TESIS DOCTORAL

Estructura reticular y cuasiideal en algebras alternativas

Jesús Antonio Laliena Clemente

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

Estructura reticular y cuasiideal en algebras alternativas

Jesús Antonio Laliena Clemente

Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones
2007

Esta tesis doctoral, dirigida por el doctor D. Santos González Jiménez, fue leída el 12 de diciembre de 1987, y obtuvo la calificación de Apto Cum Laude Unanimidad

Edita: Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones

ISBN 978-84-690-8625-4

ESTRUCTURA RETICULAR Y CUASIIDEAL

EN ALGEBRAS ALTERNATIVAS

Jesús A. Laliena Clemente

COLEGIO UNIVERSITARIO DE LA RIOJA
UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

La presente Tesis Doctoral fue defendida el día 12 de Diciembre de 1987, estando el Tribunal compuesto por:

Presidente:	Dr. D.	Vicente Ramón Varea Agudo
Vocal:	Dr. D.	Alberto Pérez-Vargas Luque
Vocal:	Dr. D.	Angel Rodríguez Palacios
Vocal:	Dr. D.	Juan Tena Ayuso
Secretaria:	Dra. Dña.	Consuelo Martínez López

y obtuvo, por unanimidad, la calificación de APTO " CUM LAUDE ".

A mi familia,

y en especial, a Sole.

ABSTRACT

The lattice of subalgebras of an alternative algebra can determinate the algebraic structure of the algebra. In the first Chapter, it is showed that, an alternative algebra with lattice of subalgebras isomorphic to a non division semisimple alternative algebra, is closely related with it. In the second Chapter, it is studied the quasiideal structure in alternative algebras. By quasiideals, some kinds of semiprime alternative algebras and regular alternative algebras are characterised. Finally, alternative algebras in which every subalgebra is quasiideal are described.

A.M.S. Clasification: 17D05

Key Words: Nonassociative rings and algebras
Alternative rings
Lattice isomorphisms and quasiideals

La Presente Memoria se ha realizado en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, bajo la direccion del Profesor Titular de la misma Dr. D. Santos González Jiménez, a quien deseo expresar mi más profundo y sincero agradecimiento, por el continuo apoyo científico y humano que en todo momento me ha prodigado.

Mi agradecimiento tambien a mis compañeros del Colegio Universitario de La Rioja y de la Universidad de Zaragoza, por el constante estímulo que de ellos siempre he recibido, y al Profesor E. Kleinfeld de la Universidad de Iowa (USA) por la lectura que hizo de esta Memoria durante su reciente estancia en esta Universidad.

Logroño, Noviembre de 1987

INDICE

INTRODUCCION

La presente Memoria se encuadra en el marco de las álgebras álternativas, modelo de álgebras no asociativas que se está desarrollando intensamente y cuyas motivaciones tienen su origen en cuestiones de la Teoría de Números, de la Física (ver [10], [16], [17], [42], [53]), de la Geometría (ver [13]), etc.... Un ejemplo de tales álgebras, las de Cayley-Dickson, surgió en 1845 en un intento de dar respuesta a un problema planteado años antes. El problema consistía en encontrar los valores de n para los cuales el producto de dos sumas de n cuadrados de números reales vuelve a ser una suma de n cuadrados, es decir n's tales que

$$(a_1^2 + \ldots\ldots + a_n^2)\ (b_1^2 + \ldots\ldots + b_n^2) = c_1^2 + \ldots\ldots + c_n^2$$

con a_i, b_i, c_i números reales. En 1843 Hamilton demostró que este problema es equivalente al de hallar adecuadas álgebras de división con dimensión n sobre el cuerpo de los números reales. La solución final dada por Hurwitz prueba que la identidad es sólo posible para n=1 (álgebra de los números reales), n=2 (álgebra de los números complejos), n=4 (álgebra de los cuaternios de división de Hamilton), n=8 (álgebra de los números de Cayley-Dickson). En el último de los casos el álgebra resultante no es asociativa, pero sí alternativa, es decir, verifica las siguientes identidades para su operación producto : $x(xy) = x^2y$, $(yx)x = yx^2$.

La atención hacia este tipo de álgebras fue mayor a raiz del descubrimiento de su conexión con la teoría de planos proyectivos -las álgebras de Cayley pueden ser usadas para construir planos de Moufang, es decir, planos proyectivos los cuales son armónicos pero no Desarguesianos-, teoría que adquirió un gran auge a comienzos de este siglo. Moufang y Zorn obtuvieron entonces las interesantes identidades que hoy llevan sus nombres. También entonces se descubrió la "cercanía" respecto a las álgebras asociativas, que queda puesta de manifiesto en el Teorema de Artin: "En cada álgebra alternativa, la subálgebra generada por dos elementos cualesquiera es asociativa".

Posteriormente numerosos autores han dedicado sus esfuerzos a ellas (Albert, Andrunakievich, Dorofeev, Kleinfeld, Skornyakov, Slater, Smiley, ...) estudiando el centro asociativo y conmutativo, simplicidad, radicales, semiprimitividad, álgebras alternativas libres, ... De entre todos los resultados obtenidos es interesante destacar el Teorema de Kleinfeld de clasificación de las álgebras alternativas simples, el Teorema de Zhevlakov sobre la coincidencia de los radicales de Kleinfeld y Smiley, los resultados de Kleinfeld y Slater en la clasificación de las álgebras alternativas semiprimas y el Teorema de Slater, extensión del Teorema de Wedderburn, sobre la estructura de los anillos semiprimos con condición de cadena descendente.

La teoría de álgebras alternativas, además de con la Geometría, tiene también contactos con otras áreas de las matemáticas como por ejemplo el Análisis Funcional, donde son objeto de estudio las C^*-álgebras alternativas: álgebras alternativas con una norma y una involución cumpliendo determinadas propiedades (ver artículos de Braun [8] y Rodríguez Palacios [35], este último demostró que un álgebra de Banach, A, unitaria, normada y no necesariamente asociativa tal que $\|z^*z\| = \|z\|^2$ para cada z en A, es alternativa).

Finalmente es necesario destacar la gran relación de las álgebras alternativas con otros tipos de álgebras no asociativas. Esta relación queda puesta de manifiesto en el siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd}
& \text{Jordan} & \\
\text{Asociativas} \arrow[ur, "\odot"] \arrow[rr, hook] \arrow[d, "{[\,,\,]}"'] & & \text{Alternativas} \arrow[ul, "\odot"'] \arrow[d, "{[\,,\,]}"] \\
\text{Lie} \arrow[rr, hook] & & \text{Malcev}
\end{tikzcd}$$

Es decir, las álgebras asociativas están incluidas en las alternativas y las de Lie en las de Malcev. Un álgebra de Lie es un álgebra no necesariamente asociativa que cumple las identidades: $x^2 = 0$, $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$. Un álgebra de Malcev es un álgebra no necesariamente asociativa que cumple las identidades: $x^2 = 0$, $(xy)(xz) = ((xy)z)x + ((yz)x)x + ((zx)x)y$ .En un álgebra asociativa y alternativa al cambiar la operación producto por la operación corchete $[x, y] = xy - yx$, se obtienen respectivamente un álgebra de Lie y un álgebra de Malcev. El Teorema de Poincaré-Birhoff-Witt asegura que para toda álgebra de Lie existe un álgebra asociativa, de manera que el álgebra de Lie dada es una subálgebra del álgebra de Lie obtenida a partir del álgebra asociativa cambiando la operación producto por la operación $[\ ,\ ]$. Es un problema abierto el ver si ocurre lo mismo para álgebras altenativas y de Malcev. Sin embargo resulta interesante el paralelismo de algunos resultados de álgebras alternativas y de Malcev. Por ejemplo las álgebras simples centrales finito-dimensionales de Malcev son de Lie o siete dimensionales y las álgebras alternativas simples son asociativas o de Cayley-Dickson; en álgebras alternativas se tiene el Teorema de Artin ya citado y en las de Malcev el análogo conocido como el Teorema de Sagle, que establece que en un álgebra de Malcev la subálgebra generada por dos elementos es de Lie.

La parte superior del diagrama recoge el siguiente hecho: Dada un álgebra asociativa de característica distinta de dos, al cambiar la operación producto por la operación $x \odot y = 1/2\ (xy + yx)$ se obtiene un álgebra de Jordan. Un álgebra de Jordan es un álgebra no necesariamente asociativa que cumple las identidades: $xy = yx$, $(x^2y)x = x^2(yx)$. Existen álgebras de Jordan que no son subálgebras de ningún álgebra de Jordan resultante de cambiar en un álgebra asociativa la operación producto por la operación $\odot$. Estas álgebras son denominadas excepcionales. Albert probó la existencia de tales álgebras con un ejemplo obtenido a partir del álgebra alternativa de Cayley-Dickson. Por el Teorema de Artin es claro también que al cambiar en un álgebra alternativa su operación producto por la operación $\odot$ se obtiene un álgebra de Jordan.

La presente Memoria, estructurada en dos Capítulos tiene un doble objetivo. De un lado el estudio de diferentes aspectos reticulares en las álgebras alternativas y de otro el análisis de un concepto intrínseco del álgebra, el concepto de cuasiideal, con el que se profundizará en la estructura reticular del álgebra y se obtendrán teoremas de estructura que permitirán un mejor conocimiento de dichas álgebras. A continuación se comentan más ampliamente dichos objetivos.

Referente al primer objetivo es interesante hacer notar que el conocimiento del retículo de subestructuras de una estructura algebraica, así como de la relación de dos estructuras con el mismo retículo de subestructuras o con propiedades similares, proporciona una abundante información sobre la estructura objeto de estudio. En este sentido el texto de M. Suzuki: "Structure of a group and the structure of its lattice subgroups" recoge interesantes resultados en la teoría de grupos. Con respecto a la Teoría de álgebras de Lie, Lie-admisibles, Malcev, asociativas, potencias asociativas, pueden verse entre otros los trabajos de Badalov, Elduque, González, Kaplansky, Kolman, Martínez, Outcalt, Rodabaugh, Towers, Varea, Vernikov y Volklein.

En el Capítulo 1º de la Memoria el objetivo que se persigue es estudiar las álgebras con igual retículo de subálgebras que una alternativa semisimple. A veces los resultados ya existentes en asociativas han sido muy útiles como cabía esperar de la "cercanía" entre las álgebras asociativas y alternativas, pero otras veces ha sido necesario un duro trabajo adicional efectuado con técnicas muy distintas. En algunas ocasiones aportamos resultados desconocidos en álgebras asociativas y que han surgido de modo natural al hacer el estudio del caso alternativo. Creo conveniente resaltar dos teoremas que se obtienen referentes a las álgebras con igual retículo de subálgebras que un álgebra de Cayley-Dickson, por el interés que estas álgebras suscitan. En el caso de las álgebras de Cayley-Dickson centrales de división, dichas álgebras han de ser de este tipo o extensiones del cuerpo base, y en el caso de las álgebras de Cayley-Dickson con divisores de cero son semiisomorfas a ella. Este último resultado es obtenido, entre otros, a partir del Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva, conectando con los trabajos de Ancochea sobre semi-automorfismos de álgebras (ver [2] y [3]).

El Capítulo 2º trata sobre cuasiideales en álgebras alternativas. Dicho concepto es una generalización adecuada del concepto de ideal. Fue introducido por O. Steinfeld en 1953 en anillos asociativos y semigrupos. Desde entondes numerosos matemáticos han trabajado sobre esta subestructura (Clifford, Lhu, Sasz, Weinert, Wiegandt, ...) y un buen número de artículos han tratado de este tema. El texto de O. Steinfeld, "Quasiideals in rings and semigroups", recopila los principales resultados existentes en esta materia. Aquí se introduce dicho concepto en anillos alternativos, se estudian sus elementos minimales y se define de modo natural un Socle (ó Zócalo) de cuasiideales. Se dan después teoremas de descomposición de ciertos anillos alternativos semiprimos basados en cuasiideales, y se aborda un estudio de los anillos alternativos regulares, que con ciertas condiciones, serán caracterizados a través de la estructura cuasiideal. Finalmente, y en relación con recientes estudios de tipo reticular efectuados entre otros por Kaplansky (ver [20]), se van a caracterizar aquellas álgebras alternativas en las que la estructura cuasiideal verifica la siguiente propiedad reticular: Toda subálgebra es cuasiideal.

En la Memoria se incluye también un Capítulo 0 con resultados básicos de anillos alternativos que pueden ser ampliados con la lectura de los textos de Schafer [32] y de Zhevlakov, Slin'ko, Shestakov y Shirshov [55]. Referente a anillos asociativos los textos fundamentalmente utilizados son los de Abián [1] y Peirce [32].

Lista de símbolos

$\bullet$: suma directa de anillos.

$\dot{+}$: suma directa de espacios vectoriales.

$\leq$: subálgebra.

Sea A un algebra alternativa sobre un anillo Φ

$(a_1, \ldots\ldots, a_n)$: subespacio de A generado por $a_1, \ldots\ldots, a_n \in A$, cuando Φ es un cuerpo.

$\langle a_1, \ldots\ldots, a_n \rangle$: subálgebra de A generada por $a_1, \ldots\ldots, a_n \in A$

$R(A)$: el radical de A, cuando A cumple la condición de cadena descendente.

$d(A)$: la dimensión de A como espacio vectorial, cuando Φ es un cuerpo.

$l(A)$: la longitud de la cadena más larga de subálgebras de A.

$A_1 \vee A_2$: la menor subálgebra de A que contiene a $A_1, A_2 \leq A$.

Ann (A): el conjunto de los elementos de A que anulan a todos los de A, al multiplicar a derecha y a izquierda.

$[x, y, z]$: $(xy)z - x(yz)$, donde $x, y, z \in A$.

Sean X, Y, Z subconjuntos de A.

XY: subgrupo abeliano de A generado por los productos xy con $x \in X$ y $y \in Y$.

$XY^\#$: $XY + X$. (Análogamente $X^\#Y = Y + XY$)

$[X, Y, Z]$: subgrupo abeliano de A generado por los elementos $[x, y, z]$ con $x \in X, y \in Y, z \in Z$.

CAPITULO 0

Este capítulo tiene como objetivo introducir nociones y conceptos básicos en álgebras alternativas y además enunciar los resultados más importantes que van a ser utilizados en los dos capítulos siguientes. Aunque no damos ninguna demostración de dichos resultados, sí se citan los lugares donde pueden ser encontradas.

El capítulo aparece dividido en tres párrafos. El primero de definiciones, identidades y resultados generales, el segundo acerca del proceso de obtención de las álgebras que juegan el más importante papel dentro del conjunto de las álgebras alternativas: las álgebras de Cayley-Dickson, y el tercer párrafo que recoge algunos importantes teoremas de estructura en álgebras alternativas.

§ 1: Preliminares

Sea Φ un anillo conmutativo y asociativo con elemento identidad. Un conjunto A se dice que es un <u>álgebra sobre el anillo Φ</u> , si A tiene estructura de Φ-módulo unitario y hay definida en él una operación de multiplicación cuya conexión con las operaciones de módulo es dada por las relaciones:

$$(a+b)\,c = ac + bc \qquad\qquad a\,(b+c) = ab + ac$$

$$\alpha\,(ab) = (\alpha a)\,b = a\,(\alpha b)$$

para cada $a,b,c \in A$ y para cada $\alpha \in \Phi$.

Llamaremos <u>Φ-álgebras</u> a las álgebras sobre un anillo Φ. Notemos que cada anillo es una $\mathbb{Z}$- álgebra.

Sea A una Φ-álgebra y $x, y, z \in A$. Llamamos a $[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$ el <u>asociador</u> de los elementos x, y, z. Una Φ-álgebra A es un álgebra alternativa si verifica las identidades: $[x, x, y] = 0$, $[x, y, y] = 0$. La primera de estas identidades es llamada identidad alternativa a izquierda y la segunda identidad alternativa a derecha.

Linearizando la identidad alternativa a izquierda (es decir sustituyendo x por $x + z$) y linearizando la identidad alternativa a derecha (es decir sustituyendo y por $y + z$) se obtiene

$$[x, z, y] + [z, x, y] = 0 \quad , \quad [x, y, z] + [x, z, y] = 0.$$

De aquí se sigue que en un álgebra alternativa el asociador es una función antisimétrica o alternante, propiedad que determina el nombre de dichas álgebras.

En particular cada álgebra alternativa satisface la identidad $[x, y, x] = 0$. Esta identidad recibe el nombre de <u>identidad flexible</u> y las álgebras que la satisfacen son denominadas flexibles. Así, en lo que sigue podremos escribir el producto xyx sin indicar el orden de los paréntesis.

<u>Lema 1.1:</u> (ver [55]) En cualquier algebra alternativa A son válidas las siguientes identidades:

$x(yzy) = ((xy)z)y$	*(identidad de Moufang a derecha)*
$(yzy)x = y(z(yx))$	*(identidad de Moufang a izquierda)*
$(xy)(zx) = x(yz)x$	*(identidad de Moufang media)*

<u>*Corolario 1.2:*</u> *Cada álgebra alternativa satisface las identidades:*

$[x, xy, z] = [x, y, z]x$

$[x, yx, z] = x[x, y, z]$

$[x^2, y, z] = [x, x \circ y, z]$

$[x^2, y, z] = x \circ [x, y, z]$

(Dichas identidades son llamadas identidades de Zorn y son equivalentes a las de Moufang)

El Teorema que se enuncia a continuación determina la cercanía de las álgebras alternativas con respecto a las asociativas.

<u>*Teorema de Artin 1.3:*</u> *(ver [55]): En un álgebra alternativa A cualesquiera dos elementos generan una subálgebra asociativa.*

Un álgebra A se dice que es de <u>potencias asociativas</u> si cada elemento del álgebra A genera una subálgebra asociativa.

<u>*Corolario 1.4:*</u> *Toda álgebra alternativa es de potencias asociativas.*

Una herramienta muy útil de trabajo en un álgebra alternativa es la <u>descomposición de Peirce</u>, que se obtiene a partir de un idempotente del álgebra distinto del cero y distinto del elemento identidad. A continuación vemos cómo es esta descomposición y qué propiedades tiene.

Proposición 1.5: *Sea A un álgebra alternativa con un idempotente $e \neq 0,1$, entonces A es descomponible en una suma directa de submódulos*

$$A = A_{00} \dotplus A_{10} \dotplus A_{01} \dotplus A_{11}$$

donde $A_{ij} = \{ a \in A \;/\; ea = ia \quad ae = ja \}$ *con* $i, j \in \{0,1\}$. *Además las componentes* A_{ij} *cumplen las relaciones:*

$$A_{ii}^2 \subset A_{ii} \qquad A_{ii}A_{jj} = 0$$

$$A_{ii}A_{ij}\,,\ A_{ij}A_{jj} \subset A_{ij} \qquad A_{jj}A_{ij} = A_{ij}A_{ii} = 0$$

$$A_{ij}A_{ij} \subset A_{ji} \qquad A_{ij}\,A_{ji} \subset A_{ii}$$

con $i \neq j \qquad i,j \in \{0,1\}$.

En un álgebra arbitraria pueden ser considerados los tres subconjuntos básicos centrales:

$N(A) = \{ u \in A \;/\; [u, A, A] = [A, u, A] = [A, A, u] = 0 \}$ (centro asociativo)

$K(A) = \{ k \in A \;/\; [k,A] = 0\}$ (centro conmutativo)

$Z(A) = N(A) \cap K(A)$ (centro)

Proposición 1.6: *(ver [55])* *Sea A un álgebra alternativa. Entonces* $N(A)$, $Z(A)$, $K(A)$ *son subálgebras y* $3\,K(A) \subset N(A)$.

Corolario 1.7: *Si A es una* Φ*-álgebra alternativa y conmutativa y* $1/3 \in \Phi$ *entonces A es asociativa.*

En un álgebra alternativa se comprueba fácilmente que el producto de dos ideales vuelve a ser un ideal.

Un álgebra se dice simple si es de cuadrado distinto de cero y es sin ideales propios.

Teorema 1.8: (ver [55]) Si A es un álgebra simple, entonces $Z(A) = 0$ ó $Z(A)$ es un cuerpo.

Un álgebra A sobre F se dice central sobre F si $Z(A) = F$

Se denota por $D(A)$, y cuando no hay lugar a confusión también D, el ideal generado por el conjunto $[A, A, A]$ de todos los asociadores. Este ideal recibe el nombre de ideal asociador y claramente es el menor ideal cuyo cociente es un álgebra asociativa.

Proposición 1.9: (ver [55]) $D(A) = [A, A, A]A^{\#} = A^{\#}[A, A, A]$

Llamaremos a cada ideal contenido en el centro asociativo un ideal nuclear, y al mayor ideal nuclear el núcleo asociativo de A. Lo denotaremos por $U(A)$, y también si no hay lugar a confusión por U.

Proposición 1.10: (ver [55]) $U(A) = \{x \in A \;/\; xA^{\#} \subset N(A)\}$

Proposición 1.11: $DU = UD = 0$

§ 2 : El proceso de Cayley-Dickson

Una aplicación $n : A \longrightarrow F$ donde A es un álgebra y F un cuerpo se dice una <u>forma cuadrática</u> si:

(1) $n(\lambda x) = \lambda^2 n(x)$ con $x \in A$ $\lambda \in F$

(2) la función $f(x,y) = n(x+y) - n(x) - n(y)$ es una forma bilineal en A.

Una forma cuadrática $n(x)$ es llamada <u>estríctamente no degenerada</u> si la forma bilineal simétrica $f(x,y)$ correspondiente a ella es no degenerada.

Un álgebra A sobre un cuerpo F con forma cuadrática $n(x)$ es llamada un <u>álgebra de composición</u> si:

(1) $n(xy) = n(x)\,n(y)$

(2) la forma $n(x)$ es estrictamente no degenerada

(3) hay un elemento 1 en A

<u>Lema 2.1:</u> *Sea A un álgebra de composición. Entonces A es un álgebra alternativa y cada elemento procedente del álgebra A satisface una ecuación cuadrática con coeficientes en F (que es $x^2 - f(1,x).x + n(x) = 0$)*

Un endomorfismo ρ de un espacio vectorial A es llamado <u>involución</u> del álgebra A si $\rho(\rho(a)) = a$ y $\rho(ab) = \rho(b)\rho(a)$ para cada $a, b \in A$.

Sea A un álgebra, sobre un cuerpo F, con elemento identidad 1 y con una involución $a \longrightarrow \hat{a}$ donde $a + \hat{a}$, $a\hat{a} \in F$ para cada $a \in A$. Por medio del llamado proceso de Cayley-Dickson se construirá una nueva álgebra con involución la cual contiene a A como subálgebra. Además si la dimensión del álgebra A es igual a m, la dimensión de la nueva álgebra será 2m.

Fijamos $0 \neq \alpha \in F$ y denotamos $(A, \alpha) = \{(a_1, a_2)/ a_i \in A\}$. Definimos en (A, α) las operaciones suma componente a componente, multiplicación por un escalar componente a componente, y multiplicación interna:

$$(a_1, a_2) (a_3, a_4) = (a_1 a_3 + \alpha a_4 \hat{a}_2 , \hat{a}_1 a_4 + a_3 a_2)$$

Como es fácil ver (A, α) es álgebra sobre F. El elemento $(1,0)$ es un elemento identidad de (A,α). El conjunto $A' = \{ (a,0) / a \in A\}$ es una subálgebra de (A,α), isomorfa a A. Sea $v = (0,1)$. Entonces $v^2 = \alpha(1,0)$, y (A,α) es una suma directa de los espacios vectoriales A' y vA' . Si identificamos A' con A, los elementos del álgebra (A, α) son representados en la forma $a = a_1 + v a_2$, donde los $a_i \in A$ son unívocamente determinados por el elemento x , y la multiplicación en (A,α) es dada por:

$$(a_1 + va_2) (a_3 + va_4) = (a_1 a_3 + \alpha a_4 \hat{a}_2) + \alpha (\hat{a}_1 a_4 + a_3 a_2)$$

Dado $a = a_1 + va_2 \in (A, \alpha)$ tomar $\hat{a} = \hat{a}_1 - va_2$.

__Lema 2.2:__ (ver [55]) La aplicación $a \longrightarrow \hat{a}$ es una involución del álgebra (A, α). Además $a + \hat{a}$, $a\hat{a} \in F$ para cada $a \in (A, \alpha)$. Si la forma cuadrática $n(a) = a\hat{a}$ es estrictamente no degenerada sobre A, entonces la forma cuadrática $n(a) = a\hat{a}$ es estrictamente no degenerada sobre (A, α).

__Lema 2.3:__ (ver [55]) Si A es una álgebra de composición, entonces (A, α) es un álgebra de composición si y sólo si A es asociativa.

A continuación se dan ejemplos de álgebras de composición. Posteriormente se verá que estos son los únicos posibles. Como puede observarse cada uno de estos ejemplos se obtiene del anterior aplicando el proceso descrito más arriba, que recibe el nombre de proceso de Cayley-Dickson. Una reciente generalización de tal proceso es llevada a cabo por Wene en [52].

Ejemplos:

I) F cuerpo con car F $\neq 2$ y $n(\alpha) = \alpha^2$ para cada $\alpha \in F$. (Si car F= 2 F no es álgebra de composición ya que la forma bilineal asociada a n no es estrictamente no degenerada).

II) $K(\mu) = F + Fv_1$ donde $v_1^2 = v_1 + \mu$ y $4\mu + 1 \neq 0$ y donde F es un cuerpo arbitrario y $\mu \in F$, la involución es de manera que la imagen de $\alpha + \beta v_1$ es $\alpha + \beta - \beta v_1$, y la forma cuadrática $n(a) = a\bar{a}$. Si el polinomio $x^2 - x - \mu$ es irreducible en F[X], entonces el álgebra $K(\mu)$ es un cuerpo (extensión separable cuadrática de F), de otro modo $K(\mu) = F \oplus F$. Si la carF$\neq$2 entonces el elemento $v = v_1 - 1/2$ satisface la ecuación $v^2 = \alpha$ donde $\alpha = 1/4\,(4\mu + 1) \neq 0$. En este caso $K(\mu) = (F, \alpha)$. Recíprocamente si F es un cuerpo de car F $\neq 2$ entonces el álgebra (F, α) es un álgebra del tipo II). En efecto tomando $v_1 = v + 1/2$ se obtiene $v_1^2 = v_1 + (\alpha - 1/4)$ y además $4(\alpha - 1/4) + \mu = 4\alpha \neq 0$. También la imagen por la involución del elemento $\gamma + \beta v_1$ es igual a $(\gamma + \beta) - \beta v_1$.

III) $Q(\mu,\beta) = (K(\mu), \beta)$ con $\beta \neq 0$. Es el álgebra de cuaterniones generalizados., Como es fácil de ver $Q(\mu,\beta)$ es asociativa pero no conmutativa.

IV) $C(\mu,\beta,\gamma) = (Q(\mu,\beta), \gamma)$ con $\gamma \neq 0$. Es el álgebra de Cayley-Dickson. Es fácil verificar que no es asociativa.

__Teorema 2.3:__ (ver [55]) Sea A un álgebra de composición. Entonces A es isomorfa a una de las álgebra anteriormente citadas de los tipos I-IV.

Es fácil probar que en un álgebra de Cayley-Dickson $C(\mu,\beta,\gamma)$ sobre F cuerpo de car F $\neq$ 2 es posible elegir una base $e_0=1$, e_1 , ..., e_7 con la siguiente tabla de multiplicar:

TABLA I

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	α	e_3	αe_2	e_5	αe_4	$-e_7$	$-\alpha e_6$
e_2	$-e_1$	β	$-\beta e_1$	e_6	e_7	βe_4	βe_5
e_3	$-\alpha e_2$	βe_1	$-\alpha\beta$	e_7	αe_6	$-\beta e_5$	$-\alpha\beta e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	γ	$-\gamma e_1$	$-\gamma e_2$	$-\gamma e_3$
e_5	$-\alpha e_4$	$-e_7$	$-\alpha e_6$	γe_1	$-\alpha\gamma$	γe_3	$\alpha\gamma e_2$
e_6	e_7	$-\beta e_4$	βe_5	γe_2	$-\gamma e_3$	$-\beta\gamma$	$-\beta\gamma e_1$
e_7	αe_6	$-\beta e_5$	$\alpha\beta e_4$	γe_3	$-\alpha\gamma e_2$	$\beta\gamma e_1$	$\alpha\beta\gamma$

donde $\alpha = 1/4\ (4\mu + 1) \neq 0$.

__Teorema 2.4:__ (ver [55]) Sea A un álgebra de composición sobre un cuerpo F. Si $d(A) \geq 4$ entonces también $N(A) = F$.

<u>Lema 2.5</u>: *Sea A un álgebra de composición. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $n(x) = 0$ para algún $x \neq 0$ perteneciente a A

(b) hay divisores de cero en A.

Un álgebra de composición satisfaciendo (a) ó (b) se dice <u>escindida</u>.

<u>Lema 2.6</u>: *(ver [55]) Un álgebra de composición A es escindida si y sólo si A contiene un idempotente $e \neq 0,1$.*

<u>Teorema 2.7</u>: *(ver [55]) Cualesquiera dos álgebras de composición escindidas y de la misma dimensión sobre un cuerpo F son isomorfas.*

Veamos con más detalle la estructura de las álgebras de composición escindidas.

Es claro que $K(0) \cong F \oplus F$ con el isomorfismo $\alpha + \beta v_1 \longrightarrow (\alpha + \beta, \alpha)$.

Considerar ahora el álgebra de matrices de orden 2×2 con elementos en F. Este álgebra es de composición con respecto a la forma cuadrática $n(x) = \det(x)$. Como hay divisores de cero, este álgebra es también escindida. Por el teorema anterior $Q(0,1) \cong M_2(F)$. Este isomorfismo se puede establecer directamente así:

$$\alpha + \beta v_1 + \gamma v_2 + \delta v_1 v_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} \alpha+\beta & \gamma+\delta \\ \delta & \alpha \end{bmatrix}$$

Considerar el álgebra de Cayley-Dickson $C(0,1,1)$. Hemos probado ya que $C(0,1,1) \cong M_2(F) + v\, M_2(F)$. LLamar $x_0 = e_{11}$, $x_1 = e_{12}$, $y_1 = e_{21}$, $y_0 = e_{22}$ donde $\{ e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22} \}$ son la base del álgebra de matrices $M_2(F)$. Llamar $x_2 = ve_{22}$, $y_2 = ve_{11}$, $x_3 = ve_{21}$, $y_3 = -ve_{12}$. Entonces $C(0,1,1)$ tiene por base $\{ x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3 \}$ cuya tabla de multiplicar es:

TABLA II

	x_0	x_1	x_2	x_3	y_0	y_1	y_2	y_3
x_0	x_0	x_1	x_2	x_3	0	0	0	0
x_1	0	0	y_3	$-y_2$	x_1	x_0	0	0
x_2	0	$-y_3$	0	y_1	x_2	0	x_0	0
x_3	0	y_2	$-y_1$	0	x_3	0	0	x_0
y_0	0	0	0	0	y_0	y_1	y_2	y_3
y_1	y_1	y_0	0	0	0	0	x_3	$-x_2$
y_2	y_2	0	y_0	0	0	$-x_3$	0	x_1
y_3	y_3	0	0	y_0	0	x_2	$-x_1$	0

<u>§ 3 : Teoremas de estructura.</u>

A continuación se dan algunos resultados referentes a la estructura de las álgebras alternativas simples y semisimples.

