$

2. Una vez fijada la temperatura del reactor (condición de diseño) puede obtenerse la velocidad de reacción

$$k = k_0 e^{\frac{-E}{RT_r}}. \quad (10.2)$$

3. Con los parámetros anteriores puede calcularse el volumen del reactor V_r a partir de (C.1) según

$$V_r = F \frac{C_{a_{in}} - C_a}{C_a k}. \quad (10.3)$$

4. Conocido el volumen y la relación de aspecto pueden obtenerse el diámetro D y la longitud L del reactor

$$D = \sqrt[3]{\frac{2V_r}{\pi}}; \quad L = 2D. \quad (10.4)$$

¹ Se emplea un número entero de espiras.

5. Con el diámetro y la longitud del reactor puede obtenerse el área de intercambio térmico del casquillo A_j y el volumen de líquido refrigerante V_j almacenado en éste

$$A_j = \pi DL; \quad V_j = \frac{1}{4}((D + 2E_j)^2 - D^2)\pi L, \quad (10.5)$$

donde E_j se corresponde con el espesor del casquillo.

6. Del mismo modo, pueden calcularse los datos del serpentín para lo que se emplea el diámetro de la tubería d_c y las dimensiones del reactor

$$L_c = \pi \beta D \frac{\alpha L}{2d_c}; \quad A_c = \pi d_c L_c; \quad V_c = \frac{1}{4} \pi d_c^2 L_c. \quad (10.6)$$

L_c se corresponde con la longitud del serpentín, A_c con el área de intercambio térmico y V_c con el volumen de refrigerante almacenado en el serpentín.

7. En el siguiente paso se calcula el calor a extraer del reactor Q , para lo que se emplea (C.3) y los datos calculados en pasos anteriores

$$Q = \rho c_p F (T_{in} - T_r) - V_r \lambda C_a k. \quad (10.7)$$

8. El calor a extraer se reparte entre los dos elementos refrigeradores, casquillo Q_j y serpentín Q_c , según el parámetro α

$$Q_j = (1 - \alpha)Q; \quad Q_c = \alpha Q. \quad (10.8)$$

9. Conocido el calor a extraer por el casquillo y su área de intercambio térmico A_j , puede obtenerse la temperatura en el interior de la misma empleando (C.5)

$$T_j = T_r - \frac{Q_j}{UA_j}. \quad (10.9)$$

10. Conocida la temperatura en el casquillo y el calor a extraer, puede emplearse (C.6) para obtener el caudal necesario en la chaqueta

$$F_j = \frac{Q_j}{\rho_j c_{p_j} (T_j - T_{jin})}. \quad (10.10)$$

11. A continuación, se calculan los parámetros del serpentín mediante el empleo de un proceso iterativo.

a) Se estima un valor para la temperatura de salida \bar{T}_c , y con el se estima el incremento medio de temperatura logarítmica $\Delta\bar{T}_{lm}$

$$\bar{T}_c \rightarrow \Delta\bar{T}_{lm} = \frac{(T_r - T_{cin}) - (T_r - \bar{T}_c)}{\ln\left(\frac{T_r - \bar{T}_{cin}}{T_r - \bar{T}_c}\right)} \quad (10.11)$$

b) Estimado el incremento medio de temperatura logarítmica, empleando (C.7) se estima el calor extraído por el serpentín \bar{Q}_c

$$\bar{Q}_c = A_c U \Delta\bar{T}_{lm} \quad (10.12)$$

c) Se obtiene el error de la estimación

$$e_{Q_c}(\%) = 100 \frac{\bar{Q}_c - Q_c}{Q_c} \quad (10.13)$$

d) Evaluación del error de estimación

- $|e_{Q_c}(\%)| \leq 1\%$ Fin del proceso iterativo: $T_c = \bar{T}_c$, $T_{lm} = \bar{T}_{lm}$
- $|e_{Q_c}(\%)| \geq 1\%$ Vuelta al paso (a) con un nuevo valor para \bar{T}_c . Para la elección de la nueva temperatura se emplea la siguiente lógica:
 - $e_{Q_c}(\%) \geq 0 \rightarrow \bar{T}_c = \bar{T}_c - 0.001$
 - $e_{Q_c}(\%) < 0 \rightarrow \bar{T}_c = \bar{T}_c + 0.001$

12. Por último, calculada la temperatura de salida del serpentín, puede emplearse (C.9) para obtener el caudal necesario en el serpentín

$$F_c = \frac{Q_c}{\rho_c c_{p_c} (T_c - T_{cin})}. \quad (10.14)$$

Para el ejemplo actual se fijan los valores objetivo: $T_r = 350$ K, $F = 4.377 \times 10^{-4}$ m³/s y $x = 90$ %. Tras aplicar los pasos enumerados se

obtienen las dimensiones del reactor y los valores de las variables mostrados en la [Tabla 10.1](#). Los valores calculados para el punto de operación (caudales de entrada y temperaturas de salida) corresponden con los nominales para el reactor diseñado². Además, se reflejan en la tabla los valores máximos considerados para los caudales de entrada (F_{max} , F_{jmax} , F_{cmax}).

Para llevar a cabo el control del reactor es necesario obtener el modelo dinámico lineal MISO, empleado para el diseño de los controladores. En la [Sección C.2](#) se muestran las ecuaciones no lineales que gobiernan el régimen dinámico. En la [Sección C.3](#) se ilustra el proceso seguido para su linealización en torno a un punto de operación. Tras aplicar el procedimiento propuesto en la [Sección C.3](#) pueden obtenerse modelos de pequeña señal, que presentan la siguiente estructura:

$$\hat{p}_{i=1,\dots,5}(s) = \frac{b_{i3}s^3 + b_{i2}s^2 + b_{i1}s + b_{i0}}{s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}, \quad (10.15)$$

donde el subíndice i es empleado para determinar el par entrada-salida. La asignación correspondiente con el esquema de la [Figura 10.2](#) es:

- $\hat{p}_1(s) = \Delta T_r(s) / \Delta F(s)$
- $\hat{p}_2(s) = \Delta T_r(s) / \Delta F_j(s)$
- $\hat{p}_3(s) = \Delta T_r(s) / \Delta F_c(s)$
- $\hat{p}_4(s) = \Delta T_r(s) / \Delta C_{a_{in}}(s)$
- $\hat{p}_5(s) = \Delta T_r(s) / \Delta T_{in}(s)$ (ver nota³).

Téngase en cuenta que las funciones de transferencia $p_i(s)$ expresan las variaciones con respecto al punto de operación:

- $\Delta T_r(t) = T_r(t) - T_{r_0}$
- $\Delta F(t) = F(t) - F_0$
- $\Delta F_j(t) = F_j(t) - F_{j_0}$
- $\Delta F_c(t) = F_c(t) - F_{c_0}$

² En la [Tabla 10.1](#) se muestran con el subíndice «o» para diferenciarlos de los valores obtenidos en otros puntos de operación.

³ En la construcción del modelo dinámico se considera que la temperatura de entrada de los tres fluidos es idéntica $T_{in} = T_{j_{in}} = T_{c_{in}}$ (ver [Sección C.2](#)).

Tabla 10.1: Datos del reactor CSTR.

PARÁMETROS DE LA REACCIÓN EXOTÉRMICA IRREVERSIBLE		
Factor preexponencial k_0	s^{-1}	20.75×10^6
Energía de activación E	J/kmol	69.71×10^6
Peso molecular del producto	kg/kmol	100
Densidad del producto ρ_{in} and ρ	kg/m ³	801
Densidad del refrigerante ρ_j, ρ_c	kg/m ³	1000
Calor específico del producto c_{pin} and c_p	Jkg ⁻¹ K ⁻¹	3137
Calor específico del refrigerante c_{pj}, c_{pc}	Jkg ⁻¹ K ⁻¹	4183
Calor de reacción λ	J/kmol	-69.71×10^6
Temperatura de alimentación T_{in}	K	290
Concentración del reactivo C_{ain}	kmol/m ³	8.01
Temperaturas de entrada T_{jin}, T_{cin}	K	290
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS DEL REACTOR		
Relación de aspecto L/D	—	2
Coefficiente de transferencia de calor U	Wm ⁻² K ⁻¹	851
Espesor del casquillo E_j	m	0.2
Diámetro de la tubería del serpentín d_c	m	5.08×10^{-2}
Diámetro de las espira del serpentín β	—	0.8
DIMENSIONADO Y VARIABLES EN EL PO. NOMINAL		
Volumen del reactor V_r	m ³	4.77
Diámetro del reactor D	m	1.45
Longitud del reactor L	m	2.90
Número de espiras del serpentín	—	7
Factor de reducción x	%	90
Factor de reparto de calor extraído α	—	0.25
Concentración nominal en la salida C_{ao}	kmol/m ³	0.8
Caudal nominal de reactivo F_o	m ³ /s	4.37×10^{-4}
Caudal nominal de refrigerante en la chaqueta F_{jo}	m ³ /s	5.50×10^{-4}
Caudal nominal de refrigerante en el serpentín F_{co}	m ³ /s	1.53×10^{-4}
Caudal máximo de reactivo $F_{m\acute{a}x}$	m ³ /s	11.96×10^{-4}
Caudal máximo de refrigerante en la chaqueta $F_{j\acute{m}a\acute{x}}$	m ³ /s	8.45×10^{-4}
Caudal máximo de refrigerante en el serpentín $F_{c\acute{m}a\acute{x}}$	m ³ /s	3.04×10^{-4}
Temperatura nominal en el reactor T_{ro}	K	350
Temperatura nominal en la chaqueta T_{jo}	K	339.8
Temperatura nominal en la salida del serpentín T_{co}	K	349.72

■ $\Delta C_{ain}(t) = C_{ain}(t) - C_{ain,0}$

$$\blacksquare \Delta T_{in}(t) = T_{in}(t) - T_{in,o}$$

Los valores $T_{r,o}$, F_o , $F_{j,o}$, $F_{c,o}$, $C_{a_{in},o}$, $T_{in,o}$ corresponden con los valores en el punto de operación para el que se ha diseñado el reactor.

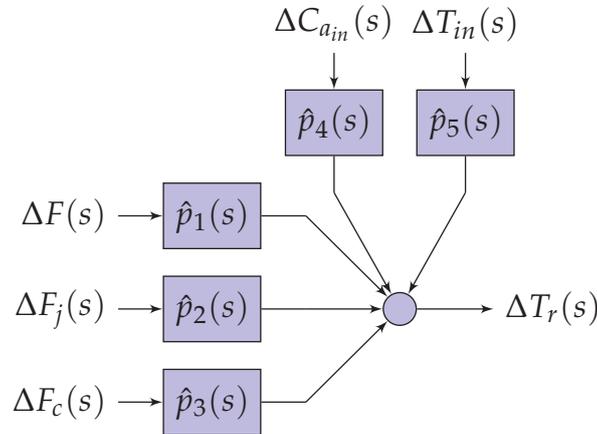


Figura 10.2: Estructura del modelo lineal de pequeña señal del CSTR.

Como se observa en la [Sección C.3](#), los coeficientes del denominador a_j y de los numeradores b_{i_k} dependen de las constantes del sistema (volumen del depósito, calores específicos, densidades, etc.) y del punto de operación seleccionado. Dado que el sistema puede trabajar en varios puntos de operación, el sistema de control debe contemplar el comportamiento dinámico del sistema en cada uno de los posibles puntos de trabajo. Esta información puede obtenerse empleando modelos dinámicos con incertidumbre. Considerando que las constantes del sistema son invariantes, puede definirse la incertidumbre del sistema en función del punto de operación seleccionado. Se seleccionan como variables libres, la concentración de entrada del reactivo $C_{a_{in}}$, la temperatura de los fluidos de entrada T_{in} y el flujo de alimentación de la chaqueta F_j . Por lo tanto, el espacio de la incertidumbre \mathcal{Q} , queda definido por el vector de parámetros

$$\mathbf{q} = [F_j, T_{in}, C_{a_{in}}]. \quad (10.16)$$

Para este ejemplo se seleccionan valores comprendidos entre los siguientes intervalos de variación: $F_j \in [0.5F_{j_{\text{máx}}}, 0.7F_{j_{\text{máx}}}]$, $C_{a_{in}} \in [0.8C_{a_{in},o}, 1.2C_{a_{in},o}]$ y $T_{in} \in [285, 295]$. Fijado el espacio de la incertidumbre, éste se discretiza empleando la siguiente rejilla

- Flujo de alimentación:

$$F_j = [4.23, 4.65, 5.07, 5.50, 5.92] \times 10^{-4}.$$

- Concentración de entrada:

$$C_{a_{in}} = [6.408, 7.209, 8.010, 8.8110, 9.612].$$

- Temperatura de entrada:

$$T_{in} = [285, 288, 290, 295].$$

Se combinan los elementos de las rejillas anteriores, generándose 100 casos. A cada uno de ellos se le añaden las otras dos variables libres, $T_r = 350$ y $F_c = 1.53 \times 10^{-4}$, para las que no se considera incertidumbre y se adopta su valor nominal. Para cada una de las 100 combinaciones posibles de las variables libres, se calculan el resto de variables que definirían el punto de operación del reactor aplicando los siguientes pasos de cálculo:

1. Conocida la temperatura en el reactor y el flujo en la chaqueta, puede obtenerse la temperatura en la misma igualando (C.5) y (C.6)

$$T_j = \frac{UA_j T_r + F_j \rho_j c_{p_j} T_{jin}}{UA_j + F_j \rho_j c_{p_j}} \quad (10.17)$$

2. Conocida la temperatura de la chaqueta puede obtenerse el calor extraído por la misma

$$Q_j = UA_j (T_r - T_j). \quad (10.18)$$

3. Para obtener la temperatura del serpentín y el incremento medio de temperatura logarítmica se emplea un proceso iterativo.

- a) Se estima la temperatura del serpentín \bar{T}_c y con esta el incremento de temperatura media logarítmica $\Delta \bar{T}_{ml}$
- b) Se obtiene el calor en el serpentín a partir de las ecuaciones (C.7) y (C.9), y se divide para obtener el error de estimación

$$e_{Q_c} = \frac{F_c \rho_c c_{p_c} (\bar{T}_c - T_{c_{in}})}{\Delta \bar{T}_{ml} A_c U} \quad (10.19)$$

- c) Se emplea la misma estrategia de evaluación de resultados que en el paso 11 de diseño.

4. Conocida la temperatura en el serpentín puede obtenerse el calor extraído por este

$$Q = Q_j + Q_c. \quad (10.20)$$

5. Con el calor extraído puede obtenerse el flujo de alimentación necesario

$$F^2(\rho c_p(T_{in} - T_r)) + F(\rho c_p(T_{in} - T_r)kV_r - kV_r\lambda C_{a_0}) - Q) - QV_rk = 0. \quad (10.21)$$

6. Conocido el flujo de alimentación puede obtenerse la concentración de salida

$$C_a = F \frac{C_{a_0}}{V_rk + F}. \quad (10.22)$$

7. Por último, se obtiene el factor de reducción

$$x(\%) = 100 \frac{C_a - C_{a_0}}{C_{a_0}}. \quad (10.23)$$

Una vez obtenidos los diferentes puntos de operación, se calculan los modelos lineales que determinan el comportamiento del sistema. Dichos modelos se obtienen aplicando el procedimiento presentado en la [Sección C.3](#).

Llegados a este punto, se dispone de una serie de modelos lineales con incertidumbre paramétrica. Para poder trabajar con ellos de forma adecuada se recomienda efectuar un escalado según lo expuesto en [137], que permita establecer comparaciones apropiadas entre las diferentes plantas. Se obtendrán funciones de transferencia cuya entrada ha sido escalada al rango ± 1 . Para ello, se suponen los siguientes rangos de funcionamiento para cada una de las variables de entrada:

- Flujo de alimentación: En el punto nominal el sistema trabaja al 36.6 % de su capacidad máxima. Véase cómo la incertidumbre empleada produce que los puntos de operación admisibles abarquen un rango de actuación comprendido entre el 25.4 % y el 70 %. El resto del flujo será empleado para combatir las perturbaciones (ver [Figura 10.3](#)).

- Flujo en el casquillo: En el punto nominal el sistema trabaja al 65 % de su capacidad máxima. Véase cómo la incertidumbre empleada produce que los puntos de operación admisibles abarquen un rango de actuación comprendido ente el 50 % y el 70 %. El resto del flujo será empleado para combatir las perturbaciones.
- Flujo en el serpentín. En todos los puntos de operación el sistema trabaja al 50 % de su capacidad máxima, presentando un rango de actuación simétrico.
- Concentración en el flujo de entrada. Se supone que la variación máxima en la concentración de entrada es del 20 % del valor nominal.
- Temperatura de los flujos de entrada. Se supone que el sistema admite perturbaciones que representan cambios en la temperatura de entrada de $\pm 5^\circ$ con respecto a la temperatura de entrada nominal.

Conocidos los valores máximos y mínimos pueden escalarse las funciones de transferencia para que trabajen en tanto por uno. Es decir, aplicar una acción de control $u_1 = \pm 1$ en la planta $p_1(s)$, equivale a aplicar una variación $\pm 3.04 \times 10^{-4} [m^3/s]$ en el flujo de entrada de $\hat{p}_1(s)$. Una vez finalizado el proceso anterior se obtienen los modelos de comportamiento para el diseño del sistema de control; las plantas escaladas son $p_{i=1,\dots,5}(s)$. La [Tabla 10.2](#) muestra el valor mínimo y máximo para cada uno de los coeficientes del modelo con incertidumbre (10.15). En la [Figura 10.5](#) se muestran los diagramas de Bode de magnitud para las plantas escalas.

Como puede comprobarse en la [Tabla 10.2](#), las plantas $p_{2,3}(s)$ presentan ganancia inversa (ganancia negativa), que implica un decremento de la temperatura del reactor para incrementos positivos de los caudales de refrigeración. Para simplificar el diseño de los controladores se tomarán dichas plantas con ganancia positiva y se cambiará posteriormente el signo del controlador. La estructura de control será por tanto [Figura 10.4](#).

Véase como los cambios de signo en los coeficientes b_{k_1} indican que la planta $p_1(s)$ presenta dinámicas de fase no mínima y, por lo tanto, su ancho de banda en lazo cerrado deberá estar limitado. Teniendo en cuenta todas las plantas dentro de la incertidumbre, el cero de fase no mínima más restrictivo se sitúa en $s = 9.7318 \times 10^{-4}$, por lo que esta

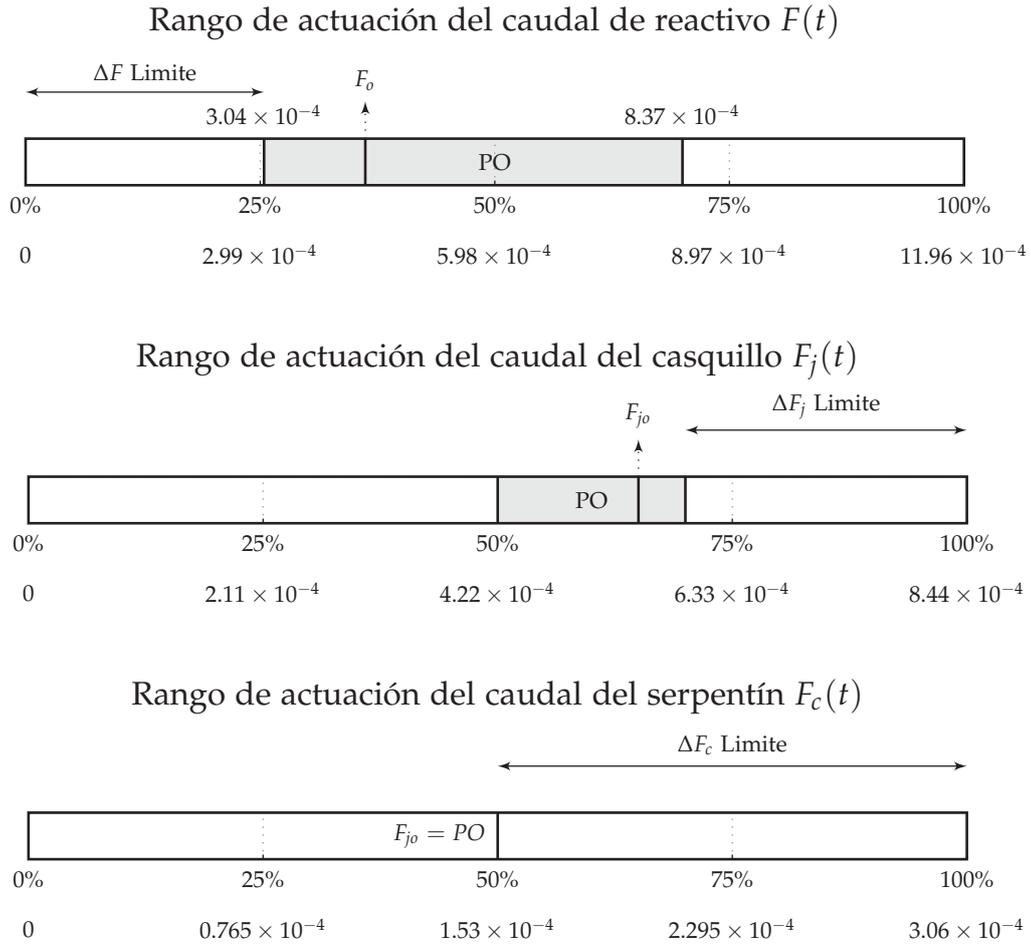


Figura 10.3: Escalado de las acciones de control.

planta presentará una pulsación de cruce de ganancia máxima aproximada de $\omega_{cg1_{\text{máx}}} = 0.0017 \text{ rad/s}$. Por lo tanto, deberá evitarse su empleo en medias y altas frecuencias.

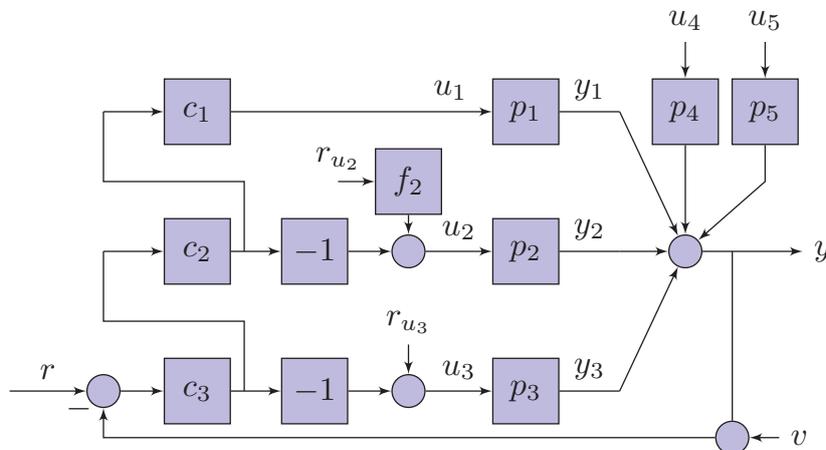


Figura 10.4: Esquema de control para gobernar el CSTR linealizado.

Tabla 10.2: Incertidumbre en los parámetros de las plantas.

	mín	máx		mín	máx
a_0	2.06×10^{-12}	3.38×10^{-12}	b_{0_1}	7.46×10^{-11}	1.80×10^{-10}
a_1	1.11×10^{-8}	1.94×10^{-8}	b_{1_1}	-3.23×10^{-9}	1.06×10^{-7}
a_2	3.12×10^{-5}	3.87×10^{-5}	b_{2_1}	-7.44×10^{-5}	-6.26×10^{-5}
a_3	2.08×10^{-2}	2.12×10^{-2}	b_{3_1}	-3.90×10^{-3}	-3.40×10^{-3}
b_{0_2}	-8.02×10^{-11}	-6.6×10^{-11}	b_{0_3}	-5.62×10^{-11}	-4.51×10^{-11}
b_{1_2}	-8.85×10^{-8}	-7.61×10^{-8}	b_{1_3}	-1.10×10^{-7}	-9.29×10^{-8}
b_{2_2}	-4.44×10^{-6}	-3.84×10^{-6}	b_{2_3}	-5.23×10^{-5}	-4.76×10^{-5}
b_{3_2}	0	0	b_{3_3}	0	0
b_{0_4}	4.36×10^{-12}	1.21×10^{-11}	b_{0_5}	2.41×10^{-11}	4.53×10^{-11}
b_{1_4}	4.45×10^{-9}	1.18×10^{-8}	b_{1_5}	3.89×10^{-8}	7.11×10^{-8}
b_{2_4}	2.22×10^{-7}	5.87×10^{-7}	b_{2_5}	1.35×10^{-5}	2.63×10^{-5}
b_{3_4}	0	0	b_{3_5}	3.61×10^{-4}	9.52×10^{-4}

Pese a estar representada en la arquitectura de control, la perturbación producida por u_4 es irrelevante para el diseño del sistema de control, ya que la respuesta frecuencial de la planta $p_5(s)$ presenta mayor magnitud que la de $p_4(s)$ en todo el espectro frecuencial, para todos los casos dentro del espacio de la incertidumbre (ver Figura 10.5). Por lo tanto, las restricciones para el diseño de los controladores estarán impuestas por el conjunto $u_5 - p_5(s)$.

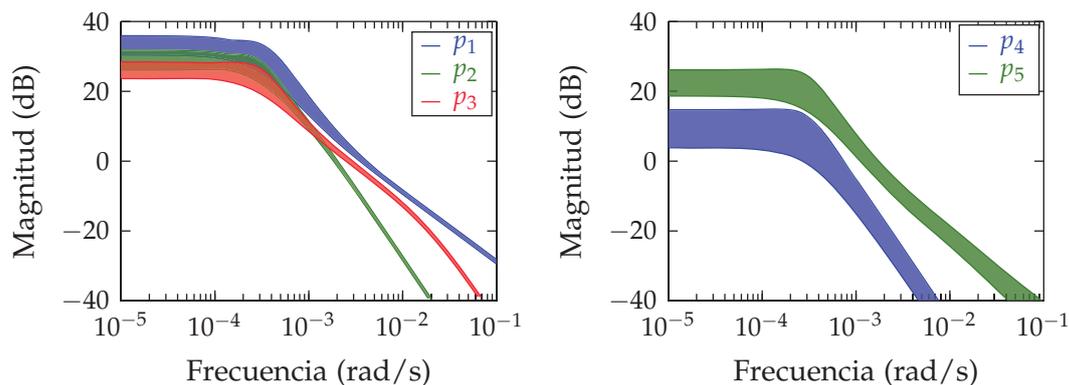


Figura 10.5: Magnitud de la respuesta frecuencial de los modelos lineales con incertidumbre.

10.3 DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL

Se establecen las siguientes especificaciones de funcionamiento en lazo cerrado para el sistema de control mostrado en la [Figura 10.4](#):

- Estabilidad robusta. Se desea que cada uno de los lazos independientes presenten un margen de fase $MF=30^\circ$. Para ello se emplea la cota

$$W_s = \left| \frac{0.5}{\cos(\pi(180 - MF)/(360))} \right| = 1.932, \quad (10.24)$$

junto con las inecuaciones

$$\left| \frac{l_{i=1,2,3}(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_s; \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (10.25)$$

donde $l_{i=1,2,3}$ se corresponden con $l_3 = p_3c_3$, $l_2(j\omega) = p_2c_3c_2(j\omega)$ y $l_1 = p_1c_3c_2c_1$.

- Rechazo robusto de perturbaciones. Para el rechazo robusto de perturbaciones se emplea el modelo superior

$$W_d(\omega) = \left| \frac{453j\omega}{(j\omega/0.003 + 1)^2} \right|, \quad (10.26)$$

que garantiza una desviación máxima en la temperatura de 0.5° , y un rechazo tal que transcurridos 20 minutos la amplitud de la perturbación es inferior a 0.15° . Para lograr dicho comportamiento el sistema en lazo cerrado debe satisfacer

$$\left| \frac{p_{4,5}(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_d(\omega); \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (10.27)$$

El cálculo de contornos de diseño QFT y el *loop-shaping* de controladores se realiza empleando el vector de frecuencias discretas

$$\Omega = [0.00001, 0.0001, 0.0003, 0.0005, 0.0007, 0.001, 0.002, 0.003, 0.005, 0.008, 0.01]. \quad (10.28)$$

Se ha optado por un vector con un número elevado de frecuencias puesto que el diseño presenta interés en un gran intervalo frecuencial, ya que las plantas presentan diferentes comportamientos en las distintas

bandas de frecuencia, y Ω debe abarcar el espectro frecuencial de todas ellas.

Las selección de las frecuencias de trabajo asignadas a cada una de las plantas se realiza en función del comportamiento dinámico de las mismas y siguiendo el criterio marcado por la estructura de control. En este caso, se emplean las siguientes bandas de trabajo:

- Planta $p_1(s)$: baja frecuencia $\omega \in (0, 0.0001]$.
- Planta $p_2(s)$: medias frecuencias $\omega \in [0.0001, 0.001]$.
- Planta $p_3(s)$: alta frecuencia $\omega \in [0.001, \infty)$.

Véase como el reparto anterior corresponde con el comportamiento lógico de la instalación. Ante una perturbación, el serpentín reaccionará en primera instancia, por tratarse del elemento más rápido. En una segunda etapa el casquillo, que presenta un mayor impacto sobre la variable controlada, efectuará la regulación del sistema. Por último, el flujo del reactivo será adaptado para absorber la perturbación y devolver al sistema de refrigeración el valor determinado por sus referencias.

A continuación se presenta una descripción detallada del proceso secuencial de diseño de controladores (el número de paso es indicado con super-índices).

- o.- El cálculo inicial de *bounds* es realizado con $c_{i=1,2,3}^o(j\omega) = 0$. Por lo tanto, únicamente pueden obtenerse contornos de diseño para el lazo $l_3(j\omega)$, dado que es el único que depende de un único controlador. Los *bounds* de diseño se muestran en la [Figura 10.6](#).

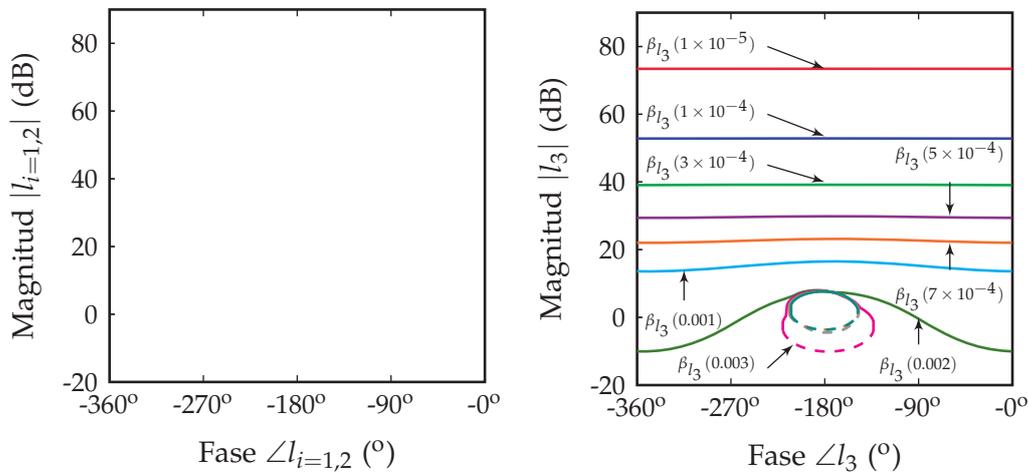


Figura 10.6: Secuencia de diseño para el CSTR. Contornos en el paso o.

I.- *Loop-shaping* de $l_3(j\omega)$ (ver la [Figura 10.7](#)). Dado que $l_3(j\omega)$ debe encargarse del control del sistema en las frecuencias $\omega \in [0.008, \infty)$, se realiza el *loop-shaping* de la rama $l_3(j\omega)$ para que ésta satisfaga las condiciones de diseño $\beta_{l_3}(\omega)$ a partir de $\omega \leq 0.001$ (color cían). Véase cómo no es necesario un cumplimiento perfecto de la especificación en la frecuencia límite inferior (0.001), ya que en esta frecuencia $l_2(j\omega)$ finaliza su banda de trabajo y puede completar la demanda de esfuerzo de control. En baja frecuencia se evita introducir elementos para reducir la magnitud de $l_3(j0)$, ya que en caso de ser aportados éstos deberán ser compensados por los controladores que se diseñen posteriormente en la secuencia. Téngase en cuenta que el controlador visto por el resto de ramas incluye al controlador $c_3(j\omega)$. En alta frecuencia, una vez alcanzada la frecuencia de *roll-off*, la ganancia del lazo es reducida todo lo posible, del mismo modo que en un diseño SISO clásico. Después del paso I, los controladores son:

$$\begin{aligned} c_1^I(s) &= c_1^0(s) = 0, \\ c_2^I(s) &= c_2^0(s) = 0, \\ c_3^I(s) &= \frac{1.6}{(s/0.02 + 1)^2}. \end{aligned} \tag{10.29}$$

Una vez realizado el diseño de $c_3(s)$, pueden obtenerse los *bounds* para el *loop-shaping* de la rama $l_2(j\omega)$ (ver la [Figura 10.7](#)). Sin embargo, siguen sin ser accesibles las condiciones de diseño para la rama $l_1(j\omega)$, por encontrarse el controlador $c_2(s)$ sin diseñar. Puede observarse como en las frecuencias en las que $l_3(j\omega)$ se ha situado sobre las restricciones de diseño $\beta_{l_3}(\omega)$, se han generado contornos $\beta_{l_2}(\omega)$ circulares y situados a la izquierda del plano de Nichols. Este hecho indica que las condiciones de diseño ya se encuentran satisfechas en dichas frecuencias, y los contornos delimitan las regiones en las que $l_2(j\omega)$ se sitúa en contrafase con respecto a $l_3(j\omega)$. Sin embargo, en baja frecuencia los contornos $\beta_{l_2}(\omega)$ y $\beta_{l_3}(\omega)$ muestran contornos horizontales que indican que en dichas frecuencias las condiciones de diseño no se garantizan y deben ser satisfechas por una de las dos ramas. En medias frecuencias se aprecian depresiones en $\beta_{l_2}(\omega)$, indicando que $l_3(j\omega)$ asume parte de las tareas de control. Esto es debido a que la desconexión de la rama no es inmediata y se realiza de forma progresiva.

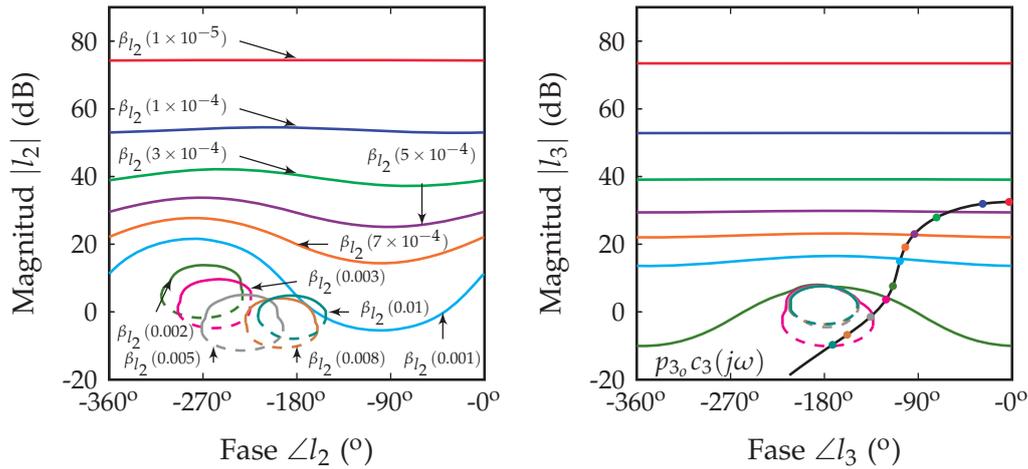


Figura 10.7: Secuencia de diseño para el CSTR. Contornos en el paso I y diseño de la rama $l_3(j\omega)$.

II.- *Loop-shaping* de $l_2(j\omega)$ (ver Figura 10.8). En este caso se satisfacen los requisitos de diseño $\beta_{l_2}(\omega)$ a partir de $\omega \geq 0.0001$ (color verde claro). Como en el caso anterior se evitan las reducciones de ganancia en baja frecuencia por ser perjudiciales para el diseño de $c_1(j\omega)$. Como en un diseño SISO clásico, una vez alcanzados los contornos circulares se considera alcanzada la frecuencia de *roll-off* y se practica una reducción brusca de la ganancia del controlador. Después del paso II, los controladores son:

$$\begin{aligned}
 c_1^{\text{II}}(s) &= c_1^{\text{O}}(s) = 0, \\
 c_2^{\text{II}}(s) &= \frac{5.5(s/0.0012 + 1)}{(s/0.00018 + 1)(s/0.01 + 1)^2}, \\
 c_3^{\text{II}}(s) &= \frac{1.6}{(s/0.02 + 1)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{10.30}$$

Una vez diseñada la rama $l_2(j\omega)$ pueden obtenerse los nuevos contornos de diseño (ver Figura 10.9). Véase como en este caso si pueden calcularse las restricciones para la rama $l_1(j\omega)$. Como en los casos anteriores, los contornos $\beta_{l_1}(\omega)$ demandan acción de control únicamente en baja frecuencia, donde las ramas $l_2(j\omega)$ y $l_3(j\omega)$ no satisfacen las condiciones de diseño. En alta frecuencia los contornos $\beta_{l_1}(\omega)$ se transforman en regiones circulares, indicando que en estas frecuencias el esfuerzo de control se encuentra repartido entre el resto de ramas. Los contornos $\beta_{l_3}(\omega)$ ahora son satisfechos

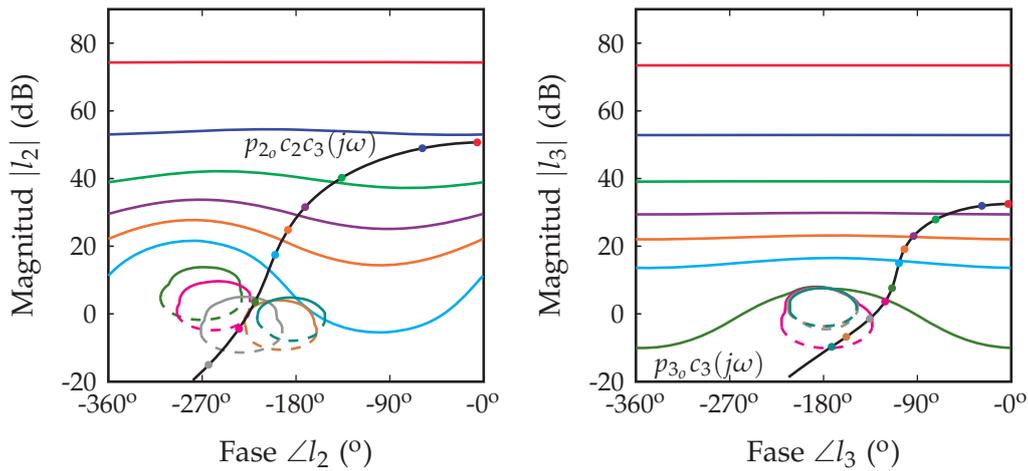


Figura 10.8: Secuencia de diseño para el CSTR. Diseño de la rama $l_2(j\omega)$.

en medias frecuencias. Esto es debido a que la rama $l_2(j\omega)$ se ha diseñado para que se encargue de la regulación del proceso en dicha banda frecuencial.

- III.- *Loop-shaping* de $l_1(j\omega)$ (ver [Figura 10.10](#)). En este caso se satisfacen las condiciones impuestas por $\beta_{l_1}(\omega)$ en todas las frecuencias, ya que es la última rama a diseñar. El diseño de $c_1(j\omega)$ se realiza como en un diseño SISO. En este caso basta con el empleo de un controlador integral. Téngase en cuenta que la rama $l_1(j\omega)$ contiene a los controladores $c_2(j\omega)$ y $c_3(j\omega)$, por lo que no es necesario incorporar polos de alta frecuencia para conseguir una brusca reducción de la magnitud de la rama en alta frecuencia. Los controladores finales son:

$$\begin{aligned}
 c_1^{\text{III}}(s) &= \frac{0.00015}{s}, \\
 c_2^{\text{III}}(s) &= \frac{5.5(s/0.0012 + 1)}{(s/0.00018 + 1)(s/0.01 + 1)^2}, \\
 c_3^{\text{III}}(s) &= \frac{1.6}{(s/0.02 + 1)^2}.
 \end{aligned} \tag{10.31}$$

Por último, pueden actualizarse los contornos de diseño una vez diseñada la rama $l_1(j\omega)$ (ver [Figura 10.10](#)). En este caso puede comprobarse como todas las ramas $l_i(j\omega)$ cumplen con las condiciones impuestas por los *bounds* de diseño $\beta_i(\omega)$. Como principal novedad con respecto al método que emplea controladores en paralelo, destacan los contornos obtenidos en baja frecuencia. Cuando

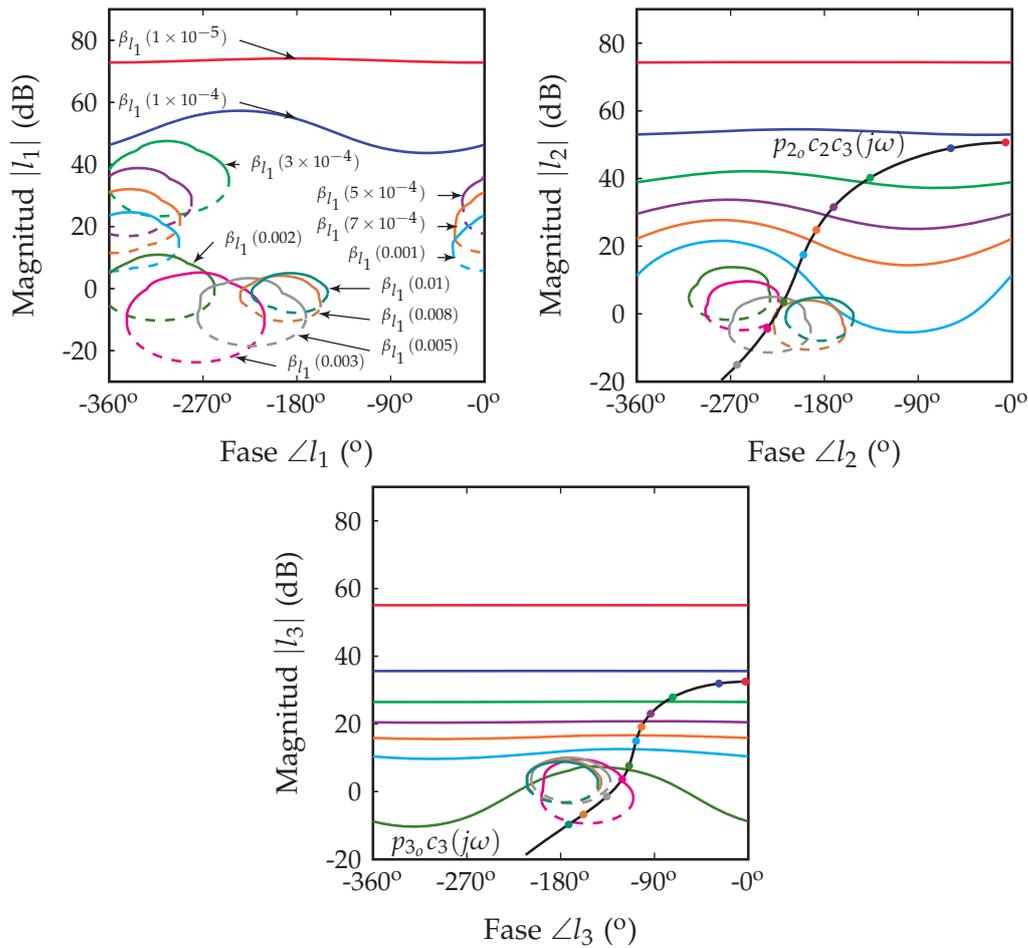


Figura 10.9: Secuencia de diseño para el CSTR. Contornos obtenidos después del diseño de la rama $l_2(j\omega)$.

se emplea la estructura de control con controladores en paralelo, los contornos de baja frecuencia en las ramas que trabajan en alta y media frecuencia ($l_2(j\omega)$ y $l_3(j\omega)$ en este ejemplo) presentan forma circular y representan regiones de exclusión. Sin embargo, en este caso los contornos de baja frecuencia expresan la magnitud mínima de estas ramas incluso en las frecuencias en las que no trabajan. Esto es debido a que las ramas de baja frecuencia se encuentran afectadas por los controladores de las ramas de alta frecuencia, y por lo tanto, cualquier variación en éstos afecta a dichas ramas. Véase cómo al diseñar $l_1(j\omega)$, los contornos de baja frecuencia $\beta_{2,3}(j\omega)$ se han adaptado de forma automática a los diseños ya realizados $l_{2,3}(j\omega)$.

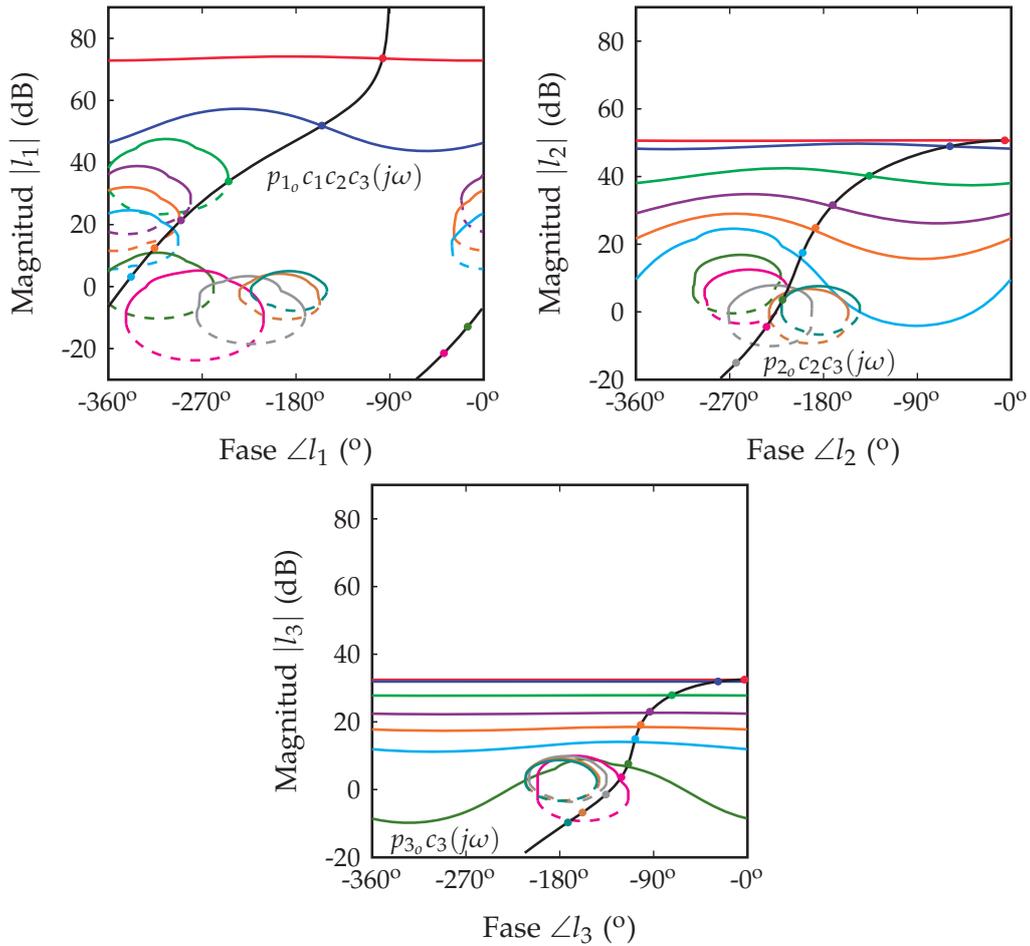


Figura 10.10: Secuencia de diseño para el CSTR. Diseño de la rama $l_3(j\omega)$.

10.4 ANÁLISIS DE LA SOLUCIÓN DE CONTROL

Una vez finalizado el diseño puede evaluarse el mismo mediante el estudio del comportamiento en lazo cerrado. En primer lugar, en la [Figura 10.11](#) se muestran las magnitudes de las respuestas frecuenciales de lazo cerrado. Éstas permiten validar que todas las plantas dentro del espacio de la incertidumbre satisfacen las condiciones impuestas por las especificaciones de diseño.

La [Figura 10.12](#) muestra el comportamiento temporal de la temperatura del reactor ante una perturbación de tipo escalón en la planta $p_5(s)$. Es decir, se considera un cambio brusco en la temperatura de entrada del reactivo. En concreto se aplica una perturbación de amplitud máxima $u_5(t) = -1$, que se corresponde con un decremento de la temperatura del reactivo de 5K. El rechazo de la perturbación se realiza según la especificación de diseño; además de la evolución de la temperatura para

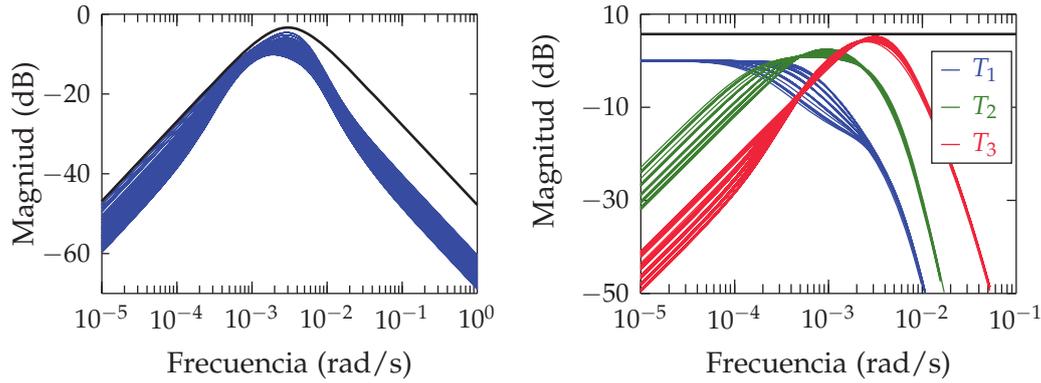


Figura 10.11: Magnitud de las respuestas frecuenciales de lazo cerrado: (izq.) rechazo de perturbaciones; (dcha.) estabilidad

los casos de incertidumbre se muestra la respuesta de la cota de especificación (nótese que la especificación se establecía para la respuesta en frecuencia, mientras que ahora estamos representado respuestas temporales, no existiendo una correspondencia exacta tiempo-frecuencia). Las respuestas de las tres salidas de las plantas (no existen en la realidad) muestran el comportamiento esperado. Por un lado, la primera salida en responder es la generada por la manipulación del serpentín. Esta salida presenta su mayor amplitud transcurridos los 30-60 primeros minutos, tiempo a partir del cual vuelve a su estado de reposo. Del mismo modo, la salida producida por la manipulación del casquillo presenta una respuesta un poco más lenta que la del serpentín, presentando su amplitud máxima transcurridas 1.5-2 horas desde la perturbación. A partir de este momento la respuesta vuelve a su valor de reposo. Por último, la respuesta generada por la manipulación del flujo de reactivo es la última en responder, manteniendo el valor necesario para compensar la perturbación en régimen permanente.

El comportamiento de las acciones de control es igualmente congruente con el reparto frecuencial establecido. En la [Figura 10.13](#) puede observarse la evolución de las tres acciones de control en el rechazo de la perturbación indicada anteriormente. Téngase en cuenta que las referencias r_{u_2} y r_{u_3} mostradas en la [Figura 10.4](#) son fijadas a $r_{u_2} = r_{u_3} = 0$ a lo largo de todo el experimento (estos valores se corresponden con el valor nominal). En este caso se observa como se cumple la secuencia de actuación esperada, retornando las acciones de control u_2 y u_3 a su punto de operación, mientras que u_1 se adapta para combatir la perturbación en régimen permanente. Véase cómo la perturbación aplicada supone

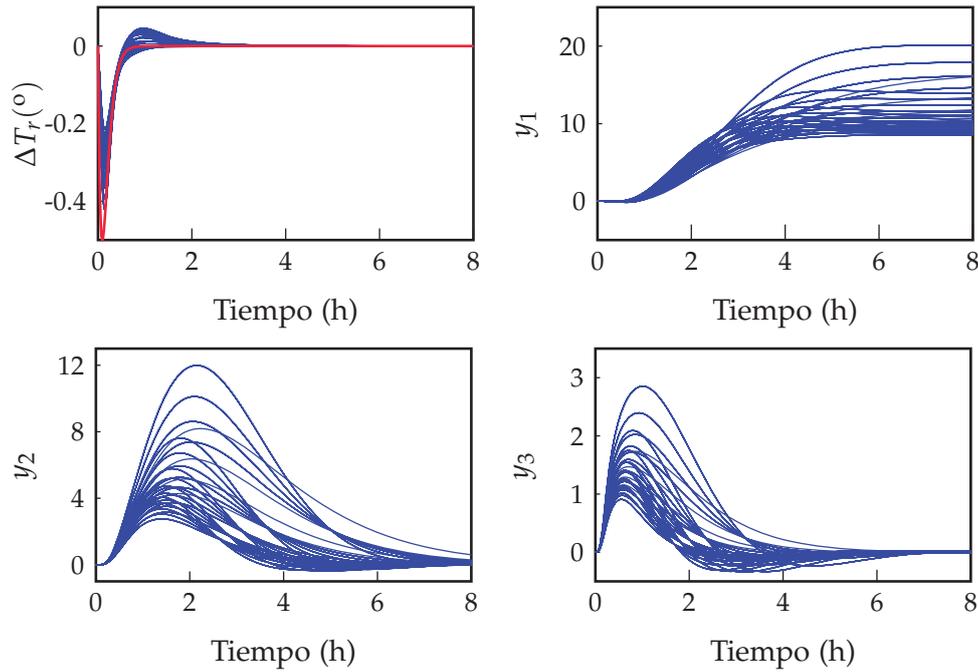


Figura 10.12: Respuesta temporal de la variable controlada $\Delta T_r(t)$ y las salidas individuales $y_i(t)$ ante una perturbación.

un incremento de la producción, ya que es combatida con un aumento de u_1 , correspondiéndose esta variable con las variaciones del flujo de reactivo.

Por último, pueden analizarse las magnitudes de los controladores en la [Figura 10.14](#). En ella se muestran las magnitudes de los controladores $c_i(j\omega)$ (líneas discontinuas) y la de los controladores totales vistos por cada una de las ramas $c_{i,t}(j\omega)$ (líneas continuas). Estos últimos corresponden con: $c_{1,t}(j\omega) = c_1(j\omega)c_2(j\omega)c_3(j\omega)$, $c_{2,t}(j\omega) = c_2(j\omega)c_3(j\omega)$ y $c_{3,t}(j\omega) = c_3(j\omega)$. La magnitud de los controladores totales muestra cómo cada una de las ramas ve un controlador con magnitud mayor al resto en las frecuencias en las que es encargada del control del proceso. Del mismo modo, puede observarse como los controladores $c_{1,t}(j\omega)$ y $c_{2,t}(j\omega)$ presentan una magnitud muy reducida en alta frecuencia, lo que confiere a sus ramas una alta inmunidad al ruido.

Estos controladores pueden compararse con los obtenidos si se emplea únicamente una de las plantas para llevar a cabo el control del sistema. Los controladores SISO necesarios en tal caso son

$$c_{2_s} = \frac{0.0014(s/0.0013 + 1)^2}{s(s/0.08 + 1)(s/0.02 + 1)^2} \quad (10.32)$$

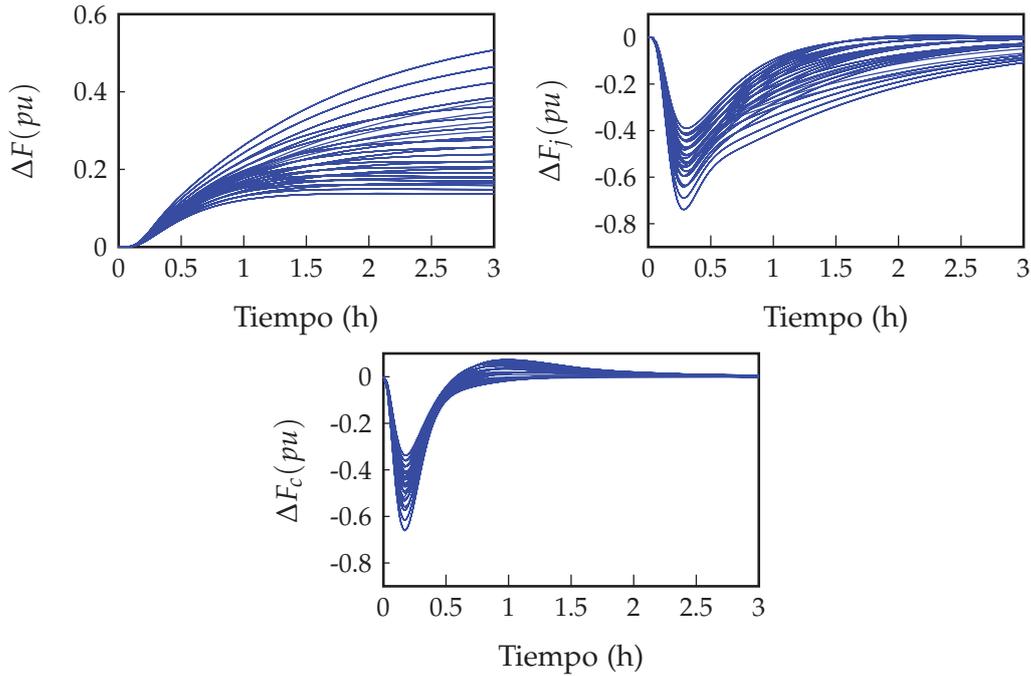


Figura 10.13: Respuesta temporal de las acciones de control ante una perturbación.

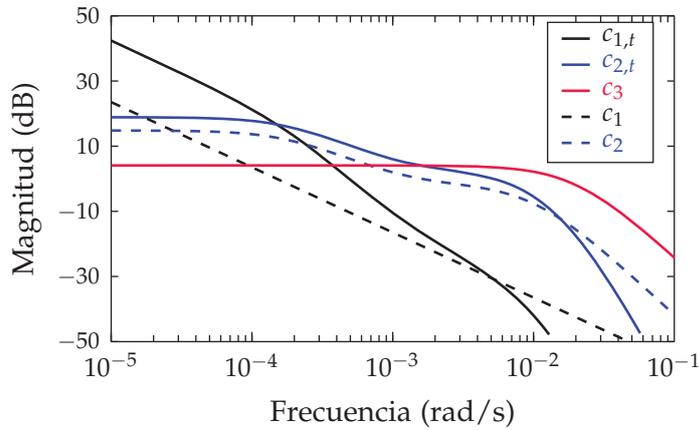


Figura 10.14: Diagramas de Bode de magnitud de $c_{i=1,2,3}(j\omega)$ y $c_{i,t}(j\omega)$.

para el control con el flujo de alimentación del casquillo, y

$$c_{3_s} = \frac{0.0019(s/0.0012) + 1}{s(s/0.02 + 1)^2}, \tag{10.33}$$

para el control con el serpentín.

No se presenta un controlador c_{1_s} , puesto que las especificaciones de control en lazo cerrado son inabordables empleando únicamente el flujo de alimentación de reactivo, debido a las dinámicas de fase no mínima.

