

TESIS DOCTORAL

Síntesis de controladores robustos
mediante el análisis de la
compatibilidad de especificaciones
e incertidumbre

Montserrat Gil Martínez



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

Síntesis de controladores robustos
mediante el análisis de la
compatibilidad de especificaciones
e incertidumbre

Montserrat Gil Martínez

Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones
2008

Esta tesis doctoral, dirigida por el doctor D. Mario García Sanz, fue leída el 14 de diciembre de 2001, y obtuvo la calificación de Sobresaliente Cum Laude Unanimidad.

© Montserrat Gil Martínez

Edita: Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones

ISBN 978-84-691-9583-3

Síntesis de controladores robustos mediante el análisis de la compatibilidad de especificaciones e incertidumbre

**Tesis Doctoral de Montserrat Gil Martínez
Director: Dr. Mario García Sanz
Dpto. de Automática y Computación
Universidad Pública de Navarra
Pamplona, Septiembre de 2001**



Agradecimientos

A Mario, director de esta tesis por el tiempo y dedicación prestados

A mi familia, por su apoyo

A Raúl, por su valiosa colaboración, y a todos los que han alentado este trabajo

Índice

1	Introducción.....	1
1.1	Problemática	3
1.2	Aportaciones	5
1.3	Organización.....	7
2	Revisión de QFT	9
2.1	Presentación	11
2.2	Justificación de QFT	12
2.2.1	Porqué la Realimentación	13
2.2.2	Realimentación Cuantitativa	15
2.2.3	Dos Grados de Libertad en el Diseño.....	18
2.3	Metodología QFT.....	19
2.3.1	Las Especificaciones	21
2.3.2	La Incertidumbre. Plantillas	28
2.3.3	Los Contornos.....	32
2.3.4	La Síntesis del Controlador.....	39
2.3.5	El Diseño del Pre-filtro	43
2.3.6	La Validacion de los Diseños.....	44
2.4	Versatilidad y Breve Historia de QFT.....	45
2.5	Algunas Aplicaciones Prácticas	47
2.6	Ventajas de QFT	47
2.7	Principales Puntos de Partida de la Tesis	48
2.7.1	Horowitz (1973).....	48
2.7.2	Horowitz (1979).....	50
2.7.3	Chait y Yaniv (1993).....	53
	Índice de Figuras.....	55
3	Plantillas y Contornos QFT.....	57
3.1	Los Objetivos de Control	59
3.2	El Análisis de la Incertidumbre	63
3.2.1	Modelos con Incertidumbre	63
3.2.2	Incertidumbre Frecuencial. Plantillas.....	66
3.2.3	Topología y Parámetros Característicos de las Plantillas	67
3.3	El potencial de los Contornos	74
3.3.1	Qué son los Contornos	74
3.3.2	Como se Calculan los Contornos. Inecuaciones Cuadráticas	75
3.3.3	Contornos para el Controlador sin la Incertidumbre. Tipologías	79
3.3.4	Contornos para el Controlador con la Incertidumbre	85
3.3.5	Contornos de Lazo Abierto	90
3.3.6	‘Agresividad’ de un Contorno.....	93
3.4	Solución en los Contornos al Problema de Control	94
3.5	Solución en el Diseño al Problema de Control.....	95
	Índice de Figuras.....	97

4 La Sensibilidad Complementaria.....	99
4.1 Generalidades	101
4.2 Contornos sin la Incertidumbre. Tipologías de Contornos	103
4.2.1 Tipología y Formulación de Contornos para Especificaciones $0 < \delta_1 < 1$	104
4.2.2 Tipología y Formulación Contornos para Especificaciones $\delta_1 > 1$	108
4.3 Influencia de la Incertidumbre.....	113
4.3.1 Influencia de la Incertidumbre en Fase.....	114
4.3.1.1 Influencia de la Fase (θ).....	114
4.3.1.2 Contornos de Tipología D ($0 < \delta_1 < 1$) para Plantillas con Sólo Incertidumbre en Fase	115
4.3.1.3 Contornos de Tipología A ($\delta_1 > 1$) para Plantillas con Sólo Incertidumbre en Fase	120
4.3.2 Influencia de la Incertidumbre en Ganancia.....	125
4.3.2.1 Influencia de la Magnitud (p).....	125
4.3.2.2 Contornos de Tipología D ($0 < \delta_1 < 1$) para Plantillas con Sólo Incertidumbre en Magnitud	126
4.3.2.3 Contornos de Tipología A ($\delta_1 > 1$) para Plantillas con Sólo Incertidumbre en Magnitud	129
4.3.3 Conclusiones sobre la Influencia de la Incertidumbre.....	132
4.3.3.1 Contornos de Tipología D	135
4.3.3.2 Contornos de Tipología A	138
4.4 Influencia de la Especificación, $\delta_1(\omega)$	144
4.4.1 Valor de la Especificación en Contornos Tipo D ($0 < \delta_1 < 1$).....	145
4.4.2 Valor de Especificación en Contornos de Tipo A ($\delta_1 > 1$)	149
4.5 Solución al Problema de la Sensibilidad Complementaria	155
4.5.1 Un Pequeño Resumen sobre los Contornos.....	155
4.5.2 La Estabilidad.....	156
4.5.3 La Atenuación de Ruidos	165
4.5.4 El Esfuerzo de Control ante Perturbaciones en la Entrada	166
4.5.5 Los Servosistemas	168
Índice de Figuras.....	169
5 La Sensibilidad	171
5.1 Generalidades	173
5.2 La Sensibilidad Clásica.....	176
5.2.1 Contornos Sin la Incertidumbre. Tipologías de Contornos.....	176
5.2.1.1 Tipología y Formulación de Contornos para Especificaciones $0 < \delta_2 < 1$..	178
5.2.1.2 Tipología y Formulación de Contornos para Especificaciones $\delta_2 > 1$	181
5.2.2 Influencia de la Incertidumbre.....	185
5.2.2.1 Influencia de la Incertidumbre en Fase.....	186
5.2.2.2 Influencia de la Incertidumbre en Magnitud.....	194
5.2.2.3 Conclusiones sobre la Influencia de la Incertidumbre	202
5.2.3 Influencia de la Especificación, $\delta_2(\omega)$	217
5.2.3.1 Valor de Especificación en Contornos Tipo B ($0 < \delta_2 < 1$)	219
5.2.3.2 Valor de Especificación en Contornos Tipo A ($\delta_2 > 1$)	222
5.3 La Sensibilidad Incluida la Planta	227
5.3.1 Tipologías de Contornos sin la Incertidumbre.....	227
5.3.1.1 Tipología de Contornos para Especificaciones $\delta_3/p < 1$	229