<u>*Teorema 3.1*</u>*:(ver [55]) (Zhevlakov) Un álgebra alternativa conmutativa simple es un cuerpo.*

<u>*Teorema 3.2:*</u> *(ver [21], [22], [38]) (Kleinfeld) Sea A un álgebra alternativa simple que no sea asociativa. Entonces A es un álgebra de Cayley-Dickson sobre su centro.*

Un álgebra A se dice un <u>álgebra con división</u> si para cualesquiera $a,b \in A$ con $a \neq 0$ cada una de las ecuaciones $ax = b$, $ya = b$ es resoluble. Si cada una de estas ecuaciones con $a \neq 0$ tiene solución única y A tiene elemento identidad, entonces A se dice <u>álgebra de división</u>.

<u>*Corolario 3.3:*</u> *(Bruck, Kleinfeld, Skorniakov) Sea A un álgebra alternativa con división que no sea asociativa. Entonces A es un álgebra de Cayley-Dickson sobre su centro.*

Un álgebra alternativa A se dice <u>semiprima</u> si no posee ideales distintos de cero de cuadrado cero.

Un álgebra alternativa A se dice <u>puramente alternativa</u> si $U=0$.

<u>*Teorema 3.4:*</u>*(ver [40]) Sea A un álgebra alternativa semiprima y puramente alternativa cumpliendo :*

(a) Cada ideal no cero de A contiene un ideal minimal de A

(b) Cada cadena estrictamente decreciente de sumas directas de ideales de A es finita.

Entonces A es expresable de modo único salvo el orden como una suma de álgebras de Cayley-Dickson.

Teorema 3.5 (ver [40]) *Sea A un anillo semiprimo cumpliendo la condición de cadena descendente sobre ideales a derecha. Entonces A es expresable, de modo único salvo el orden, como una suma directa de ideales $A = A_1 \oplus \ldots\ldots\ldots \oplus A_n$ donde cada A_i ó es un álgebra de Cayley-Dickson ó un anillo asociativo artiniano simple.*

CAPITULO I

ISOMORFISMOS DE RETICULOS DE ALGEBRAS ALTERNATIVAS.

Introducción

Dada un álgebra A sobre un cuerpo F es conocido que el conjunto de todas las subálgebras de A tiene estructura de retículo. A este retículo lo denotaremos $\mathfrak{L}(A)$. Sea B otra álgebra sobre el cuerpo F. Por un isomorfismo de retículos, ó $\mathfrak{L}$-isomorfismo, del álgebra A en el álgebra B entendemos una aplicación biyectiva $\Psi: \mathfrak{L}(A) \longrightarrow \mathfrak{L}(B)$ tal que $\Psi(A_1 \vee A_2) = \Psi(A_1) \vee \Psi(A_2)$ y $\Psi(A_1 \cap A_2) = \Psi(A_1) \cap \Psi(A_2)$, siendo A_1 y A_2 subálgebras de A.

Nuestro interés está puesto en el estudio de los isomorfismos de retículos de álgebras alternativas. Se trata de investigar la relación algebraica de dos álgebras alternativas $\mathfrak{L}$-isomorfas.

Aquí se resolverá el problema cuando A es un álgebra simple no de división finito dimensional, es decir, si A es un álgebra de matrices cuadradas $M_n(D)$ con $n \geq 2$ y D un anillo asociativo de división ó si A es un álgebra de Cayley-Dickson escindible. Entonces demostramos que $B = M_n(\Delta)$ y que salvo para el caso $A = M_2(D)$, B es semiisomorfa a A . Cuando A es un álgebra de división central no asociativa, es decir, un álgebra de Cayley-Dickson de división sobre F, se demuestra que B ha de ser un álgebra de Cayley-Dickson ó una extensión puramente inseparable de F de dimensión p^3 con $p = \operatorname{car} F$. En el caso de que A sea un álgebra finito dimensional semisimple se extienden los resultados de Barnes [7] para álgebras asociativas y se deduce que B ha de ser también semisimple, y que las imágenes por Ψ de los sumandos directos simples de A de dimensión más grande que uno vuelven a ser sumandos directos simples de B.

§ 1: Algebras alternativas con longitud pequeña.

Comenzaremos nuestro estudio con la siguiente proposición que extiende el resultado asociativo (ver [7], §3).

Proposición 1.1: Si A es un álgebra alternativa y l(A) es finita, entonces d(A) es finita.

-Demostración-

Sea R=R(A), el radical nilpotente del álgebra A.

Veamos que d(R)= l(R).

Como R es nilpotente existe $n \in \mathbf{Z}$ tal que $R^{n+1} = 0$. Se tiene así la cadena $0 \leq R^{n+1} \leq \ldots\ldots \leq R^2 \leq R$. Notar que R^i/R^{i+1} es un álgebra cero (es decir de cuadrado cero). Entonces cada subespacio de R^i/R^{i+1} es una subálgebra y por tanto $l(R^i/R^{i+1}) = d(R^i/R^{i+1})$. Pero $l(R) \geq \sum l(R^i/R^{i+1})$ y $d(R) = \sum d(R^i/R^{i+1}) = \sum l(R^i/R^{i+1})$. Luego $l(R) \geq d(R)$. Así $l(R) = d(R)$ y d(R) es finita, en particular.

Bastará con ver ahora que d(A/R) es finita, ó equivalentemente que d(A) es finita si R=0.

Si A tiene radical nilpotente cero y l(A) es finita, se puede aplicar el Teorema 3.5 de Cap. 0 y así A es expresable como suma directa de ideales $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, de manera que los A_i's son álgebras de Cayley-Dickson sobre su centro ó álgebras asociativas simples de longitud finita. Barnes (ver §2 de [7]) demostró que las álgebras asociativas simples de longitud finita son de dimensión finita. Los A_i's que sean álgebras de Cayley-Dickson serán álgebras de dimensión 8 sobre un cuerpo K_i extensión de F. Basta entonces ver que K_i es extensión finita de F. Para ello sea $t \in K_i$ y $F[t]$ el álgebra de polinomios en t. Si t fuese trascendente sobre F se tendría que $l(F[t])$ es infinita, contradiciendo que $l(A)$ es finita. Por tanto K_i es extensión algebraica de F. Pero K_i es un álgebra finitamente generada sobre F. Luego K_i es extensión finita de F.

<u>*Lema 1.2:*</u> *Si $l(A) = 1$, entonces $d(A) = 1$.*

-Demostración-

Si A es nilpotente, como en la demostración de Proposición 1,1 se ve que $d(A) = l(A) = 1$. Si A no es nilpotente posee un idempotente e (ver Proposición 3,3 de [36]). Pero (e) es una subálgebra de A y así A= (e).

Las subálgebras minimales de un álgebra A son generadas por idempotentes o son álgebras cero. Las álgebras de división al no poseer más elementos nilpotentes e idempotentes que 0 y 1 poseen una sola subálgebra minimal. Ahora bien, ¿son las únicas?:

<u>*Lema 1.3:*</u> *Si A es álgebra con $d(A)$ finita y una única subálgebra minimal, entonces A es nilpotente ó de división.*

-Demostración-

Si A no es nilpotente, contiene un idempotente que genera la única subálgebra minimal de A. En este caso $R(A) = 0$, ya que si no A tiene dos subálgebras minimales. Entonces A es suma directa de álgebras simples. Pero cada uno de los sumandos directos simples de A contiene una subálgebra minimal. Por tanto A es simple. Si $A \cong M_n(D)$ (álgebra de matrices cuadradas $n \times n$ sobre el anillo de división D), es claro que $n = 1$. Si A es un álgebra de Cayley-Dickson, puede ser de división o con divisores de cero. En este último caso, por la tabla de la página 11, A poseería más de una subálgebra minimal. Luego A es álgebra de división.

__*Lema 1.4:*__ *(a) Sea $M_2(F)$, el álgebra de matrices 2×2 sobre el cuerpo F, entonces $l(M_2(F)) = 4$.*

(b) Sea C un álgebra de Cayley-Dickson central sobre el cuerpo F, entonces i) si C es de división $l(C)=4$ y ii) si C es escindida $l(C)=7$.

-Demostración-

(a) Si denotamos $(e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$ la base del álgebra de matrices, es claro que se puede construir la cadena de subálgebras:

$$0 \le (e_{11}) \le (e_{11}, e_{22}) \le (e_{11}, e_{22}, e_{12}) \le (e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{21})$$

(b) i) Racine demostró en Teorema 5 de [33] que en este caso las subálgebras maximales de C son álgebras de cuaternios de división. Un álgebra de cuaternios se obtiene a partir de una extensión cuadrática de F aplicando en un paso el proceso de Cayley-Dickson descrito en el Capítulo 0. Fácilmente se comprueba que en el caso de álgebras de cuaternios de división no existen subálgebras entre una subálgebra extensión cuadrática de F y el álgebra de cuaternios. Así en este caso $l(C)=4$.

ii) Atendiendo a la TABLA II y al Teorema 5 de [33] podemos comprobar que la siguiente cadena es de subálgebras y es irrefinable

$$0 \leq (y_0) \leq (y_0, y_1) \leq (y_0, y_1, x_2) \leq (x_0, x_2, y_0, y_1) \leq$$
$$(x_0, x_2, x_3, y_0, y_1) \leq (x_0, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2) \leq C$$

Lema 1.5: *Sea A álgebra semisimple con $l(A) \leq 3$. Entonces A es una suma directa de álgebras de división asociativas.*

-Demostración-

Por ser A semisimple es suma directa de álgebras simples. Aplicando ahora el Lema 1,4 es fácil deducir que cada sumando debe ser un álgebra de división asociativa.

Lema 1.6: *Si $l(A)=2$ y A tiene al menos dos subálgebras minimales, entonces $d(A)=2$.*

-Demostración-

Si A es nilpotente $d(A) = l(A) = 2$, según demostración de Proposición 1,1. Si A no es nilpotente, entonces $l(R(A)) = 0$ ó $l(R(A)) = 1$. Si $l(R(A)) = 1$, entonces $l(A/R(A)) = 1$. Así $d(R(A)) = d(A/R(A)) = 1$ por Lema 1,2. Luego $d(A) = 2$. Si $l(R(A)) = 0$, entonces A es semisimple. Así A es suma directa de álgebras de división asociativas por Lema 1,5, y como A tiene al menos dos subálgebras minimales no puede ser álgebra de división. Así $A \cong D_1 \oplus D_2$ con D_1, D_2 álgebras de división. Ahora $l(A) = 2$, $l(D_1) = l(D_2) = 1$, luego $d(D_1) = d(D_2) = 1$, y por tanto $d(A)=2$.

Finalmente se obtiene la clasificación de todas las álgebras alternativas de longitud 2. Se observará que todas ellas son asociativas (algo que realmente ya pudo deducirse de los resultados anteriores), lo que determina un criterio de asociatividad para álgebras alternativas: "Cada álgebra alternativa de longitud dos es asociativa". Aportaciones en esta línea pueden verse en los trabajos de Kleinfeld [23] y [24], Hentzel y Piacentini [19], Polikarpov [31], etc...

__Lema 1.7:__ Sea k el cardinal de F. Suponer $l(A) = 2$. Entonces A es isomorfa a una de las álgebras listadas en la tabla siguiente:

Tipo	*Relaciones definidoras*	*Nº de subálg. minimales*
I	*Extensión de F con F subálg. maximal*	1
II	(a, a^2) con $a^3 = 0$	1
III a)	(e, r), $e^2 = e$, $r^2 = 0$, $er = re = 0$	2
III b)	(e, r), $e^2 = e$, $r^2 = 0$, $er = re = r$	2
IV	$F \oplus F$	3
V	(a_1, a_2), $a_i a_j = 0 \quad \forall i, j$	$k+1$
VI a)	(e, r), $e^2 = e$, $r^2 = 0$, $er = r$, $re = 0$	$k+1$
VI b)	(e, r), $e^2 = e$, $r^2 = 0$, $er = 0$, $re = r$	$k+1$

-Demostración-

Puede ocurrir que A tenga sólo una subálgebra minimal ó que tenga al menos dos. En el primer caso es álgebra de división ó nilpotente y en el segundo $d(A) = 2$. Luego el asunto se reduce a que A es de división ó $d(A) = 2$.

Si $d(A) = 2$, entonces $d(R(A)) = 0, 1, 2$.

i) Supongamos que A es álgebra de división. Sea 1 la identidad de A. Entonces F.1 es la única subálgebra minimal de A. Como $l(A) = 2$, existe $t \in A$ tal que $t \notin F.1$. Así $A = F[t]$, el álgebra de polinomios en t, y es por tanto conmutativa. Entonces A es extensión de F y F es su subálgebra maximal.

ii) Supongamos que A es semisimple, pero A no es álgebra de división. Por Lema 1,5 $A \cong F \oplus F$. Si e_1, e_2 son las identidades de los dos sumandos directos, se ve fácilmente que (e_1), (e_2), $(e_1 + e_2)$ son todas las subálgebras minimales de A.

iii) Si $d(R(A)) = 1$, se tiene $R(A) = (r)$ para algún r y $r^2 = 0$. Ya que A no es nilpotente, A contiene un idempotente e y así $A = (e, r)$. Como (r) es un ideal, $er = \lambda r$ y $re = \mu r$ para $\lambda, \mu \in F$. Pero

$$e(er) = \lambda er = \lambda^2 r = (ee)r = er = \lambda r.$$

Así $\lambda = 0, 1$ y similarmente $\mu = 0, 1$. Se tienen por tanto 4 tipos de álgebras que corresponden a III a), III b), VI a), VI b).

Veamos sus subálgebras minimales.

A tiene k+1 subespacios vectoriales uni-dimensionales: $(e + \theta r)$ y (r) con $\theta \in F$. El subespacio $(e + \theta r)$ es una subálgebra si $(e + \theta r)^2 \in (e + \theta r)$. Pero

$$(e + \theta r)^2 = (e + \theta r)(e + \theta r) = e + \theta re + \theta er = e + \theta(\lambda + \mu)r$$

Así $(e + \theta r)$ es una subálgebra si y sólo si $\theta(\lambda + \mu) = \theta$. Esto es si $\theta = 0$ ó si $\lambda + \mu = 1$. Si A es del tipo III, entonces $\lambda + \mu \neq 1$ y sólo hay dos subálgebras minimales de A que son (e), (r). Si A es de tipo VI entonces $\lambda + \mu = 1$. Así $(e + \theta r)$ es subálgebra para todo $\theta \in F$ y A tiene k+1 subálgebras minimales.

iv) Supongamos que A es nilpotente. Entonces ó A es álgebra cero y cada subespacio de A es una subálgebra ó $A^2 = (b)$ para algún $b \neq 0$. En este segundo caso $A = (a, b)$. Como $A^3 < A^2$ se tendrá $A^3 = 0$. Así $ab = ba = b^2 = 0$. Ya que A no es álgebra cero, $a^2 \neq 0$ y así $A^2 = (a)$. Luego A responde al tipo II y tiene una única subálgebra minimal.

§2: Algebras alternativas $\mathfrak{L}$-isomorfas al álgebra de cuaternios de división central

Supondremos a lo largo de todo este párrafo que la característica de F es distinta de dos.

Vamos a estudiar las álgebras $\mathfrak{L}$-isomorfas a un álgebra de cuaternios de división central. Este es un primer paso necesario antes de abordar el estudio de las álgebras alternativas $\mathfrak{L}$- isomorfas a un álgebra de Cayley-Dickson de división.

Sea Q un álgebra de cuaternios de división central sobre F. Su dimensión como espacio vectorial sobre F es 4 y $l(Q) = 3$ (ver Capítulo 0, §2). Podemos encontrar una base $\{ e_0, e_1, e_2, e_3 \}$ cuya multiplicación es como la de los elementos $\{ e_0, e_1, e_2, e_3 \}$ de la TABLA I de la página 00. Q es un álgebra de composición asociativa y no conmutativa. Tiene solamente una subálgebra minimal y las subálgebras con longitud dos son extensiones cuadráticas de F. Como la característica de F es distinta de dos, estas extensiones son de la forma $\langle e_0, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \rangle$ con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F$. Dos de estas subálgebras diferentes generan toda el álgebra de cuaternios y su intersección es F. Es fácil ver que F es un cuerpo infinito por el Teorema de Wedderburn y por ser Q un álgebra de división no cuerpo.

Sea A un álgebra $\mathfrak{L}$-isomorfa al álgebra Q. A tiene sólamente una subálgebra minimal y por Lema 1,2 A es nilpotente o un álgebra de división.

Lema 2.1: *A es nilpotente y* $\mathfrak{Z}$*- isomorfa a Q sí y sólo sí l(A) = d(A) = 3 y A tiene una base {a, b, c} con tabla de multiplicar:*

TABLA III

	a	b	c
a	c	φc	0
b	0	γc	0
c	0	0	0

con $\varphi = 0$ *y entonces* $\gamma \in (F^*)^2$*, siendo F un cuerpo en que la ecuación* $X^2 = -1$ *no tiene solución.*

ó con $\varphi = 1$ *y entonces* $\gamma \in F^*$ *y es tal que en F la ecuación* $X^2 + X + \gamma = 0$ *no tiene solución.*

-Demostración-

Si A es nilpotente y $\mathfrak{Z}$-isomorfa a Q, l(A) = d(A) = 3. M. I. Badalov demuestra en [5] que todas las álgebras alternativas nilpotentes con dimensión ≤ 5 son asociativas. Kruse y Price (ver Teorema 2.3.6 en [26]) describen todas las álgebras asociativas nilpotentes de dimensión 3, y dan 6 posibles casos de álgebras no isomorfas. Así si A es un álgebra alternativa nilpotente de dimensión 3, podemos encontrar una base { a, b, c} con $c \in$ Ann(A) tal que se cumple una de las siguientes condiciones:

(1) $a^2 = b^2 = ab = ba = 0$ (álgebra cero)

(2) $a^2 = b^2 = 0$, $ab = -ba = c$

(3) $a^2 = c$, $ab = ba = b^2 = 0$

(4) $a^2 = c$, $ab = ba = 0$, $b^2 = \gamma c$, donde γ es un representante prefijado del coconjunto $(F^*)^2$ en F^*.

(5) $a^2 = ab = c$, $ba = 0$, $b^2 = \gamma c$ para algún $\gamma \in F$

(6) $a^2 = b$, $a^3 = c$, $a^4 = 0$

Sólamente los tipos (4) y (5) pueden corresponder a un álgebra A $\mathcal{L}$-isomorfa a Q, por poseer A una única subálgebra minimal. Por esta misma razón, en ambos casos, es necesario hacer restricciones sobre el cuerpo F, de modo que no existan elementos de la forma $a + \mu b$ que sean de cuadrado cero, y que generen así más subálgebras minimales. Estas restricciones son como fácilmente se comprueba, en las de tipo (4), que la ecuación $X^2 = -1$ no tenga solución en F, y en las de tipo (5) que $0 \neq \gamma$ sea tal que tampoco la ecuación $X^2 + X + \gamma = 0$ tenga solución en F.

Recíprocamente, vamos a demostrar que A es $\mathcal{L}$-isomorfa a Q. A tiene una única subálgebra minimal (c). Las subálgebras con longitud 2 son (c, $a+\lambda b$) y (c, b) con $\lambda \in F$. Se observa que dos subálgebras diferentes de longitud dos generan el álgebra A y su intersección es (c). El cardinal del conjunto $\mathcal{B} = \{ A_i \leq A \ / \ l(A_i) = 2 \}$, que denotaremos $|\mathcal{B}|$, por ser F un cuerpo infinito es igual que el cardinal de F, que denotaremos $|F|$. Pero $\mathcal{C} = \{ S \leq Q \ / \ l(S) = 2 \} = \{ (e_0, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3) \ / \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F \}$ y así $|F| \leq |\mathcal{C}| \leq |F \times F \times F| = |F|$. Por lo tanto existe una aplicación biyectiva de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{B}$. Ahora podemos construir el $\mathcal{L}$-isomorfismo $\psi: \mathcal{L}(Q) \longrightarrow \mathcal{L}(A)$ tal que $\psi((e_0)) = (c)$, $\psi(S) = \varphi(S)$ si $S \in \mathcal{C}$, $\psi(Q) = A$ y $\psi(0) = 0$.

Lema 2.2: Sea A un álgebra de división $\mathfrak{L}$-isomorfa a Q. Entonces A cumple una de las siguientes condiciones:

(a) A es una extensión del cuerpo F, puramente inseparable y p^2 dimensional con $p = car\, F$.

(b) A es un álgebra de división asociativa central con dimensión m^2, donde m es la dimensión de las subálgebras de A de longitud 2. Todas estas subálgebras serán estensiones del cuerpo F y al menos una de ellas separable.

-Demostración-

Si A es un álgebra de división, el centro de A puede ser F, una subálgebra de A con longitud dos o todo A. Como todas las subálgebras con longitud dos son maximales, si el centro es una subálgebra de este tipo, A es un cuerpo. Así i) A es un cuerpo o ii) A es un álgebra de división central.

Por Lema 1,7 todas las subálgebras de A con longitud dos son extensiones del cuerpo F sin subcuerpos intermedios. Así en una de estas subálgebras el conjunto de todos los elementos separables sobre F es F o toda la subálgebra. Por lo tanto las subálgebras de A con longitud dos son estensiones separables ó puramente inseparables de F. Denotaremos por Ψ el $\mathfrak{L}$-isomorfismo de Q a A. Consideremos $\Psi(e_0, e_1)$, $\Psi(e_0, e_2)$, $\Psi(e_0, e_3)$. Dos de ellas serán del mismo tipo, es decir, separables ó puramente inseparables.

i) Supongamos que A es un cuerpo. Si dos cuerpos intermedios entre F y A son extensiones separables de F, por ejemplo $\Psi(e_0, e_1)$ y $\Psi(e_0, e_2)$, A es una extensión de F finito-dimensional separable. Como F es un cuerpo infinito, según se argumenta al principio del párrafo, y Q tiene como subálgebras a las de la forma $(e_0, e_1+\lambda_1 e_2+\lambda_2 e_3)$ con λ_1 , $\lambda_2 \in F$, que son un número infinito, entonces A tiene un número infinito de subálgebras. Sea ahora L la clausura normal de A, la cual es también una extensión de F separable y finita , por serlo A. L es así una extensión de Galois de F. Su grupo de Galois es un grupo finito y por lo tanto tiene un número finito de subgrupos que es el mismo que el número de subcuerpos de L. Pero hemos visto que A tiene un número infinito de subcuerpos con longitud dos, luego hay una contradicción. Así todos los subcuerpos de A son extensiones puramente inseparables de F. Como $\Psi(e_0, e_1)$, $\Psi(e_0, e_2)$ son sin subcuerpos intermedios, tendrán $d(\Psi(e_0, e_1)) = d(\Psi(e_0, e_1)) = p$ con $p = \text{car } F$ y así A es p^2-dimensional sobre F.

ii) Supongamos que A es un álgebra de división central. Será asociativa porque su longitud es 3 y la longitud de un álgebra de división no asociativa central es 4 (ver Lema 1,4). Por 13.1 en [32] cada subcuerpo maximal de A será m-dimensional con $d(A) = m^2$. Pero no todos los subcuerpos maximales pueden ser puramente inseparables porque por 13.5 en [32] A sería igual a F.

Damos a continuación un ejemplo que demuestra que existen extensiones de F, puramente inseparables, con retículo de subálgebras $\mathfrak{L}$-isomorfo a Q.

<u>Ejemplo:</u> Sea $\mathbf{Z}_5(X, Y)$ el cuerpo de las funciones racionales en X e Y sobre el cuerpo de 5 elementos. Sea la extensión $\mathbf{Z}_5(X, Y)(\sqrt[5]{X}, \sqrt[5]{Y})$. Es un álgebra sobre $\mathbf{Z}_5(X, Y)$ con dimensión 25. Todos los subcuerpos intermedios entre $\mathbf{Z}_5(X, Y)$ y $(\mathbf{Z}_5(X, Y))(\sqrt[5]{X}, \sqrt[5]{Y})$ son las subálgebras

con longitud dos. Todos son extensiones 5-dimensionales de $\mathbf{Z}_5(X, Y)$ y cualesquiera dos diferentes de ellos generan $(\mathbf{Z}_5(X, Y))(\sqrt[5]{X}, \sqrt[5]{Y})$ y su intersección es F. Sea Q un álgebra de cuaternios de división sobre $(\mathbf{Z}_5(X,Y))$, entonces $(\mathbf{Z}_5(X, Y))(\sqrt[5]{X}, \sqrt[5]{Y})$ y Q son $\mathfrak{L}$-isomorfas.

§ 3: Algebras alternativas $\mathfrak{L}$-isomorfas a un álgebra de Cayley-Dickson de división central.

A lo largo de este párrafo supondremos que la car $F \neq 2$.

Sea C un álgebra de Cayley-Dickson de división central. Hemos visto anteriormente que $l(C) = 4$ (Lema 1,4) y sus subálgebras maximales son álgebras de cuaternios de división. Las subálgebras con longitud dos son $(e_0, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6 + \lambda_7 e_7)$ con $\lambda_i \in F$ no todos cero. Como C es un álgebra de división tiene una única subálgebra minimal, F. Por la TABLA I, podemos comprobar que dos subálgebras con longitud dos distintas generan un álgebra de cuaternios de división.

Supongamos que A es un álgebra alternativa sobre F y que existe un $\mathfrak{L}$-isomorfismo $\Psi: \mathfrak{L}(C) \longrightarrow \mathfrak{L}(A)$. A tiene una única subálgebra minimal y por Lema 1,3 A es un álgebra de división o un álgebra nilpotente.

<u>*Lema 3.1*</u>: *Sea A un álgebra de división que no es una extensión puramente inseparable. Entonces A es un álgebra de Cayley-Dickson de división central.*

-Demostración-

Si A es un álgebra de división su centro puede ser F, un álgebra con longitud dos, un álgebra con longitud tres o todo A. Las subálgebras con longitud tres son maximales y así si $Z(A)$ fuese una subálgebra con longitud tres, tendríamos que $Z(A) = A$.

Supongamos que A es un cuerpo. Sea Q una subálgebra maximal de C. Sabemos que Q es un álgebra de cuaterníos. $\Psi(Q)$ es un cuerpo por ser A cuerpo. Por Lema 2,2 $\Psi(Q)$ es una extensión puramente inseparable de F de dimensión p^2, con p=car F. Como esto ocurre para cada subálgebra maximal de A, todas las subálgebras de A con longitud dos serán extensiones puramente inseparables de F con dimensión p. Así A es una extensión puramente inseparable de F de dimensión p^3, lo que es falso, por hipótesis.

Por tanto $Z(A)$ es una subálgebra con longitud dos o es F. Si $l(Z(A))=2$, podemos suponer $Z(A)=\Psi(e_0,e_1)$ (por el proceso de Cayley-Dickson esto no es una pérdida de generalidad). Se observa que para cada $Q \leq C$ tal que $l(Q)=3$ y $(e_0,e_1) \leq Q$, $\Psi(Q)$ es un cuerpo porque $\Psi(e_0,e_1)$ es una subálgebra maximal de $\Psi(Q)$. Por Lema 2,2 $\Psi(Q)$ es una extensión de F puramente inseparable de dimensión p^2, con p=car F. Ahora vamos a demostrar que cada subálgebra propia de A es también una extensión puramente inseparable de F. Comenzamos con las subálgebras de longitud 2. Sea $S=\Psi\,(e_0, \lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3+\lambda_4e_4+\lambda_5e_5+\lambda_6e_6+\lambda_7e_7)$ una subálgebra de A con longitud dos, donde $\lambda_i \in F$ y para algún $i \geq 2$ $\lambda_i \neq 0$. Entonces $\Psi(e_0,e_1) \neq S$. Así existe $Q' \leq C$ tal que $l(Q')=3$ y $\Psi(Q') = S \vee \Psi(e_0,e_1)$. Como Q'es un álgebra de cuaterníos y hemos visto que $\Psi(Q')$ es una extensión puramente inseparable de F, se tiene que S es una extensión puramente inseparable de F. Así todas las subálgebras de A con longitud dos son extensiones puramente inseparables de F. Entonces si Q es una subálgebra de cuaternios de C, $\Psi(Q)$ es una extensión puramente inseparable de F, por 13.5 en [32] y Lema 2,2. Consideremos ahora A como un álgebra sobre su centro $\Psi(e_0,e_1)$. Es un álgebra de división que será asociativa, puesto que su longitud es 3. Pero entonces A es un álgebra central sobre $\Psi(e_0,e_1)$ y todas sus subálgebra son extensiones puramente inseparables. Por 13.5 en [32] $A= \Psi(e_0,e_1)$, lo que es falso. Por lo tanto A es un álgebra central sobre F.

Así A es álgebra de división central sobre F y su longitud es 4. Si demostramos que A no es asociativa, A será un álgebra de Cayley-Dickson de división. Supongamos que A es asociativa. Cada subálgebra maximal de A es imagen por Ψ de una subálgebra de cuaternios de C. Por Lema 1,8 las subálgebras maximales de A son:

ó (a) extensiones puramente inseparables del cuerpo F con dimensión p^2,

ó (b) álgebras centrales asociativas de división con dimensión m^2, siendo m la dimensión de cada subálgebra con longitud 2, subálgebras que han de ser todas extensiones del cuerpo F y ademas alguna de ellas extensión separable.

Por tanto se tiene uno de los tres casos siguientes.

(1) Todas las subálgebras maximales de A son del tipo (a). Entonces por 13.5 en [32] tenemos que A=F. Falso.

(2) Todas las subálgebras maximales de A son del tipo (b). Entonces los subcuerpos maximales de estas subálgebras maximales serán m-dimensionales. Como A es un álgebra asociativa de división central, A tiene dimensión n^2 con n la dimensión de los subcuerpos maximales de A (ver 13.1 en [32]). Así n=m, lo que lleva a una contradicción.

(3) Existen subálgebras maximales de tipo (a) y de tipo (b). Sea

$\Phi(Q)$ una del tipo (b). Entonces existe $\Psi(K) \leq \Psi(Q)$ tal que $\Psi(K)$ es una extensión separable de F. Si $\Psi(K)$ es un subcuerpo maximal de A, como A tiene dimensión n^2 con n la dimensión de cada subcuerpo maximal de A, $A=\Psi(Q)$, lo que es falso. Por lo tanto existe $\Psi(Q')$ extensión puramente inseparable de F con dimensión p^2 tal que $\Psi(K) \leq \Psi(Q')$. Contradicción porque $\Psi(K)$ es una extensión separable.

Por lo tanto A es alternativa y no asociativa, y así es un álgebra de Cayley-Dickson de división central.

<u>*Lema 3.2:*</u> *Sea C un álgebra de Cayley-Dickson de división central sobre F, cuerpo con car $F \neq 2$. Entonces existen subálgebras maximales de C, Q' y Q'' tales que $Q' \cap Q'' = F$.*

-Demostración-

Consideremos la base de C $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ que aparece en la TABLA I. Tomemos:

$Q' = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ $\quad$ $Q'' = \{e_0, e_4, e_1 + e_6, e_5 + \gamma e_2\}$

Si $Q' \cap Q'' = B$ donde $l(B)=2$, tendremos

$B = (e_0, \delta e_4 + \lambda(e_1 + e_6) + \mu(e_5 + \gamma e_2))$ con $\delta, \lambda, \mu \in F$ no todos cero.

Pero como $B \leq Q'$ tendremos que $\delta = \lambda = \mu = 0$. Contradicción.