Además esta solución carecería de sentido práctico, ya que precisamente se emplean circuitos de refrigeración para no supeditar el ratio de producción (flujo de reactivo) al control de la temperatura.

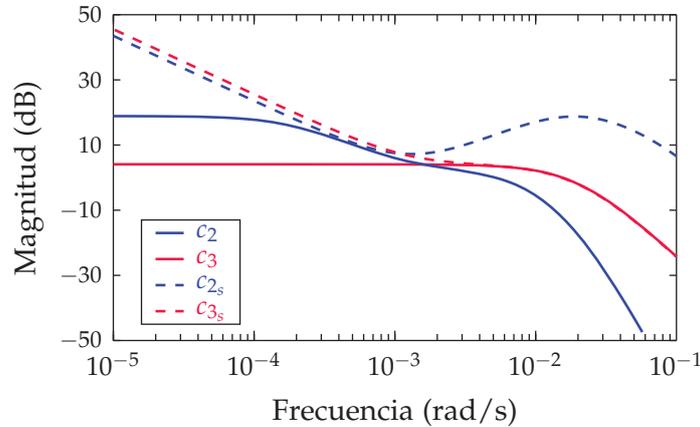


Figura 10.15: Comparativa con los controladores SISO.

En la [Figura 10.15](#) se aprecia como los controladores resultantes empleando una estructura SISO (línea discontinua), presentan una magnitud similar a los obtenidos con la estructura de control propuesta en las frecuencias en las que cada una de las plantas se encarga del control en solitario. Sin embargo, se observan reducciones de la magnitud de los controladores en las frecuencias en las que estas plantas no se encargan de llevar a cabo la regulación del sistema.

10.5 DISEÑO DE CONTROLADORES DE PREALIMENTACIÓN

Diseñados los controladores de realimentación, puede llevarse a cabo el diseño de los controladores de prealimentación. En este caso, únicamente se contempla la manipulación de la referencia r_{u_2} que permite modificar el estacionario del caudal del casquillo. Sin embargo, la instalación se ha diseñado para que el estacionario del caudal del serpentín permanezca siempre en su punto medio $r_{u_3} = 0$. Por lo tanto, únicamente se diseñará el controlador de prealimentación $f_2(j\omega)$ (ver [Figura 10.4](#)).

Se seleccionan las siguientes condiciones de diseño para un cambio en el punto de operación:

- Cuando se produzca una modificación en la referencia r_{u_2} que implique una desviación del caudal del refrigerante de 10%, la temperatura en el reactor presentará una desviación máxima de 1K.

- Cuando se efectúen cambios en el punto de operación, la apertura de la válvula que regula el caudal del casquillo debe ser progresiva, evitándose, en la medida posible, cambios bruscos.

Para lograr la primera condición, debe obtenerse en primer lugar el incremento en la referencia que equivale a una variación de caudal del 10%. Aplicando un cálculo sencillo, puede obtenerse que una variación del caudal del 10% se corresponde con una variación en la planta normalizada $\Delta u_2 = 0.4$. por lo tanto, para garantizar la primera condición de diseño se emplea la inecuación

$$\left| 0.4f(j\omega) \frac{\hat{p}_2(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_{u_2}(\omega); \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \tag{10.34}$$

donde la cota superior $W_{u_2}(\omega)$, se selecciona según

$$W_{u_2}(\omega) = \left| \frac{906j\omega}{(j\omega/0.003 + 1)^2} \right|. \tag{10.35}$$

Como se muestra en la [Figura 10.16](#), la condición anterior queda satisfecha con el empleo de un prefiltro unitario $f_2(j\omega) = 1$. Por lo tanto, se diseña el mismo para que el sistema satisfaga la segunda condición de diseño. Dado que se desea que el sistema evolucione hasta el nuevo punto de operación sin rebotes en la acción de control u_2 , se emplea un filtro pasa bajos para $f_2(j\omega)$. Como se describió en la [Subsección 7.3.2](#), la frecuencia de corte de éste debe seleccionarse tomando el punto medio de la banda de trabajo. En este caso, la selección de la frecuencia de corte ω_c se realiza según

$$\omega_c = \frac{-4 - 3}{2} = -3.5 \rightarrow 10^{-3.5} = 3.1623 \times 10^{-4} \text{ [rad/s]}, \tag{10.36}$$

y se emplea un filtro de segundo orden

$$f_2(s) = \frac{1}{(s/\omega + 1)^2} = \frac{1}{(s/(3.1623 \times 10^{-4}) + 1)^2}. \tag{10.37}$$

La [Figura 10.16](#) muestra como la incorporación del controlador de prealimentación $f_2(j\omega) \neq 1$ sigue satisfaciendo la condición de diseño marcada por (10.34).

En la [Figura 10.17](#) se muestran las respuestas temporales de las variables cuando la consigna para el caudal del casquillo se reduce un 10% bruscamente. Recuérdese que esta variación se corresponde con un escalón de $r_{u_2} = -0.4$ en las plantas normalizadas. El cambio en la consigna

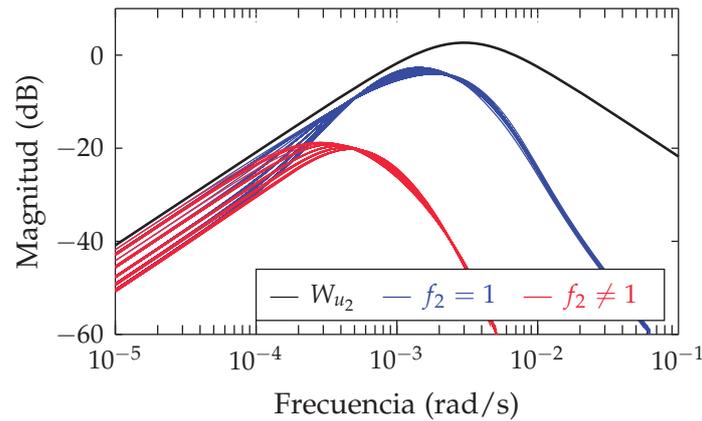


Figura 10.16: Diseño de $f_2(j\omega)$. Magnitud y/r_{u_2} .

se produce en el instante $t=0.25h=15\text{min}$. El sistema responde según lo esperado, garantizando las condiciones de diseño impuestas. Obsérvese como la desviación en la temperatura es poco acusada, mostrando un máximo de 0.34° transcurrida la primera media hora. Del mismo modo, puede comprobarse como la acción de control u_2 (caudal en el casquillo) evoluciona lentamente hasta alcanzar su nuevo valor de consigna, sin presentar cambios bruscos que pueden dañar los actuadores. El tiempo necesario para modificar el punto de operación es de aproximadamente 8h. Pese a presentar una dinámica lenta, la escasa desviación de la variable controlada justifica su empleo en el sistema real, ya que permite mantener una producción estable mientras se modifica el valor de consigna r_{u_2} . También puede observarse cómo la disminución del valor deseado para el caudal del casquillo implica una reducción del caudal de reactivo. Por tanto, modificando la consigna de refrigeración indirectamente condicionamos el nivel de producción. Esta es una de las ventajas del control MISO, en el que además de la salida se puede regular el punto de operación de las actuaciones rápidas, lo cual indirectamente también cambia el punto de operación de las actuaciones lentas (se desplaza su *bias*, ya que la desviación sobre éste depende de las perturbaciones y la incertidumbre).

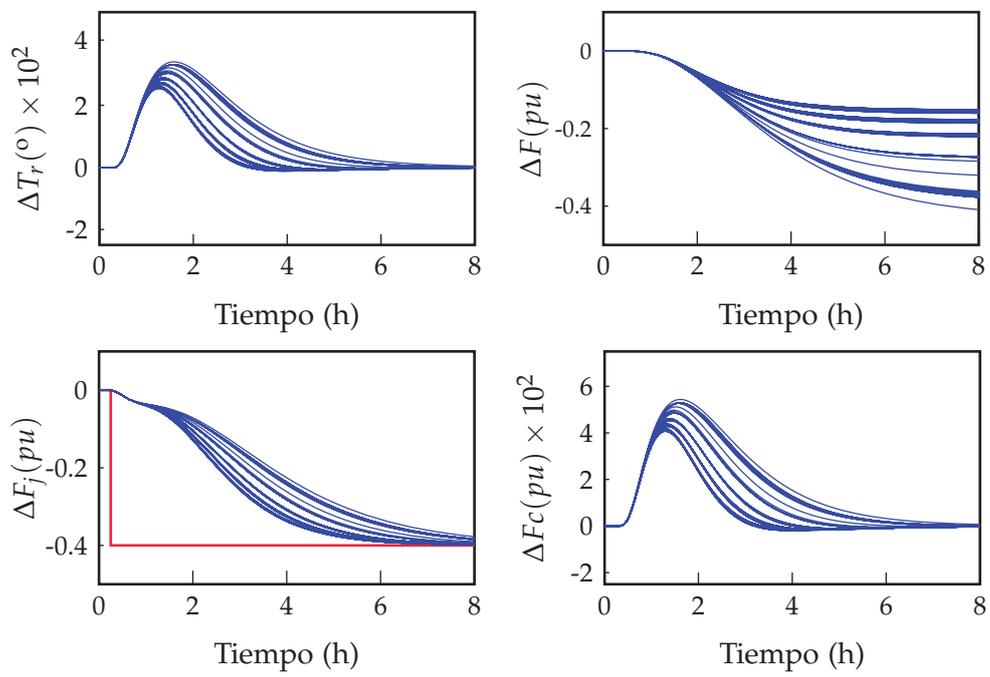


Figura 10.17: Respuesta del sistema para un cambio en r_{u_2} .

Parte IV

DOS GRADOS DE LIBERTAD: REALIMENTACIÓN
Y PREALIMENTACIÓN

SERVOSISTEMAS SISO Y MISO

El presente capítulo presenta una solución al problema del seguimiento en sistemas MISO. Debe tenerse en cuenta que la teoría de realimentación cuantitativa (QFT) trata este tipo de problemas bajo una perspectiva completamente diferente a la empleada en el problema del regulador, o rechazo de perturbaciones. Esta diferenciación entre servosistemas y sistemas reguladores no es llevada a cabo en ninguna de las estrategias de diseño estudiadas en la [Sección 2.4](#).

Dada esta particularidad, es necesario establecer de forma clara cuales son los criterios que determinan una solución óptima al problema del seguimiento desde el punto de vista de QFT. Como se ha indicado a lo largo del documento, una de las premisas fundamentales de QFT es que la realimentación sólo es necesaria si el sistema a gobernar presenta incertidumbre o se encuentra sometido a perturbaciones no medibles. Centrándonos en el problema del seguimiento (no se considera la existencia de perturbaciones), únicamente se deberá emplear la realimentación si el sistema presenta una incertidumbre mayor a la tolerada por las especificaciones de comportamiento en lazo cerrado. Es decir, sólo deberá emplearse la realimentación si no existe un controlador de prealimentación capaz de situar todas las respuestas de lazo abierto en la región de comportamiento tolerado¹. Este análisis, relativamente simple en sistemas SISO, se complica en sistemas con múltiples entradas y plantas (sistema MISO), ya que la interacción puede dar lugar a variaciones de la incertidumbre que complican su estudio realizando una simple inspección visual de los *templates* o diagramas frecuenciales de las plantas.

En la [Sección 11.1](#) se presenta una descripción de las alternativas existentes en el control de servosistemas SISO. Esta descripción completa a

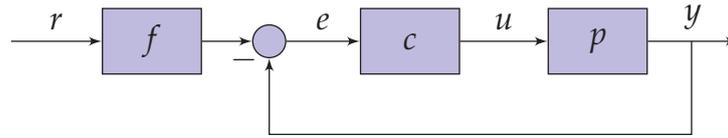
¹ Se omiten en esta afirmación los sistemas con dinámicas RHP.

la realizada en el [Apéndice A](#), y es empleada para enmarcar el problema MISO dentro de la filosofía de QFT. En la [Sección 11.2](#) se analizan diseños para sistemas MISO que emplean únicamente controladores de prealimentación. Los diseños carecen de sentido práctico salvo en aplicaciones muy puntuales, dado que es poco probable que un sistema real funcione en ausencia total de perturbaciones desconocidas e incertidumbre. Su inclusión en el presente documento no está motivada por su aplicabilidad, sino por su carácter docente, ya que permiten adquirir al lector una amplia comprensión del problema y de la solución que se desea dar al mismo. Los resultados alcanzados en el mismo son el punto de partida para un diseño con realimentación, que es llevado a cabo en el [Capítulo 12](#).

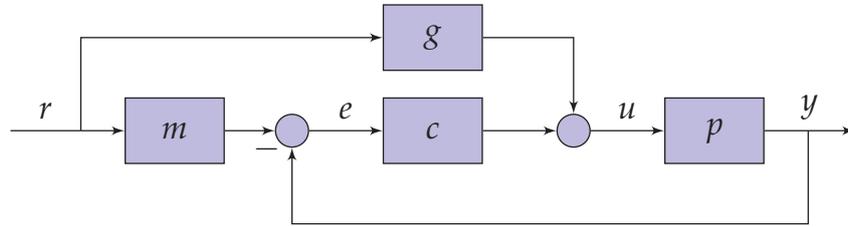
11.1 SEGUIMIENTO DE REFERENCIAS EN SISTEMAS SISO

Antes de evaluar la problemática MISO, es necesario estudiar las alternativas existentes en la teoría de la realimentación cuantitativa o QFT para gobernar servosistemas SISO. El [Apéndice A](#) presenta de forma detallada cómo solucionar un problema SISO empleando la estructura con dos grados de libertad de la [Figura 11.1](#) (a). En dicho estudio se presentan todos los pasos de diseño, desde la selección de las especificaciones de comportamiento en lazo cerrado, hasta el *loop-shaping* de controladores. La estrategia presentada en dicho anexo fue propuesta por Horowitz [65] y es la más extendida. Sin embargo, existen otras alternativas en la literatura científica que permiten dar solución al mismo problema de control. En esta sección se presentan tres alternativas de diseño; el objetivo no es establecer comparación entre las mismas, sino hacer una breve descripción que complete la información presentada en el [Apéndice A](#). Se considera fundamental su inclusión en el documento dado que la estrategia de diseño MISO propuesta en el [Capítulo 12](#) nace de las técnicas descritas en la presente sección.

Considérese en primer lugar la estructura de control de la [Figura 11.1](#) (a). Esta arquitectura emplea dos grados de libertad c y f para gobernar la planta con incertidumbre p . Como en el resto de secciones se considera que la incertidumbre de la planta es debida a la existencia de un conjunto \mathbf{q} de parámetros con incertidumbre ($\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$). El objetivo del controlador de realimentación c es reducir la sensibilidad del sistema a



(a) Estructura de control propuesta por Horowitz.



(b) Estructura de control *Model Matching*.

Figura 11.1: Estructuras de control SISO para el seguimiento de referencias.

la variación en sus parámetros, de forma que la incertidumbre \mathcal{Q} presente un efecto limitado en la respuesta de lazo cerrado

$$T_r(j\omega) = \frac{f(j\omega)c(j\omega)p(j\omega)}{1 + c(j\omega)p(j\omega)}. \quad (11.1)$$

De forma general, la sensibilidad de $T_r(j\omega)$, entendiéndola ésta como su distorsión en función de la incertidumbre \mathcal{Q} , decrece con el empleo de un controlador de realimentación $c(j\omega)$ con mayor magnitud. Sin embargo, este hecho produce un aumento del coste de la realimentación², conllevando un deterioro del *performance* de lazo cerrado en el sistema físico real.

Horowitz plantea la especificación de seguimiento

$$W_l(\omega) \leq \left| \frac{f(j\omega)c(j\omega)p(j\omega)}{1 + c(j\omega)p(j\omega)} \right| \leq W_u(\omega); \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (11.2)$$

que después reformula en dos etapas, la primera para abordar el diseño del controlador de realimentación $c(j\omega)$, y la segunda para el diseño del controlador de prealimentación $f(j\omega)$ (ver [Apéndice A](#)). Los contornos para el diseño de $c(j\omega)$ son tales que si se cumplen por la mínima existiría tan sólo un $f(j\omega)$ solución. Y además $c(j\omega)$ emplearía la mínima cantidad de realimentación, tanto en la banda útil para reducir la sensibilidad a la incertidumbre, como a partir de la frecuencia de corte para minimizar el coste de la realimentación. La magnitud del controlador de prealimentación $f(j\omega)$, a priori, no conlleva ningún coste. Por

² Una descripción detallada de este concepto se ha presentado en la [Sección 3.1](#).

ello, se trata de trasladar lo que es conocido desde la realimentación a la prealimentación.

El comportamiento obtenido está determinado por

$$y_r = \frac{y}{r} = \frac{fcp}{1 + cp}. \quad (11.3)$$

Y dado que trabajamos con una única planta, aunque esta tenga incertidumbre, las especificaciones (11.2) para el comportamiento de y_r y la magnitud de la planta fijan la acción de control necesaria, por la relación $y_r = pu_r$. Pero además, debido a la incertidumbre de p cuya influencia se quiere minorar en lazo cerrado³, a mayor incertidumbre en p para la misma envolvente (W_l , W_u) de y_r , el controlador c deberá tener mayor magnitud. En definitiva, la acción de control necesaria para el seguimiento es

$$u_r = \frac{u}{r} = \frac{fc}{1 + cp}. \quad (11.4)$$

Si además de la entrada de referencia para la cual evaluamos el performance y_r , tenemos en cuenta el ruido del sensor, obtenemos que la acción de control total es

$$u = \frac{fc}{1 + cp}r + \frac{-c}{1 + cp}n. \quad (11.5)$$

Por lo tanto, de las posibles parejas $c(j\omega)$ - $f(j\omega)$ que dan lugar al comportamiento y_r deseado, la que emplee menor ganancia en el controlador $c(j\omega)$ será la que minimice la amplificación de ruidos en la acción de control (coste de la realimentación)

$$u_n = \frac{-c}{1 + cp}n. \quad (11.6)$$

En conclusión, dado un sistema de control SISO, el diseño $c(j\omega)$ que emplea la mínima cantidad de realimentación (ganancia del controlador) en cada frecuencia corresponde con un diseño óptimo.

Las estrategias de control denominadas como *error tracking* [33, 37], mantienen la estructura de control de la Figura 11.1 (a), pero emplean especificaciones de funcionamiento en lazo cerrado que acotan el error de seguimiento, en lugar de la respuesta de lazo cerrado $T_r(j\omega)$. Para

³ Reducción de la sensibilidad a incertidumbre de p .

ello se establece un modelo de comportamiento deseado $m(j\omega)$ y un cota $W_b(\omega)$ que determina el error de seguimiento máximo tolerado. El comportamiento robusto en lazo cerrado queda garantizado mediante el empleo de la inecuación

$$\left| m(j\omega) - \frac{f(j\omega)c(j\omega)p(j\omega)}{1 + c(j\omega)p(j\omega)} \right| \leq W_b(\omega); \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (11.7)$$

El comportamiento de la acción de control sigue estando determinado por (11.5) y, por lo tanto, el objetivo sigue siendo alcanzar un diseño $f(j\omega)-c(j\omega)$ que cumpla (11.7) con la menor cantidad de realimentación en $c(j\omega)$.

No puede realizarse una comparativa directa entre las estrategias de *tracking* (11.2) y de error de *tracking* (11.7), ya que la especificación de diseño empleada en cada uno de los casos es diferente. Como puede comprobarse en la Figura 11.2, un diseño tradicional acota la función de lazo cerrado $T_r(j\omega)$ entre dos tolerancias, implicando que en una frecuencia discreta ω_d sea válida cualquier solución que restrinja $T_r(j\omega_d)$ entre dos circunferencias concéntricas centradas en el origen y con radios $W_u(\omega_d)$ y $W_l(\omega_d)$. Por el contrario, las especificaciones de *error tracking* restringen las respuestas de lazo cerrado $T_r(j\omega_d)$ a un área circular con centro en $m(j\omega_d)$ y radio $W_b(j\omega_d)$. Puede observarse cómo el método clásico permite un mayor rango de soluciones ya que no acota la fase del sistema, mientras que la especificación de *error tracking* impone de forma indirecta restricciones en la fase de la respuesta de lazo cerrado.

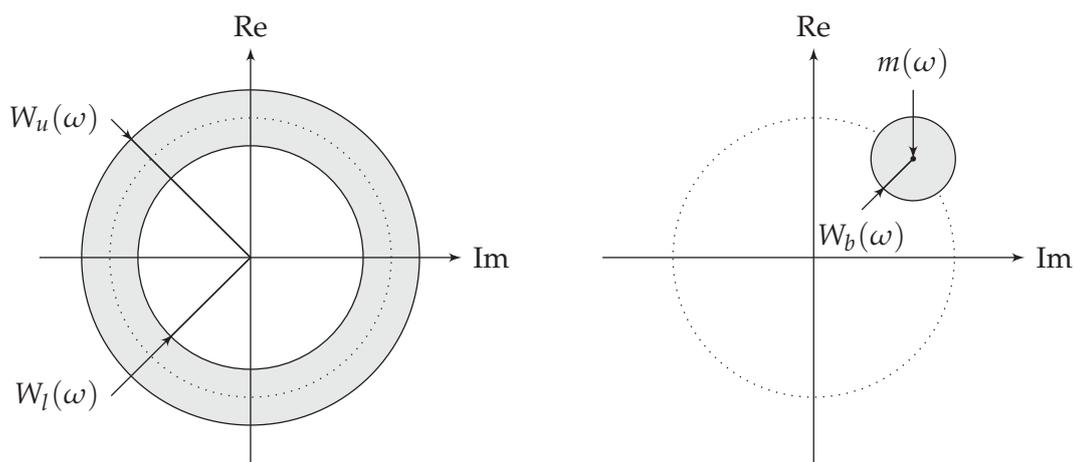


Figura 11.2: Regiones solución en las especificaciones de *tracking* clásico y *error tracking*.

Por último, Elso y otros [38] proponen el empleo de la estructura *model matching* (ver Figura 11.1 (b)) para la resolución del problema de seguimiento. La inecuación que garantiza el seguimiento deseado es la misma que la empleada en las estrategias *error tracking*, y por lo tanto se trata de una estrategia de diseño que acota el error de seguimiento. En este caso, el modelo deseado de respuesta y frente a r forma parte del diagrama de control (modelo m). Las discrepancias entre la y deseada (la que genera el modelo) y la real (la que proviene de la realimentación) serán objeto de corrección por parte del lazo de control realimentado. Por otro lado, la acción de control calculada por el controlador de prealimentación $g(j\omega)$ es enviada directamente a la planta, donde es añadida a la acción de control calculada por el controlador de realimentación $c(j\omega)$. La acción de control del sistema en lazo cerrado está determinada por

$$u = \frac{g + mc}{1 + cp} r - \frac{c}{1 + cp} n, \quad (11.8)$$

dónde se observa claramente que la acción de control u_r necesaria para realizar el seguimiento de la referencia deseada⁴ se reparte entre dos elementos de control, g en prealimentación y c en realimentación. Como en la estructura clásica, el diseño óptimo será el que consiga gobernar el sistema con un controlador de realimentación $c(j\omega)$ de mínima ganancia dado que esto implicaría conseguir la acción de control mínima necesaria para el seguimiento según el modelo deseado y a la vez la menor amplificación de ruidos.

Uno de los puntos positivos de la estructura *model matching* es que es intuitiva y coherente con los propósitos de la teoría de realimentación cuantitativa. Por ejemplo, considérese un diseño en el que $g(j\omega)$ es capaz de hacer cumplir las especificaciones por sí mismo. En dicho caso, el controlador de realimentación debería ser nulo $c(j\omega) = 0$. Dado que $g(j\omega)$ se encuentra conectado directamente a la entrada de la planta (hecho que no ocurre en el caso de la estructura tradicional), puede implementarse el sistema sin necesidad de modificar la estructura de control. Por el contrario, en la estructura clásica un controlador de realimentación nulo implica una modificación de la estructura de control para poder gobernar con un controlador $f(j\omega)$ de prealimentación.

⁴ Recuérdese que la acción de control es única y depende de la especificación elegida para y_r . Es decir, no se puede optimizar por el hecho de emplear una nueva estructura de control.

En el resto de aspectos, el empleo de una u otra estructura de control es irrelevante y depende de un criterio personal más que de un aspecto funcional. Si que serán diferentes las especificaciones seleccionadas⁵, dado que éstas acotarán el comportamiento del sistema de forma diferente y por lo tanto, darán lugar a soluciones válidas pero diferentes (no comparables).

11.2 EFECTO DE LA PREALIMENTACIÓN EN SISTEMAS MISO

En esta sección se analiza cómo afecta la suma de plantas a la ganancia e incertidumbre del sistema MISO y sus repercusiones en términos de control. En última instancia, se busca determinar si en el control MISO el factor que condiciona la acción de control dadas unas especificaciones sigue siendo el tamaño de la incertidumbre de la planta, como en el caso SISO, o por el contrario existen otros aspectos a tener en cuenta. Las conclusiones alcanzadas en esta sección establecen los fundamentos a partir de los que se construye la técnica de diseño presentada en el [Capítulo 12](#).

Si se considera la arquitectura de control *model matching*⁶ y se generaliza para un sistema MISO con n plantas en paralelo, la primera pregunta a resolver es a través de qué entrada o entradas de actuación es más conveniente prealimentar la señal proveniente de la referencia. Véase cómo en este caso la referencia es susceptible de ser inyectada a través de una o varias entradas, empleando uno o varios controladores de prealimentación⁷. Para ello, en primer lugar se va a estudiar cómo controlar sistemas MISO en lazo abierto, utilizando sólo controladores de prealimentación. Se analizarán diferentes casos que contemplen la posibilidad de existencia de incertidumbre en ninguna, una, o varias plantas. En cada uno de los casos analizados, se determinará cuando existe solución al problema de control sin necesidad del empleo de controladores de realimentación, y cuando es necesario el empleo de los mismos. Las conclusiones alcanzadas mostrarán las pautas que determinan cual es el reparto idóneo del esfuerzo de control entre las diferentes acciones de control. En resumen, se establece una estrategia de diseño en lazo abierto, que si bien normal-

⁵ Acotación de la respuesta de lazo cerrado o del error de seguimiento.

⁶ Las mismas conclusiones pueden extraerse empleando la estructura de control clásica con dos grados de libertad.

⁷ Recuérdese que en el caso SISO sólo existía una entrada de actuación sobre la planta, y por lo tanto, un único punto por el que prealimentar.

mente carece de aplicabilidad en el sistema real, es el punto de partida para la estrategia de control con controladores de prealimentación y realimentación desarrollada en el [Capítulo 12](#). Nótese cómo en este caso, al no existir realimentación, no se valora su coste QFT en términos de amplificación de ruidos del sensor.

Considérese el sistema de control en lazo abierto de la [Figura 11.3](#). Los controladores de prealimentación $g_{i=1,\dots,n}(j\omega)$ son los encargados de generar las acciones de control u_i para cada una de las plantas $p_i(j\omega)$ con la información proveniente de la referencia r . El objetivo del sistema es que la salida y siga a la referencia r . No se considera el efecto de las posibles perturbaciones.

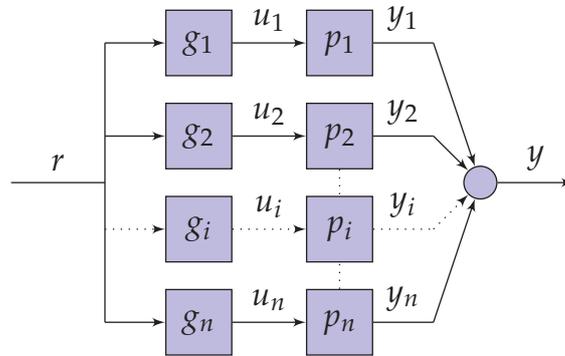


Figura 11.3: Plantas en paralelo gobernadas en lazo abierto.

Las ecuaciones que determinan el comportamiento del sistema son

$$y = r \sum_{i=1}^n p_i g_i, \tag{11.9}$$

y

$$u_i = r g_i. \tag{11.10}$$

Como en los estudios anteriores, las plantas presentan incertidumbre paramétrica definida por $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$. El objetivo es que la especificación de control se garantice para todas las respuestas y_r posibles dentro del espacio de la incertidumbre. Para los ejemplos teóricos presentados, se considera que todas las plantas p_i son estables en lazo abierto. Por lo tanto, la estabilidad del sistema global está garantizada si los controladores de prealimentación g_i presentan todos sus polos en el semiplano izquierdo. El objetivo de seguimiento puede plantearse empleando la especificación de tracking clásico (11.2), o las de error tracking (11.7),

mostradas en la [Sección 11.1](#). En el caso MISO, las inecuaciones se redefinen según

$$W_l(\omega) \leq \left| \sum_{i=1}^n g_i(j\omega) p_i(j\omega) \right| \leq W_u(\omega), \quad (11.11)$$

para la especificación de *tracking* clásico, y

$$\left| m(j\omega) - \sum_{i=1}^n g_i(j\omega) p_i(j\omega) \right| \leq W_b(\omega); \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (11.12)$$

para la especificación de *error tracking*. En esta sección se opta por emplear especificaciones de este último tipo, por considerarse más apropiadas para el desarrollo de la estrategia de diseño. Fijada la especificación de comportamiento deseado (11.12), existirá solución al problema de control si existe una combinación de controladores de prealimentación $g_i(j\omega)$ que la satisfagan. En caso contrario, será necesario el empleo de una estructura de control que cierre un lazo de realimentación para reducir la sensibilidad del sistema a la incertidumbre.

Considérese en primer lugar un sistema MISO en el que una de las plantas $p_j(j\omega)$, $j \in i$, no presenta incertidumbre. El resto de plantas del sistema $p_{i \neq j}(j\omega)$ presentan una incertidumbre tal que es imposible cumplir la especificación (11.12) sin añadir controladores de realimentación. En este caso, el problema puede resolverse de forma directa anulando los controladores $g_{i \neq j}(j\omega)$ y empleando un único controlador de prealimentación $g_j(j\omega)$, calculado a partir de la inversión de la planta $p_j(j\omega)$. El conjunto de controladores de prealimentación para el sistema MISO es:

$$g_j(j\omega) = \frac{m(j\omega)}{p_j(j\omega)}, \quad g_{i \neq j}(j\omega) = 0. \quad (11.13)$$

Si se considera que la planta $p_j(j\omega)$ no contiene ni ceros RHP ni retardos, y además se emplea un modelo de seguimiento $m(j\omega)$ con mayor número de polos (todos ellos estables) que la planta $p_j(j\omega)$, el controlador $g_j(j\omega)$ alcanzado será causal, y por tanto realizable, y el sistema garantizará la especificación de seguimiento.

La siguiente pregunta es dilucidar si la solución anterior es la mejor posible, ya que hemos obviado los potenciales beneficios que pueden aportar el resto de plantas por el hecho de que su incertidumbre demandaría realimentación y ésta conlleva un coste en alta frecuencia. Supongamos que la ganancia estática de alguna planta $p_{k \neq j}(0)$ de forma

combinada con $p_j(0)$, diera lugar a acciones de control que en régimen permanente cumplan

$$u_k(t = \infty) \ll u_{j,1}(t = \infty); \quad u_{j,2}(t = \infty) \ll u_{j,1}(t = \infty), \quad (11.14)$$

donde $u_{j,2}(t = \infty)$ representa la acción de control estacionaria para la planta $p_j(j\omega)$ cuando trabaja en colaboración con la planta $p_k(j\omega)$, y $u_{j,1}(t = \infty)$ representa la acción de control estacionaria para la planta $p_j(j\omega)$ trabajando en solitario. Es decir, es posible que las dos plantas trabajando de forma coordinada demanden una acción de control menor en cada rama para lograr el seguimiento de una cierta referencia, hecho que permitiría alcanzar referencias de mayor amplitud sin riesgo de saturar los actuadores. Además se reducirían los gastos de acción de control, ligados en muchas ocasiones a consumos de energía y materias primas, lo que repercute en un ahorro en los costes de operación. Esta ventaja, muy importante en la vida real, requeriría de algún tipo de realimentación, ya que la incertidumbre de la planta $p_k(j\omega)$ impide su empleo en una solución con sólo controladores de prealimentación. El empleo de controladores de realimentación conlleva un coste en cuanto a la amplificación de ruidos, mientras que cuando se emplea únicamente la planta $p_j(j\omega)$ este coste de realimentación es nulo. Pero la ventaja es que la acción de control necesaria para el objetivo de seguimiento puede reducirse.

Entonces, en el caso MISO la incertidumbre y la reducción de la magnitud de los controladores de realimentación no son los únicos factores a tener en cuenta para el seguimiento de referencias. Las entradas empleadas para efectuar la prealimentación de la referencia juegan un papel importante, y la selección más adecuada está relacionada con la magnitud de las plantas. En un sistema SISO donde no hay error en régimen permanente, la acción de control estacionaria es

$$u(t = \infty) = \frac{r(t = \infty)}{p(0)}. \quad (11.15)$$

Por tanto, cuanto mayor sea la ganancia de la planta $p(0)$ menor acción de control necesitará, lo cual no es elegible en un sistema SISO. Sin embargo, en un sistema MISO sí es posible esta elección y, por tanto, la ecuación anterior puede interpretarse como el coste de la prealimentación, que sirve para comparar cuando ésta se efectúa por una u otra planta.

La influencia de la magnitud de las plantas en la acción de control debe estudiarse no sólo en el estacionario ($\omega = 0$) sino en cualquier frecuencia, con el fin de, en último término, determinar el mejor reparto de la banda frecuencial entre las plantas. En el problema del regulador, estudiado en el [Capítulo 4](#), el criterio de reparto era conseguir el conjunto de controladores $c_i(j\omega)$, $i = 1, \dots, n$, con menor ganancia en cada rama a lo largo de frecuencia (solución de mínima cantidad de realimentación), lo cual, además, daba lugar a la solución de mínima acción de control. Esto era porque la banda de trabajo se escogía en función de la planta más favorable (mayor magnitud) dentro del sistema MISO. Sin embargo, en el problema del seguimiento de referencias, la acción de control va a depender de dos factores que al tratarse de un sistema MISO son elegibles: la cantidad de realimentación (ganancia del controlador de realimentación a lo largo de la frecuencia) ligada al tamaño de la incertidumbre de la planta implicada y la cantidad de prealimentación (ganancia del controlador de prealimentación a lo largo de la frecuencia) ligada a la magnitud de la planta implicada. Siendo esta última la que mayor peso tiene en la acción de control total, tomaremos como la solución óptima aquella de menor consumo de acción de control a través de la prealimentación, aunque esto incurra en una demanda de mayor realimentación e implícitamente en un mayor coste (amplificación de ruidos). De minorar la cantidad de realimentación en cada rama se encargará el reparto de la banda para el diseño de los controladores de realimentación, que estudiaremos en el capítulo siguiente. A continuación, estudiaremos el reparto de la prealimentación en toda la banda frecuencial.

Si se consideran n plantas sin incertidumbre, gobernadas empleando la estructura de la [Figura 11.3](#), existen infinitas combinaciones de controladores $g_i(j\omega)$ que dan solución a la inecuación (11.12). De hecho, se puede conseguir un seguimiento perfecto de la referencia ($W_b = 0$) haciendo

$$m(j\omega) = \sum_{i=1}^n g_i(j\omega) p_i(j\omega). \quad (11.16)$$

Obsérvese cómo existen infinitas combinaciones de controladores $g_i(j\omega)$ que cumplen la condición anterior, dado que se dispone de una ecuación con n grados de libertad (n controladores independientes). Antes de realizar su diseño debemos preguntarnos *¿Cuál es la combinación de controladores g_i que reporta una mejor solución al problema?*. Atendiendo a un problema general y excluyendo soluciones particulares que resulten

óptimas en problemas concretos, parece obvio que la solución óptima será aquella que emplee una acción de control mínima en todas las frecuencias y en todas las plantas. Si se consigue alcanzar el objetivo, se minimizará el consumo de acción de control y de forma directa los costes económicos asociados a ésta. Además, permitirá reducir el riesgo de saturación de los actuadores. Véase como esta conclusión coincide con la obtenida en el problema de rechazo de perturbaciones.

Para simplificar el análisis se considera que todas las plantas del sistema carecen de retardos y presentan todos sus polos/ceros en el semiplano izquierdo. Adicionalmente considérese que los desfases entre las plantas son inferiores a 90° , hecho que garantiza que el módulo de la planta suma

$$|p_e(j\omega)| = \left| \sum_{i=1}^n p_i(j\omega) \right| \geq |p_j(j\omega)|, \quad \forall j \in i, \quad (11.17)$$

es mayor o igual al de cualquiera de las plantas $p_i(j\omega)$ que forman parte del sistema MISO. Del mismo modo, en una frecuencia discreta ω_d se cumplirá

$$|p_e(j\omega_d)| = \left| \sum_{i=1}^n p_i(j\omega_d) \right| \approx |p_j(j\omega_d)|; \quad (11.18)$$

si se garantiza

$$|p_j(j\omega_d)| \gg |p_{i \neq j}(j\omega_d)|, \quad (11.19)$$

condición estudiada en el [Capítulo 4](#) para el rechazo de perturbaciones.

Diséñese en primer lugar un controlador maestro (ver [Figura 11.4](#)) común a todas las plantas. En este caso, la función de lazo abierto total esta determinada por

$$l_e(j\omega) = \sum_{i=1}^n g_e(j\omega) p_i(j\omega) = g_e(j\omega) p_e(j\omega); \quad (11.20)$$

por lo que el controlador $g_e(j\omega)$ que garantiza un seguimiento sin error puede calcularse aplicando la relación

$$g_e(j\omega) = \frac{m(j\omega)}{p_e(j\omega)}. \quad (11.21)$$

Por simplicidad, se considera un modelo $m(j\omega)$ tal que el controlador $g_e(j\omega)$ es propio. En este caso, la acción de control toma valores según

$$u(j\omega) = g_e(j\omega)r(j\omega) = \frac{m(j\omega)}{p_e(j\omega)}r(j\omega). \quad (11.22)$$

Por lo tanto, la magnitud de la acción de control⁸ $|u(j\omega)|$ será mínima, ya que el módulo de la planta equivalente $|p_e(j\omega)|$ es mayor o igual al de cualquiera de las plantas $|p_i(j\omega)|$ en todas las frecuencias. En consecuencia, es imposible alcanzar un diseño que satisfaga la inecuación (11.12) dando lugar a una acción de control $u_i(j\omega)$ con un módulo inferior al de $u(j\omega)$.

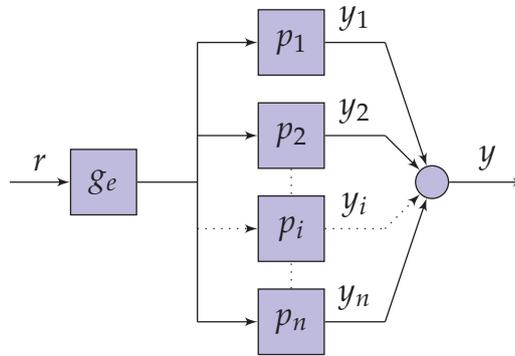


Figura 11.4: Sistema MISO gobernado en lazo abierto con controlador maestro.

Se acaba de garantizar que en ausencia de incertidumbre, si las plantas cumplen el criterio establecido, el empleo de un único controlador de prealimentación minimiza el empleo de la acción de control total $u(j\omega)$. Del mismo modo, puede garantizarse que en las frecuencias discretas ω_d en las que se cumpla la relación (11.19), dicha acción de control estará determinada por

$$u(j\omega_d) = \frac{m(j\omega_d)}{p_j(j\omega_d)}r(j\omega_d). \quad (11.23)$$

Queda comprobado que en estas frecuencias las plantas $p_{i \neq j}(j\omega)$ reciben señales de control, pero no aportan beneficios al sistema, ya que el controlador maestro actúa como si gobernase una única planta. Este problema se traduce en que las plantas que no aportan beneficios en baja frecuencia reciben señales de componente continua, produciendo que

⁸ Téngase en cuenta que en este caso la acción de control es común a todas las plantas, y por lo tanto, cumple $u(j\omega) = u_i(j\omega)$.

en el próximo cambio de consigna el sistema no parta de un valor nulo y presente más riesgo de saturación en los actuadores. Además, se incurre en consumos de materias primas y energía que aumentan los costes de operación. Para resolver este problema debe eliminarse dicha acción de control innecesaria, dejando disponible todo el rango de actuación tras la intervención de la planta.

Para lograr el comportamiento deseado puede emplearse una estructura como la mostrada en la [Figura 11.5](#), de forma que las plantas que se desea desconectar presenten a su entrada un filtro⁹ de baja frecuencia que elimine la componente continua en la acción de control. Por los mismos motivos pueden implementarse filtros de alta frecuencia en las plantas que trabajan únicamente en baja frecuencia, de forma que se eliminen las señales de alta frecuencia. A priori, el filtrado de las señales de alta frecuencia puede parecer que no es importante, ya que si se considera que el servosistema trabaja con señales de referencia r generadas en un sistema electrónico (lo más común en la actualidad), éstas carecerán de ruido asociado que pueda ser amplificado. Sin embargo, muchos sistemas reales reciben las señales de consigna a partir de la manipulación de un elemento físico, es decir, emplean sensores para cuantificar la actuación sobre el elemento de mando. En estos casos la señal de referencia $r(t)$ contendrá un ruido de alta frecuencia asociado al sensor, que debe tenerse en cuenta en la prealimentación. Además se producirán cambios bruscos en las consignas de los actuadores, que degradan su vida útil. Cuando se aborde el control de estos sistemas es recomendable la desconexión en alta frecuencia de las plantas que no reportan beneficios, puesto que reciben señales con ruidos de alta frecuencia que pueden producir fatiga innecesaria en los actuadores. Véase como en estos casos una solución cuantificada del problema no es esencial, ya que basta con buscar unos filtros de rama que desconecten la planta en frecuencias posteriores a la de cruce de magnitud (recuérdese que seguimos analizando un problema en el que las plantas no presentan incertidumbre).

A continuación, se muestra un ejemplo que ilustra las conclusiones alcanzadas. Se desea gobernar un sistema MISO formado por dos plantas sin incertidumbre

$$p_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad p_2(s) = \frac{0.1}{0.01s+1}; \quad (11.24)$$

⁹ Pese a denominarse g_i los controladores de prealimentación situados aguas abajo del controlador maestro actúan como filtros de rama.

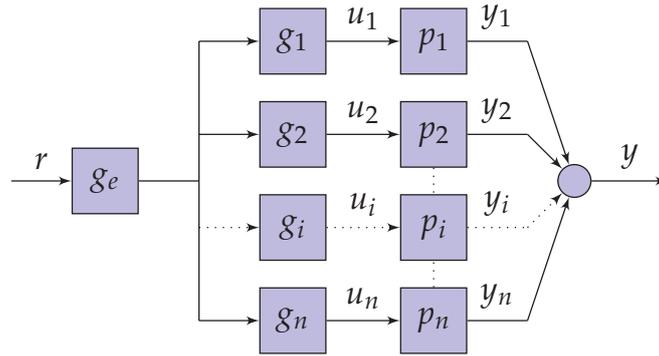


Figura 11.5: Sistema MISO gobernado en lazo abierto con controlador maestro y filtros de rama.

Los objetivos de control son la estabilidad robusta y el seguimiento robusto de perturbaciones. El modelo de referencia está determinado por

$$m(s) = \frac{100^2}{s^2 + 140s + 100^2} \quad (11.25)$$

y dado que el sistema es teórico y no se establece incertidumbre, se fija un error de seguimiento nulo $W_b(s) = 0$. Los controladores de prealimentación que dan solución al problema empleando una única planta (control SISO) se denominan $g_{i,s}$ y están determinados por $g_{i,s}(j\omega) = m(j\omega)/p_i(j\omega)$, tomando en este caso los siguientes valores

$$g_{1,s}(s) = \frac{100^2(s+1)}{s^2 + 140s + 100^2} \quad (11.26)$$

$$g_{2,s}(s) = \frac{1000(s+100)}{s^2 + 140s + 100^2} \quad (11.27)$$

El controlador maestro calculado para la planta suma puede calcularse según $g_e(j\omega) = m(j\omega)/(p_1(j\omega) + p_2(j\omega))$, y en este ejemplo toma los siguientes valores

$$g_e(s) = \frac{909.09(s+100)(s+1)}{(s+10)(s^2 + 140s + 100^2)} \quad (11.28)$$

En la [Figura 11.6](#) se muestran las magnitudes de los controladores $g_{1,s}(j\omega)$, $g_{2,s}(j\omega)$ y $g_e(j\omega)$. Como puede comprobarse, el controlador maestro es el que presenta mínima magnitud en todas las frecuencias.

Como era de esperar el controlador $g_{1,s}(j\omega)$ presenta una magnitud inferior a la de $g_{2,s}(j\omega)$ en baja frecuencia. En alta frecuencia se produce el efecto contrario, obteniendo un controlador $g_{2,s}(j\omega)$ con magnitud inferior a la de $g_{1,s}(j\omega)$. Este comportamiento se reproduce en la representación temporal de las acciones de control, ya que éstas dependen únicamente de los controladores de prealimentación. En la [Figura 11.7](#) se observa como la acción de control generada por el controlador maestro $u_e(t)$ inferior a $u_i(t)$ en cualquier instante de tiempo. Pese a ello, se emplea la planta $p_1(j\omega)$ en baja frecuencia sin que esta reporte beneficios.

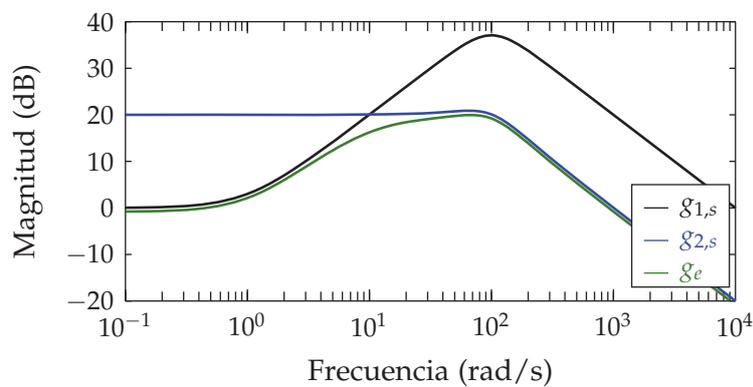


Figura 11.6: Magnitud de los controladores $g_{1,s}$, $g_{2,s}$ y g_e .

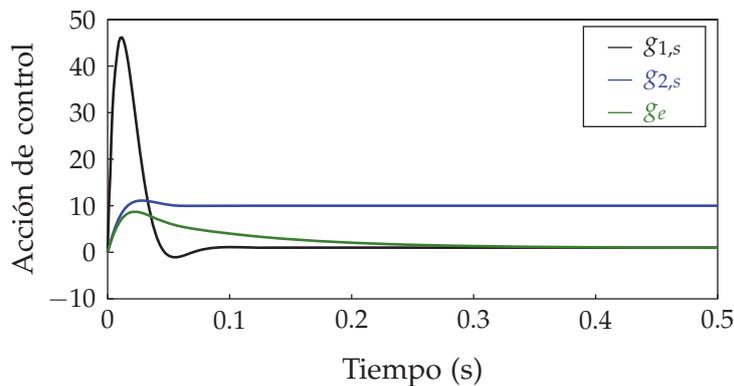


Figura 11.7: Acciones de control $u_{1,s}$, $u_{2,s}$ y u_e , empleadas para seguir un escalón unitario.

Como se describió anteriormente, las respuestas temporales mostradas en la [Figura 11.7](#) muestran como el empleo de un controlador maestro genera una menor acción de control $u(t)$. Sin embargo, el empleo de una única $u(t)$ en las dos plantas produce que éstas estén sometidas a acciones de control en las frecuencias en las que no reportan beneficios.

Para eliminar dicho problema pueden emplearse filtros que limiten las frecuencias en las que actúa cada planta. La opción más sencilla consiste en emplear filtros pasa altos y pasa bajos de primer orden sintonizados según

$$g_1(s) = \frac{1}{\tau_1 s + 1}; \quad (11.29)$$

$$g_2(s) = \frac{\tau_2 s}{\tau_2 s + 1}; \quad (11.30)$$

donde τ_1 se escoge una década después de la pulsación ω_{cm} y τ_2 se escoge una década antes de la pulsación ω_{cm} ($\tau_1 = 10/\omega_{cm}$, $\tau_2 = 0.1/\omega_{cm}$). La pulsación ω_{cm} coincide con la que cumple: $|g_{1,s}(\omega_{cm})| = |g_{2,s}(\omega_{cm})|$. Pueden emplearse otros criterios para la selección de la frecuencia de corte de los filtros, con el fin de conseguir una desconexión más ágil de la planta en las frecuencias que no presenta beneficios. En estos casos, deberá prestarse especial atención a la fase aportada por los filtros, ya que puede producir que las plantas se encuentren en contrafase, reduciendo la magnitud de la planta equivalente y produciendo aumentos en la acción de control $u(t)$.

Diseñados los filtros se re-diseña el controlador maestro

$$g_e(j\omega) = \frac{m(j\omega)}{p_1(j\omega)g_1(j\omega) + p_2(j\omega)g_2(j\omega)}, \quad (11.31)$$

que verá ampliada ligeramente su magnitud

$$g_e(s) = \frac{1000(s + 100)(s + 1)}{(s + 10)(s^2 + 140s + 100^2)}. \quad (11.32)$$

Las nuevas acciones de control y sus diagramas de magnitud se muestran en la [Figura 11.8](#) y en la [Figura 11.9](#). En ellas se aprecia como los controladores efectivos que ve cada planta, $g_e(j\omega)g_1(j\omega)$ para la planta $p_1(j\omega)$ y $g_e(j\omega)g_2(j\omega)$ para la planta $p_2(j\omega)$, son aproximadamente iguales al controlador maestro en las frecuencias en las que la planta aporta beneficios. En el resto de frecuencias el controlador tiende a cero para desconectar dicha planta. En la respuesta temporal se aprecia con claridad como se ha eliminado la componente continua de la planta rápida, del mismo modo se observa una respuesta más lenta en la acción de control de la planta lenta.

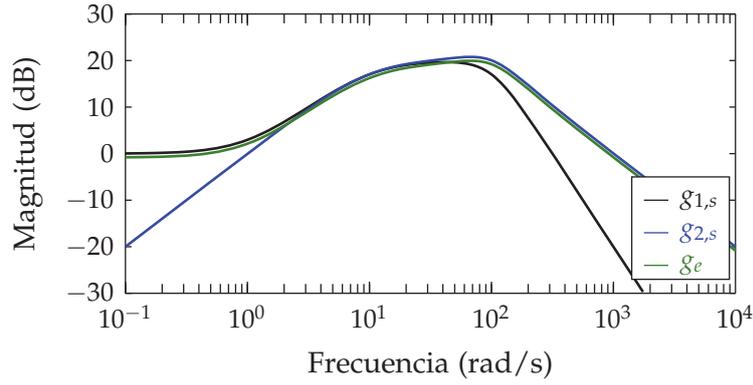


Figura 11.8: Magnitud de los controladores $g_e g_1$, $g_e g_2$ y g_e .

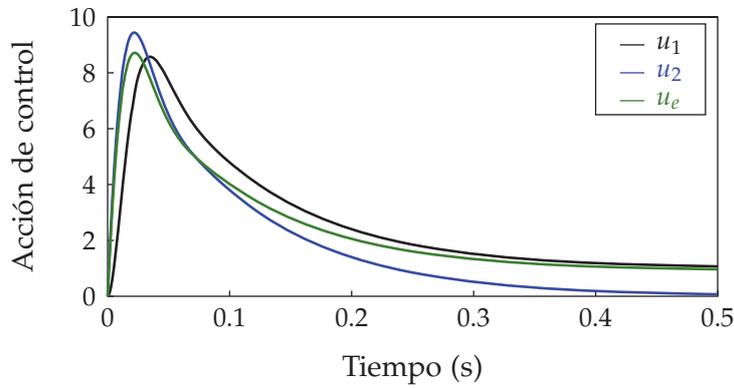


Figura 11.9: Acciones de control u_1 , u_2 y u_e , empleadas para seguir un escalón unitario con controlador maestro y esclavos.

Del estudio anterior se deduce que aunque exista incertidumbre, la mejor solución al problema de control será aquella que emplea en cada frecuencia discreta la planta o plantas que reportan mayor magnitud. De este modo, se consigue reducir el consumo total de acción de control, pese a utilizar mayor cantidad de realimentación que produce una mayor amplificación de ruidos (coste de realimentación).

MISO QFT PARA SERVOSISTEMAS

A continuación, se presenta una solución al problema de control MISO en aplicaciones en las que el objetivo de control es el seguimiento de referencias. Como se ha mostrado en capítulos anteriores, el problema presentado en estos casos es de naturaleza compleja, existiendo multitud de casuísticas que pueden distorsionar su análisis. La solución aportada en el presente capítulo es la más adecuada desde un punto de vista genérico, lo que no impide que en casos concretos puedan plantearse objetivos diferentes. La metodología propuesta es flexible y puede ser modificada de forma sencilla para atender a objetivos específicos.

El capítulo se encuentra organizado en tres secciones. La [Sección 12.1](#) muestra la arquitectura de control empleada y los fundamentos de diseño. En la [Sección 12.2](#) se describen las etapas del proceso secuencial de diseño. En dicha descripción se justifican los fundamentos matemáticos y se definen pautas para alcanzar una solución de control adecuada. Por último, en la [Sección 12.3](#) se presentan dos ejemplos de diseño.

12.1 ESTRUCTURA Y FUNDAMENTOS

Para el control del sistema se propone el empleo de la estructura de control de la [Figura 12.1](#). Véase cómo ésta corresponde con la estructura empleada en la [Sección 4.1](#) ([Figura 4.1](#)) para el problema de rechazo de perturbaciones, a la que se han añadido los elementos de prealimentación necesarios para llevar a cabo el seguimiento robusto de referencias. Como puede observarse, la arquitectura de control corresponde con la generalización para un sistema MISO de la arquitectura *Model Matching* (ver [Figura 11.1](#) (b)). Como en ésta, en el caso MISO, el bloque $m(j\omega)$ se corresponde con el modelo de comportamiento deseado. Sólo se emplea un modelo, ya que sólo existe una variable controlada, y por lo tanto

un objetivo de control. Sin embargo, el controlador de prealimentación $g(j\omega)$ de la estructura *model matching* SISO se ha desplegado en un controlador maestro $g_e(j\omega)$ y n controladores esclavos $g_i(j\omega)$, uno por cada una de las ramas. De este modo, la acción de control que gobierna cada planta es

$$u_i = c_i (rm - y) + r g_i g_e. \quad (12.1)$$

La ecuación que describe el comportamiento de la salida objeto de control es

$$y = \frac{ml_t + l_{A_t}}{1 + l_t} r - \frac{l_t}{1 + l_t} v + \frac{p_d}{1 + l_t} d, \quad (12.2)$$

donde l_t es la función de lazo abierto total, compuesta por la suma de $l_i = c_i p_i$ funciones de lazo. Y en este caso, se define

$$l_{A_t} = \sum_{i=1}^n l_{A_i} = g_e \sum_{i=1}^n p_i g_i, \quad (12.3)$$

como la cadena de prealimentación total, que se compone de n cadenas de prealimentación individuales

$$l_{A_i} = p_i g_i g_e, \quad (12.4)$$

a través de cada planta p_i . El error de seguimiento, sobre el que se plantean las especificaciones de comportamiento en las estructuras *model matching*, está determinado por

$$e = \frac{m - l_{A_t}}{1 + l_t} r - \frac{1}{1 + l_t} v + \frac{p_d}{1 + l_t} d. \quad (12.5)$$

Por último, el comportamiento de las salidas individuales de cada una de las plantas se rige por

$$y_i = \left[\frac{m - l_{A_t}}{1 + l_t} l_i + p_i g_i g_e \right] r - \frac{c_i}{1 + l_t} (v + p_d d), \quad (12.6)$$

y el de las acciones de control por

$$u_i = \left[\frac{m - l_{A_t}}{1 + l_t} c_i + g_i g_e \right] r - \frac{c_i}{1 + l_t} (v + p_d d). \quad (12.7)$$

El controlador de prealimentación total, visto por cada una de las plantas p_i , se define como

$$\hat{g}_i = g_i g_e. \quad (12.8)$$

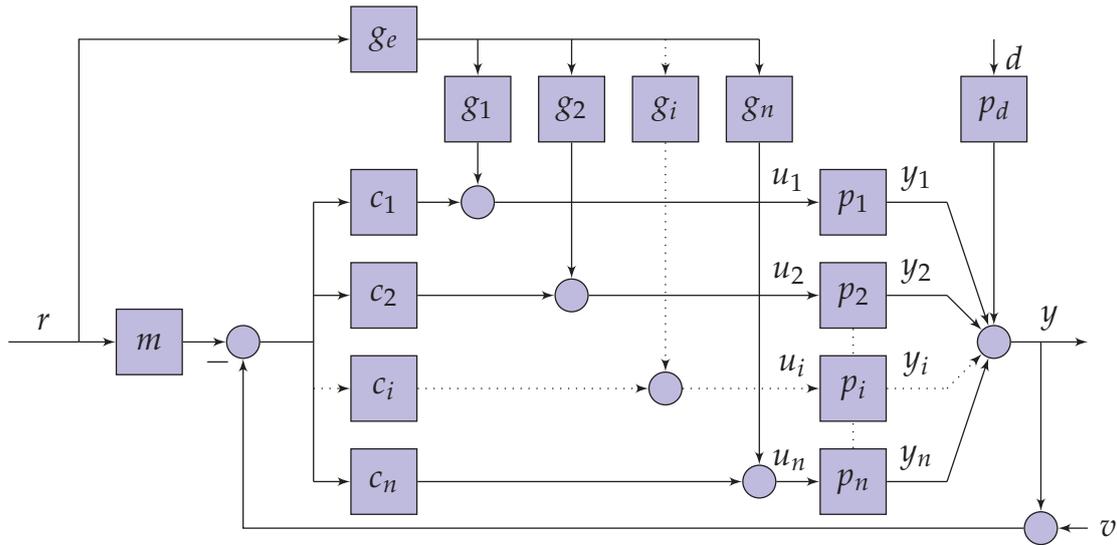


Figura 12.1: Estructura de control QFT MISO para servosistemas.

El controlador maestro g_e será el encargado de generar la acción de control global demandada por el sistema. Los controladores de rama g_i actúan como filtros, repartiendo dicha acción de control por la planta más adecuada, tal como ocurría en la [Figura 11.5](#).

Como en el caso del rechazo robusto de perturbaciones, en el diseño de los controladores (prealimentación y realimentación) se ha de tener en cuenta la incertidumbre paramétrica ($\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$) inherente a los modelos de las plantas¹. En este caso se consideran especificaciones de control en lazo cerrado para garantizar la estabilidad robusta y el seguimiento robusto de referencias. Para especificar la estabilidad robusta puede emplearse una única inecuación

$$\left| \frac{l_t(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_s(\omega); \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \tag{12.9}$$

o n inecuaciones

$$\left| \frac{l_i(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_s(\omega); \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \tag{12.10}$$

Como ya se ha descrito en el [Capítulo 5](#), se recomienda esta segunda opción, que ofrece mayor robustez y permite definir los márgenes de estabilidad en función del desconocimiento sobre la magnitud y fase de cada planta individual p_i . El seguimiento robusto de referencias se

¹ La definición de la incertidumbre se realiza del mismo modo que en capítulos anteriores.

especifica acotando el módulo del error de seguimiento, $|e/r|$ en (12.5), mediante la inecuación

$$\left| \frac{m(j\omega) - l_{A_t}(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_e(\omega); \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (12.11)$$

donde $W_e(\omega)$ se corresponde con la tolerancia superior para la magnitud de la respuesta frecuencial del error en lazo cerrado². Como en el resto de estrategias QFT, las especificaciones de diseño son representadas mediante *bounds* que se calculan en un conjunto discreto de frecuencias Ω .