<u>*Lema 3.3:*</u> *No existe ningún álgebra nilpotente $\mathfrak{L}$-isomorfa a C*

-Demostración-

Suponer que A es un álgebra nilpotente y $\Psi: \mathfrak{L}(C) \longrightarrow \mathfrak{L}(A)$ es el $\mathfrak{L}$-isomorfismo. Sea $A' = \Psi(e_0, e_1, e_2, e_3)$. A' es nilpotente y por Lema 2.1 tiene una base $\{a, b, c\}$ con tabla de multiplicar como la que allí aparece.

Observamos que, como C tiene la propiedad de tener una única subálgebra minimal, A tendrá que tener una sóla subálgebra minimal, que es también subálgebra minimal de A′. Esta subálgebra es (c).

Sea $A'' \leq A$ tal que A'' no es subálgebra de A' y $l(A'') = 2$. Entonces $A'' = (c, d_1)$ con $d_1 \in A$ y $d_1^2 = \lambda c$ con $0 \neq \lambda \in F$. Si ahora consideramos $(c,a) \vee (c,d_1)$, tendremos una subálgebra maximal de A. Por Lema 2,1 y cambiando d_1 por un deseable $d \in A$, podemos encontrar una base con tabla de multiplicar:

TABLA IV

	a	d	c
a	c	δc	0
d	0	μc	0
c	0	0	0

con $\delta = 0$ y entonces $\mu \in (F^*)^2$

ó con $\delta = 1$ y entonces $0 \neq \mu \in F$

Así A tiene una base {a, b, d, c} con tabla de multiplicar:

TABLA V

	a	b	d	c
a	c	φc	δc	0
b	0	ωc	θc	0
d	0	εc	μc	0
c	0	0	0	0

$\theta, \varepsilon \in F$

Por Lema 3,2 $(e_0, e_1, e_2, e_3) \cap (e_0, e_4, e_1+e_6, e_5+\gamma e_2) = F$. Ahora suponer $\Psi(e_0, e_4, e_1+e_6, e_5+\gamma e_2) = (c, \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 d, \mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 d) = A'''$

con $\lambda_i, \mu_i \in F$ para $i = 1, 2, 3$ y los λ_i's no todos cero y los μ_i's no todos cero y no proporcionales a los λ_i's. Podemos encontrar una combinación lineal de $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 d$ y $\mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 d$ que sea un elemento no cero de A'. Por lo tanto $l(A' \cap A''') = 2$. Contradicción.

Con los resultados anteriores, puede ya enunciarse el siguiente :

<u>Teorema 3.4:</u> *Sea A un álgebra alternativa sobre F, cuerpo con car $F \neq 2$, $\mathcal{L}$-isomorfa a un álgebra de Cayley-Dickson de división central. Entonces A es ó un álgebra de Cayley-Dickson de división central ó, si car $F = p \geq 1$, una extensión puramente inseparable de F de dimensión p^3.*

<u>Corolario 3.5:</u> *Sea F un cuerpo perfecto y $\Psi: \mathcal{L}(C) \longrightarrow \mathcal{L}(A)$ un $\mathcal{L}$-isomorfismo. Si C es un álgebra de Cayley-Dickson de división central, entonces A es un álgebra de Cayley-Dickson de división central.*

El siguiente ejemplo demuestra que en una extensión de un cuerpo F con car $F = p$ del tipo $K = F(a, b, c)$ con $[K : F] = p^3$ y $a^p, b^p, c^p \in F$, existen subálgebras maximales cuya intersección es F y otras cuya intersección es una subálgebra con longitud dos.

<u>Ejemplo:</u> $K = \mathbb{Z}_3(X, Y, Z)(\sqrt[3]{X}, \sqrt[3]{Y}, \sqrt[3]{Z})$ con $F = \mathbb{Z}_3(X, Y, Z)$. Tomar $A' = F(\sqrt[3]{Z}, \sqrt[3]{X}.\sqrt[3]{Z} + \sqrt[3]{Y}.\sqrt[3]{Z^2})$ y $A'' = F(\sqrt[3]{X}, \sqrt[3]{Y})$. Entonces $A' \cap A'' = F$. Tomar $B' = F(\sqrt[3]{Z}, \sqrt[3]{X} + \sqrt[3]{Y})$ y $B'' = F(\sqrt[3]{X}, \sqrt[3]{Y})$. Entonces $B' \cap B'' = F(\sqrt[3]{X} + \sqrt[3]{Y})$.

§ 4 : Algebras alternativas $\mathfrak{L}$-isomorfas a un álgebra de matrices 2×2 sobre el cuerpo F.

Sea $M_2(F)$ el álgebra de matrices 2×2 con coeficientes en F. Denotamos por e_{ij} la base de $M_2(F)$ con la siguiente tabla de multiplicar:

TABLA VI

	e_{11}	e_{12}	e_{21}	e_{22}
e_{11}	e_{11}	e_{12}	0	0
e_{12}	0	0	e_{11}	e_{12}
e_{21}	e_{21}	e_{22}	0	0
e_{22}	0	0	e_{21}	e_{22}

Proposición 4.1: *Sea F el cuerpo finito de dos elementos y $M = M_2(F)$. Entonces $(e_{11} + e_{22},\ e_{11} + e_{12} + e_{21})$ es una subálgebra maximal de M y tiene una única subálgebra minimal.*

-Demostración-

Considerar $1 = e_{11}+ e_{22}$ y $a = e_{11}+ e_{12}+ e_{21}$. Entonces $a^2 + a + 1 = 0$ y el polinomio irreducible de a sobre el cuerpo F es $X^2 + X + 1$. Así $F[a] = K$ es un cuerpo con dimensión 2 sobre F. Además $K = (e_{11} + e_{22}, e_{11} + e_{12} + e_{21})$ tiene una única subálgebra minimal. Si N es una subálgebra de M conteniendo a K, entonces N es un espacio vectorial sobre K. Se sigue que la dimensión de K sobre F divide a la dimensión de N sobre F. Así ó $d(N) = 2$ y

N=K ó d(N) = 4 y N=M. Por lo tanto K es una subálgebra maximal de M.

Proposición 4.2: Sea $\Psi: \mathcal{L}(M) \longrightarrow \mathcal{L}(A)$ un $\mathcal{L}$-isomorfismo de álgebras alternativas sobre el cuerpo F y $M = M_2(F)$. Entonces si $\Psi(e_{ij}) = A_{ij}$

$I = \Psi(e_{11} + e_{22})$ es el centro de A

$I^2 = I$

$A_{12}^2 = A_{21}^2 = 0$

$A_{11}^2 = A_{11} \quad A_{22}^2 = A_{22}$

-Demostración-

Es claro que $I \vee A_{12}$ tiene solamente dos subálgebras minimales. Por Lema 1,7 $I \vee A_{12}$ es conmutativa. Pero $I \leq Z(I \vee A_{12})$ y $I \leq Z(I \vee A_{21})$, por lo tanto $I \leq Z(I \vee A_{12} \vee A_{21}) = Z(A)$. Como $I \vee A_{12}$ es una álgebra del tipo III, por Lema 1,7, tendremos 1) $I^2 = I$ y $A_{12}^2 = 0$ ó 2) $I^2 = 0$ y $A_{12}^2 = A_{12}$. Veamos que el segundo caso es imposible. El álgebra $A_{11} \vee A_{22}$ tiene exactamente tres subálgebras minimales. Así si $F \neq \mathbf{Z}_2$, $A_{11} \vee A_{22}$ es del tipo IV por Lema 1,7 , y $I^2 = I$. Si $F = \mathbf{Z}_2$, por Lema 4,1 $K = (e_{11} + e_{22},\ e_{11} + e_{12} + e_{21})$ es una subálgebra maximal de M con $(e_{11} + e_{22})$ como única subálgebra minimal. Si $I^2 = 0$, $\Psi(K)$ es nilpotente. Entonces $I = R(I \vee A_{12}) = R(I \vee A_{21})$ puesto que $I \vee A_{12}$ y $I \vee A_{21}$ son del tipo III. Así I es un ideal de $A = A_{12} \vee A_{21}$. Por lo tanto $l(A/R(A)) \leq 3$. Por Lema 1,5 $A/R(A)$ es una suma directa de álgebras de división y así no tiene elementos nilpotentes. Entonces todos los elementos nilpotentes de A están en R(A). Por lo tanto $\Psi(K) \leq R(A)$. Pero A no es nilpotente y $\Psi(K)$ es subálgebra maximal de A, por tanto $d(A/R(A)) = 1$, $d(R(A)) = l(\Psi(K)) = 2$ y entonces $l(A) = 3$. Pero esto es falso porque $l(A) = l(M) = 4$, por Lema1,4. Así $I^2 = I$ y $A_{12}^2 = A_{21}^2 = 0$.

Finalmente $A_{11} \vee I$ tiene exactamente tres subálgebras minimales. Además es connmutativa y no nilpotente. Por Lema1,7, $A_{11} \vee I$ tiene que ser del tipo IV. Así $A_{11}^2 = A_{11}$ y por la misma razón $A_{22}^2 = A_{22}$, como deseábamos probar.

Proposición 4.3: Sea φ: $\mathcal{L}(M) \longrightarrow \mathcal{L}(A)$ un isomorfismo de retículos de álgebras alternativas sobre el mismo cuerpo F y $M = M_2(F)$. Entonces $A \cong M$ y podemos elegir a_{ij} tales que $(a_{ij}) = A_{ij}$ y tales que los a_{ij}'s tienen la misma ó la opuesta tabla de multiplicar que los e_{ij}'s.

-Demostración-

Tenemos que $A_{12} = R(A_{11} \vee A_{12}) = R(A_{22} \vee A_{12})$. Por lo tanto $A_{12} \leq R(A_{11} \vee A_{12} \vee A_{22})$. Como $A_{11} \vee A_{22}$ es álgebra semisimple, entonces $A_{11} \vee A_{12} \vee A_{22} \,/\, R(A_{11} \vee A_{12} \vee A_{22})$ tiene una subálgebra isomorfa a $A_{11} \vee A_{22}$ y así $R(A_{11} \vee A_{12} \vee A_{22}) = A_{12}$.

Si $R = R(A) \neq 0$, entonces $R \cap (A_{11} \vee A_{12} \vee A_{22}) \leq A_{12}$. Si $R \cap (A_{11} \vee A_{12} \vee A_{22}) = 0$, $R \vee (A_{11} \vee A_{12} \vee A_{22}) = A$ y así $A/R \cong A_{11} \vee A_{12} \vee A_{22}$, pero esto es imposible porque $A_{11} \vee A_{12} \vee A_{22}$ tiene radical no cero. Por lo tanto $R \cap (A_{11} \vee A_{12} \vee A_{22}) = A_{12}$. Razonando de análoga forma se llega a que $A_{21} \leq R$, pero entonces $A = A_{12} \vee A_{21} \leq R$. Como A no es nilpotente, se tiene que $R = 0$. Cada álgebra simple que no es un álgebra de división contiene una subálgebra isomorfa a $M_2(F)$ ó es un álgebra de Cayley-Dickson con divisores de cero. Como A es con $l(A) = 4$, tenemos $A \cong M_2(F)$. La demostración sigue ahora como en el caso asociativo (ver Lema 10 de [7]).

§ 5: Algebras alternativas $\mathcal{L}$-isomorfas al álgebra de Cayley-Dickson escindida central.

Sea C un álgebra de Cayley-Dickson escindida central y sea A un álgebra $\mathcal{L}$-isomorfa a ella. Se tiene el siguiente:

Teorema 5.1: *Sea $\Psi: \mathcal{L}(C) \longrightarrow \mathcal{L}(A)$ un isomorfismo de retículos de álgebras alternativas sobre el mismo cuerpo y sea C un álgebra de Cayley-Dickson escindida central. Entonces A es también un álgebra de Cayley-Dickson escindida central.*

-Demostración-

Considerar la base de C de la TABLA II. Se observa que las subálgebras $\langle x_0, -x_1, y_0, y_1\rangle$, $\langle x_0, -x_2, y_0, y_2\rangle$ y $\langle x_0, -x_3, y_0, y_3\rangle$ tienen generadores cuya tabla de multiplicar es como la de $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$, base de $M_2(F)$.

Por Lema 4.3, $\Psi(\langle x_0, -x_1, y_0, y_1\rangle) \cong M_2(F)$ y existen z_0, z_1, w_0, w_1 pertenecientes a A tal que $\Psi(\langle x_0\rangle) = \langle z_0\rangle$, $\Psi(\langle x_1\rangle) = \langle z_1\rangle$, $\Psi(\langle y_0\rangle) = \langle w_0\rangle$, $\Psi(\langle y_1\rangle) = \langle w_1\rangle$, con $\{z_0, z_1, w_0, w_1\}$ una base de $\Psi(\langle x_0, -x_1, y_0, y_1\rangle)$ con la misma u opuesta tabla de multiplicar que $\{x_0, -x_1, y_0, y_1\}$. Similarmente existen $z_2, w_2 \in A$ tales que $\Psi(\langle x_2\rangle) = \langle z_2\rangle$, $\Psi(\langle y_2\rangle) = \langle w_2\rangle$ y donde $\{z_0, -z_2, w_0, w_2\}$ es una base de $\Psi(\langle x_0, -x_2, y_0, y_2\rangle)$ con la misma u opuesta tabla de multiplicar que $\{x_0, -x_2, y_0, y_2\}$. Y también existen z_3, w_3

pertenecientes a A tal que $\Psi((x_3)) = (z_3)$, $\Psi((y_3)) = (w_3)$ y donde $\{ z_0, -z_3, w_0, w_3 \}$ es una base de $\Psi((x_0, -x_3, y_0, y_3))$ con la misma u opuesta tabla de multiplicar que $(x_0, -x_3, y_0, y_3)$.

(1) Demostremos ahora que la subálgebra $\Psi((x_1, x_2, y_3))$ es nilpotente y con dimensión tres y además que $\{ z_1, z_2, w_3\}$ es una base de este álgebra. Observemos que la siguiente cadena de subálgebras $0 \le (x_1) \le (x_1, y_3) \le (x_1, y_3, x_2)$ es irrefinable. Así, sea $\Psi((x_1, x_2, y_3)) = B$. Se tiene que $l(B)=3$ y también que $B = \Psi((x_1) \vee (x_2) \vee (y_3)) = (z_1) \vee (z_2) \vee (w_3)$. Denotamos $R = R(\Psi((x_1, x_2, y_3)))$. Se sigue $l(R) = 0, 1, 2$ ó 3. Si $l(R)=0$, entonces B es semisimple. Por Lema 1,5 B es suma directa de álgebras de división. Por lo tanto B no tiene elementos nilpotentes no cero. Contradicción porque $z_1, z_2, w_3 \in B$ y son nilpotentes. Si $l(R) = 1$, B/R es semisimple. Como $l(B/R) = 2$, por Lema 1,7, $B/R \cong F \oplus F$ ó es una extensión del cuerpo F. Por lo tanto B/R no tiene elementos nilpotentes. Contradicción por que $z_1 + R$, $z_2 + R$ y $w_3 + R$ son nilpotentes. Si $l(R)=2$, B/R es semisimple y $l(B/R)=1$. Así B/R es un cuerpo. Por lo tanto $z_1, z_2, w_3 \in R$. Esto es falso porque $l(R)=2$. Finalmente $B=R$ y $d(B)=l(B)=3$.

(2) Supongamos que $\{ z_0, z_1, w_0, w_1\}$ tienen tabla de multiplicar como la tabla de multiplicar de $\{ x_0, -x_1, y_0, y_1\}$. Demostremos que $\{ z_0, z_2, w_0, w_2\}$, $\{ z_0, z_3, w_0, w_3\}$ tienen la misma tabla que $\{ x_0, -x_2, y_0, y_2\}$ y $\{ x_0, -x_3, y_0, y_3\}$, respectivamente.

Supongamos que $\{ z_0, z_2, w_0, w_2\}$ tienen multiplicación opuesta a $\{ x_0, -x_2, y_0, y_2\}$. Entonces $z_0 z_2 = 0 = w_0 w_2$, $z_2 z_0 = z_2$ y $w_2 w_0 = w_2$. Hemos demostrado anteriormente en (1) que $\{ z_1, z_2, w_3 \}$ es una subálgebra con base $\{ z_1, z_2, w_3 \}$. Así existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F$ tales que $z_1 z_2 = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 w_3$. Por la identidad de Moufang media tenemos:

$$z_1 z_2 = (z_0 z_1)(z_2 z_0) = z_0(z_1 z_2)z_0 = z_0 (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 w_3) z_0 = 0.$$

Si $z_2 z_1 = 0$, entonces $(z_1, z_2) \leq A$ con longitud dos. Como $(z_1, z_2) = (z_1) \vee (z_2)$, entonces $\Psi^{-1} ((z_1, z_2)) = \Psi^{-1} ((z_1)) \vee \Psi^{-1} ((z_2)) = (x_1) \vee (x_2) \leq C$ con $l((x_1) \vee (x_2)) = 2$. Contradicción, porque $(x_1) \vee (x_2) = (x_1, x_2, y_3)$ tiene longitud tres. Por lo tanto $z_2 z_1 \neq 0$. Sea $z_2 z_1 = \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 w_3$ con $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in F$ y ademas $\mu_3 \neq 0$ (porque (z_1, z_2) no es subálgebra). Por la identidad de Moufang a izquierda

$$z_0(z_2(z_0 z_1)) = (z_0 z_2 z_0) z_1 = 0$$

Pero

$$z_0(z_2(z_0 z_1)) = \mu_1 z_1 + \mu_3 z_0 w_3$$

Por lo tanto $\mu_1 = 0$ y como $\mu_3 \neq 0$ tendremos que $z_0 w_3 = 0$. Por Lema 4.3 $w_3 z_0 = w_3$. Pero

$$0 = (z_2)(z_0 z_1 z_0) = ((z_2 z_0) z_1)z_0 = \mu_2 z_2 + \mu_3 w_3 z_0 = \mu_2 z_2 + \mu_3 w_3$$

aplicando la identidad de Moufang a derecha. Contradicción. Así $z_0 z_2 = z_2$, $z_2 z_0 = 0 = w_2 w_0$. Razonando de igual modo (z_0, z_3, w_0, w_3) tienen la misma tabla de multiplicar que $(x_0, -x_3, y_0, y_3)$ y no la opuesta.

Suponiendo que (z_0, z_1, w_0, w_1) tienen tabla de multiplicar opuesta a la de $(x_0, -x_1, y_0, y_1)$, se hubiera llegado a que (z_0, z_2, w_0, w_2) y (z_0, z_3, w_0, w_3) tienen tabla de multiplicar opuesta a la de $(x_0, -x_2, y_0, y_2)$ y $(x_0, -x_3, y_0, y_3)$.

(3) Ahora vamos a obtener el resto de la tabla de multiplicar de $(z_0, z_1, z_2, z_3, w_0, w_1, w_2, w_3)$ para llegar a demostrar después que son una base de A sobre F. Hemos visto anteriormente, en (1), que (z_1, z_2, w_3) es una subálgebra de A. Así $z_1 z_2 = \upsilon_1 z_1 + \upsilon_2 z_2 + \upsilon_3 w_3$ con $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3 \in F$. Por la identidad de Moufang a izquierda:

$$0 = (z_0 z_1 z_0) z_2 = z_0(z_1(z_0 z_2)) = \upsilon_1 z_0 z_1 + \upsilon_2 z_0 z_2 + \upsilon_3 z_0 w_3 = \upsilon_1 z_1 + \upsilon_2 z_2 .$$

Por lo tanto $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0$ y $z_1 z_2 = \upsilon_3 w_3$. Razonando de igual modo $z_2 z_1 = \sigma_3 w_3$ con $\sigma_3 \in F$. Podemos hacer lo mismo para las subálgebras (x_2, x_3, y_1), (x_1, x_3, y_2), (y_1, y_2, x_3), (y_2, y_3, x_1) y (y_3, y_1, x_2). Cambiando la notación tendremos:

$$z_1 z_2 = \alpha_3 w_3 \qquad\qquad w_1 w_2 = \gamma_3 z_3$$
$$z_2 z_1 = \beta_3 w_3 \qquad\qquad w_2 w_1 = \theta_3 z_3$$

$$z_2 z_3 = \alpha_1 w_1 \qquad\qquad w_2 w_3 = \gamma_1 z_1$$
$$z_3 z_2 = \beta_1 w_1 \qquad\qquad w_3 w_2 = \theta_1 z_1$$

$$z_3 z_1 = \alpha_2 w_2 \qquad\qquad w_3 w_1 = \gamma_2 z_2$$
$$z_1 z_3 = \beta_2 w_2 \qquad\qquad w_1 w_3 = \theta_2 z_2$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in F$.

Por ser A un álgebra alternativa, y por tanto el asociador una función alternante:

$$[z_1, z_2, z_3] = (z_1 z_2) z_3 - z_1 (z_2 z_3) = \alpha_3 w_0 - \alpha_1 z_0 =$$
$$-[z_1, z_3, z_2] = -(z_1 z_3) z_2 + z_1 (z_3 z_2) = -\beta_2 w_0 + \beta_1 z_0 =$$
$$-[z_2, z_1, z_3] = -(z_2 z_1) z_3 + z_2 (z_1 z_3) = -\beta_3 w_0 + \beta_2 z_0 =$$
$$-[z_3, z_2, z_1] = -(z_3 z_2) z_1 + z_3 (z_2 z_1) = -\beta_1 w_0 + \beta_3 z_0 =$$
$$[z_2, z_3, z_1] = (z_2 z_3) z_1 - z_2 (z_3 z_1) = \alpha_1 w_0 - \alpha_2 z_0 .$$

y entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -\beta_1 = -\beta_2 = -\beta_3$.

Del mismo modo con los w_i's y el asociador $[w_1, w_2, w_3]$ obtendríamos que : $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = -\theta_1 = -\theta_2 = -\theta_3$. A continuación vamos a buscar la relación entre α_3 y γ_2 , por ejemplo. Tomemos las subálgebras $(z_1) \vee (w_3)$, $(z_1) \vee (w_2)$, $(z_2) \vee (w_3)$, $(z_2) \vee (w_1)$, $(z_3) \vee (w_1)$, $(z_3) \vee (w_2)$. Como $z_i^2 = w_i^2 = 0$, según Lema 1,7 son todas del tipo V. Así

$$[z_1, z_2, w_1] = (z_1 z_2) w_1 - z_1 (z_2 w_1) = \alpha_3 w_3 w_1 = \alpha_3 \gamma_2 z_2$$

$$[z_1, w_1, z_2] = -(z_1 w_1) z_2 + z_1 (w_1 z_2) = -z_0 z_2 = -z_2.$$

Por lo tanto $\alpha_3 = -\gamma_2^{-1}$. Cambiando ahora la notación, según esto último:

$$z_1 z_2 = w_3 = -z_2 z_1 \qquad z_1 z_3 = -w_2 = -z_3 z_1 \qquad z_2 z_3 = w_1 = -z_3 z_2$$

$$w_1 w_2 = z_3 = -w_2 w_1 \qquad w_1 w_3 = -z_2 = -w_3 w_1 \qquad w_2 w_3 = z_1 = -w_3 w_2$$

Y esto completa la tabla de multiplicar de $\{z_0, z_1, z_2, z_3, w_0, w_1, w_2, w_3\}$.

(4) Finalmente comprobamos si estos ocho elementos son una base de A sobre F. Se tiene que $\Psi((x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_3)) = (z_0, z_1, z_2, w_0, w_1, w_3)$ y $l((x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_3)) = 6$, por Lema 1,4. Por lo tanto $\{z_0, z_1, z_2, w_0, w_1, w_3\}$ son linealmente independientes.

Consideremos $(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_3)$. Se observa que (x_3), (y_2) no son subálgebras de $(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_3)$. Por lo tanto z_3, w_2 no están en $(z_0, z_1, z_2, w_0, w_1, w_3)$. Tampoco puede ocurrir que existan θ_i's $\in$ F alguno de ellos no cero y tales que $\theta_0 z_0 + \theta_1 z_1 + \theta_2 z_2 + \theta_3 z_3 + \theta_4 w_0 + \theta_5 w_1 + \theta_6 w_2 + \theta_7 w_3 = 0$ puesto que entonces multiplicando a derecha por w_0 obtenemos que $\theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = 0$, y al multiplicar a izquierda por z_0 obtenemos que $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$. Así A tiene dimensión ocho y es isomorfa a un álgebra de Cayley-Dickson escindida.

§ 6: Algebras alternativas $\mathfrak{L}$-isomorfas a un álgebra de matrices arbitraria.

Lema 6.1: Sea D un álgebra de división finito dimensional y M = $M_2(D)$ con $n>1$ y N una subálgebra nilpotente de M. Entonces $\Psi(N)$ es nilpotente y $d(\Psi(N)) = d(N)$.

-Demostración-

Si $d(N) = 1$, entonces existe $U \leq M$ tal que $N \leq U$ y existe $\varphi: U \longrightarrow M_2(F)$ isomorfismo tal que $\varphi(N) = (e_{12})$ (ver Lema 18 de Capítulo III en [1]). Por Lema 4,2, $\varphi(N)$ es entonces nilpotente.

Para una N general, cada subálgebra uno-dimensional de N es nilpotente. De aquí, cada subálgebra minimal de $\Psi(N)$ es nilpotente y por lo tanto $\Psi(N)$ es nilpotente. Entonces tenemos $d(\Psi(N)) = l(\Psi(N)) = l(N) = d(N)$.

Lema 6.2: Sea $M = M_n(F)$ con $n > 1$. Si A es $\mathfrak{L}$-isomorfa a M, entonces $A \cong M$.

-Demostración-

Sea $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ la base canónica de M. Cada subálgebra $(e_{ii}, e_{ij}, e_{ji}, e_{jj})$ con $i \neq j$ es isomorfa a $M_2(F)$. Denotamos por $A_{ij} = \psi((e_{ij}))$ si ψ es el $\mathfrak{L}$–isomorfismo entre M y A. Por Lema 4,2, $A_{ii}^2 = A_{ii}$ para cada i. Sea a_{ii} el único idempotente no cero en A_{ii}. Entonces $a_{ii}a_{jj} = 0$ para cada $i \neq j$.

Por Lema 4,3 sabemos que existen $a_{ij} \in A_{ij}$ tales que $(a_{ij}) = A_{ij}$ y

ó $a_{ii}a_{ij} = a_{ij} = a_{ij}a_{jj}$ y $a_{ij}a_{ii} = 0 = a_{jj}a_{ij}$

ó $a_{ii}a_{ij} = 0 = a_{ii}a_{jj}$ y $a_{ij}a_{ii} = a_{ij} = a_{jj}a_{ij}$

Sigamos ahora los siguientes pasos:

(1) Consideremos (a_{ij}, a_{kl}) con i, j, k, l distintos. Por Lema 4,3 $(a_{ij})^2 = 0 = (a_{kl})^2$. Por lo tanto, por Lema 1,7, (a_{ij}, a_{kl}) es un álgebra cero y así $a_{ij}a_{kl} = 0$.

(2) Utilizando el mismo razonamiento para i, j, k distintos

obtenemos que $a_{ij}\, a_{ik} = 0$, al considerar la subálgebra (a_{ij}, a_{ik}). Y con (a_{ij}, a_{kj}), para i, j, k dintintos, tenemos $a_{ij}\, a_{kj} = 0$.

Se observa que (1), (2) son ciertos para cada $0 \neq a_{ij} \in A_{ij}$.

(3) Tomemos ahora (a_{ii}, a_{jk}) con $i \neq j, k$. Se tiene que (a_{ii}, a_{jk}) tiene dos subálgebras minimales, por lo tanto por Lema 1,7 para cada $0 \neq a_{jk} \in A_{jk}$ se cumple

$$ó\ a_{ii}a_{jk} = 0 = a_{jk}a_{ii} \qquad ó\ a_{ii}a_{jk} = a_{jk} = a_{jk}a_{ii}.$$

Demostremos que el segundo caso no es posible. Si $a_{ii}a_{jk} = a_{jk} = a_{jk}a_{ii}$, como $a_{jk}a_{jj} = a_{jk}$ ó $a_{jj}a_{jk} = a_{jk}$, tendremos en el primer caso

$0 = a_{jk}(a_{jj}\, a_{ii}a_{jj}) = ((a_{jk}\, a_{jj})\, a_{ii})a_{jj} = a_{jk}$, que es una contradicción,

y en el segundo caso

$0 = (a_{jj}\, a_{ii}a_{jj})\, a_{jk} = a_{jj}\,(a_{ii}\,(a_{jj}a_{jk})) = a_{jj}\, a_{jk} = a_{jk}$, tambien una contradicción. Así $a_{ii}a_{jk} = 0 = a_{jk}a_{ii}$ si $i \neq j, k$.

(4) Ahora supongamos que $a_{ii}a_{ij} = a_{ij}$ con $0 \neq a_{ij} \in A_{ij}$. Tenemos que $A_{ij} \vee A_{jk}$ es una subálgebra nilpotente de dimensión tres, para i, j, k distintos, cuya base es (a_{ij}, a_{jk}, a_{ik}) (esto se puede demostrar como en (1) de la demostración de Teorema 5.1). Así $a_{jk}\, a_{ij} = \lambda_1\, a_{ik} + \lambda_2\, a_{ij} + \lambda_3\, a_{jk}$ con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F$. Como $a_{jk}a_{ij} = a_{jk}(a_{ii}a_{ij})$, se sigue

$$0 = (a_{ii}\, a_{jk}\, a_{ii})\, a_{ij} = a_{ii}\,(a_{jk}\,(a_{ii}\, a_{ij})) = \lambda_2\, a_{ij} + \lambda_3\, a_{ii}\, a_{ik}$$

donde $a_{ii}\, a_{ik} \in A_{ik}$.

Distinguimos los siguientes casos:

i) $a_{ii}\, a_{ik} \neq 0$. Entonces $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y por lo tanto $a_{jk}a_{ij} = \lambda_1\, a_{jk}$. Como $a_{jk}a_{rr} = a_{jk}$ para r=j ó r=k, tenemos

$$0 = a_{jk}\,(a_{rr}\, a_{ij}\, a_{rr}) = ((a_{jk}\, a_{rr})\, a_{ij})a_{rr} = \lambda_1\, a_{jk}a_{rr} = \lambda_1\, a_{jk}.$$

Por lo tanto $\lambda_1 = 0$. Como $d(A_{ij} \vee A_{jk}) = 3$, $a_{ij}a_{jk} \neq 0$.

ii) $a_{ii}a_{ik} = 0$. Entonces $a_{kk}a_{ik} \neq 0$, y como $0 = \lambda_2 a_{ij} + \lambda_3 a_{ii}a_{ik}$, se obtiene que $\lambda_2 = 0$. Por lo tanto $a_{jk}a_{ij} = \lambda_1 a_{jk} + \lambda_3 a_{ik}$. Por (3), por ser $a_{ik}a_{kk} = 0$ y por verificarse que $a_{jk}a_{rr} = a_{jk}$ para $r = j$ ó k, se tiene:

$0 = a_{jk}(a_{rr}a_{ij}a_{rr}) = ((a_{jk}a_{rr})a_{ij})a_{rr} = \lambda_1 a_{jk}$. Así $\lambda_1 = 0$ y $a_{jk}a_{ij} = \lambda_3 a_{ik}$. Pero $0 \neq (a_{kk}a_{ik})a_{ii} \in A_{ik}$, y así

$$(a_{kk}(a_{jk}a_{ij}))a_{ii} = \lambda_3 (a_{kk}a_{ik}))a_{ii} = \lambda_3 a_{ik}' \quad \text{con } a_{ik}' \in A_{ik}.$$

La linearización de la identidad media de Moufang nos da:

$$(a_{kk}(a_{jk}a_{ij}))a_{ii} = -(a_{ii}(a_{jk}a_{ij}))a_{kk} + (a_{kk}a_{jk})(a_{ij}a_{ii}) + \\ + (a_{ii}a_{jk})(a_{ij}a_{kk}).$$

Como $a_{ij}a_{ii} = 0$ y $a_{ij}a_{kk} = 0$, se tiene

$$\lambda_3 a_{ik}' = (a_{kk}(a_{jk}a_{ij}))a_{ii} = -(a_{ii}(a_{jk}a_{ij}))a_{kk} = \\ -(a_{ii}(a_{jk}(a_{ii}a_{ij})))a_{kk} = -((a_{ii}a_{jk}a_{ii})a_{ij})a_{kk} = 0.$$

Así $\lambda_3 = 0$. Como $d(A_{ij} \vee A_{jk}) = 3$, obtenemos también en este caso $a_{ij}a_{jk} \neq 0$.