La metodología de diseño propuesta se desarrolla en cinco etapas, que son descritas en profundidad en la [Sección 12.2](#). A continuación se presenta un resumen de las mismas.

1. Reparto de la prealimentación. Tras el análisis oportuno, se planifica qué planta es más adecuada en cada frecuencia para llevar a cabo los objetivos que son propios de la prealimentación.
2. Diseño de esclavos de prealimentación. Se diseñan los n controladores de prealimentación $g_i(j\omega)$, que distribuyen las tareas de prealimentación de acuerdo a la planificación hecha en la etapa anterior. Se trata de diseñar los filtros que canalizan las frecuencias de la acción de control total calculada por $g_e(j\omega)$ hacia las plantas adecuadas .
3. Reparto de la realimentación. Tras el análisis oportuno, se planifica qué planta es más adecuada en cada frecuencia para llevar a cabo los objetivos propios de la realimentación. Coincide con la primera etapa del procedimiento de diseño en el problema de rechazo de perturbaciones.
4. Diseño de controladores de realimentación. Se diseñan los n controlares de realimentación $c_i(j\omega)$, que distribuyen las tareas de realimentación de acuerdo a la planificación hecha en la etapa anterior. Se realizan n *loop-shapings* siguiendo un procedimiento secuencial similar al utilizado en el caso del rechazo de perturbaciones; véase la segunda etapa del procedimiento de diseño en el problema de rechazo de perturbaciones.

² Para la selección de $W_e(\omega)$ se emplean los mismos modelos y estrategias que en el caso SISO, ya que se establecen para el conjunto del sistema donde la variable controlada es única.

5. Diseño del controlador maestro de prealimentación. Se diseña el controlador $g_e(j\omega)$ que garantiza que el módulo de la función de error se sitúe por debajo de la cota máxima admisible $W_e(\omega)$.

12.2 PROCEDIMIENTO DE DISEÑO PARA SERVOSISTEMAS

A continuación, se presenta una descripción detallada y justificada de los pasos descritos anteriormente.

12.2.1 Planificación del reparto de la prealimentación

Antes de describir el procedimiento de reparto, es necesario realizar un estudio de las ecuaciones del sistema en lazo cerrado, para disponer de un mayor conocimiento del comportamiento del mismo. A continuación se presenta un estudio similar al realizado en la [Sección 7.2](#) para las estructuras de control empleadas en el problema de rechazo robusto de perturbaciones.

Dado que en este caso el objetivo principal de la estructura de control es garantizar un adecuado seguimiento de referencias³ ($y_{rp} = r_{rp}$), debe analizarse la respuesta del sistema en $\omega = 0$. El valor en régimen permanente de la variable controlada, en función de la referencia (utilícese y/r de (12.2)), es

$$y_{rp} = \frac{m(0)l_t(0) + l_{A_t}(0)}{1 + l_t(0)} r_{rp}, \quad (12.12)$$

Si se desea que se cumpla el objetivo de seguimiento, es necesario que la ganancia estática de la función de lazo abierto cumpla $l_t(0) = \infty$. Es decir, para garantizar un error de seguimiento nulo, deberá existir al menos un controlador de realimentación con un integrador⁴. En consecuencia, dicho controlador (o controladores) tendrá ganancia estática infinita y será el encargado de las tareas de realimentación en baja frecuencia.

³ Se emplea el subíndice «rp» para denominar a las señales en régimen permanente $y_{rp} = y(t = \infty)$.

⁴ La existencia de incertidumbre impide que pueda satisfacerse $m(0)l_t(0) + l_{A_t}(0) = 1$ para todas las plantas.

Para continuar con el análisis, se analizan las magnitudes de las acciones de control (utilícese u_i/r de (12.7)) en régimen permanente. Éstas están determinadas por

$$u_{i,rp} = \left[\frac{m(0) - l_{A_i}(0)}{1 + l_t(0)} c_i(0) + g_e(0) g_i(0) \right] r_{rp}. \quad (12.13)$$

Debe distinguirse entre las ramas que presentan esfuerzo de realimentación en baja frecuencia y las que lo presentan en medias/altas frecuencias. Supóngase que solo la rama $i = 1$ trabaja en baja frecuencia, es decir,

$$c_1(0) = \infty. \quad (12.14)$$

El resto de ramas, cuyos controladores de realimentación no trabajan en baja frecuencia cumplen

$$c_{i \neq 1}(0) / l_t(0) = 0, \quad (12.15)$$

y, por lo tanto, su acción de control en régimen permanente está determinada por

$$u_{i \neq 1,rp} = g_{i \neq 1}(0) g_e(0) r_{rp}. \quad (12.16)$$

Es decir, la acción de control en régimen permanente para estas plantas depende únicamente del controlador de prealimentación total empleado $\hat{g}_i = g_i g_e$, siendo nula si dicho controlador \hat{g}_i cumple $\hat{g}_i(0) = 0$. Por otro lado, la rama $i = 1$ cuyo controlador aporta los integradores necesarios cumple

$$u_{1,rp} = \frac{m(0)}{p_1(0)} r_{rp} - \frac{l_{A_1}(0)}{p_1(0)} r_{rp} + g_e(0) g_1(0) r_{rp}; \quad (12.17)$$

Del mismo modo que ocurría para las plantas que no trabajaban en baja frecuencia en realimentación, la acción de control en régimen permanente depende del controlador de prealimentación $\hat{g}_1(0)$. Obviamente, en este caso, dicho punto de trabajo depende también de la realimentación.

Por tanto, en los servo-sistemas la banda frecuencial de trabajo de una planta dependerá de los controladores de prealimentación y realimentación, pudiéndose configurar ambas bandas de forma independiente. Es decir, una planta puede trabajar en baja frecuencia para la realimentación y la prealimentación, sólo para la realimentación, sólo para la

prealimentación, o para ninguna de las dos. Por este motivo, es fundamental realizar una planificación adecuada de las bandas de trabajo de las plantas por separado para el diseño de los controladores de prealimentación y realimentación, respectivamente.

Conocido el funcionamiento de la estructura de control, debe establecerse el criterio de reparto de la banda frecuencial para los controladores de prealimentación. Para ello, obsérvese como la inecuación (12.11), que formula el objetivo de *tracking*, establece que el módulo del error para cambios en la referencia, $|e/r|$ de (12.5), debe ser inferior a una cota $W_e(\omega)$. Para ello pueden emplearse dos alternativas:

- Minimizar el módulo del numerador de (12.11), determinado por $|m(j\omega) - l_{A_t}(j\omega)|$, para todos los casos dentro de la incertidumbre. En esta línea, debe conseguirse que el valor máximo del módulo para el caso más desfavorable dentro de la incertidumbre sea mínimo. Para tal fin sólo pueden emplearse los controladores de prealimentación. Una mayor incertidumbre en $l_{A_t}(j\omega)$ producirá un aumento del módulo $|m(j\omega) - l_{A_t}(j\omega)|$. Por lo tanto, cuanto menor sea la incertidumbre en $l_{A_t}(j\omega)$ menor será el módulo $|m(j\omega) - l_{A_t}(j\omega)|$ en el peor de los casos dentro de la incertidumbre.
- Maximizar el módulo del denominador de (12.11), determinado por $|1 + l_t(j\omega)|$. Para ello, sólo pueden emplearse los controladores de realimentación. Una mayor magnitud en $|1 + l_t(j\omega)|$ sólo puede ser lograda incrementando la magnitud de los controladores de realimentación y, por lo tanto, incurriendo en un cierto coste de realimentación.

Dado que los controladores de prealimentación no introducen coste de la realimentación, parece lógico buscar la combinación de controladores $\hat{g}_i(j\omega)$ que garanticen

$$|m(j\omega) - l_{A_t}(j\omega, \mathbf{q})|_{\min}, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (12.18)$$

y posteriormente emplear una combinación de controladores de realimentación $c_i(j\omega)$ que aporten la magnitud necesaria en $l_t(j\omega)$ para satisfacer la especificación de diseño. Esta solución reporta el menor coste de realimentación, ya que se busca minimizar el error con la prealimentación. Pero además, conducirá a prealimentar por las plantas que tienen menor incertidumbre. Este hecho puede desembocar en una demanda

de acción de control total (prealimentación más realimentación) mayor que la estrictamente necesaria para conseguir el *performance* especificado. Este fenómeno ocurre cuando las plantas con menor incertidumbre presentan un módulo notablemente inferior al del resto de plantas.⁵ Es decir, el precio pagado por disponer de una menor amplificación de ruidos del sensor en la acción de control puede implicar una mayor acción de control para conseguir el mismo comportamiento dinámico frente a referencias. Y dado que el gasto de acción de control suele asociarse a costes económicos, dicha solución puede carecer de sentido práctico.

Es conveniente recordar que Horowitz en sus trabajos [61, 65] buscó la reducción del coste de la realimentación en sistemas de control SISO, en los que el gasto de acción de control está determinado por la especificación de diseño⁶. Sin embargo, en los sistemas MISO se considera que un menor consumo de acción de control será prioritario en la mayor parte de las aplicaciones. En la [Sección 11.2](#) se ha demostrado cómo el consumo de acción de control está determinado directamente por el módulo de las plantas, de forma que en una frecuencia de diseño discreta, demandará una menor acción de control aquella planta que disponga de un conjunto de respuestas frecuenciales con mayor magnitud dentro del espacio de la incertidumbre.

Por lo tanto, para determinar el mejor reparto de las frecuencias de trabajo entre las diferentes plantas, se propone realizar un estudio de la acción de control demandada por cada una de ellas si trabajaran en solitario. Para cada planta con incertidumbre se obtiene un conjunto de controladores ideales

$$k_i(j\omega, \mathbf{q}) = \frac{m(j\omega)}{p_i(j\omega, \mathbf{q})}, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (12.19)$$

que dan lugar al comportamiento deseado $m(j\omega)$. De entre ellos, y para cada frecuencia, se selecciona el k_i más desfavorable. Éste se corresponde con la magnitud más pequeña de la planta dentro del dominio de su incertidumbre, ya que ésta será la que necesite mayor ganancia de control. A dicha planta la designaremos

$$p_{i,\text{mín}} = p_i(j\omega, \mathbf{q}) / |p_i(j\omega, \mathbf{q})| \leq |p_i(j\omega, \mathcal{Q})|, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}; \quad (12.20)$$

5 En el ejemplo presentado en la [Subsección 12.3.2](#) se presenta un análisis de este fenómeno.

6 En la [Subsección 3.1.1](#) se encuentra una descripción detallada de este concepto.

y generará el controlador k_i de mayor magnitud, que designaremos como \bar{k}_i . Ya que su fase será también de interés para el análisis se utilizará

$$\bar{k}_i(j\omega) = \frac{m(j\omega)}{p_{i,\text{mín}}(j\omega)}. \quad (12.21)$$

Los anteriores cálculos se realizan para todas las plantas, y después en cada frecuencia se analizan los diferentes $\bar{k}_i(j\omega)$, $i = 1, \dots, n$, asignando la tareas de prealimentación en dicha frecuencia ω a la planta o plantas que demandan un controlador ideal más favorable. Para ello se siguen los siguientes criterios:

- Si un controlador ideal $\bar{k}_k(j\omega)$ presenta un módulo notablemente inferior al resto en una frecuencia discreta, la planta correspondiente se encuentra mejor condicionada para llevar a cabo las tareas de control en dicha frecuencia. Por lo tanto, se realizará una asignación de tareas tal que en dicha frecuencia la planta $p_k(j\omega)$ se encargue en solitario del esfuerzo de prealimentación. El resto de plantas $p_{i \neq k}(j\omega)$ deberán inhibirse en la medida posible.
- Si un conjunto de m plantas $(1, \dots, m)$ presentan controladores ideales $\bar{k}_{1, \dots, m}(j\omega)$ con una magnitud similar, dichas plantas son susceptibles de colaborar en las tareas de prealimentación en dicha frecuencia. La distorsión máxima se establece en 6dBs, pero puede modificarse según los criterios expuestos en la [Sección 3.2](#). Además, para que dichas plantas puedan colaborar de forma efectiva, las fases de los controladores ideales $\bar{k}_{1, \dots, m}(j\omega)$ deberán presentar un desfase inferior a 90° . Si se cumplen las dos condiciones, dichas plantas se encargarán de las tareas de prealimentación, y el resto deberán ser inhibidas, en dicha frecuencia.

Como puede observarse, la diferencia principal entre este procedimiento y el empleado en el reparto de las bandas de realimentación visto en la [Sección 4.2](#) para el problema del regulador, radica en que en este caso sólo se estudian las plantas más desfavorables. De este modo se simplifica el procedimiento de análisis y toma de decisiones de forma considerable, siendo sencillo automatizar el método. A tal fin, se ha desarrollado un *script* bajo el entorno Matlab-Simulink, que devuelve las bandas de trabajo de las plantas para la prealimentación. Esta herramienta codifica las bandas de trabajo en forma de matriz, en la que las

filas se corresponden con las plantas y las columnas con las frecuencias discretas de diseño. La función desarrollada devuelve un cero si la planta debe ser inhibida de las tareas de control y un uno si debe participar en las mismas. Gracias a este desarrollo puede obtenerse de forma sencilla y visual el mejor reparto de la realimentación. No obstante, para una mejor comprensión de la metodología, en algunos de los ejemplos de la [Sección 12.3](#) se han incluido los diagramas de $\bar{k}_{1,\dots,m}(j\omega)$, además de la tabla final de reparto de la prealimentación.

12.2.2 *Diseño de esclavos de prealimentación*

Conocido el reparto frecuencial de las tareas de prealimentación asignadas a cada una de las ramas, pueden obtenerse los esclavos $g_i(j\omega)$ encargados de seleccionar las frecuencias que deben llegar a cada una de las plantas $p_i(j\omega)$. Dado que estos controladores actúan como filtros, puede emplearse para su sintonía cualquier técnica de diseño de filtros. Sin embargo, se recomienda seguir una serie de pautas que faciliten el diseño de los mismos. A continuación se muestra una alternativa de diseño sencilla en función de la banda de trabajo asignada a cada planta:

- Plantas con una única banda de trabajo situada en baja frecuencia. En estos casos se recomienda el empleo de controladores

$$g_i(s) = \frac{1}{(s/\omega_c + 1)^n} \quad (12.22)$$

donde ω_c se corresponde con la frecuencia de corte y n con el orden del filtro. Se recomienda que la frecuencia de corte coincida con la frecuencia superior de la banda de trabajo asignada a dicha planta ω_u , y el empleo de $n = 1$. En caso de emplear controladores de orden superior a uno, se recomienda emplear $\omega_c > \omega_u$, para que la fase aportada por $g_i(j\omega)$ en ω_u sea pequeña.

- Plantas con una única banda de trabajo situada en alta frecuencia. En estos casos se recomienda el empleo de controladores

$$g_i(s) = \frac{(s/\omega_c)^n}{(s/\omega_c + 1)^{n'}} \quad (12.23)$$

donde ω_c se corresponde con la última frecuencia de trabajo de la banda y n con el orden del filtro. Se recomienda el empleo de controladores con uno o dos polos.

- Plantas con una única banda de trabajo situada en medias frecuencias. En estos casos se recomienda el empleo de controladores

$$g_i(s) = \frac{1}{(s/\omega_{c_u} + 1)^{n_u}} \frac{(s/\omega_{c_l})^{n_l}}{(s/\omega_{c_l} + 1)^{n_l}}, \quad (12.24)$$

donde ω_{c_u} y ω_{c_l} delimitan la banda de paso. Es decir, se corresponden con la frecuencia de corte del filtro paso bajo y paso alto, respectivamente. Y n_u y n_l definen el orden de dichos filtros. Como en los casos anteriores se recomienda emplear órdenes $n_l = n_u = 1$, y que la banda de paso coincida con la banda de trabajo asignada a dicha planta, $\omega_{c_u} = \omega_u$ y $\omega_{c_l} = \omega_l$.

- Plantas con bandas de trabajo no continuas⁷. En estos casos no se recomienda desconectar la planta de las tareas de control en las bandas frecuenciales en las que no debe trabajar, puesto que los filtros necesarios para tal fin son complejos y carece de sentido su empleo para el beneficio obtenido. Recuérdese que no existe un coste asociado directamente a la prealimentación. Para estos casos se recomienda tomar la banda de trabajo como continua y emplear un controlador $g_i(j\omega)$ según el caso que corresponde de entre los tres anteriores.

Una vez diseñados los esclavos $g_i(j\omega)$, debe garantizarse que dichos filtros producen que la planta $p_{A_t}(j\omega)$, definida como

$$p_{A_t}(j\omega) = \sum_{i=1}^n p_i(j\omega)g_i(j\omega), \quad (12.25)$$

mantenga en todas las frecuencias una magnitud igual o superior a la de las plantas individuales. Es decir, debe garantizarse que los filtros diseñados no producen fenómenos de contrafase tales que la planta equivalente sea inferior a las plantas individuales. En caso de producirse este comportamiento, deberá desestimarse el empleo de dichos filtros y repetirse el proceso de diseño hasta alcanzar una solución que cumpla con la premisa anterior.

⁷ Plantas que deben trabajar diferentes bandas de trabajo. Por ejemplo, una planta que debe trabajar en baja y alta frecuencia, pero no en media frecuencia.

12.2.3 Planificación del reparto de la realimentación

Efectuado el diseño de los esclavos de prealimentación $g_i(j\omega)$, puede llevarse a cabo el reparto de las tareas de control asignadas a cada uno de los controladores de realimentación $c_i(j\omega)$. Este paso es idéntico al empleado en el problema de rechazo de perturbaciones, con la diferencia de que ahora se evalúa cual es la mejor combinación de controladores $c_i(j\omega)$ que permite dar solución a la inecuación (12.11).

Antes de comenzar con la descripción del proceso de toma de decisiones, obsérvese cómo una vez diseñados los esclavos de prealimentación, la cadena de prealimentación total puede expresarse según

$$\begin{aligned} l_{A_t}(j\omega) &= \sum_{i=1}^n l_{A_i}(j\omega) = g_e(j\omega) \sum_{i=1}^n p_i(j\omega) g_i(j\omega) \\ &= g_e(j\omega) p_{A_t}(j\omega), \end{aligned} \quad (12.26)$$

donde el único elemento desconocido es $g_e(j\omega)$.

Conocida la relación anterior, puede reescribirse la condición para el seguimiento robusto de referencias según

$$\left| \frac{m(j\omega) - g_e(j\omega) p_{A_t}(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_e(\omega); \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (12.27)$$

Inecuación que presenta $n + 1$ grados de libertad (n controladores de realimentación y 1 controlador de prealimentación). Como en el caso SISO, debe garantizarse por medio de los controladores de realimentación una función $l_t(j\omega)$ que garantice la existencia de un controlador de prealimentación $g_e(j\omega)$ solución. Véase como el objetivo principal en este punto de diseño es averiguar cual es la combinación de controladores $c_i(j\omega)$ más adecuada, puesto que como ya se ha descrito en secciones anteriores, existen infinitas combinaciones de controladores $c_i(j\omega)$ que dan lugar a una misma función de lazo cerrado $l_t(j\omega)$.

Para determinar cual es el reparto frecuencial de tareas más adecuado debe seguirse el procedimiento propuesto en la [Sección 4.2](#). Este procedimiento consistía en cuantificar la demanda de realimentación $c_i(j\omega)$ para cada planta $p_i(j\omega)$ trabajando en solitario para cumplir las especificaciones de control, lo que se expresaba en forma de contornos QFT que denominábamos $\beta_{c_i}(\omega)$. Una vez calculados dichos contornos se comparaban frecuencia a frecuencia los β_{c_i} , $i = 1, \dots, n$, para determinar si en cada una de las frecuencias discretas de diseño debía trabajar una o

varias plantas . En el problema de seguimiento, todo el proceso de toma de decisiones a partir de los bounds β_{c_i} se mantiene. La única diferencia radica en que, en este caso, los contornos $\beta_{c_i}(\omega)$ expresan la demanda de realimentación $c_i(j\omega)$ de la planta $p_i(j\omega)$ trabajando en solitario para satisfacer la inecuación (12.27). Es decir, el contorno $\beta_{c_i}(\omega)$ expresa la magnitud necesaria en $c_i(j\omega)$ para que se garantice la existencia de un controlador $g_e(j\omega)$ que satisfaga

$$\left| \frac{m(j\omega) - g_e(j\omega)p_{A_t}(j\omega)}{1 + c_i(j\omega)p_i(j\omega)} \right| \leq W_e(\omega); \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (12.28)$$

Como en el caso de rechazo, el contorno $\beta_{c_i}(\omega)$ se obtiene de

$$\beta_{c_i}(\omega) = \beta_{l_i}(\omega) / |p_{o_i}(j\omega)|. \quad (12.29)$$

Es decir, primero se calcula el contorno de diseño $\beta_{l_i}(\omega)$ eligiendo una planta nominal. Sin embargo, $\beta_{l_i}(\omega)$ no puede obtenerse empleando las funciones hasta ahora incluidas en la *Terasoft QFT toolbox* [12], que no contemplan este tipo de inecuaciones. Se han desarrollado las funciones oportunas que calculan los contornos correspondientes a inecuaciones del tipo

$$\left| \frac{G_f A + B}{C + DG} \right| \leq W, \quad (12.30)$$

donde A, B, C, D se corresponden con funciones de transferencia con incertidumbre y G, G_f son los controladores de realimentación y prealimentación que deben ser diseñados. Estas herramientas permiten obtener las condiciones a cumplir por G (contornos de diseño) para garantizar la existencia de un G_f solución. Sus fundamentos son presentados en la [Subsección 12.2.4](#) y su formulación se desarrolla exhaustivamente en el [Apéndice D](#).

Para el cálculo de las necesidades de realimentación de la planta $p_i(j\omega)$, determinadas por $\beta_{c_i}(\omega)$, se obtiene $\beta_{l_i}(\omega)$ empleando (12.30), particularizada según: $A = p_{A_t}(j\omega)$, $B = -m(j\omega)$, $C = 1$, $D = p_i(j\omega)$, $G = c_i(j\omega)$, $G_f = g_e(j\omega)$ y $W = W_e(\omega)$. Una vez obtenidos los contornos $\beta_{l_k}(\omega)$, se obtienen las necesidades de control $\beta_{c_i}(\omega)$ aplicando la relación (12.29).

Calculados todos los contornos $\beta_{c_i}(\omega)$, $i = 1, \dots, n$ se emplea en cada una de las frecuencias discretas los criterios de reparto presentados en la [Sección 4.2](#) y la [Sección 6.3](#), para definir las bandas de trabajo de la realimentación para cada una de las plantas. Véase cómo, en la mayor parte

de los casos, este reparto coincidirá con el reparto de la prealimentación obtenido en la primera etapa de diseño. No obstante, se recomienda realizar el procedimiento propuesto en esta sección por ser más robusto y reportar más información sobre el funcionamiento del sistema de control.

12.2.4 Diseño de controladores de realimentación

Llegados a este punto, el diseñador debe afrontar el *loop-shaping* de los controladores de realimentación, de forma que estos satisfagan la condición de diseño (12.27) y lleven a cabo el reparto frecuencial de tareas obtenido en la Subsección 12.2.3.

En primer lugar, antes de definir el proceso de diseño, es conveniente analizar el significado geométrico de la inecuación (12.27). Se pretende independizar las condiciones de diseño de los controladores de prealimentación de los de realimentación. Para ello, puede trasladarse el denominador de la parte izquierda de (12.27) a la parte derecha, obteniéndose

$$|m(j\omega) - g_e(j\omega)p_{A_t}(j\omega)| \leq |W_e(\omega)(1 + l_t(j\omega))|; \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}; \quad (12.31)$$

y a continuación pueden dividirse las dos partes de la ecuación por $p_{A_t}(j\omega)$, obteniéndose

$$\left| \frac{m(j\omega)}{p_{A_t}(j\omega)} - g_e(j\omega) \right| \leq \left| W_e(\omega) \frac{1 + l_t(j\omega)}{p_{A_t}(j\omega)} \right|; \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (12.32)$$

Véase cómo, si se considera $g_e(j\omega)$ la variable libre y se selecciona un caso dentro de la incertidumbre, la ecuación anterior se corresponde con la de una circunferencia centrada en

$$-\frac{m(j\omega)}{p_{A_t}(j\omega)} \quad (12.33)$$

y de radio

$$\left| W_e(\omega) \frac{1 + l_t(j\omega)}{p_{A_t}(j\omega)} \right|. \quad (12.34)$$

Por lo tanto, dados dos casos dentro de la incertidumbre (u y v), existirá un controlador de prealimentación $g_e(j\omega)$ solución si puede garantizarse

que la distancia entre los centros de las dos circunferencias sea inferior a la suma de los radios. Es decir

$$\left| \frac{m_u(j\omega)}{p_{A_{t,u}}(j\omega)} - \frac{m_v(j\omega)}{p_{A_{t,v}}(j\omega)} \right| \leq \left| W_e(\omega) \frac{1 + l_{t,u}(j\omega)}{p_{A_{t,u}}(j\omega)} \right| + \left| W_e(\omega) \frac{1 + l_{t,v}(j\omega)}{p_{A_{t,v}}(j\omega)} \right|. \quad (12.35)$$

Dado que los radios de las circunferencias dependen directamente de $l_t(j\omega)$, y ésta de los controladores de realimentación $c_i(j\omega)$, puede afirmarse que modificando éstos puede obtenerse una función $l_t(j\omega)$ que cumple la ecuación anterior. Si este procedimiento se reproduce para todos los casos dentro de la incertidumbre $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$, puede obtenerse una función de lazo abierto $l_t(j\omega)$ que garantiza la existencia de un controlador de prealimentación $g_e(j\omega)$ solución. Existen infinitas combinaciones de controladores de realimentación $c_i(j\omega)$ que dan lugar a una misma función $l_t(j\omega)$ solución. Se busca el conjunto de controladores de realimentación $c_i(j\omega)$, $i = 1, \dots, n$ que satisfacen el reparto de la banda de control entre plantas planteado en la [Subsección 12.2.3](#), para lo que se procede a un diseño secuencial. Para el diseño de $c_k(j\omega)$, el resto de controladores $c_{i \neq k}(j\omega)$ toman valores concretos, por lo que (12.35) expresa las condiciones que debe satisfacer c_k . Debidamente transformada, se trata de una inecuación de orden cuarto en términos del módulo del controlador c_k , tal y como se detalla en el [Apéndice D](#). Los algoritmos para su resolución y el cálculo de los contornos de diseño de $c_k(j\omega)$ se incorporan para ser usados dentro de *Terasoft QFT Toolbox*. El formato general de la inecuación resuelta es (12.30).

Dentro del proceso de diseño de los controladores de realimentación, cuando se afronta el diseño de $c_k(j\omega)$, la especificación de seguimiento robusto de referencias (12.11), puede ser expresada según

$$\left| \frac{m(j\omega) - g_e(j\omega)p_{A_t}(j\omega)}{1 + \sum_{i \neq k} l_i(j\omega) + l_k(j\omega)} \right| \leq W_e(\omega); \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (12.36)$$

Comparándose ésta con la inecuación general (12.30), se identifican los coeficientes $A = p_{A_t}(j\omega)$, $B = -m(j\omega)$, $C = 1 + \sum_{i \neq k} l_i(j\omega)$, $D = p_k(j\omega)$, $G = c_k(j\omega)$, $G_f = g_e(j\omega)$ y $W = W_e(\omega)$. De ésta forma, se obtienen los contornos para el diseño del controlador de realimentación $c_k(j\omega)$. Estos contornos representan la especificación de seguimiento. Para el cálculo de los contornos de estabilidad y de rechazo de perturbaciones

si quisieran considerarse, se siguen los pasos propuestos en capítulos anteriores.

Como en el caso del problema del regulador, el proceso secuencial de diseño comienza ajustando todos los controladores $c_i(j\omega)$ a cero. A continuación, en el primer paso, se diseña la rama/ramas que deben trabajar en baja frecuencia. El resto de controladores se ajustan siguiendo un orden creciente de frecuencias, de forma que el último paso corresponde con el diseño de la rama/ramas que trabajan en alta frecuencia. En cada uno de los diseños, las funciones a realizar por cada una de las plantas, en cada una de las frecuencias discretas, se corresponden con la planificación realizada en la primera etapa de diseño.

Por lo tanto, cuando se afronta el *loop-shaping* de cada uno de los controladores, en cada frecuencia podrán darse dos opciones: la planta debe contribuir al *performance*, o la planta debe ser inhibida del lazo de control. En consecuencia el diseñador efectuará el ajuste del controlador siguiendo las pautas propuestas en la [Sección 4.3](#)

12.2.5 Diseño del controlador maestro de prealimentación

Finalizado el diseño de los controladores de realimentación, puede garantizarse que existe un controlador $g_e(j\omega)$ que da solución a la inecuación (12.11). En este punto del diseño todos los controladores de realimentación $c_i(j\omega)$, $i = 1, \dots, n$ se encuentran ya diseñados, y por lo tanto, la inecuación sólo presenta un grado de libertad. Para su resolución se emplea la instrucción *genbnds* de la *Terasoft QFT Toolbox*. Ésta calcula los contornos para inecuaciones del tipo

$$\left| \frac{A + BG}{C + DG} \right| \leq W. \quad (12.37)$$

En este caso se emplean $A = m(j\omega)$, $B = -p_{A_t}(j\omega)$, $C = 1 + l_t(j\omega)$, $D = 0$, $G = g_e(j\omega)$ y $W = W_e(\omega)$. Esta inecuación es evaluada en el conjunto de frecuencias discreto Ω , dando lugar a *bounds* QFT en el plano módulo-argumento. Por último, obtenidas las restricciones (contornos) para $g_e(j\omega)$, se efectúa el *loop-shaping* de éste como si de un controlador clásico se tratase.

Del mismo modo que en el caso *model-matching* SISO [38], los contornos de diseño obtenidos para $g_e(j\omega)$ presentaran regiones válidas que se comprimen cuanto menor es el sobrediseño en los controladores de realimentación $c_i(j\omega)$. Entonces, con el fin de economizar la cantidad de

realimentación puede ocurrir que la región solución complique mucho el diseño de $g_e(j\omega)$, o aumente demasiado su orden. Desde un punto de vista práctico conviene un cierto sobrediseño en los controladores de realimentación, para aumenar convenientemente la región válida para $g_e(j\omega)$. Para una mejor comprensión de este fenómeno se recomienda la lectura de [38], así como la de los ejemplos presentados en la [Sección 12.3](#).

12.3 EJEMPLOS DE DISEÑO

12.3.1 Ejemplo 1: Sistema MISO 1×2

Se desea gobernar un sistema MISO 1×2 de forma que sea capaz de seguir referencias de forma robusta. En este caso se considera que el sistema trabaja sin ser sometido a perturbaciones externas. Los modelos de las plantas están determinados por

$$p_1(s) = \frac{k_1}{\tau_1 s + 1}, \quad p_2(s) = \frac{k_2}{s + \omega_2}; \quad (12.38)$$

Los parámetros de las funciones de transferencia presentan incertidumbre paramétrica, comprendida entre los intervalos

$$k_1 \in [4, 6], \quad k_2 \in [1.8, 2.4] \quad \tau_1 \in [10, 15], \quad \omega_2 \in [2, 3]. \quad (12.39)$$

Dentro de una disposición con plantas en paralelo ([Figura 12.1](#)), el problema de seguimiento tiene como objetivo diseñar $c_{i=1,2}(j\omega)$, $g_{i=1,2}(j\omega)$ y $g_e(j\omega)$ para garantizar el cumplimiento de especificaciones de estabilidad ([12.10](#)) y *tracking* ([12.11](#)) empleando la menor cantidad de acción de control posible. En cuanto a la estabilidad robusta, para conseguir un margen de fase mínimo de 40° , la tolerancia empleada en ([12.10](#)) es:

$$W_s = \left| \frac{0.5}{\cos(\pi(180 - MF)/360)} \right|, \quad MF = 40^\circ. \quad (12.40)$$

Para el seguimiento robusto de referencias según ([12.11](#)), el modelo de comportamiento deseado es

$$m(s) = \frac{32.65}{s^2 + 8s + 32.65}, \quad (12.41)$$

y la cota máxima de error permitida respecto al modelo anterior es

$$W_e(s) = \frac{0.2s}{0.125s^2 + 0.75s + 1}. \quad (12.42)$$

El calculo de contornos QFT y el *loop-shaping* de controladores se realiza para el siguiente vector de frecuencias discretas:

$$\Omega = \{0.01, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1, 4, 8, 10, 20\}[\text{rad/s}]. \quad (12.43)$$

Primera etapa: reparto frecuencial de la prealimentación

De acuerdo a las explicaciones realizadas en la [Subsección 12.2.1](#), para cada planta se calcula el controlador de prealimentación ideal más desfavorable $\bar{k}_{1,2}(j\omega)$ dentro de sus casos de incertidumbre. La [Figura 12.2](#) ilustra sus valores para todo el espectro frecuencial (línea continua), y para las frecuencias discretas de diseño (resaltadas con marcas circulares). A partir de dicha información se seleccionan las bandas de trabajo más adecuadas para cada planta, que se resumen en la [Tabla 12.1](#). El estudio realizado en cada frecuencia se detalla a continuación:

- En baja frecuencia ($\omega < 0.4$) se observa que el módulo de \bar{k}_2 es más de 6dB superior al de \bar{k}_1 , por lo tanto en dichas frecuencias debe trabajar la planta p_1 en solitario.
- En medias frecuencias ($0.4 < \omega < 1$) los módulos de \bar{k}_1 y \bar{k}_2 presentan una diferencia en altura inferior a 6dB, y además, sus desfases son inferiores a 90° . Por lo tanto, en dichas frecuencias las dos plantas deben colaborar en la prealimentación.
- Por último, en alta frecuencia ($\omega \geq 1$), el módulo de \bar{k}_1 es muy superior al de \bar{k}_2 , por lo que esta última debe trabajar en solitario.

Tabla 12.1: Reparto de las tareas de prealimentación para lograr la menor acción de control.

ω	0.01	0.1	0.2	0.4	0.8	1	4	8	10	20
p_1	×	×	×	×	×					
p_2				×	×	×	×	×	×	×

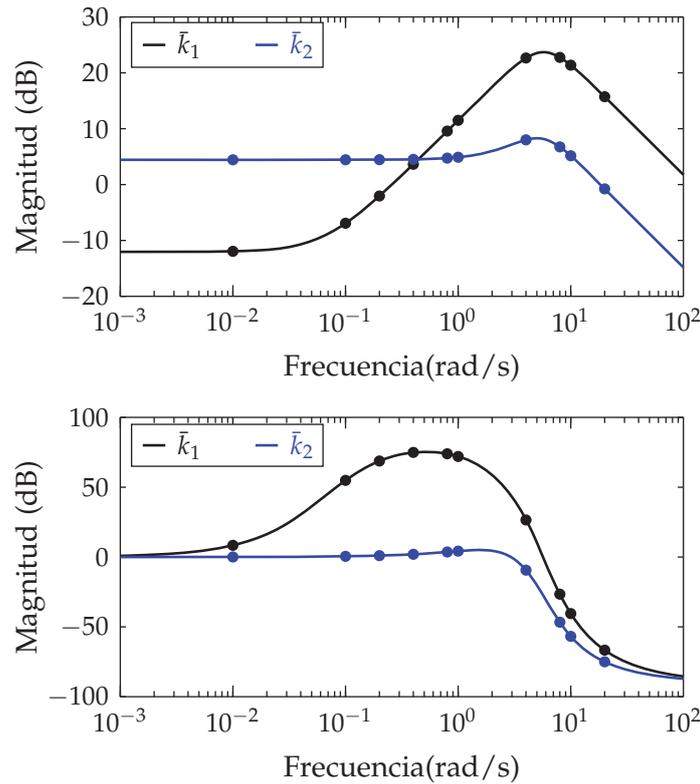


Figura 12.2: Estudio del reparto de la prealimentación a partir de los controladores $\bar{k}_{1,2}$.

Segunda etapa: diseño de esclavos de prealimentación

Para llevar a cabo el reparto de la banda frecuencial anterior se obtienen los esclavos $g_{1,2}(j\omega)$.

- Esclavo $g_1(j\omega)$. Dado que la planta $p_1(j\omega)$ debe trabajar únicamente en baja frecuencia, se opta por emplear un filtro pasa bajos de primer orden. Según las indicaciones en la [Subsección 12.2.2](#) su frecuencia de corte deberá ser superior a 0.8. Se emplea $\omega_c = 2$, resultando

$$g_1(s) = \frac{1}{s/2 + 1}. \quad (12.44)$$

- Esclavo $g_2(j\omega)$. La planta $p_2(j\omega)$ debe trabajar en alta frecuencia, por lo que se implementa un filtro pasa altos, en particular de primer orden. La frecuencia de corte seleccionada es $\omega_c = 0.2$, resultando

$$g_2(s) = \frac{s/0.2}{s/0.2 + 1}. \quad (12.45)$$

Seleccionados los controladores esclavos de prealimentación $g_{1,2}(j\omega)$, debe evaluarse si son adecuados. En la [Figura 12.3](#) se muestran las envolventes de las magnitudes de las respuestas frecuenciales de las plantas $p_1(j\omega)$, $p_2(j\omega)$ y $p_{A_t}(j\omega)$ ⁸. En ella puede comprobarse como la magnitud de $p_{A_t}(j\omega)$ no presenta una magnitud significativamente menor a la de las plantas individuales, $p_1(j\omega)$ o $p_2(j\omega)$, condición necesaria para que los controladores $g_{1,2}(j\omega)$ sean adecuados.

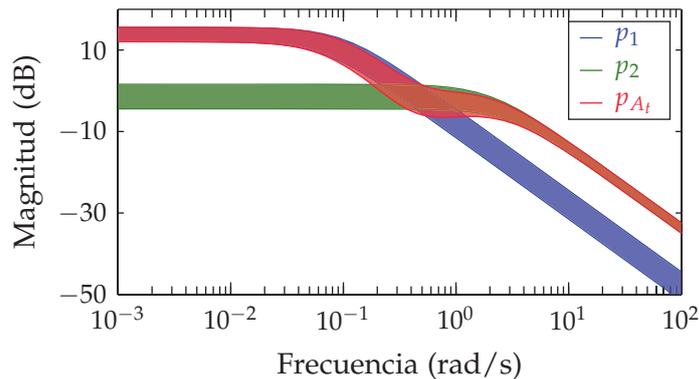


Figura 12.3: Magnitud de las respuestas frecuenciales de $p_1(j\omega)$, $p_2(j\omega)$ y $p_{A_t}(j\omega)$.

Tercera etapa: reparto frecuencial de la realimentación

Se siguen las pautas en la [Subsección 12.2.3](#). De acuerdo a las especificaciones de control exigidas y conocidos los filtros de prealimentación $g_{1,2}(j\omega)$, puede calcularse para el vector de frecuencias Ω la cantidad de realimentación demandada por cada una de las plantas $p_1(j\omega)$ y $p_2(j\omega)$, si éstas trabajarán en solitario. En la [Figura 12.4](#) se muestran los contornos que expresan la demanda de ganancia de control de realimentación. Sólo se representan parte de las frecuencias comprendidas en Ω ; en concreto $\{0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$ [rad/s]. Se comparan las alturas y el desfase de dichos *bounds* en ambas ramas, alcanzándose las siguientes conclusiones:

- En baja frecuencia ($\omega < 0.4$), los *bounds* β_{c_1} se sitúan más de $20 \log 2$ dB por debajo de los *bounds* β_{c_2} ; ver $\omega = 0.1$ (línea azul). Por lo tanto, en $\omega < 0.4$, la rama $p_1(j\omega)$ debe asumir las tareas de control, mientras que la rama $p_2(j\omega)$ debe ser inhibida.

⁸ Recuérdese que $p_{A_t}(j\omega)$ corresponde con $p_{A_t}(j\omega) = g_1(j\omega)p_1(j\omega) + g_2(j\omega)p_2(j\omega)$

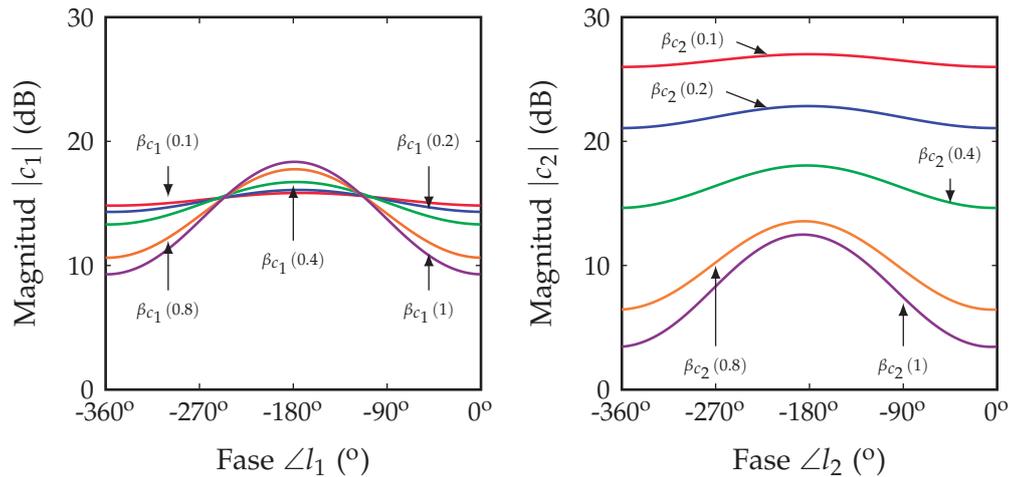


Figura 12.4: Demanda de realimentación para las plantas $p_1(j\omega)$ y $p_2(j\omega)$.

- En media frecuencia ($0.4 \leq \omega < 08$), las alturas de los *bounds* difieren menos de $20 \log 2$; ver $\omega = 0.4$ (línea verde). Por lo tanto, las dos plantas deben colaborar en $0.4 \leq \omega < 08$.
- En alta frecuencia ($\omega \geq 1$), los *bounds* β_{c_2} se sitúan más de $20 \log 2$ dB por debajo de los *bounds* β_{c_1} ; ver $\omega = 1$ (línea cyan). La planta $p_2(j\omega)$ debe encargarse de las tareas de control y la planta $p_1(j\omega)$ debe ser inhibida en $\omega \geq 1$.

De acuerdo al estudio anterior, la [Tabla 12.2](#) muestra la planificación del reparto de la realimentación en Ω . Véase como esta tabla coincide con la [Tabla 12.1](#) que resumía las tareas de prealimentación. En la mayor parte de las ocasiones estas tablas serán idénticas, sobre todo si el diseño contempla plantas con dinámicas de fase mínima. No obstante, se recomienda realizar las dos etapas de planificación, ya que este comportamiento puede ser diferente si se contemplan múltiples especificaciones de diseño (tracking, rechazo de perturbaciones, limitaciones en la acción de control, etc.) o se emplean plantas con polos/ceros en el semi-plano derecho, retardos, etc. Además, esta tercera etapa de diseño aporta información extra al diseñador que puede presentar un valor añadido en muchas ocasiones, ya que permite analizar el controlador demandado y hacer una planificación de como efectuar el *loop-shaping*.

Cuarta etapa: diseño de controladores de realimentación

El diseño secuencial de los controladores $c_1(j\omega)$ y $c_2(j\omega)$ es realizado siguiendo los objetivos mostrados en la [Tabla 12.2](#). La [Figura 12.5](#) ilustra

Tabla 12.2: Reparto de las tareas de realimentación para lograr la menor ganancia de controladores de realimentación

ω	0.01	0.1	0.2	0.4	0.8	1	4	8	10	20
p_1	×	×	×	×	×					
p_2				×	×	×	×	×	×	×

el proceso de diseño en pasos detallados⁹. La guía de diseño empleada corresponde con la descrita en la [Sección 4.3](#), y se analiza paso a paso a continuación.

o.- El cálculo inicial de *bounds* es realizado con $c_2^0(j\omega) = 0$ para el lazo 1 ([Figura 12.5](#) cuadro a) y con $c_1^0(j\omega) = 0$ para el lazo 2 ([Figura 12.5](#) cuadro b).

I.- *Loop-shaping* de $l_1(j\omega)$ (ver [Figura 12.5](#) cuadro c). Para lograr que $l_t(j\omega) \approx l_1(j\omega)$ en $\omega < 0.4$, $l_1(j\omega)$ es situado sobre los *bounds* $\beta_{l_1}(0.01, 0.1, 0.2)$. Véase como se emplea un pequeño sobrediseño que facilite el diseño en una etapa posterior del controlador de prealimentación $g_e(j\omega)$. Para lograr la colaboración con la planta $p_2(j\omega)$ en $0.4 \leq \omega < 0.8$, $l_1(j\omega)$ es diseñado situándose por debajo de $\beta_{l_1}(0.4)$ y $\beta_{l_1}(0.8)$. En $\omega \geq 1$, el objetivo es que $l_t(j\omega) \approx l_2(j\omega)$. Por tanto, $\omega = 1$ es la frecuencia de *roll-off* de $l_1(j\omega)$, a partir de la cual la ganancia de lazo es reducida lo más rápidamente posible, aun violando momentáneamente los *bounds* de alta frecuencia. Después del paso I los controladores son:

$$c_1^I(s) = \frac{12.5(s + 0.04)}{s(s + 1)(s + 2)} \quad c_2^I(s) = c_2^0(s) = 0 \quad (12.46)$$

Como consecuencia, se obtienen nuevos *bounds* β_{l_2} para el *loop-shaping* de $l_2(j\omega)$. Pueden compararse los nuevos *bounds* en la [Figura 12.5](#) cuadro d, con los *bounds* iniciales mostrados en la [Figura 12.5](#) cuadro b. Obsérvese como aparecen regiones de exclusión en $\beta_{l_2}(0.01, 0.1, 0.2)$, que permitirán reducir la ganancia del lazo $l_2(j\omega)$ en $\omega < 0.4$, donde el lazo $l_1(j\omega)$ logra por sí mismo los objetivos de control. Del mismo modo, surgen depresiones

⁹ Como en los ejemplos anteriores el número de paso es indicado con superíndices.

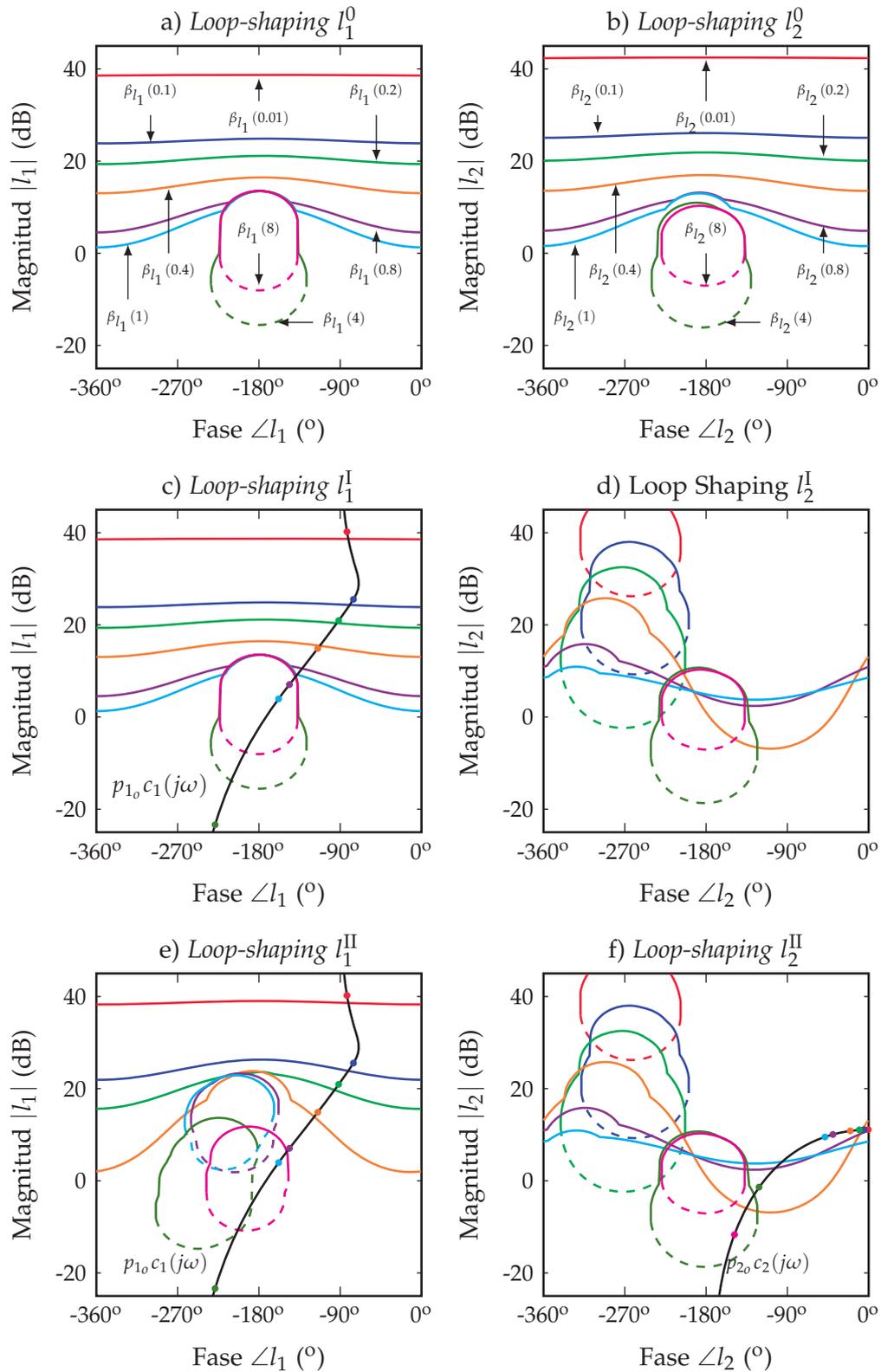


Figura 12.5: Secuencia de diseño (*loop-shaping*) de controladores de realimentación

en $\beta_{l_2}(0.4, 0.8, 1)$, donde $l_2(j\omega)$ debe colaborar con $l_1(j\omega)$. Por último, se obtienen los mismos *bounds* que en la etapa inicial para $\omega = \{4, 8, 10, 20\}$, donde sólo $l_2(j\omega)$ es el encargado de las tareas de control.

II.- *Loop-shaping* de $l_2(j\omega)$ (ver [Figura 12.5](#) cuadro f). En primer lugar se reduce la ganancia de $l_2(j\omega)$ en $\omega < 0.4$ para conseguir que $|l_2(j\omega)| \ll |l_t(j\omega)|$, entonces se logra que $l_t(j\omega) \approx l_1(j\omega)$. En segundo lugar se diseña $l_2(j\omega)$ para que cumpla con todos los requisitos de diseño en el resto de frecuencias. Se contempla un pequeño sobrediseño para facilitar el posterior diseño de $g_e(j\omega)$. Después del paso II, los controladores de realimentación definitivos son:

$$c_2(s) = c_2^{\text{II}}(s) = \frac{10}{(s + 2.5)} \quad c_1(s) = c_1^{\text{II}}(s) = c_1^{\text{I}}(s) \quad (12.47)$$

Como consecuencia, pueden compararse los nuevos *bounds* β_{l_1} en la [Figura 12.5](#) cuadro e, con los *bounds* β_{l_1} del paso anterior [Figura 12.5](#) cuadro c. Nótese como ahora $l_1(j\omega)$ cumple con todos los *bounds*. Muéstrese especial atención en la [Figura 12.5](#) cuadro e y [Figura 12.5](#) cuadro f, en las frecuencias en las que las plantas colaboran. El reparto de la realimentación está cerca del óptimo en $\omega = 0.5$, es decir, $l_1(j\omega)$ y $l_2(j\omega)$ se encuentran sobre sus respectivos *bounds* en dicha frecuencia.

Quinta etapa: diseño del controlador maestro de prealimentación

Diseñados los controladores de realimentación, puede garantizarse la existencia de un controlador $g_e(j\omega)$ solución, de acuerdo a la formulación en el [Apéndice D](#). Para su diseño se emplea el procedimiento propuesto en la [Subsección 12.2.5](#), obteniendo

$$g_e(s) = \frac{19.506(s + 9.7)(s + 0.0625)(s^2 + 6.076s + 9.61)}{(s + 0.46)(s + 5.8)^2(s^2 + 11.64s + 36)}. \quad (12.48)$$

El *loop-shaping* de $g_e(j\omega)$ puede observarse en la [Figura 12.6](#). En dicha figura puede comprobarse como el elevado orden del controlador maestro de prealimentación está motivado por la dificultad del diseño. Si se desea por motivos operativos un controlador con menor orden, deberá aumentarse el sobre-diseño en el diseño de los controladores de

realimentación. En tal caso, las regiones del plano complejo válidas en cada frecuencia incrementarían su tamaño, facilitando la obtención de un controlador $g_e(j\omega)$ solución.

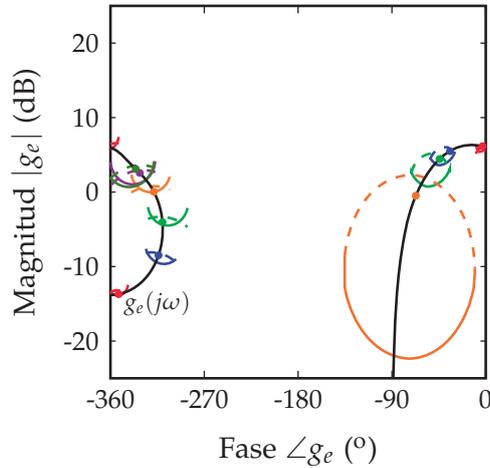


Figura 12.6: Diseño del controlador de prealimentación maestro $g_e(j\omega)$.

Análisis y validación del diseño

A continuación, se presenta un estudio de la solución de control alcanzada. En primer lugar, en la [Figura 12.7](#) se muestra como el sistema en lazo cerrado cumple con las especificaciones de comportamiento. En esta figura puede comprobarse como para todas las plantas pertenecientes al espacio de la incertidumbre se respetan las $W_e(\omega)$ y $W_s(\omega)$ empleadas para garantizar un adecuado seguimiento de referencias y la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

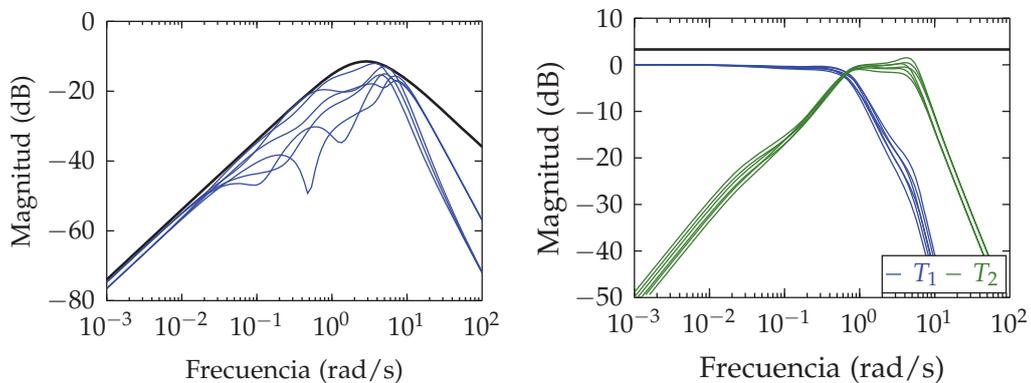


Figura 12.7: Cumplimiento robusto de especificaciones: (izq.) error de seguimiento, (dcha.) estabilidad.

En la [Figura 12.8](#) se muestra la respuesta temporal para todas las plantas dentro de la incertidumbre. En dicha figura se representa el comportamiento de la salida global y de las salidas individuales cuando se produce un cambio de tipo escalón unitario ($t = 1s$) en la referencia. El comportamiento es el esperado según las decisiones adoptadas en el proceso de diseño. Por un lado, la respuesta $y(t)$ sigue el comportamiento marcado por el modelo $m(t)$ y se encuentra entre las tolerancias $m(t) + W_b(t)$ y $m(t) - W_b(t)$, marcadas en color negro. Las pequeñas distorsiones en media frecuencia se deben a la no correspondencia entre tiempo y frecuencia. No obstante puede considerarse que el seguimiento es adecuado. Por otro lado, puede observarse como el impacto de las salidas individuales en la salida es el esperado. La respuesta $y_1(t)$, mejor condicionada para trabajar en baja frecuencia, evoluciona lentamente hasta alcanzar el valor de consigna. Sin embargo, la salida $y_2(t)$ presenta una variación brusca inicial que facilita que la salida global rápidamente trate de seguir a la referencia, para a continuación desconectarse del lazo de control.

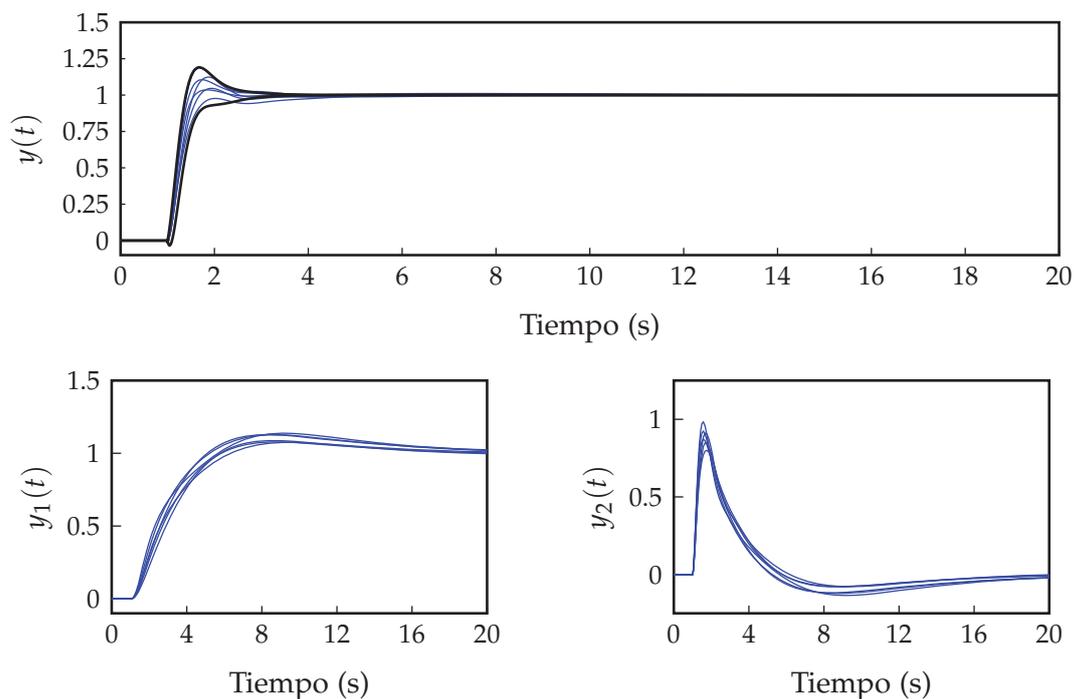


Figura 12.8: Seguimiento de referencias para un escalón unitario en $t = 1s$.

La [Figura 12.9](#) ilustra el comportamiento de las acciones de control $u_1(t)$ y $u_2(t)$. Cada acción de control se desglosa en tres componentes para poder comprender mejor el funcionamiento de la estructura de control. En la ventana superior se muestra la acción de control total

$u_i(t)$, suma de la proporcionada por la prealimentación u_{i_g} (calculada por $g_e g_i$) y la realimentación u_{i_c} (calculada por c_i), que se desglosan en las dos ventanas inferiores.

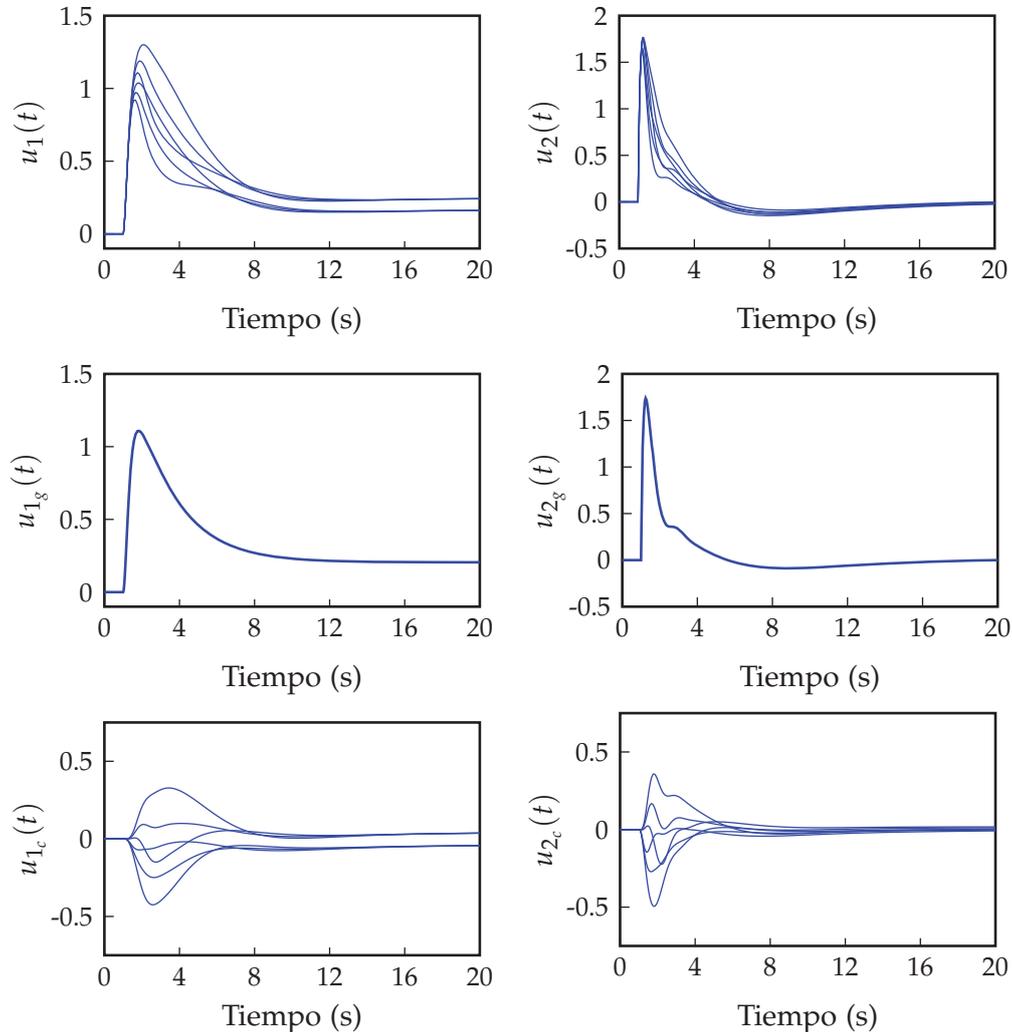


Figura 12.9: Evolución de las acciones de control.

Como puede observarse en la [Figura 12.9](#), la acción de control $u_1(t)$ evoluciona hasta alcanzar su máximo en aproximadamente $t = 2s$, momento a partir del cual reduce su valor, alcanzando en régimen permanente valores próximos a 0.25. La existencia de múltiples valores en régimen permanente es debida a la incertidumbre en la ganancia estática de $p_1(j\omega)$. Véase como el comportamiento de $u_1(t)$ es muy similar al de $u_{1_g}(t)$, ya que la prealimentación es quien marca la tendencia de comportamiento. Este hecho se compagina con que el controlador de realimentación aporte las variaciones demandadas por la incertidumbre.

Por este motivo, su respuesta se encuentra próxima a 0, presentando valores positivos y negativos.

El comportamiento observado para $u_2(t)$ es similar al de para $u_1(t)$. Como en el caso anterior, la acción de control $u_2(t)$ está compuesta por la tendencia introducida por $u_{2g}(t)$ y las variaciones debidas a la incertidumbre introducidas por el controlador de realimentación a partir de $u_{2c}(t)$. En este caso es interesante destacar cómo la acción de control $u_2(t)$ se desconecta del lazo de control en régimen permanente. Véase cómo, para tal fin, deben desconectarse los dos controladores (prealimentación y realimentación) en baja frecuencia. Puede comprobarse como la respuesta $u_{2g}(t)$ tiende a 0 en régimen permanente debido al controlador $g_2(j\omega)$. Del mismo modo, que la acción de control $u_{2c}(t)$ tienda a 0 en régimen permanente es debido a que el controlador $c_2(j\omega)$ se encuentra desconectado del lazo de control en baja frecuencia.

Por último, en la [Figura 12.10](#) se muestran los diagramas de magnitud de los controladores (realimentación c_i y prealimentación g_i) y de las ramas (realimentación l_i y prealimentación l_{A_i}). En la parte superior se muestran las magnitudes de los controladores y en la inferior la de las ramas. En la parte superior izquierda puede observarse como la magnitud del controlador $c_1(j\omega)$ es superior a la de $c_2(j\omega)$ en baja frecuencia y la de $c_2(j\omega)$ es superior a la de $c_1(j\omega)$ en alta frecuencia. En la esquina inferior izquierda, puede comprobarse como los controladores anteriores producen que el reparto frecuencial de las tareas de realimentación cumpla con los objetivos propuestos en la [Tabla 12.2](#). En esta figura puede comprobarse como la rama l_1 domina en baja frecuencia y l_2 domina en alta frecuencia. La zona de medias frecuencias, en la que se produce la transición entre las ramas, se sitúa en el intervalo $0.4 \leq \omega \leq 0.8$, tal como se planificó en la tercera etapa de diseño. En la parte superior derecha se observan las magnitudes de los controladores de prealimentación ($\hat{g}_i(j\omega)$). En la figura inferior puede comprobarse como los esclavos $g_{1,2}(j\omega)$ producen que las ramas de prealimentación (l_{A_1} y l_{A_2}) se repartan la banda de trabajo según lo planificado en la [Tabla 12.1](#).

12.3.2 Ejemplo 2: Alternativas de reparto

A continuación se presenta un ejemplo cuyo propósito es ilustrar la importancia de llevar a cabo un adecuado reparto de la prealimentación, según los criterios propuestos en la [Subsección 12.2.1](#). En este ejemplo se comparan dos alternativas de reparto de la prealimentación, alcan-

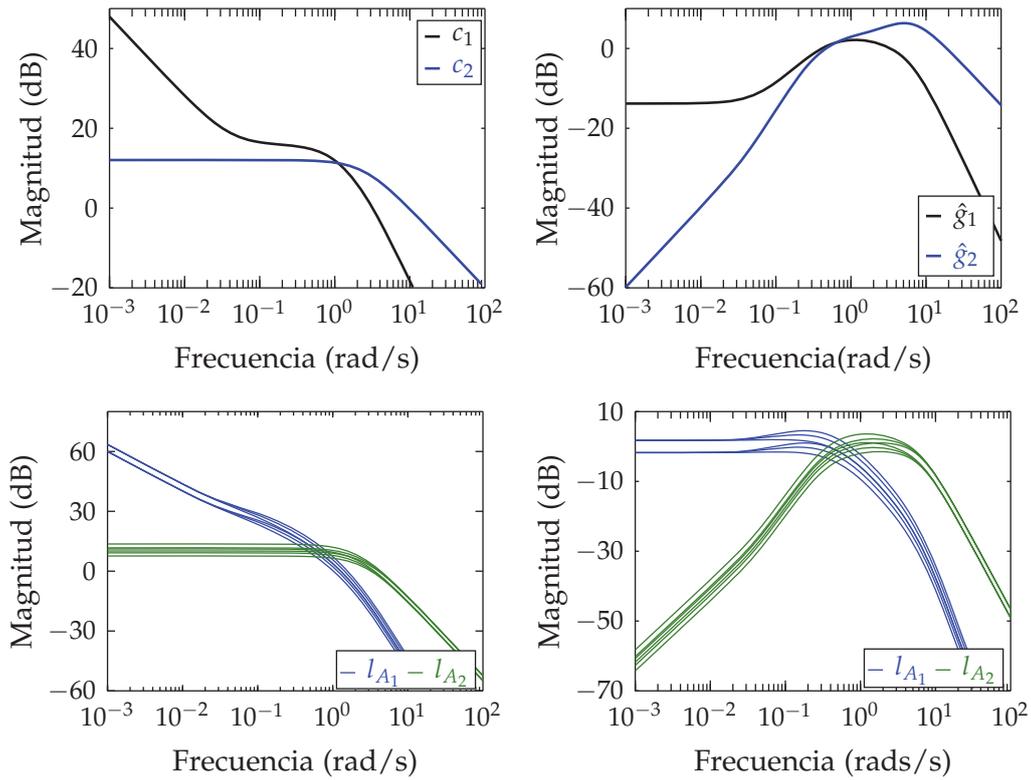


Figura 12.10: Magnitud de los controladores (realimentación y prealimentación) y de las ramas (realimentación y prealimentación).

zando dos soluciones de control que posteriormente son comparadas y evaluadas.

Para este segundo ejemplo se emplea un sistema MISO 1×2 cuyas plantas son

$$p_1(s) = \frac{k_1}{\left(\frac{\tau_1}{k_1}s + 1\right)^2}, \quad p_2(s) = \frac{k_2}{\tau_2 s + 1}. \quad (12.49)$$

Los parámetros de las funciones de transferencia presentan incertidumbre paramétrica, comprendida en los intervalos

$$\begin{aligned} k_1 &\in [1.60, 2.40], & \tau_1 &\in [0.17, 18], \\ k_2 &\in [0.98, 1.02], & \tau_2 &\in [1/3, 1]. \end{aligned} \quad (12.50)$$

En la [Figura 12.11](#) se muestran las envolventes de las magnitudes de la respuesta frecuencial de las plantas. Véase como la planta $p_2(j\omega)$ presenta una incertidumbre muy pequeña en baja frecuencia, pero su magnitud es mucho menor que la de la planta $p_1(j\omega)$, que por el contrario presenta bastante incertidumbre en baja frecuencia. Este comportamiento se

invierte en alta frecuencia, donde $p_1(j\omega)$ presenta menos incertidumbre y magnitud que $p_2(j\omega)$. Se ha escogido esta disposición de plantas puesto que resulta el caso más complejo de analizar, en el que el diseñador puede optar por un reparto de la prealimentación diferente al propuesto en este trabajo (que trata de reducir la acción de control, no la cantidad de realimentación).

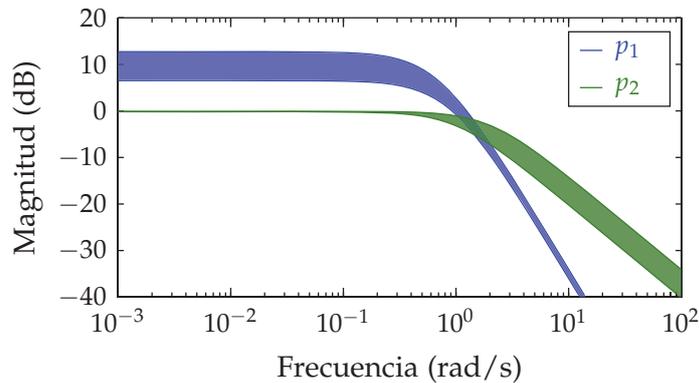


Figura 12.11: Envolventes de las curvas de magnitud de las respuestas frecuenciales de $p_1(j\omega)$ y $p_2(j\omega)$.

Dentro de una disposición con plantas en paralelo (Figura 12.1), el problema del seguimiento de referencias tiene como objetivo diseñar $c_{i=1,2}(j\omega)$ y $g_{i=1,2}(j\omega)$ para garantizar que en lazo cerrado se cumplen las especificaciones de estabilidad (12.10) y *tracking* (12.11) robusto. Las cotas $W_s(\omega)$ y $W_e(\omega)$, así como el modelo $m(s)$ coinciden con los empleados en el ejemplo de la Subsección 12.3.1. También se emplea el mismo vector de frecuencias discretas para las tareas de diseño

$$\Omega = \{0.01, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1, 4, 8, 10, 20\}[\text{rad/s}]. \quad (12.51)$$

Primera etapa: reparto de la prealimentación

Se analizarán dos posibles estrategias de reparto de las tareas de prealimentación entre las plantas:

- Reducción de la acción de control (método preferido en este trabajo). Se realizan los cálculos oportunos de acuerdo a la metodología presentada en la Subsección 12.2.1. La Figura 12.12 muestra como en baja frecuencia la planta p_1 demanda un menor esfuerzo de control, mientras que la planta p_2 se encuentra mejor condicionada en alta frecuencia. De acuerdo a la Figura 12.12 se planifica el reparto frecuencial mostrado en la parte superior de la Tabla 12.3.

- Reducción de la cantidad de realimentación. En este caso se busca minimizar $|m(j\omega) - l_{A_t}(j\omega)|$, para de este modo reducir la magnitud de los controladores de realimentación¹⁰. Pese a parecer una idea adecuada, como se verá posteriormente esta solución reporta peores resultados. Para minimizar $|m(j\omega) - l_{A_t}(j\omega)|$ se emplea un reparto en el que se emplea en cada frecuencia la planta que presenta menor incertidumbre (Figura 12.11). En tal caso, el reparto frecuencial es el que se muestra en la parte inferior de la Tabla 12.3.

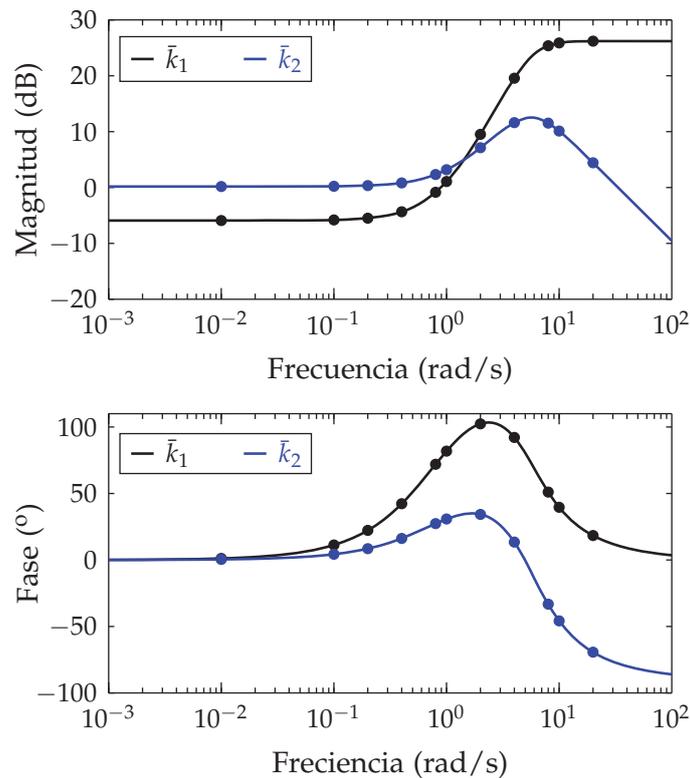


Figura 12.12: Estudio del reparto de la prealimentación a partir de los controladores $\bar{k}_{1,2}$.

Segunda etapa: diseño de esclavos de prealimentación

De acuerdo a las dos estrategias de reparto frecuencial establecidos en la etapa anterior, se diseñan los esclavos $g_{1,2}(j\omega)$, cuyo objetivo último es la reducción de la acción de control, y los esclavos $g_{1,2}^*(j\omega)$, cuyo objetivo último es la reducción de la cantidad de realimentación.

¹⁰ En la Subsección 12.2.1 se ha introducido esta alternativa de diseño.

Tabla 12.3: Reparto de las tareas de prealimentación según dos criterios.

REDUCCIÓN DE LA ACCIÓN DE CONTROL											
ω	0.01	0.1	0.2	0.4	0.8	1	2	4	8	10	20
p_1	×	×	×	×	×	×	×				
p_2			×	×	×	×	×	×	×	×	×
REDUCCIÓN DE LA REALIMENTACIÓN											
ω	0.01	0.1	0.2	0.4	0.8	1	2	4	8	10	20
p_1						×	×	×	×	×	
p_2	×	×	×	×	×						

- Los esclavos $g_i(j\omega)$ se obtienen empleando las pautas descritas en [Subsección 12.2.2](#). En este caso se selecciona para la planta $p_1(j\omega)$ una frecuencia de corte $\omega_c = 4$, y para la planta $p_2(j\omega)$ una frecuencia de corte $\omega_c = 0.1$. Los controladores resultantes son

$$g_1(s) = \frac{4}{s+4}, \quad g_2(s) = \frac{s}{s+0.1}, \quad (12.52)$$

siendo $g_1(j\omega)$ un filtro paso bajos, y $g_2(j\omega)$ un filtro paso altos.

- Los esclavos $g_{1,2}^*(j\omega)$ se diseñan para que $g_1^*(j\omega)$ actúe como filtro pasa altos y $g_2^*(j\omega)$ como pasa bajos. En este caso se selecciona para $g_1^*(j\omega)$ una frecuencia de corte $\omega_c = 0.1$, y para $g_2^*(j\omega)$ una frecuencia de corte $\omega_c = 1$. Los controladores resultantes son

$$g_1^*(s) = \frac{s}{s+1}, \quad g_2^*(s) = \frac{1}{(s+1)^2}. \quad (12.53)$$

Diseñados $g_{1,2}(j\omega)$ y $g_{1,2}^*(j\omega)$ mediante (12.25) se calculan las plantas equivalentes $p_{A_t}(j\omega)$ y $p_{A_t}^*(j\omega)$, respectivamente, que verá el controlador de prealimentación maestro. La [Figura 12.13](#) muestra las envolventes de sus curvas de magnitud frecuencial. En ella puede apreciarse como $p_{A_t}^*(j\omega)$ presenta menor incertidumbre que $p_{A_t}(j\omega)$ en prácticamente todo el espectro de frecuencias. En contrapartida, $p_{A_t}(j\omega)$ tiene mayor magnitud que $p_{A_t}^*(j\omega)$ en prácticamente todo el espectro de frecuencia.

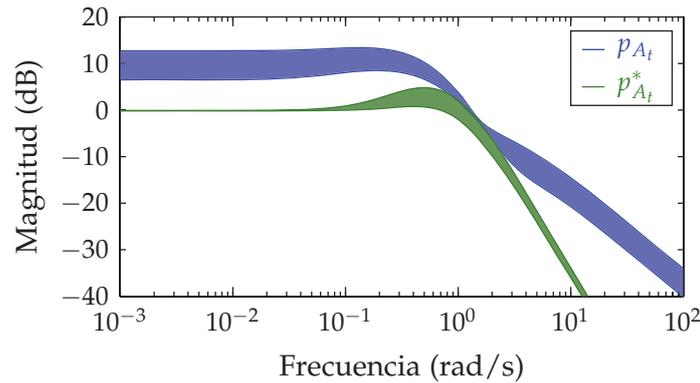


Figura 12.13: Magnitud de la respuesta frecuencial de las plantas $p_{A_t}(j\omega)$ y $p_{A_t}^*(j\omega)$.

Tercera etapa: reparto frecuencial de la realimentación

En el siguiente paso se analiza la demanda de realimentación de cada rama para determinar cual es el mejor reparto de las tareas de realimentación. Los contornos $\beta_{c_i}(\omega)$ obtenidos para cada una de las plantas se muestran en la Figura 12.14. La columna izquierda presenta la rama 1, y la derecha la rama 2. La parte superior muestra los contornos obtenidos cuando se emplean $g_{1,2}(j\omega)$, y la parte inferior muestra los contornos cuando se emplea $g_{1,2}^*(j\omega)$. Del estudio de la Figura 12.14 se alcanzan las siguientes conclusiones:

- Reducción de la acción de control. En este caso, la planta $p_1(j\omega)$ debe trabajar en solitario en baja frecuencia $\omega \leq 0.4$. En medias frecuencias $0.4 < \omega < 4$ las dos plantas $p_1(j\omega)$ y $p_2(j\omega)$ deben colaborar. Por último, en alta frecuencia $\omega \geq 4$ debe trabajar en solitario la planta $p_2(j\omega)$. Las conclusiones obtenidas se resumen en la parte superior de Tabla 12.4.
- Reducción de la realimentación. En este caso, la planta $p_1(j\omega)$ debe trabajar en solitario en baja frecuencia $\omega \leq 0.4$. En medias frecuencias $0.4 < \omega < 4$ las dos plantas deben colaborar. Por último, en alta frecuencia $\omega \geq 4$ debe trabajar en solitario la planta $p_2(j\omega)$. Las conclusiones obtenidas se resumen en la parte inferior de la Tabla 12.4.

Además de permitir la evaluación de cual es el mejor reparto de la realimentación, la Figura 12.14 permite analizar de forma aproximada la magnitud de los controladores obtenidos en la siguiente etapa de diseño.

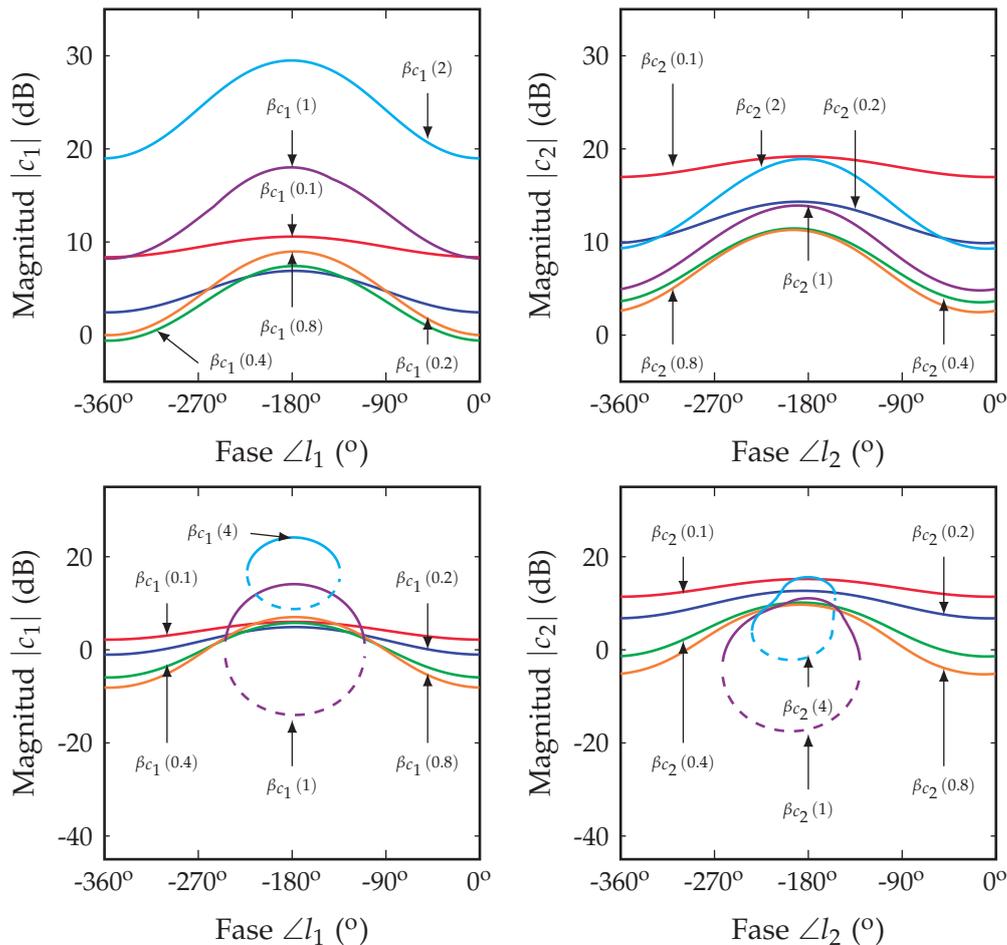


Figura 12.14: Demanda de realimentación para las plantas: (izq.) p_1 y (dcha.) p_2 , usando los controladores de prealimentación: (sup.) $g_{1,2}$ y (inf.) $g_{1,2}^*$.

Véase como los contornos obtenidos con $g_{1,2}^*(j\omega)$ presentan una altura notablemente inferior a los obtenidos con $g_{1,2}(j\omega)$. Es decir, los controladores de realimentación, dependen del reparto de la prealimentación efectuado, y en consonancia con el criterio adoptado de partida, la prealimentación con $g_{1,2}^*(j\omega)$ dará lugar a controladores de realimentación de menor magnitud, reduciéndose por tanto el coste de la realimentación (amplificación de ruidos de alta frecuencia). Sin embargo, paradójicamente esto conllevará como contrapartida una mayor acción de control total, que será necesario aportar desde la prealimentación (tal y como se puede predecir a partir de la [Figura 12.13](#)).

Tabla 12.4: Reparto de las tareas de realimentación para minimizar esta, a partir de los dos criterios de prealimentación ya adoptados.

REDUCCIÓN DE LA ACCIÓN DE CONTROL											
ω	0.01	0.1	0.2	0.4	0.8	1	2	4	8	10	20
p_1	×	×	×	×	×	×	×				
p_2					×	×	×	×	×	×	×

REDUCCIÓN DE LA REALIMENTACIÓN											
ω	0.01	0.1	0.2	0.4	0.8	1	2	4	8	10	20
p_1	×	×	×	×	×	×	×				
p_2					×	×	×	×	×	×	×

Cuarta etapa: diseño de controladores de realimentación

Una vez calculado el reparto de la realimentación adecuado se realiza el *loop-shaping* de los controladores según los criterios descritos en la [Sección 4.3](#). Los diseños alcanzados se muestran en la [Figura 12.15](#).

- Controladores de realimentación obtenidos empleando $g_{1,2}(j\omega)$ para minimizar la acción de control

$$c_1(s) = \frac{6(s + 0.5)}{s(s + 4)}, \quad (12.54)$$

$$c_2(s) = \frac{109.01(s^2 + 7.219s + 14.75)}{(s + 15)(s^2 + 10.33s + 39.69)}. \quad (12.55)$$

- Controladores de realimentación obtenidos empleando $g_{1,2}^*(j\omega)$ para minimizar la cantidad de realimentación

$$c_1^*(s) = \frac{1.8135(s + 0.013)(s + 0.7)}{s(s + 0.48)(s + 1.5)} \quad (12.56)$$

$$c_2^*(s) = \frac{44.37(s + 0.88)}{(s + 1.7)(s + 3)(s + 6.6)} \quad (12.57)$$

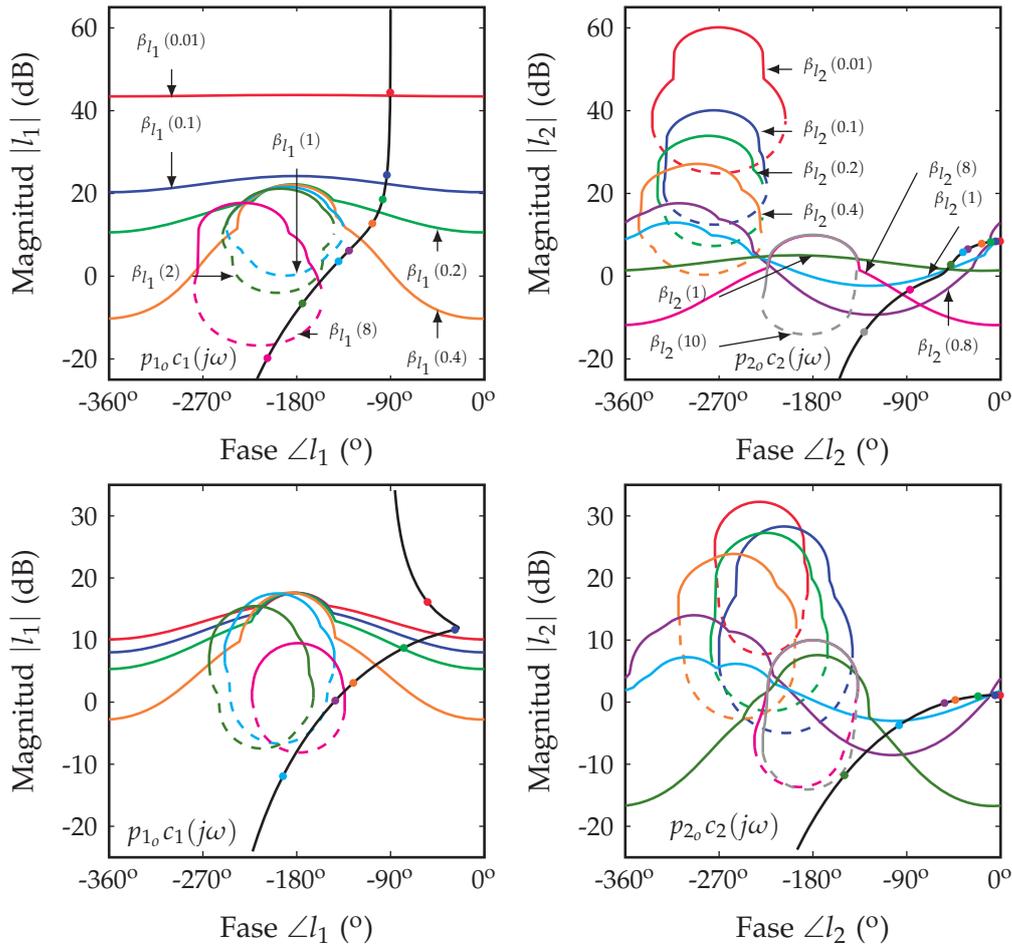


Figura 12.15: Loop-shaping de los controladores: (sup.) $c_{1,2}(j\omega)$, (inf.) $c_{1,2}^*(j\omega)$.

Quinta etapa: diseño del controlador maestro de prealimentación

Diseñados los controladores de realimentación se obtienen los controladores maestros de prealimentación. Su diseño se muestra en la [Figura 12.16](#).

- Minimización de la acción de control (empleando $g_{1,2}(j\omega)$ y $c_{1,2}(j\omega)$) se obtiene

$$g_e(s) = \frac{19.107(s + 12)(s + 0.02)(s^2 + 0.684s + 0.36)}{(s + 12)(s + 1)(s + 0.019)(s^2 + 6.066s + 19.89)}. \quad (12.58)$$

- Minimización de la cantidad de realimentación (empleando $g_{1,2}^*(j\omega)$ y $c_{1,2}^*(j\omega)$) se obtiene

$$g_e^*(s) = \frac{597(s + 1.13)(s + 10.21)(s^2 + 1.078s + 0.43)}{(s + 0.26)(s + 7.6)(s + 20)(s^2 + 14.9s + 73.55)}. \quad (12.59)$$

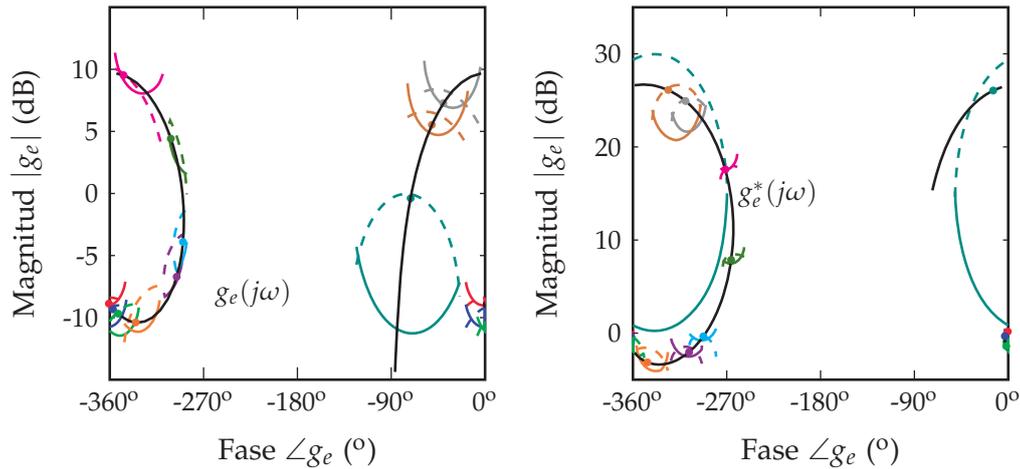


Figura 12.16: *Loop-shaping* de los controladores $g_e(j\omega)$ y $g_e^*(j\omega)$.

Análisis y comparación de los diseños

A continuación, se presenta un estudio de las soluciones de control alcanzadas. En primer lugar, en la [Figura 12.17](#) se muestra como las dos soluciones de control cumplen con las especificaciones de comportamiento establecidas (seguimiento y estabilidad robustas) en el dominio de la frecuencia.

En la [Figura 12.18](#) se muestran las magnitudes de los controladores de realimentación, de prealimentación, de las funciones de lazo de cada una de las ramas y de las ramas de prealimentación l_{A_i} . En la parte superior-izquierda puede comprobarse como los controladores c_i (línea continua) presentan una magnitud notablemente superior a la de los controladores c_i^* (línea discontinua) homólogos, en todo el espectro frecuencial. Por lo tanto, la solución alcanzada por los controladores c_i^* presenta un menor coste de la realimentación; y en consecuencia darán lugar a un sistema con menor amplificación de ruidos de alta frecuencia. Como contrapartida, en la parte superior derecha, puede comprobarse como la magnitud de los controladores de prealimentación $\hat{g}_i^* = g_e^* g_i^*$ (línea discontinua) es superior a la de $\hat{g}_i = g_e g_i$ (línea continua). Es decir, se ha conseguido reducir el ancho de banda de los controladores de realimentación a costa de aumentar el de los controladores de prealimentación, lo cual finalmente implicará una mayor acción de control. En la segunda fila de figuras pueden también observarse las envolventes de las magnitudes de las ramas de realimentación en las dos opciones de diseño. Estas verifican el reparto frecuencial de la realimentación establecido en la [Tabla 12.4](#): $l_1 = c_1 p_1$ domina en baja frecuencia y $l_2 = c_2 p_2$ en

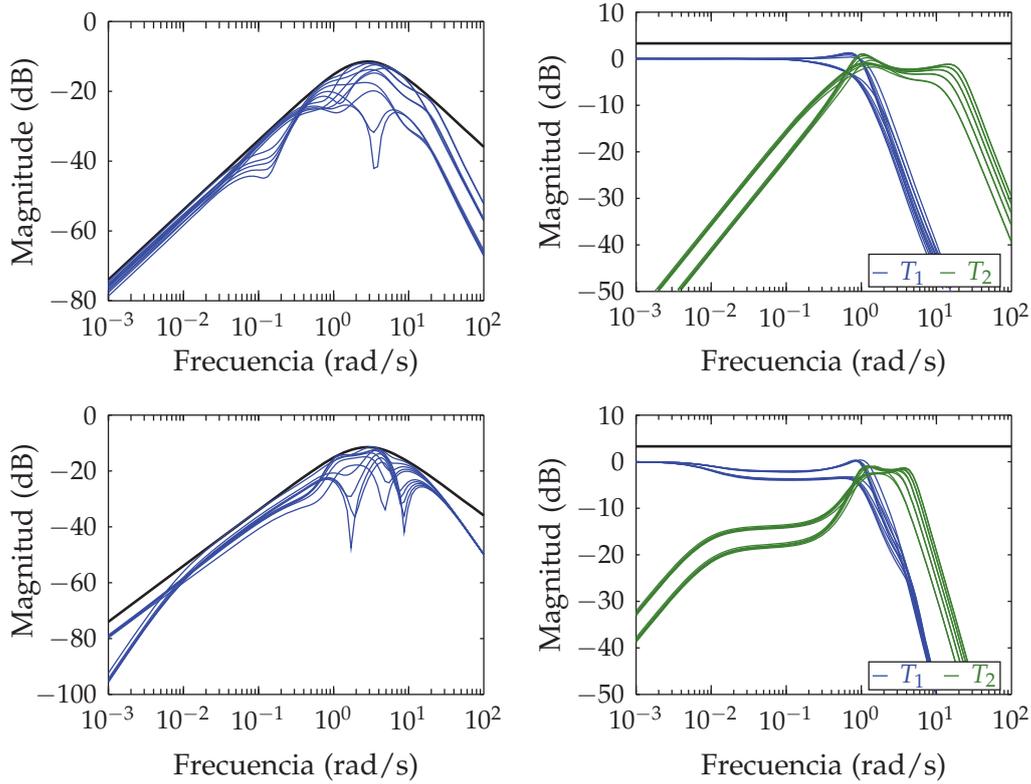


Figura 12.17: Error de seguimiento y estabilidad robustos en el dominio de la frecuencia: (sup.) con $g_{1,2}$ y $c_{1,2}$; (inf.) con $g_{1,2}^*$ y $c_{1,2}^*$

alta frecuencia, cruzándose en $\omega \approx 1$; esto mismo ocurre para $l_1^* = c_1^* p_1^*$ y $l_2^* = c_2^* p_2^*$. Paralelamente, en la tercera fila de figuras, se muestran las envolventes de las magnitudes de las ramas de prealimentación en las dos opciones de diseño. Estas verifican el reparto frecuencial de la prealimentación establecido en la [Tabla 12.3](#): $l_{A_1} = \hat{g}_1 p_1$ domina en baja frecuencia y $l_{A_2} = \hat{g}_2 p_2$ en alta frecuencia, cruzándose y colaborando en el intervalo $\omega \in [0.2, 4]$; por el contrario, $l_{A_1}^* = \hat{g}_1^* p_1$ domina en alta frecuencia y $l_{A_2}^* = \hat{g}_2^* p_2$ en baja frecuencia, situándose la frecuencia de cruce en el entorno de $\omega = 0.8$. En estas figuras, se muestra junto con las ramas l_{A_i} , la magnitud de la rama de prealimentación total. Véase como la rama $l_{A_i}^*$, obtenida con \hat{g}_1^* y \hat{g}_2^* , presenta una incertidumbre mucho menor a la de la rama l_{A_i} , en todo el espectro frecuencial. De este modo, puede corroborarse de forma intuitiva como si la rama de prealimentación presenta una menor incertidumbre demandará menor esfuerzo de realimentación (menor l_t), aunque no necesariamente de prealimentación.

Las respuestas temporales del sistema controlado se analizan en la [Figura 12.19](#). En la columna izquierda se muestran los resultados alcan-

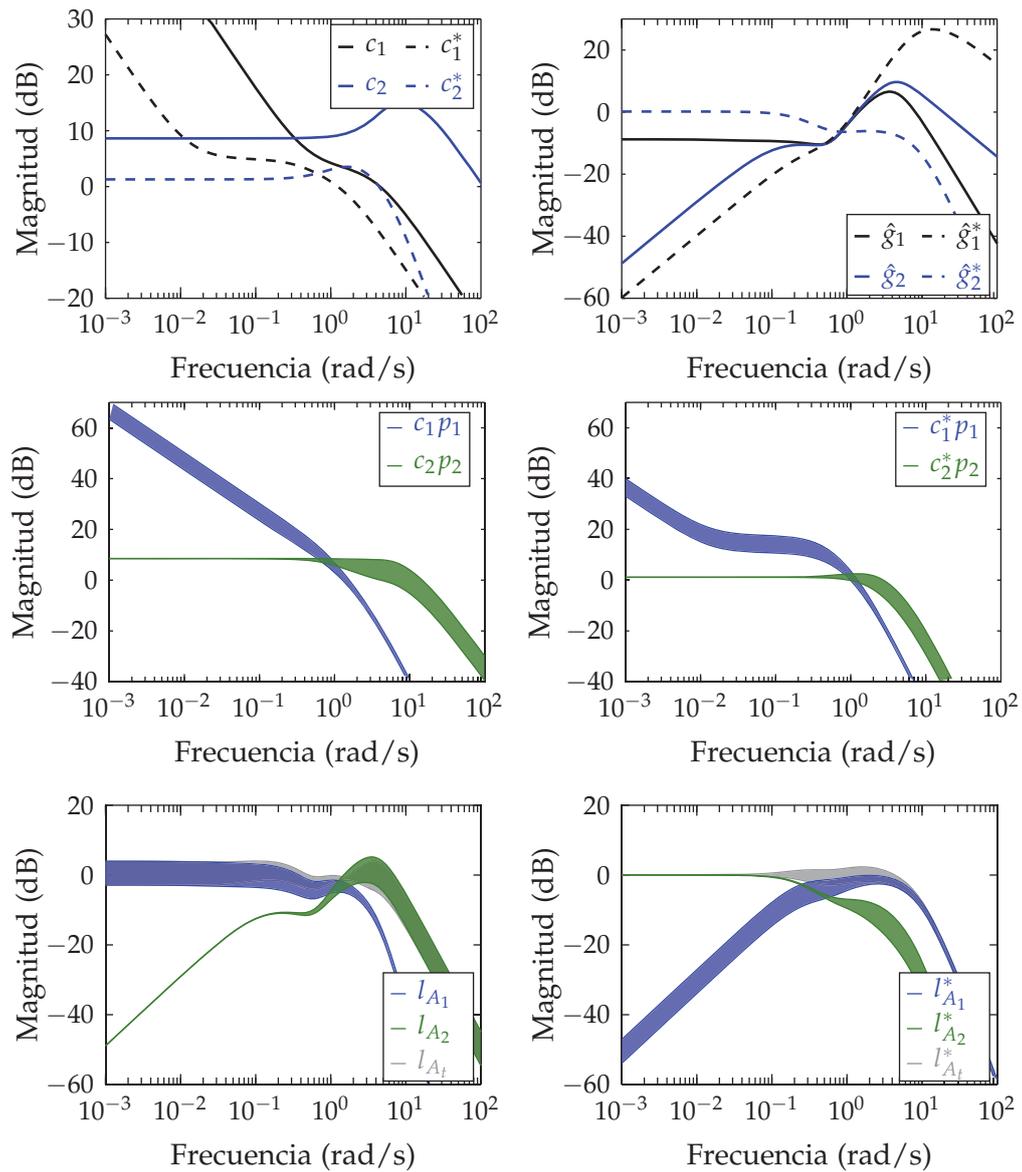


Figura 12.18: Magnitud de las respuestas frecuenciales de los elementos de control y de las funciones de rama.

zados con $g_i(j\omega)$, $c_i(j\omega)$ y $g_e(j\omega)$. En la columna derecha se muestran las respuestas obtenidas con $g_i^*(j\omega)$, $c_i^*(j\omega)$ y $g_e(j\omega)$. El experimento coincide con el del ejemplo presentado en la [Subsección 12.3.1](#). En primer lugar, puede comprobarse cómo las dos alternativas de control garantizan un adecuado seguimiento de referencias de acuerdo a las especificaciones impuestas. Sin embargo, las acciones de control empleadas para lograr dicho seguimiento son completamente diferentes.

A continuación se muestra un análisis de las mismas.

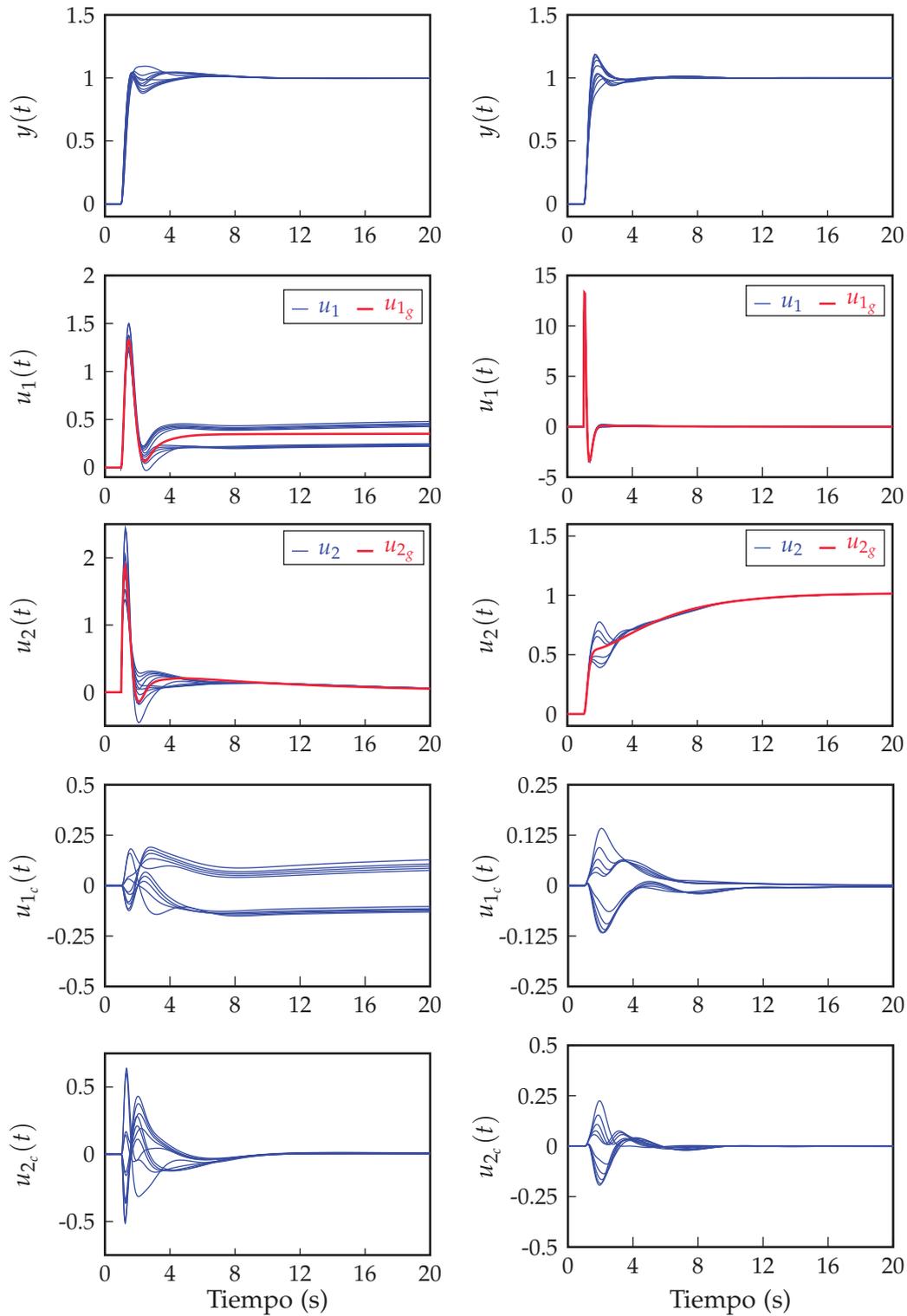


Figura 12.19: Respuestas temporales para un cambio en la referencia: (izq.) criterio de reducción de la acción de control, (dcha.) criterio de reducción de la cantidad de realimentación.

- Acción de control $u_1(t)$. Cuando el criterio de diseño es reducir la acción de control (columna izquierda de gráficas), $u_1(t)$ presenta un pico de amplitud máxima de 1.5, frente al pico máximo de 13.3 cuando el criterio de diseño es reducir la cantidad de realimentación. El que estos picos se produzcan en instantes diferentes en ambos casos está en consonancia con las frecuencias de trabajo de p_1 , completamente diferentes para la prealimentación en uno y otro caso (ver [Tabla 12.3](#)). El empleo de una acción de control mayor para conseguir el mismo *performance*, implica una mayor probabilidad de saturación, o la capacidad de soportar cambios en la referencia de menor amplitud sin saturar. En régimen permanente, en ambos casos la acción de control $u_1(t = \infty)$ no es nula, debido a que p_1 es la que se apodera del control realimentado en baja frecuencia. El valor final alcanzado es diferente en cada uno de los casos de estudio. Esto es debido a que cuando el objetivo es reducir la acción de control, únicamente trabaja p_1 en régimen permanente (tanto en prealimentación como en realimentación). Sin embargo, cuando el criterio es reducir la cantidad de realimentación (columna derecha de gráficas) p_1 y p_2 trabajan en régimen permanente: p_2 en prealimentación, recibiendo una acción de control constante ($u_{2_g}(t = \infty) \neq 0$), y p_1 en realimentación, aportando la acción de control necesaria para corregir las desviaciones debidas a la incertidumbre en p_2 ¹¹.
- Acción de control $u_2(t)$. Cuando el criterio de diseño es reducir la acción de control (columna izquierda de gráficas), $u_2(t)$ trabaja únicamente en alta frecuencia, tanto para la prealimentación ($u_{2_g}(t)$) como para la realimentación ($u_{2_c}(t)$). Puede comprobarse como la respuesta temporal $u_2(t)$ presenta un cambio brusco inicial para responder al cambio en la referencia. A continuación, la acción de control $u_2(t)$ retorna a su valor inicial, desconectándose del lazo de control. Por el contrario, cuando el criterio es reducir la cantidad de realimentación (columna derecha de gráficas), la planta p_2 trabaja en alta frecuencia para la realimentación (véase la rápida reacción de $u_{2_c}(t)$) y en baja frecuencia para la pre-alimentación

¹¹ En régimen permanente, la planta p_2 es excitada con un valor fijo, ya que $u_2(t = \infty)$ depende directamente de los controladores de prealimentación. La incertidumbre en p_2 produce que $y_2(t)$ no corresponda exactamente con la referencia $r(t)$. La distorsión entre $y_2(t = \infty)$ y la referencia $r(t = \infty)$ es compensadas a través de la planta p_1 y su controlador de realimentación.

(véase $u_{2g}(t = \infty) \neq 0$). Esto produce que la acción de control u_2 presente un pico inicial menor (no se prealimenta en alta frecuencia), y sin embargo, presente valor en régimen permanente, empleado para garantizar el seguimiento de la referencia en baja frecuencia.

En conclusión, es cierto que los controladores c_i^* generarán una menor amplificación de ruidos del sensor en la acción de control, pero los valores de acción de control demandados (realimentación más prealimentación) presentan valores en régimen transitorio y permanente superiores a las obtenidas con los controladores c_i , y por lo tanto, la reducción de ancho de banda deja de ser beneficiosa. Recuérdese que el principal problema de la amplificación de ruidos es la posibilidad de saturación en los actuadores. En este caso, incluso presentando una menor amplificación de ruidos la solución alcanzada con c_i^* presenta más riesgo de saturación.

La [Figura 12.20](#) ratifica las conclusiones anteriores desde el punto de vista frecuencial. En ella, se muestran las magnitudes de las respuestas frecuenciales de las acciones de control frente a la referencia $T_{u_r,i} = u_i/r$ (parte superior) y frente al ruido $T_{u_v,i} = u_i/v$ (parte inferior), para las dos alternativas de diseño. Puede comprobarse como el diseño obtenido por el criterio de reducción de la acción de control presenta curvas $T_{u_r,i}$ con menor magnitud en alta y baja frecuencia. En baja frecuencia, el diseño que busca reducir la cantidad de acción de control presenta su valor máximo para $T_{u_r,1}$, situándose en el entorno de los -10dB . Sin embargo, el diseño realizado para reducir la cantidad de realimentación presenta su máximo en baja frecuencia en $T_{u_r,2}^*$, que alcanza un valor próximo a 0dB s. Esta diferencia en magnitud produce un consumo de acción de control notablemente superior en régimen permanente para este segundo diseño. En alta frecuencia puede observarse un fenómeno similar. En este caso el pico máximo se da en $T_{u_r,2}$ para el diseño que busca reducir la acción de control y alcanza el valor de $+12\text{dB}$. Sin embargo, en el diseño que busca reducir la cantidad de realimentación el pico máximo es mucho mayor, alcanzando los $+25\text{dB}$, en este caso para $T_{u_r,1}^*$.

Si se comparan las respuestas frecuenciales frente al ruido ($T_{u_v,i}$ y $T_{u_v,i}^*$), se observa el efecto esperado. Puede comprobarse cómo el diseño obtenido para reducir la cantidad de realimentación presenta curvas $T_{u_v,1}^*$ y $T_{u_v,2}^*$ con magnitud notablemente inferior a la de $T_{u_v,1}$ y $T_{u_v,2}$, y menor ancho de banda. Es decir, el diseño que minimiza la cantidad de

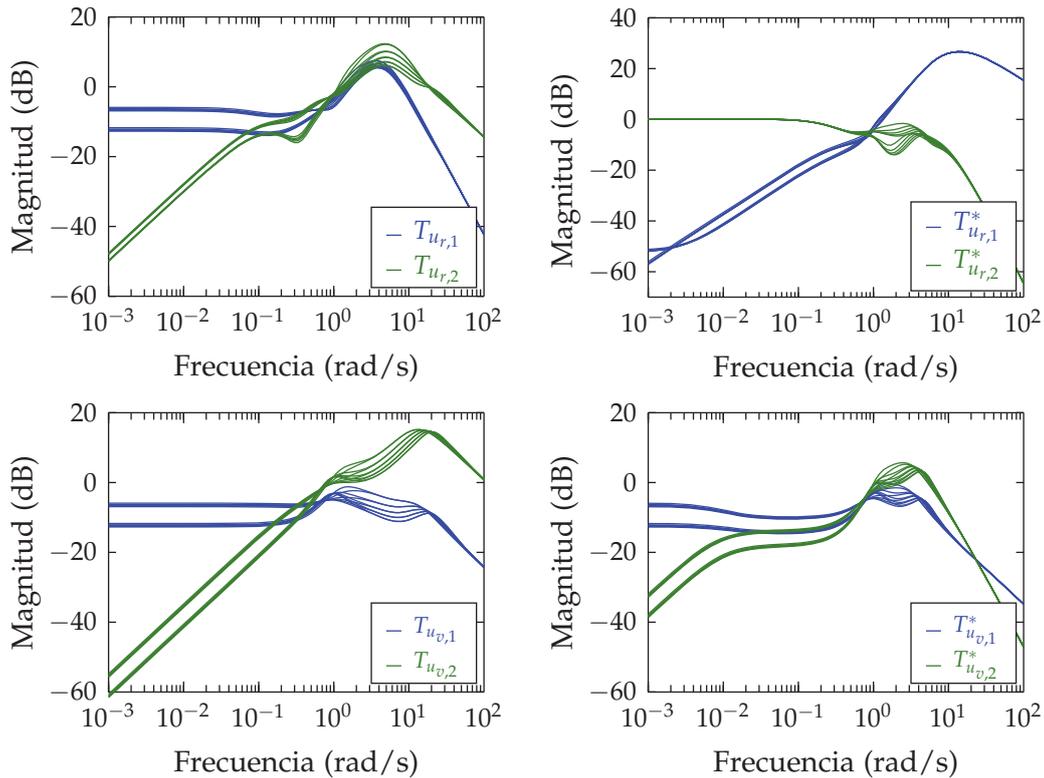


Figura 12.20: Magnitud de las respuestas frecuenciales para la acción de control: (izq.) criterio de reducción de la acción de control, (dcha.) Criterio de reducción de la cantidad de realimentación.

realimentación, presenta una mayor inmunidad ante ruidos de alta frecuencia. Sin embargo, para lograr este beneficio se incurre en un mayor consumo de acción de control para el tracking.

Este ejemplo ha permitido ilustrar de forma detallada cómo en el caso del problema del seguimiento de referencias en sistemas MISO el criterio de diseño puede ser minimizar la acción de control necesaria para cumplir con las especificaciones o minimizar la cantidad de realimentación para una mayor inmunidad al ruido introducido por el sensor, pudiendo ser ambos criterios contrapuestos cuando las plantas que tienen mayor ganancia en cierta frecuencia tienen también más incertidumbre en la misma frecuencia. En tal caso, nuestra propuesta es utilizar el primer criterio, tratar de emplear la menor acción de control para cumplir las especificaciones.

MISO QFT PARA PERTURBACIONES MEDIBLES

A continuación, se presenta una solución al problema de rechazo de perturbaciones medibles en sistemas de control MISO. Su discusión en esta parte del documento se debe a que su resolución utiliza la prealimentación de una entrada conocida, al igual que ocurría en los servosistemas estudiados en el capítulo anterior. Sin embargo, mientras que en los servosistemas la entrada conocida era objeto de seguimiento, ahora la perturbación conocida debe ser rechazada. No obstante, en ambos casos el problema de control que independiza los dos grados de libertad (realimentación y prealimentación) desde el punto de vista matemático es equivalente cuando se emplean estructuras *model matching*, al igual que ocurría en los sistemas SISO [38]. De acuerdo a esta filosofía, una vez estudiado en el capítulo anterior cómo independizar el diseño de los elementos en prealimentación de los de realimentación, así como sus objetivos, en el problema del error de seguimiento MISO, ahora se aplica al problema de rechazo de perturbaciones medibles.

El capítulo se encuentra organizado en dos secciones. La [Sección 13.1](#) muestra la arquitectura de control empleada y los fundamentos de diseño. Dado que la metodología de diseño propuesta coincide con la presentada en el [Capítulo 12](#), se omite la descripción detallada de los pasos de diseño. En la [Sección 13.2](#) se presenta un ejemplo de diseño.

13.1 ESTRUCTURA Y FUNDAMENTOS

Para el control del sistema se propone el empleo de la estructura de control de la [Figura 13.1](#). Véase como ésta corresponde con la estructura empleada en la [Sección 4.1](#) ([Figura 4.1](#)) para el problema de rechazo de perturbaciones, a la que se han añadido elementos de prealimentación desde la perturbación medible hasta cada una de las plantas. Véase tam-

bién el paralelismo entre la arquitectura propuesta y la que se empleó en el problema de seguimiento (Figura 12.1).

La acción de control demandada a cada una de las plantas es

$$u_i = c_i (r - y - v) + g_{f_i} g_{f_e} d. \quad (13.1)$$

Omitiendo el valor de la referencia ($r = 0$), que permanece constante para analizar exclusivamente el rechazo de perturbaciones, la ecuación que describe el comportamiento de la salida es

$$y = \frac{p_d + l_{F_t}}{1 + l_t} d - \frac{l_t}{1 + l_t} v, \quad (13.2)$$

donde l_i es la función de lazo abierto a través de cada una de las ramas, l_t la función de lazo abierto total, y se definen

$$l_{F_i} = p_i g_{f_i} g_{f_e} \quad (13.3)$$

como la cadena de prealimentación a través de la planta p_i , y

$$l_{F_t} = \sum_{i=1}^n l_{F_i} = g_{f_e} \sum_{i=1}^n p_i g_{f_i}, \quad (13.4)$$

como la cadena de prealimentación total.

Como en el problema de seguimiento, se define

$$\hat{g}_{f_i} = g_{f_e} g_{f_i}. \quad (13.5)$$

como el controlador de prealimentación total visto por la planta p_i .