(5) Supongamos $a_{ii}a_{ij} = a_{ij}$. Vamos a demostrar que $a_{jj}a_{jk} \neq 0$ con j distinto de k. Procedamos suponiendo que $a_{jj}a_{jk} = 0$. Entonces $a_{jk}a_{jj} = a_{jk}$, $a_{kk}a_{jk} = a_{jk}$ y $a_{jk}a_{kk} = 0$. Como $a_{ij}a_{jk} = \mu_1 a_{ij} + \mu_2 a_{jk} + \mu_3 a_{ik}$ con $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in F$ no todos cero, por (3) se tiene que

$$0 = a_{ij}(a_{jj}a_{jk}a_{jj}) = ((a_{ij}a_{jj})a_{jk})a_{jj} = \mu_1 a_{ij} + \mu_2 a_{jk}$$

Así $\mu_1 = \mu_2 = 0$ y $a_{ij}a_{jk} = \mu_3 a_{ik}$. Distinguimos dos casos:

i) $0 \neq (a_{ii}a_{ik})a_{kk} = a_{ik} \in A_{ik}$. Entonces por la linearización de la identidad de Moufang media:

$$\mu_3 a_{ik} = (a_{ii}(a_{ij}a_{jk}))a_{kk} = (a_{ii}a_{ij})(a_{jk}a_{kk}) + (a_{kk}a_{ij})(a_{jk}a_{ii}) - \\ -(a_{kk}(a_{ij}a_{jk}))a_{ii}.$$

Pero $a_{jk}a_{kk} = 0 = a_{kk}a_{ij}$, por lo tanto

$$\mu_3 a_{ik} = -(a_{kk}(a_{ij}a_{jk}))a_{ii} = -(a_{kk}(a_{ij}(a_{kk}a_{jk}))a_{ii} =$$
$$-((a_{kk}a_{ij}a_{kk})a_{jk})a_{ii} = 0.$$ Así

$\mu_3 = 0$ y tenemos una contradicción con que $a_{ij}a_{jk} \neq 0$ (demostrado en (4)).
Por lo tanto $a_{ij}a_{jk} = 0$

ii) $a_{kk}a_{ik} = a_{ik}$. Entonces

$$\mu_3 a_{ik} = a_{kk}(a_{ij}(a_{kk}a_{jk})) = (a_{kk}a_{ij}a_{kk})a_{jk} = 0.$$

Por lo tanto $\mu_3 = 0$. También contradicción con $a_{ij}a_{jk} \neq 0$. Así $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ también en este caso.

(6) De $a_{ij}a_{ij} = a_{ij}$, se obtenía $a_{ij}a_{jk} = \mu_1 a_{ij} + \mu_2 a_{jk} + \mu_3 a_{ik}$ con μ_1, μ_2, $\mu_3 \in F$ no todos cero (ver (4)). Queremos hallar μ_1, μ_2, μ_3. De las identidades de Moufang a derecha y a izquierda:

$$0 = a_{jj}(a_{ij}(a_{jj}a_{jk})) = \mu_2 a_{jk} \text{ y así } \mu_2 = 0$$
$$0 = ((a_{ij}a_{jj})a_{jk})a_{jj} = \mu_1 a_{ij} \text{ y así } \mu_1 = 0.$$

Por lo tanto $a_{ij}a_{jj} = \mu_3 a_{ik}$. Vamos a demostrar que podemos elegir μ_3 tal que para todo k $\mu_3 = 1$. Suponer que i=1 y j=2, entonces $a_{11}a_{12} = a_{12}$. Podemos elegir $0 \neq a_{12} \in A_{12}$, ..., $0 \neq a_{1n} \in A_{1n}$ arbitrariamente. Por Lema 4.3, podemos encontrar $a_{i1} \in A_{i1}$ tal que $a_{1i}a_{i1} = a_{11}$ para i= 2,...., n. Los $a_{i's}$ están unívocamente determinados por esta condición y satisfacen $a_{i1}a_{1i} = a_{ii}$. Para i distinto de j y ambos distintos de 1, elegimos $a_{ij} \in A_{ij}$ tal que $a_{1i}a_{ij} = a_{1j}$. Así los $a_{ij's}$ están unívocamente determinados. Entonces como

$$a_{1k} = a_{1j}a_{jk} = (a_{1i}a_{ij})a_{jk} = [a_{1i}, a_{ij}, a_{jk}] + a_{1k}(a_{ij}a_{jk}) =$$
$$-[a_{1i}, a_{jk}, a_{ij}] + a_{1k}(a_{ij}a_{jk}) = -(a_{1i}a_{jk})a_{ij} + a_{1i}(a_{jk}a_{ij}) +$$
$$+ a_{1k}(a_{ij}a_{jk}) = a_{1k}(a_{ij}a_{jk}).$$

Así $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$. Con todo ello se ha demostrado que podemos encontrar a_{ij}

en A_{ij} con la misma tabla de multiplicar que los e_{ij}, siempre que estemos en el caso $a_{11}\, a_{12} \neq 0$. Del mismo modo si $a_{11}a_{12} = 0$ podríamos encontrar a_{ij} en A_{ij} tales que tienen tabla de multiplicar opuesta a los e_{ij}.

<u>Lema 6.3</u>: Sea η un idempotente no cero de M-$M_n(D)$, donde D es un álgebra de división asociativa y $n \geq 2$. Entonces si ψ es un $\mathbb{Z}$-isomorfismo de M en otra álgebra alternativa A sobre el mismo cuerpo F, se tiene que $\psi((\eta))$ no es nilpotente y $\psi((\eta)) = (e)$ para algún idempotente e en A.

-Demostración-

Similar a Lema 13 de [7].

En [6] Barnes demuestra que para un anillo asociativo con la condición de mínimo para ideales a izquierda el radical es la intersección de los subanillos nilpotentes maximales. Este resultado puede hacerse extensivo a anillos alternativos siguiendo el proceso de Barnes y usando la siguiente Proposición:

<u>Proposición 6.4</u>: Sea C un álgebra de Cayley-Dickson sobre un cuerpo F. Entonces existen subanillos nilpotentes maximales U, V, L de A tales que $U \cap V \cap L = 0$.

-Demostración-

El resultado es claro si C es un álgebra de Cayley-Dickson de división. Si C es un álgebra de Cayley-Dickson excindida, consideramos la base de C dada en la TABLA II. Las subálgebras (x_1, y_2, x_3), (x_1, x_2, y_3), (x_2, x_3, y_1) son nilpotentes. Además, son subálgebras nilpotentes maximales según vamos a ver a continuación. En efecto, considerar por ejemplo (x_1, y_2, x_3) y suponer que existe $N \leq C$ nilpotente tal que $(x_1, y_2, x_3) \leq N$. Tomar $a \in N - (x_1, y_2, x_3)$. Podemos suponer

$$a = \mu_0 x_0 + \mu_2 x_2 + \mu_4 y_0 + \mu_5 y_1 + \mu_7 y_3 \qquad \text{con } \mu_0, \mu_2, \mu_4, \mu_5, \mu_7 \in F$$

Tenemos $x_1 a = \mu_2 y_3 + \mu_4 x_1 - \mu_5 x_0 \in N$ y así $x_1 a$ es nilpotente. Pero $(x_1 a)^2 = -\mu_5 \mu_4 x_1 - \mu_2 \mu_5 y_3 + \mu_5^2 x_0$. Como x_0 es idempotente y $x_1 . a$ es nilpotente, $\mu_5 = 0$. Utilizando el mismo razonamiento $y_2 a = \mu_0 y_2 - \mu_2 y_0 + \mu_7 x_1 \in N$ es nilpotente. Como $(y_2 a)^2 = -\mu_2 \mu_0 y_2 + \mu_2^2 y_0 - \mu_2 \mu_7 x_1$ y y_0 es idempotente, necesariamente $\mu_2 = 0$. Entonces tenemos $a = \mu_0 x_0 + \mu_4 y_0 + \mu_7 y_3$ es nilpotente, así $\mu_0 = 0$ y $\mu_4 = 0$, porque x_0 y y_0 son idempotentes. Finalmente $a = \mu_7 y_3$ y $x_3 a = -\mu_7 x_0 \in N$ es nilpotente. Entonces $\mu_7 = 0$. Por lo tanto (x_1, y_2, x_3) es subálgebra nilpotente maximal. Denotamos por $U = (x_1, y_2, x_3)$, $V = (x_1, x_2, y_3)$ y $L = (x_2, y_3, y_1)$ y hemos demostrado el Lema .

<u>*Teorema 6.5*</u>*: Sea $S = M_n(\Delta)$ con $n \geq 2$ y Δ un álgebra de división asociativa finito-dimensional. Sea A un álgebra $\mathcal{L}$-isomorfa a S por medio del $\mathcal{L}$-isomorfismo ψ. Entonces $A \cong M_n(D)$ donde D es un álgebra de división asociativa $\mathcal{L}$-isomorfa a Δ y tal que $d(D) = d(\Delta)$.*

-Demostración-

Por Lema 6,1 y 6,3 para $U \leq S$ $\psi(U)$ es nilpotente si y sólo si U es nilpotente. Así las subálgebras nilpotentes maximales de A son imágenes por ψ de suálgebras nilpotentes maximales de S. Por el comentario anterior a Proposición 6.4 conocemos que $R(A)$ es la intersección de las subálgebras nilpotentes maximales de A. Como $R(S) = 0$ se tiene que $R(A) = 0$ y por lo tanto que A es semisimple.

Sea $N = M_n(F) \leq S$ y 1 la identidad de S. Podemos identificar Δ

con la subálgebra 1Δ. Entonces $S = N \vee \Delta$, $N \cap \Delta = (1)$. Sea B algún sumando directo simple de A. Entonces B contiene un idempotente e. Sea $U = \psi^{-1}((e))$. Si U es nilpotente, por Lema 6,1, $\psi(U) = (e)$ es nilpotente y así e no será idempotente. Por lo tanto U no es nilpotente y contiene un idempotente e'. Claramente $U=(e')$ y $(e)=\psi((e'))$. Pero $e' \in \alpha(N)$ para un cierto automorfismo α de S. Como $\psi(\alpha(N)) \cong M_n(F)$ y $B \cap \psi(\alpha(N)) \geq (e) \neq 0$, tenemos $\psi(\alpha(N)) \leq B$ y por lo tanto $\psi(\alpha(1)) \leq B$. Ahora bien $\psi(\alpha(1))$ es no nilpotente y es la única subálgebra minimal de $\psi(\alpha(\Delta))$, por lo tanto $\Psi(\alpha(\Delta))$ es un álgebra de división, y como $\psi(\alpha(\Delta)) \cap B \geq \psi(\alpha(1)) \neq 0$ y B es un ideal, entonces $\psi(\alpha(\Delta)) \leq B$. Así $B \geq \psi(\alpha(N)) \vee \psi(\alpha(\Delta)) = \psi(\alpha(N \vee \Delta))$ $= \psi(\alpha(S)) = A$. Por lo tanto A es simple. Así $A \cong M_m(D)$, donde D es un álgebra de división asociativa y $m \in \mathbf{N}$, ó A es un álgebra de Cayley-Dickson sobre K, una extensión del cuerpo F.

Supongamos que se cumple el primer caso. Se observa que si $U \cong M_r(F)$ es una subálgebra de $M_m(D)$, entonces $r \leq m$. Así, por cumplirse $\psi(N) \cong M_n(F) \leq A$ tenemos que $n \leq m$. Aplicando ahora el mismo razonamiento al $\mathfrak{L}$-isomorfismo ψ^{-1} nos da $m \leq n$. Por lo tanto $A \cong M_n(D)$. Pero $\Delta_1 = \Delta e_{11}' = e_{11}' S e_{11}'$ es la única subálgebra de división maximal de S conteniendo a e_{11}'. Se sigue $\psi(\Delta_1)$ es la única subálgebra de división maximal de A conteniendo a e_{11} y así $\psi(\Delta_1) = e_{11} A e_{11} = D e_{11}$. Por lo tanto $\psi(\Delta_1) \cong D$ y tenemos que D es $\mathfrak{L}$-isomorfo a Δ.

En el segundo caso $\psi(N) \cong M_n(F)$ es subálgebra de A. El álgebra $M_n(F)$ para $n \geq 2$ tiene varias subálgebras minimales, por lo tanto A es un álgebra de Cayley-Dickson escindida y así sólo contiene subálgebras de matrices de orden 2×2 sobre F. Luego $n=2$ y entonces A no puede ser $\mathfrak{L}$-isomorfa a $S = M_2(\Delta)$, porque en este caso A tiene al menos tres subálgebras distintas isomorfas a $M_2(F)$.

Consideramos ahora la subálgebra nilpotente maximal U de S formada por todas las matrices triangulares superiores $\Sigma\ \delta_{ij} e_{ij}$´ con $i < j$ variando desde 1 hasta n y $\delta_{ij} \in \Delta$. Esta es la única subálgebra nilpotente maximal de S conteniendo a los e_{ij}'s´ con $i < j$. Se sigue que ψ (U) es la subálgebra de A formada por los elementos de la forma $\Sigma\ d_{ij} e_{ij}$ con $i < j$ variando desde 1 hasta n y con $d_{ij} \in D$. Como U y ψ (U) son nilpotentes, d(U) = d(ψ(U)). Pero d(U)= 1/2(n (n-1)) d(Δ) y d(ψ(U)) = 1/2 n(n-1) d(D). Por lo tanto d(D) = d(Δ).

§ 7: Algebras alternativas $\mathfrak{L}$-isomorfas a un algebra alternativa simple.

Supongamos que A y B son álgebras alternativas sobre F. Una aplicación biyectiva σ de A en B se dice semi-isomorfismo si

(i) σ es semilineal, esto es, para algún α, automorfismo de F,

$\sigma(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) = \alpha(\lambda_1)\, \sigma(a_1) + \alpha(\lambda_2)\, \sigma(a_2)$

para cada $a_1, a_2 \in A$ y para cada $\lambda_1, \lambda_2 \in F$.

(ii) σ es multiplicativa o antimultiplicativa (es decir, que se cumple que $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ para cada $x, y \in A$ ó que $\sigma(xy) = \sigma(y)\sigma(x)$ para cada $x, y \in A$.

(Resultados relacionados con este concepto son tratados por

Germán Ancoechea en [2] y [3]).

Teorema 7.1 : Sea $S = M_n(\Delta)$ con Δ un álgebra de división de dimensión finita y $n \geq 3$. Sea A un álgebra alternativa $\mathfrak{L}$-isomorfa a S. Entonces A es semiisomorfa a S.

-Demostración-

Se sigue de la demostración de Teorema 3 en [7].

Teorema 7.2: Sea C un álgebra de Cayley-Dickson escindida sobre K extensión del cuerpo F. Sea A un álgebra alternativa $\mathfrak{L}$-isomorfa a C por medio del $\mathfrak{L}$-isomorfismo Ψ. Entonces A es un álgebra de Cayley-Dickson escindida sobre $\Psi(K)$ con $Z(A) = \Psi(K)$ y $d(\Psi(K)) = d(K)$.

-Demostración-

Considerar la base de C dada en la TABLA II. Denotamos

M_1: K-álgebra cuya K-base es $\{ x_0 , - x_1 , y_0 , y_1 \}$

M_2: K-álgebra cuya K-base es $\{ x_0 , - x_2 , y_0 , y_2 \}$

M_3: K-álgebra cuya K-base es $\{ x_0 , - x_3 , y_0 , y_3 \}$

$M_i \cong M_2(K)$ para $i = 1, 2, 3$. Ahora por Teorema 6.5 $\Psi(M_i) \cong M_2(D_i)$ para $i = 1, 2, 3$ donde D_i son álgebras de división finito dimensionales $\mathfrak{L}$-isomorfas a K y con $d(D_i) = d(K)$. Denotamos por $(z_i) = \Psi((x_i))$ para $i = 0, 1, 2, 3$ y $(w_i) = \Psi((y_i))$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Se observa que $C' = \{ x_0 , x_1 , x_2 , x_3 , y_0 , y_1 , y_2 , y_3 \}$ es un álgebra de Cayley-Dickson escindida sobre F.

Por Teorema 5.1, $\Psi(C')$ es un álgebra de Cayley-Dickson escindida sobre F con base $\{ z_0 , z_1 , z_2 , z_3 , w_0 , w_1 , w_2 , w_3 \}$ y cuya tabla de multiplicar es la misma o la opuesta que la tabla de multiplicar de $\{ x_0 , x_1 ,$

$x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3\}$. Tenemos también $C' \vee K = C$ y así $\Psi(C') \vee \Psi(K) = A$.

Vamos a demostrar que $D_1 = D_2 = D_3$. Sea x_0 K. Es la única subálgebra de división maximal de M_i (y también en C) conteniendo a x_0. También $z_0 D_i$ es la única subálgebra de división maximal de $\Psi(M_i)$ conteniendo a z_0, para $i=1, 2, 3$. Así $\Psi(x_0K) = z_0 D_1 = z_0 D_2 = z_0 D_3$.

Del mismo modo se razona con $y_0 K$, que es la única subálgebra de división maximal de M_i conteniendo a y_0, y como $w_0 D_i$ es la única subálgebra de división maximal de $\Psi(M_i)$ conteniendo a w_0, entonces $\Psi(y_0K) = w_0 D_1 = w_0 D_2 = w_0 D_3$.

Como $1_A = z_0 + w_0$ se tiene así

$$D_1 = (z_0 + w_0) D_1 \leq z_0 D_1 + w_0 D_1$$

$$D_2 = (z_0 + w_0) D_2 \leq z_0 D_2 + w_0 D_2$$

Pero la única subálgebra de división maximal en $(z_0 D_1) \vee (w_0 D_1)$ y en $(z_0 D_2) \vee (w_0 D_2)$ conteniendo a $1_A = z_0 + w_0$ son $(z_0 + w_0)D_1$ y $(z_0 + w_0)D_2$ respectivamente. Así $D_1 = D_2$. Del mismo modo se puede comprobar que $D_1 = D_3 = D$.

Por lo tanto $A = \Psi(C') \vee D$, y los elementos de D conmutan con los elementos de $\Psi(M)$. Luego A es un D-espacio vectorial con base sobre D: $\{ z_0, z_1, z_2, z_3, w_0, w_1, w_2, w_3 \}$.

Comprobemos ahora que A es álgebra simple. Supongamos que la D-base anterior tiene tabla de multiplicar como $\{ x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3 \}$ y no la opuesta (esto no es una pérdida de generalidad, pues lo que sigue se puede utilizar también para demostrar el caso contrario). Sea I un ideal de A distinto de cero. Para $0 \neq x \in I$ tenemos que $x = \Sigma\delta_i z_i + \Sigma\mu_i z_i$ donde los sumatorios son con $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ y $\delta_i, \mu_i \in D$ y algún δ_i ó $\mu_i \neq 0$. Supongamos que $\delta_i \neq 0$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$. (Del mismo modo se razona si tuviéramos que algún $\mu_i \neq 0$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$). Entonces $z_0 x = \delta_0 z_0 + \delta_1 z_1 + \delta_2 z_2 + \delta_3 z_3 \in I$ y también $(z_0 x) w_i = \delta_i w_0 \in I$ y $w_i (z_0 x) = \delta_i z_0 \in I$. Por lo tanto $\delta_i^{-1} (z_0 + w_0) (\delta_i z_0 + \delta_i w_0) = 1 \in I$ y así $I = A$. Si es $\delta_0 \neq 0$ (y de la misma manera si $\mu_0 \neq 0$), obtendremos también $I = A$, partiendo de que $x z_1 \in I$ y de que su coeficiente en z_1 no es cero y aplicando el caso anterior. Así A es un álgebra simple y contiene una subálgebra no asociativa, $\Psi(M)$, con divisores de cero. Por lo tanto A es un álgebra de Cayley-Dickson escindida.

Sea $\Psi(K_1)$ el centro de A, con $K_1 \leq C$. Se tiene $d(A) = 8\, d(D)$ y ahora $d(A) = 8\, d(\Psi(K_1))$. Así $d(\Psi(K_1)) = d(D)$. Además $z_0 \Psi(K_1)$ es una subálgebra de división maximal conteniendo a z_0. Así $z_0 \Psi(K_1) = z_0 D$. Similarmente $w_0 \Psi(K_1) = w_0 D$.

Ahora bien $\Psi(K_1) = (z_0 + w_0) \Psi(K_1) \leq z_0 D + w_0 D$ y D es la única subálgebra de división maximal de $z_0 D + w_0 D$ conteniendo a $z_0 + w_0$, por lo tanto $\Psi(K_1) = D$.

Finalmente, por Lema 4,2 y 4,3 tenemos $\Psi (x_0 + y_0) = (z_0 + w_0)$. Como $z_0 + w_0 = 1_A \in \Psi(K_1)$, entonces $x_0 + y_0 \in K_1$. Además K_1 tiene una sola subálgebra minimal, por lo tanto K_1 es álgebra de división. Pero K es la única subálgebra de división maximal de $x_0 K + y_0 K$ que contiene a $x_0 + y_0$. Así $K_1 = K = \Psi^{-1}(Z(A))$ y $d(K) = d(D) = d(\Psi(K))$.

Finalizamos la clasificación de las álgebras alternativas $\mathfrak{X}$-isomorfas a un álgebra de Cayley-Dickson escindida con el siguiente:

__Teorema 7.3__: Sea C un álgebra de Cayley-Dickson escindida sobre K extensión del cuerpo F y sea A un álgebra alternativa sobre F $\mathfrak{L}$-isomorfa a C. Entonces A es semiisomorfa a C.

-Demostración-

Por Teorema 7,2 y su demostración, A es un álgebra de Cayley-Dickson escindida y si $\{x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3\}$ es la K-base de C de la TABLA II, entonces, suponiendo que Ψ es el $\mathfrak{L}$-isomorfismo de C en A, $\Psi(K) = Z(A)$ y existen $\{z_0, z_1, z_2, z_3, w_0, w_1, w_2, w_3\}$ tales que $\Psi((x_i)) = (z_i)$ y $\Psi((y_i)) = (w_i)$ con $i = 0, 1, 2, 3$, los cuales son una $\Psi(K)$-base de A. Además la tabla de multiplicar de esta $\Psi(K)$-base es la misma ó la opuesta que la K-base de C dada. Si la tabla de multiplicar es la misma, vamos a demostrar que existe $\sigma: K \longrightarrow \Psi(K)$ aplicación semilineal tal que $\sigma(\delta_1\delta_2) = \sigma(\delta_1)\,\sigma(\delta_2)$ para cada $\delta_1, \delta_2 \in K$. Similarmente si la tabla de multiplicar es la opuesta demostraríamos que existe $\sigma: K \longrightarrow \Psi(K)$ aplicación semilineal tal que $\sigma(\delta_1\delta_2) = \sigma(\delta_2)\,\sigma(\delta_1)$ para cada $\delta_1, \delta_2 \in K$.

Si $K = F$ la demostración del Teorema está acabada. Suponer así que $K \neq F$.

Sea $V = Kx_1 + Ky_2$. Es un álgebra cero y por lo tanto cada subespacio es una subálgebra. También V es un K-espacio vectorial. Vamos a demostrar que los K-subespacios de V son las subálgebras $P \leq V$ tales que $P = V \cap (K \vee P)$. Suponer que P es un K-subespacio de V. Entonces $K \vee P = K + P$. Sea $x = \delta + p \in V$ con $\delta \in K$ y $p \in P$. Entonces $\delta \in V$ y así $\delta = 0$. Por lo tanto $x \in P$. Así $V \cap (K \vee P) \leq P$ y es claro $P = V \cap (K \vee P)$. Recíprocamente, suponer que $P = V \cap (K \vee P)$. Como V es un ideal de $K \vee V$, $P = V \cap (K \vee P)$ es un ideal de $(K \vee P)$. Por lo tanto $K.P \leq P$ y P es un K-subespacio de V.

Sea $W = \Psi(K).z_1 + \Psi(K).w_2$. Observemos que $\Psi(Kx_1) =$

$\Psi(K).z_1$ porque Kx_1 es la subálgebra nilpotente maximal de $K \vee (x_1)$, con una única subálgebra minimal que es (x_1), $\Psi(K).z_1$ es la subálgebra nilpotente maximal de $\Psi(K) \vee (z_1)$ con una única subálgebra minimal que es (z_1), y $\Psi(K \vee (x_1)) = \Psi(K) \vee (z_1)$. Similarmente $\Psi(K y_2) = \Psi(K).w_2$. Así $\Psi(V) = W$, y por lo tanto los $\Psi(K)$-subespacios de W son las subálgebras $Q \leq W$ tales que $Q = W \cap (\Psi(K) \vee Q)$. Así P es un K-subespacio de V si y sólo si $\Psi(P)$ es un $\Psi(K)$-subespacio de W. Por lo tanto tenemos un isomorfismo, Ψ, entre el retículo de F-subespacios de V y el retículo de F-subespacios de W el cual aplica K-subespacios de V en $\Psi(K)$-subespacios de W. Por ser $K \neq F$, $d(V) = 2d(K) > 3$ y por el " Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva" existe una aplicación semilineal $\sigma: V \longrightarrow W$ la cual induce Ψ (al restringirla a V).

Los elementos z_1 y w_2 que están en $\Psi(x_1)$ y $\Psi(y_2)$ pueden ser elegidos arbitrariamente según la demostración del Terorema 5.1. (Entonces para completar una base como la de la TABLA II del álgebra de Cayley-Dickson escindida, es necesario elegir convenientemente z_3 y w_3). Así podemos suponer $\sigma(x_1) = z_1$ y $\sigma(y_2) = w_2$. Para cada $\delta \in K$, $\sigma(\delta x_1) \in \Psi(K) z_1$ porque σ aplica K-subespacios de V en $\Psi(K)$-subespacios de W. Sea $\sigma(\delta x_1) = \lambda z_1$. Tenemos una aplicación biyectiva $\sigma': K \longrightarrow \Psi(K)$ que es semilineal y tal que $\sigma'(\delta) = \lambda$ con $\sigma(\delta x_1) = \lambda z_1$.

Para cada $\delta \in K$, $\sigma(\delta(x_1 + y_2)) = \sigma(\delta x_1) + \sigma(\delta y_2) = \sigma'(\delta).z_1 + \lambda^* w_2$ con $\lambda^* \in \Psi(K)$. Pero $\sigma(\delta(x_1 + y_2)) \in \Psi(K)(z_1 + w_2)$ y por lo tanto $\sigma'(\delta) = \lambda^*$. Así, para $\delta_1, \delta_2 \in K$

$$\sigma(\delta_1(x_1 + \delta_2 y_2)) = \sigma(\delta_1 x_1) + \sigma(\delta_1 \delta_2 y_2) = \sigma(\delta_1) z_1 + \sigma'(\delta_1 \delta_2) w_2 .$$

Pero $\sigma(\delta_1(x_1 + \delta_2 y_2)) \in \Psi(K)(z_1 + \sigma'(\delta_2) w_2)$ y así $\sigma'(\delta_1 \delta_2) = \sigma'(\delta_1)\sigma'(\delta_2)$.

§ 8 : Algebras alternativas $\mathfrak{L}$-isomorfas a un álgebra semisimple.

Lema 8.1: Sea F el cuerpo finito de dos elementos y sea $A = P \oplus Q$ donde P es una extensión finito dimensional de F y $Q \cong F$. Sea Ψ un $\mathfrak{L}$-isomorfismo de $\mathfrak{L}(A)$ en $\mathfrak{L}(B)$. Entonces $B = \Psi(P) \oplus S$ donde $S \cong F$ y $\Psi(P)$ es una extensión de F.

-Demostración-

Solamente necesitamos considerar el caso $l(P)=2$, porque si $l(P)>2$ tomamos $K \leq P$ tal que $l(K) = 2$. Si el resultado se sigue para $K \oplus Q$ y e_1 es la identidad de P, entonces $\Psi(e_1)$ no es nilpotente, y $\Psi(P)$ tiene una única subálgebra minimal, $\Psi(e_1)$, y por lo tanto es un cuerpo. También $\Psi(K \oplus Q) = \Psi(K) \oplus S$ donde $S \cong F$. Tomamos u_1 la identidad de $\Psi(P)$ y u_2 la identidad de S. Entonces $u_1 u_2 = u_2 u_1 = 0$. Así para todo $x \in \Psi(P)$ $x u_2 = (x u_1) u_2$. Pero por la alternancia del asociador y la identidad de Moufang a derecha

$$(x u_1) u_2 = [x, u_1, u_2] + x(u_1 u_2) = [x, u_1, u_2] = -[x, u_2, u_1] =$$
$$= -(x u_2) u_1 = -((x u_1) u_2) u_1 = -x(u_1 u_2 u_1) = 0.$$

También

$$u_2 x = u_2(u_1 x) = -[u_2, u_1, x] + (u_2 u_1) x = -[u_2, u_1, x] =$$
$$-[u_1, x, u_2] = -(u_1 x) u_2 + u_1(x u_2) = -x u_2 = 0$$

Por lo tanto $\Psi(P)$ es un ideal en B y $B = \Psi(P) \oplus S$. El resto de la demostración es como en el caso asociativo (ver [7], Lema 14)

<u>Lema 8.2</u>: Sea A un álgebra semisimple finito dimensional sobre el cuerpo F y sea Ψ un $\mathcal{L}$-isomorfismo de A en B. Supongamos que A no es un álgebra de división. Si F es el cuerpo finito de dos elementos, supongamos que A no es suma directa de álgebras de dimensión uno. Sea U subálgebra de A. Entonces $\Psi(U)$ es nilpotente si y sólo si U es nilpotente.

-Demostración-

Sea $N=(n)$ una subálgebra nilpotente uno-dimensional de A. Demostraremos que $\Psi(N)$ es nilpotente. Supongamos que $A \cong S_1 \oplus \ldots \oplus S_r$ donde cada S_i es un álgebra simple. Alguna de ellas no será de división porque $N \leq A$. Si $N \leq S_i$ para algún i, entonces $\Psi(N)$ es nilpotente por Lema 6,3 y Teorema 7,3.

Ahora tomar inducción sobre r. Supongamos que el resultaddo es cierto para subálgebras nilpotentes de $S_1 \oplus \ldots \oplus S_{r-1}$. Entonces sea $N \leq S_1 \oplus \ldots \oplus S_r$ con $N=(n)$. Entonces $n=u+s$ con $u \in S_1 \oplus \ldots \oplus S_{r-1}$ y $s \in S_r$. Podemos suponer $u \neq 0$ y $s \neq 0$. Por lo tanto $\Psi((u))$ y $\Psi((s))$ son nilpotentes y $\Psi((u,s))$ es nilpotente. Pero $\Psi(N) \leq \Psi((u,s))$ y así $\Psi(N)$ es nilpotente.

El resto de la demostracción es como en el caso asociativo (ver Lema 16 de [7])

Las demostraciones de los siguientes resultados son omitidas porque pueden obtenerse como en el caso asociativo, aplicando todo el estudio que ya se ha hecho del caso alternativo simple.

<u>Lema 8.3</u> : Supongamos S_1, S_2 son álgebras simples finito dimensionales y $\mathcal{L}$-isomorfas. Sea $A = S_1 \oplus S_2$. Sea 1 la identidad de A. Entonces existe una subálgebra S de A $\mathcal{L}$-isomorfa a S_1 y conteniendo a 1 si y sólo si $S_1 \cong S_2$.

<u>Teorema 8.4 :</u> Sea A un álgebra semisimple finito dimensional sobre el cuerpo F, y sea Ψ *un* $\mathcal{L}$*-isomorfismo de A en otra álgebra alternativa B sobre el mismo cuerpo F. Sean* $S_1, \dots, S_r$ *los sumandos directos simples de A. Supongamos que A no es un álgebra de división y, en el caso de que F sea el cuerpo finito de dos elementos que no todos los* S_i *son uno dimensionales. Entonces B es semisimple y para cada* S_i*, de dimensión mayor que 1 ,* $\Psi(S_i)$ *es un sumando directo simple de B. Además si* $S_i \cong S_j$*, entonces* $\Psi(S_i) \cong \Psi(S_j)$ *.*

<u>Corolario 8.5:</u> Sea A un álgebra semisimple finito dimensional sobre un cuerpo algebraicamente cerrado F. Supongamos que A tiene dimensión mayor que uno. Sea Ψ *un* $\mathcal{L}$*-isomorfismo de A en un álgebra alternativa B sobre el mismo cuerpo F. Entonces* $A \cong B$*.*

CAPITULO 2º

CUASIIDEALES EN ANILLOS ALTERNATIVOS.

El concepto de cuasiideal es una generalización del concepto de ideal unilátero. Fue introducido por O. Steinfeld en 1953 (ver [43]) para anillos asociativos y semigrupos. Desde entonces numerosas publicaciones han aparecido sobre este tema: ver [9], de Clifford, ver [28], de Luh, ver [51], de Weinert, ver [54], de Wiegandt, ... En la actualidad puede encontrarse una interesante monografía que recopila los principales resultados existentes (ver [44]).

La utilidad de los cuasiideales en anillos asociativos queda reflejada, por ejemplo, en la caracterización que se obtiene mediante ellos de los anillos de división. También con cuasiideales han sido obtenidas caracterizaciones de anillos y elementos regulares von Newman, y en la última década, Lajos y Szasz (ver [27]) los han utilizado para conseguir notables teoremas de descomposición para anillos semiprimos.

Aquí nosotros vamos a extender el concepto de cuasiideal a anillos alternativos (ver §1). También estudiaremos los cuasiideales minimales en anillos alternativos generales (ver §2) y en particular en anillos alternativos semiprimos (ver §3). En §4 se definirá y estudiará un socle de cuasiideales. Daremos unos teoremas de descomposición, basados en cuasiideales, de ciertos anillos alternativos semiprimos (ver §5). Posteriormente se estudiarán los anillos alternativos regulares y, bajo ciertas condiciones, se caracterizarán a través de cuasiideales (ver §6). Finalmente se determinan las álgebras alternativas en que cada subálgebra es cuasiideal.

§1: Primeras propiedades de cuasiideales.

Sea A un anillo alternativo y Q un subgrupo de (A, +). Se dice que Q es un cuasiideal de A si

$$(QA + (QA)A + \ldots\ldots) \cap (AQ + A(AQ) + \ldots\ldots) \subset Q$$

(donde por el símbolo $\subset$ entendemos "está contenido o es igual que")
Una caracterización más manejable de este concepto viene dada por el siguiente resultado:

Proposición 1.1: Sea A anillo alternativo y Q un subgrupo de (A , +), entonces Q es cuasiideal de A sí y sólo sí $[A, A, Q] \subset Q$ y $(AQ + [A, A, Q]) \cap (QA + [Q, A, A]) \subset Q$.

-Demostración-

Supongamos que Q es cuasiideal de A. Se cumple que $[A, A, Q]$ está contenido en $AQ + A(AQ)$. Por la alternancia del asociador $[A, A, Q] = [Q, A, A]$ que está contenido en $QA + (QA)A$. Así por definición de cuasiideal $[A, A, Q] \subset Q$ y también $(AQ + [A, A, Q]) \cap (QA + [Q, A, A]) \subset Q$.

Recíprocamente, sea Q subgrupo abeliano tal que $[A, A, Q] \subset Q$ y $(AQ + [A, A, Q]) \cap (QA + [Q, A, A]) \subset Q$. Para ver que Q es cuasiideal es suficiente probar que $A^{(n}(A\ldots\ldots(AQ)) \subset AQ + [A, A, Q]$ y que $((QA)\ldots A)A^{(n}$

$\subset QA + [A, A, Q]$. Demostraremos por inducción sobre n la primera de las dos afirmaciones. Supongamos que es cierto hasta n-1. Entonces $A^{(n} (A......(AQ))$ $\subset A(AQ + [A, A, Q])$ por hipótesis de inducción. Finalmente $A(AQ + [A, A, Q])$ $\subset A(AQ) + A[A, A, Q] \subset A^2Q + [A, A, Q] + AQ \subset AQ + [A, A, Q]$.

Observaciones:

1) Otra caracterización de cuasiideal para un anillo alternativo A y un subgrupoo Q de $(A, +)$ es la siguiente:

" Q es cuasiideal de A si y sólo si $[A, A, Q] \subset Q$ y $(AQ + (A(AQ))) \cap (QA + ((QA)A)) \subset Q$ "

2) La definición de cuasiideal que se ha dado para anillos alternativos extiende evidentemente a la introducida por O. Steinfeld en anillos asociativos.

3) Cada ideal unilátero de un anillo alternativo es un cuasiideal. Sin embargo no todo cuasiideal es ideal unilátero. El siguiente ejemplo lo demuestra:

Sea A la subálgebra del álgebra de Cayley-Dickson con divisores de cero $A = (x_0 , x_1 , x_2 , y_0 , y_1 , y_3)$. Considerar el subespacio vectorial $Q = (x_0 , x_1 , y_3)$. Se tiene

$$AQ = (x_0 , y_1 , y_3 , x_2)$$

$$QA = (x_0 , x_2 , y_3 , x_1)$$

$$[Q, A, A] \subset (x_0 , y_3) \subset Q.$$

Luego Q es cuasiideal y sin embargo Q no es ideal unilátero.

4) Cada cuasiideal de un anillo alternativo es un subanillo, pero no todo subanillo es un cuasiideal. Como contraejemplo tomar en el ejemplo anterior el subanillo (x_0).

<u>*Proposición 1.2*</u> *: La intersección de un ideal a izquierda y un ideal a derecha es un cuasiideal.*

-Demostración-

Sea R ideal a derecha de A y L ideal a izquierda de A, anillo alternativo. Se tiene $[A, A, R \cap L] = [R \cap L, A, A] \subset R \cap L$ y $A(R \cap L) \subset L$ y $(R \cap L)A \subset R$. Así que $(A(R \cap L) + [A, A, R \cap L]) \cap ((R \cap L)A + [A, A, R \cap L]) \subset L \cap R$. Luego $L \cap R$ es cuasiideal de A.

<u>Nota:</u> No es cierto que cada cuasiideal sea la intersección de un ideal a derecha y un ideal a izquierda. El ejemplo 2.1 de [44] demuestra esta afirmación.

<u>*Proposición 1.3*</u>*: La intersección de un cuasiideal Q de A y un subanillo B de A es un cuasiideal de B.*

-Demostración-

Es claro, porque $[B, B, B \cap Q] \subset B \cap [A, A, Q] \subset B \cap Q$ y $(B(B \cap Q) + [B, B, B \cap Q]) \cap ((Q \cap B)B + [B, B, Q \cap B]) \subset Q \cap B$.

<u>Observación:</u> Para anillos asociativos se cumple que dado e un idempotente de un anillo A y R y L ideales a derecha e izquierda de A, respectivamente, entonces Re y eL son cuasiideales de A. Para anillos alternativos no se tiene un análogo resultado. Como ejemplo ilustrativo tómese el álgebra de Cayley-Dickson con divisores de cero, A, sobre un cuerpo F y considérese la subálgebra $A_1 = (x_0, x_1, x_2, y_0, y_3)$ referida a la base ya conocida de A. Se tiene que (x_1, y_3) es ideal de A_1 y x_0 es idempotente de A. Sin embargo $x_0(x_1, y_3) = (x_1)$ y (x_1) no es

cuasiideal porque

$$(x_1)A_1 = (x_1, y_3) \qquad \text{y} \qquad A_1(x_1) = (x_1, y_3)$$

<u>*Proposición 1.4*</u>*: Sea A un anillo alternativo y Q un cuasiideal de A tal que $Q \subset QA$ ó $Q \subset AQ$. Entonces Q es la intersección de $Q + AQ$ y $Q + QA$.*

-Demostración-

Denotemos $P = (Q + QA) \cap (Q + AQ)$. Es evidente $Q \subset P$. Supongamos que $Q \subset AQ$. Entonces $P = (Q + QA) \cap AQ$. Sea $x \in P$, $x = k+a=b$ con $a \in QA$, $k \in Q$, $b \in AQ$. Así $a = b-k \in (AQ \cap QA)$, pues $Q \subset AQ$, pero $AQ \cap QA \subset Q$. Luego $a \in Q$ y así $x \in Q$. Igualmente se obtiene de $Q \subset QA$ que $P \subset Q$.

<u>*Corolario 1.5*</u>*: Si A es un anillo con elemento unitario, cada cuasiideal de A es la intersección de un ideal a izquierda y un ideal a derecha de A.*

-Demostración-

Por la Proposición anterior es suficiente comprobar que $Q + QA$ es ideal a derecha y $Q + AQ$ es ideal a izquierda. Veamos que $Q + QA$ es ideal a derecha y de modo análogo se prueba que $Q + QA$ es ideal a izquierda.

$$(k+qa)b = kb + (qa)b = kb + q(ab) + [q, a, b] \in QA + [Q, A, A] \subset QA + Q.$$

<u>*Proposición 1.6*</u>*: Sea A un anillo tal que $A^2 \neq 0$. Entonces A es anillo de división asociativo o álgebra de Cayley-Dickson sobre su centro si y sólo si A no posee cuasiideales propios.*

-Demostración-

Es claro que si A es anillo de división asociativo A no posee cuasiideales propios. Supongamos ahora que A es un álgebra de Cayley-Dickson sobre su centro. A es entonces anillo unitario y por Corolario 1,5 todo cuasiideal de A es la intersección de un ideal a izquierda y un ideal a derecha. Por Corolario a Lema 10,2 en [55], A no posee ideales uniláteros propios, luego A no posee cuasiideales propios.

Recíprocamente si A no posee cuasiideales propios, A no posee en particular ideales uniláteros ni biláteros. Así A es simple y por tanto A es asociativo ó de Cayley-Dickson. Si A es anillo asociativo simple sin ideales uniláteros y $A^2 \neq 0$, es conocido que A, es anillo de división.

<u>Proposición 1.7:</u> *Sea Q un cuasiideal propio de un anillo A de modo que Q no es ideal unilátero de A. Entonces $AQ + [A, A, Q]$ es un ideal a izquierda propio de A y $QA + [Q, A, A]$ es un ideal a derecha propio de A.*

-Demostración-

Veamos sólamente que $AQ + [A, A, Q]$ es ideal a izquierda. Se tiene que $AQ + [A, A, Q] \neq 0$, pues si no Q sería ideal a izquierda de A. También $AQ + [A, A, Q] \neq A$ pues en caso contrario $(AQ + [A, A, Q]) \cap (QA + [Q, A, A]) = QA + [Q, A, A] \subset Q$, por ser Q cuasiideal, y entonces Q sería ideal a derecha, contradiciendo la hipótesis. Además $AQ + [A, A, Q]$ es ideal a izquierda pues

$$A(AQ + [A, A, Q]) \subset A(AQ) + A[A, A, Q] \subset A^2Q + [A, A, Q] + AQ \subset AQ + [A, A, Q].$$

<u>Proposición 1.8:</u> *La intersección de cualquier conjunto de cuasiideales de un anillo A es un cuasiideal.*

-Demostración-

Sea $\{Q_\alpha\}$ con $\alpha \in I$ una familia de cuasiideales de A. Es claro que $([A, A, \cap Q_\alpha] + A(\cap Q_\alpha)) \cap ((\cap Q_\alpha) A + [A, A, \cap Q_\alpha]) \subset Q_\alpha$ para cada $\alpha \in I$.

Observación: 1) Dado $X \subset A$, tiene sentido hablar del cuasiideal generado por X, que será $\cap \{ Q \ / \ Q$ es cuasiideal de A y $X \subset Q\}$.

2) No es cierto que la suma de cuasiideales sea cuasiideal. Ver [44] (Ejemplo 3,2).

Proposición 1.9: Sea A anillo y Q cuasiideal de A. Si X es subanillo de A tal que $(AQ + [A, A, Q]) \cap (QA + [Q, A, A]) \subset X \subset Q$, entonces X es cuasiideal de A.

-Demostración-

$(AX + [A, A, X]) \cap (XA + [X, A, A]) \subset (AQ + [A, A, Q]) \cap (QA + [Q, A, A]) \subset X$.

$[A, A, X] \subset [A, A, Q] \subset (AQ + [A, A, Q]) \cap (QA + [Q, A, A]) \subset X$.

§ 2 : Cuasiideales minimales de anillos alternativos.

Siempre que se trata el estudio de algún subconjunto diferenciado de un anillo tiene interés conocer cómo son los elementos minimales de entre esos subconjuntos.

Diremos que Q cuasiideal de A, distinto de cero, es cuasiideal minimal si no contiene propiamente a ningún cuasiideal de A.

Proposición 2.1: Sean L y R ideales minimales a izda y dcha de A, respectivamente. Entonces R∩L es ó 0 ó cuasiideal minimal de A.

-Demostración-

Sea $Q = R \cap L$. Sabemos que Q es cuasiideal. Veamos que es minimal ó $Q=0$. Supongamos que $Q \neq 0$. Sea $0 \neq Q' \subset Q$ un cuasiideal. Entonces Q' no puede ser ideal unilátero de A por la minimalidad de R y L. Por Proposición 1.7 $AQ' + [A, A, Q]$ es ideal a izquierda de A propio y además está contenido en L. Por ser L minimal, $AQ' + [A, A, Q] = 0$ ó $AQ' + [A, A, Q] = L$. Si $AQ' + [A, A, Q'] = 0$, Q' es ideal a izquierda, lo que no puede ser. Luego $AQ' + [A, A, Q] = L$. Análogamente $Q'A + [A, A, Q] = R$. Así

$$Q' \subset Q = L \cap R = (AQ' + [A, A, Q]) \cap (Q'A + [A, A, Q']) \subset Q'$$

Por tanto $Q' = Q$.

Proposición 2.2: Sea Q cuasiideal minimal de A. Entonces se cumplen una de las siguientes situaciones:

(1) $Q \subset N(A)$. Además si $Q^2 \neq 0$, Q es anillo de división asociativo y $Q = eAe$ con e un idempotente nuclear.

(2) $Q \subset D(A)$.

-Demostración-

Considerar $[A, A, Q]$. Se tiene que $[A, A, Q] \subset Q$ por ser Q cuasiideal. Veamos que $A^{\#}[A, A, Q]$ es un ideal a izquierda:

$$A(A[A, A, Q]) \subset [A, A, [A, A, Q]] + (AA)[A, A, Q] \subset [A, A, Q] + A^2[A, A, Q] \subset A^{\#}[A, A, Q].$$

Análogamente se prueba que $[A, A, Q]A^{\#}$ es un ideal a derecha. Por tanto $A^{\#}[A, A, Q] \cap [A, A, Q]A^{\#}$ es un cuasiideal contenido en $(AQ + [A, A, Q]) \cap (QA + [Q, A, A]A) \subset Q$. Por la minimalidad de Q se cumple que $A^{\#}[A, A, Q] \cap$

$[A, A, Q]A^{\#}=0$ ó $A^{\#}[A, A, Q] \cap [A, A, Q]A^{\#}=Q$. En el primer caso $[A, A, Q] = 0$ y así $Q \subset N(A)$. Teniendo en cuenta que $Q^2 \neq 0$, por Teorema 6,5 de [44], se llega a que Q es un anillo de división y además $Q = eAe$ con e un idempotente de A no cero y nuclear. En el segundo caso $Q \subset D(A)$ y claramente $A^{\#}[A, A, Q] = AQ + [A, A, Q]$ y $[A, A, Q]A^{\#} = QA + [Q, A, A]$.

<u>Corolario 2.3:</u> *Sea Q cuasiideal minimal de A tal que $Q \subset D(A)$ y $Q \not\subset N(A)$. Entonces Q es la intersección de un ideal a derecha y un ideal a izquierda de A.*

Esto no ocurre con los cuasiideales minimales asociativos. Ver [51].

<u>Observación:</u> Existen cuasiideales minimales contenidos en D(A) con cuadrado cero. Por ejemplo si tomamos la subálgebra del álgebra de Cayley-Dickson con divisores de cero: $A = (x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_3)$ y $Q = (x_2, y_3) = D(A)$.

<u>Proposición 2.4:</u> *Sea Q cuasiideal de A tal que Q es subanillo de división de A ó Q es álgebra de Cayley-Dickson. Entonces Q es un cuasiideal minimal de A.*

-Demostración-

Es clara por Proposición 1,6.

<u>Observación:</u> Si Q es cuasiideal y $Q^2=0$, entonces Q no tiene por qué ser cuasiideal minimal. Por ejemplo

$$Q=\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} \;/\; a, b \in \mathbb{Q} \right\} \leq M_3(\mathbb{Q})$$

es cuasiideal y no es minimal porque $Q' = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;/\; a \in \mathbb{Q} \right\}$ está contenido en Q y es cuasiideal.

Proposición 2.5: El producto RL de un ideal a derecha minimal, R, y un ideal a izquierda minimal, L, de un anillo A es ó 0 ó un cuasiideal minimal de A.

-Demostración-

Supongamos que $RL \neq 0$. Consideramos $A(RL) + A(A(RL)) + \ldots$ y $(RL)A + ((RL)A)A + \ldots$ que vamos a denotar respectivamente por $\Sigma A^{(n)}(RL)$ y $\Sigma (RL)A^{(n)}$. Si $\Sigma A^{(n)}(RL) = 0$ ó $\Sigma (RL)A^{(n)} = 0$ entonces $\Sigma A^{(n)}(RL) \cap \Sigma (RL)A^{(n)} = 0 \subset RL$ y así RL es un cuasiideal. Como $0 \neq RL \subset R \cap L$ y $R \cap L$ es cuasiideal minimal, por Proposición 2,1, $RL = R \cap L$ y así RL es cuasiideal minimal. Si $\Sigma A^{(n)}(RL) \neq 0$ y $\Sigma (RL)A^{(n)} \neq 0$, por la minimalidad de L y R se tiene que $\Sigma A^{(n)}(RL) = L$ y $\Sigma (RL)A^{(n)} = R$. Demostremos ahora que $R^2 \neq 0$:

$0 \neq RL = R(\Sigma A^{(n)}(RL))$. Sea $x \in R(\Sigma A^{(n)}(RL))$ tal que $x = r(a_n(\ldots\ldots(a_1(r_0 l_0))))$ con $r, r_0 \in R$, $a_i \in A$ para $i = 1, \ldots\ldots, n$ y $l_0 \in L$. Procedamos por inducción sobre n para probar que $x = r(a_n(\ldots\ldots(a_1(r_0 l_0))))$ $\in \Sigma R^2 A^{(m)}$ y que $[r, a_n, a_{n-1}(\ldots\ldots(a_1(r_0 l_0)))] \in \Sigma R^2 A^{(m)}$. Si $x = r(a_1(r_0 l_0))$ entonces se tiene que $x = (ra_1)(r_0 l_0) - [r, a_1, r_0 l_0] = (ra_1)(r_0 l_0) +$

$[r, r_0 l_0, a_1] \in \Sigma R^2A^{(m)}$. Supongamos que $x \in \Sigma R^2A^{(m)}$ hasta n-1. Veamos qué ocurre para n. Aplicando las identidades de Zorn se tiene que $[r, a_n, (a_{n-1}(\ldots\ldots(a_1(r_0 l_0))))] = [r, a_n, a_{n-2}(\ldots\ldots(a_1(r_0 l_0)))]\, a_{n-1} + [a_{n-1}, a_n, (a_{n-2}(\ldots\ldots(a_1(r_0 l_0))))]\, r - [a_{n-1}, a_n, r(a_{n-2}(\ldots\ldots(a_1(r_0 l_0)))]$ donde $[a_{n-1}, a_n, a_{n-2}(\ldots\ldots(a_1(r_0 l_0)))]\, r = [ra_{n-1}, a_n, a_{n-2}(\ldots\ldots(a_1(r_0 l_0)))] + [a_n a_{n-1}, r, a_{n-2}(\ldots\ldots(a_1(r_0 l_0)))] - [a_{n-1}, r, a_{n-2}(\ldots\ldots(a_1(r_0 l_0)))]\, a_n \in \Sigma R^2A^{(m)}$ por hipótesis de inducción y por ser R ideal a derecha. Así $[r, a_n, (a_{n-1}(\ldots\ldots(a_1(r_0 l_0))))] \in (\Sigma R^2A^{(m)})\, A + \Sigma R^2A^{(m)}$. Por tanto $x = (ra_n)(a_{n-1}(\ldots\ldots(a_1(r_0 l_0)))) - [r, a_n, (a_{n-1}(\ldots\ldots(a_1(r_0 l_0))))] \in \Sigma R^2A^{(m)}$ por hipótesis de inducción y aplicando lo anterior. Así pues $R^2 \neq 0$, pues de los contrario $RL = 0$.

Por tanto R es ideal a derecha minimal tal que $R^2 \neq 0$. De la misma manera se demuestra que L es ideal a izquierda minimal tal que $L^2 \neq 0$.

En estas circunstancias se puede asegurar por [39] que

(i) ó $R \subset U$ (con U el mayor ideal de A contenido en N(A)

(ii) ó $R \subset D$ y en este caso R es ideal bilátero, algebra de Cayley-Dickson y $A = R \oplus A'$;

y lo mismo con respecto a L.

Si R, L verifican i) por el caso asociativo se llega a que $RL = R \cap L$ con lo que RL es cuasiideal minimal. Si $R \subset U$ y $L \subset D$, como $UD = 0$, entonces $RL = 0$, contradicción. Igualmente se llega a contradicción si $R \subset D$ y $L \subset U$, por ser $DU = 0$. Si $R \subset D$ y $L \subset D$, entonces R y L son ambos ideales biláteros. Luego RL es ideal bilátero y $RL \subset R, L$. Por ser R, L álgebras de Cayley-Dickson y $RL \neq 0$ se tendrá que $RL = R = L$, y así RL es cuasiideal minimal y álgebra de Cayley-Dickson.

<u>*Proposición 2.6*</u>*: Sea L un ideal a izquierda minimal de un anillo A, tal que L no es un álgebra de Cayley-Dickson con divisores de cero, y sea $0 \neq e$ un idempotente de L. Entonces eL es un cuasiideal minimal de A y subanillo de división de A.*

-Demostración-

Notese que $L^2 \neq 0$, pues $e \in L$ y $e^2 = e$. Así L es ideal a izquierda minimal, y por [21] ó $L \subset U$ ó $L \subset D$ y entonces es álgebra de Cayley-Dickson. Si $L \subset U$ y $0 \neq e \in L$ es idempotente, se demuestra como en el caso asociativo que eL es subanillo de división de A, y que es cuasiideal. Si $L \subset D$, L es álgebra de Cayley-Dickson de división, por hipótesis. Sea $0 \neq e \in L$ idempotente. Claramente $e = 1_L$ y así $eL = L$.

<u>Nota:</u> No ocurre lo mismo si L es álgebra de Cayley-Dickson con divisores de cero. Por el proceso de Cayley-Dickson (ver §2 de Capítulo 0) se puede suponer que, con respecto a la base que ya conocemos, $e = x_0$. Pero entonces $x_0L = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ que no es cuasiideal de L.

<u>§ 3 : Cuasiideales minimales de anillos alternativos semiprimos.</u>

Sea A un anillo alternativo y P un ideal de A. Se dice que P es un ideal primo si dados B, C ideales de A tales que $B.C \subset P$, entonces $B \subset P$ ó $C \subset P$. A se dice primo si 0 es ideal primo de A.

<u>Lema 3.1</u>: Sea M ideal de A. Son equivalentes:

(i) Si B es ideal de A tal que $B^2 \subset M$, entonces $B \subset M$.

(ii) Si L es ideal a izquierda de A tal que $L^2 \subset M$, entonces $L \subset M$.

(iii) Si R es ideal a derecha de A tal que $R^2 \subset M$, entonces $R \subset M$.

-Demostración-

Son claras las implicaciones de (ii) a (i) y de (iii) a (i). Veamos que (i) implica (ii). Sea L ideal a izquierda de A cumpliendo $L^2 \subset M$. Es conocido que L + LA es ideal bilátero. Se tiene que $(L + LA)^2 \subset L^2 + L(LA) + (LA)L + (LA)(LA)$. Pero

* $L(LA) \subset M$, pues dados $x, y \in L$ $a \in A$

$x(ya) = -[x, y, a] + (xy)a = -[a, x, y] + (xy)a =$

$-(ax)y + a(xy) + (xy)a \in M$

* $(LA)L \subset M$, pues dados $x, y \in L$ $a \in A$

$(xa)y = [x, a, y] + x(ay) = -[a, x, y] + x(ay) \in M$

* $(LA)(LA) \subset M$, pues dados $x, y \in L$ $a, b \in A$

$(xa)(yb) = [xa, y, b] + ((xa)y)b$

donde $((xa)y)b \in M$ por punto dos y

$[xa, y, b]$ por la linearización de las identidades de Zorn es

$y[x, a, b] - [xy, a, b] + a[x, y, b] = y[a, b, x] - [a, b, xy] - a[x, b, y]$

que pertenece a M.

La implicación de (i) a (ii) es similar a ésta.

Si M es un ideal de un anillo A cumpliendo (i) ó (ii) ó (iii) se dice que M es un ideal semiprimo (ver Capítulo 0, §3) . Si 0 es un ideal semiprimo de A, entonces A es semiprimo. Dado M ideal unilátero de A, se dice que A es <u>M-semiprimo</u> si M no contiene ningún ideal unilátero o bilátero de A de cuadrado cero.

<u>Proposición 3.2</u>: Sea Q cuasiideal minimal de un anillo A tal que $Q \subset D$. Si A es $A^{\#}[A, A, Q]$-semiprimo ó $[A, A, Q]A^{\#}$-semiprimo, entonces Q es un álgebra de Cayley-Dickson y es un ideal bilátero.

-Demostración-

Por Proposición 2,2 $Q = A^{\#}[A, A, Q] \cap [Q, A, A] A^{\#}$ con $A^{\#}[A, A, Q] = AQ + [A, A, Q]$ y $[A, A, Q] A^{\#} = QA + [A, A, Q]$. Veamos que $A^{\#}[A, A, Q]$ es un ideal a izquierda minimal. Supongamos que L es ideal a izquierda de A tal que L está contenido estrictamente en $A^{\#}[A, A, Q]$. Demostraremos que $L^2 = 0$. Considérese el cuasiideal $AL \cap (QA + [Q, A, A])$, que está contenido en $(AQ + [A, A, Q]) \cap (QA + [Q, A, A]) \subset Q$. Por la minimalidad de Q, $AL \cap (QA + [Q, A, A]) = 0$ ó $AL \cap (QA + [Q, A, A]) = Q$. Si se verifica esto último $Q \subset AL \subset L \subset A^{\#}[A, A, Q]$ y así $A^{\#}[A, A, Q] = AQ + [A, A, Q] = L$, contradicción. Luego $AL \cap (QA + [Q, A, A]) = 0$. Así $QL \subset AL \cap (QA + [Q, A, A]) = 0$ y $[Q, A, L] \subset AL \cap (QA + [Q, A, A]) = 0$. Por tanto $L^2 \subset A^{\#}[A, A, Q] . L \subset (AQ) L + QL \subset A(QL) + [A, Q, L] + QL \subset [Q, A, L] = 0$.

Pero A es $A^{\#}[A, A, Q]$- semiprimo y L es ideal a izquierda de A contenido en $A^{\#}[A, A, Q]$ y de cuadrado cero. Entonces $L=0$. Por tanto $A^{\#}[A, A, Q]$ es ideal a izquierda minimal y claramente está contenido en D. Por [39] y por ser A $A^{\#}[A, A, Q]$-semiprimo, es ideal bilátero y álgebra de Cayley-Dickson sobre su centro. Pero $Q \subset A^{\#}[A, A, Q]$ y así por Proposición 1,6 se tendrá que $Q = A^{\#}[A, A, Q]$.

Análogamente, partiendo de que A es $[A, A, Q]A^{\#}$-semiprimo se llega a que $[A, A, Q]A^{\#}$ es ideal a derecha minimal y entonces Q es ideal y álgebra de Cayley-Dickson también.

<u>Corolario 3.3</u>: *Sea Q cuasiideal minimal de un anillo semiprimo A. Entonces Q es la intersección de un ideal a izquierda minimal de A y un ideal a derecha minimal de A.*

-Demostración-

Por Proposición 2,2 $Q\subset N(A)$ ó $Q\subset D(A)$. Si $Q\subset N(A)$, como en el caso associativo se deduce que $Q = AQ \cap QA$ y AQ y QA son ideales uniláteros minimales (ver [44]). Si $Q \subset D(A)$, como A es $A^{\#}[A, A, Q]$-semiprimo por ser A semiprimo, se obtiene que Q es ideal bilátero y álgebra de Cayley-Dickson.

<u>Teorema 3.4</u>: *Sea Q cuasiideal minimal de un anillo semiprimo A. Entonces $Q = fAe$ con f y e idempotentes nucleares y además*

(a) ó $Q \subset D(A)$ y en este caso Q es ideal bilátero, álgebra de Cayley-Dickson y $A = Q \bullet A'$.

(b) ó bien $Q\subset U(A)$.

-Demostración-

Sabemos que $Q \subset D(A)$ ó $Q\subset N(A)$. Si $Q\subset D(A)$, por Proposición 3,2 es ideal bilátero y álgebra de Cayley-Dickson, luego por tanto Q es ideal minimal. Así por [39] $Q=eAe$ con e idempotente nuclear y $A = Q \bullet A'$. Si $Q\subset N(A)$, por Corolario anterior, $Q = AQ \cap QA$ con AQ y QA ideales uniláteros minimales. Como $Q\subset N(A)$, por [39], AQ y QA están contenidos en $U(A)$ y $AQ=Ae$ y $QA=fA$ con e, f idempotentes nucleares, luego $Q=fAe$.

<u>Observación:</u> Si A es semiprimo y Q es cuasiideal minimal no

asociativo, entonces $Q^2 \neq 0$. Nótese la deferencia con la situación asociativa en donde existen anillos semiprimos con cuasiideales minimales de cuadrado cero: en los anillos de matrices, por ejemplo. Además se observa que quedan mejor determinados los cuasiideales minimales no asociativos, que los asociativos. Esto es algo que ocurre también para ideales minimales e ideales uniláteros minimales.

<u>*Proposición 3.5*</u>: *Sea e idempotente no cero de un anill(semiprimo A. Son equivalentes:*

(i) Ae es unideal a izquierda minimal de A.