El error de seguimiento es

$$e = -\frac{p_d + l_{F_t}}{1 + l_t} d - \frac{1}{1 + l_t} v \quad (13.6)$$

Por último, el comportamiento de las salidas individuales de cada una de las plantas se rige por

$$y_i = \left[-\frac{p_d + l_{F_t}}{1 + l_t} l_i + p_i g_{f_i} \right] d - \frac{c_i}{1 + l_t} v, \quad (13.7)$$

y el de las acciones de control por

$$u_i = \left[-\frac{p_d + l_{F_t}}{1 + l_t} c_i + g_{f_i} \right] d - \frac{c_i}{1 + l_t} v. \quad (13.8)$$

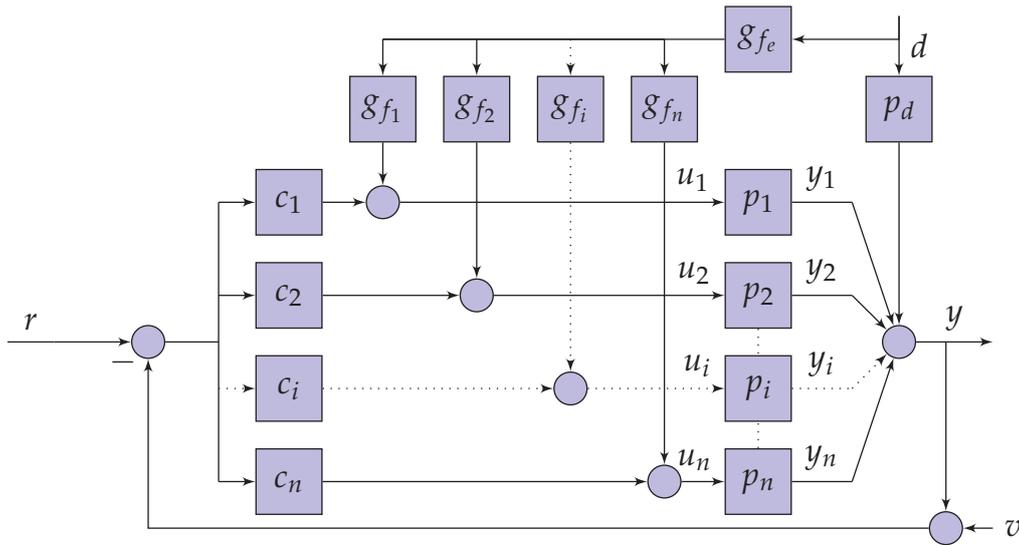


Figura 13.1: Estructura de control QFT MISO para rechazo de perturbaciones medibles.

Como en los casos anteriores, en el diseño de los controladores de prealimentación y realimentación se tendrá en cuenta la incertidumbre del conjunto de plantas $(p_{i=1,\dots,n}, p_d)$, designada a través del conjunto de parámetros $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$. En este caso se consideran especificaciones de control en lazo cerrado para garantizar la estabilidad robusta, y el rechazo robusto de perturbaciones. La estabilidad robusta puede ser considerada empleando una única inecuación

$$\left| \frac{l_t(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_s(\omega); \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (13.9)$$

o n inecuaciones

$$\left| \frac{l_i(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_s(\omega); \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (13.10)$$

Como ya se ha descrito en el [Capítulo 5](#), se recomienda esta segunda opción que ofrece mayor robustez y contempla los márgenes de estabilidad en función del desconocimiento de cada planta p_i . La tolerancia W_s determina el margen de estabilidad deseado. El rechazo robusto de perturbaciones se considera acotando la función de error según

$$\left| \frac{p_d(j\omega) + l_{F_t}(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_d(\omega); \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (13.11)$$

donde $W_d(\omega)$ es la tolerancia superior de la magnitud de la desviación. Esta cota puede seleccionarse empleando el mismo tipo de modelos que

se empleaban en el rechazo de perturbaciones no medibles. Como en el resto de estrategias QFT, las especificaciones, durante la fase de diseño, son consideradas en un conjunto discreto de frecuencias que denominamos Ω .

La metodología de diseño propuesta se desarrolla en las mismo cinco etapas de diseño que el problema de seguimiento. A continuación se realiza una breve descripción de las mismas:

1. Planificación del reparto de tareas de prealimentación. En el primer paso del diseño se planifica el reparto frecuencial de tareas para los controladores de prealimentación $g_{f_i}(j\omega)$. Este reparto se realiza para minimizar la acción de control empleada en lazo cerrado. La selección de por qué planta es más ventajoso prealimentar se realiza del mismo modo que en la [Subsección 12.2.1](#), con la única salvedad de que en este caso $k_i(j\omega, \mathbf{q})$ se calcula según

$$k_i(j\omega, \mathbf{q}) = \frac{p_d(j\omega, \mathbf{q})}{p_i(j\omega, \mathbf{q})}, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (13.12)$$

2. Diseño de esclavos de prealimentación. En el segundo paso se diseñan los esclavos de prealimentación $g_{f_i}(j\omega)$ para que cada planta trabaje en las frecuencias que se decidieron en la etapa anterior. Se recomienda seguir las pautas propuestas en la [Subsección 12.2.2](#) referentes a la frecuencia y orden para la configuración de las funciones de transferencia de los filtros.
3. Planificación del reparto de tareas de realimentación. En el tercer paso se establece el mejor reparto frecuencial de las tareas de realimentación asignadas a cada una de las plantas. Una vez definida la prealimentación en la etapa anterior, se busca que la cantidad de realimentación en cada rama sea la menor posible. Para ello se calcula la demanda de realimentación (ganancia de control) en cada rama si su planta trabajara en solitario (un sólo lazo de realimentación a través de dicha planta). Esto se representa mediante los contornos $\beta_{c_i}(\omega)$. Y después se aplican los criterios de selección mostrados en la [Sección 4.2](#) y la [Sección 6.3](#). Para calcular la demanda de realimentación, esto es, obtener los contornos β_{c_i} , se sigue un procedimiento similar al presentado en la [Subsección 12.2.3](#). Una vez diseñados los esclavos de prealimentación $g_{f_i}(j\omega)$, la cadena de prealimentación total puede reescribirse según

$$l_{F_i}(j\omega) = g_{f_e}(j\omega)p_{F_i}(j\omega), \quad (13.13)$$

donde

$$p_{F_t}(j\omega) = \sum_{i=1}^n p_i g_{f_i}, \quad (13.14)$$

agrupa en un elemento la planta vista por el controlador de prealimentación g_{f_e} que falta por diseñar. Entonces, la especificación de rechazo (13.11) puede reescribirse como

$$\left| \frac{p_d(j\omega) + g_{f_e}(j\omega)p_{F_t}(j\omega)}{1 + l_t(j\omega)} \right| \leq W_d(\omega); \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (13.15)$$

Como queremos cuantificar la demanda de realimentación cuando las plantas trabajan en solitario en realimentación, la especificación anterior se convierte en

$$\left| \frac{p_d(j\omega) + g_{f_e}(j\omega)p_{F_t}(j\omega)}{1 + c_k(j\omega)p_k(j\omega)} \right| \leq W_d(\omega); \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (13.16)$$

Y para el cálculo de los contornos para el diseño de $c_k(j\omega)$ que garantizan la existencia de $g_{f_e}(j\omega)$, se emplea la inecuación general (12.30), que se desarrolló en el Capítulo 12 y el Apéndice D. Se sustituye $A = p_{F_t}(j\omega)$, $B = p_d(j\omega)$, $C = 1$, $D = p_k(j\omega)$, $G = c_k(j\omega)$, $G_f = g_{f_e}(j\omega)$ y $W = W_d(\omega)$. Esta función calcula los contornos de diseño, $\beta_{l_k}(\omega)$, para efectuar el *loop-shaping* de $l_k(\omega)$. Para obtener los bounds que representan la ganancia del controlador, $\beta_{c_k}(\omega)$, basta aplicar la relación (12.29).

4. Diseño de controladores de realimentación. En la cuarta etapa se diseñan los n controlares de realimentación c_i , realizando n *loop-shapings*, de tal modo que se satisfaga la planificación que se determinó en la etapa anterior. El procedimiento secuencial de diseño es idéntico al empleado en el problema de rechazo que se describió en el Capítulo 4. Para la realización de los *loop-shapings* de cada lazo, se deben emplear los *bounds* pertinentes. En el paso de diseño del controlador $c_k(j\omega)$, o sea el *loop-shaping* de $l_k(j\omega)$, los *bounds* que representan el rechazo de perturbaciones se calculan como se indicó en el paso anterior. Esto es, de acuerdo a la inecuación genérica (12.30) se toma $A = p_{F_t}(j\omega)$, $B = p_d(j\omega)$, $C = 1 + \sum_{i \neq k} l_i(j\omega)$, $D = p_k(j\omega)$, $G = c_k(j\omega)$, $G_f = g_{f_e}(j\omega)$ y $W = W_d(\omega)$. Los *bounds* de estabilidad se calculan de igual modo que en capítulos anteriores.

5. Diseño del controlador maestro de prealimentación. En el último paso se diseña $g_{fe}(j\omega)$ para situar la función de error por debajo de la cota máxima admisible. Los *bounds* $\beta_{g_{fe}}(\omega)$ que garantizan que la inecuación (13.11) se cumple para toda la incertidumbre $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ se obtienen a partir de la instrucción *genbnds* de la *Terasoft QFT Toolbox*. En este caso se emplean $A = p_d(j\omega)$, $B = p_{F_t}(j\omega)$, $C = 1 + l_t(j\omega)$ y $D = 0$, $G = g_{fe}(j\omega)$ y $W = W_E(\omega)$. Esta inecuación es evaluada en el conjunto de frecuencias discreto Ω , dando lugar a *bounds* en el plano Mod[dB]-Arg[deg].

13.2 EJEMPLO DE DISEÑO

Se desea gobernar un sistema MISO 1×2 de forma que sea capaz de rechazar perturbaciones medibles de forma robusta. Los modelos de las plantas $p_1(s)$ y $p_2(s)$ se corresponden con los presentados en (12.38) (ejemplo presentado en la Subsección 12.3.1). El modelo de la planta $p_d(s)$ corresponde con

$$p_d(s) = \frac{k_d}{s + \omega_d}; \quad (13.17)$$

Sus parámetros presentan incertidumbre de acuerdo a los intervalos

$$k_d \in [2, 3], \quad \omega_d \in [1, 2]. \quad (13.18)$$

Dentro de la arquitectura de control con plantas en paralelo (Figura 13.1), el objetivo es diseñar $c_{i=1,2}(j\omega)$, $g_{f1,f2}(j\omega)$ y $g_{fe}(j\omega)$ para garantizar que las especificaciones de estabilidad robusta (13.10) y de rechazo robusto de perturbaciones (13.11) se cumplan empleando la cantidad mínima de acción de control. Para conseguir un margen de fase mínimo de 40° en ambos lazos, la tolerancia W_s empleada en (13.10) es:

$$W_s = \left| \frac{0.5}{\cos(\pi(180 - MF)/360)} \right|, \quad MF = 40^\circ. \quad (13.19)$$

Para el rechazo robusto de perturbaciones, la cota $W_d(\omega)$ que establece el error máximo en cada frecuencia se obtiene a partir de

$$W_d(s) = \frac{0.2s}{(0.5s + 1)^2}. \quad (13.20)$$

Los diferentes cálculos y bounds se realizan en el vector de frecuencias discretas

$$\Omega = \{0.01, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1, 4, 8, 10, 20\}[\text{rad/s}], \quad (13.21)$$

que se utilizan en los siguientes análisis y como guía durante el *loop-shaping* de los elementos de control.

Primera etapa: reparto frecuencial de la prealimentación

De acuerdo a las explicaciones realizadas en la [Sección 13.1](#), se calcula para cada frecuencia en Ω qué planta es la más adecuada (se busca economizar la acción de control total) para la prealimentación de d . La [Figura 13.2](#) muestra los valores de \bar{k}_i , con $i = 1, 2$ para las frecuencias de diseño. De acuerdo a los resultados mostrados en la [Figura 13.2](#) se seleccionan las frecuencias de trabajo. La [Tabla 13.1](#) resume la planificación del reparto de la realimentación. A continuación, se muestra el estudio realizado en las frecuencias discretas analizadas:

- En baja frecuencia ($\omega \leq 0.2$), la magnitud de \bar{k}_1 es notablemente inferior a la de \bar{k}_2 . Por lo tanto, en dichas frecuencias p_1 debe encargarse de la prealimentación de la perturbación y p_2 debe ser inhibida en la medida posible.
- En media frecuencia ($0.4 \leq \omega \leq 1$), las magnitudes de \bar{k}_1 y \bar{k}_2 presentan una diferencia en altura inferior a 6dBs, y en fase inferior a 90° . Por lo tanto, en dichas frecuencias las dos plantas deben colaborar en las tareas de prealimentación de la perturbación medible.
- En alta frecuencia ($\omega \geq 4$), la magnitud de \bar{k}_1 es más de 6dB superior a la de \bar{k}_2 , indicando que en dichas frecuencias p_2 debe encargarse de la prealimentación de la perturbación, y p_1 debe ser inhibida en dichas frecuencias.

Segunda etapa: diseño de esclavos de prealimentación

De acuerdo a la planificación de reparto de las tareas de prealimentación, se diseñan los esclavos $g_{f_i}(j\omega)$ que filtrarán las frecuencias de la perturbación d hacia la planta deseada.

- Esclavo $g_{f_1}(j\omega)$. Dado que la planta $p_1(j\omega)$ debe trabajar únicamente en baja frecuencia, se opta por emplear un filtro pasa bajos

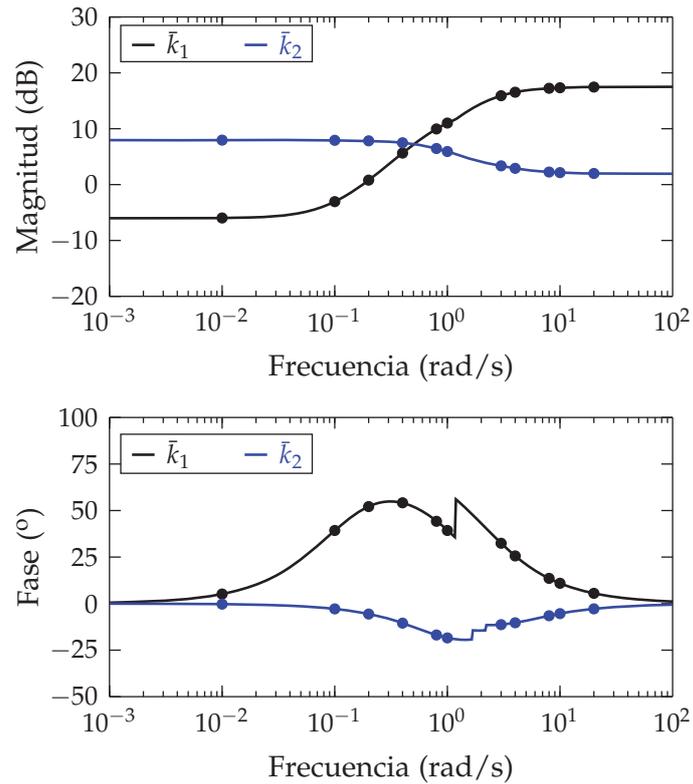


Figura 13.2: Estudio del reparto de la prealimentación a partir de los controladores $\bar{k}_{1,2}$.

Tabla 13.1: Reparto de las tareas de prealimentación para un menor consumo de acción de control.

ω	0.01	0.1	0.2	0.4	0.8	1	4	8	10	20
p_1	×	×	×	×	×	×				
p_2				×	×	×	×	×	×	×

de primer orden. Siguiendo las pautas en [Subsección 12.2.2](#) se obtiene

$$g_{f_1}(s) = \frac{1}{s + 1}. \quad (13.22)$$

- Esclavo $g_{f_2}(j\omega)$. La planta $p_2(j\omega)$ debe trabajar en alta frecuencia, por lo que se emplea un filtro pasa altos de primer orden

$$g_{f_2}(s) = \frac{s}{s + 0.2}. \quad (13.23)$$

Diseñados los esclavos de prealimentación $g_{f_i}(j\omega)$, $i = 1, 2$ debe evaluarse si son adecuados. En la [Figura 13.3](#) se muestran las envolventes de la magnitud de las respuestas frecuenciales de las plantas $p_1(j\omega)$, $p_2(j\omega)$ y $p_{F_i}(j\omega)$ ¹. En ella puede comprobarse como la magnitud de $p_{F_i}(j\omega)$ presenta una magnitud aproximadamente igual o superior a la de las plantas individuales, condición necesaria para que los controladores $g_{f_i}(j\omega)$ sean adecuados.

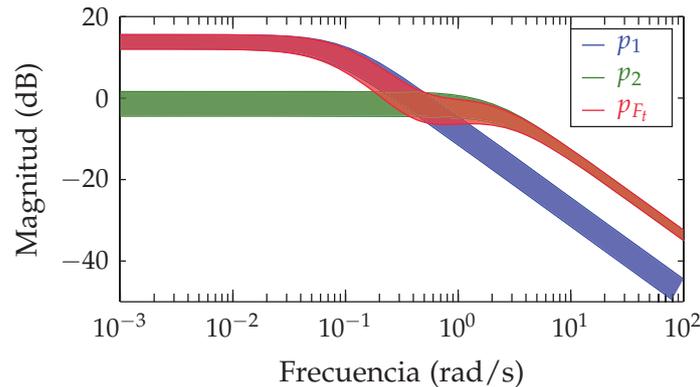


Figura 13.3: Magnitud de las respuestas frecuenciales de $p_1(j\omega)$, $p_2(j\omega)$ y $p_{F_i}(j\omega)$.

Tercera etapa: reparto frecuencial de la realimentación

Un vez diseñados $g_{f_i}(j\omega)$, $i = 1, 2$, se calcula la cantidad de realimentación que demandaría cada rama por separado, $|c_i(j\omega)|$ $i = 1, 2$, en el supuesto de que el lazo de realimentación fuera único y se cerrara por la planta correspondiente, $p_i(j\omega)$ $i = 1, 2$, para satisfacer la especificación (13.16). Esto se representa en forma de *bounds* $\beta_{c_i}(\omega)$, $i = 1, 2$, en la [Figura 13.4](#); sólo aparecen representados los *bounds* de ciertas frecuencias

$$\omega = \{0.01, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1, 4\}[\text{rad/s}], \omega \in \Omega. \quad (13.24)$$

Comparando la altura y desfase de los *bounds* $\beta_{c_1}(\omega)$ y $\beta_{c_2}(\omega)$, y de acuerdo a los criterios expuestos en la [Sección 4.2](#), el reparto frecuencial para la mínima cantidad de realimentación se resume en la [Tabla 13.2](#).

¹ Se definió en (13.14) y responde a $p_{F_i}(j\omega) = g_{f_1}(j\omega)p_1(j\omega) + g_{f_2}(j\omega)p_2(j\omega)$.

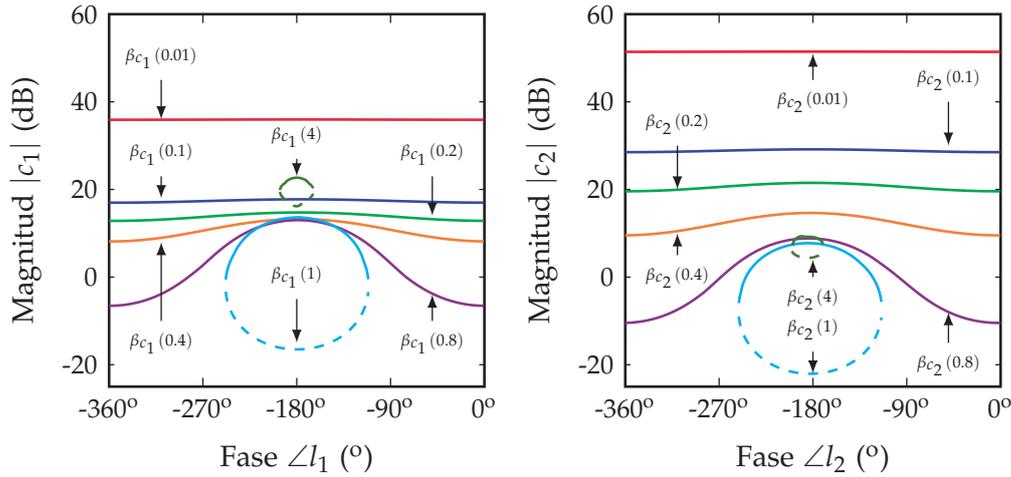


Figura 13.4: Demanda de realimentación para las plantas $p_1(j\omega)$ y $p_2(j\omega)$.

Tabla 13.2: Reparto de las tareas de realimentación para una menor cantidad de realimentación

ω	0.01	0.1	0.2	0.4	0.8	1	4	8	10	20
p_1	×	×	×	×	×					
p_2				×	×	×	×	×	×	×

Cuarta etapa: diseño de controladores de realimentación

Se realiza el diseño secuencial de los controladores de realimentación $c_1(j\omega)$ y $c_2(j\omega)$ para satisfacer el reparto en la [Tabla 13.2](#). La [Figura 13.5](#) ilustra la disposición final de los contornos $\beta_{l_i}(\omega)$ y las ramas $l_{o_i}(j\omega)$. Los controladores alcanzados son

$$c_1(s) = \frac{1.575(s + 0.08)}{s(s + 1.5)(s + 0.12)}, \tag{13.25}$$

y

$$c_2(s) = \frac{1.5(s + 0.6)}{(s + 0.3)^2}. \tag{13.26}$$

Quinta etapa: diseño del controlador maestro de prealimentación

Una vez diseñados los controladores de realimentación, se diseña finalmente el controlador maestro de prealimentación $g_{fe}(j\omega)$, con lo que se finaliza el proceso de diseño de todos los elementos de control en la

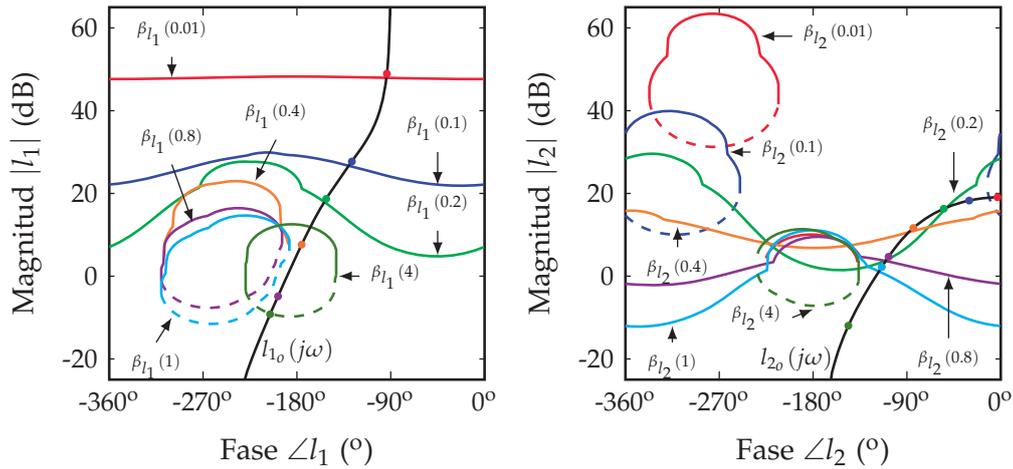


Figura 13.5: Loop-shaping de controladores de realimentación $c_i(j\omega)$.

estructura de la [Figura 13.1](#). Se emplea el procedimiento propuesto en la [Sección 13.1](#), obteniéndose

$$g_{fe}(s) = \frac{-1.1849(s + 2)(s + 0.175)(s + 0.1)}{(s + 0.52)(s^2 + 0.8563s + 0.2072)}. \tag{13.27}$$

En la [Figura 13.6](#) puede observarse como $g_{fe}(j\omega)$ satisface las condiciones de diseño, representadas en forma de *bounds*, en todas las frecuencias discretas.

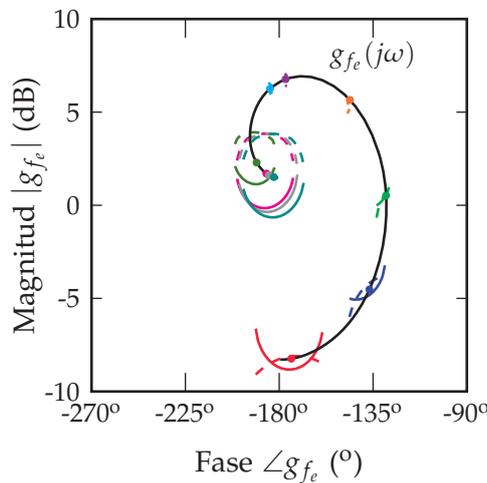


Figura 13.6: Diseño del controlador maestro $g_e(j\omega)$.

Análisis y validación del diseño

A continuación, se presenta un estudio de la solución de control alcanzada. En primer lugar, en la [Figura 13.7](#) se muestra como el sistema

en lazo cerrado cumple con las especificaciones frecuenciales de diseño: estabilidad (13.10) (13.19) y *performance* del error (13.11) (13.20). Para todas las plantas en el dominio de incertidumbre se satisfacen las cotas máximas de error $W_d(\omega)$ y estabilidad $W_s(\omega)$.

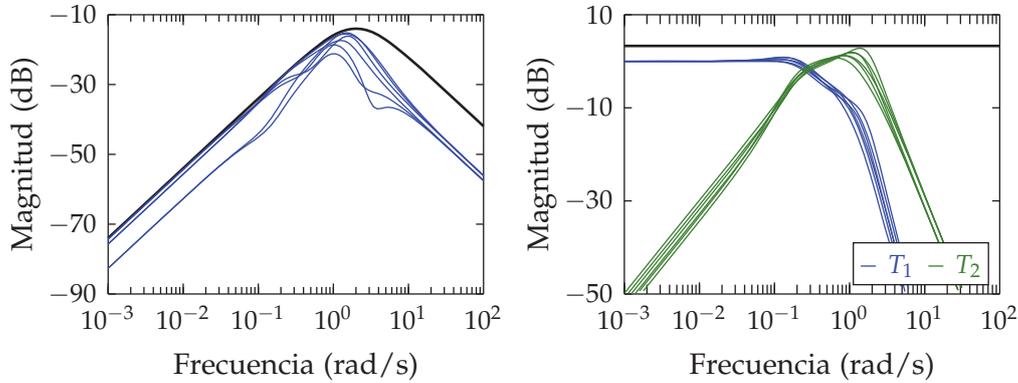


Figura 13.7: Cumplimiento de especificaciones frecuenciales. (izq.) *Performance* del error en la salida. (dcha.) Estabilidad.

En la Figura 13.8 se muestra la respuesta temporal de la salida global y de las salidas individuales, para todas las plantas dentro de la incertidumbre, tras una perturbación escalón de amplitud -1 en el instante $t = 1s$. El comportamiento es el esperado según las decisiones adoptadas en el proceso de diseño. Por un lado, la respuesta $y_1(t)$ (de la planta p_1 que trabaja en baja frecuencia) evoluciona lentamente hasta el régimen permanente $y_1(t = \infty) = 1$. Éste alcanza el valor necesario para contrarrestar totalmente la desviación causada en la salida $y(t = \infty) = 0$ por la perturbación $d(t = \infty) = -1$. Por otro lado, la salida $y_2(t)$ presenta una variación brusca inicial (p_2 trabaja en alta frecuencia) que corrige rápidamente la desviación de $y(t)$. Progresivamente la planta p_2 se desconecta del lazo de control, y en régimen permanente su contribución es nula $y_2(t = \infty) = 0$.

La Figura 13.9 ilustra el comportamiento de las acciones de control $u_1(t)$ y $u_2(t)$. La acción de control u_1 dirige la planta p_1 seleccionada para trabajar en baja frecuencia tanto para las señales de realimentación como de prealimentación. Véase cómo $u_1(t)$ evoluciona hasta alcanzar su máximo en aproximadamente $t = 3s$, momento a partir del cual reduce su valor, alcanzando en régimen permanente valores próximos a 0.25-0.5. La existencia de múltiples valores en régimen permanente es debida a la incertidumbre en la ganancia estática de p_1 y p_d . Nótese como el comportamiento de $u_1(t)$ es muy similar al de $u_{1g}(t)$, ya que el controla-

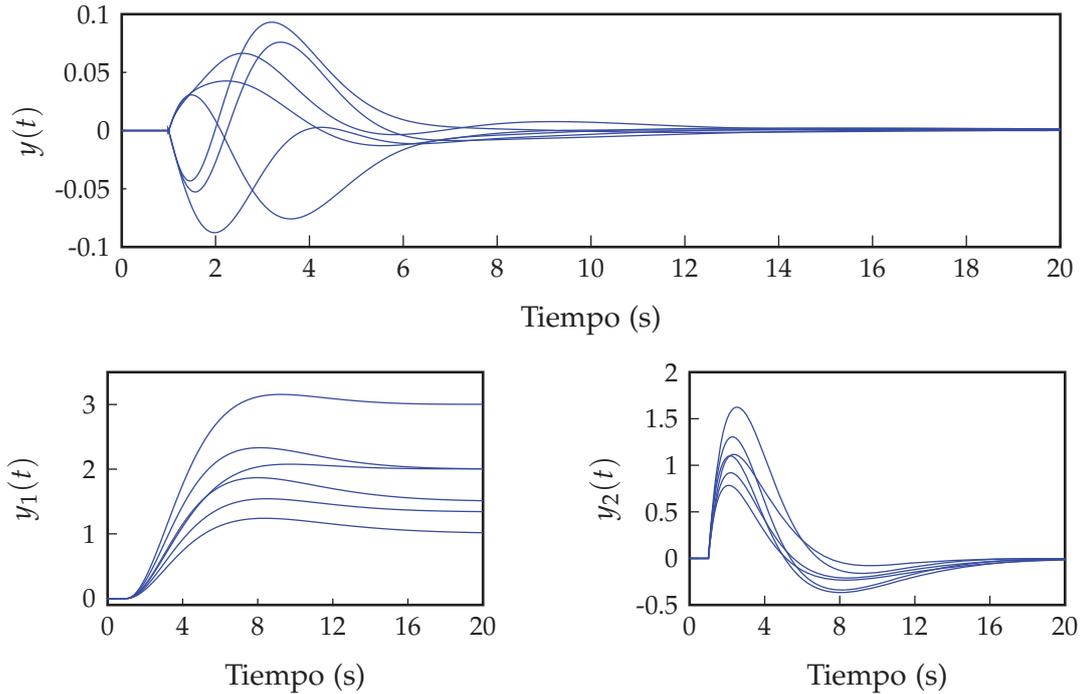


Figura 13.8: Rechazo de perturbación escalón -1 en $t = 1$ s.

dor de prealimentación es el que marca la tendencia de comportamiento. Este hecho produce que el controlador de realimentación aporte las variaciones demandadas por la incertidumbre. Por este motivo $u_{1c}(t)$ se encuentra próxima a 0, presentando valores positivos y negativos a su alrededor. La magnitud de esta respuesta será mayor cuanto mayor sea la incertidumbre del sistema, puesto que en estos casos el controlador de realimentación deberá compensar una mayor distorsión entre $pd(j\omega)$ y $p_d(j\omega)/l_{F_t}(j\omega)$. Al igual que $u_1(t)$, la acción de control $u_2(t)$ está compuesta por la tendencia introducida por $u_{2g}(t)$ y las variaciones debidas a la incertidumbre introducidas por el controlador de realimentación a partir de $u_{2c}(t)$. En este caso es interesante destacar cómo la acción de control $u_2(t)$ se desconecta del lazo de control en $t = \infty$, de acuerdo a la estrategia de diseño (Tabla 13.1 y Tabla 13.2) según la cual p_2 sólo debe trabajar en baja frecuencia tanto en prealimentación ($u_{2g}(t = \infty) = 0$) como en realimentación ($u_{2c}(t = \infty) = 0$).

Por último, en la Figura 13.10 se muestran los diagramas de magnitud de los elementos de control (gráficas superiores) y de las funciones de rama (gráficas inferiores), tanto para la realimentación (columna izquierda) como para la prealimentación (columna derecha). Véase cómo las ganancias de $c_1(j\omega)$ y $\hat{g}_{f_1}(j\omega)$, son superiores en baja frecuencia a las ganancias de sus homólogos en el otro lazo $c_2(j\omega)$ y $\hat{g}_{f_2}(j\omega)$, invirtiéndolo-

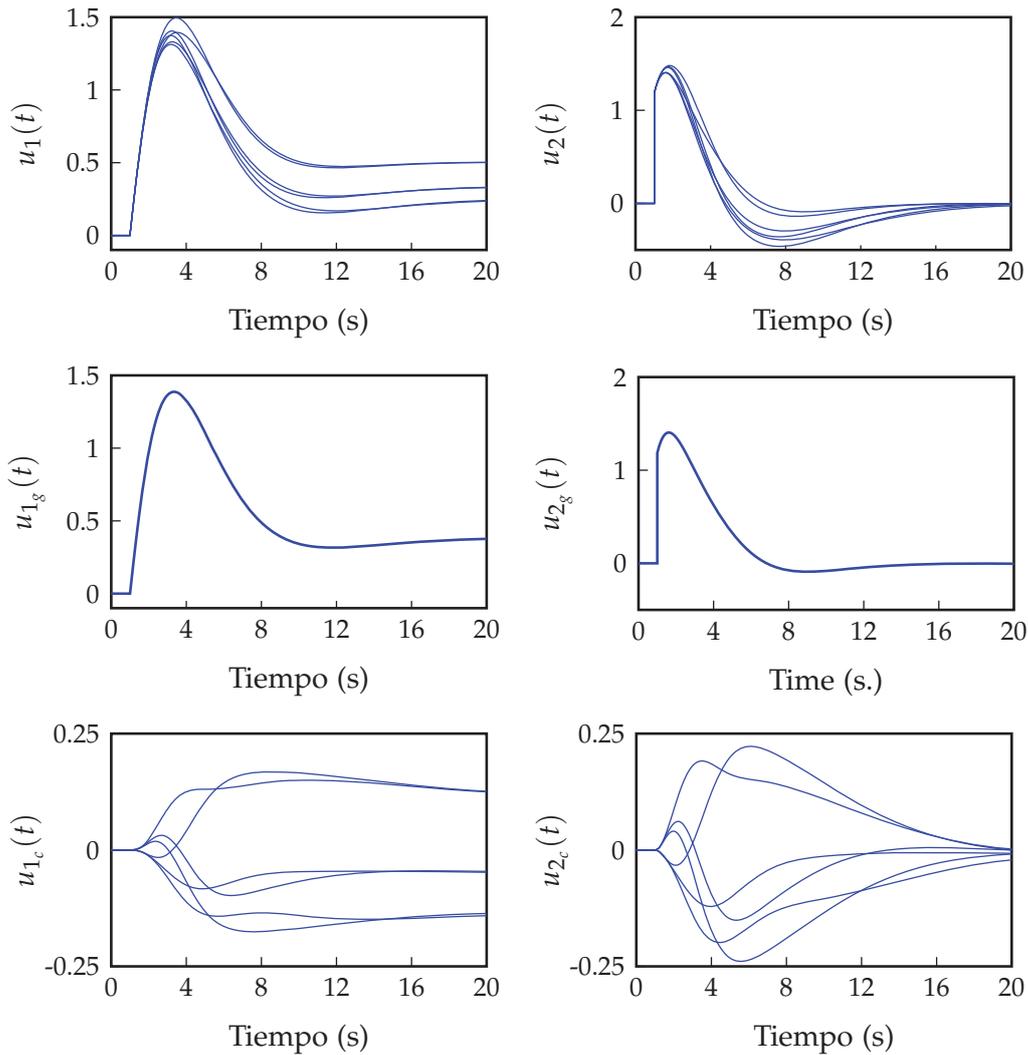


Figura 13.9: Evolución temporal de las acciones de control $u_1(t)$, $u_2(t)$.

se el protagonismo en alta frecuencia. Las bandas de trabajo planificadas se observan mejor en las funciones de lazo (fila inferior). En consonancia con la [Tabla 13.2](#), véase la zona de colaboración ($0.2 < \omega < 1$) donde las ganancias de $l_1(j\omega)$ y $l_2(j\omega)$ están próximas entre sí, la zona de dominio de $l_1(j\omega)$ en $\omega \leq 0.2$ y la de dominio de $l_2(j\omega)$ en $\omega \geq 1$. Por otro lado, véase como las ramas de prealimentación (esquina inferior derecha) satisfacen la distribución frecuencial presentada en la [Tabla 13.1](#). En esta figura puede comprobarse como la banda compartida entre $l_{F_1}(j\omega)$ y $l_{F_2}(j\omega)$ se encuentra en el intervalo de frecuencias $0.4 \leq \omega \leq 1$. Además, puede verificarse como $l_{F_1}(j\omega)$ domina en baja frecuencia y $l_{F_2}(j\omega)$ en alta frecuencia.

Por último, la [Figura 13.11](#) muestra las magnitudes de las respuestas frecuenciales de las acciones de control frente a perturbaciones y frente

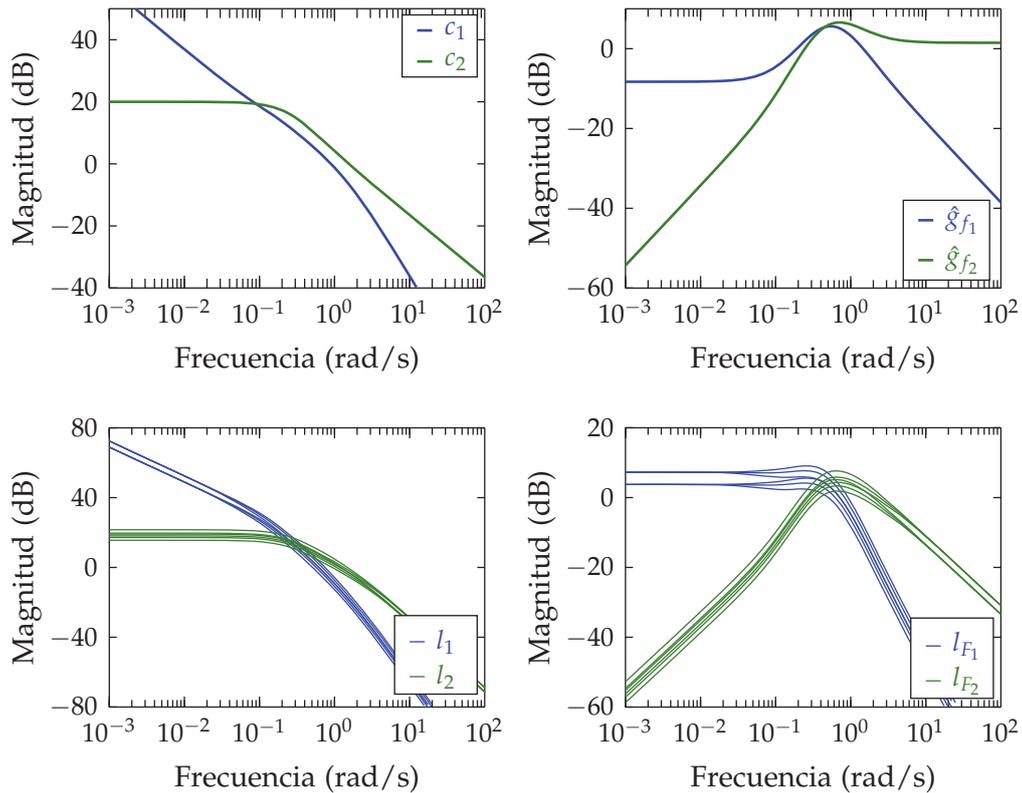


Figura 13.10: Magnitud de los elementos de control y las funciones de rama para la realimentación y la prealimentación.

al ruido. Las figuras muestran como la acción de control u_1 presenta en alta frecuencia menor ancho de banda y magnitud que la acción de control u_2 . Este comportamiento se cumple para el rechazo de la perturbación medible ($T_{u_{d_1}}$) y para la amplificación de ruidos ($T_{u_{v_1}}$). Por lo tanto, la acción de control u_1 se encontrará menos afectada por el ruido de alta frecuencia y presentará una respuesta ante perturbaciones con menor variación inicial. Como se analizó en el estudio de las respuestas temporales, la acción de control u_1 evolucionará lentamente hasta apoderarse del control en régimen permanente, momento en el que se encarga de rechazar la perturbación en solitario. Por el contrario, la acción de control u_2 presenta menor magnitud en baja frecuencia. La magnitud de la respuesta $T_{u_{d_2}}$, tiende a $-\infty$ en baja frecuencia, y por lo tanto, la acción de control u_2 se desconectará del lazo de control una vez finalizado el régimen transitorio, liberando todo su potencial para combatir posibles perturbaciones futuras.

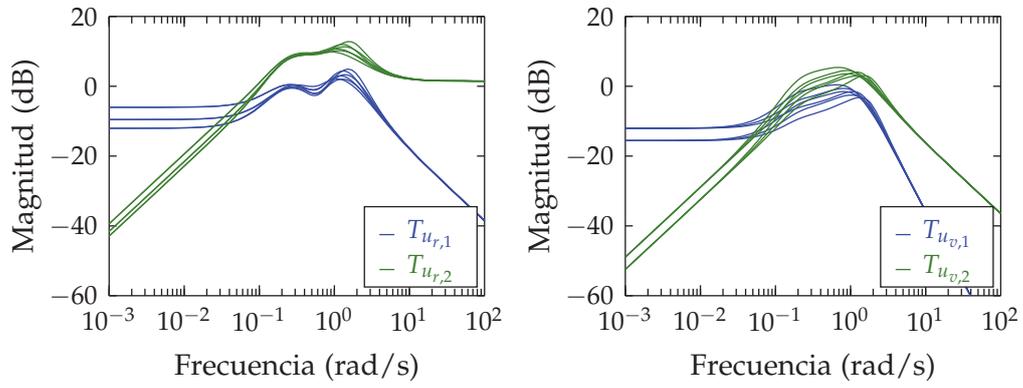


Figura 13.11: Magnitud de las acciones de control frente a perturbaciones $T_{u_{d_i}}$ y frente al ruido $T_{u_{v_i}}$.

Parte V

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES Y VÍAS DE CONTINUACIÓN

14.1 CONCLUSIONES

Esta tesis ha explorado las características principales de aquellos sistemas que presentan múltiples variables de actuación independientes para el gobierno de una única salida objeto control. Se trata por tanto de una disposición de n plantas en paralelo o sistema MISO $1 \times n$. Además, se considera que las salidas individuales de cada planta o bien no existen físicamente o no son medibles para realimentación. La incertidumbre en los modelos de las plantas forma parte del diseño de control, dando lugar a un control robusto del sistema MISO. Los paradigmas de la Teoría de Realimentación Cuantitativa (QFT) han sido el fundamento de los nuevos desarrollos.

La propuesta de control robusto cuantitativo para sistemas MISO persigue emplear la mínima acción de control posible en cada actuador. Con este fin, definidas las especificaciones de *performance* y estabilidad, se ha establecido un método cuantitativo para determinar las plantas mejor condicionadas en cada frecuencia para satisfacer las especificaciones. En último término, se determina si la colaboración entre plantas es beneficiosa para reducir la acción de control, o por el contrario debe inhibirse la participación de las plantas evitando que señales que no reportan ningún beneficio lleguen a sus actuadores.

Cuando la especificación de *performance* únicamente contempla el rechazo de la perturbación que desvía la salida de una referencia constante, se han empleado n controladores de realimentación. El criterio de reparto de la banda frecuencial con el que son diseñados éstos coincide con emplear la mínima cantidad de realimentación en cada rama y en cada frecuencia. Esta solución es la que emplea la menor acción de control posible en cada actuador para cumplir con las especificaciones de

control. Determinado cuantitativamente el reparto de la banda frecuencial entre las plantas, se ha propuesto un método secuencial de diseño de los n controladores. Los sistemas MISO considerados en los métodos propuestos pueden incluir plantas que no sean de fase mínima. Se han contemplado dos posibles arquitecturas de control en las que los controladores de realimentación se disponen o bien en paralelo o bien en serie, cada una con sus particularidades a la hora de llevar a cabo el método secuencial de diseño. Además, ambas arquitecturas incorporan la posibilidad de modificar convenientemente el punto de operación de las variables de actuación, lo cual es de sumo interés desde un punto de vista práctico.

Cuando la especificación de *performance* versa sobre cómo la variable controlada debe seguir cambios en la referencia, a la estructura en realimentación, se han añadido controladores de prealimentación hacia cada actuador, más un maestro en prealimentación que conecta éstos con la variable conocida (referencia). La estructura en prealimentación empleada ha sido la misma para el caso en que la perturbación fuera medible. En ambos casos, al existir controlador de realimentación y de prealimentación, es posible que se seleccionen bandas frecuenciales diferentes por cada vía para la misma planta. Cuando las plantas del sistema MISO son de fase mínima, el criterio cuantitativo para emplear la acción de control mínima en cada actuador definirá bandas de trabajo parejas para la realimentación y la prealimentación. Paradójicamente, el empleo en cierta frecuencia de la planta con menor incertidumbre, aunque implica una menor cantidad de realimentación, puede incurrir en una cantidad de prealimentación mucho mayor si su ganancia es insuficiente, por lo que finalmente no se obtendría la solución de menor acción de control en el actuador. Sin embargo, la solución propuesta emplea la cantidad de realimentación estrictamente necesaria en cada rama para cumplir las especificaciones de control robustas con la mínima acción de control posible en cada actuador.

El método secuencial de diseño de los controladores de realimentación es flexible para obedecer a cualquier planificación de reparto de la banda frecuencial, no solo a la apuesta recomendada en este trabajo.

También se incluye una valiosa clasificación de las estructuras y estrategias de control MISO existentes en la literatura científica, así como su éxito en números ejemplos prácticos.

Además de a varios ejemplos numéricos, la metodología de diseño propuesta en este trabajo se aplica: al control de un digestor ATAD de

fangos de depuradora, y al control de un reactor CSTR empleado en la industria química.

14.2 VÍAS DE CONTINUACIÓN

Tras la finalización del trabajo se perfilan varias líneas de investigación, que serán acometidas en trabajos futuros. De entre ellas destacan las siguientes:

- Nuevas especificaciones de estabilidad robusta y nuevos métodos para el cálculo de bounds. Las especificaciones de estabilidad tradicionalmente se establecen en QFT acotando el módulo de funciones de lazo cerrado, como la sensibilidad o la sensibilidad complementaria. Cuando después esta restricción se expresa en términos de la función de lazo para realizar el *loop-shaping*, aparece una zona de exclusión (*bound*) alrededor del punto crítico. Una vez definida la cota para el lazo cerrado la distancia al punto crítico queda configurada en todas las direcciones. Es decir, no se pueden definir de forma independiente el margen de ganancia y el de fase. Por ello, la zona prohibida puede resultar mayor que la deseada en algunas direcciones, lo que impide un diseño óptimo, ya que los *bounds* no reflejan la situación realmente deseada. Estas deficiencias se evitarían si la estabilidad se definiera directamente para la función de lazo abierto. Es más, conceptualmente esto sería mucho más lógico, porque los márgenes se eligen en función de la incertidumbre desconocida de la planta en magnitud y en fase. Este nuevo tipo de especificaciones de estabilidad ya han sido estudiadas para sistemas SISO, estando en revisión una publicación sobre este particular. Su aplicabilidad en sistemas MISO es inmediata, ya que la estabilidad también se definía sobre funciones de lazo cerrado, y luego se traducía a las funciones de rama.

La definición de la estabilidad para la función de lazo, conlleva un nuevo procedimiento para el cálculo de los *bounds*, que debe incorporar la incertidumbre conocida de la planta. Este nuevo procedimiento ya se ha desarrollado en la publicación en revisión antes mencionada y es igualmente válido para cuando la estabilidad se define inicialmente sobre funciones de lazo cerrado. En este caso, la ventaja es que el nuevo método es mucho más eficiente computacionalmente. Se prevé su extensión para el cálculo de los contor-

nos representativos de otras especificaciones robustas distintas a las de estabilidad tanto para sistemas SISO como MISO.

- Cuantificación del efecto del ruido para estructuras con prealimentación de una señal medible. Una estructura que prealimenta una señal, como las llamadas perturbaciones medibles, requiere el empleo de un sensor. Este incorporará ruido al igual que ocurre en la medida de la variable controlada. La estrategia de diseño propuesta no contempla los efectos negativos de este ruido, que podrían ser similares a los generados por el ruido en la medida de la variable controlada. Queda pendiente la cuantificación del coste introducido por la medida de la perturbación, y su ponderación y comparación con el coste introducido por la medida de la señal de realimentación. Esta comparación permitirá determinar en qué casos la estrategia de control con lazos de prealimentación reduce el impacto total que presentan los ruidos de las señales sobre la acción de control. Esto podría variar el criterio de reparto de la banda frecuencial para las plantas planteado hasta ahora. Este efecto también debe ser estudiado para aquellos servosistemas en los que la señal de referencia es generada con un elemento *hardware* sometido a ruido eléctrico.
- Extensión de las estrategias de diseño a sistemas MISO con salidas individuales accesibles. Desde un punto de vista teórico, los beneficios de la realimentación se obtienen de las variables medidas. Por lo tanto, cabe esperar que los sistemas MISO con salidas individuales medibles presenten mejores propiedades para su control en lazo cerrado. Queda pendiente explorar los beneficios que pueden reportar al control las medidas de las salidas individuales. Cuando se conozcan los beneficios esperados podrán desarrollarse nuevas estrategias de diseño QFT para sistemas MISO con salidas individuales accesibles.
- Aplicación de la nueva inecuación de diseño a nuevos problemas de control. El problema de seguimiento y el rechazo de perturbaciones ha requerido resolver un nuevo tipo de inecuación con el fin de calcular los *bounds* para el diseño del controlador de realimentación. Este tipo de inecuación puede ser empleada para resolver otras especificaciones de control que no han sido contempladas hasta la fecha ante la imposibilidad de calcular sus *bounds*

representativos. Por ejemplo, puede aplicarse de forma directa al seguimiento de referencias QFT en estructuras *model-matching* con controladores en cascada. Por lo tanto, queda pendiente la búsqueda de problemas de control en los que dicha inecuación es adecuada, y la generación de nuevas estrategias de diseño para resolver dichos problemas.

Parte VI

ANEXOS



REVISIÓN DE QFT

A continuación, se presenta una revisión de la teoría de realimentación cuantitativa (QFT). En ella se presenta una breve descripción de los hitos más importantes que han dado lugar al desarrollo de la misma. Además, se presentan sus fundamentos y la metodología general de diseño QFT para sistemas SISO.

Se considera fundamental la inclusión del presente anexo en el documento dado que las estrategias presentadas en el cuerpo del mismo se fundamentan en los conceptos presentados a continuación. Su lectura puede resultar de utilidad para aquellos que no dispongan de sólidos conocimientos sobre la técnica.

A.1 INTRODUCCIÓN A QFT

Partiendo de las ideas propuestas por Bode [11] en su libro *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, Horowitz [60, 61] desarrolla los principios de la Teoría de Realimentación Cuantitativa, conocida en la actualidad como QFT (*Quantitative Feedback Theory*). En estos primeros trabajos se definieron conceptos importantes como el coste de la realimentación, el diseño empleando la función de lazo abierto, el empleo de estructuras de control con dos grados de libertad, etc. Todo ello ha dado lugar a un conjunto de herramientas enfocadas a alcanzar diseños robustos, permitiendo satisfacer las especificaciones de comportamiento pese a la existencia de perturbaciones no medibles y de incertidumbre paramétrica.

En la década de los setenta I.M. Horowitz y M. Sidi emplean por primera vez el nombre de QFT [69, 136, 67], en una serie de trabajos que establecen los pilares del control robusto QFT para sistemas SISO. En estos trabajos se introduce el diagrama de *Nichols* como herramienta de

diseño, hecho que produjo una rápida expansión de los conceptos propuestos. En trabajos posteriores, se establecieron las reglas de diseño para sistemas lineales con parámetros variables en el tiempo [62] y sistemas no lineales [154]. Otro tipo de soluciones para sistemas variantes en el tiempo y no lineales se propusieron en [63, 115, 154], así como el empleo de controladores variantes para sistemas no lineales e invariantes se emplearon en [155, 154].

La extensión de QFT a sistemas de fase no mínima (NMP) vino de la mano de Sidi [133] y [68]. En estos trabajos se afrontan diseños para sistemas de fase no mínima con incertidumbre paramétrica, mostrando cómo debe existir un equilibrio entre *performance* y estabilidad, dado que las limitaciones inherentes a este tipo de sistemas hacen que no siempre exista solución al problema de control. En esta línea Sidi [134] determina el ancho de banda máximo para sistemas de control muestreados. La extensión formal de QFT a sistemas muestreados puede estudiarse en el trabajo presentado por Yaniv y Chait [157].

Con la maduración de QFT nacieron las estrategias de diseño multivariadas. Ya en sus inicios se exploraron diseños QFT para sistemas MIMO, sin tener en cuenta el acoplamiento entre los lazos de control. La primera estrategia de diseño realmente multivariable fue propuesta por Horowitz [64]. En ella se aborda el control de sistemas MIMO $n \times n$ descomponiendo el problema de control en n problemas SISO equivalentes en los que una entrada de perturbación sustituye al acoplamiento.

Los conceptos propuestos por I.M. Horowitz en su teoría QFT, pese a ser válidos en la práctica, no estuvieron exentos de críticas. Doyle [27], más afín a la *teoría de control moderna*, criticó duramente los fundamentos de QFT. En un trabajo posterior Yaniv y Horowitz [158] rebatieron los argumentos esgrimidos por Doyle, demostrando las bondades de QFT.

Desde entonces, la metodología de diseño QFT ha alcanzado una gran popularidad dentro de la Ingeniería de Control, prueba de ello son las numerosas publicaciones científicas y la gran cantidad de aplicaciones resueltas empleando sus conceptos.

A.2 METODOLOGÍA DE DISEÑO QFT SISO

A continuación, se describe la metodología de diseño QFT para sistemas lineales de simple-entrada-simple-salida, invariantes en el tiempo y de fase mínima. Se utiliza un caso particular que permite ilustrar de forma sencilla la metodología. Se considera la estructura de control de

la [Figura A.3](#) (véase la [Subsección A.2.2](#)) por ser la más empleada. Debe tenerse en cuenta que el objetivo de la presente sección es realizar una breve descripción de los pasos a seguir en el diseño. Una descripción más detallada puede obtenerse en [65, 153, 70].

El proceso de diseño QFT consta de los siguientes pasos:

1. Definición del modelo de la planta con incertidumbre.
2. Definición de especificaciones de comportamiento en lazo cerrado en el dominio de la frecuencia.
3. Cálculo de contornos de diseño QFT
4. Diseño de controladores mediante *Loop-shaping*.
5. Diseño de pre-filtro; únicamente si se establecen especificaciones de seguimiento de referencias.
6. Validación del diseño.

A.2.1 *Modelo de planta con incertidumbre*

Uno de los aspectos fundamentales de QFT es la robustez. Es decir, los controladores diseñados satisfacen las especificaciones para todos los posibles modelos de planta, que representan la incertidumbre acerca de la planta real. El origen de esta incertidumbre responde a:

- Los parámetros de los modelos lineales no se conocen de forma exacta o pueden cambiar a lo largo del tiempo debido a factores como el desgaste, la temperatura, etc.
- Se emplean modelos linearizados cuyos parámetros dependen del punto de operación del sistema no lineal.
- Las dinámicas de alta frecuencia no pueden modelarse de forma precisa o son simplificadas para trabajar con modelos de planta sencillos y válidos en las frecuencias de trabajo.

La incertidumbre de un sistema puede definirse empleando incertidumbre paramétrica, también conocida como estructurada, o empleando incertidumbre no paramétrica, también conocida como no estructurada. En la primera, se determina el modelo de la planta y se definen los intervalos de variación de los parámetros que la forman. De este modo

se establece un conjunto de plantas, todas ellas con el mismo número de polos-ceros, entre las que se encuentra el sistema real. Compruébese cómo este tipo de incertidumbre modela a la perfección la primera fuente de incertidumbre antes descrita, pero no es adecuado para la tercera. Por el contrario, la incertidumbre no estructurada emplea un modelo nominal y una función que acota la incertidumbre en cada frecuencia. Nótese como esta segunda opción es más útil para definir la tercera fuente de incertidumbre. Por lo tanto, las dos opciones propuestas presentan ventajas e inconvenientes y el empleo de una u otra dependerá de la metodología de diseño empleada o de la naturaleza del proceso a controlar.

En sus orígenes QFT nació como una metodología de diseño para sistemas con incertidumbre paramétrica [69], no obstante, trabajos posteriores [53, 77, 114, 17] extendieron QFT permitiendo el empleo de modelos con incertidumbre no estructurada o mixta. Para facilitar la comprensión del método de diseño, en este trabajo se empleará únicamente incertidumbre paramétrica. Los conceptos descritos son fácilmente trasladables a modelos con incertidumbre no paramétrica.

Por lo tanto, el diseño de control QFT deberá gobernar un conjunto de modelos de planta \wp , en los que se emplean m parámetros $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_m]$, cada uno de los cuales varía entre un límite superior q_i^+ e inferior q_i^- . Es decir, el vector de incertidumbre \mathbf{q} pertenece a un hiperrectángulo en \mathbb{R}^m llamado espacio de la incertidumbre \mathcal{Q} , determinado por

$$\mathbf{q} \in \mathcal{Q} \triangleq \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m \mid q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, i = 1, \dots, m\}. \quad (\text{A.1})$$

A partir de ahora, el conjunto de plantas dentro de la incertidumbre se expresará según

$$\wp = \{p(s, \mathbf{q}), \mathbf{q} \in \mathcal{Q}\}. \quad (\text{A.2})$$

La [Figura A.1](#) (izquierda) muestra un ejemplo de espacio de incertidumbre en \mathbb{R}^2 , empleado para determinar el conjunto de plantas \wp . Esta forma de definir la incertidumbre, muy útil para el ser humano, contempla un conjunto infinito de plantas dentro del espacio \mathcal{Q} . El empleo de sistemas informáticos en el diseño QFT es incompatible con el empleo de un conjunto infinito de plantas, lo que produce la necesidad de discretizar \mathcal{Q} en un conjunto de plantas manejable y que represente de

forma fiel la incertidumbre del sistema. Para ello se emplean discretizaciones de los intervalos de variación de los parámetros $q_i \in (q_i^-, q_i^+)$, de forma que se toman una serie de valores representativos $q_i = \{q_{i,k}\}$, para $k = 1, \dots, n$ (véase la [Figura A.1](#) (derecha). El aumento del número de parámetros y de la densidad de la discretización de éstos, produce que el conjunto de plantas crezca rápidamente, aumentando el coste computacional. Por lo tanto, la selección del número de puntos para cada uno de los parámetros q_i debe realizarse de forma adecuada. Algunos trabajos al respecto se encuentran en [\[54, 112, 101, 26\]](#).

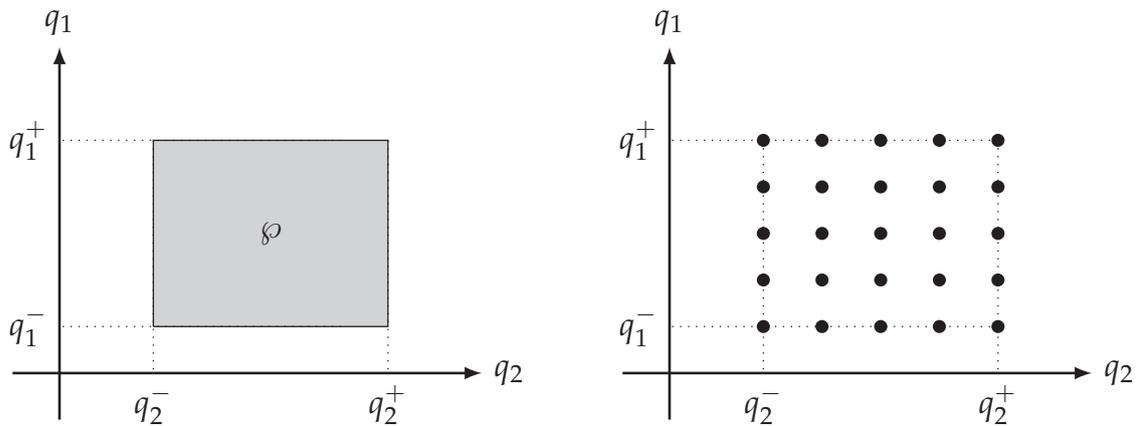


Figura A.1: Incertidumbre paramétrica en el espacio de parámetros \mathcal{Q} .

Como se ha descrito en secciones anteriores, QFT trabaja en el dominio de la frecuencia. En concreto, garantizando el cumplimiento de las especificaciones de diseño (véase la [Subsección A.2.2](#)) en un conjunto discreto de frecuencias Ω . Nótese cómo es la segunda discretización del problema de control, que por tanto solo es resuelto para un conjunto discreto de plantas en un conjunto discreto de frecuencias. Si la selección del conjunto Ω es adecuada, el sistema cumplirá con las especificaciones de diseño en todo el espectro frecuencial. No obstante, es necesario llevar a cabo una última etapa de validación de los diseños (véase [Subsección A.2.6](#)) en un conjunto ampliado de frecuencias que garanticen el cumplimiento de las especificaciones. La selección del conjunto de frecuencias discretas no es una tarea trivial, marcando en gran medida las posibilidades de éxito y la cantidad de re-diseños necesarios para hacer cumplir las especificaciones en todo el espectro frecuencial. Un conjunto adecuado, contendrá las frecuencias en las que se aprecia una mayor incertidumbre. Además, deberán contenerse las frecuencias que mejor representen la dinámica de las especificaciones.

Se conoce como plantilla QFT o *template* del conjunto de plantas \wp en la frecuencia discreta ω , a la representación en el plano magnitud-fase de la respuesta a la frecuencia ω de las diferentes plantas que conforman \wp . Es decir,

$$\mathcal{T}(\wp, \omega) \triangleq \{|p(j\omega, \mathbf{q})| \angle p(j\omega, \mathbf{q}), q \in \mathcal{Q}\}. \quad (\text{A.3})$$

Las plantillas permiten conocer de forma sencilla la incertidumbre del sistema en las frecuencias de diseño, permitiendo una adecuada selección de las mismas. Compruébese cómo en alta y baja frecuencia las plantillas toman forma de segmento vertical, ya que la fase del sistema corresponde con $(u - v)90^\circ$ en baja frecuencia¹ y con $(m - n)90^\circ$ en alta frecuencia². Se deberá seleccionar un mayor número de frecuencias en el intervalo comprendido entre *templates* con forma de segmento vertical, puesto que en dicho rango de frecuencias es donde se produce un mayor impacto de la incertidumbre.

Véase como ejemplo el sistema

$$p(s, \mathbf{q}) = \frac{q_1}{(s + q_2)(s + 2)}; \quad q_1 \in (2, 6), \quad q_2 \in (1, 4), \quad (\text{A.4})$$

en el que el espacio de la incertidumbre se discretiza mediante el empleo de los vectores

$$q_1 = \{2, 5\}, \quad q_2 = \{1, 2, 3, 4\} \quad (\text{A.5})$$

y se emplea el conjunto de frecuencias discretas

$$\Omega = \{0.1, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20, 50\}. \quad (\text{A.6})$$

Las plantillas obtenidas se muestran en la [Figura A.2](#). Nótese cómo los puntos corresponden con los valores obtenidos para el espacio de incertidumbre discretizado, mientras que la región sombreada corresponde con el espacio \mathcal{Q} continuo. Del mismo modo, corrobórese cómo en los extremos se aprecia la transformación de las plantillas en segmentos verticales.

¹ u corresponde con el número de derivadores y v con el número de integradores.

² m corresponde con el número de ceros y n con el número de polos.

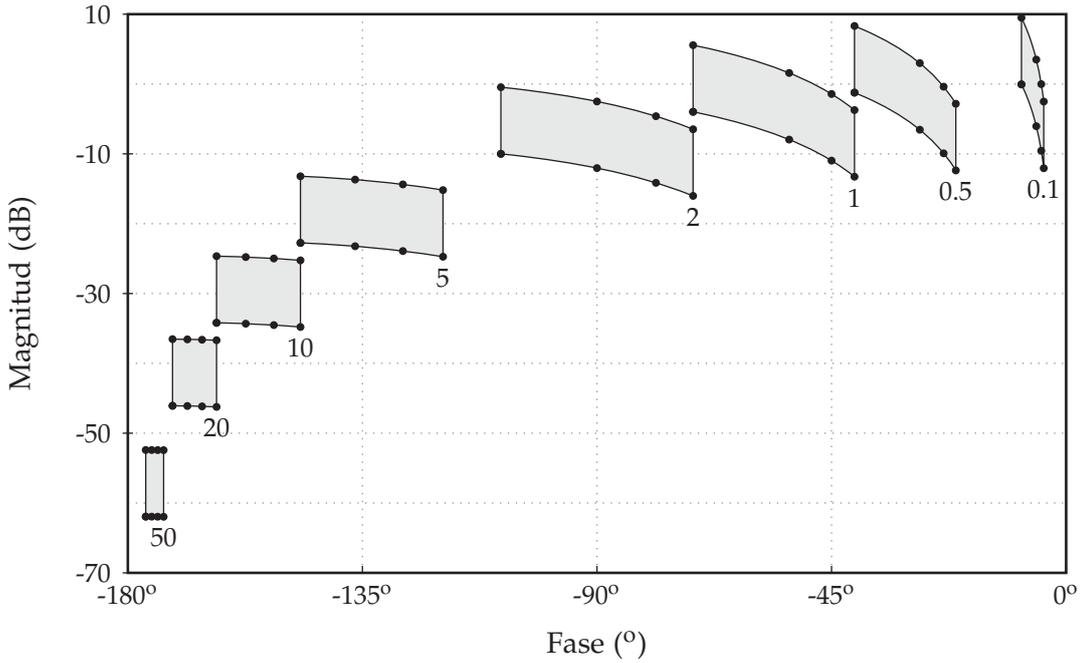


Figura A.2: Plantillas (*templates*) QFT.

A.2.2 Especificaciones

Las especificaciones QFT se corresponden con restricciones impuestas en la magnitud de las respuestas frecuenciales del sistema en lazo cerrado. El objetivo final es el diseño de un controlador $c(s)$ en la estructura de control de la Figura A.3 que permita satisfacer dichas restricciones.

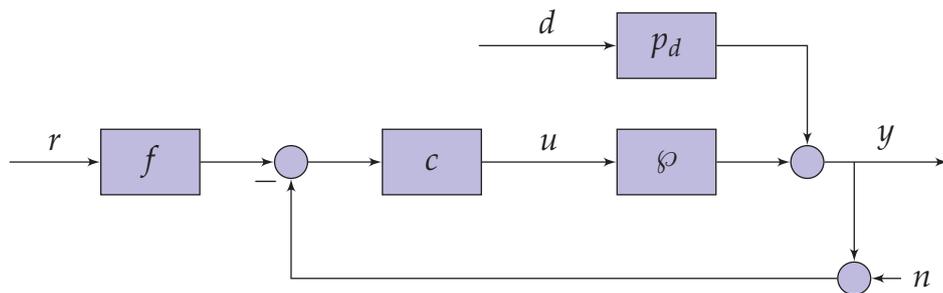


Figura A.3: Estructura de control SISO.

Del estudio de la Figura A.3 se determina que la respuesta de la variable controlada esta determinada por

$$y(s) = \frac{f(s)l(s)}{1+l(s)}r(s) + \frac{p_d(s)}{1+l(s)}d(s) - \frac{l(s)}{1+l(s)}n(s), \tag{A.7}$$

y la acción de control por

$$u(s) = \frac{f(s)c(s)}{1+l(s)}r(s) + \frac{p_d(s)c(s)}{1+l(s)}d(s) - \frac{l(s)}{1+l(s)}n(s). \quad (\text{A.8})$$

donde $l(s) = c(s)\varphi(s)$, y corresponde con un conjunto de respuestas.

Tradicionalmente, se acota la respuesta de la variable controlada $y(s)$ y de la acción de control $u(s)$ para las diferentes señales de excitación del sistema. A continuación, se muestran especificaciones para garantizar la estabilidad robusta, el rechazo robusto de perturbaciones, y el seguimiento robusto de referencias.

Estabilidad robusta

La estabilidad de un sistema puede determinarse a partir de la función sensibilidad S y de la sensibilidad complementaria T , dado el equivalente $S + T = 1$. En QFT suele definirse la estabilidad robusta mediante el empleo de una cota superior en la magnitud de la función sensibilidad complementaria. La condición se expresará según

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{l(j\omega)}{1+l(j\omega)} \right| \leq W_s; \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (\text{A.9})$$

donde W_s se corresponde con la magnitud de la cota superior y es constante para todas las frecuencias de diseño. Esta limitación restringe la respuesta frecuencial en lazo abierto $l(j\omega)$, impidiendo que se acerque al punto crítico de estabilidad (-180° , 0dB). En la carta de *Nichols* esta restricción se traduce en un *M-circle*³ que no deberá ser penetrado por $l(j\omega)$.

La cota W_s presenta relación directa con el margen de ganancia en dB

$$MG \geq 20 \log_{10} \left(1 + \frac{1}{W_s} \right), \quad (\text{A.10})$$

y con el margen de fase en grados

$$MF \geq 180 - \phi; \quad \phi = 2 \cos^{-1} \left(\frac{1}{2W_s} \right) \in [0, 180]. \quad (\text{A.11})$$

³ Se conoce como *M-circle* al lugar geométrico del plano Magnitud-Fase que da lugar a una magnitud constante de la función sensibilidad complementaria T .

La selección de dicha cota puede realizarse fijando el margen de ganancia mínimo deseado

$$W_s = \left| \frac{1}{10^{MG/20} - 1} \right|; \quad \forall MG > 0 \quad (\text{A.12})$$

o el margen de fase mínimo deseado

$$W_s = \left| \frac{0.5}{\cos(\pi(180 - MF)/360)} \right|; \quad \forall MF \in [0, 180]. \quad (\text{A.13})$$

Como norma general [10] se recomienda garantizar un margen de ganancia mínimo de $MG \geq 5\text{db}$ y un margen de fase mínimo de $MF \geq 45^\circ$; que corresponden con una cota $W_s \geq 1.3$.

Rechazo de perturbaciones.

La respuesta frecuencial del sistema ante una perturbación queda acotada empleando la especificación

$$\left| \frac{p_d(j\omega)}{1 + l(j\omega)} \right| \leq W_d(\omega); \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (\text{A.14})$$

En caso de existir n fuentes de perturbación $d_{i=1\dots n}$, deberán fijarse n restricciones, una por cada entrada de perturbación. En cada frecuencia discreta de diseño se deberá atender a la especificación más restrictiva.

La cota superior puede ajustarse en el dominio de la frecuencia, o mediante el empleo de modelos paramétricos con respuesta temporal conocida y parametrizable ante escalones unitarios. Cuando las perturbaciones afectan al sistema sin dinámica ($p_d = 1$), suelen emplearse modelos de primer orden con derivador

$$W_d(\omega) = \left| \frac{k j\omega}{j\omega + p} \right|, \quad (\text{A.15})$$

o modelos de segundo orden con derivador

$$W_d(\omega) = \left| \frac{k j\omega(j\omega + \delta\omega_n)}{(j\omega)^2 + 2\delta\omega_n j\omega + \omega_n^2} \right|. \quad (\text{A.16})$$

Estos últimos presentan oscilaciones con respecto al equilibrio, lo que complica su interpretación en el dominio del tiempo. Este hecho los relega a un segundo plano en la mayor parte de las aplicaciones.

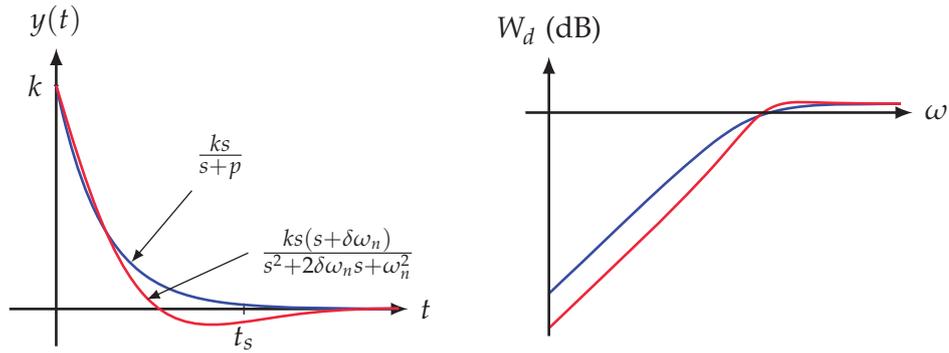


Figura A.4: Cotas W_d empleadas en el rechazo de perturbaciones.

La magnitud de los modelos (A.15) y (A.16) en alta frecuencia ($\omega \rightarrow \infty$) corresponden con $W_d = k$, valor que coincide con la respuesta del modelo para $t = 0$. El tiempo necesario para rechazar la perturbación esta determinado por $t_{s,2\%} \approx 4/p$ para la cota (A.15) y por $t_{s,2\%} \approx 4/\delta\omega_n$ para la cota (A.16). Téngase en cuenta que la especificación acota la función sensibilidad S , por lo tanto, será necesario emplear valores de ganancia $k > 1$. En caso contrario la especificación demandará acción de control en alta frecuencia incrementando el coste de la realimentación de forma innecesaria.

Cuando las perturbaciones distorsionan la salida del sistema y a través de una dinámica $p_d(s)$, suelen emplearse modelos cuya respuesta temporal presenta $y(0) = 0$. Los modelos más empleados corresponden con sistemas de segundo orden sobre-amortiguados

$$W_d(\omega) = \left| \frac{k j\omega}{(j\omega + p_1)(j\omega + p_2)} \right|, \tag{A.17}$$

o sub-amortiguados

$$W_d(\omega) = \left| \frac{k j\omega}{(j\omega)^2 + 2\delta\omega_n j\omega + \omega_n^2} \right|. \tag{A.18}$$

Como en el caso anterior, la diferencia principal radica en las oscilaciones en torno al eje de abscisas producidas por las respuestas sub-amortiguadas.

Seguimiento de referencias.

La especificación de seguimiento de referencias acota el comportamiento dinámico del sistema ante cambios en la señal de referencia.

En la mayor parte de los casos este comportamiento es modelado empleando señales normalizadas, en concreto, la respuesta ante un escalón unitario. La diferencia principal con respecto a la especificación de rechazo de perturbaciones radica en que en este caso se establecen dos modelos de comportamiento entre los que deben situarse las respuestas del sistema con incertidumbre. La especificación queda definida como

$$W_l(\omega) \leq \left| \frac{f(j\omega)l(j\omega)}{1+l(j\omega)} \right| \leq W_u(\omega); \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (\text{A.19})$$

donde $W_l(\omega)$ corresponde con el modelo de comportamiento inferior y $W_u(\omega)$ con el modelo de comportamiento superior. Dichos modelos suelen ajustarse empleando modelos de segundo orden

$$W(\omega) = \left| \frac{\omega_n^2}{((j\omega)^2 + 2\delta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2)} \right|, \quad (\text{A.20})$$

donde los parámetros δ y ω_n son seleccionados para satisfacer los requisitos de diseño en forma de tiempo de establecimiento t_s , rebasamiento máximo porcentual $RM(\%)$, etc.

En la mayor parte de las ocasiones el modelo superior $W_u(\omega)$ es sintonizado empleando una respuesta sub-amortiguada ($\delta < 1$). Es recomendable emplear modelos que no presenten pico de resonancia, por lo que el empleo de $\delta = 0.7$ es común en muchos diseños. Fijado dicho valor se emplea ω_n para fijar el tiempo de establecimiento del sistema o el ancho de banda deseado. El modelo inferior $W_l(\omega)$ suele sintonizarse empleando respuestas sobre-amortiguadas $\delta > 1$, de forma que se genere una región entre los modelos entre la que se deben situar las respuestas del sistema.

Pese a que las especificaciones ($W_u(\omega)$, $W_l(\omega)$) son seleccionadas en el dominio del tiempo, QFT trabaja en el dominio de la frecuencia. La especificación (A.19) implica que la magnitud del conjunto de respuestas T_r se encuentre acotada entre las magnitudes de los modelos $W_u(\omega)$ y $W_l(\omega)$. Nótese como en este caso existen dos grados de libertad en el diseño $c(s)$ y $f(s)$, por lo que existen infinitas combinaciones de $c(s)$ y $f(s)$ que cumplen la especificación. Siguiendo las premisas de QFT, el objetivo será cumplir la especificación reduciendo al máximo posible la realimentación. Es decir, deberá trasladarse al controlador de prealimentación el máximo el esfuerzo de control posible.

La inecuación (A.19) puede expresarse en dos inecuaciones

$$W_u(\omega) \geq \max_{\varphi} \{|f(j\omega)T(j\omega)|\} \quad (\text{A.21a})$$

$$W_l(\omega) \leq \min_{\varphi} \{|f(j\omega)T(j\omega)|\}, \quad (\text{A.21b})$$

que pueden expresarse en función del módulo del prefiltro⁴

$$|f(j\omega)| \leq \frac{W_u(\omega)}{\max_{\varphi} \{|T(j\omega)|\}} \quad (\text{A.22a})$$

$$|f(j\omega)| \geq \frac{W_l(\omega)}{\min_{\varphi} \{|T(j\omega)|\}}. \quad (\text{A.22b})$$

Las inecuaciones (A.22a) y (A.22b) pueden concentrarse en una única inecuación

$$\frac{\max_{\varphi} \{|T(j\omega)|\}}{\min_{\varphi} \{|T(j\omega)|\}} \leq \frac{W_u(\omega)}{W_l(\omega)} = \delta_t(\omega) \quad (\text{A.23})$$

que depende únicamente del controlador de realimentación. Por lo tanto, en primera instancia se seleccionará un controlador de realimentación $c(s)$ que satisfaga (A.23), y en una etapa posterior se diseña $|f(j\omega)|$ para cumplir (A.22a) y (A.22b).

La inecuación (A.23) implica que el conjunto de respuestas $T(j\omega)$ presente una distorsión máxima $\delta_t(\omega)$. Es decir, el sistema demandará mayor magnitud cuanto mayor sea la incertidumbre del sistema. Del mismo modo, las especificaciones deben ser coherentes con el propósito del controlador. En esta línea puede observarse como el empleo de cotas $W_u(\omega)$ y $W_l(\omega)$ según (A.19) produce diseños que demandan alta ganancia en alta frecuencia (ver Figura A.5). Esto es debido a que en alta frecuencia se obliga al sistema a realizar un esfuerzo de control para estrechar la incertidumbre, todo ello sin obtener beneficios en el *performance*. Para ello se recomienda modificar las cotas añadiendo un cero en el modelo superior y un polo en el modelo inferior que permitan un rápido incremento

⁴ Recuérdese que $f(j\omega)$ representa una única respuesta frecuencial, a diferencia de T que representa un conjunto de respuestas

de $\delta_t(\omega)$ en alta frecuencia, hecho que permite a su vez una rápida disminución de la ganancia del controlador en dichas frecuencias.

Por consiguiente, la cota superior $W_u(\omega)$ suele sintonizarse empleando el modelo

$$W_u(\omega) = \left| \frac{\omega_n^2(j\omega/\omega_z + 1)}{((j\omega)^2 + 2\delta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2)} \right|, \quad (\text{A.24})$$

y la cota inferior $W_l(\omega)$ según el modelo

$$W_l(\omega) = \left| \frac{\omega_n^2}{((j\omega)^2 + 2\delta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2)(j\omega/\omega_p + 1)} \right|. \quad (\text{A.25})$$

En muchas ocasiones se emplea $\omega_p = \omega_z$ como una fracción de la pulsación ω_n empleada para determinar el comportamiento temporal del sistema en lazo cerrado. En la [Figura A.5](#) puede comprobarse como esta modificación apenas distorsiona el comportamiento temporal, donde se aprecia una mayor separación entre las cotas en los instantes iniciales. En el dominio frecuencial se comprueba como la separación entre cotas en alta frecuencia se amplía de forma indefinida con la frecuencia.

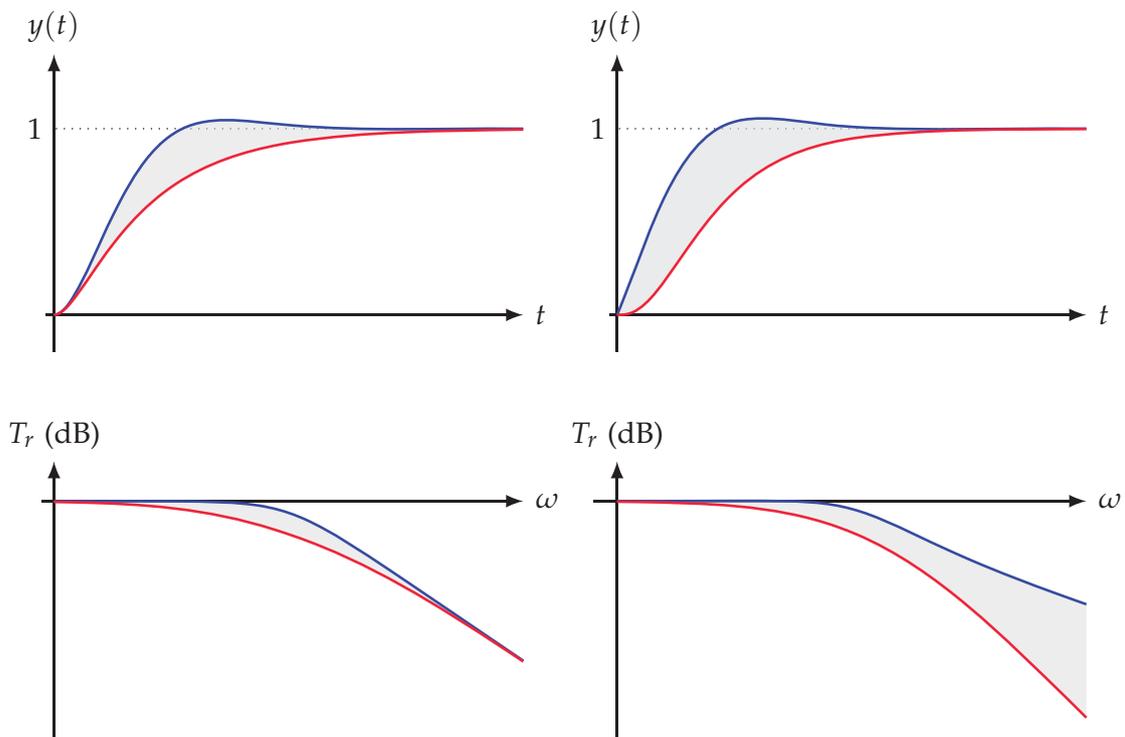


Figura A.5: Cotas W_u y W_l empleadas en el seguimiento de referencias. A la izquierda se presentan los modelos de partida y a la derecha la especificación con modificación en alta frecuencia.

A.2.3 Contornos de diseño QFT

Los contornos de diseño QFT determinan las condiciones que debe cumplir la función de transferencia de lazo abierto nominal $l_o(j\omega)$ para satisfacer una especificación en una frecuencia discreta. Es decir, trasladan las restricciones de funcionamiento en lazo cerrado, expresándolas en función de la función de transferencia de lazo abierto nominal $l_o(j\omega) = c(j\omega)p_o(j\omega)$ empleada para el diseño del controlador $c(s)$. Estos contornos, también conocidos como *bounds* son trazados empleando los diagramas de *Black-Nichols* y determinan las regiones de dicho plano que permiten satisfacer la condición de diseño. Como convenio se emplean líneas continuas para delimitar el límite inferior de la región válida y líneas discontinuas para delimitar el límite superior de la región válida. Debe tenerse en cuenta que existirá un contorno para cada especificación y cada frecuencia. El contorno que garantiza el cumplimiento de todas las especificaciones de diseño, en una frecuencia discreta, será el formado por la intersección de los contornos de las diferentes especificaciones. En una etapa posterior se lleva a cabo el *loop-shaping* del controlador, encargado de situar $l_o(j\omega)$ en las regiones del plano Magnitud-Fase delimitadas por el contorno intersección.

El cálculo de contornos es uno de los aspectos fundamentales de QFT. Los métodos empleados para su obtención han evolucionado a lo largo de los años, pasando de los procedimientos manuales a los sofisticados algoritmos informáticos empleados en la actualidad. Los procedimientos manuales [25] consistían en recortar *Templates* $\mathcal{T}(\varphi, \omega)$ en cartulina, que posteriormente eran situados en el diagrama de *Black-Nichols* para determinar las posiciones que permiten satisfacer la condición de diseño. De este modo se determinaban las regiones de diseño válidas dentro de dicho plano. Pese a encontrarse en desuso, el procedimiento manual empleado para calcular los contornos facilita la comprensión del concepto de *bound*, por lo que se considera fundamental su inclusión en el presente documento. A continuación se muestra el procedimiento llevado en los primeros diseños QFT para calcular los contornos de tres tipos de especificación.

Estabilidad robusta

Para garantizar la estabilidad robusta en una frecuencia discreta ω , debemos garantizar que el conjunto de respuestas $\mathcal{T}(\mathcal{L}, \omega)$ se encuentre

fuera del *M-Circle* definido por W_s . Es decir, debemos garantizar que ninguna de las plantas se encuentre en el interior de dicha región. Téngase en cuenta que el conjunto de respuestas $\mathcal{T}(\mathcal{L}, \omega)$ corresponde con la plantilla $\mathcal{T}(\varphi, \omega)$ desplazada en el eje horizontal $\angle c$ grados y en el eje vertical $20 \log |c|$ dB; dado que

$$\mathcal{L}(j\omega, \mathbf{q}) = c(j\omega)\varphi(j\omega, \mathbf{q}), \quad (\text{A.26})$$

el módulo del conjunto está determinado por

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(j\omega, \mathbf{q})|_{\text{dB}} &= 20 \log |c(j\omega)\varphi(j\omega, \mathbf{q})| \\ &= 20 \log |c(j\omega)| + 20 \log |\varphi(j\omega, \mathbf{q})|, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

y el argumento por

$$\angle \mathcal{L}(j\omega, \mathbf{q}) = \angle c(j\omega)\varphi(j\omega, \mathbf{q}) = \angle c(j\omega) + \angle \varphi(j\omega, \mathbf{q}) \quad (\text{A.28})$$

El contorno se construye tomando la plantilla $\mathcal{T}(\varphi, \omega)$ y desplazándola en el eje horizontal y vertical hasta alcanzar los puntos límite a partir de los cuales se viola la condición de estabilidad robusta. Se anotan las posiciones de la función de lazo abierto nominal $l_o(j\omega)$ que son las que determinan los puntos del contorno $\beta_s(\omega)$. Como se ilustra en la [Figura A.6](#), líneas continuas en $\beta_s(\omega)$ indican que $l_o(j\omega)$ debe situarse por encima de las mismas, y líneas discontinuas indican que $l_o(j\omega)$ debe situarse por debajo de las mismas.

Un aspecto importante de los contornos QFT es su dependencia de la planta nominal empleada para el diseño del controlador. Véase en la [Figura A.6](#) como el contorno de diseño depende de la esquina inferior izquierda de la plantilla $\mathcal{T}(\varphi, \omega)$, que corresponde con la planta nominal $p_o(j\omega)$. En caso de emplear otra planta de diseño, se obtiene un contorno diferente, no obstante el controlador demandado en ambos casos es el mismo, ya que el *loop-shaping* del controlador se lleva a cabo para $l_o(j\omega)$.

Seguimiento robusto de referencias

Como en el caso anterior el contorno se construye desplazando la plantilla o *template* $\mathcal{T}(\varphi, \omega)$ en el plano de *Black-Nichols*. En este caso no existe una región a evitar, como ocurría para la estabilidad robusta, sino que el contorno debe expresar las posiciones del plano que presentan distorsiones en magnitud debidas a la incertidumbre inferiores a $\delta_t(\omega)$.

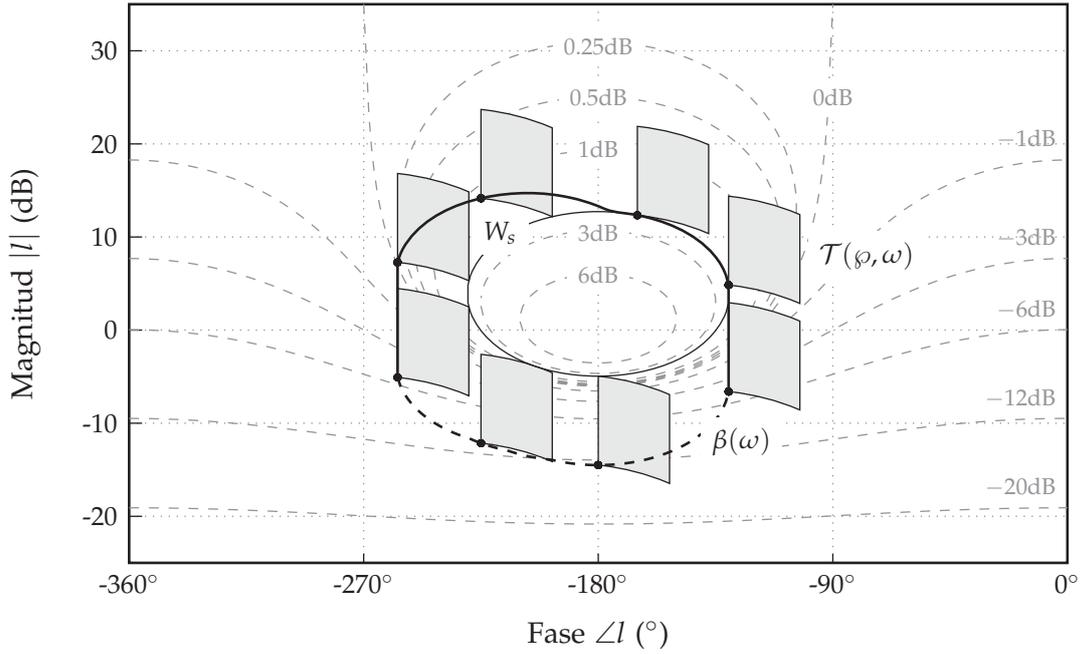


Figura A.6: Cálculo manual del contorno de estabilidad. La planta empleada corresponde con el ejemplo de la [Subsección A.2.1](#); $\omega = 5$ y $W_s = 1.3$.

En la [Subsección A.2.2](#) se determina como para lograr el cumplimiento de la inecuación (A.19) es condición necesaria pero no suficiente el cumplimiento de

$$\frac{\max_{\varphi} \{|T(j\omega)|\}}{\min_{\varphi} \{|T(j\omega)|\}} \leq \frac{W_u(\omega)}{W_l(\omega)} = \delta_t(\omega). \quad (\text{A.29})$$

Puesto que el diagrama de *Black-Nichols* representa las magnitudes y fases de $T(j\omega)$ dependiendo de la función de transferencia de lazo abierto, podemos determinar cual es la máxima distorsión de la sensibilidad complementaria $\delta(\omega)$, determinada por

$$\frac{\max_{\varphi} \{|T(j\omega)|\}}{\min_{\varphi} \{|T(j\omega)|\}} = \delta(\omega), \quad (\text{A.30})$$

para cada posición de $\mathcal{T}(\varphi, \omega)$ en dicho plano. Para ello, bastará con observar las líneas de magnitud constante que pasan por los extremos de la plantilla $\mathcal{T}(\varphi, \omega)$ pero sin atravesarla. La diferencia en dB entre dichas magnitudes corresponde con $\delta(\omega)$ expresado en dB.

Por lo tanto, el contorno $\beta_t(\omega)$ puede calcularse siguiendo un sencillo procedimiento. En primer lugar se fija la fase del controlador dentro del intervalo $(0^\circ, -360^\circ]$, hecho que determina la posición de la plantilla $\mathcal{T}(\varphi, \omega)$ en el eje horizontal. Partiendo de la parte inferior del diagrama de *Black-Nichols*, se realiza un movimiento vertical ascendente hasta que el *template* $\mathcal{T}(\varphi, \omega)$ pueda situarse entre dos líneas de magnitud constante con distancia relativa igual a $20 \log \delta(\omega)$ dB. Dicha posición corresponde con un punto de diseño válido, por lo que se anota la posición de la planta nominal, que corresponde con un punto del contorno de diseño $\beta_t(\omega)$ (véase la [Figura A.7](#) donde $\mathcal{T}(\varphi, 1)$ se encuentra comprendido entre los *M-Circle* de 1dB y -1 dB). Téngase en cuenta que cualquier incremento de magnitud permite satisfacer la condición de diseño, puesto que representa una reducción de la incertidumbre $\delta(\omega)$. Este procedimiento debe realizarse para diferentes fases de controlador comprendidas entre $(0^\circ, -360^\circ]$, de forma que se obtiene el contorno de diseño $\beta_t(\omega)$.

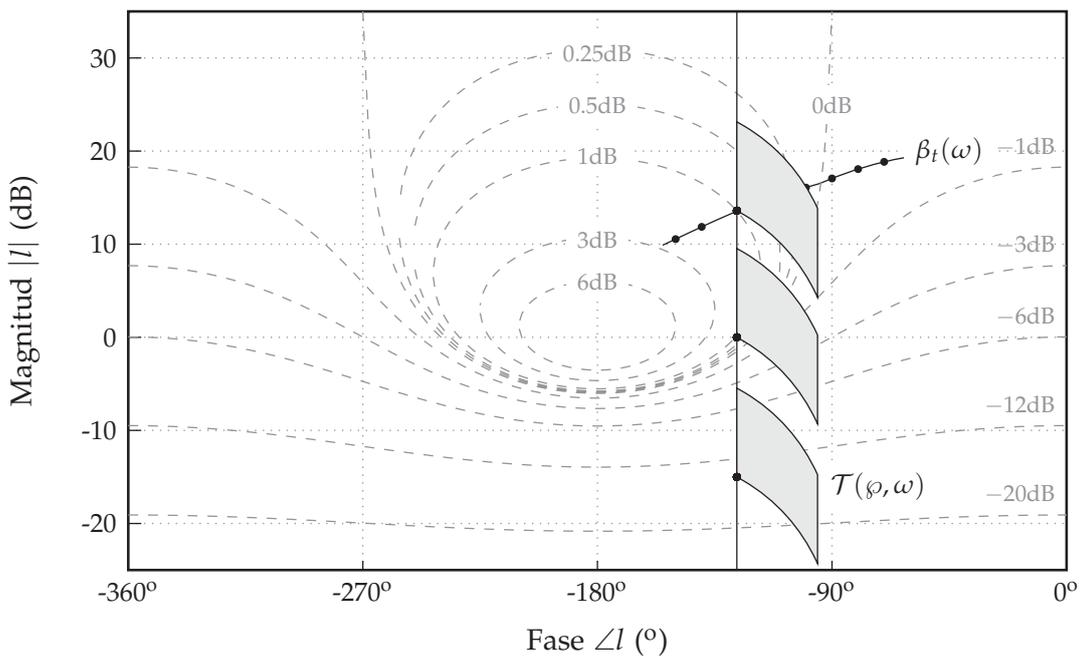


Figura A.7: Cálculo manual del contorno de seguimiento de referencias. La planta empleada corresponde con el ejemplo de la [Subsección A.2.1](#); $\omega = 1$ y $\delta_t = 2$ dB.

Rechazo robusto de perturbaciones

Compruébese cómo en el caso de las especificaciones de estabilidad robusta y seguimiento robusto de referencias, el procedimiento de cálculo de contornos de diseño QFT empleaba la información reportada por la carta de *Nichols*, que permite conocer el comportamiento del sistema en lazo cerrado a partir de la función de transferencia de lazo abierto. Esto es posible puesto que las inecuaciones empleadas en las especificaciones (A.9) y (A.19) acotan la magnitud de $T(j\omega)$. En el caso del rechazo robusto de perturbaciones, la inecuación (A.14) acota de forma indirecta la función sensibilidad $S(j\omega)$, puesto que dicha inecuación puede expresarse según

$$\left| \frac{1}{1+l(j\omega)} \right| \leq \frac{W_d(\omega)}{|p_d(j\omega)|} = W_{d_o}; \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (\text{A.31})$$

Puesto que la carta de *Nichols* no ofrece información sobre la función sensibilidad $S(j\omega)$ a partir de la función de transferencia de lazo abierto, se aplica el cambio de variable $i(j\omega) \triangleq 1/l(j\omega)$, que da lugar a la inecuación

$$\left| \frac{i(j\omega)}{1+i(j\omega)} \right| \leq W_{d_o}; \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (\text{A.32})$$

que corresponde con una función sensibilidad complementaria definida por $i(j\omega)$. Es decir, la especificación queda satisfecha siempre que el *template* $\mathcal{T}(\mathcal{I}, \omega)$ se encuentre completamente por debajo de la línea de magnitud constante que corresponde con $20 \log W_{d_o}$ dB. Para poder obtener el contorno $\beta_d(\omega)$ necesitamos la nueva plantilla $\mathcal{T}(\mathcal{I}, \omega)$, pero ésta corresponde con la simétrica a $\mathcal{T}(\mathcal{I}, \omega)$ con respecto al punto crítico de estabilidad $(-180^\circ, 0\text{dB})$; dada la relación de las fases

$$\angle i(j\omega) = \angle 1/l(j\omega) = -\angle l(j\omega), \quad (\text{A.33})$$

y de módulos

$$|i(j\omega)|_{\text{dB}} = |1/l(j\omega)|_{\text{dB}} = -|l(j\omega)|_{\text{dB}}. \quad (\text{A.34})$$

El procedimiento de cálculo del *bound* $\beta_d(\omega)$ se lleva a cabo en dos fases. En la primera se calcula el contorno $\beta_{d,\text{inv}}$, que corresponde con las restricciones impuestas para $i_o(j\omega)$. Este contorno se calcula siguiendo

un procedimiento similar al empleado en el caso del *tracking*. Se fija una fase del controlador y se desplaza el *template* $\mathcal{T}(\mathcal{I}, \omega)$ ⁵ en forma vertical descendente, hasta que queda completamente por debajo de la línea de magnitud constante definida por $20 \log W_{d_0}$ dB. Fijada la posición que satisface la condición de diseño, se anota la posición de la planta nominal, punto que pertenece a $\beta_{d,inv}$. Este procedimiento se repite para varias fases del controlador, dando lugar a la colección de puntos que determinan $\beta_{d,inv}$. En la segunda fase, el contorno $\beta_{d,inv}$ es transformado en β_d . Para ello se deshace la simetría con respecto al punto crítico de estabilidad $(-180^\circ, 0\text{dB})$, trasladando cada uno de los puntos calculados en el paso anterior. De este modo las restricciones impuesta para $i_o(j\omega)$ pasan a ser restricciones para $l_o(j\omega)$.

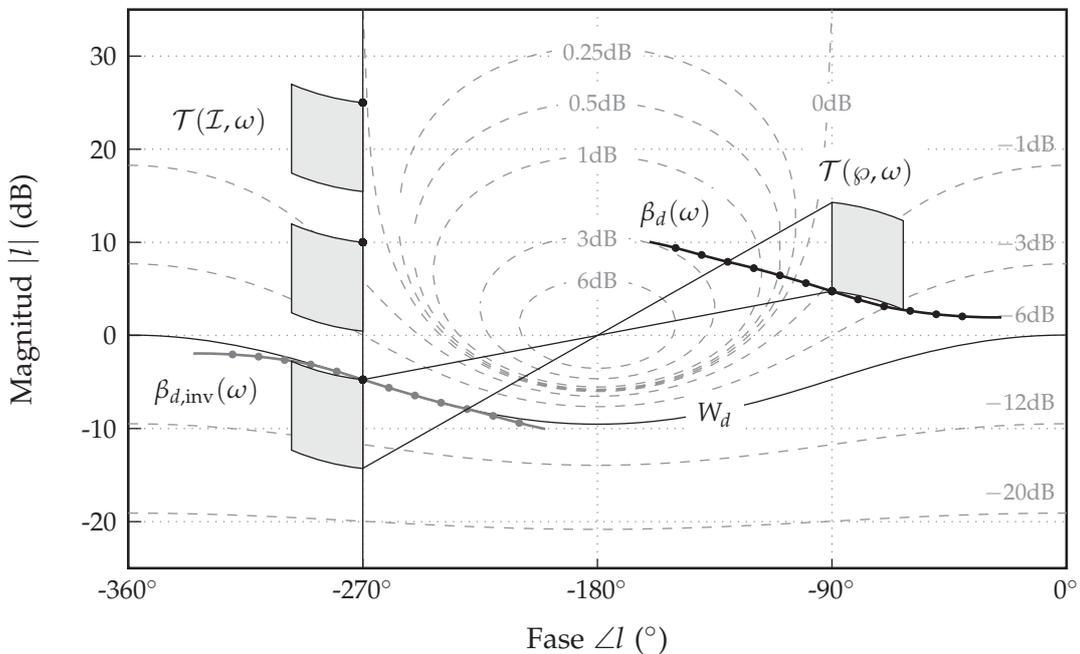


Figura A.8: Cálculo manual del contorno de rechazo de perturbaciones. La planta empleada corresponde con el ejemplo de la [Subsección A.2.1](#); $\omega = 5$ y $W_{d_0} = -6\text{dB}$

Como ha quedado demostrado, el empleo de procedimientos manuales para el cálculo de contornos de diseño requiere de un gran esfuerzo. Además, el procedimiento debe repetirse tantas veces como frecuencias discretas pertenecientes a Ω y tantas veces como especificaciones de control empleadas.

El empleo de algoritmos informáticos para la generación de contornos, permite reducir en gran medida el esfuerzo de diseño, reduciendo

⁵ Corresponde con el *template* $\mathcal{T}(\varphi, \omega)$ girado 180°

de forma drástica el tiempo necesario para dar solución al problema de control. En sus inicios, estos algoritmos empleaban técnicas geométricas y herramientas de diseño asistido por computador CAD (*Computer Aided Design*) [91, 76]. Estos algoritmos, poco eficientes, dejaron paso a otras estrategias de cálculo basadas en inecuaciones cuadráticas [146] y otros métodos como los presentados en [71, 152, 110, 7, 31], cuya principal deficiencia radicaba en la lentitud de los algoritmos. Por último, se desarrollaron los algoritmos propuestos en [159, 156, 157, 16, 17], que emplean inecuaciones cuadráticas para obtener los contornos de forma eficiente. Estos algoritmos son la base de la *Terasoft QFT Toolbox* para *Matlab* [12], herramienta *software* muy popular en la actualidad y empleada en el presente trabajo.

Estas técnicas de cálculo de contornos se fundamentan en la traslación de las especificaciones de diseño (ver [Subsección A.2.2](#)) en inecuaciones cuadráticas que restringen la magnitud del controlador. Todo el proceso de cálculo gira alrededor de la siguiente idea: fijada la frecuencia de diseño ω , la fase del controlador ϕ y una planta $p(j\omega)$ perteneciente al espacio de incertidumbre \mathcal{Q} , puede obtenerse una inecuación cuadrática del tipo

$$a_2c^2 + a_1c + a_0 \geq 0, \quad (\text{A.35})$$

que determina el intervalo de magnitudes del controlador que satisface la especificación⁶.

Partiendo de la idea anterior, el cálculo del contorno de diseño $\beta(\omega)$ que satisface una cierta especificación en ω se realiza del siguiente modo. En primer lugar se discretizan las fases del controlador, tomando un vector de puntos Φ comprendido entre $(0^\circ, -360^\circ]$. Fijada una fase $\phi \in \Phi$, se resuelve la inecuación para una planta $p(j\omega)$ comprendida en el espacio de incertidumbre discreto \mathcal{Q} . De este modo se determina el intervalo válido de magnitudes del controlador si el sistema tuviese una única planta $p(j\omega)$. Este procedimiento se repite para todas las plantas pertenecientes al espacio discreto \mathcal{Q} , obteniendo los intervalos válidos de cada planta, de donde se obtiene el intervalo solución mediante la intersección de los diferentes intervalos obtenidos. A continuación, se repite todo el procedimiento para las diferentes fases contenidas en Φ , dando lugar a los módulos del controlador que garantizan el cumplimiento de la especificación. En este punto se disponen las restricciones

⁶ Téngase en cuenta que fijados ω , ϕ y $p(j\omega)$; c es el único parámetro variable de la inecuación.

en función de $c(j\omega)$ por lo que el contorno de diseño $\beta(j\omega)$ es trazado multiplicando los puntos calculados por $p_o(j\omega)$, dando lugar a las restricciones de $l_o(j\omega)$ en el plano de *Black-Nichols*.

A continuación, se muestra el procedimiento de cálculo de inecuaciones para cuatro tipos de especificaciones de diseño. La especificación genérica, no introducida hasta ahora, es empleada en QFT MISO, por lo que se considera oportuno su desarrollo en la presente sección.

Estabilidad robusta

La inecuación (A.9) empleada en la especificación de estabilidad robusta depende del módulo de la función sensibilidad complementaria $T(j\omega)$. Si se definen $p(j\omega)$ y $c(j\omega)$ en su formato polar según $p(j\omega) = p\angle\theta$ y $c(j\omega) = c\angle\phi$, el módulo del numerador corresponde con pc y el módulo del denominador con

$$|1 + pc| = \sqrt{p^2c^2 + 2pc \cos(\theta + \phi) + 1}, \quad (\text{A.36})$$

por lo que la inecuación puede expresarse como

$$\frac{pc}{\sqrt{p^2c^2 + 2pc \cos(\theta + \phi) + 1}} \leq W_s. \quad (\text{A.37})$$

La raíz cuadrada del denominador es eliminada elevando los dos términos de la inecuación al cuadrado

$$\frac{p^2c^2}{p^2c^2 + 2pc \cos(\theta + \phi) + 1} \leq W_s^2, \quad (\text{A.38})$$

inecuación que puede ser expresada según

$$p^2c^2 \left(1 - \frac{1}{W_s^2}\right) + 2pc \cos(\theta + \phi) + 1 \geq 0, \quad (\text{A.39})$$

que corresponde con una inecuación cuadrática con formato

$$a_2c^2 + a_1c + a_0 \geq 0. \quad (\text{A.40})$$

Rechazo de perturbaciones

La inecuación (A.14) empleada en la especificación de rechazo de perturbaciones robustas, es resuelta siguiendo un procedimiento similar al

estudiado en el caso de la estabilidad robusta, ya que únicamente difieren en el numerador. En este caso, la inecuación puede ser expresada según

$$\frac{p_d}{\sqrt{p^2c^2 + 2pc \cos(\theta + \phi) + 1}} \leq W_d, \quad (\text{A.41})$$

inecuación que tras ser elevada al cuadrado y reorganizada en función de c puede expresarse según

$$p^2c^2 + 2pc \cos(\theta + \phi) + \left(1 - \frac{p_d^2}{W_d^2}\right) \geq 0. \quad (\text{A.42})$$

Especificación genérica

A continuación, se muestra la inecuación empleada para el cálculo de contornos de diseño para especificaciones genéricas del tipo

$$\frac{|AC + B|}{|DC + E|} \leq W_g; \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (\text{A.43})$$

donde los parámetros A , B , D y E corresponden con combinaciones de plantas dentro del espacio de incertidumbre determinado por \mathcal{Q} , y C es el controlador. Este tipo de especificación es de gran utilidad, puesto que permite imponer restricciones en lazo cerrado por un gran número de relaciones entrada-salida. Otro de sus aspectos fundamentales es que puede ser empleada en arquitecturas de control diferentes a la mostrada en la [Figura A.3](#).

En este caso, el módulo del denominador está determinado por

$$|AC + B| = \sqrt{a^2c^2 + 2abc \cos(\theta_a + \phi - \theta_c) + b^2}, \quad (\text{A.44})$$

y el del denominador por

$$|DC + E| = \sqrt{d^2c^2 + 2dec \cos(\theta_d + \phi - \theta_e) + e^2}. \quad (\text{A.45})$$

Substituyendo los valores de los módulos en la inecuación se obtiene

$$\frac{\sqrt{a^2c^2 + 2abc \cos(\theta_a + \phi - \theta_c) + b^2}}{\sqrt{d^2c^2 + 2dec \cos(\theta_d + \phi - \theta_e) + e^2}} \leq W_g, \quad (\text{A.46})$$

y elevando los dos términos de la inecuación al cuadrado se obtiene

$$\frac{a^2c^2 + 2abc \cos(\theta_a + \phi - \theta_c) + b^2}{d^2c^2 + 2dec \cos(\theta_d + \phi - \theta_e) + e^2} \leq W^2; \quad (\text{A.47})$$

ecuación que puede ser expresada según

$$c^2 \left(d^2 - \frac{a^2}{W_g^2} \right) + c \left(2de \cos(\theta_d + \phi - \theta_e) - \frac{2ab}{W_g^2} \cos(\theta_a + \phi - \theta_c) \right) + \left(e^2 - \frac{b^2}{W_g^2} \right) \geq 0 \quad (\text{A.48})$$

Compruébese, a modo de validación, cómo la inecuación anterior coincide con la obtenida para el rechazo de perturbaciones si: $A = 0$, $B = p_d(s)$, $D = p(s)$, $E = 1$; y con la obtenida para la estabilidad robusta si: $A = p(s)$, $B = 0$, $D = p(s)$, $E = 1$.

Seguimiento de referencias

Los contornos de seguimiento de referencias presentan una estrategia de diseño diferente a la empleada en los casos anteriores. Esto se debe a que conceptualmente representan un problema completamente diferente. Compruébese cómo los contornos de estabilidad y rechazo de perturbaciones corresponden con la limitación en módulo de una función frecuencial, mientras que los contornos de seguimiento de referencias garantizan que una función de lazo cerrado pueda situarse entre dos cotas, hecho que implica satisfacer

$$\frac{\underset{\varphi}{\text{máx}} \{|T(j\omega)|\}}{\underset{\varphi}{\text{mín}} \{|T(j\omega)|\}} \leq \delta_t(\omega). \quad (\text{A.49})$$

En lugar de obtener el máximo y mínimo de la función sensibilidad complementaria T , el cálculo se realiza garantizando que cualquier pareja de plantas p_u y p_v pertenecientes al espacio de la incertidumbre \mathcal{Q} discretizado, cumple con la condición anterior. Es decir, la condición (??) es garantizada si cualquier pareja de plantas dentro del espacio de incertidumbre \mathcal{Q} cumple

$$\frac{|T_u(j\omega)|}{|T_v(j\omega)|} \leq \delta_t(\omega). \quad (\text{A.50})$$

Para obtener la inecuación cuadrática se substituye T_u y T_v por su expresión desarrollada

$$\left| \frac{p_u(j\omega) (1 + p_v(j\omega)c(j\omega))}{p_v(j\omega) (1 + p_u(j\omega)c(j\omega))} \right| = \delta_t(\omega). \quad (\text{A.51})$$

inecuación que puede ser expresada según

$$\left| \frac{(1 + p_v(j\omega)c(j\omega))}{(1 + p_u(j\omega)c(j\omega))} \right| \leq \delta_t(\omega) \frac{p_v}{p_u}, \quad (\text{A.52})$$

El módulo del numerador esta determinado por

$$|1 + p_v c| = \sqrt{p_v^2 c^2 + 2p_v c \cos(\theta_v + \phi) + 1}, \quad (\text{A.53})$$

y el del denominador por

$$|1 + p_u c| = \sqrt{p_u^2 c^2 + 2p_u c \cos(\theta_u + \phi) + 1}. \quad (\text{A.54})$$

Elevando los dos términos de la inecuación al cuadrado se obtiene

$$\frac{p_v^2 c^2 + 2p_v c \cos(\theta_v + \phi) + 1}{p_u^2 c^2 + 2p_u c \cos(\theta_u + \phi) + 1} = \delta_t^2(\omega) \frac{p_v^2}{p_u^2}, \quad (\text{A.55})$$

inecuación que al reorganizarse en función c puede expresarse como

$$c^2 p_u^2 \left(1 - \frac{1}{\delta_t^2} \right) + 2c p_u \left(\cos(\theta_u + \phi) - \frac{p_u}{p_v \delta_t^2} \cos(\theta_v + \phi) \right) + \left(1 - \frac{p_u^2}{p_v \delta_t^2} \right) \geq 0. \quad (\text{A.56})$$

Las inecuaciones presentadas son la base de la *Terasoft QFT Toolbox* para *Matlab* y corresponden con las más empleadas en la actualidad. Sin embargo existen otros trabajos referentes al calculo de contornos QFT [15, 142, 164, 122, 123, 111, 106]. En ellos, se buscan soluciones para la mejora de la precisión y la eficiencia computacional. Pese a ello, su impacto ha sido reducido ya que en la mayor parte de los casos se emplean los algoritmos presentados anteriormente. No obstante, son un claro indicativo de la importancia que tienen los contornos de diseño dentro del paradigma QFT.

A.2.4 Diseño del controlador

Calculados los contornos de todas las especificaciones de diseño, puede obtenerse el contorno $\beta(\omega)$ que contiene las restricciones a cumplir por la función de lazo abierto nominal l_o . Este contorno se obtiene mediante la intersección de los contornos obtenidos para cada una de las especificaciones de diseño. Obtenido $\beta(\omega)$ se efectúa el *loop-shaping* del controlador en el plano de *Nichols*. Para ello puede emplearse la herramienta interactiva facilitada por la *Terasoft QFT Toolbox*.

El procedimiento de diseño consiste en situar $l_o(j\omega)$ en cada frecuencia discreta sobre el contorno de diseño. De este modo, se garantiza el cumplimiento de la especificación de control en lazo cerrado empleando un controlador de ganancia mínima. En alta frecuencia los contornos de rechazo de perturbaciones y *tracking* se relajan, momento a partir del cual dominan la especificación que garantiza la estabilidad robusta. Alcanzada esta frecuencia, denominada frecuencia de *roll-off*, debe practicarse una brusca reducción de la magnitud de $l_o(j\omega)$, aproximándose lo más posible al contorno de estabilidad. De este modo, se consigue que $l(j\omega)$ presente el *ideal bode step* [61, 93] en alta frecuencia, optimizando el diseño del controlador. Un ejemplo de diseño se muestra en la [Figura A.9](#).

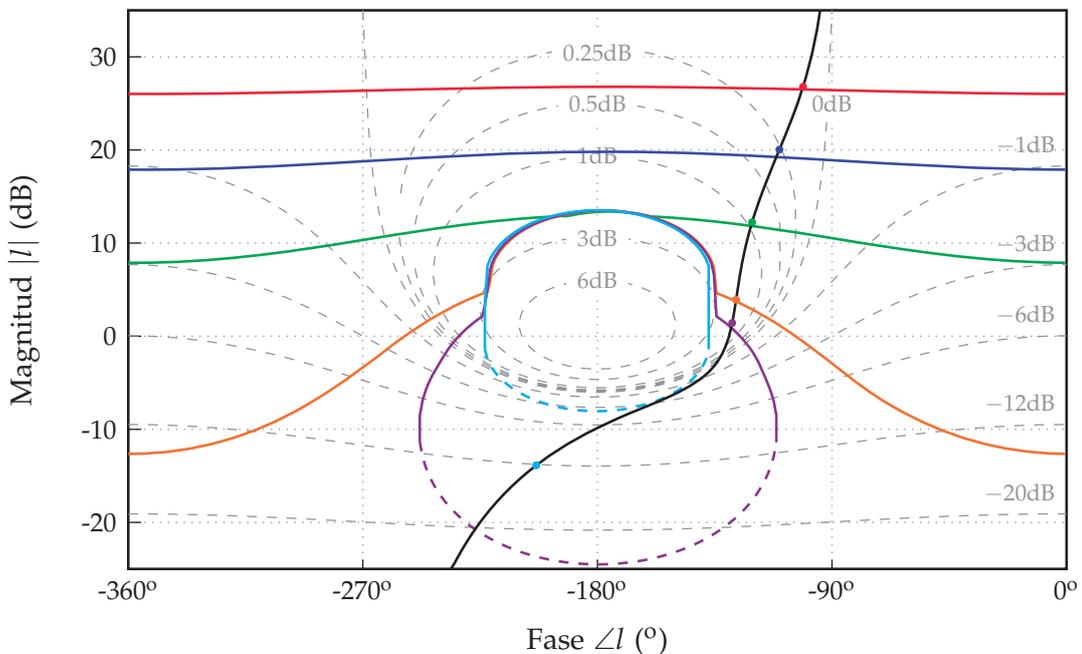


Figura A.9: *Loop-shaping* de controladores.

A.2.5 Diseño del prefiltro

El prefiltro $f(s)$ sólo debe ser diseñado en el caso de existir especificaciones para el seguimiento robusto de referencias. En estos casos, el controlador de realimentación $c(s)$ ha sido diseñado para garantizar que la incertidumbre en magnitud de la sensibilidad complementaria $T(j\omega)$ sea igual o inferior a la distancia $\delta_t(\omega)$ entre las cotas superior e inferior. Por lo tanto, la labor del prefiltro es situar $T(j\omega)$ entre dichas cotas

$$|f(j\omega)| \max_{\varphi} \{|T(j\omega)|\} \leq W_u(\omega) \quad (\text{A.57a})$$

$$|f(j\omega)| \min_{\varphi} \{|T(j\omega)|\} \geq W_l(\omega). \quad (\text{A.57b})$$

Véase como este proceso sólo depende de la magnitud del prefiltro, ya que su fase no influye en la especificación. Este hecho permite afrontar el diseño empleando diagramas de Bode de magnitud. El procedimiento se lleva a cabo definiendo un vector de frecuencias discretas con gran densidad de puntos. A continuación se calculan las magnitudes de las respuestas frecuenciales del conjunto $T(j\omega)$ y se obtiene el valor máximo $|T_{\text{máx}}(j\omega)|$ y mínimo $|T_{\text{mín}}(j\omega)|$ para cada frecuencia discreta. Las magnitudes se trazan junto con las cotas W_u y W_l en un diagrama de Bode de magnitud (ver [Figura A.10](#)). El último paso de diseño consiste en diseñar $f(j\omega)$ para modificar las respuestas frecuenciales $|T_{\text{máx}}(j\omega)|$ y $|T_{\text{mín}}(j\omega)|$ de forma que se sitúen dentro de las cotas de diseño.