(ii) eAe es un cuasiideal minimal de A.

(iii) eA es un ideal a derecha minimal de A.

-Demostración-

Veamos (i) implica (ii). Supongamos que Ae es ideal a izquierda minimal de A. Por [39] $Ae \subset U$ ó $Ae \subset D$. Si $Ae \subset U$, $eAe = eA \cap Ae$ con eA ideal a derecha minimal (ver Proposición 6.11 de [32]). Así eAe es cuasiideal minimal. Si $Ae \subset D$ entonces Ae es álgebra de Cayley-Dickson y como para cada a perteneciente a Ae, $ae=a$, se tiene que $e=1_{Ae}$. Así $eAe=Ae$ y es cuasiideal minimal por Proposición 1,7.

(ii) implica (iii). Supongamos que eAe es cuasiideal minimal de A. Por Corolario 3,3 $eAe = L \cap R$ con L y R ideales unilateros minimales.

Si $R \subset U$ entonces $e \in U$ y así eA es ideal a derecha. Como $e \in R$, eR es ideal a derecha contenido en R. Por la minimalidad de R, al ser $e \in eR$, se tiene que $eR = R$. Tambien $eR \subset U$ y por Proposición 2,6 eRe es cuasiideal de A tal que $eRe \subset eAe$, con eAe cuasiideal minimal. Como $e \in eRe$, $eRe = eAe$.

Luego $e = eRe \subset eR = R$. Por tanto $eA \subset RA \subset R$. Así $eA = R$.

Si $R \subset D$ se tendrá que $eAe \subset D$ y eAe es así álgebra de Cayley-Dickson y además ideal bilátero. Luego $eAe = eA$.

(iii) implica (i). Sea eA ideal a derecha minimal. Si $eA \subset U$ entonces por Proposición 2,5 eAe es cuaiideal minimal, y como en (ii) implica (iii) se obtiene que Ae es ideal a izquierda minimal. Si $eA \subset D$ entonces eA es álgebra de Cayley-Dickson e ideal bilátero con $e = 1_{eA}$ idempotente nuclear de A. Así Ae es ideal a izquierda y $Ae \subset eA$, luego $Ae = eA$.

<u>Corolario 3.6</u>: Si A es anillo semiprimo, son equivalentes:

(i) A tiene un cuasiideal minimal.

(ii) A tiene un ideal a izquierda minimal.

(iii) A tiene un ideal a derecha minimal.

<u>Teorema 3.7</u>: Sea A un anillo semiprimo. El producto de dos cuasiideales minimales de A es ó 0 ó un cuasiideal minimal de A.

-Demostración-

Si llamamos Q y Q' a los cuasiideales minimales de A, se tiene una de las siguientes situaciones

i) $Q \subset U$ y $Q' \subset D$, y entonces como $UD=0$, $QQ' = 0$.

ii) $Q \subset D$ y $Q' \subset U$, y entonces como $DU=0$, $QQ'=0$

iii) $Q \subset D$ y $Q' \subset D$, y entonces Q, Q' son ideales biláteros minimales y así ó $QQ' = 0$ ó $QQ' = Q = Q'$.

iv) $Q \subset U$ y $Q' \subset U$, y entonces como en el caso asociativo (ver [44]) $QQ'=0$ ó QQ' es cuasiideal.

En Proposición 7,8 de [44] se demuestra para anillos asociativos que todo ideal a derecha minimal no cero de un anilo semiprimo A es la unión disjunta (salvo el cero) de cuasiideales minimales. Vamos a probar que este resultado es también cierto en anillos alternativos semiprimos. A continuación se va a dar una demostración con hipótesis más débiles que en el caso asociativo, con lo que se mejorará además este caso.

<u>Proposición 3.8</u>: Sea R ideal a derecha minimal tal que $R^2 \neq 0$ *. Entonces R es la unión disjunta (salvo el cero) de cuasiideales minimales.*

-Demostración-

Por [39] se tiene que $R \subset D$ y entonces es álgebra de Cayley-Dickson y cuasiideal minimal ó $R \subset U$ y entonces $R = eA$ con e idempotente nuclear. En este segundo caso vamos a demostrar que R es la unión disjunta salvo el cero de cuasiideales.

Se sabe por Proposición 2,5 que $Re = eAe$ es cuasiideal minimal. Veamos que $eAe.a$, para cada $a \in A$, es cuasiideal minimal también, y como $R = eA = \bigcup eAe.\, a$, con a recorriendo A, se tendrá lo que buscamos.

En lo que sigue de demostración, se va a suponer la asociatividad, lo que no es ninguna falta de rigor ya que trabajamos con productos de elementos entre los cuales hay algunos pertenecientes a U, ideal contenido en el núcleo de A.

Se tiene $eAe.a = eA \cap Aea$. Así $eAe.\, a$ es cuasiideal. Supongamos que no es minimal. Sea $0 \neq Q' \neq Q$ cuasiideal tal que $Q' \subset eAe.\, a$. Se cumple que $Q'A \cap AQ' \subset Q'$. Pero $Q'A$ es ideal a derecha contenido en $eA = R$, ideal a derecha minimal. Asi $Q'A = 0$ ó $Q'A = eA$. $Q'A$ no puede ser 0 pues Q'sería ideal a derecha y como $Q' \subset eAe. a \subset eA = R$ y R es ideal a derecha minimal, entonces $Q' = R$, luego $Q' = eAe. a$. Así $Q'A = eA = R$. Se observa que $eQ' = Q'$ y así $Q' \subset AQ'$. Por tanto $Q' = Q'A \cap AQ'$, pues $Q' \subset R \cap AQ' = Q'A \cap AQ' \subset Q'$, donde $AQ' \subset A. eAe. a = Ae. a$.

Consideremos $A' = \{ x \in A \ / \ xe. a \in AQ' \}$. Se cumple que A'es ideal a izquierda de A. Así $Q' = eA \cap A'.ea$. Como $eA \cap A'e$ es cuasiideal y $eA \cap A'e \subset eA \cap Ae = eAe$ y eAe es cuasiideal minimal, entonces $eA \cap A'e = 0$ ó $eA \cap A'e = eA \cap Ae = eAe$.

Si $eA \cap A'e = eAe$, se tiene que $Q' = eA \cap A'ea$ contiene a $(eA \cap A'e) a = eAe. a$. Así $Q' = eAe. a$.

Si $eA \cap A'e = 0$, entonces sea $x \in eA \cap A'ea = Q'$. Se cumple que $x = eb = a'ea$ con $b \in A$, $a' \in A'$. Como $ex = x = ea'ea$ y $ea'e \in eA \cap A'e$, se tiene que $ex = x = 0$, y esto para cada $x \in Q'$. Luego $Q' = 0$. Contradicción.

<u>§ 4 : Un socle de cuasiideales.</u>

En [39] Slater estudia la suma de los ideales a derecha minimales de un anillo alternativo A. Denota a esta suma $S_r(A)$. Bajo la débil condición de que los ideales a derecha minimales contenidos en D sean de cuadrado distinto de cero, demuestra que $S_r(A)$ es un ideal de A. Análogamente con $S_l(A)$, la suma de los ideales a izquierda minimales de A. Si A cumple además que todo ideal a derecha minimal es idempotente, propiedad denotada IRM, entonces se demuestra que

$$S_r(A) = \oplus\, C_i \qquad \text{con } i \in I$$

donde C_i son los ideales minimales de A con algún ideal unilátero minimal, y que por tanto forzosamente habrán de ser álgebras de Cayley-Dickson ó anillos simples de transformaciones lineales de rango finito de un espacio vectorial sobre un anillo de división D_i. Análogamente si A cumple la propiedad de que todo ideal a izquierda minimal es idempotente, denotada IML, $S_l(A)$ posee el mismo Teorema de estructura. Esto quiere decir que si A cumple IMR y IML se tiene que $S_r(A) = S_l(A)$. A estos subanillos $S_r(A)$, $S_l(A)$ se les denomina socle de ideales a derecha y socle de ideales a izquierda respectivamente. Introducimos ahora de modo natural la siguiente definición:

<u>Definición:</u> Sea A un anillo alternativo, denotamos por

$S_q(A) = \Sigma\,\{ Q \mathbin{/} Q$ es cuasiideal minimal de A $\}$

Lo denominamos el Socle cuasiideal de A.

Se observa que $S_q(A)$ es en principio un subgrupo abeliano. Veamos ahora la relación entre $S_r(A)$, $S_l(A)$, $S_q(A)$ bajo ciertas condiciones del anillo A.

<u>Proposición 4.1:</u> Sea A un anillo alternativo. Si A satisface IRM entonces $S_r(A) \subset S_q(A)$. Si A satisface ILM entonces $S_l(A) \subset S_q(A)$. Si A satisface IRM y ILM, entonces $S_r(A) = S_l(A) \subset S_q(A)$.

-Demostración-

Por Proposición 3,8 se tiene que si A cumple IMR, entonces $S_r(A) \subset S_q(A)$. Ahora como el razonamiento de la Proposición 3,8 es válido también para ideales a izquierda, si A cumple IML se tendrá $S_l(A) \subset S_q(A)$.

Finalmente si A cumple IMR e IML , entonces $S_r(A) = S_l(A) \subset S_q(A)$.

Proposición 4.2: Sea A un anillo semiprimo. Entonces $S_r(A) = S_l(A) = S_q(A)$ y además $S_q(A) = \oplus C_i$, con $i \in I$, donde C_i son los ideales biláteros minimales de A con algún ideal unilátero minimal de A.

-Demostración-

Basta tener en cuenta la Proposición 4,1, el Corolario3,3 y el comentario con que iniciábamos el párrafo.

A continuación se exponen una serie de ejemplos de anillos alternativos y se calcula su socle a izquierda, su socle a derecha y el socle de cuasiideales.

Con el primer ejemplo se demuestra que $S_r(A) = S_l(A) = S_q(A)$ no es condición suficiente para que A sea semiprimo.

Ejemplo 1º: Sea el grupo abeliano ($\mathbf{Z}$, +) con el producto cero. Se tiene que ($\mathbf{Z}$, +) con ese producto es anillo no semiprimo. Sin embargo satisface IRM e IML , pues no posee ideales minimales. Así $S_r(\mathbf{Z}) = S_l(\mathbf{Z}) = 0$. Tampoco posee cuasiideales minimales y así $S_q(\mathbf{Z}) = 0$. (Este ejemplo fue utilizado por M. Slater para probar que la condición IRM e IML no implican la semiprimitividad).

Puede ocurrir que A cumpla que $S_l(A) \neq S_r(A)$ y $S_q(A)$ sea igual a uno de ellos.

Ejemplo 2º: Sea A una $\mathbb{Q}$-álgebra (álgebra sobre el cuerpo de los números racionales) con base {a, t} , que tiene la siguiente tabla de multiplicar:

TABLA VII

	a	t
a	a	0
t	t	0

A es un $\mathbb{Z}$-álgebra semiprima que cumple IML pues no posee ideales a izquierda minimales, y sin embargo no cumple IMR pues $\mathbb{Q}t$ es ideal a derecha minimal de A y es de cuadrado cero. También $\mathbb{Q}a$ es ideal a derecha minimal de A. Al hallar $S_r(A)$, $S_l(A)$, se tiene por tanto que $\underline{S_l(A)=0}$, $\underline{S_r(A)=A}$. Hallemos ahora $S_q(A)$. Supongamos que Q es cuasiideal de A distinto de cero. Sea $\lambda a + \mu t \in Q$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$. Se tiene

$$A.(\lambda a + \mu t) = \mathbb{Q}\lambda a + \mathbb{Q}\lambda t \qquad (\lambda a + \mu t).A = \mathbb{Q}.(\lambda a + \mu t)$$

Como $A.(\lambda a + \mu t) \cap (\lambda a + \mu t).A \subset Q$, se habrá de cumplir que $Q = \mathbb{Q}.(\lambda a + \mu t)$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, si Q es minimal. Luego $\underline{S_q(A)=A}$.

<u>Ejemplo 3º:</u> Sea A un álgebra alternativa sobre $\mathbb{Q}$ con base $\{x_0, x_1, x_2, y_3\}$ que tiene tabla de multiplicar:

TABLA VIII

	x_0	x_1	x_2	y_3
x_0	x_0	x_1	x_2	0
x_1	0	0	y_3	0
x_2	0	$-y_3$	0	0
y_3	y_3	0	0	0

Consideremos A como $\mathbf{Z}$-álgebra. Se observa que no es asociativa ya que el asociador $[x_0, x_1, x_2] = y_3$. Veamos cómo son los ideales a derecha. Sea $0 \neq R$ ideal a derecha de A y sea $a \in A$, $a \neq 0$, con $a = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 y_3$ y $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{Q}$. Así $ax_0 = \lambda_0 x_0 + \lambda_3 y_3 \in R$ y $(ax_0) x_1 = \lambda_0 x_1 \in R$ y $(ax_0) x_2 = \lambda_0 x_2 \in R$. Luego $x_1 x_2 = y_3 \in R$. Por tanto ó $\lambda_0 = 0$ ó $R = A$. Si $\lambda_0 = 0$ para cada $a \in R$, como $ax_0 = \lambda_3 y_3$ $ax_2 = \lambda_1 y_3$ y $ax_1 = -\lambda_2 y_3$, se deduce que $y_3 \in R$. Luego $\mathbf{Q} y_3$ es el único ideal a derecha minimal y por tanto $S_r(A) = \mathbf{Q} y_3$. Razonando de modo semejante se demuestra que A no posee ideales a izquierda minimales. Luego $S_l(A) = 0$. Como cada ideal a izquierda es cuasiideal se tiene que $S_q(A) = 0$.

Ejemplo 4º: Con este ejemplo se va a ver que $S_q(A)$ no tiene porqué concidir ni con $S_r(A)$ ni con $S_l(A)$. Sea A álgebra sobre $\mathbf{Z}_2$ que como $\mathbf{Z}_2$-módulo tiene base { e, a, b} cuya tabla de multiplicar es:

TABLA IX

	e	a	b
e	e	a+b	0
a	b	0	0
b	b	0	0

Se tiene que $(0, a)$, $(0, e)$, $(0, b)$ son cuasiideales ya que

$A.(0, a) \cap (0, a).A = (0, a+b) \cap (0, b) = 0 \subset (0, a)$

$A.(o, e) \cap (0, e).A = (0, e)$

$A.(o, b) \cap (0, b).A = 0 \subset (0, b)$

Así $\underline{S_q(A) = A}$. Fácilmente se obtiene también que $\underline{S_r(A) = \{0, b\}}$, $\underline{S_l(A) = \{0, a, b\}}$.

§ 5: Teoremas de estructura para anillos semiprimos, basados en cuasiideales.

Definición: La familia de cuasiideales $Q_{\gamma\delta}$ $(\gamma \in \Gamma, \delta \in \Delta)$ de un anillo A forma un sistema completo K si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(1) ó $Q_{\gamma\delta} = 0$ ó $Q_{\gamma\delta}$ es un cuasiideal minimal de A.

(2) para cada $Q_{\gamma\delta} \neq 0$ existen idempotentes nucleares e_γ, $f_\delta \in A$ tales que $Q_{\gamma\delta} = e_\gamma A f_\delta$.

(3) para cada subconjunto finito $Q_{11}, \ldots, Q_{1e}, Q_{21}, \ldots, Q_{2e}, \ldots, Q_{k1}, \ldots, Q_{ke}$ de K existen idempotentes ortogonales nucleares g_i, h_j con $i = 1, \ldots, r \leq k$ $\quad j = 1, \ldots, s \leq e$ tales que

$$\sum_{x=1}^{k} \sum_{y=1}^{e} Q_{xy} \leq \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} g_i A h_j$$

donde $g_i A h_j$ son ó 0 ó cuasiideales minimales de A tales que

$$g_i A h_j \cdot h_j A g_i = g_i A g_i$$

Teorema 5.1: Las siguientes condiciones sobre un anillo son equivalentes:

(i) A es semiprimo y es la suma de sus ideales a izquierda minimales.

(ii) $A = (\oplus B_i) \oplus (\oplus A_j)$ con $(B_i)_{i \in I}$ anillos simples asociativos con algún ideal a izquierda minimal y $(A_j)_{j \in J}$ álgebras de Cayley-Dickson. Además $\oplus B_i = U(A)$ y $\oplus A_j = D(A)$.

(iii) A es la suma de cuasiideales de A que forman un sistema completo.

(iv) A es semiprimo y es la suma de sus cuasiideales minimales.

-Demostración-

Sabemos que si L es ideal a izquierda minimal entonces $L \subset U$ ó $L \subset D$, y además si $L \subset D$ se cumple que L es ideal bilátero y álgebra de Cayley-Dickson. Se observa que si A es semiprimo no puede ocurrir que $L \subset U \cap D$, pues entonces $L^2 \subset UD = 0$.

(i) implica (ii). Supongamos que A es semiprimo y es suma de sus ideales a izquierda minimales. Se cumple que $A = D + U$, donde D es suma de los ideales a izquierda minimales de A contenidos en D y U es la suma del resto de los ideales a izquierda minimales de A, contenidos en U.

Como $A = D + U$ y $DU = UD = 0$, por ser A es semiprimo, U es semiprimo y entonces del mismo modo que en el caso asociativo se demuestra que U es la suma directa de ideales biláteros de U, B_j con $j \in J$, que serán también ideales de A pues $UD = DU = 0$. Estos B_j se sabe también que son subanillos simples de A conteniendo al menos un ideal a izquierda minimal. Entonces $U = \oplus B_j$, con $j \in J$.

Denotemos por $\{A_i / i \in I\}$ a los ideales a izquierda minimales de

A contenidos en D. Veamos que A=

$$\dot{+}_{i \in I} A_i \;\dot{+}\; \bullet_{j \in J} B_j$$

Por ser los A_i ideales de A se tiene que $A_i A_j \subset A_i$, $A_i A_j \subset A_j$. Como A_i, A_j son minimales, $A_i A_j = 0$ ó $A_i A_j = A_i = A_j$. También $A_i B_j = 0$ pues $DU = 0$.

Considérese la intersección

$$A_k \cap \left(\sum_{i \in I,\, i \neq j} A_i + \sum_{j \in J} B_j \right)$$

Es un ideal de A_k. Pero A_k es un álgebra de Cayley-Dickson, luego dicha intersección es 0 ó A_k. Si fuera A_k,

$$A_k \subset \left(\sum_{i \in I,\, i \neq j} A_i + \sum_{j \in J} B_j \right)$$

Multiplicando por A_k, se tiene lo siguiente: $A_k^2 = A_k \subset$

$$A_k \left(\sum_{i \in I,\, i \neq k} A_i \right) + A_k \left(\sum_{j \in J} B_j \right) = 0$$

según se acaba de ver. Contradicción.

De igual manera se demuestra que

$$B_e \cap \left(\sum_{j \in J,\, j \neq e} B_j + \sum_{i \in I} A_i \right) = 0$$

Finalmente es claro que

$$A = \left(\bullet_{i \in I} A_i \right) \bullet \left(\bullet_{j \in J} B_j \right).$$

(ii) implica (iii). Por el caso asociativo se tiene que U es la suma de cuasiideales de U (y por tanto de A al ser $UD = DU = 0$) que forman un sistema completo. Sean $Q_{\gamma\delta}$ con $\gamma\in\Gamma$ y $\delta\in\Delta$ esos cuasiideales. Sean A_i, $i\in I$, los sumandos directos de D (que ya sabemos que son álgebras de Cayley-Dickson). Los A_i's son así cuasiideales minimales de A y si e_i es la identidad de cada uno de ellos, se tiene que $A_i = e_i A_i e_i$ y los e_i son asi idempotentes nucleares claramente.

Para tener un sistema completo basta tomar

$K = \{ Q_{\gamma\delta} \ / \ \gamma\in\Gamma \cup I \quad \delta\in\Delta \cup I \}$

tales que

$$
\begin{aligned}
Q_{\gamma\delta} &= 0 && \text{si } \gamma\in\Gamma \text{ y } \delta\in I \\
&= 0 && \text{si } \gamma\in\Gamma \text{ y } \delta\in\Delta \\
&= 0 && \text{si } \gamma\in I \text{ y } \delta\in I \text{ pero } \gamma\neq\delta \\
&= A_i && \text{si } \gamma=\delta=i\in I \\
&= Q_{\gamma\delta} && \text{si } \gamma\in\Gamma \text{ y } \delta\in\Delta
\end{aligned}
$$

Consideremos un subconjunto finito $Q_{11},\ldots, Q_{1k}, Q_{21},\ldots, Q_{2k},\ldots, Q_{e1},\ldots, Q_{ek}$ de K donde $\{1,\ldots, e\} = \{1,\ldots, n\} \cup \{n+1,\ldots, e\}$ con $\{1,\ldots n\} \subset \Gamma$ y $\{n+1,\ldots, e\} \subset I$ y $\{1,\ldots, k\} = \{1,\ldots,m\} \cup \{m+1,\ldots, k\}$ con $\{1,\ldots, m\} \subset \Gamma$ y $\{m+1,\ldots,k\} \subset I$. Entonces $\{ Q_{11},\ldots, Q_{1m}, Q_{21},\ldots, Q_{2m},\ldots, Q_{n1},\ldots, Q_{nm}\} \subset \{Q_{\gamma\delta} \ / \ \gamma\in\Gamma \quad \delta\in\Delta \}$. Por el caso asociativo sabemos que existen idempotentes ortogonales en U, g_i, h_j con $i= 1,\ldots, r \leq n \quad j= 1,\ldots,s \leq m$ tales que

$$\sum_{x=1}^{n} \sum_{y=1}^{m} Q_{xy} \subset \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} g_i A h_j$$

Sea $t = \max(n, m)$. Entonces $Q_{tt} = e_t A e_t$ ya que Q_{tt} es entonces un álgebra de Cayley-Dickson y puede tomarse como e_t la identidad de Q_{tt}. Claramente se tiene así

$$\sum_{x=1}^{e} \sum_{y=1}^{k} Q_{xy} \subset \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} g_i A h_j + \sum_{t=\max(n,m)}^{\min(e,k)} e_t A e_t = \sum_{i=1}^{r'} \sum_{j=1}^{s'} g_i' A h_j'$$

donde $g_i' = g_i$ $i = 1, \ldots, r$ y $g_i' = e_i$ $i = r+1, \ldots, r' = \min\{e, k\} - \max\{n, m\} + r$ y donde $h_j' = h_j$ $j = 1, \ldots, s$ y $h_j' = e_j$ $j = s+1, \ldots, s' = \min(e, k) - \max(n, m) + r$ Fácilmente se prueba que $g_i' A h_j'$ con $i = 1, \ldots, r'$ $j = 1, \ldots, s'$ cumplen la condición (3) de la definición de sistema completo.

(iii) implica (iv). Basta ver que A es semiprimo. Veamos para ello que A no posee ideales biláteros nilpotentes distintos de cero. Sea $0 \neq b \in B$ con B un ideal de A.

$$b = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} e_{\lambda i} a_{ij} e_{\delta j} \in \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} e_{\lambda i} A e_{\delta j}$$

Por ref. (3) existen idempotentes ortogonales nucleares $f_1, \ldots, f_r$ $(r \leq m)$ y $g_1, \ldots, g_s$ $(s \leq n)$ tales que

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} e_{\lambda i} A e_{\delta j} \subset \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} f_h A g_k$$

donde todos los $f_h A g_k \neq 0$ son cuasiideales minimales de A. De aqui

$$b = \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} f_h a_{hk} g_k$$

Por ser $b \neq 0$, al menos un sumando $f_h a_{hk} g_k$ es distinto de cero. Por la ortogonalidad de los idempotentes $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s$ se tiene $f_h b g_k = f_h a_{hk} g_k$. Cada $f_h b g_k$ es un elemento de B, por lo tanto existe al menos un cuasiideal minimal $f_h A g_k$ tal que tiene un elemento en común con B. Asi $f_h A g_k \subset B$. Pero nuevamente por Ref. (3) $f_h A g_k \cdot g_k A f_h = f_h A f_h \subset B$ y así $f_h \in B$ y B no es nilpotente.

(iv) implica (i). Es claro teniendo en cuenta que cada cuasiideal minimal está contenido en un ideal a izquierda minimal.

Definición: Decimos que los cuasiideales $Q_{11}, Q_{12}, ..., Q_{mm}$ de un anillo A forman un sistema completo finito si existen idempotentes ortogonales nucleares $e_1, ..., e_m$ en A tales que $Q_{ik} = 0$ ó $Q_{ik} = e_i A e_k$ ($i \leq m$, $k \leq m$) es un cuasiideal minimal de A con la propiedad $e_i A e_k \cdot e_k A e_i \neq 0$.

Aplicando ahora el Teorema 5,1 y el caso asociativo puede demostrarse finalmente el siguiente Teorema:

Teorema 5,2: *Las siguientes condiciones sobre un anillo A son equivalentes:*

(i) A es un anillo semiprimo y es la suma de un número finito de sus ideales a izquieda minimales.

(ii) $A = A_1 \oplus ..... \oplus A_s \oplus B_1 \oplus ...... \oplus B_r$ con $A_1, ..., A_s$ álgebras de Cayley-Dickson y $B_1, ..., B_r$ anillos simples de A que son suma de un número finito de sus ideales a izquierda minimales. Además $A_1 \oplus ..... \oplus A_s = U(A)$ y $B_1 \oplus ...... \oplus B_r = D(A)$.

(iii) A es la suma de cuasiideales de A los cuales forman un sistema completo finito.

(iv) A es semiprimo y es la suma de un número finito de sus cuasiideales minimales.

Observación: Por Teorema B de [39] se tiene que (i) en el Teorema anterior es equivalente a que A es semiprimo y cumple la condición de cadena descendente para ideales a izquierda ó derecha.

§ 6 : Anillos regulares alternativos y cuasiideales.

Los anillos regulares alternativos fueron tratados inicialmente por Smiley en 1947 (ver [41]). En este párrafo vamos a demostrar que las álgebras de Cayley-Dickson son anillos regulares alternativos, y se verá que todo anillo regular alternativo es suma subdirecta de anillos regulares asociativos y álgebras de Cayley-Dickson. Finalmente se dará una caracterización de los anillos regulares que son suma de sus ideales a izquierda minimales, en términos de los cuasiideales anteriormente estudiados.

Definición: Un anillo alternativo A se dice regular si para cada $x \in A$ existe un $a \in A$ tal que $xax = x$.

Proposición 6.1: Si A es un anillo regular se cumple:

(i) Dado R ideal a derecha de A y L ideal a izquierda de A, entonces $R^2 = R$, $L^2 = L$, $RL = R \cap L$.

(ii) Si Q es cuasiideal de A, entonces $Q = AQ \cap QA = QA \, . \, AQ$.

-Demostración-

(ii) Se tiene que dado $q \in Q$ existe $a \in A$ tal que $qaq = q$. Asi $Q \subset AQ \cap QA$. Por ser Q cuasiideal $Q = AQ \cap QA$. Como $[A, A, Q] \subset Q \subset AQ \cap QA$, entonces $AQ = AQ + [A, A, Q]$ $QA = QA + [Q, A, A]$. Asi se tiene que $Q = QA \cap AQ$ y por i) $Q = QA. AQ$.

Observación: La clase de los anillos regulares alternativos es cerrada por imágenes homomórfas y productos directos.

Ejemplos: 1- Las álgebras de Cayley-Dickson de división son anillos regulares.

2- Cualquier producto directo de anillos de división es anillo regular.

Definición: Un ideal bilátero J de A es regular si para cada $x \in J$ existe $y \in J$ tal que $xyx = x$.

Lema 6.2: Sean J ⊆ K dos ideales de un anillo A. Entonces K es regular sí y sólo sí J y K/J son regulares.

-Demostración-

Si K es regular, obviamente K / J es regular. Dado $x \in J$ se tiene $xyx = x$ para algún $y \in K$. Pero $z = yxy$ es un elemento de J tal que $xzx = x$. Así J es también regular.

Supongamos que J y K / J son regulares. Dado $x \in K$ se sigue que por la regularidad de K / J $x - xyx \in J$ para algún $y \in K$. Vamos a demostrar ahora en general lo siguiente:

(*) Sea J un subanillo de K y supongamos que para $x - xyx \in J$, con $x \in J$ e $y \in K$, se cumple que $\exists\, z \in J$ tal que $(x - xyx)\, z\, (x - xyx) = x - xyx$. Entonces $\exists\, w \in K$ tal que $x = xwx$. En efecto:

$x' = x - xyx = (x - xyx)\, z\, (x - xyx) = x'zx'$ para algún $z \in J$. Así

$x = x' + xyx = x'zx' + xyx = (x - xyx)\, z\, (x - xyx) + xyx =$

$= xzx - ((xyx)\, z)\, x - (xz)(xyx) + (xyx)\, z\, (xyx) + xyx =$

$= xzx - x\,(y\,(xz))\, x - x(z\,(xy))\, x + x\,((y\,(xz)).(xy))\, x + xyx$

por las identidades de Moufang. Luego

$x = x\,(z - y\,(xz) - z\,(xy) + ((y\,(xz)) + y)\, x$, y así se concluye x

$= xwx$ con $w \in K$. Por lo tanto K es regular.

<u>Proposición 6.3:</u> *Cualquier producto subdirecto de un númerc finito de anillos regulares es anillo regular.*

-Demostración-

Es suficiente considerar el caso de un anillo A producto subdirecto de dos anillos regulares. Sean J, K ideales de A tales que $J \cap K = 0$ y A/J y A/K son ambos regulares. Por ser J isomorfo al ideal bilátero $(J+K)/K$ de A/K, anillo regular, y por Lema 6,2 J es entonces regular. Pero A/J es regular también, y así nuevamente por Lema 6,2 A es regular.

<u>Proposición 6.4:</u> *Sea $M = \{x \in A$ / el ideal en A generado por x es un ideal regular$\}$. Entonces:*

(a) M es regular e ideal bilátero de A.

(b) M contiene todos los ideales biláteros regulares de A.

(c) A/M no tiene ningún ideal bilátero regular no cero.

-Demostración-

(a) Sean $x, y \in M$. Consideramos los ideales en A generados por x e y que denotaremos $((x))$, $((y))$. Se tiene que $((x)))$, $((x)) + ((y)) / ((x))$ son regulares, de donde $((x)) + ((y))$ es regular por Lema 6,2. Así $((x)) + ((y)) \subset M$ para cada $x, y \in M$. Luego M es ideal bilátero y es claro que M es regular.

(b) y (c) son inmediatos.

<u>Lema 6.5:</u> *Sean $e_1, \ldots\ldots, e_n$ idempotentes ortogonales en un anillo A tales que $e_1 + \ldots\ldots + e_n = 1_A$. Entonces A es regular si y sólo si para cada $x \in e_i A e_j$ existe $y \in e_j A e_i$ tal que $xyx = x$.*

-Demostración-

Considérese la descomposición de Peirce de A relativa a los idempotentes $e_1, \ldots, e_n$. Se tiene que $A = \Sigma A_{ij}$ con i, j variando desde 1 hasta n y los $A_{ij} = \{ x_{ij} / e_k x_{ij} = \delta_{ki} x_{ij} \quad x_{ij} e_k = \delta_{jk} x_{ij}$ para $k = 1, \ldots, t \}$. Si $x = \Sigma x_{ij}$ con $i, j = 1, \ldots, n$ y $x_{ij} \in A_{ij}$, es fácil demostrar que $x_{ij} = (e_i x) e_j = e_i (x e_j)$ porque $[e_i, x, e_j] = -[x, e_i, e_j] = -(x e_i) e_j = -(x e_i) e_j^2 = -((x e_i) e_j) e_j = -[x, e_i, e_j] e_j = x(e_j e_i e_j) = 0$.