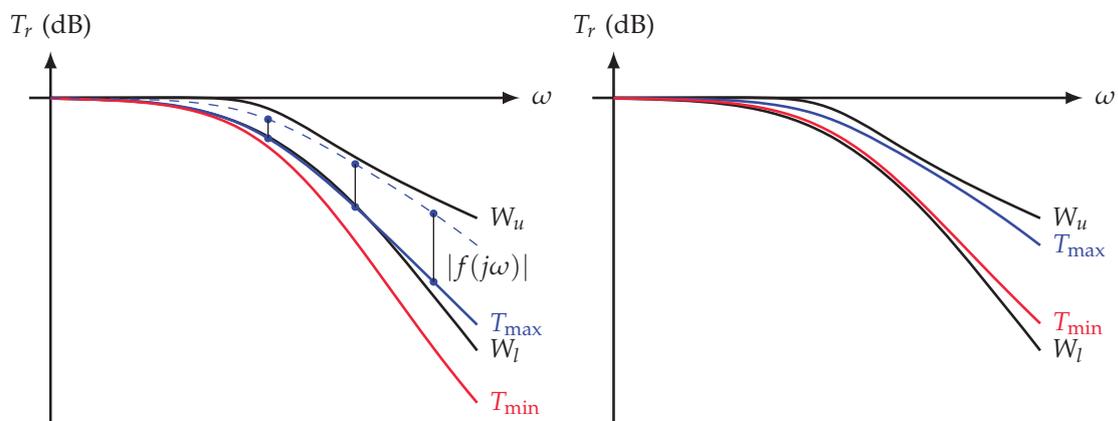


Figura A.10: Diseño del prefiltro. A la izquierda la situación de partida tras diseñar $c(s)$, en la derecha el resultado final tras el diseño de $f(s)$.

A.2.6 Validación de diseños

Como ya se ha indicado en secciones anteriores, QFT lleva a cabo el diseño empleando una doble discretización del problema de control. Por un lado, emplea un número finito de plantas dentro del espacio de la incertidumbre \mathcal{Q} , que es discretizado para poder ser empleado por las inecuaciones cuadráticas⁷. Por otro lado, se calculan contornos de diseño para un conjunto de frecuencias discretas dentro de Ω . Queda claro que el diseño realizado cumplirá las especificaciones de control en lazo cerrado para las plantas y frecuencias seleccionadas, pero debemos garantizar que dichas condiciones se satisfacen en todo el espectro frecuencial y para todo el espacio de incertidumbre \mathcal{Q} . Para ello, es necesario el empleo de una última etapa en la que se validen los diseños realizados.

El primer paso para realizar la validación consiste en discretizar la incertidumbre \mathcal{Q} empleando vectores q_i con una mayor densidad de valores. De este modo se garantiza que el *template* discreto representa de forma fiel al *template* continuo. En un segundo paso, conocidos $c(s)$ y $f(s)$ se calculan las respuestas frecuenciales del sistema en lazo cerrado para las diferentes especificaciones. En este paso se emplea un vector de frecuencias discretas mucho más denso que el empleado en la etapa de diseño. Téngase en cuenta que éste es un proceso sencillo que requiere de un coste computacional reducido. Una vez calculado el conjunto de respuestas frecuenciales para cada especificación se obtiene el valor máximo del conjunto para cada una de las frecuencias estudiadas. En el caso de especificaciones de seguimiento de referencias se registra el valor máximo y el mínimo, puesto que la especificación acota la función entre dos cotas. Por último, se representan los valores calculados junto con la magnitud de la especificación. De este modo se puede verificar a simple vista si el sistema de control cumple con las condiciones de diseño impuestas.

Se debe tener en cuenta que la verificación, garantiza el cumplimiento de las restricciones en el dominio de la frecuencia. La no correspondencia entre tiempo y frecuencia impide garantizar que las respuestas temporales obtenidas en lazo cerrado correspondan exactamente con las planteadas para la obtención de los modelos de especificación. Todo ello

⁷ Téngase en cuenta que esta discretización no se producía en el cálculo de contornos de diseño de forma manual

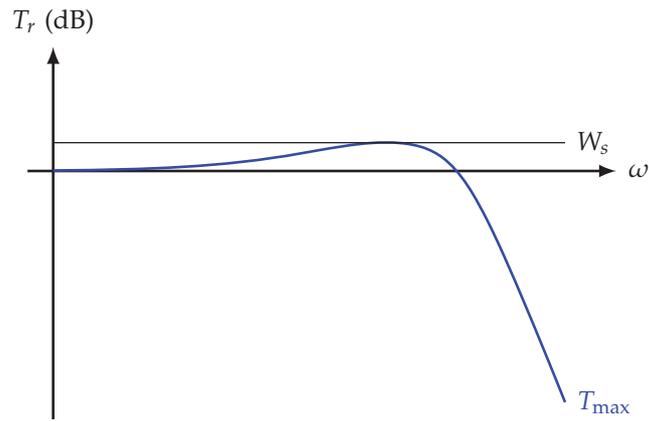


Figura A.11: Validación de diseños QFT. Validación del cumplimiento de la especificación de estabilidad robusta.

pese a haber empleado modelos temporales para definir las especificaciones frecuenciales.

B

ESTABILIDAD EN SISTEMAS SISO

En el presente capítulo se presentan conceptos referentes a la estabilidad en lazo cerrado de los sistemas SISO. Estos conceptos han sido ampliamente desarrollados en la literatura científica, y por lo tanto, no presentan innovación alguna. Sin embargo, se ha considerado oportuno incorporarlos en el documento dado que todos los desarrollos presentados en el [Capítulo 5](#) se fundamentan en dichos conceptos. Los conceptos presentados a continuación pueden facilitar en gran medida la comprensión de los fundamentos expuestos en [Capítulo 5](#).

B.1 APLICACIÓN DEL CRITERIO DE NYQUIST A SISTEMAS SISO

Una de las formas más habituales de determinar la estabilidad de un sistema SISO es emplear el criterio de Nyquist. Dado un sistema de control en lazo cerrado con realimentación unitaria, el criterio de Nyquist permite conocer el número de polos inestables en lazo cerrado analizando la función de transferencia de lazo abierto $l(s) = c(s)p(s)$. El criterio se define como

$$Z = N + P, \tag{B.1}$$

donde Z corresponde con el número de polos inestables en lazo cerrado, P corresponde con el número de polos inestables en lazo abierto y N con el número de rodeos al punto crítico de estabilidad $(-1, j0)$ en el plano (u, jv) . Cuando $l(s)$ es estable en lazo abierto¹ ($P = 0$), el criterio puede simplificarse. En estos casos la estabilidad puede determinarse analizando únicamente el contorno imagen de $l(j\omega)$. Dado que $P = 0$, se cumple la relación $Z = N + 0$, y por lo tanto, el sistema en lazo cerrado presentará tantos polos inestables como rodeos de $l(j\omega)$ al punto -1 .

¹ Presenta todos sus polos en el semiplano izquierdo

Es decir, el sistema será estable siempre que el contorno imagen de $l(j\omega)$ no presente rodeos al punto crítico de estabilidad. En la [Figura B.1](#) se muestran tres ejemplos de sistema SISO, en el que $l_1(j\omega)$ y $l_2(j\omega)$ corresponden con sistemas estables en lazo cerrado y $l_3(j\omega)$ con un sistema inestable en lazo cerrado.

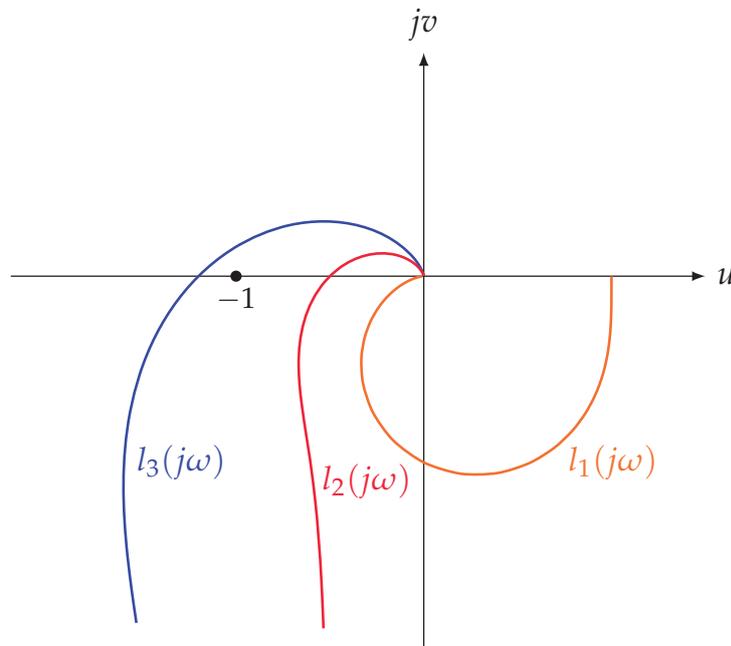


Figura B.1: Criterio de Nyquist para tres funciones $l_i(j\omega)$.

Para garantizar cierta robustez en los diseños, tradicionalmente se han empleado márgenes de estabilidad relativa. Estos márgenes definen una región de exclusión próxima al punto crítico de estabilidad. Garantizando que el contorno $l(j\omega)$ no penetra en el entorno de exclusión, puede garantizarse que el sistema seguirá siendo estable en lazo cerrado, aunque éste presente pequeñas desviaciones (incertidumbre desconocida, no incluida en la incertidumbre paramétrica que se tiene en cuenta en el diseño robusto). Tradicionalmente estos márgenes de estabilidad se han definido como margen de ganancia (MG) y margen de fase (MF). El margen de fase determina el ángulo formado entre $l(j\omega)$ y el eje real u en la pulsación de cruce de ganancia ($|l(j\omega_{cg})| = 1$). El margen de ganancia se define como la inversa del módulo de $l(j\omega)$ en la pulsación de cruce de fase ($\angle l(j\omega_{cf}) = -180^\circ$). Para llevar a cabo un diseño robusto pueden combinarse ambos márgenes como se indica en la [Figura B.2](#), donde se han definido $MF = 45^\circ$ y $MG = 2$.

Las estrategias de control robusto QFT, establecen restricciones en la magnitud de las funciones de lazo cerrado (ver [Apéndice A](#)), y poste-

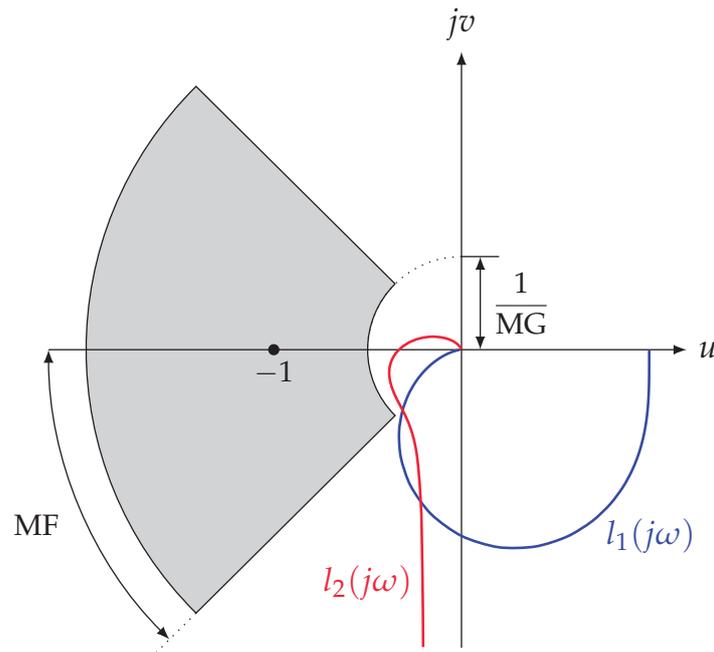


Figura B.2: Región de exclusión para garantizar de forma simultánea un margen de fase y ganancia.

riormente estas restricciones se traducen en condiciones a cumplir por la función de lazo abierto $l(j\omega)$. La estabilidad del sistema en lazo cerrado puede garantizarse restringiendo la magnitud de la función sensibilidad

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + l(j\omega)}, \quad (\text{B.2})$$

o la sensibilidad complementaria

$$T(j\omega) = \frac{l(j\omega)}{1 + l(j\omega)}. \quad (\text{B.3})$$

A continuación, se estudian las condiciones a cumplir por $|S(j\omega)|$ y $|T(j\omega)|$ para garantizar unos márgenes de estabilidad relativa determinados.

B.1.1 Sensibilidad y estabilidad

En la [Figura B.3](#) se muestra un esquema en el que se relaciona la función de lazo abierto $l(j\omega)$ con el punto crítico de estabilidad. En ella se define el parámetro $\alpha(\omega)$ según

$$\alpha(\omega) = |1 + l(j\omega)|. \quad (\text{B.4})$$

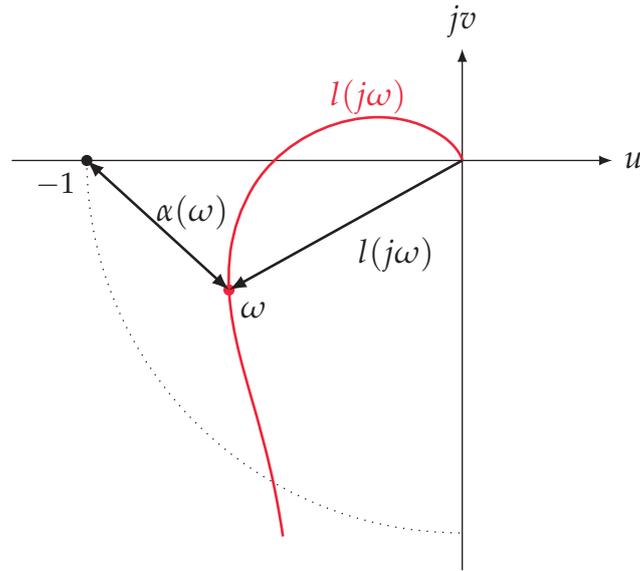


Figura B.3: Estabilidad en base a la función sensibilidad.

Es decir, $\alpha(\omega)$ corresponde con la distancia de $l(j\omega)$ al punto crítico de estabilidad, y a su vez, con el módulo del denominador de la función sensibilidad. Por lo tanto, acotando la función sensibilidad mediante el empleo de una cota μ_s

$$|S(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + l(j\omega)} \right| \leq \mu_s, \quad (\text{B.5})$$

puede definirse una región de exclusión que impide que $l(j\omega)$ se aproxime al punto -1 (ver [Figura B.4](#)). La distancia mínima $\alpha(\omega)$ estará determinada por $\mu_s^{-1} = \alpha_\mu$. Por lo tanto, puede garantizarse la estabilidad del sistema empleando la inecuación (B.5) y una adecuada selección del parámetro μ_s .

En la [Figura B.4](#), se muestra la relación existente entre el parámetro μ_s y los márgenes de estabilidad relativa. Por un lado, el margen de ganancia puede obtenerse a partir de la magnitud de la función de lazo abierto en la pulsación de cruce de fase, que en el peor de los casos cumplirá

$$|l(j\omega_{cf})|_{\text{máx}} = 1 - \alpha_\mu. \quad (\text{B.6})$$

Es decir, empleando la inecuación (B.5) podemos garantizar un margen de ganancia mínimo

$$MG \geq \frac{1}{1 - \alpha_\mu} = \frac{\mu_s}{\mu_s - 1}, \quad \forall \mu_s > 1. \quad (\text{B.7})$$

Por lo tanto, si se desea establecer una especificación de diseño que garantice un cierto margen de ganancia mínimo, debe emplearse una cota

$$\mu_s = \frac{MG_{\text{mín}}}{MG_{\text{mín}} - 1}, \quad \forall MG_{\text{mín}} > 1; \tag{B.8}$$

condición que debe modificarse por

$$\mu_s = \frac{MG_{\text{mín,dB}}}{10^{MG_{\text{mín,dB}}/20} - 1}, \quad \forall MG_{\text{mín,dB}} > 0; \tag{B.9}$$

cuando el margen de ganancia es expresado en dBs.

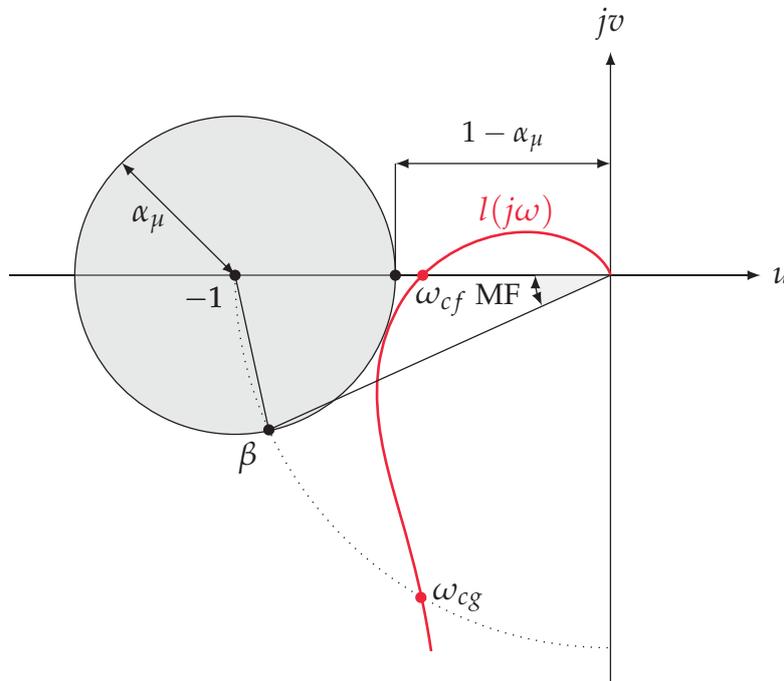


Figura B.4: Márgenes de estabilidad relativa definidos mediante la función sensibilidad.

El margen de fase puede resolverse aplicando el teorema del seno al triángulo formado por los puntos $(0,0)$, $(-1,0)$ y β (ver [Figura B.4](#))². Conocidas las magnitudes de los tres lados de dicho triángulo $(1, 1, \alpha_\mu)$, el margen de fase mínimo queda determinado por

$$MF \geq \arccos \frac{2 - \alpha_\mu^2}{2}, \tag{B.10}$$

² β corresponde con la intersección del círculo definido por α_μ y una circunferencia unitaria centrada en el origen

de donde se obtiene la ecuación para la selección del parámetro α_μ que garantiza un cierto margen de fase

$$\alpha_\mu = \sqrt{2 - 2 \cos(MF_{\text{mín}})}, \quad (\text{B.11})$$

La ecuación anterior puede simplificarse empleando la fórmula del ángulo medio, que permite simplificar (B.10), dando lugar a

$$MF \geq 2 \arcsin \frac{\alpha_\mu}{2}, \quad (\text{B.12})$$

Dado que en (B.5) se acota el parámetro μ_s , puede garantizarse que el margen de fase cumplirá

$$MF \geq 2 \arcsin \frac{1}{2\mu_s}, \quad \forall \mu_s > 1; \quad (\text{B.13})$$

y en las tareas de diseño se empleará

$$\mu_s \geq \frac{1}{2 \sin \frac{MF_{\text{mín}}}{2}}, \quad \forall MF_{\text{mín}} > 0; \quad (\text{B.14})$$

para la selección de dicho parámetro en función del margen de fase mínimo deseado.

B.1.2 Sensibilidad complementaria y estabilidad

Del mismo modo que ocurre con la función sensibilidad, limitando la magnitud de la función sensibilidad complementaria mediante el empleo del parámetro μ_t en la inecuación

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{l(j\omega)}{1 + l(j\omega)} \right| \leq \mu_t, \quad (\text{B.15})$$

podemos garantizar el cumplimiento de unos ciertos márgenes de estabilidad relativa.

Recuérdese que los puntos del plano (u, jv) que dan lugar a funciones de lazo cerrado con magnitud constante, son conocidos como círculos M (*M-circles*), y están definidos por

$$\left(u - \frac{\mu_t^2}{1 - \mu_t^2} \right)^2 + v^2 = \left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t^2} \right)^2, \quad (\text{B.16})$$

ecuación que corresponde con la de una circunferencia centrada en el punto

$$u = \frac{\mu_t^2}{1 - \mu_t^2}, \quad v = 0 \quad (\text{B.17})$$

y con radio

$$r = \frac{\mu_t}{1 - \mu_t^2}. \quad (\text{B.18})$$

Los círculos M de magnitud superior a la unidad corresponden con circunferencias cuyo centro se aproxima a -1 cuanto mayor es la magnitud de lazo cerrado μ_t . Del mismo modo, el radio de dichas circunferencias decrece con el aumento de la magnitud de lazo cerrado. Es decir, limitar la magnitud de lazo cerrado según (B.15) (se considera $\mu_t \geq 1$) implica definir una región de exclusión en el plano de Nyquist determinada por el círculo M obtenido para la magnitud μ_t (ver Figura B.6), con lo que se evita la posibilidad de que aparezcan rodeos al punto -1 .

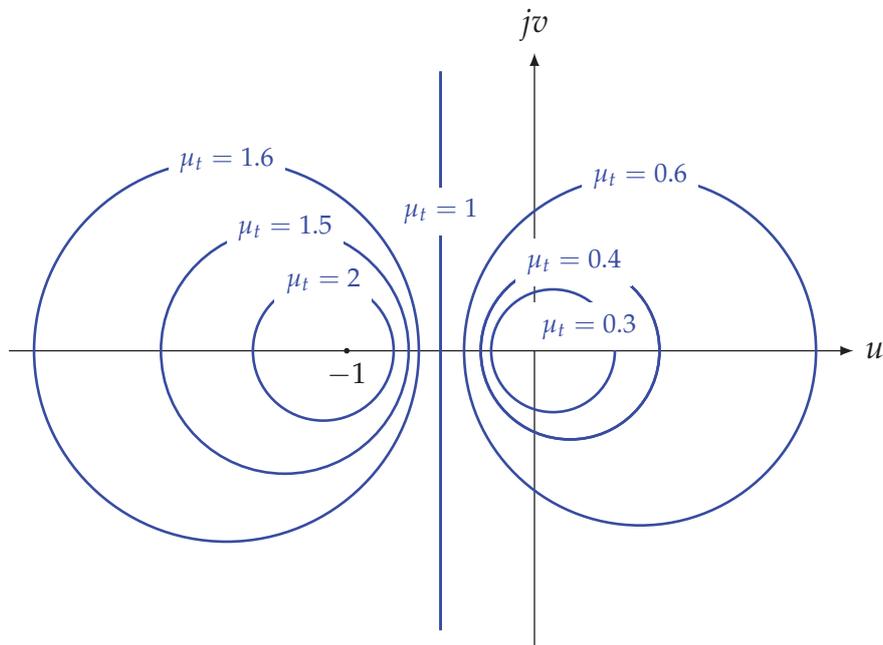


Figura B.5: Círculos M en el plano de Re-Im.

Para seleccionar de forma adecuada el parámetro μ_t es necesario estudiar la relación entre éste y los márgenes de estabilidad relativa. El margen de ganancia puede obtenerse de forma sencilla calculando la inversa de la distancia máxima al eje jv en la pulsación de cruce de ga-

nancia. Conocido el centro de la circunferencia y su radio, el módulo de la distancia al eje queda determinada por

$$\left| \frac{\mu_t^2}{1 - \mu_t^2} \right| - \left| \frac{\mu_t}{1 - \mu_t^2} \right|. \quad (\text{B.19})$$

Considerando para μ_t valores mayores a la unidad, se puede simplificar la ecuación anterior, obteniendo

$$\frac{\mu_t^2 - \mu_t}{1 - \mu_t^2} = \frac{\mu_t(\mu_t - 1)}{(1 - \mu_t)(1 + \mu_t)} = \frac{\mu_t}{1 + \mu_t}, \quad \forall \mu_t > 1. \quad (\text{B.20})$$

Ecuación que corresponde con la inversa del margen de ganancia. Es decir, empleando (B.15) se garantiza un margen de ganancia mínimo

$$MG_{\text{mín}} = \frac{\mu_t + 1}{\mu_t}, \quad \forall \mu_t > 1. \quad (\text{B.21})$$

Por lo tanto, si se desea establecer una especificación de diseño que garantice un cierto margen de ganancia mínimo, debe emplearse una cota

$$\mu_t = \frac{1}{MG_{\text{mín}} - 1}, \quad \forall MG_{\text{mín}} > 1; \quad (\text{B.22})$$

condición que debe modificarse por

$$\mu_t = \frac{1}{10^{MG_{\text{mín,dB}}/20} - 1}, \quad \forall MG_{\text{mín,dB}} > 0; \quad (\text{B.23})$$

cuando el margen de ganancia es expresado en dBs.

El margen de fase debe obtenerse siguiendo el esquema de la [Figura B.6](#). Para ello se calcula el eje radical que define la intersección entre el círculo unitario centrado en el origen y el círculo M establecido como región de exclusión. De este modo se obtiene la recta

$$u = \frac{\mu_t^4 - 1.5\mu_t^2 + 1}{(1 - \mu_t^2)^2 \mu_t^2}, \quad v = 0. \quad (\text{B.24})$$

La recta radical presenta un valor constante para el eje real, que simplificado corresponde con

$$u = \frac{\mu_t^4 - 1.5\mu_t^2 + 1}{(1 - \mu_t^2)^2 \mu_t^2} = \frac{2(\mu_t^2 - 1)(\mu_t^2 - 0.5)}{(1 - \mu_t^2)^2 \mu_t^2} = \frac{1}{2\mu_t^2} - 1. \quad (\text{B.25})$$

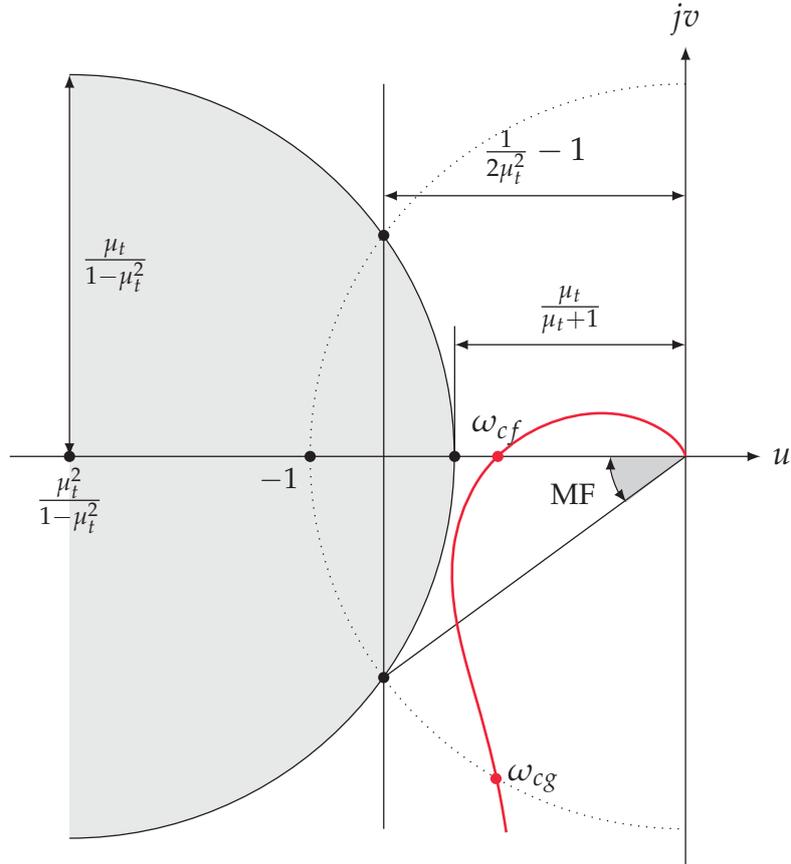


Figura B.6: Márgenes de estabilidad relativa definidos mediante la función sensibilidad complementaria.

Aplicando trigonometría al triángulo formado por el punto intersección de las dos circunferencias, el origen de coordenadas y el punto crítico de estabilidad, se obtiene la expresión del margen de fase

$$MF \geq \arccos \left(\frac{1}{2\mu_t^2} - 1 \right). \tag{B.26}$$

Si se desea establecer una especificación de diseño que garantice un cierto margen de fase, debe emplearse una cota superior

$$\mu_t = \frac{1}{\sqrt{2 \cos(MF_{min}) + 2}} \tag{B.27}$$

Como en el caso de la sensibilidad, pueden simplificarse las ecuaciones anteriores aplicando la fórmula del ángulo medio, dando lugar a una nueva expresión para el cálculo del margen de fase

$$MF \geq \frac{1}{2 \arccos \left(\frac{1}{2\mu_t} \right)}, \forall \mu_t > 1; \tag{B.28}$$

y para la selección del parámetro μ_t que garantiza un margen de fase mínimo

$$\mu_t = \frac{1}{2 \cos\left(\frac{MF_{min}}{2}\right)}, \quad \forall MF_{min} > 0. \quad (\text{B.29})$$

Téngase en cuenta que tanto la sensibilidad como la sensibilidad complementaria permiten establecer restricciones en el sistema que garantizan la estabilidad del mismo. No obstante, dichas condiciones no son equivalentes, ya que definen regiones de exclusión diferentes. Véase como ejemplo el mostrado en la [Figura B.7](#), en el que se emplea $\mu_s = 2$ en la inecuación (B.5) y $\mu_t = 3$ en la inecuación (B.15). Como puede comprobarse en la [Figura B.7](#), las dos restricciones garantizan un margen de ganancia mínimo $MG \geq 1.5$, ya que cortan el eje real en el mismo punto. Por el contrario, el margen de fase no coincide para las dos restricciones, ya que cortan la circunferencia de radio unitario en diferentes puntos. En este caso, el margen de fase obtenido restringiendo la función sensibilidad es de $MF \geq 19.18^\circ$, mientras que el obtenido acotando la sensibilidad complementaria es de $MF \geq 28.95^\circ$. Este hecho es debido a que la acotación de la función sensibilidad complementaria implica una mayor región de exclusión. De hecho, en el ejemplo mostrado en la [Figura B.7](#), puede comprobarse como $l(j\omega)$ cumple la condición impuesta para S , pero no la impuesta para T .

Como norma general deberá seguirse la siguiente regla. Si se acota el margen de ganancia con la función sensibilidad se obtendrá un menor margen de fase que si se acota con la sensibilidad complementaria. Del mismo modo, si se acota el margen de fase con la función sensibilidad complementaria, se obtendrá un margen de ganancia mínimo inferior al obtenido si se acota dicho margen empleando la función sensibilidad.

B.2 ESTABILIDAD EN SISTEMAS CON POLOS INESTABLES

El estudio realizado en las secciones anteriores es válido si el sistema en lazo abierto no presenta polos inestables. En caso contrario, la estabilidad no puede garantizarse empleando únicamente regiones de exclusión próximas al punto crítico de estabilidad. Véase como en estos casos para que el criterio de Nyquist cumpla $Z = 0$, es necesario garantizar³ $N = -P$. Es decir, el sistema será estable si se presentan $-P$ rodeos al

³ Recuérdese que Z corresponde con el número de polos inestables en lazo cerrado, P con el número de polos inestables en lazo abierto y N con número de rodeos al punto -1 .

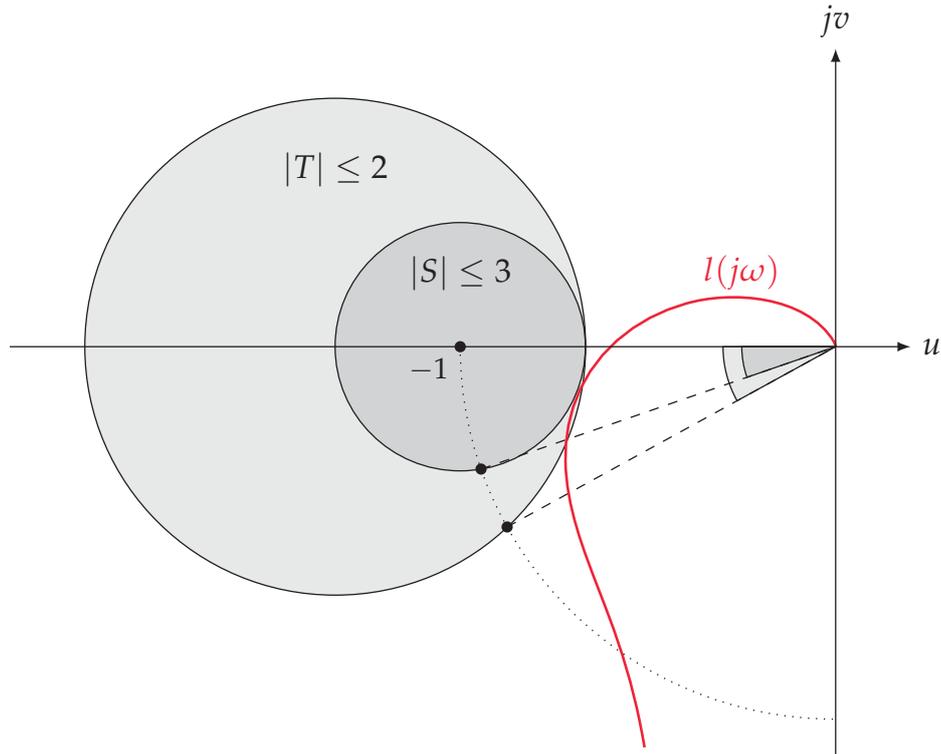


Figura B.7: Comparación de las regiones de exclusión generadas mediante la acotación de S y T .

punto -1 . Si se emplea en el contorno origen⁴ del diagrama de Nyquist un sentido como el de las agujas del reloj (frecuencias crecientes), serán necesarios P rodeos al punto crítico de estabilidad en sentido contrario al de las agujas del reloj para estabilizar el sistema.

A efectos prácticos, la condición descrita en el párrafo anterior puede garantizarse mediante un adecuado diseño de $l(j\omega)$. Los rodeos negativos (en contra de las agujas del reloj) al punto -1 son logrados atravesando el eje real a la izquierda del punto -1 . Es decir, logrando que $l(j\omega)$ pase del segundo al tercer cuadrante dejando al punto -1 a su izquierda en el sentido creciente de frecuencias. Para que el criterio sea aplicado de forma correcta deberá partirse en baja frecuencia de $\angle l(j0) \leq -180^\circ$ aumentando su fase hasta alcanzar $\angle l(j\omega) \geq -180^\circ$, con una magnitud superior a la unidad. Llegados a este punto, la estabilidad robusta es garantizada como si de un sistema estable en lazo abierto se tratase. Es decir, se deberá evitar aproximarse al punto -1 respetándose unos

⁴ Contorno cerrado que abarca todo el semiplano derecho y que no pasa sobre ningún polo o cero.

ciertos márgenes, dado que en caso de rodearse se consideran rodeos positivos.

Las regiones de exclusión mostradas en la sección anterior permitirán garantizar la estabilidad robusta del sistema. La única precaución adicional es que en estos casos habrá que tenerse en cuenta que el área de exclusión deberá evitarse en dos puntos. Por un lado, en baja frecuencia deberá garantizarse que el corte con el eje real se realice antes de la zona de exclusión. Por otro lado, en alta frecuencia se deberá evitar la región próxima al punto -1 como en los casos anteriores.

En la [Figura B.8](#) se muestran dos sistemas que pese a presentar un polo inestable en lazo abierto, son estables en lazo cerrado. En ambos casos se observa como la región de exclusión es evitada por las ramas $l_1(j\omega)$ y $l_2(j\omega)$, garantizando los márgenes de estabilidad definidos mediante la acotación de la función sensibilidad. Véase como el corte con el eje real se produce a la izquierda del punto -1 , garantizando la existencia de un rodeo negativo que da lugar a $Z = -1 + 1 = 0$.

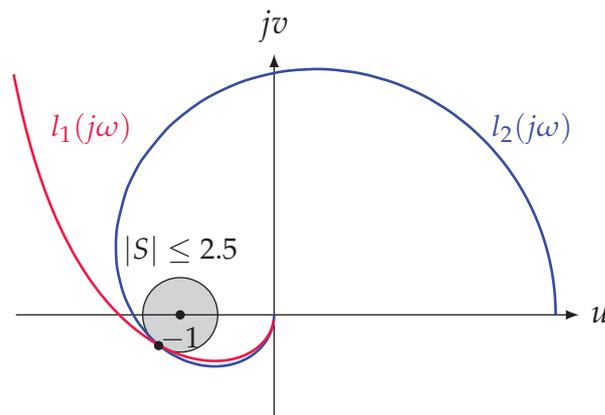


Figura B.8: Estabilidad robusta en sistemas con polos inestables.

Cuando los sistemas presentan varios polos inestables, el análisis y diseño empleando el diagrama de Nyquist se complica, puesto que en baja frecuencia $l(j\omega)$ presenta una fase $l(j0) = -a90^\circ - b180^\circ$; donde a corresponde con el número de integradores y b con el número de polos inestables. En estos casos la traza polar presenta varios rodeos en el plano (u, jv) , complicando su interpretación. Una alternativa que presenta una menor dificultad es el empleo del diagrama de Nichols en

modo multi-ventana⁵, permitiendo un mejor estudio de los cortes con respecto a la fase -180° .

B.3 ESTABILIDAD EN LOS DIAGRAMAS DE NICHOLS

Las conclusiones alcanzadas en las secciones anteriores sobre la estabilidad toman como elemento de análisis el diagrama de Nyquist. En concreto, el tramo correspondiente a $l(j\omega)$. El diagrama de Nichols, es una alternativa al diagrama de Nyquist, ya que representa la misma información pero empleando un plano de magnitud logarítmica frente a fase. Es decir, las condiciones estudiadas para el diagrama de Nyquist pueden extrapolarse de forma directa al diagrama de Nichols.

En el diagrama de Nichols, el punto crítico de estabilidad se sitúa en el punto $(0\text{dB}, -180^\circ)$, expresión polar del punto -1 . Por lo tanto, un sistema que no presenta polos inestables en lazo abierto, será estable en lazo cerrado si no rodea al punto $(0\text{dB}, -180^\circ)$. Se considera que la función de lazo abierto rodea al punto $(0\text{dB}, -180^\circ)$ si cruza la fase -180° con magnitud positiva.

Como en las secciones anteriores, puede establecerse una región de exclusión próxima al punto $(0\text{dB}, -180^\circ)$, de forma que se garanticen unos ciertos márgenes de fase y ganancia. Esta región de exclusión puede ser definida según criterios clásicos o estableciendo acotaciones en las magnitudes de la función sensibilidad y sensibilidad complementaria, tal como se mostró en la sección anterior. Bastará con evitar dichas regiones de exclusión bordeándolas por su parte inferior derecha para garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

La [Figura B.9](#) muestra un ejemplo de diseño estable, en el que se muestran dos regiones de exclusión. La primera corresponde con el círculo M de 3dB y acota la magnitud de la sensibilidad complementaria ($|T| \leq 1.41(3\text{dB})$). La segunda corresponde con una acotación de la magnitud de la sensibilidad, tal que $|S| \leq 2.4$. Puede comprobarse como ambas restricciones permiten garantizar un mismo margen de ganancia $MG = 4.68\text{dB}$, pero tal como ocurría en el diagrama de Nyquist, un mismo margen de ganancia configura una región de exclusión mayor si se emplea la función sensibilidad complementaria.

⁵ El modo multi-ventana o *multi-sheet* consiste en emplear un eje de fases con valores superiores a 0° e inferiores a -360° . Tradicionalmente el diagrama de Nichols es trazado en una única ventana con fases comprendidas entre $(0^\circ, -360^\circ]$.

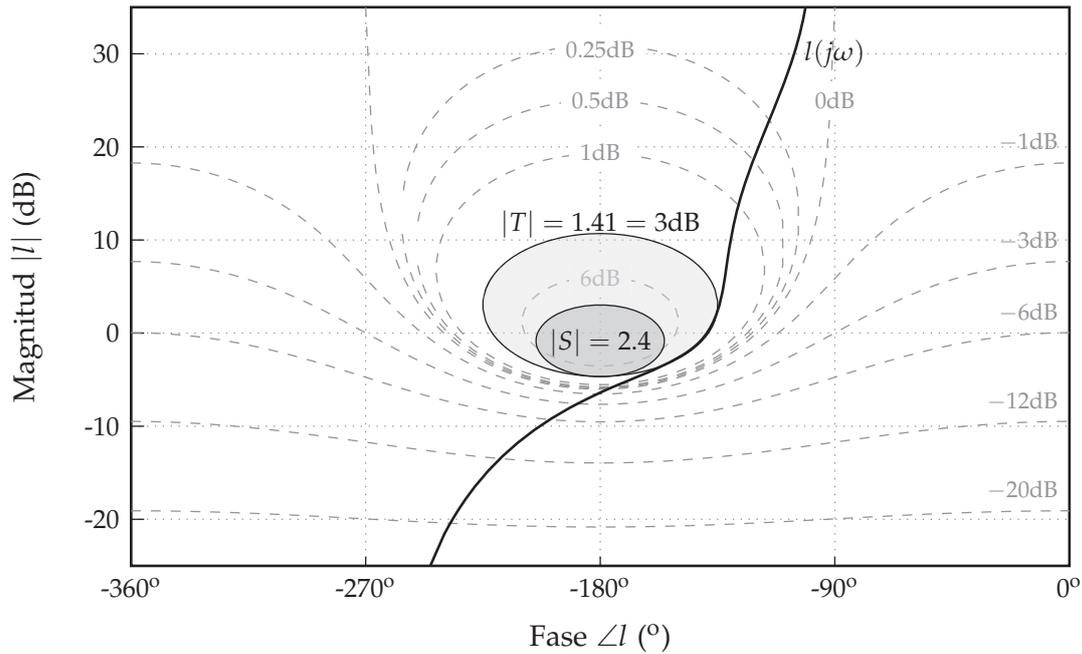


Figura B.9: Estabilidad robusta empleando el plano Mod-Arg.

Como se ha indicado en la [Sección B.2](#) la estabilización de los sistemas inestables es lograda cuando se producen tantos cortes con la fase -180° como número de polos inestables. Empleando diagramas de Nichols en modo multi-ventana o *multi sheet* pueden simplificarse las tareas de diseño, ya que la estabilidad será garantizada siempre que se rodee el círculo de estabilidad por su esquina inferior derecha. En estos casos el *loop-shaping* de la función de lazo abierto $l(j\omega)$ empezará en la fase $-a90^\circ - b180^\circ$ en baja frecuencia, y deberá mantenerse en una magnitud superior a 0dB hasta que su fase alcance $\angle l(j\omega) > -180^\circ$. Este proceso debe realizarse sin penetrar la región de exclusión definida por la especificación. Una vez alcanzada la región del plano de Nichols que comprende las fases mayores de -180° , se continúa con el diseño como si se tratase de un sistema con polos estables.

Véase como ejemplo un sistema que presenta un integrador y dos polos inestables. En baja frecuencia la función de lazo abierto $l(j0)$ parte de la fase: $-90^\circ \times 1 - 180^\circ \times 2 = -450^\circ$. Para estabilizar dicho sistema se emplea un controlador compuesto por dos ceros reales y dos polos complejo-conjugados, de forma que se satisfacen las condiciones expresadas en el párrafo anterior. En la [Figura B.10](#) puede observarse como los ceros permiten incrementar la fase del sistema hasta situarse a la derecha de -180° , todo ello sin penetrar en el *M-circle* de 3dB, empleado en este caso para garantizar la estabilidad del sistema. Una vez situados

a la derecha de la fase -180° , se añaden los polos complejo-conjugados para que $l(j\omega)$ bordee la región de exclusión.

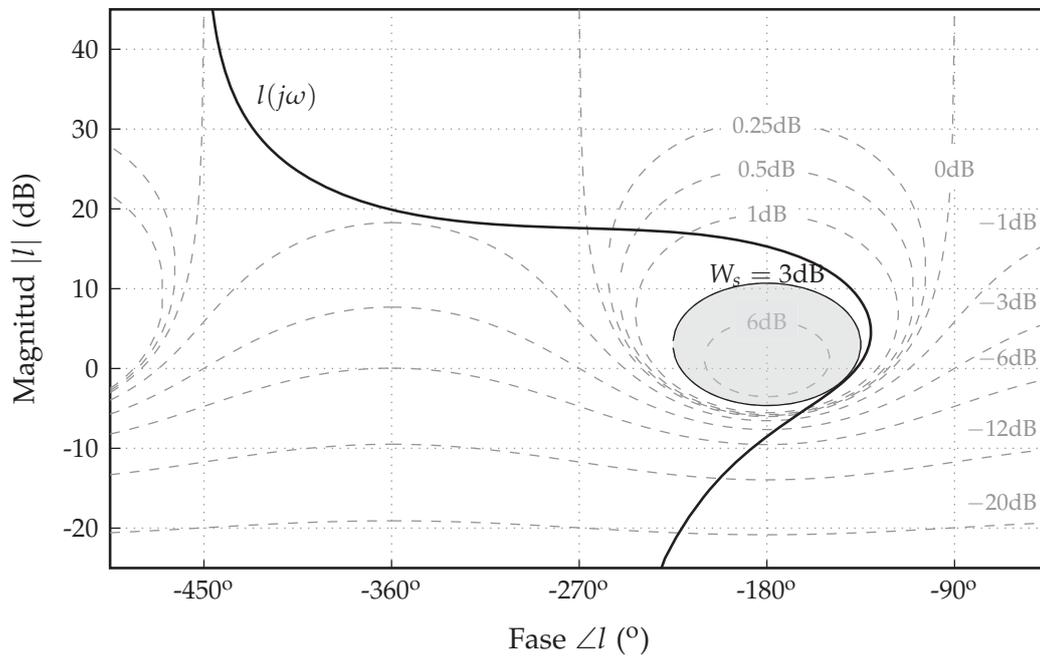


Figura B.10: Estabilización de sistema inestable en el plano Mod-Arg.

C

MODELO DEL REACTOR DOBLEMENTE REFRIGERADO

En este capítulo se presenta la información necesaria para llevar a cabo el dimensionado y modelado dinámico del reactor CSTR mostrado en el [Capítulo 10](#) y que ha sido omitida en dicho capítulo para simplificar su lectura.

El capítulo se encuentra organizado en tres secciones. La [Sección C.1](#) muestra las ecuaciones que rigen el comportamiento del reactor en régimen estacionario y que son empleadas para el dimensionado de la instalación y el cálculo de los diferentes puntos de operación. La [Sección C.2](#) muestra las ecuaciones que gobiernan el comportamiento dinámico. Por último la [Sección C.3](#) muestra los pasos necesarios para llevar a cabo la linearización del modelo no lineal en un punto de operación.

C.1 RÉGIMEN ESTACIONARIO

En régimen estacionario, el comportamiento del reactor queda determinado en función de una serie de ecuaciones, obtenidas para garantizar que se cumple el balance de masa y energía en el reactor. A continuación se muestran dichas ecuaciones y se describen las variables que intervienen en las mismas.

- Balance de masa del reactivo. En régimen permanente debe garantizarse que la masa que entra y la que sale del reactor debe mantenerse constante. Esta igualdad queda determinada por

$$FCa_{in} = FC_a + V_r k C_a, \quad (\text{C.1})$$

donde las variables corresponden con:

F Caudal de reactivo que entra en el reactor.

Ca_{in} Concentración del reactivo en la entrada del reactor.

C_a Concentración del reactivo en el reactor.

k Coeficiente de razón de reacción.

- Coeficiente de razón de reacción. Este coeficiente determina la velocidad con la que se efectúa la reacción, y está determinado por

$$k = k_0 e^{-\frac{E}{RT_r}}, \quad (\text{C.2})$$

donde:

E Energía de activación.

k_0 Factor pre-exponencial.

T_r Temperatura en el interior del reactor.

- Balance de energía en el contenido del reactor. Para que la reacción se mantenga en equilibrio, el calor generado en el reactor debe ser igual al extraído del mismo. En este punto debe tenerse en cuenta el combustible aportado, el caudal extraído y el calor evacuado por el sistema de refrigeración, dando lugar a

$$F\rho c_p T_{in} = F\rho c_p T_r + \lambda V_r k C_a + Q, \quad (\text{C.3})$$

donde:

T_{in} Temperatura del reactivo a la entrada.

c_p Calor específico del reactivo.

ρ Densidad del reactivo.

λ Calor de la reacción.

V_r Volumen del reactor.

Q Calor extraído por el sistema de refrigeración.

- Reparto del calor disipado entre chaqueta y serpentín. El calor extraído del reactor se reparte entre los dos elementos refrigeradores según

$$Q_j = (1 - \alpha)Q, \quad Q_c = \alpha Q, \quad (\text{C.4})$$

donde:

Q_j Calor extraído por el casquillo.

Q_c Calor extraído por el serpentín.

α Factor de reparto.

- Balance de energía en el casquillo. El calor extraído por el casquillo depende del intercambio a través de la pared que separa el mismo del contenido del reactor, y por lo tanto cumple

$$Q_j = UA_j(T_r - T_j), \quad (\text{C.5})$$

donde:

U Conductancia térmica del casquillo.

A_j Área de intercambio térmico entre el casquillo y el reactor.

T_j Temperatura del refrigerante almacenado en el casquillo.

Por otro lado, el calor extraído por el casquillo debe evacuarse a través del fluido refrigerante, cumpliendo

$$Q_j = F_j \rho_j c_{p_j} (T_j - T_{j_{in}}), \quad (\text{C.6})$$

donde:

F_j Flujo de refrigerante inyectado en el casquillo.

ρ_j Densidad del fluido refrigerante.

c_{p_j} Calor específico del fluido refrigerante.

$T_{j_{in}}$ Temperatura del refrigerante a la entrada del casquillo.

- Balance de energía en el serpentín. El calor absorbido por el serpentín debe coincidir con el calculado mediante la ecuación de reparto, cumpliendo

$$Q_c = UA_c \Delta T_{lm}, \quad (\text{C.7})$$

donde:

U Conductancia térmica del casquillo.

A_c Área de intercambio térmico del serpentín sumergido en el reactor.

ΔT_{lm} Incremento de temperatura media logarítmica.

El incremento de temperatura media logarítmica está determinado por

$$\Delta T_{lm} = \frac{T_c - T_{c_{in}}}{\ln \left(\frac{T_r - T_{c_{in}}}{T_r - T_c} \right)}. \quad (\text{C.8})$$

Como ocurría en el casquillo, el calor extraído por el serpentín debe evacuarse a través del fluido refrigerante, cumpliendo

$$Q_c = F_c \rho_c c_{p_c} (T_c - T_{c_{in}}), \quad (\text{C.9})$$

donde:

F_c Flujo de refrigerante inyectado en el serpentín.

ρ_c Densidad del fluido refrigerante.

c_{p_c} Calor específico del fluido refrigerante.

$T_{c_{in}}$ Temperatura del refrigerante a la entrada del serpentín.

C.2 MODELO DINÁMICO

Definidas las ecuaciones que gobiernan el sistema en régimen permanente, en esta sección se describen las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico del reactor. Estas ecuaciones serán empleadas en la [Sección C.3](#) para obtener modelos lineales de pequeña señal.

Para el modelo dinámico se emplean las mismas ecuaciones que en la [Sección C.1](#), pero en este caso se añaden los términos diferenciales. Las ecuaciones resultantes son:

- Balance de masa del reactivo. Se incorpora la dinámica a la ecuación (C.1).

$$\frac{dC_a(t)}{dt} = \frac{F(t)}{V_r} (C_{a_{in}}(t) - C_a(t)) - k(t)C_a(t). \quad (\text{C.10})$$

- Coeficiente de razón del reacción. Se incorpora la dinámica a la ecuación (C.2).

$$k(t) = k_0 e^{-\frac{E}{RT_r(t)}}. \quad (\text{C.11})$$

- Balance de energía en el contenido del reactor. La variación en la temperatura del reactor es expresada en función de cuatro balances de energía. Por un lado se modela la energía extraída a partir del flujo de entrada-salida, por otro lado la energía generada por la reacción química, y por último la energía intercambiada entre el contenido del reactor y los elementos refrigerantes. De este modo la ecuación dinámica resultante es

$$\begin{aligned} \frac{dT_r(t)}{dt} = & \frac{F(t)}{V_r} (T_{in}(t) - T_r(t)) - \frac{\lambda}{\rho c_p} k(t) C_a(t) \\ & - \frac{UA_j}{V_r \rho c_p} (T_r(t) - T_j(t)) - \frac{UA_c}{V_r \rho c_p} (T_r(t) - T_c(t)). \end{aligned} \quad (C.12)$$

- Balance de energía en el casquillo. El balance de energía en el casquillo es modelado como si dos depósitos a temperatura T_r y T_j intercambiasen calor a través de una pared metálica. Es decir, se considera la temperatura en el interior del casquillo constante. Además se incorpora en la ecuación el calor evacuado al renovar el flujo del casquillo. La ecuación dinámica resultante es

$$\frac{dT_j(t)}{dt} = \frac{UA_j}{V_j \rho c_{pj}} (T_r(t) - T_j(t)) - \frac{F_j}{V_j} (T_j(t) - T_{jin}(t)), \quad (C.13)$$

donde V_j se corresponde con el volumen de refrigerante almacenado en el casquillo.

- Balance de energía en el serpentín. El comportamiento del serpentín es no lineal y dependiente del incremento de la temperatura media logarítmica. Para simplificarlo, se ha empleado como modelo de comportamiento el mismo que el del casquillo, suponiendo que la temperatura en el interior del serpentín es constante y coincide con la de la salida de éste. De este modo la ecuación de comportamiento es

$$\frac{dT_c(t)}{dt} = \frac{UA_c}{V_c \rho c_{pc}} (T_r(t) - T_c(t)) - \frac{F_c}{V_c} (T_c(t) - T_{cin}(t)), \quad (C.14)$$

donde V_c se corresponde con el volumen de refrigerante almacenado en el serpentín.

Esta simplificación ha sido validada comparando el modelo obtenido a partir de ella, con un modelo no lineal y con un modelo

linealizado del serpentín que descompone el mismo en 100 nodos. Las respuestas aportadas por el modelo simplificado son muy similares a las del sistema no lineal y a las del modelo linealizado en 100 nodos. Por lo tanto, puede afirmarse que el modelo anterior es adecuado par el diseño del sistema de control.

C.3 MODELOS LINEALES DE PEQUEÑA SEÑAL

Como se ilustra en el [Capítulo 10](#), para poder llevar a cabo el diseño de los controladores que gobiernan el CSTR es necesario obtener modelos de pequeña señal que describan el comportamiento de éste en los alrededores de un punto de operación. Estos modelos se obtienen linealizando las ecuaciones que gobiernan el régimen dinámico, y que han sido presentadas en la [Sección C.2](#).

Dado que el sistema se ha linealizado en el entorno de un punto de operación, es necesario establecer una notación que nos permita determinar de forma clara cuando nos referimos a valores tomados en dicho punto de operación. En este caso se opta por emplear una barra horizontal sobre las variables « $\bar{}$ » para indicar que estas se encuentran referidas al punto de operación. Es decir, \bar{T}_r indica: *temperatura del reactor en el punto de operación*.

De acuerdo a las ecuaciones anteriores se identifican las siguientes cinco variables como entradas,

- Flujo reactivo $F(t)$
- Flujo refrigerante en el casquillo $F_j(t)$
- Flujo refrigerante en el serpentín $F_c(t)$
- Concentración del reactivo $C_{a_{in}}(t)$
- Temperatura de los fluidos de entrada (reactivo, refrigerante en el casquillo, refrigerante en el serpentín) $T_{in}(t)$

de las cuales tres son manipulables ($F(t)$, $F_j(t)$ y $F_c(t)$) y dos son no manipulables ($C_{a_{in}}(t)$ y $T_{in}(t)$), y por lo tanto corresponden con perturbaciones.

Se identifican como variables de estado del sistema

- Concentración en el reactor $c_a(t)$

- Temperatura en el reactor $T_r(t)$
- Temperatura en el casquillo $T_j(t)$
- Temperatura en el serpentín $T_c(t)$

Conocidas las variables de estado y las entradas de actuación/perturbación, se efectúan cambios de variable para expresar las variaciones con respecto al punto de operación:

- $\Delta C_a(t) = C_a(t) - \bar{C}_a$
- $\Delta T_r(t) = T_r(t) - \bar{T}_r$
- $\Delta T_j(t) = T_j(t) - \bar{T}_j$
- $\Delta T_c(t) = T_c(t) - \bar{T}_c$
- $\Delta F(t) = F(t) - \bar{F}$
- $\Delta F_j(t) = F_j(t) - \bar{F}_j$
- $\Delta F_c(t) = F_c(t) - \bar{F}_c$
- $\Delta C_{a_{in}}(t) = C_{a_{in}}(t) - \bar{C}_{a_{in}}$
- $\Delta T_{in}(t) = T_{in}(t) - \bar{T}_{in}$

Por último, se obtiene la ecuación que determina el comportamiento dinámico de las variables de estado ($\dot{x} = Ax + Bu$). En este caso se emplea la siguiente estructura

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \Delta \dot{C}_a(t) \\ \Delta \dot{T}_r(t) \\ \Delta \dot{T}_j(t) \\ \Delta \dot{T}_c(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_a(t) \\ \Delta T_r(t) \\ \Delta T_j(t) \\ \Delta T_c(t) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_4 & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta F(t) \\ \Delta F_j(t) \\ \Delta F_c(t) \\ \Delta C_{a_{in}}(t) \\ \Delta T_{in}(t) \end{bmatrix}, \quad (\text{C.15})
 \end{aligned}$$

donde los coeficientes a_{ij} y b_{ij} se obtienen derivando las ecuaciones presentadas en la [Sección C.2](#). A continuación se muestra el cálculo de cada uno de los coeficientes.

■ Balance de masa del reactivo

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta C_a(t)}{dt} = & a_{11}\Delta C_a(t) + a_{12}\Delta T_r(t) + a_{13}\Delta T_j(t) \\ & + a_{14}\Delta T_c(t) + b_{11}\Delta F(t) + b_{12}\Delta F_j(t) + b_{13}\Delta F_c(t) \\ & + b_{14}\Delta C_{a_{in}}(t) + b_{15}\Delta T_{in}(t) \quad (\text{C.16}) \end{aligned}$$

Los coeficientes a_{1j} y b_{1w} toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{\bar{F}}{V_r} - \bar{k} \\ a_{12} &= -\frac{\bar{C}_a \bar{k} E}{R \bar{T}_r^2} \\ a_{13} &= 0 \\ a_{14} &= 0 \\ b_{11} &= \frac{\bar{C}_{a_{in}} - \bar{C}_a}{V_r} \\ b_{12} &= 0 \\ b_{13} &= 0 \\ b_{14} &= \frac{\bar{F}}{V_r} \\ b_{15} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

■ Balance de energía en el contenido del reactor

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta T_r(t)}{dt} = & a_{21}\Delta C_a(t) + a_{22}\Delta T_r(t) + a_{23}\Delta T_j(t) \\ & + a_{24}\Delta T_c(t) + b_{21}\Delta F(t) + b_{22}\Delta F_j(t) + b_{23}\Delta F_c(t) \\ & + b_{24}\Delta C_{a_{in}}(t) + b_{25}\Delta T_{in}(t) \quad (\text{C.18}) \end{aligned}$$

Los coeficientes a_{2j} y b_{2w} toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= -\frac{\lambda \bar{k}}{\rho c_p} \\
 a_{22} &= -\frac{\bar{F}}{V_r} - \frac{\lambda \bar{C}_a \bar{k} E}{\rho c_p R \bar{T}_r^2} - \frac{UA_j}{V_r \rho c_p} - \frac{UA_c}{V_r \rho c_p} \\
 a_{23} &= \frac{UA_j}{V_r \rho c_p} \\
 a_{24} &= \frac{UA_c}{V_r \rho c_p} \\
 b_{21} &= \frac{\bar{T}_{in} - \bar{T}_r}{V_r} \\
 b_{22} &= 0 \\
 b_{23} &= 0 \\
 b_{24} &= 0 \\
 b_{25} &= \frac{\bar{F}}{V_r}
 \end{aligned} \tag{C.19}$$

■ Balance de energía en el casquillo

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Delta T_j(t)}{dt} &= a_{31\Delta} C a(t) + a_{32} \Delta T_r(t) + a_{33} \Delta T_j(t) \\
 &+ a_{34} \Delta T_c(t) + b_{31} \Delta F(t) + b_{32} \Delta F_j(t) + b_{33} \Delta F_c(t) \\
 &+ b_{34} \Delta C_{a_{in}}(t) + b_{35} \Delta T_{in}(t) \quad (C.20)
 \end{aligned}$$

Los coeficientes a_{3j} y b_{3w} toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 a_{31} &= 0 \\
 a_{32} &= \frac{UA_j}{V_j \rho c_{p_j}} \\
 a_{33} &= -\frac{UA_j}{V_j \rho c_{p_j}} - \frac{\bar{F}_j}{V_j} \\
 a_{34} &= 0 \\
 b_{31} &= 0 \\
 b_{32} &= -\frac{(\bar{T}_j - \bar{T}_{j_{in}})}{V_j} \\
 b_{33} &= 0 \\
 b_{34} &= 0 \\
 b_{35} &= \frac{\bar{F}_j}{V_j}
 \end{aligned} \tag{C.21}$$

- Balance de energía en el serpentín

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Delta T_c(t)}{dt} &= a_{41}\Delta C a(t) + a_{42}\Delta T_r(t) + a_{43}\Delta T_j(t) \\
 &+ a_{44}\Delta T_c(t) + b_{41}\Delta F(t) + b_{42}\Delta F_j(t) + b_{43}\Delta F_c(t) \\
 &+ b_{44}\Delta C_{a_{in}}(t) + b_{45}\Delta T_{in}(t) \tag{C.22}
 \end{aligned}$$

Los coeficientes a_{4j} y b_{4w} toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 a_{41} &= 0 \\
 a_{42} &= \frac{UA_c}{V_r \rho c_{p_c}} \\
 a_{43} &= \\
 a_{44} &= -\frac{UA_c}{V_r \rho c_{p_c}} - \frac{\bar{F}_c}{V_c} \\
 b_{41} &= 0 \\
 b_{42} &= 0 \\
 b_{43} &= -\frac{(\bar{T}_c - \bar{T}_{c_{in}})}{V_c} b_{44} = 0 \\
 b_{45} &= \frac{\bar{F}_c}{V_c}
 \end{aligned} \tag{C.23}$$

Calculados los coeficientes del modelo linealizado expresado en el espacio de estado, se obtendrán modelos en función de transferencia salida/entrada. Se calcula la transformada de Laplace de las anteriores expresiones dinámicas, y se despejan los estados intermedios $\Delta C_a(s)$, $\Delta T_j(s)$ y $\Delta T_c(s)$ como sigue.

- Balance de masa del reactivo. En el dominio de la Laplace, puede expresarse según

$$\Delta C_a(s) = \frac{a_{12}\Delta T_r(s) + b_{11}\Delta F(s) + b_{14}\Delta C_{a_{in}}(s)}{(s - a_{11})}. \quad (\text{C.24})$$

- Balance de energía en el casquillo. En el dominio de la Laplace, puede expresarse según

$$T_j(s) = \frac{a_{32}\Delta T_r(s) + b_{32}\Delta F_j(s) + b_{35}\Delta T_{in}(s)}{(s - a_{33})}. \quad (\text{C.25})$$

- Balance de energía en el serpentín. En el dominio de la Laplace, puede expresarse según

$$\Delta T_c(s) = \frac{a_{42}\Delta T_r(s) + b_{43}\Delta F_c(s) + b_{45}\Delta T_{in}(s)}{(s - a_{44})}. \quad (\text{C.26})$$

Por otro lado, se calcula también en el dominio de Laplace la ecuación del balance del energía del reactor

$$s\Delta T_r(s) = a_{21}\Delta C_a(s) + a_{22}\Delta T_r(s) + a_{23}\Delta T_j(s) + a_{24}\Delta T_c(s) + b_{21}\Delta F(s) + b_{25}\Delta T_{in}(s). \quad (\text{C.27})$$

Y en ellas se substituyen los resultados en (C.24), (C.26) y (C.25), en (C.27), obteniendo

$$\begin{aligned} s\Delta T_r(s) = & a_{21} \frac{a_{12}\Delta T_r(s) + b_{11}\Delta F(s) + b_{14}\Delta C_{a_{in}}(s)}{(s - a_{11})} \\ & + a_{22}\Delta T_r(s) + a_{23} \frac{a_{32}\Delta T_r(s) + b_{32}\Delta F_j(s) + b_{35}\Delta T_{in}(s)}{(s - a_{33})} \\ & + a_{24} \frac{a_{42}\Delta T_r(s) + b_{43}\Delta F_c(s) + b_{45}\Delta T_{in}(s)}{(s - a_{44})} \\ & + b_{21}\Delta F(s) + b_{25}\Delta T_{in}(s). \quad (\text{C.28}) \end{aligned}$$

Agrupando términos puede obtenerse

$$\begin{aligned}
s\Delta T_r(s) = \Delta T_r(s) & \left[\frac{a_{21}a_{12}}{(s-a_{11})} + a_{22} + \frac{a_{23}a_{32}}{(s-a_{33})} + \frac{a_{24}a_{42}}{(s-a_{44})} \right] \\
& + \Delta F(s) \left[b_{21} + \frac{a_{21}b_{11}}{(s-a_{11})} \right] + \Delta F_j(s) \frac{a_{23}b_{32}}{(s-a_{33})} \\
& + \Delta F_c(s) \frac{a_{24}b_{43}}{(s-a_{44})} + \Delta C_{a_{in}}(s) \frac{a_{21}b_{14}}{(s-a_{11})} \\
& + \Delta T_{in}(s) \left[b_{25} + \frac{a_{23}b_{35}}{(s-a_{33})} + \frac{a_{24}b_{45}}{(s-a_{44})} \right], \quad (C.29)
\end{aligned}$$

ecuación de la que puede despejarse la variable controlada (variable de salida)

$$\begin{aligned}
\Delta T_r(s) & \left[s - \frac{a_{21}a_{12}}{(s-a_{11})} - a_{22} - \frac{a_{23}a_{32}}{(s-a_{33})} - \frac{a_{24}a_{42}}{(s-a_{44})} \right] = \\
& \Delta F(s) \left[b_{21} + \frac{a_{21}b_{11}}{(s-a_{11})} \right] + \Delta F_j(s) \frac{a_{23}b_{32}}{(s-a_{33})} \\
& + \Delta F_c(s) \frac{a_{24}b_{43}}{(s-a_{44})} + \Delta C_{a_{in}}(s) \frac{a_{21}b_{14}}{(s-a_{11})} \\
& + \Delta T_{in}(s) \left[b_{25} + \frac{a_{23}b_{35}}{(s-a_{33})} + \frac{a_{24}b_{45}}{(s-a_{44})} \right]. \quad (C.30)
\end{aligned}$$

A continuación se analiza el término que multiplica a ΔT_r . Si se desea despejar la variable controlada, el numerador de dicho término actúa como denominador en los elementos situados a la derecha de la ecuación. Por lo tanto, se define como $den(s)$ al numerador del término situado a la izquierda de la ecuación, tomando el siguiente valor

$$\begin{aligned}
den(s) = & (s-a_{22})(s-a_{11})(s-a_{33})(s-a_{44}) \\
& - a_{21}a_{12}(s-a_{33})(s-a_{44}) - a_{23}a_{32}(s-a_{11})(s-a_{44}) \\
& - a_{24}a_{42}(s-a_{11})(s-a_{33}). \quad (C.31)
\end{aligned}$$

Operando todos los términos puede obtenerse el polinomio en «s», que caracteriza $den(s)$. En este caso se emplea el polinomio

$$den(s) = s^4 + \hat{a}_3s^3 + \hat{a}_2s^2 + \hat{a}_1s^1 + \hat{a}_0, \quad (C.32)$$

caracterizado por los siguientes coeficientes

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_3 &= -a_{11} - a_{22} - a_{33} - a_{44} \\
 \hat{a}_2 &= a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{11}a_{44} + a_{22}a_{33} + a_{22}a_{44} + a_{33}a_{44} \\
 &\quad - a_{21}a_{12} - a_{23}a_{32} - a_{24}a_{42} \\
 \hat{a}_1 &= -a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{44} - a_{11}a_{33}a_{44} - a_{22}a_{33}a_{44} \\
 &\quad + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{12}a_{44} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{23}a_{32}a_{44} \\
 &\quad + a_{24}a_{42}a_{11} + a_{24}a_{42}a_{33} \\
 \hat{a}_0 &= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{33}a_{44}a_{21}a_{12} - a_{11}a_{44}a_{23}a_{32} \\
 &\quad - a_{11}a_{33}a_{24}a_{42}
 \end{aligned} \tag{C.33}$$

Por otro lado, el denominador del termino que multiplica a ΔT_r en (C.30) pasa al lado derecho como denominador. Este es nombrado como $num(s)$ y toma el valor

$$num(s) = (s - a_{11})(s - a_{33})(s - a_{44}). \tag{C.34}$$

Conocidos $num(s)$ y $den(s)$ pueden obtenerse las funciones de transferencia que determinan la relación entre la temperatura del reactor y las variaciones de las entradas del sistema.

$$\frac{\Delta T_r(s)}{\Delta F(s)} = p_1(s) = \frac{(s - a_{33})(s - a_{44})(b_{21}(s - a_{11}) + a_{21}b_{11})}{den(s)}, \tag{C.35}$$

$$\frac{\Delta T_r(s)}{\Delta F_j(s)} = p_2(s) = \frac{a_{23}b_{32}(s - a_{11})(s - a_{44})}{den(s)}, \tag{C.36}$$

$$\frac{\Delta T_r(s)}{\Delta F_c(s)} = p_3(s) = \frac{a_{24}b_{43}(s - a_{11})(s - a_{33})}{den(s)}, \tag{C.37}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta T_r(s)}{\Delta T_{in}(s)} = p_5(s) &= \frac{b_{25}(s - a_{11})}{den(s)} + \frac{a_{23}b_{35}(s - a_{11})}{(s - a_{33})den(s)} \\
 &\quad + \frac{a_{24}b_{45}(s - a_{11})}{(s - a_{44})den(s)}. \tag{C.38}
 \end{aligned}$$

D

INECUACIÓN PARA EL PROBLEMA DEL SEGUIMIENTO

Como se describe en el [Capítulo 12](#), para dar solución al problema de seguimiento de referencias (planteado como una especificación de *error tracking* o *model matching*) es necesario emplear y resolver una nueva inecuación de diseño, no contemplada en la *Terasoft QFT toolbox*. A pesar de sus similitudes con la inecuación presentada en [38] para el *Model Matching* en sistemas SISO, la inecuación a resolver en el caso MISO es de mayor orden. Una inecuación del mismo tipo se emplea en la solución del problema de rechazo de perturbaciones medibles en sistemas MISO, que se trata en el [Capítulo 13](#).

La inecuación presenta el siguiente formato general

$$\left| \frac{G_f A + B}{C + DG} \right| \leq W_d. \quad (\text{D.1})$$

El objetivo es calcular el lugar geométrico que delimita el área de posibles soluciones para el controlador de realimentación G , tal que después, exista solución para el controlador de prealimentación G_f . Las funciones A , B , C y D combinan elementos conocidos dentro del espacio de incertidumbre de acuerdo a la estructura de control. W_d corresponde con la tolerancia superior para el error de seguimiento robusto.

Se opera de la siguiente manera. Pasamos el denominador a la parte derecha, junto a la especificación

$$|G_f A + B| \leq W_d |C + DG|. \quad (\text{D.2})$$

A continuación, se dividen los dos términos por el módulo $|A|$

$$\frac{|G_f A + B|}{|A|} \leq W_d \frac{|C + DG|}{|A|}. \quad (\text{D.3})$$

De este modo obtenemos una inecuación en la que G_f aparece como término independiente

$$\left| Gf_f + \frac{B}{A} \right| \leq W_d \frac{|C + DG|}{|A|}. \quad (\text{D.4})$$

Si se considera que G_f es la variable libre y se toma un único caso dentro de la incertidumbre, los valores de G_f que dan solución a la ecuación (D.4) corresponden con un círculo de radio

$$W_d \frac{|C + DG|}{|A|}, \quad (\text{D.5})$$

centrado en $-B/A$.

Por lo tanto, dados dos casos dentro de la incertidumbre (u y v), existirá un G_f que de solución a los dos casos, si la distancia entre los centros de las circunferencias es igual o inferior a la suma de los radios. Es decir

$$\left| \frac{B_u}{A_u} - \frac{B_v}{A_v} \right| \leq W_d \frac{|C + D_u G|}{|A_u|} + W_d \frac{|C_v + D_v G|}{|A_v|}. \quad (\text{D.6})$$

Dado que los radios dependen directamente de G , puede deducirse que modificando éste puede alcanzarse una combinación tal que se garantice la existencia de G_f . Si este procedimiento se realiza para todas las plantas dentro del espacio de la incertidumbre, pueden obtenerse las condiciones a cumplir por G para que exista un G_f solución. Por lo tanto debe resolverse la ecuación (D.6) para cada pareja de plantas. Para ello se reordenan los términos según

$$\left| \frac{B_u A_v - B_v A_u}{A_u A_v} \right| \leq W_d \frac{|C + D_u G|}{|A_u|} + W_d \frac{|C_v + D_v G|}{|A_v|}, \quad (\text{D.7})$$

de donde se extrae

$$\frac{|B_u A_v - B_v A_u|}{|A_u A_v|} \leq W_d \frac{|C + D_u G|}{|A_u|} + W_d \frac{|C_v + D_v G|}{|A_v|}, \quad (\text{D.8})$$

y finalmente se obtiene

$$|B_u A_v - B_v A_u| \leq W_d |C + D_u G| |A_v| + W_d |C_v + D_v G| |A_u|. \quad (\text{D.9})$$

A continuación se desarrolla la condición anterior en formato polar para obtener una inecuación que nos permita llevar a cabo el cálculo

habitual de contornos QFT. En este caso se emplean las equivalencias: $A = a\angle\theta_a$, $B = b\angle\theta_b$, $C = c\angle\theta_c$, $d = d\angle\theta_d$, $G = g\angle\phi$. Conocidas las expresiones en formato polar, obtenemos la expresión de los módulos que aparecen en la inecuación (D.9)

$$|B_u A_v - B_v A_u| = \frac{\sqrt{b_u^2 a_v^2 + b_v^2 a_u^2}}{-2b_u b_v a_u a_v \cos(\theta_{b,u} + \theta_{a,v} - \theta_{b,v} - \theta_{a,u})}, \quad (\text{D.10})$$

$$|C_v + D_v G| = \sqrt{d_v^2 g^2 + c_v^2 + 2c_v d_v g \cos(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v})}, \quad (\text{D.11})$$

$$|C_u + D_u G| = \sqrt{d_u^2 g^2 + c_u^2 + 2c_u d_u g \cos(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u})}. \quad (\text{D.12})$$

Por lo tanto, la inecuación (D.9) puede reescribirse según

$$\frac{\sqrt{b_u^2 a_v^2 + b_v^2 a_u^2}}{-2b_u b_v a_u a_v \cos(\theta_{b,u} + \theta_{a,v} - \theta_{b,v} - \theta_{a,u})} \leq \frac{W_d a_v \sqrt{d_u^2 g^2 + c_u^2 + 2c_u d_u g \cos(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u})}}{W_d a_u \sqrt{d_v^2 g^2 + c_v^2 + 2c_v d_v g \cos(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v})}}. \quad (\text{D.13})$$

A continuación se eliminan las raíces elevando al cuadrado los dos lados de la inecuación

$$\frac{1}{W_d^2} (b_u^2 a_v^2 + b_v^2 a_u^2 - 2b_u b_v a_u a_v \cos(\theta_{b,u} + \theta_{a,v} - \theta_{b,v} - \theta_{a,u})) \leq \left(a_v \sqrt{d_u^2 g^2 + c_u^2 + 2c_u d_u g \cos(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u})} + a_u \sqrt{d_v^2 g^2 + c_v^2 + 2c_v d_v g \cos(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v})} \right)^2. \quad (\text{D.14})$$

La parte derecha de (D.14) se desarrolla en los siguientes términos

$$\begin{aligned}
& a_v^2 (d_u^2 g^2 + c_u^2 + 2c_u d_u g \cos(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u})) + \\
& a_u^2 (d_v^2 g^2 + c_v^2 + 2c_v d_v g \cos(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v})) + \\
& 2a_v a_u \sqrt{d_u^2 g^2 + c_u^2 + 2c_u d_u g \cos(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u})} \\
& \quad \sqrt{d_v^2 g^2 + c_v^2 + 2c_v d_v g \cos(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v})}. \quad (D.15)
\end{aligned}$$

Agrupando los elementos se obtiene

$$\begin{aligned}
& (a_v^2 d_u^2 g^2 + c_u^2 a_v^2 + 2a_v^2 c_u d_u g \cos(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u})) + \\
& (a_u^2 d_v^2 g^2 + c_v^2 a_u^2 + 2a_u^2 c_v d_v g \cos(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v})) + 2a_v a_u \\
& \sqrt{d_u^2 g^2 + c_u^2 + 2c_u d_u g \cos(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u})} \\
& \quad \sqrt{d_v^2 g^2 + c_v^2 + 2c_v d_v g \cos(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v})}, \quad (D.16)
\end{aligned}$$

y si se pasan al lado izquierdo todos los términos menos las raíces se obtiene

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2a_v a_u W_d^2} (b_u^2 a_v^2 + b_v^2 a_u^2 \\
& - 2b_u b_v a_u a_v \cos(\theta_{b,u} + \theta_{a,v} - \theta_{b,v} - \theta_{a,u})) \\
& - \frac{1}{2a_v a_u} (a_v^2 d_u^2 g^2 + c_u^2 a_v^2 + 2a_v^2 c_u d_u g \cos(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u})) \\
& - \frac{1}{2a_v a_u} (a_u^2 d_v^2 g^2 + c_v^2 a_u^2 + 2a_u^2 c_v d_v g \cos(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v})). \quad (D.17)
\end{aligned}$$

Para una mejor comprensión de la ecuación anterior, se agrupan los términos por potencias de g . En primer lugar los términos que dependen de g^0 son

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2a_v a_u W_d^2} (b_u^2 a_v^2 + b_v^2 a_u^2 - 2b_u b_v a_u a_v \cos(\theta_{b,u} + \theta_{a,v} \\
& - \theta_{b,v} - \theta_{a,u})) - \frac{1}{2a_v a_u} (c_u^2 a_v^2) - \frac{1}{2a_v a_u} (c_v^2 a_u^2). \quad (D.18)
\end{aligned}$$

Se define

$$\begin{aligned}
W = & \frac{a_v}{a_u} \left(\frac{b_u^2 - c_u^2 W_d^2}{2W_d^2} \right) + \frac{a_u}{a_v} \left(\frac{b_v^2 - c_v^2 W_d^2}{2W_d^2} \right) \\
& - \frac{b_u b_v}{W_d^2} \cos(\theta_{b,u} + \theta_{a,v} - \theta_{b,v} - \theta_{a,u}), \quad (D.19)
\end{aligned}$$

como un nuevo parámetro que permite concentrar la ecuación. Empleando W , el lado izquierdo de la inecuación queda definido por

$$W = \frac{1}{2a_v a_u} \left((a_v^2 d_u^2 + a_u^2 d_v^2) g^2 + g(2a_v^2 c_u d_u \cos(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u}) + 2a_u^2 c_v d_v \cos(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v})) \right). \quad (\text{D.20})$$

Para eliminar las raíces de la parte derecha de la inecuación, se elevan al cuadrado las dos partes de la misma. De la parte izquierda, agrupando los términos por potencias de g se obtiene

$$g^4 \frac{(a_v^2 d_u^2 + a_u^2 d_v^2)^2}{4a_v^2 a_u^2}, \quad (\text{D.21})$$

$$g^3 \frac{(a_v^2 d_u^2 + a_u^2 d_v^2)}{a_v^2 a_u^2} \left(a_v^2 c_u d_u \cos(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u}) + a_u^2 c_v d_v \cos(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v}) \right), \quad (\text{D.22})$$

$$g^2 \left[-\frac{W(a_v^2 d_u^2 + a_u^2 d_v^2)g^2}{a_v a_u} + \frac{g^2}{a_v^2 a_u^2} \left(a_v^4 c_u^2 d_u^2 \cos^2(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u}) + a_u^4 c_v^2 d_v^2 \cos^2(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v}) + 2a_v^2 c_u d_u a_u^2 c_v d_v \cos(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u}) \cos(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v}) \right) \right], \quad (\text{D.23})$$

$$g \frac{-W}{a_v a_u} \left(2a_v^2 c_u d_u \cos(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u}) + 2a_u^2 c_v d_v \cos(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v}) \right), \quad (\text{D.24})$$

$$g^0 W^2. \quad (\text{D.25})$$

Elevando al cuadrado la parte derecha (raíces cuadradas) y agrupando en potencias de g se obtiene

$$g^4 (d_u^2 d_v^2), \quad (\text{D.26})$$

$$g^3 \left(2d_u^2 c_v d_v \cos(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v}) + 2d_v^2 c_u d_u \cos(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u}) \right), \quad (\text{D.27})$$

$$g^2 \left(d_u^2 c_v^2 + c_u^2 d_v^2 + 4c_u d_u c_v d_v \cos(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u}) \cos(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v}) \right), \quad (\text{D.28})$$

$$g \left(2c_u^2 c_v d_v \cos(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v}) + 2c_v^2 c_u d_u \cos(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u}) \right), \quad (\text{D.29})$$

$$g^0 c_u^2 c_v^2. \quad (\text{D.30})$$

La solución final se obtiene restando por potencias de g los dos lados de la ecuación, obteniendo

$$g^4 \frac{-(a_v^2 d_u^2 - a_u^2 d_v^2)^2}{4a_v^2 a_u^2}, \quad (\text{D.31})$$

$$g^3 \left[d_v c_v \cos(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v}) \left(d_u^2 - \frac{a_u^2}{a_v^2} d_v^2 \right) + d_u c_u \cos(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u}) \left(d_v^2 - \frac{a_v^2}{a_u^2} d_u^2 \right) \right], \quad (\text{D.32})$$

$$g^2 \left[d_u^2 c_v^2 + c_u^2 d_v^2 + W \left(\frac{a_v}{a_u} d_u^2 + \frac{a_u}{a_v} d_v^2 \right) - \left(\frac{a_v}{a_u} c_u d_u \cos(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u}) - \frac{a_u}{a_v} c_v d_v \cos(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v}) \right)^2 \right], \quad (\text{D.33})$$

$$g \left[2c_v d_v \left(c_u^2 + \frac{a_u}{a_v} W \right) \cos(\phi + \theta_{d,v} - \theta_{c,v}) \right. \\ \left. + 2c_u d_u \left(c_v^2 + \frac{a_v}{a_u} W \right) \cos(\phi + \theta_{d,u} - \theta_{c,u}) \right], \quad (\text{D.34})$$

$$g^0 (c_u^2 c_v^2 - W^2). \quad (\text{D.35})$$

El resultado anterior puede validarse particularizando la inecuación (D.1) para el problema de rechazo de perturbaciones medibles SISO, resuelto en [38]. Para ello se emplea $A = p \angle \theta$, $b = p_d \angle \theta_d$, $C = 1$, $d = p \angle \theta$. Si se substituyen los valores anteriores en la ecuación general, se obtiene

$$g^4 \left(p_u^2 p_v^2 - \frac{(p_v^2 p_u^2 + p_u^2 p_v^2)^2}{4p_v^2 p_u^2} \right), \quad (\text{D.36})$$

$$g^3 \left(p_v \cos(\phi + \theta_v) \left(p_u^2 - \frac{p_u^2}{p_v^2} p_v^2 \right) \right. \\ \left. + p_u \cos(\phi + \theta_u) \left(p_v^2 - \frac{p_v^2}{p_u^2} p_u^2 \right) \right), \quad (\text{D.37})$$

$$g^2 \left(p_u^2 + p_v^2 + W \left(\frac{p_v}{p_u} d_u^2 + \frac{p_u}{p_v} p_v^2 \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{p_v}{p_u} \cos(\phi + \theta_u) - \frac{p_u}{p_v} p_v \cos(\phi + \theta_v) \right)^2 \right), \quad (\text{D.38})$$

$$g \left(2p_v \left(1 + \frac{p_u}{p_v} W \right) \cos(\phi + \theta_v) \right. \\ \left. + 2p_u \left(1 + \frac{p_v}{p_u} W \right) \cos(\phi + \theta_u) \right), \quad (\text{D.39})$$

$$g^0 (1 - W^2). \quad (\text{D.40})$$

Operando puede comprobarse fácilmente como los términos g^4 y g^3 se eliminan. La ecuación resultante es

$$g^2 \left(p_u^2 + p_v^2 + 2p_u p_v W - \left(\frac{p_v}{p_u} \cos(\phi + \theta_u) - \frac{p_u}{p_v} p_v \cos(\phi + \theta_v) \right)^2 \right) + 2g \left((p_v + p_u W) \cos(\phi + \theta_v) + (p_u + p_v W) \cos(\phi + \theta_u) \right) + (1 - W^2), \quad (\text{D.41})$$

con W

$$W = \frac{p_v}{p_u} \left(\frac{p_{d,u}^2 - W_d^2}{2W_d^2} \right) + \frac{p_u}{p_v} \left(\frac{p_{d,v}^2 - W_d^2}{2W_d^2} \right) - \frac{p_{d,u} p_{d,v}}{W_d^2} \cos(\theta_{b,u} + \theta_{a,v} - \theta_{b,v} - \theta_{a,u}). \quad (\text{D.42})$$

Ecuación que coincide con la presentada en [38] para el control *feedforward* de sistemas SISO.

Hay que destacar que no todas las soluciones reportadas por la inecuación de orden cuarto definida por (D.36)-(D.40) son válidas. Esto es debido a que al elevar al cuadrado para eliminar las raíces se añaden soluciones que no corresponden con las reales. Entonces, de entre ellas sólo se deben considerar como soluciones correctas aquellas que garanticen la ecuación (D.9). Las soluciones de la inecuación cuarta que no garanticen (D.9) deberán ser descartadas.

Las soluciones válidas g para cada fase ϕ constituyen el lugar geométrico o *bound*, que delimita un área prohibida para G , tal que si no se viola durante su diseño, existirá solución para G_f . Conocido G , el cálculo de los contornos o *bounds* solución para G_f puede realizarse mediante las herramientas e inecuaciones que ofrece la *Terasotf QFT toolbox*.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] AL MAMUN, A.; MAREELS, I.; LEE, T. H. y TAY, A.: «Dual Stage Actuator Control in Hard Disk Drive - A Review». En: *IECON Proceedings (Industrial Electronics Conference)*, volumen 3, pp. 2132–2137, 2003.
- [2] ALLISON, BRUCE J. y BALL, JOHN B.: «Constrained model predictive control of blow tank consistency». *Control Engineering Practice*, 2004, **12(7)**, pp. 837–845.
- [3] ALLISON, BRUCE J. y ISAKSSON, ALF J.: «Design and performance of mid-ranging controllers». *Journal of Process Control*, 1998, **8(5-6)**, pp. 469–474.
- [4] ALLISON, BRUCE J. y OGAWA, SHIRO: «Design and tuning of valve position controllers with industrial applications». *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2003, **25(1)**, pp. 3–16.
- [5] ALVAREZ-RAMIREZ, JOSE; VELASCO, ALEJANDRA y FERNANDEZ-ANAYA, GUILLERMO: «A note on the stability of habituating process control». *Journal of Process Control*, 2004, **14(8)**, pp. 939–945.
- [6] ASTRÖM, K y HÄGGLUND, T: *Control pid avanzado*. Pearson Prentice Hall, 2009.
- [7] BAILEY, F. N.; PANZER, D. y GU, G.: «Two algorithms for frequency domain design of robust control systems». *International Journal of Control*, 1988, **48(5)**, pp. 1787–1806.
- [8] BESSON, V. y SHENTON, A. T.: «An interactive parameter space method for robust performance in mixed sensitivity problems». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44(6)**, pp. 1272–1276.
- [9] —: «Interactive parameter space design for robust performance of MISO control systems». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45(10)**, pp. 1917–1924.
- [10] BIERNSON, G.A.: *Principles of Feedback Control, Feedback System Design*. Wiley, 1988.

- [11] BODE, H. W.: *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. D. Van Nostrand Company, Princeton, New Jersey (USA), 1945.
- [12] BORGHESANI, C.; CHAIT, Y. y YANIV, O.: «Quantitative Feedback Theory Toolbox. For use with Matlab. 2nd Ed. Terasoft», 2002.
- [13] BOZCHALOOI, I. S. y YOUCEF-TOUMI, K.: «Multi-actuation and PI control: A simple recipe for high-speed and large-range atomic force microscopy». *Ultramicroscopy*, 2014, **146**, pp. 117–124.
- [14] BRENNAN, S. y ALLEYNE, A.: «Integrated vehicle control via coordinated steering and wheel torque inputs». En: *Proceedings of the American Control Conference*, volumen 1, pp. 7–12, 2001.
- [15] BROWN, MATTHEW y PETERSEN, IAN R.: «Exact computation of the Horowitz bound for interval plants». En: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, volumen 3, pp. 2268–2273, 1991.
- [16] CHAIT, Y. y YANIV, O.: «Multi-input/single-output computer-aided control design using the quantitative feedback theory». *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 1993, **3(1)**, pp. 47–54.
- [17] CHAIT, YOSSI; BORGHESANI, CRAIG y ZHENG, YUAN: «Single-loop QFT design for robust performance in the presence of non-parametric uncertainties». *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, 1995, **117(3)**, pp. 420–425.
- [18] CHEN, W. y BALLANCE, D. J.: «QFT design for uncertain non-minimum phase and unstable plants revisited». *International Journal of Control*, 2001, **74(9)**, pp. 957–965.
- [19] CHIANG, M.: «Development of X-Y servo pneumatic-piezoelectric hybrid actuators for position control with high response, large stroke and nanometer accuracy». *Sensors*, 2010, **10(4)**, pp. 2675–2693.
- [20] CHLA, T. L. y BROSILOW, C. B.: «Modular multivariable control of a fractionator». *Hydrocarbon Processing*, 1991, **70(6)**, pp. 61–66.
- [21] CLARKE, D. W.; MOHTADI, C. y TUFFS, P. S.: «Generalized predictive control-Part I. The basic algorithm». *Automatica*, 1987, **23(2)**, pp. 137–148.

- [22] COHEN, NIR; CHAIT, YOSSI; YANIV, ODED y BORGHESANI, CRAIG: «Stability analysis using Nichols charts». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1994, **4(1)**, pp. 3–20.
- [23] DAEGES, J.; LURIE, B. J. y BHANJI, A.: «Improved high-voltage dc regulator for a radar and communication transmitter». *IEEE Conference Record of Power Modulator Symposium*, 1988, pp. 106–108.
- [24] DAYTON, M. S. y HAID, B. J.: «The application of mid-ranging control to improve thermal disturbance rejection for cryogenic TH-D/DT layering at the National Ignition Facility». En: *2013 IEEE 25th Symposium on Fusion Engineering, SOFE 2013*, , 2013.
- [25] D'AZZO, J. J. y HOUPIS, C. H.: *Linear control system analysis and design. Conventional and modern*. McGraw-Hill, 1995.
- [26] DIAZ, J.; DORMIDO, S. y ARANDA, J.: «An interactive approach to template generation in quantitative feedback theory methodology». *Asian Journal of Control*, 2008, **10(3)**, pp. 361–367.
- [27] DOYLE, JOHN C.: «Quantitative Feedback Theory (QFT) and Robust Control». En: *American Control Conference*, 1986, pp. 1691–1698, 1986.
- [28] DOYLE III, F.; ALLGOWER, F.; OLIVEIRA, S.; GILLES, E. y MORARI, M.: «On nonlinear systems with poorly behaved zero dynamics». En: *Proceedings of the American Control Conference*, volumen 4, pp. 2571–2575, 1992.
- [29] DU, C.; GAO, T.; TAN, C. P.; YANG, J. y XIE, L.: «Saturation control for an MTA-based dual-stage actuation system». *IEEE Transactions on Magnetics*, 2013, **49(6)**, pp. 2526–2529.
- [30] DU, C.; TAN, C. P. y YANG, J.: «Three-stage control for high servo bandwidth and small skew actuation». *IEEE Transactions on Magnetics*, 2015, **51(1)**.
- [31] EAST, D. J.: «New aproach to optimum loop synthesis.» *International Journal of Control*, 1981, **34(4)**, pp. 731–748.
- [32] EITELBERG, E.: «Load sharing in a multivariable temperature control system». *Control Engineering Practice*, 1999, **7(11)**, pp. 1369–1377.

- [33] —: «Quantitative feedback design for tracking error tolerance». *Automatica*, 2000, **36(2)**, pp. 319–326.
- [34] —: «Some peculiarities of load sharing control». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, **13(7)**, pp. 607–618.
- [35] —: «Macrodynamic feedback interaction between trade and production». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, **17(2-3)**, pp. 203–224.
- [36] EITELBERG, EDUARD: *Load Sharing Control*. NOYB Press, 1999.
- [37] ELISO, J.; GIL-MARTÍNEZ, M. y GARCÍA-SANZ, M.: «Nonconservative QFT bounds for tracking error specifications». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, **22(18)**, pp. 2014–2025.
- [38] ELISO, J.; GIL-MARTÍNEZ, M. y GARCÍA-SANZ, M.: «Quantitative feedback-feedforward control for model matching and disturbance rejection». *IET Control Theory and Applications*, 2013, **7(6)**, pp. 894–900.
- [39] FAUTH, G. F. y SHINSKEY, F. G.: «Advanced control of distillation columns.» *Chemical Engineering Progress*, 1975, **71(6)**, pp. 49–54.
- [40] FBK.: «Feedback Instruments Limited. Proces control. www.fbk.com».
- [41] GAO, T.; DU, C.; TAN, C. P.; HE, Z.; YANG, J. y XIE, L.: «High bandwidth control design and implementation for a dual-stage actuation system with a microthermal actuator». *IEEE Transactions on Magnetics*, 2013, **49(3)**, pp. 1082–1087.
- [42] GARCIA-SANZ, M. y HADAEGH, F. Y.: «Load-sharing robust control of spacecraft formations: Deep space and low Earth elliptic orbits». *IET Control Theory and Applications*, 2007, **1(2)**, pp. 475–484.
- [43] GAYADEEN, S. y HEATH, W.: «An internal model control approach to mid-ranging control». En: *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, volumen 7, pp. 542–547, 2009.
- [44] GERA, AMOS y HOROWITZ, ISAAC: «Optimization of the loop transfer function.» *International Journal of Control*, 1980, **31(2)**, pp. 389–398.

- [45] GIL-MARTÍNEZ, M. y GARCÍA-SANZ, M.: «Simultaneous meeting of robust control specifications in QFT». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, **13(7)**, pp. 643–656.
- [46] GIOVANINI, L.: «Flexible-structure control: A strategy for releasing input constraints». *ISA transactions*, 2004, **43(3)**, pp. 361–376.
- [47] —: «Cooperative-feedback control». *ISA transactions*, 2007, **46(3)**, pp. 289–302.
- [48] GOMEZ, J.; DE GRACIA, M.; AYESA, E. y GARCIA-HERAS, J. L.: «Mathematical modelling of autothermal thermophilic aerobic digesters». *Water research*, 2007, **41(5)**, pp. 959–968.
- [49] GORZELIC, P.; HELLSTRÖM, E.; STEFANOPOULOU, A.; JIANG, L. y GOPINATH, S.: «A coordinated approach for throttle and wastegate control in turbocharged spark ignition engines». En: *Proceedings of the 2012 24th Chinese Control and Decision Conference, CCDC 2012*, pp. 1524–1529, 2012.
- [50] GRODINS, F.S.: *Control theory and biological systems*. Columbia University Press, 1963.
- [51] GROGAN, R. L.; BLACKWOOD, G. H. y CALVET, R. J.: «Optical delay line nanometer level pathlength control law design for space-based interferometry». En: *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, volumen 3350, pp. 14–25, 1998.
- [52] GUTMAN, P. .; HORESH, E.; GUETTA, R. y BORSHCHEVSKY, M.: «Control of the Aero-Electric Power Station - An exciting QFT application for the 21st century». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, **13(7)**, pp. 619–636.
- [53] GUTMAN, P.; NEUMANN, L. y ASTROM, K.J.: «Incorporation of unstructured uncertainty into the Horowitz design method». En: *Control and Applications, 1989. Proceedings. ICCON '89. IEEE International Conference on*, pp. 520–525, 1989.
- [54] GUTMAN, PET-OLOF; BARIL, CLAUDIO y NEUMANN, LINDA: «Algorithm for computing value sets of uncertain transfer functions in factored real form». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39(6)**, pp. 1268–1273.

- [55] HAUGWITZ, S.; HAGANDER, P. y NORÉN, T.: «Modeling and control of a novel heat exchange reactor, the Open Plate Reactor». *Control Engineering Practice*, 2007, **15(7)**, pp. 779–792.
- [56] HAUGWITZ, S.; KARLSSON, M.; VELUT, S. y HAGANDER, P.: «Anti-windup in mid-ranging control». En: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, CDC-ECC '05*, volumen 2005, pp. 7570–7575, 2005.
- [57] HEATH, W. P. y GAYADEEN, S.: «Simple robustness measures for control of MISO and SIMO plants». En: *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, volumen 18, pp. 11356–11361, 2011.
- [58] HENSON, MICHAEL A.; OGUNNAIKE, BABATUNDE A. y SCHWABER, JAMES S.: «Habituating control strategies for process control». *AI-ChE Journal*, 1995, **41(3)**, pp. 604–618.
- [59] HONDA, M.; KARAKAWA, H.; AKAHORI, K.; MIYAOKA, T. y OHKA, M.: «Estimation of vibration stimulus threshold for inducing kinesthetic illusion». En: *Micro-NanoMechatronics and Human Science (MHS), 2014 International Symposium on*, pp. 1–2, 2014.
- [60] HOROWITZ, I.: «Fundamental theory of automatic linear feedback control systems». *IRE Transactions on Automatic Control*, 1959, **4(3)**, pp. 5–19.
- [61] —: *Synthesis of Feedback Systems*. New York, 1963.
- [62] —: «A Synthesis Theory for Linear Time-Varying Feedback Systems with Plant Uncertainty». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1975, **20(4)**, pp. 454–464.
- [63] —: «Synthesis of Feedback Systems with Nonlinear Time-Varying Uncertain Plants to Satisfy Quantitative Performance Specifications». *Proceedings of the IEEE*, 1976, **64(1)**, pp. 123–130.
- [64] —: «Quantitative synthesis of uncertain multiple input-output feedback system.» *International Journal of Control*, 1979, **30(1)**, pp. 81–106.
- [65] —: *Quantitative Feedback Design Theory (QFT)*. QFT Publications, Boulder, Colorado, 1993.

- [66] —: «Survey of quantitative feedback theory (QFT)». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2001, **11(10)**, pp. 887–921.
- [67] HOROWITZ, I. y SIDI, M.: «Synthesis of cascaded multiple-loop feedback systems with large plant parameter ignorance». *Automatica*, 1973, **9(5)**, pp. 589–600.
- [68] —: «Optimum synthesis of non-minimum phase feedback systems with plant uncertainty». *International Journal of Control*, 1978, **27(3)**, pp. 361–386.
- [69] HOROWITZ, I. M. y SIDI, M.: «Synthesis of feedback systems with large plant ignorance for prescribed time-domain tolerances». *International Journal of Control*, 1972, **16(2)**, pp. 287–309.
- [70] HOUPIS, C H; RASMUSSEN, S J y GARCIA-SANZ, M: *Quantitative Feedback Theory Fundamentals and Applications*. a CRC Press Book. Taylor and Francis, Florida, USA, 2006.
- [71] HOUPIS, C.H. y LAMONT, G.B.: *ICECAP-QFT Users Manual, Air Force Institute of Technology, Electrical and Computer Department*, 1988.
- [72] HUANG, X.; XIE, H. y SONG, K.: «Idle speed control of FSAE racing engines based on Mid-ranging ADRC». En: *Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference, CCC 2014*, pp. 201–206, 2014.
- [73] JADE, S.; HELLSTRÖM, E.; LARIMORE, J.; STEFANOPOULOU, A. G. y JIANG, L.: «Reference governor for load control in a multicylinder recompression HCCI engine». *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2014, **22(4)**, pp. 1408–1421.
- [74] JADE, S.; LARIMORE, J.; HELLSTROM, E.; JIANG, L. y STEFANOPOULOU, A. G.: «Enabling large load transitions on multicylinder recompression HCCI engines using fuel governors». En: *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 4423–4428, 2013.
- [75] JADE, S.; LARIMORE, J.; HELLSTROM, E.; STEFANOPOULOU, A. G. y JIANG, L.: «Controlled Load and Speed Transitions in a Multicylinder Recompression HCCI Engine». *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2015, **23(3)**, pp. 868–881.

- [76] JAYASURIYA, SUHADA: «QFT type design for maximizing tolerable disturbances in structured uncertain systems». En: *American Society of Mechanical Engineers, Dynamic Systems and Control Division (Publication) DSC*, volumen 24, pp. 51–58, 1990.
- [77] —: «Frequency domain design for robust performance under parametric, unstructured, or mixed uncertainties». *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, 1993, **115(2 B)**, pp. 439–451.
- [78] JAYASURIYA, SUHADA y FRANCKEK, MATTHEW A.: «A QFT-type design methodology for a parallel plant structure and its application in idle speed control». *International Journal of Control*, 1994, **60(5)**, pp. 653–670.
- [79] JHA, S. K. y KAISTHA, N.: «Valve positioning control for process through-put maximization». *Chemical Engineering Research and Design*, 2007, **85(11 A)**, pp. 1465–1475.
- [80] JOHANSSON, O.; SAHLIN, D.; LINDE, J.; LIDÉN, G. y HÄGGLUND, T.: «A mid-ranging control strategy for non-stationary processes and its application to dissolved oxygen control in a bioprocess». *Control Engineering Practice*, 2015, **42**, pp. 89–94.
- [81] JONES, R.W.: *Principles of biological regulation: an introduction to feedback systems*. Academic Press, 1973.
- [82] KANO, M. y OGAWA, M.: «The state of the art in chemical process control in Japan: Good practice and questionnaire survey». *Journal of Process Control*, 2010, **20(9)**, pp. 969–982.
- [83] KARLSSON, M.; SLÄTTEKE, O.; WITTENMARK, B. y STENSTRÖM, S.: «Reducing moisture transients in the paper-machine drying section with the mid-ranging control technique». *Nordic Pulp and Paper Research Journal*, 2005, **20(2)**, pp. 150–155.
- [84] KARLSSON, M.; SLÄTTEKE, O.; HÄGGLUND, T. y STENSTRÖM, S.: «Feedforward control in the paper machine drying section». En: *Proceedings of the American Control Conference*, volumen 2006, pp. 1954–1959, 2006.
- [85] KIRCHHEIM, H. R.: «Systemic arterial baroreceptor reflexes». *Physiological Reviews*, 1976, **56(1)**, pp. 100–176.

- [86] KOBAYASHI, M. y HOROWITZ, R.: «Track seek control for hard disk dual-stage servo systems». *IEEE Transactions on Magnetics*, 2001, **37(2 I)**, pp. 949–954.
- [87] KOGANEZAWA, S.; SANO, H.; TANI, H. y TAGAWA, N.: «Reduction in secondary-actuator displacement in dual-stage actuator system by imparting rotational stiffness in hard disk drives». *Microsystem Technologies*, 2015, **21(10)**, pp. 2187–2195.
- [88] LAPARA, T. M. y ALLEMAN, J. E.: «Thermophilic aerobic biological wastewater treatment». *Water research*, 1999, **33(4)**, pp. 895–908.
- [89] LERSBAMRUNGSUK, V.; SRINOPHAKUN, T.; NARASIMHAN, S. y SKO-GESTAD, S.: «Control structure design for optimal operation of heat exchanger networks». *AIChE Journal*, 2008, **54(1)**, pp. 150–162.
- [90] LI, H.; DU, C. y WANG, Y.: «Optimal reset control for a dual-stage actuator system in HDDs». *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2011, **16(3)**, pp. 480–488.
- [91] LONGDON, L. y EAST, D. J.: «Simple geometrical technique for determining loop frequency response bounds which achieve prescribed sensitivity specifications.» *International Journal of Control*, 1979, **30(1)**, pp. 153–158.
- [92] LOVE, WILLIAM C.: «Innovative control technique improves control rangeability and resolution in paper mill applications». *Tappi Journal*, 1994, **77(2)**, pp. 195–199.
- [93] LURIE, B J y ENRIGHT, P: *Classical Feedback Control: With MATLAB*. Control Engineering. Taylor & Francis, 2000. ISBN 9780824703707.
- [94] LURIE, B. J.; GHAVIMI, A.; HADAEGH, F. Y. y METTLER, E.: «System architecture trades using Bode-step control design». *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2002, **25(2)**, pp. 309–315.
- [95] LUYBEN, W. L.: «Quantitative comparison of temperature control of reactors with jacket cooling or internal cooling coils». *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 2004, **43(11)**, pp. 2691–2703.
- [96] LUYBEN, W.L.: *Process Modelling, Simulation and Control for Chemical Engineers*. McGraw-Hill Education, New York, 1989.

- [97] —: *Chemical Reactor Design and Control*. Wiley, 2007.
- [98] LUYBEN, W.L. y MELCIC, M.: «Consider reactor control lags.» *Hydrocarbon Processing*, 1978, **57(3)**, pp. 115–117.
- [99] MARLIN, T E: *Process control: designing processes and control systems for dynamic performance*. McGraw-Hill chemical engineering series. McGraw-Hill, 1995.
- [100] MARSELLE, D. F.; MORARI, M. y RUDD, D. F.: «Design of resilient processing plants-II Design and control of energy management systems». *Chemical Engineering Science*, 1982, **37(2)**, pp. 259–270.
- [101] MARTÍN-ROMERO, J. J. y MARTÍN-ROMERO, A.: «QFT templates for plants with a high number of uncertainty parameters». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52(4)**, pp. 754–758.
- [102] MARWALI, M. N.; JUNG, J. . y KEYHANI, A.: «Control of distributed generation systems - Part II: Load sharing control». *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2004, **19(6)**, pp. 1551–1561.
- [103] McCLAMROCH, N. H. y SCHUMACHER, DARREN: «Asymptotic output tracking problem for a nonlinear control system with fewer outputs than inputs». En: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, volumen 4, pp. 3562–3563, 1993.
- [104] McLAIN, R. B.; KURTZ, M. J.; HENSON, M. A. y DOYLE III, F. J.: «Habituating control for nonsquare nonlinear processes». *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 1996, **35(11)**, pp. 4067–4077.
- [105] MONROY-LOPERENA, R.; SOLAR, R. y ALVAREZ-RAMIREZ, J.: «Balanced Control Scheme for Reactor/Separator Processes with Material Recycle». *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 2004, **43(8)**, pp. 1853–1862.
- [106] MORENO, J. C.; BAÑOS, A. y BERENGUEL, M.: «Improvements on the computation of boundaries in QFT». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2006, **16(12)**, pp. 575–597.
- [107] NÁJERA, S.; GIL-MARTÍNEZ, M. y ZAMBRANO, J. A.: «ATAD control goals through the analysis of process variables and evaluation of quality, production and cost». *Water Science and Technology*, 2015, **71(5)**, pp. 717–724.

- [108] —: «Dual-Control of Autothermal Thermophilic Aerobic Digestion Using Aeration and Solid Retention Time». *Water*, 2017, **9(6)**, p. 426.
- [109] NÁJERA, S.; ZAMBRANO, J. A. y GIL-MARTÍNEZ, M.: «Improvements in ATAD using quantitative feedback control and nonlinear generator of optimal operating points». *Chemical Engineering Science*, 2013, **102**, pp. 613–621.
- [110] NATARAJ, P. S. V.: «MATLAB toolbox for QFT-based synthesis of linear/nonlinear lumped and linear distributed systems». En: *Proceedings of the IEEE/IFAC Joint Symposium on Computer-Aided*, pp. 513–517, 1994.
- [111] NATARAJ, P. S. V. y SARDAR, G.: «Computation of QFT bounds for robust sensitivity and gain-phase margin specifications». *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, 2000, **122(3)**, pp. 528–534.
- [112] —: «Template generation for continuous transfer functions using interval analysis». *Automatica*, 2000, **36(1)**, pp. 111–119.
- [113] NEAT, GREGORY W; ABRAMOVICI, ALEX; MELODY, JAMES W; CALVET, ROBERT J; NERHEIM, NOBLE M y BRIEN, JOHN F O.: «Control technology readiness for spaceborne».
- [114] NORDGREN, R. E.; NWOKAH, O. D. I. y FRANCKEK, M. A.: «New formulations for quantitative feedback theory», 1994, **4(1)**, pp. 47–64–.
- [115] OLDAK, S.; BARIL, C. y GUTMAN, P. O.: «Quantitative design of a class of nonlinear systems with parameter uncertainty». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1994, **4(1)**, pp. 101–117.
- [116] O'NEAL, MICHAEL C. y SPANOS, JOHN T.: «Optical pathlength control in the nanometer regime on the JPL phase-B interferometer testbed». *Proc. SPIE*, 1991, **1542**, pp. 359–370.
- [117] PALLADINO, A.; PALMA, A.; FIENGO, G.; DE CRISTOFARO, F.; CASAVOLA, A. y GAROFALO, F.: «A simulation analysis for VVA and idle control strategies for a gasoline engine». En: *18th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'10 - Conference Proceedings*, pp. 1259–1264, 2010.

- [118] POPIEL, LARRY; MATSKO, TED y BROSILOW, COLEMAN: «Coordinated control». En: *Chemical Process Control III*, pp. 295–322, 1986.
- [119] PRADO-RUBIO, O.A.; JØRGENSEN, S.B. y JONSSON, G.: «PH control structure design for a periodically operated membrane separation process». *Computers and Chemical Engineering*, 2012, **43**, pp. 120–129.
- [120] RAVI, N.; LIAO, H. .; JUNGKUNZ, A. F. y GERDES, J. C.: «Mid-ranging control of a multi-cylinder HCCI engine using split fuel injection and valve timings». En: *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, pp. 797–802, 2010.
- [121] RICO, J. y GIL-MARTINEZ, M.: «Multivariable QFT robust control of a heat exchanger». En: *2011 19th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2011*, pp. 588–593, 2011.
- [122] RODRIGUES, J. M.; CHAIT, Y. y HOLLOT, C. V.: «New algorithm for computing QFT bounds». En: *Proceedings of the American Control Conference*, volumen 6, pp. 3970–3974, 1995.
- [123] —: «An efficient algorithm for computing QFT bounds». *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, 1997, **119(3)**, pp. 548–552.
- [124] SALTON, A. T.; CHEN, Z. y FU, M.: «Improved control design methods for proximate time-optimal servomechanisms». *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2012, **17(6)**, pp. 1049–1058.
- [125] SALTON, A. T.; CHEN, Z.; ZHENG, J. y FU, M.: «Preview control of dual-stage actuator systems for superfast transition time». *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2011, **16(4)**, pp. 758–763.
- [126] SCHNEIDER, U.; OLOFSSON, B.; SÖRNMO, O.; DRUST, M.; ROBERTSSON, A.; HÄGELE, M. y JOHANSSON, R.: «Integrated approach to robotic machining with macro/micro-actuation». *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2014, **30(6)**, pp. 636–647.
- [127] SCHROECK, S. J.; MESSNER, W. C. y McNAB, R. J.: «On compensator design for linear time-invariant dual-input single-output systems». *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2001, **6(1)**, pp. 50–57.

- [128] SCHROECK, STEVEN J. y MESSNER, WILLIAM C.: «On controller design for linear time-invariant dual-input single-output systems». En: *Proceedings of the American Control Conference*, volumen 6, pp. 4122–4126, 1999.
- [129] SEGALL, N. L.; MACGREGOR, J. F. y WRIGHT, J. D.: «One-step optimal saturation correction». *Automatica*, 1991, **27(1)**, pp. 135–139.
- [130] SHINSKEY, F. G.: «Energy-conserving control systems for distillation units.» *Chemical Engineering Progress*, 1976, **72(5)**, pp. 73–78.
- [131] —: «Control systems can save energy.» *Chemical Engineering Progress*, 1978, **74(5)**, pp. 43–46.
- [132] SHINSKEY, F. G. y CASTELLANOS, J. H. P.: *Sistemas de control de procesos: Aplicación, diseño y sintonización*. McGraw-Hill, 1996.
- [133] SIDI, M.: «Feedback synthesis with plant ignorance, nonminimum-phase, and time-domain tolerances». *Automatica*, 1976, **12(3)**, pp. 265–271.
- [134] —: «On maximization of gain-bandwidth in sampled systems.» *International Journal of Control*, 1980, **32(6)**, pp. 1099–1109.
- [135] —: «Gain-bandwidth limitations of feedback systems with non-minimum-phase plants». *International Journal of Control*, 1997, **67(5)**, pp. 731–743.
- [136] SIDI, MARCEL y HOROWITZ, ISAAC M.: «Synthesis of feedback systems with large plant ignorance for prescribed time domain tolerances.», 1973, pp. 202–206.
- [137] SKOGESTAD, S y POSTLETHWAITE, I: *Multivariable feedback control. Analysis and design*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, West Sussex, England, 2005.
- [138] SMITH, C.L.: *Advanced Process Control: Beyond Single Loop Control*. Wiley, 2011.
- [139] SOLTESZ, K.; DUMONT, G. A.; VAN HEUSDEN, K.; HAGGLUND, T. y ANSERMINO, J. M.: «Simulated mid-ranging control of propofol and remifentanil using EEG-measured hypnotic depth of anesthesia». En: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 356–361, 2012.

- [140] STATON, KEVIN L.; ALLEMAN, JAMES E.; PRESSLEY, RICHARD L. y ELOFF, JIM: «2nd Generation Autothermal Thermophilic Aerobic Digestion: Conceptual Issues and Process Advancements». En: *WEF/AWWA/CWEA Joint Residuals and Biosolids Management Conference*, San Diego, CA, USA, 2001.
- [141] SUN, J.; CAMERON, F. y BEQUETTE, B. W.: «A habituating blood glucose control strategy for the critically ill». *Journal of Process Control*, 2012, **22(8)**, pp. 1411–1421.
- [142] THOMPSON, DAVID F.: «Gradient formulations for sensitivity-based QFT performance bounds». En: *Proceedings of the American Control Conference*, volumen 6, pp. 3975–3976, 1995.
- [143] VELASCO-PÉREZ, A. y ÁLVAREZ RAMÍREZ, J.: «Algorithm for parallel control for an aerobic reactor with a recirculation current.» *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 2007, **6(2)**, pp. 229–236.
- [144] VELASCO-PÉREZ, A.; ÁLVAREZ RAMÍREZ, J. y SOLAR-GONZÁLEZ, R.: «Control múltiple entrada una salida (MISO) de un CSTR». *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 2011, **10(2)**, pp. 321–331.
- [145] VELUT, S.; DE MARE, L. y HAGANDER, P.: «Bioreactor control using a probing feeding strategy and mid-ranging control». *Control Engineering Practice*, 2007, **15(2)**, pp. 135–147.
- [146] WANG, C. G.; CHEN, C. W. y WANG, S. H.: «Equation for loop bound in quantitative feedback theory». En: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, volumen 3, pp. 2968–2969, 1991.
- [147] WANG, L.; ZHENG, J. y FU, M.: «Optimal preview control of a dual-stage actuator system for triangular reference tracking». *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2014, **22(6)**, pp. 2408–2416.
- [148] WANG, Q. .; ZHANG, Y.; CAI, W. .; BI, Q. y HANG, C. .: «Co-operative control of multi-input single-output processes: On-line strategy for releasing input saturation». *Control Engineering Practice*, 2001, **9(5)**, pp. 491–500.
- [149] WANG, Z. y PENG, Q.: «Temperature fault-tolerant control system of the CSTR with coil and jacket cooling based on VPC». En: *Con-*

- trol and Decision Conference (CCDC), 2015 27th Chinese*, pp. 3885–3890, 2015.
- [150] WANG, Z. y YING, L.: «Study on the temperature dual control of CSTR with coil cooling and jacket cooling and application». En: *Proceedings of the World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)*, pp. 3359–3363, 2012.
- [151] WILLIAMS, S. J.; HROVAT, D.; DAVEY, C.; MACLAY, D.; CREVEL, J. W. V. y CHEN, L. F.: «Idle speed control design using an H-infinity approach». pp. 1950–1956, 1989.
- [152] YANIV, O.: *MISO QFT CAD Package*, 1990.
- [153] YANIV, O.: *Quantitative feedback desing of linear and nonlinear control systems*. Kluwer Academic Publishers, Masasachusetts, USA, 1999.
- [154] YANIV, O.: «Robust LTV feedback synthesis for nonlinear MIMO plants». *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, 1999, **121(2)**, pp. 226–231.
- [155] YANIV, O. y BONEH, R.: «Robust LTV feedback synthesis for SI-SO non-linear plants». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1997, **7(1)**, pp. 11–28.
- [156] YANIV, O. y CHAIT, Y.: «Simplified Multi-Input Multi-Output formulation for the Quantitative Feedback Theory». *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, 1992, **114(2)**, pp. 179–185.
- [157] —: «Direct control design in sampled-data uncertain systems». *Automatica*, 1993, **29(2)**, pp. 365–372.
- [158] YANIV, O. y HOROWITZ, I.: «Quantitative Feedback Theory - Reply to criticism.» *International Journal of Control*, 1987, **46(3)**, pp. 945–962.
- [159] YANIV, ODED y CHAIT, YOSSEI: «Direct robust control of uncertain sampled-data systems using the quantitative feedback theory». En: *Proceedings of the American Control Conference*, volumen 2, pp. 1987–1988, 1991.

- [160] YU, C. . y LUYBEN, W. L.: «Analysis of valve-position control for dual-input processes». *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*, 1986, **25(3)**, pp. 344–350.
- [161] ZAMBRANO, J. A.: *Autothermal Thermophilic Aerobic Digestion: Design of Controllers and Benchmarking Validation*. Tesis doctoral, Universidad de Navarra, San Sebastian, Spain, 2011.
- [162] ZAMBRANO, J. A.; GIL-MARTINEZ, M.; GARCIA-SANZ, M. y IRIZAR, I.: *Benchmarking of control strategies for ATAD technology: A first approach to the automatic control of sludge treatment systems*. volumen 60 de *Water Science and Technology*, 2009.
- [163] ZHAI, J.; HUANG, Y.; SCHROECK, S.; MESSNER, W.; STANCIL, D. D. y SCHLESINGER, T. E.: «High bandwidth electro-optic scanner for optical data storage». *Japanese Journal of Applied Physics, Part 1: Regular Papers and Short Notes and Review Papers*, 2000, **39(2 B)**, pp. 883–887.
- [164] ZHAO, YONGDONG y JAYASURIYA, SUHADA: «On the generation of QFT bounds for general interval plants». *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, 1994, **116(4)**, pp. 618–627.
- [165] ZHENG, ALEX; KOTHARE, MAYURESH V. y MORARI, MANFRED: «Anti-Windup Design for Internal Model Control». *International Journal of Control*, 1993, **60**, pp. 1015–1024.
- [166] ZHENG, J. y FU, M.: «Nonlinear feedback control of a dual-stage actuator system for reduced settling time». *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2008, **16(4)**, pp. 717–725.