Demostremos la implicación directa. Sea $x \in e_i A e_j$. Sabemos que existe $y \in A$ tal que $xyx = x$. Luego $xyx - x = 0$. Pero

$$xyx - x = x\left(\sum_{i,j=1}^{n} y_{ij}\right)x - x =$$

$$\left(x\left(y_{ij} + \sum_{j=1}^{n} y_{jk}\right)\right)x - x = x(y_{ij} + y_{ji})x - x$$

por las propiedades de la descomposición de Peirce. Por tanto $xyx - x = 0$ implica $x(y_{ij} + y_{ji})x - x = 0$. Luego $x(y_{ij})x + x(y_{ji})x - x \in A_{ij}$. Como ΣA_{ij} es directa se tiene que $x(y_{ij})x = 0$ y que $x(y_{ji})x = x$ con $y_{ji} \in A_{ji}$.

Para la implicación recíproca, procedamos por inducción sobre n. Si n=1 es claro que entonces A es regular. Veamos para n=2. Consideramos primero un $x \in A$ tal que $x_{12} = 0$. Se sabe que hay elementos $y \in e_1 A e_1$ $z \in e_2 A e_2$ tales que

$$(x_{11})y(x_{11}) = x_{11}$$
$$(x_{22})z(x_{22}) = x_{22}$$

Entonces

$$x(y+z)x = (x_{11} + x_{21} + x_{22})(y+z)(x_{11} + x_{21} + x_{22}) =$$
$$x_{11}\, y\, x_{11} + (x_{21}\, y)x_{11} + (x_{22}\, z)x_{21} + x_{22}\, z\, x_{22} =$$

$x_{11} + x_{22} + (x_{21}y)x_{11} + (x_{22}z)x_{21}$.

Así $x' = x - x(y+z)x \in e_2 A e_1$. Por tanto existe por hipótesis w tal que $w \in e_1 A e_2$ y $x'wx' = x'$. Por (*) de Lema 6,2, para algún $v \in A$ $xvx = x$.

Considerar ahora un elemento $x \in A$ y elegimos un $y \in e_2 A e_1$, tal que $x_{12}yx_{12} = x_{12}$. Calculemos ahora $e_1(x - xyx)e_2$. Por las propiedades de la descomposición de Peirce se tiene:

$$(xy)x = (x_{21}y + \sum_{k=1}^{2} x_{k2}y)x = (x_{21}y)x_{12} + (x_{21}y)\sum_{e=1}^{2} x_{2e} +$$

$$\sum_{k,j=1}^{2}(x_{k2}y)x_{1j} + \sum_{k=1}^{2}(x_{k2}y)x_{k1}$$

y así $e_1((xy)x)e_2) = (x_{21}y)x_{22} + (x_{12}y)x_{12} + (x_{22}y)x_{21}$.

En página 35 de [36] se demuestra

$$x_{ij}(z_{ii}y_{ij}) = (z_{ii}x_{ij})y_{ij} = (x_{ij}y_{ij})z_{ii} \qquad \text{si } i \neq j \quad \forall x_{ij}, y_{ij} \in A_{ij} \quad \forall z_{ii} \in A_{ii}$$

$$x_{ij}y_{ij} = -y_{ij}x_{ij} \qquad \forall x_{ij}, y_{ij} \in A_{ij} \quad \text{con } i \neq j.$$

Así $(x_{22}y)x_{21} = (yx_{21})x_{22} = -(x_{21}y)x_{22}$. Luego $e_1((xy)x)e_2 = (x_{12}y)x_{12}$ y por tanto $e_1((xy)x - x)e_2 = 0$. Ahora, por el caso anterior, existe $z \in A$ tal que $(x - xyx)z(xyx) = x - xyx$. De donde por (*) de Lema 6,2 $x = xwx$ para algún $w \in A$ y así A es anillo regular.

Supongamos que el Lema es cierto para n-1 idempotentes ortogonales. Sea $f = e_2 + ...+ e_n$ y $g = e_1 + e_3 + e_4 + ...+ e_n$. Conocemos que fAf, gAg son regulares por hipótesis de inducción. Consideraremos cualquier elemento $x \in e_1Af$. Existe $y \in e_2 A e_1$ tal que $(xe_2)y(xe_2) = xe_2$. Vamos a ver que $(x - xyx)e_2 = 0$. Efectivamente, $x = x_{12} + ...+ x_{1n}$ e $y \in A_{21}$, implica $(xe_2)y(xe_2) - xe_2 = (x_{12}y)x_{12} - x_{12} = 0$ y así se tiene que $(x - xyx)e_2 = x_{12} - ((x_{12}y)x)e_2 = x_{12} - (x_{12}y)x_{12} = 0$. Por tanto $x - xyx \in gAg$. Por (*) de Lema 6,2 $x = xwx$ para algún $w \in A$. A partir de aquí vamos a obtener que $fwe_1 \in fAe_1$ cumple $x(fwe_1)x = x$. Tenemos que e_1 y f son dos idempotentes ortogonales y así $A = e_1Af + fAe_1 + fAf + e_1Ae_1$. Para $x \in e_1Af$ existe $w \in A$ tal que $x = xwx$, por tanto $x_{12}wx_{12} - x_{12} = 0$ con $x_{12} \in e_1Af$. Como $w = w_{11}+w_{12}+w_{21}+w_{22}$ con $w_{11} \in e_1Ae_1$, $w_{21} \in fAe_1$, $w_{12} \in e_1Af$, $w_{22} \in fAf$, entonces $x_{12}(w_{11}+w_{12}+w_{21}+w_{22})x_{12} - x_{12} = (x_{12}w_{12})x_{12} + (x_{12}w_{21})x_{12} + (x_{12}w_{22})x_{12} - x_{12} = 0$. Luego $(x_{12}w_{21})x_{12} - x_{12} = 0$ por ser ΣA_{ij} una suma directa de submódulos. Del mismo modo para cualquier $x \in fAe_1$ existe $t \in e_1Af$ tal que $xtx = x$. Aplicando ahora el caso n=2 a los idempotentes ortogonales e_1, f concluimos que A es regular.

Teorema 6.6: El álgebra de Cayley-Dickson con divisores de cero es regular.

-Demostración-

Sea C el álgebra de Cayley-Dickson con divisores de cero sobre un cuerpo K. Es conocido que C es K-espacio vectorial de dimensión 8. Tomando la base de C de la TABLA II, se tiene que $x_0 + y_0 = 1_c$, con x_0, y_0 idempotentes, con lo que se tiene la siguiente descomposición de Peirce de C relativa a x_0, y_0: $C = C_{11} + C_{21} + C_{12} + C_{22}$ donde $C_{11} = (x_0)$, $C_{12} = (x_1, x_2, x_3)$, $C_{21} = (y_1, y_2, y_3)$, $C_{22} = (y_0)$. Veamos que dado $x \in C_{ij}$ existe $y \in C_{ji}$ tal que $xyx = x$. Por ser x_0, y_0 idempotentes basta comprobar que dado $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3 \in C_{12}$ con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$, existen $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in K$ tales que

$$(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)(\mu_1y_1+\mu_2y_2+\mu_3y_3)(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3) = \lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3.$$

Es decir, se trata de encontrar $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in K$ tales que

$$-(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3) = 1$$

Lo mismo si $a \in C_{12}$ se puede hallar $b \in C_{21}$ tal que $aba = a$. Por el Lema anterior, C es así un anillo regular.

Proposición 6.7: El centro de un anillo regular, es un anillo regular.

-Demostración-

Sea A un anillo regular y sea $Z = Z(A)$, el centro de A. Tomamos $x \in Z$. Sabemos que existe $y \in A$ tal que $xyx = x$. Sea $z = yxy$. Vamos a comprobar que $z \in Z$. Veamos primero que para cada $r \in A$, $zr = rz$:

$zr = (yxy)r = (y^2x)r = (y^2r)x = (y^2r)(xyx) = y^2(r(xyx)) = y^2(r(x^2y))$
$= y^2((rx^2)y) = y^2((x^2r)y) = y^2(x^2(ry)) = (y^2x^2)(ry) = (yx)(ry) = y(xr)y$

$rz = r(yxy) = r(xy^2) = (rx)y^2 = (xr)y^2 = ((xyx)r)y^2 = ((yx^2)r)y^2 =$
$y((x^2r))y^2 = (y(rx^2))y^2 = ((yr)x^2)y^2 = (yr)(xy) = y(rx)y = y(xr)y = rz.$

Y a continuación veamos que $[z, a, b] = (za)b - z(ab) = 0$ para cada $a, b \in A$:

$(za)b = ((yxy)a)b = ((y^2x)a)b = (y^2(xa))b = ((y^2a)x)b = (y^2a)(xb)$
$= (y^2a)(bx) = (y^2a)(b.x^3y^2) = (y^2a)((bx^3)y^2) = (y^2a)x^3(by^2)$

$z(ab) = (yxy)(ab) = (y^2x)(ab) = y^2(x(ab)) = y^2((xa)b) = y^2((ax)b)$
$= y^2(a(xb)) = y^2((ab)x) = y^2((ab).x^3y^2) = y^2((ax^3b)y^2) = y^2((ax^3)b)y^2 =$
$= (y^2(ax^3)).(by^2) = (y^2a)x^3(by^2)$

Corolario 6.8: Un anillo regular unitario es indescomponible si y sólo si su centro es un cuerpo.

-Demostración-

Sea Z el centro de A. Por Proposición 6,5 para $0 \neq x \in Z$ existe un $y \in Z$ tal que $xyx = x$. Así xy es un idempotente que está en Z. Si $xy \neq 1$ se tiene que $A = (xy)A \oplus (1-xy)A$ con lo cual A no es indescomponible. Así $xy = 1$ y Z es un cuerpo.

Supongamos ahora que Z es un cuerpo. Si $A = A_1 \oplus A_2$ se tiene que $Z(A) = Z(A_1) \oplus Z(A_2)$. Como $1 \in Z(A)$, entonces $Z(A_1) \neq 0$ y $Z(A_2) \neq 0$. Así $Z(A)$ tiene divisores de cero, lo que es una contradicción.

Teorema 6.9: *Un anillo regular alternativo es una suma subdirecta de anillos regulares asociativos y álgebras de Cayley-Dickson.*

-Demostración-

Sea A anillo regular alternativo. Claramente A es anillo semiprimo. Es conocido que cada anillo alternativo semiprimo es una suma subdirecta de anillos alternativos primos. A su vez un anillo alternativo primo es un anillo asociativo primo ó un anillo de Cayley-Dickson ó un anillo alternativo con divisores de cero absolutos. (Un divisor de cero absoluto de A es un $0 \neq a \in A$ tal que $aAa = 0$).

Supongamos que A es producto subdirecto de la familia de anillos $(S_i)_{i \in I}$ siendo cada S_i de uno de los tipos anteriormente citados. Por definición de producto subdirecto se tiene que $p_i\,|_A : A \longrightarrow S_i$ es suprayectiva, con $p_i : \Pi\, S_i \longrightarrow S_i$ la proyección canónica. Así S_i es anillo regular. Por tanto ningún S_i puede ser con divisores de cero absolutos.

Supongamos que algún $S_i = B$ es un anillo de Cayley-Dickson de división. Esto quiere decir que B se incrusta en un álgebra de Cayley-Dickson de división que se puede construir a partir de B de la siguiente forma: Se toma $S = Z(B) - \{0\}$, que es sin divisores de cero, y se construye el anillo de cocientes $S^{-1}(B)$ como en el caso asociativo-conmutativo. Existe un homomorfismo inyectivo de B en $S^{-1}(B)$ que a cada $x \in S$ le hace corresponder xs/s con $s \in S$. Pero dado $0 \neq x \in B$ sabemos, por ser B regular, que existe $a \in B$ tal que $xax = x$. Entonces $xs/s \cdot as/s \cdot xs/x = xs/s$. Es decir que $xs/s \cdot (axs - s)/s = 0$. Como $S^{-1}(B)$ es álgebra de división se tendrá que ó $xs/s = 0$, lo que no puede ser pues S es sin divisores de cero, ó $axs/s = s/s$. Pero entonces $ax = 1_B$. De modo análogo se puede demostrar que $xa = 1_B$. Luego B es anillo de división asociativo ó alternativo no asociativo, y en este caso es un álgebra de Cayley-Dickson.

Supongamos que algún $S_i = B$ es anillo de Cayley-Dickson con divisores de cero. Existe como en el caso anterior un monomorfismo de B en $S^{-1}(B)$, que es construido de manera análoga. Así la imagen homomorfa de $Z(B)$ está contenida en el centro de $S^{-1}(B)$, que es un cuerpo. Como B es regular, entonces $Z(B)$ es regular. Así $Z(B)$ es regular y está contenido en $Z(S^{-1}(B))$ que es un cuerpo. Por tanto $Z(B)$ es un cuerpo y $1_{Z(B)} = 1_B = 1_{S^{-1}(B)}$. Por ser B regular dado $a \in B$ existe $b \in B$ tal que $aba = a$ y así ab es idempotente en B. No puede ocurrir que todos los idempotentes de esta forma que aparecen en B estén en $Z(B)$, pues entonces serían la identidad de B y así B sería un anillo de división, luego $S^{-1}(B)$ sería también un anillo de división, lo que no es cierto. Por tanto en B hay idempotentes no centrales. Por Teorema 1 de página 32 de [55] se puede suponer que dado un idempotente distinto de 1 en $S^{-1}(B)$, este idempotente es x_0 (el x_0 que aparece en la TABLA II). Identificando B con su imagen homomorfa en $S^{-1}(B)$, dado un idempotente no central en B puede suponerse que es x_0.

Consideremos ahora la descomposición de Peirce de B con respecto a x_0. Se tiene que $B = B_{00} \dotplus B_{10} \dotplus B_{01} \dotplus B_{11}$. Denotaremos $y_0 =$

$1 - x_0$ y sea $F = Z(S^{-1}(B))$, $F_1 = \{\lambda \in F / \lambda x_0 \in B\}$, $F_2 = \{\lambda \in F / \lambda y_0 \in B\}$. Entonces se tiene claramente que $F_1 x_0 + F_2 y_0$ está contenido en B, pero es distinto de B, pues si fuesen iguales $S^{-1}(B)$ sería conmutativo. Así existe $a \in B$ tal que $a \notin F_1 x_0 + F_2 y_0$. Luego existen $x = x_0 a y_0$ e $y = y_0 a x_0$, alguno de los dos distinto de cero, tales que $x \in B_{10}$ e $y \in B_{01}$. Es claro que $B_{11} \subset (S^{-1}(B))_{11} = Fx_0$, $B_{10} \subset (S^{-1}(B))_{10} = Fx_1 + Fx_2 + Fx_3$, $B_{00} \subset (S^{-1}(B))_{00} = Fy_0$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \neq 0$. Se sabe por Lema 6,5 que existe $0 \neq b \in B_{01}$ tal que $x\, b\, x = x$. Por tanto $x\, b = x_0$, $b\, x = y_0$. Sea $T = F_1 x_0 + F_2 y_0 + F_3 x + F_4 b$ con $F_3 = \{\lambda \in F / \lambda x \in B\}$ y $F_4 = \{\mu \in F / \mu b \in B\}$. Veamos que $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = Z(B)$. Sea $\mu \in F_1$, se tiene que $\mu x_0 \in B$. Así $(\mu x_0)x = \mu x \in B$, lo que implica que $\mu \in F_3$. Sea ahora $\mu \in F_3$, se tiene que $\mu x \in B$. Así $(\mu x)b = \mu x_0 \in B$ lo que implica que $\mu \in F_1$. De modo análogo se demuestran las igualdades $F_2 = F_4$, $F_1 = F_2$. Además dado $\mu \in F_1 = F_2$ se tiene μx_0 , $\mu y_0 \in B$ y por tanto $\mu(x_0 + y_0) = \mu \in Z(B)$. Así $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = Z(B)$, luego $T = Z(B).x_0 + Z(B).y_0 + Z(B).x + Z(B).b$. Ahora notese que $T \neq B$ pues caso contrario $S^{-1}(B)$ sería asociativo. Esto quiere decir que en B_{01} hay otro elemento que llamaremos c y que es Z(B)-linealmente independiente con b. Además es también F-linealmente independiente pues si no $c = \omega b$ con $\omega \in F$, pero $xb = x_0$ implica $xc = x\,\omega b = \omega x_0 \in B$ y $bx = y_0$ implica $cx = \omega b\, x = \omega y_0 \in B$, luego $\omega x_0 + \omega y_0 = \omega \in Z(B)$. Volviendo a aplicar Lema 6,5 sabemos que existe $d \in B_{10}$ tal que $cdc = c$ y así $cd = y_0$, $dc = x_0$. No puede ocurrir que $d = \nu x$ con $\nu \in F$ porque entonces $dc = \nu x\, c = x_0$. Luego $b(\nu x\, c) = \nu(bx)c = \nu y_0 c = \nu c$, por Proposición 3,4 de [ ], y así b y c son linealmente dependientes, contradicción. También es claro, razonando igual que antes, que $F_5 = \{\lambda \in F / \lambda c \in B\}$ y $F_6 = \{\lambda \in F / \lambda d \in B\}$ cumplen $F_5 = F_6 = Z(B)$.

Consideremos el subespacio de B: $A = Z(B).x_0 + Z(B).y_0 + Z(B).b +$

$Z(B).d + Z(B).x + Z(B).c$. Es fácil de comprobar que al extender escalares un álgebra regular sigue siendo regular. Si A es subálgebra, como A es regular, al extender escalares de $Z(B)$ a F se tendría que A es una subálgebra maximal, y además regular, de la F-álgebra de Cayley-Dickson $S^{-1}(B)$. Pero por [33] estas subálgebras no son regulares. Así que A no es subálgebra y por tanto no es igual a B.

En A se cumple $xc = 0$, pues si $xc = \omega x_0$ con $\omega \in F$, como $b(xc) = \omega b x_0 = \omega b$ y por Proposición 3,4 de [36] (relativo a las propiedades de la descomposición de Peirce) $b(xc) = (bx)c = y_0 c = c$, se tendrá $c = \omega b$ lo que contradice que c y b son linealmente independientes. Análogamente $0 = cx = bd = db$. Luego si A no es subálgebra ha de ocurrir que xd ó $bc \notin A$. Supongamos que es $a = xd \notin A$. Se cumple que $a \in B_{01}$ es Z(B)-linealmente independiente con {b, c} (y se comprueba que es también F-linealmente independiente). Entonces existe $z \in B_{10}$ tal que $aza = a$ y por tanto $az = y_0$, $za = x_0$. Se tiene que z es F-linealmente independiente con $\{x, d\}$, pues si $z = \lambda x + \mu d$ con $\lambda, \mu \in F$, $za = \lambda xa + \mu da = x_0$, pero $b = b(za) = b(\lambda xa + \mu da) = \lambda b(xa) + \mu b(da) = \lambda (bx) a + \mu (bd) a = \lambda a$, lo que implica que $\lambda = 0$, pues a y b son linealmente independientes, y $c = c(za) = c(\lambda xa + \mu da) = \lambda c(xa) + \mu c(da) = \lambda (cx) a + \mu (cd) a = \mu a$ lo que implica que $\mu = 0$, pues a y c son linealmente independientes. Así $\{x_0, y_0, a, b, c, d, x, z\}$ son F-linealmente independientes y forzosamente serán una Z(B)-base de B. Es una comprobación ahora ver que tienen la misma tabla de multiplicar que un álgebra de Cayley-Dickson con divisores de cero.

Finalmente demostraremos el siguiente Teorema:

Teorema 6.10: Sea A un anillo. Son equivalentes:

(i) A es regular y suma de sus ideales a izquierda minimales.

(ii) A es suma de sus cuasiideales minimales y los cuasiideales de A forman un semigrupo regular asociativo con respecto a la operación producto.

-Demostración-

(ii) implica (i). Veamos que A es semiprimo. Para ello tomar L ideal a izquierda de A tal que $L^2 = 0$. Se tiene que L es cuasiideal y así por hipótesis existe Q cuasiideal de A tal que $LQL = L$. Pero entonces $L = LQL = L(QL) \subset L^2 = 0$. Luego A es semiprimo y por hipótesis es suma de sus cuasiideales minimales. Por Teorema 5,1 $A = D \oplus U$ con D suma directa de álgebras de Cayley-Dickson y U suma directa de ideales biláteros de A que son subanillos simples de A, conteniendo al menos un ideal a izquierda minimal (y además suma de ideales a izquierda minimales).

Si comprobamos ahora que D y U son anillos regulares se tendrá que A es regular. Es claro que D es regular por ser D suma directa de anillos regulares. Veamos que U es regular. Sea Q cuasiideal de U. Q es cuasiideal de $A = D \oplus U$ y así existe Q' cuasiideal de A tal que $QQ'Q = Q$. Sea $Q_1 = \{ q \in U /$ existe $d \in D$ tal que $d+q \in Q' \}$. Q_1 es cuasiideal porque es subgrupo abeliano y

$$(AQ_1 + [A, A, Q_1]) \cap (Q_1A + [A, A, Q_1]) \subset AQ_1 \cap Q_1A$$
$$\subset UQ' \cap Q'U \subset Q' \cap U \subset Q_1$$

Además $QQ' = QQ_1$, luego $QQ'Q = QQ_1Q = Q$. Luego los cuasiideales de U forman un subsemigrupo regular del semigrupo de los cuasiideales de A. Por el caso asociativo (Teorema 9,3 de [44]) se sabe que U es entonces un anillo regular asociativo.

(i) implica (ii). Por ser A regular, A es semiprimo. Ademas aplicando la hipótesis A es suma de sus ideales a izquierda minimales. Por Teorema 5,1 se tiene que $A = D \oplus U$ con D suma directa de álgebras de Cayley-Dickson y además A es suma de sus cuasiideales minimales.

Cada cuasiideal de A, Q, es ahora suma de dos cuasiideales Q_1, Q_2 de D y U respectivamente. En efecto si $q \in Q$, se cumple que $q = d \oplus u$ con $d \in D$ y con $u \in U$. Nótese que D es un anillo regular y así existe $x \in D$ tal que $dxd = d$. Luego $q(x \oplus 0)q = d \oplus 0 \in Q$ por ser Q cuasiideal. Así $q - d = u \in Q$. Luego llamando $Q_1 = \{ d \in D \,/\, \exists\, u \in U$ tal que $d \oplus u \in Q \}$ $Q_2 = \{ u \in U \,/\, \exists\, d \in D$ con $d \oplus u \in Q \}$, es claro que Q_1 y Q_2 son cuasiideales y $Q_1 \oplus Q_2 = Q$.

Como A es regular y $A = D \oplus U$, U es entonces regular. Los cuasiideales de U forman así un semigrupo regular asociativo, por Teorema 9,3 de [44]. Por otra parte los cuasiideales de D son álgebras de Cayley-Dickson o sumas directas de álgebras de Cayley-Dickson. Por tanto se cumple también que los cuasiideales de D forman un semigrupo regular asociativo. Finalmente, por lo anterior, los cuasiideales de A son también un semigrupo regular asociativo.

§ 7 : Algebras alternativas en que cada subálgebra es cuasiideal.

Finalizamos la Memoria estudiando las álgebras alternativas en que toda subálgebra es cuasiideal. En esta linea han sido ya estudiadas las álgebras en que cada subálgebra propia es asociativa (ver [5] de Badalov), y más cercanamente a nuestros propósitos las álgebras alternativas en que cada subespacio es una subálgebra (ver [20], de Kaplansky), las álgebras en que cada subálgebra es un ideal (ver [30] de Outcalt y [37] de Liu Shao-Xue) y también aquellas álgebras alternativas en que cada subálgebra es un ideal a izquierda (ver [34] de Rodabaugh). Es natural ahora preguntarse cómo serán las álgebras alternativas en que cada subálgebra es un cuasiideal.

A lo largo de este párrafo denotaremos por A un álgebra alternativa sobre F, cuerpo, de manera que A no es necesariamente de dimensión finita.

<u>Definición:</u> Dada A álgebra, diremos que es Q-álgebra si cada subálgebra de A es un cuasiideal.

<u>*Lema 7.1:*</u> *Si A es Q-álgebra con 1, entonces* $A = \langle 1 \rangle$.

-Demostración-

Se tiene que $\langle 1 \rangle$ es cuasiideal, luego $A = \langle 1 \rangle A \langle 1 \rangle \subset \langle 1 \rangle$.

<u>*Lema 7.2:*</u> *Si A es Q-álgebra y $a \in A$, entonces $\langle a \rangle$ es finito dimensional. (Luego A Q-álgebra implica A localmente finita).*

-Demostración-

Supongamos que $a, a^2, \ldots, a^n$ son linealmente independientes para cualquier n. Se tiene que $a^3 \in \langle a^2 \rangle$ ya que $a^3 = a\,a^2 = a^2\,a \in \langle a^2 \rangle A \cap A \langle a^2 \rangle \subset \langle a^2 \rangle$, por ser $\langle a^2 \rangle$ cuasiideal. Por lo tanto a^3 es combinación de elementos de la forma a^{2m}.

Lema 7.3: Si a es un elemento nilpotente en una Q-álgebra, entonces $a^3 = 0$.

-Demostración-

Supongamos que $a^n \neq 0$ y $a^{n+1} = 0$ con $n \geq 4$. Sea $m = n/2$ si n es par, y sea $m = n+1/2$ si n es impar. Entonces $m+1 \leq n-1$ y $2m \geq n$. De aquí $(a^m)^2 = 0$ y así $\langle a^m \rangle$ es 1-dimensional. Ahora bien $a^{m+1} = a^m a = a.\, a^m \in \langle a^m \rangle A \cap A \langle a^m \rangle \subset \langle a^m \rangle$, por ser $\langle a^m \rangle$ cuasiideal. Así $a^{m+1} = \alpha\, a^m$ con $\alpha \neq 0$ $\alpha \in F$. Luego $a^{m+t} = \alpha^t a^m$. Contradicción.

Lema 7.4: Si A es Q-álgebra que no es nilálgebra, entonces posee un idempotente no cero.

-Demostración-

Si A no es nilálgebra, existirá $a \in A$ tal que no es nilpotente. Tomamos $\langle a \rangle$. Se tiene por Lema 7,2 que $\langle a \rangle$ es de dimensión finita y $\langle a \rangle$ no es nilálgebra, luego $\langle a \rangle$ posee un idempotente.

Lema 7.5: Si A es Q-álgebra y $0 \neq e$ es idempotente en A, en la descomposición de Peirce de A relativa a e, se tiene que $A_{11} = \langle e \rangle$.

-Demostración-

Basta tener en cuenta el Lema 7,1 y que A_{11} es subálgebra de A con elemento unitario.

Lema 7.6: Si A es Q-álgebra y $0 \neq e$ es idempotente en A, entonces A_{00} es nilálgebra.

-Demostración-

Supongamos que A_{00} no es nilálgebra. Por Lema 7,4 A_{00} posee un idempotente no cero f. Tomamos la subálgebra $\langle f + e \rangle$. Se cumple que

$$e = e(f + e) = (f + e)e \in A\langle f + e\rangle \cap \langle f + e\rangle A \subset \langle f + e\rangle$$

por ser $\langle f + e\rangle$ cuasiideal. Luego $e \in \langle f + e\rangle$. Así $f = 0$, contradicción.

Lema 7.7: Si A es Q-álgebra y e es idempotente de A, entonces $A_{10}A_{01} = 0$.

-Demostración-

Basta probar que $xy = 0$ para cada $x \in A_{10}$ y para cada $y \in A_{01}$. Se tiene que $x^2 = y^2 = 0$ pues $x^2 = (ex)(ex) = (exe)x = 0$ y análogamente con y. Consideremos x+y. Se cumple: $(x + y)^2 = \beta e + z$ con $\beta \in F$ $z \in A_{00}$. Así $((x+y)^2)^3 = \beta^3 e$ por Lema 7,3. Ahora bien

$$\beta^3 x = ((x+y)^2)^3 (x + y) = (x + y)((x+y)^2)^3 = \beta^3 y.$$

Luego $\beta = 0$, con lo cual $A_{10}A_{01} = 0$.

Lema 7.8: Sea A Q-álgebra, entonces $xx' = 0$ para cada $x, x' \in A_{10}$ y $yy' = 0$ para cada $y, y' \in A_{01}$ y así $A_{10}^2 = 0$ y $A_{01}^2 = 0$.

-Demostración-

Tomemos $e + y'$ donde $y' \in A_{01}$. Es un idempotente. Así el subespacio $(e + y')$ es subálgebra y por hipótesis cuasiideal. Pero $y(e + y') = y + yy'$ lo que implica $e(y(e + y')) = yy'$. Por otra parte $(e + y')(yy') = yy'$ y así $yy' \in A(A(e + y')) \cap (e + y')A \subset (e + y')$. Como la suma de los A_{ij} con $i, j = 0, 1$ es directa, se tendrá que $yy' = 0$.

Estudiaremos a continuación las nilálgebra que son Q-álgebras.

Lema 7.9: Sea A Q-álgebra y nilálgebra, y sea $z \in A$ tal que $z^2 = 0$.

Entonces $zA \cap Az = 0$.

-Demostración-

Supongamos que $za = bz = \lambda z$ con $a, b \in A$ $\lambda \in F$. Entonces por Lema 7,3 $0 = za^3 = \lambda^3 z$ y así $\lambda = 0$. Notar que de aquí se deduce también que $zAz = 0$.

<u>Lema 7.10</u>: *Sea A Q-álgebra y nilálgebra. Supongamos que $y \in A$ y que $y^2 \neq 0$. Entonces $yA \cap Ay \leq (y^2)$.*

-Demostración-

Recordemos que por Lema 7,3 $y^3 = 0$. Supongamos que $ya = by = \lambda y + \mu y^2$ con $a, b \in A$ $\lambda, \mu \in F$. Entonces $ya^2 = \lambda^2 y + \lambda\mu y^2 + \mu y^2 a$, y así $ya^2 = \lambda^2 y + 2\lambda\mu y^2$. Por tanto $0 = ya^3 = \lambda^3 y + 3\lambda^2\mu y^2$, luego $\lambda = 0$.

<u>Lema 7.11</u>: *Sea A Q-álgebra y nilálgebra y sea $z \in A$ tal que $z^2 = 0$. Si $y \in A$ y verifica $y^2 = 0$, entonces $zy = yz = 0$.*

-Demostración-

Consideremos $z + y$. Entonces se tiene que $(z + y)^2 = zy + yz$. El subespacio vectorial $(z + y, zy + yz)$, es subálgebra y por tanto cuasiideal. Pero

$$yz \in y(z + y, zy + yz) \cap (z + y, zy + yz)z \leq (z + y, zy + yz).$$

Análogamente $zy \in (z + y, zy + yz)$. Si $yz \neq 0$, se tendrá que

$$yz = \lambda(z + y) + \mu(zy + yz) \quad \text{con } \lambda, \mu \in F.$$

Pero multiplicando por z a derecha se tiene que $\lambda = 0$ por Lema 7, 9. Pero entonces $(1 - \mu) zy = \mu (yz)$ con $\mu \in F$. Como por Lema 7,9 $Az \cap zA = 0$, se cumple que $\mu = 0$. Contradicción. Luego $yz = 0$.

Análogamente se prueba que $zy = 0$.

Lema 7.12: *Sea A Q-álgebra y nilálgebra y $z \in A$ tal que $z^2=0$. Si $y \in A$ e $y^2 \neq 0$, entonces $yzy = 0$.*

-Demostración-

Se cumple que $0 = (z + y)^3 = yzy$ por Lemas 7,9 y 7,11.

Lema 7.13: *Sea A Q-álgebra y nilálgebra y sean $x, y \in A$ tales que $x^2 \neq 0 \neq y^2$. Entonces $xyx = 0 = yxy$, $0 = x^2y = y^2x = yx^2 = xy^2$.*

-Demostración-

Caso 1: $xyx \neq 0$ e $yxy \neq 0$

Por Lema 7, 14 $xyx = \lambda x^2$ con $0 \neq \lambda \in F$ $yxy = \mu y^2$ con $0 \neq \mu \in F$

$xyx = \lambda x^2$ implica $xyxy = \lambda x^2y$ $yxyx = \lambda yx^2$

$yxy = \mu y^2$ implica $xyxy = \mu xy^2$ $yxyx = \mu y^2x$

Luego $x^2y = \lambda^{-1}\mu x y^2$ $yx^2 = \lambda^{-1}\mu y^2x$.

Así $0 = (x + y)^3$ implica $0 = (\mu\lambda^{-1} + 1) y^2x + \lambda x^2 + \mu y^2 + (1 + \mu \lambda^{-1}) xy^2$.

Multiplicando por x a derecha $0 = \mu y^2x$ y así $y^2x = 0$, luego $yx^2 = 0$.

Multiplicando por y a derecha $0 = \lambda x^2y$ y así $x^2y = 0$, luego $xy^2 = 0$.

También se obtiene ahora que $(x^2) = (y^2)$, porque $(x + y)^3 = 0$. A continuación tomamos el subespacio $(x + y, x^2 + xy + yx + y^2)$, que es una subálgebra de A, y observemos que

$xy + y^2, \mu y^2 \in (x + y, x^2 + xy + yx + y^2)$. y

$x^2 + xy, \lambda x^2 \in x . (x + y, x^2 + xy + yx + y^2)$.

Por ser A Q-álgebra se tiene $xy \in (x + y, x^2 + xy + yx + y^2)$. Así

$xy = \alpha (x + y) + \beta (x^2 + xy + yx + y^2)$ con $\alpha, \beta \in F$.

Multiplicando por y a derecha $\alpha (xy + y^2) + \beta \mu y^2 = 0$. Luego

$\alpha xy = (-\alpha - \beta \mu) y^2$ lo que implica $\alpha(xyx) = 0 = \alpha(yxy)$. Luego

$\alpha=0$. Así $\beta\mu y^2 = 0$, lo que implica $\beta = 0$ también. Contradicción.

<u>Caso 2:</u> $xyx \neq 0$ e $yxy = 0$.

Se tiene que $(x + y)^3 = 0$ implica $0 = y^2x + xyx + yx^2 + x^2y + xy^2$.

Como $xyx = \lambda x^2$ con $0 \neq \lambda \in F$ e $yxy = 0$ se cumple

$$0 = xyxy = \lambda x^2y \qquad y \qquad 0 = yxyx = \lambda yx^2.$$

Luego $x^2y = 0 = yx^2$. Así $0 = y^2x + xyx + xy^2$ implica $0 = y^2x + \lambda x^2 + xy^2$

Tomamos ahora el subespacio $(x^2 + yx + y^2)$. Es subálgebra de A y

$$y^2x \in (x^2 + yx + y^2) . x$$

$$y^2x \in y . (x^2 + yx + y^2)$$

Así por ser A Q-álgebra existe $\alpha \in F$ tal que

$$y^2x = \alpha (x^2 + yx + y^2).$$

Multiplicando por x a izquierda se obtiene que $\alpha=0$. Luego $y^2x=0$. Análogamente tomando la subálgebra $(xy + x^2 + y^2)$ se llega a que $xy^2 = 0$. Finalmente por ser $(x + y)^3 = 0$ se tiene $\lambda = 0$, contradicción.

<u>Caso 3:</u> $xyx = 0$ e $yxy \neq 0$.

Como en Caso 2 se llega a contradicción.

<u>Caso 4:</u> $xyx = 0 = yxy$.

Entonces $0 = y^2x + yx^2 + x^2y + xy^2$. Luego $-y^2x - yx^2 = x^2y + xy^2$.

Llamemos $a = -y^2x - yx^2$ $\qquad b = x^2y + xy^2$. Se tiene

$$a = b \in yA \cap Ay \subset (y^2) \qquad a = b \in xA \cap Ax \subset (x^2).$$

Si $a \neq 0$ entonces $(y^2) = (x^2)$ lo que implica $0 = a = y^2x = yx^2 = x^2y = xy^2$.

Si $a = b = 0$ entonces $y^2x = -yx^2$ lo que implica $yx^2 \in A.(yx) \cap (yx)$. $A = 0$, por Lema 7,9. Luego $y^2x = 0 = yx^2$. Lo mismo $b = x^2 y + x y^2 = 0$ implica $x^2y = xy^2 = 0$.

Proposición 7.13: Si A es Q-álgebra y nilálgebra, entonces A es asociativa.

-Demostración-

Sean $u, z, x, y \in A$ tales que $z^2=0$ $x^2\neq 0$ $y^2\neq 0$ $u^2\neq 0$. Se tiene que al ser (z) subálgebra y A Q-álgebra

$$[z, x, y] = (zx)y - z(xy) = (zx)y = -[z, y, x] = (zy)x$$

Así como $[z, x, y] \in [z, A, A] \subset (z)$ entonces $(zy)x = \lambda z$. Multiplicando por x a derecha $0 = \lambda zx$ y así $[z, x, y] = 0$.

Tomemos $[x, y, u]$. Se observa que (x^2), (y^2), (u^2) son subálgebras y que A es Q-álgebra. Entonces $[x, y, u] \subset (x^2) \cap (y^2) \cap (u^2)$. Supongamos que $[x, y, u] \neq 0$. Se tiene que $(x^2) = (y^2) = (u^2)$. Consideramos el subespacio $(x + u, x^2 + xu + ux + u^2)$. Es subálgebra, y por tanto es un cuasiideal. Pero

$$((x + u)y)u = (xy)u \qquad \text{y} \qquad (x + u)(yu) = x(yu)$$

Luego $(xy)u - x(yu) = [x, y, u] \in (x + u)A + ((x + u)A)A$. Además

$$(xy)(x + u) = (xy)u \qquad \text{y} \qquad x(y(x + u)) = x(yu)$$

Luego $(xy)u - x(yu) = [x, y, u] \in A.(x + u) + A.(A.(x + u))$. Por tanto $[x, y, u] \in (x + u, x^2 + xu + ux + u^2)$ por ser A Q-álgebra. Como $[x, y, u] \in (u^2)$ se tendrá que $u^2 = \alpha(x + u) + \beta(x^2 + xu + ux + u^2)$. Multiplicando por x y u a izquierda y derecha se llega

$$0 = \alpha(x^2 + xu) = \alpha(ux + u^2) = \alpha(x^2 + xu) = \alpha(xu + u^2).$$

Así ó $\alpha=0$ ó $x^2 = -xu = -ux = u^2$. Si $\alpha=0$ $u^2 = \beta(u^2 + xu + ux + \delta u^2)$ con $\delta\in F$ lo que implica $(1-\beta-\beta\delta)u^2 = \beta(xu) + \beta(ux)$ y así, como $\beta\neq 0$ porque $u^2\neq 0$, $ux, xu \in (u^2)$ por Lema 7,10. Haciendo el mismo razonamiento y partiendo de la subálgebra $(y + u, y^2 + yu + uy + u^2)$ se llega a que $yu, uy \in (u^2)$. Y entonces como $(u^2) = (x^2) = (y^2)$, $[x, y, u] = [y, u, x] = (yu)x - y(ux) = 0$. Contradicción.

Lema 7.14: Sea A Q-álgebra y nilálgebra y sean z, x, y ∈ A tales que $z^2 = 0$, $x^2 \neq 0$, $y^2 \neq 0$. entonces $zx, xz, xy, yx \in Ann\ A$.

-Demostración-

Por Lemas 7,11 , 7,13 , 7,14 es claro que $zx, xz \in Ann(A)$. Veamos ahora que $xy, yx \in Ann\ A$. Sea $u \in A$ tal que $u^2 = 0$. Por Lema 7,13 se tiene

$$(y + u)^2 x = yux + uyx = 0$$
$$(u + x)^2 y = uxy + xuy = 0$$
$$(x + y)^2 u = xyu + yxu = 0$$
$$x(y + u)^2 = xyu + xuy = 0$$
$$y(x + u)^2 = yxu + yux = 0$$
$$u(x + y)^2 = uxy + uyx = 0$$

De donde $uxy = yux = -uyx = -xuy = xyu = -yxu$ con lo que $uxy = xyu \in A.xy \cap xy.A = 0$ por Lema 7,9.

Lema 7.15: Sea A nilálgebra. Entonces A es Q-álgebra si y sólo si se cumple que A posee una base $(z_t)_{t \in K} \cup (a_e)_{e \in L}$ tal que $z_t^2 = 0$ y $a_e^2 \neq 0$ pero $a_e^3 = 0$ y además $z_t a_e$, $a_e z_t$, $a_e a_j$, $a_j a_e \in Ann(A)$, verificándose la siguiente condición:

$$\text{"}\sum_{j=1}^{m} y_j x_j = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \quad \text{con } y_j, x_j, u_i, v_i \in A \quad \text{implica}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j x_j \in Ann \langle (y_j), (v_i) \rangle \cap Ann \langle (u_i), (x_j) \rangle \text{"}$$

-Demostración-

La primera parte de la implicación directa se ha visto ya en Lemas 7,9 a 7,15.

Sea A Q-álgebra y supongamos por reducción al absurdo que

$$\sum_{j=1}^{m} y_j x_j = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \notin \operatorname{Ann} \langle \{u_i\}, \{x_j\} \rangle$$

Si tomamos $S = \langle \{u_i\}, \{x_j\} \rangle$, se observa que

$$\sum_{j=1}^{m} y_j x_j = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \in AS \cap SA \subset S,$$

por ser A Q-álgebra. Ahora utilizando Lema 7,14 se obtiene una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que A cumple las condiciones dadas y sea S una subálgebra de A. Se trata de ver que $AS \cap SA \subset S$. Sea $z \in AS \cap SA$, entonces

$$z = \sum_{j=1}^{m} y_j x_j = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \qquad \text{con } (x_j)_{j=1}^{m} \subset S \qquad (u_i)_{i=1}^{n} \subset S.$$

Por hipótesis

$$z \in \operatorname{Ann} \langle \{y_j\}, \{v_i\} \rangle \cap \operatorname{Ann} \langle \{u_i\}, \{x_j\} \rangle \subset S.$$

__Lema 7,16:__ Si A es Q-álgebra se cumple una de las siguientes condiciones:

a) ó $A_{10} = 0$ ó $A_{01} = 0$.

b) $A_{10}A_{00} = 0$ y $A_{00}A_{01} = 0$.

-Demostración-

Supongamos que $A_{10} \neq 0$, $A_{01} \neq 0$. Sea $0 \neq x \in A_{10}$ y sea $0 \neq y \in A_{01}$ y $z \in A_{00}$. Veamos que $xz = 0$. Si $0 \neq xz$, entonces como por Lema 7,11

$y(xz) = [y, x, z] + (yx)z = -[y, z, x] + 0 = 0$, se tiene por Lema 7,9 y 7,7 que el subespacio $(y + xz, x, yx)$ es subálgebra y por hipótesis cuasiideal. Pero

$$xz \in (y + xz, x, yx).z$$

$$xz \in e.(y + xz, x, yx)$$

Luego $xz \in (y + xz, x, yx)$ y así $xz \in (x)$. Pero entonces $(y + x, yx)$ es una subálgebra y por tanto un cuasiideal que cumple que

$$x \in e.(y + x, yx) \qquad x \in (y + x, yx).z$$

lo que implica que $(x) \subset (y + x, yx)$. Contradicción. Luego $xz = 0$.

Similarmente se prueba que $A_{00} A_{01} = 0$.

<u>*Lema 7.17:*</u> *Si A es Q-álgebra y $A_{10} = 0$, entonces se tiene una de las siguientes situaciones:*

i) $A = A_{00} \oplus \langle e \rangle$

ii) $A = A_{00} \oplus (A_{01} \dotplus (e))$

iii) $A = A_{01} \dotplus (e)$

donde en los casos anteriores $A_{01}^2 = 0$ y A_{00} es Q-álgebra.

-Demostración-

Sea $0 \neq y \in A_{01}$. Veamos que $A_{00} . y = 0$. Consideremos la subálgebra de A: $A_{00} + (e)$. Se tiene para $0 \neq z \in A_{00}$

$$zy \in (A_{00} \dotplus (e)).y \ \cap \ zy.(A_{00} \dotplus (e)) \subset$$

$$(A_{00} \dotplus (e)).A \ \cap \ A.(A_{00} \dotplus (e)) \subset A_{00} + (e)$$

por ser A una Q-álgebra. Luego $A_{00} . y = 0$.

<u>Observación:</u>

1) Se puede enunciar y demostrar un Lema análogo al anterior cuando A es Q-álgebra y $A_{01} = 0$.

2) Se cumple el recíproco del Lema anterior.

Lema 7,18: Si A es 0-álgebra, entonces se cumple que $A_{01} A_{10} \subset Ann(A)$.

-Demostración-

$(A_{01} A_{10})A_{01} \subset A_{01}(A_{10} A_{01}) + [A_{01}, A_{10}, A_{01}] = [A_{01}, A_{10}, A_{01}]$ por Lema 7,7. Pero $[A_{01}, A_{10}, A_{01}] = [A_{10}, A_{01}, A_{01}] = 0$ por Lema 7,7 y 7,8.

Análogamente se prueba $A_{10}(A_{01} A_{10}) = 0$.

$(A_{01} A_{10}) A_{00} = A_{01} (A_{10} A_{00}) + [A_{01}, A_{10}, A_{00}] = [A_{01}, A_{01}, A_{00}]$ por Lema 7,16. Pero $[A_{01}, A_{10}, A_{00}] = [A_{01}, A_{00}, A_{10}] = 0$.

Análogamente se prueba que $A_{00} (A_{01} A_{10}) = 0$

Corolario 7,19: Si A es 0-álgebra, entonces A es asociativa.

-Demostración-

Tener en cuenta la Proposición 7,13 y el resultado se sigue a partir de los Lemas 7,16 , 7,17 , 7,18.

Se observa que el Corolario 7,17 proporciona un criterio de asociatividad para álgebras alternativas.

Con todo lo anterior queda demostrado el siguiente resultado:

Teorema 7.20: *Salvo isomorfismo las Q-álgebras alternativas son de uno de los siguientes tipos:*

1) $B \oplus \langle e\rangle$ *con* B *nilálgebra y Q-álgebra (ya clasificadas).*

2) $C \dot{+} \langle e\rangle$ *con* C *álgebra tal que* $C^2 = 0$, $ce = 0$, $ec = c$ $\forall c \in C$.

3) $D \dot{+} \langle e\rangle$ *con* D *álgebra tal que* $D^2 = 0$, $ed = 0$, $de = 0$ $\forall d \in D$.

4) $B \oplus (C \dot{+} \langle e\rangle)$ *con* B *nilálgebra y Q-álgebra (ya clasificadas) y* C *álgebra tal que* $C^2 = 0$, $ce = 0$, $ec = c$ $\forall c \in C$.

5) $B \oplus (D \dot{+} \langle e\rangle)$ *con* B *nilálgebra y Q-álgebra (ya clasificadas) y* D *álgebra tal que* $D^2 = 0$, $ed = 0$, $de = 0$ $\forall d \in D$.

6) $A = B \dot{+} C \dot{+} D \dot{+} \langle e\rangle$ *con* B *nilálgebra y Q-álgebra (ya clasificadas) y* C *y* D *álgebras tal que* $C^2 = 0 = D^2$ *y además* $ce=0$, $ec=c$ $\forall c \in C$, $eb=0$, $be=0$ $\forall b \in B$, $ed=0$, $de=d$ $\forall d \in D$. $CB = BD = 0$, $CD = 0$, $DC \subset Ann(B)$ *y se cumple*

" Si $\sum_{j=1}^{n} y_j x_j + \sum_{i=1}^{r} u_i v_i = \sum_{k=1}^{m} y_k' x_k' + \sum_{e=1}^{s} w_e z_e$ con $y_j, y_k' \in A_{01}$ $x_j, x_k' \in A_{10}$, $u_i, v_i, w_e, z_e \in A_{00}$ implica $\sum_{j=1}^{n} y_j x_j + \sum_{i=1}^{r} u_i v_i \in \langle (u_i), (y_j), (x_k'), (z_e)\rangle \cap \langle (w_e), (v_i), (y_k'), (x_j)\rangle$ "

Observación: La condición que se impone en las Q-álgebras de tipo 6) es necesaria, como queda puesto de manifiesto en el siguiente ejemplo:

$A = (e) + (x) + (y) + (z_1, z_2, z_2^2)$

con $yx = z_1z_2 = z_2z_1 = z_2^2$ y el resto de productos igual a cero. Este álgebra asociativa cumple todas las condiciones que verifican las álgebras de tipo 6) salvo la última. Sin embargo no es Q-álgebra porque el subespacio (y, z_1) es una subálgebra y no es cuasiideal:

$$z_1z_2 = x\,.\,(y, z_1) \cap (y, z_1)\,.\,z_2 \subset A.(y, z_1) \cap (y, z_1).\,A \subset (y, z_1).$$

BIBLIOGRAFIA

[1] ABIAN A.
"Linear associative algebras"
Pergamon Press. Inc. (1971).

[2] ANCOCHEA G.
"Le théoreme de von Staud en géométrie projective"
J. fur Math., v. 184 pp. 192-198. (1942)

[3] ANCOCHEA G.
"On semi-automorphism of división álgebras"
Annals of Math. 48 . pp 147-153. (1947)

[4] BADALOV M. I.
"Nilpotent alternative algebras"
Algebra i Logika, Vol. 33, No. 3, p.p. 245-265 May-June (1984)

[5] BADALOV M. I.
"Almost associative algebras"
Dokl. Akad. Nauk UZSSR no. 7, 12-14 (1984)

[6] BARNES D. W.

"On the Radical of a Ring with minimum condition"

The Journal of the Australian Mathematical Society. Volume V (1965) 234-236.

[7] BARNES D. W.

"Lattice isomorphisms of associative algebras"

The Journal of the Australian Mathematical Society. Volume VI (1966) 106-121.

[8] BRAUN R. B.

"A Gelfand-Neumark Theorem for C*-Alternative Algebras"

Math. Z. 185, 225-242 (1984)

[9] CLIFFORD A. H.

"Remarks on 0-minimal quiasi-ideals in semigroups".

Semigroup Forum (1978).

[10] EGANOVA I. A., SHIROKOV M. I.

"Orthomatrices and octonions"

Reports on Math. Physics, vol. 20, 1-10. (1984).

[11] ELDUQUE A., GONZALEZ S.

"Flexible Lie-admisibles algebras with A and A^- having the same subalgebra lattice"

Algebras, Groups, Geom. 1 (1984) no. 1, 137-143.

[12] ELDUQUE A., VAREA V. R.
" Lie algebras all of whose subalgebras are supersolvables"
Lie algebras and related topics (Windsor, Ont., 1984) 209-218. CMS Conf Proc, 5., Amer. Math Soc Providence R.I. 1986.

[13] FAULKNER J. R., FERRAR J. C., VELDKAMP F. D.
"Geometries over alternative rings"
Redeil Publis. Company, Holland, p. 235-342, (1985)

[14] GONZALEZ S. y MARTINEZ C.
"Lie Mutation of an associative algebra"
Algebras, groups and Geometries 2 (1985). 129-138.

[15] GONZALEZ S.
"Orthogonally complete alternative rings"
Journal of Algebra (to appear)

[16] GUNAYDIN M. and GURSEY F.
J. Math Phys. 14 (1973), 1651

[17] GURSEY F.
"Nonassociative Algebras in Quantum Mechanics and Particle Physics"
Yale University. Physics Dep. New Haven 1978.

[18] GOODEARL K. R.
"Von Neumann regular rings"
Ritman (1979)

[19] HENTZEL I. R. and PIACENTINI G. M.
"Simple (γ,δ) Algebras are associative"
Journal of Algebra. 52-76 (1977)

[20] KAPLANSKY I.
"Algebras with many derivations"
Aspect of Math. and its Applic. North Holland 1986.

[21] KLEINFELD E.
"Simple alternative rings"
Ann. of Math. (2), 58 91953) 544-547.

[22] KLEINFELD E.
"Alternative nilrings"
Ann. of Math. (2), 66 (1957) 395-399

[23] KLEINFELD E.
"Simple algebras of type (1,1) are associative"
CAN. J. MATH. 13 . 129-148 (1986)

[24] KLEINFELD E.
"A class of rings which are very nearly associative"
American Mathematical Notices. 720-723 (Noviembre 1986)

[25] KLEINFELD E.
"On rings satisfiing [x, y, z] = [x, z, y]"
Algebras, Groups and Geometries (por aparacer)

[26] KRUSE A. L. and PRICE D. T.
"Nilpotent rings"
Gordon and Breach. Science Publishers (1969)

[27] LAJOS S., SZASZ F.
"Some characterizations of two-sided regular rings"
Acta Sci. Math. 31 (1970) 223-228.

[28] LUH J.
"A remark on quasiideals of regular rings"
Proc. Japan Acad. 40 (1964) 660-661.

[29] MURRAY F. J. , NEUMANN J.
"On rings of operators"
Ann. of Math. 37 (1936) 116-229.

[30] OUTCALT D. L.
"Power-associative algebras in which every subalgebra is an ideal"
Pacif. J. Math. 20 (1967) 481-485.

[31] POLIKARPOV
"Two associativity theorems for alternative rings"
Sibirsk. Math. Zh. 27, 6, 166-170 (1986)

[32] PEIRCE R. S.
"Associative algebras"
Springer Verlag. New York Heidelberg Berlin (1982)

[33] RACINE M. L.
"On Maximal subalgebras"
Journal of Algebra 30 (1974) 155-180

[34] RODABAUGH D. J.
"Power-Associative Algebras in which every subalgebra is a left ideal"
Bulletin 13 (2) (1970) 239-243.

[35] RODRIGUEZ A.
"A Vidav-Palmer Theorem for Jordan C^*-algebras and related topics"
J. London Math. Soc. 22, 318-322 (1980).

[36] SCHAFER R. D.
"An Introduction to Nonassociative algebras"
Academic Press (1966)

[37] SHAO-XUE L.
"On algebras in which every subalgebra is ideal"
Acta Math. Sinica 14 (1964) 532-537 (Chinese) translated as chinese Math. Acta 5 (1964) 572-577.

[38] SLATER M.
" The open case for simple alternative rings"
Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968) 712-715

[39] SLATER M.
" The socle of an Alternative ring"
Journal of Algebra 14 (1970) 443-463

[40] SLATER M.
"Alternative rings with d.c.c. I"
Journal of Algebra 11 (1969) 102-110.

[41] SMILEY M. F.
"Alternative regular rings without nilpotent elements"
Bull. A.M.S. vol 53 775-778 (1947)

[42] SORGSEPP L. and LOHMUS J.
"About nonassociativity in physics and Cayley-Graves octonions"
Hadronic J. 2, 1388-1459. (1979)

[43] STEINFELD O.
" On ideal quotients and prime ideals"
Acta Math. Acad. Sci. Hung 14 (1953) 289-298.

[44] STEINFELD O.
" Quasiideals in rings and semigroups"
Adadémiai Kiadó, Budapest (1978)

[45] SUZUKI M.
"Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups"
Springer Verlag Berlin 1956.

[46] TOWERS D. A.
"A Frattini theory for algebras"
Proc. London Math. Soc. (3) 27. pp. 440-462. (1973)

[47] TOWERS D. A.
"Lattice automorphisms of Lie Algebras"
Archiv. Math. Vol 46 , (1986) 39-43

[48] VERNIKOV B. M., VOLKOV M. V.
"Dualism in lattices of varietes of associative rings"
Sov. Math. 30, 4, 111 (1986)

[49] VOLKLEIN H.
"Lattice isomorphism of Lie algebras and algebraic groups"
J. Alg. 107, 82-97, (1987)

[50] VON NEUMANN J.
" On regular rings"
Proc. Mat. Acad. Sci. U. S. A. 22 (1936) 707-713.

[51] WEINERT H. J.
"On quasi-ideals in Rings"
Acta Math. Hung. 43 (1-2) (1984) 85-99

[52] WENE G. P.
"A construction relating Clifford algebras and Cayley-Dickson algebras"
J. Math. Phys. 25, 2351-2354. (1984)

[53] WENE G. P.
"Algebras with anticommuting basal elements, space-time symetries and quantum theory"
J. Math. Phys. 25, 414-417. (1984)

[54] WIEGANDT R.

"Uber die Struktursatze der Halringe"

Annales Univ. Budapest Sectio Math. , 5 (1962) 51-68

[55] ZHEVLAKOV K. A., SLIN'KO A. M. , SHESTAKOV I. P., SHIRSHOV A. I.

"Rings that are nearly associative"

Academic Press Press (1982).

SECCION 1

1. - JUAN C CANDEAL, JOSE E. GALE. ON SOME PROPERTIES OF A_*, L^1/H^1_0 AS BANACH ALGEBRAS. 1988.

2. - OSCAR BLASCO, ALEKSANDER PELCZYNSKI. THEOREMS FO HARDY AND PALEY FOR VECTOR VALUED ANALYTIC FUNCTIONS AND RELATED CLASSES OF BANACH SPACES. 1988.

3. - M. GONZALEZ, V. M. ONIEVA. LIFTING RESULTS FOR SEQUENCES IN BANACH SPACES. 1988.

4. - J.I. EXTREMIANA, L.J. HERNANDEZ, M.T. RIVAS. UNA (CO)HOMOLOGIA PROPIA PARA ESPACIOS CON VARIOS FINALES. 1988.

5. - J. I. EXTREMIANA, L. J. HERNANDEZ, M. T. RIVAS. PROPER CW-COMPLEXES: AN ADEQUATE CATEGORY FOR THE STUDY OF PROPER HOMOTOPY. 1988.

6. - M. A. DE PRADA VICENTE, M. MACHO STADLER. T-PREFILTER THEORY. 1988.

7. - M. MACHO STADLER, M. A. DE PRADA VICENTE. FUZZY T-NET THEORY. 1988.

SECCION 2

1. - JESUS A. LALIENA CLEMENTE. ESTRUCTURA RETICULAR Y CUASIIDEAL EN ALGEBRAS ALTERNATIVAS. 1988.

SECCION 3

1.- CLAUDE BREZINSKI. CONVERGENCE ACCELERATION METHODS: THE PAST DECADE. 1984.

2.- JOSE MARIA MONTESINOS. REVETEMENTS RAMIFIES DE NOEUDS, ESPACES FIBRES DE SEIFERT ET SCINDEMENTS DE HEEGARD. 1984.

3.- J. BASTERO. TECNICAS MODERNAS EN LA TEORIA DE LOS ESPACIOS DE BANACH. 1985.

4.- E. DOMINGUEZ. GEOMETRICAL INTRODUCTION TO BORDISM THEORY. 1985.

5.- F. JAVIER RIBERA. LA FORMULACION HAMILTONIANA TRANSFORMACIONES CANONICAS. 1985.

6. - PAUL VER EECKE. LE GROUPOIDE FONDAMENTAL D'UN FEUILLETAGE DE STEFAN. 1986.

7. - E. INDURAIN. SEQUENCES IN BANACH SPACES: SOME PROPERTIES AND APPLICATIONS FROM A GEOMETRICAL POINT OF VIEW. 1986

8. - R. AYALA, A. QUINTERO. CLASIFICACION HOMOTOPICA DE LOS FIBRADOS. 1987.

9. - W.T. VAN EST. FOLIACIONES, ESTRUCTURA COCIENTE Y VARIEDADES. 1987.

10.- T. PORTER. PROPER HOMOTOPY, PROHOMOTOPY AND COHERENCE. 1987

11. - JUAN LUIS VARONA MALUMBRES. CONVERGENCIA DE SERIES DE FOURIER RESPECTO DE SISTEMAS ORTOGONALES. 1987

12. - R. AYALA, E. DOMINGUEZ, A. QUINTERO. TOPOLOGIA POLIEDRAL†. 1987.

13. - B. GAMBOA DE BUEN. COMPLEMENTACION EN ESPACIOS DE BANACH. 1987

SECCION 4

1.- J.M. MORENO, A. PEREZ, M.P. LASALA. TEORIA DE GRAFOS EN LA PROGRAMACION Y CONTROL DE PROYECTOS. 1985.

2.- MANUEL VAZQUEZ. UNA INTRODUCCION AL LENGUAJE LISP. 1986.

3.- Mª JESUS LAPEÑA. CALCULO DE SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES. COMPARACION DE METODOLOGIA REPRESENTACION GRAFICA. 1987

SECCION 5

1.- Mª PILAR LASALA. UN JUEGO DE CEROS Y UNOS. 1985

2.- M.A. ALVAREZ, R. ARRIBAS, B. GARCIA, M.P. LASALA. RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES POR SIMULACION DE CADENAS DE MARKOFF. 1985.

3. - PASCUAL LLORENTE. MATEMATICAS E INFORMATICA. 1985.

4. - ARACELI MARTIN . ESTRUCTURA FORMAL Y POLITICA DEL PARLAMENTO CATALAN DE 1980. 1985.

5. - A. PEREZ, J. ESCRIBANO, R. ARRIBAS. RESOLUCION DE SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES. 1985.

6. - JESUS CARNICER. SOBRE ENDOMORFISMOS NORMALES Y SUBESPACIOS INVARIANTES. 1986.

7. - J. RIBERA PASCUAL. MODELOS MATEMATICOS. MATEMATICAS APLICADAS. 1986

8. - J. RIBERA PASCUAL. LA FORMULACION LAGRANGIANA DE LA MECANICA. 1986

9. - L.J. HERNANDEZ. HISTORIA DEL QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES. 1986.

10. - E. DOMINGUEZ, ED. CONFERENCIAS EN UNA CLASE DE PRACTICAS. 1987.

11. - J.J. RUBIO. CALCULO CON ORDENADOR DEL GRUPO FUNDAMENTAL DE UN COMPLEJO SIMPLICIAL ABSTRACTO. 1987.

12. - M. PEREZ. CALCULO CON ORDENADOR DE POLINOMIOS ORTOGONALES Y DE SUS RAICES. 1987.

13. - M. SANCHEZ, A. PEREZ, Mª J. DOMENCH. TRANSFORMACION DE PRINCIPIOS DE CONSISTENCIA ALEATORIOS EN DETERMINISTICOS. 1987.

14. - M. C. MINGUEZ. CALCULO INFINITESIMAL SINTETICO. 1987

15. - J.A. ANQUELA, T. CORTES. EL ENIGMA DE LA PERFECCION. 1987.

16. - M. BENITO. PROXIMIDADES Y TOPOLOGIAS. 1987.

17. - J.C. CANDEAL, J.J. MARTINEZ, L. RANDEZ. APLICACION DE METODOS NUMERICOS PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES NO LINEALES AL ESTUDIO DEL FENOMENO ECONOMICO "CICLOS DE LA TELARAÑA". 1987.

SECCION 6

1. - ISABEL GOICOECHEA, JUANA MARIA MARTINEZ, MARIA DEL CARMEN PRADOS. TRABAJANDO CON LOGO LAS FRACCIONES EN EL CICLO SUPERIOR DE E. G. B. 1987