5.3.1.2 Tipología de Contornos para Especificaciones $\delta_3/p > 1$	230
5.3.1.3 Transición de Tipología de Contornos ($\delta_3/p = 1$) sin Considerar la Incertidumbre.....	232
5.3.2 Influencia de la Incertidumbre del Modelo	233
5.3.2.1 Influencia de la incertidumbre en Ganancia, $\{p\}$	234
5.3.2.2 Influencia de la Incertidumbre en Fase, $\{\theta\}$	243
5.3.2.3 Conclusiones sobre la Influencia de la Incertidumbre	244
5.3.3 Influencia de la Especificación, δ_3	250
5.4 Solución al Problema de Control sobre la Sensibilidad	255
5.4.1 Algunas Conclusiones sobre los Contornos	256
5.4.2 Rechazo de Perturbaciones	258
5.4.3 Estabilidad	264
Índice de Figuras.....	266
6 El Esfuerzo de Control y Los Servosistemas.....	269
6.1 El Esfuerzo de Control.....	271
6.1.1 Generalidades.....	271
6.1.2 Contornos Sin la Incertidumbre. Tipologías.	272
6.1.2.1 Tipología y Formulación de Contornos para Especificaciones $p\delta_i < 1$	274
6.1.2.2 Tipología y Formulación de Contornos para Especificaciones $p\delta_i > 1$	276
6.1.2.3 Transición de Tipología de Contornos ($p\delta_i = 1$)	278
6.1.3 Influencia de la Incertidumbre del Modelo	279
6.1.3.1 La Incertidumbre en Ganancia, $\{p\}$	280
6.1.3.2 La Incertidumbre en Fase, $\{\theta\}$	288
6.1.3.3 Conclusiones sobre la Incertidumbre	289
6.1.4 Influencia de la Especificación, δ_i	295
6.1.5 Solución al Problema del Esfuerzo de Control.....	299
6.2 Los Servosistemas.....	305
6.2.1 Generalidades.....	305
6.2.2 Tipologías de Contornos. Incertidumbre Sólo en Magnitud.....	309
6.2.2.1 Tipologías A (A_1 y A_2).....	311
6.2.2.2 Tipología B_1	313
6.2.2.3 Tipología B_2	315
6.2.2.4 Conclusión sobre Tipologías de Contornos.....	318
6.2.3 Contribución de la Incertidumbre en Fase.....	323
6.2.3.1 Influencia del parámetro θ	323
6.2.3.2 Influencia de la incertidumbre $\{\theta\}$	325
6.2.3.3 Incertidumbre en fase y magnitud	329
6.2.4 Influencia de la Incertidumbre en Magnitud	332
6.2.5 Influencia de la Especificación, δ_3	335
6.2.6 Solución al Problema del Seguimiento de Señales.....	342
6.2.6.1 Algunas Conclusiones sobre los Contornos	342
6.2.6.2 Estrategias en el Diseño de Controladores	344
6.2.6.3 El Control Robusto-Adaptativo.....	348
Índice de Figuras.....	355
7 Control Robusto Multi-Objetivo y un Ejemplo.....	357
7.1 Proceso con Incertidumbre a Controlar.....	359
7.2 Múltiples Objetivos de Control Realimentado	361

7.3 Contornos Representativos de las Especificaciones Robustas.....	363
7.4 Interpretación de los Contornos.....	370
7.4.1 Sensibilidad Complementaria.....	371
7.4.2 Sensibilidad.....	373
7.4.3 Sensibilidad incluida la Planta.....	374
7.4.4 Servosistemas.....	375
7.4.5 Esfuerzo de Control.....	377
7.5 Agresividad de los Contornos.....	379
7.5.1 Influencia de la Incertidumbre.....	379
7.5.2 Influencia del Valor de Especificación.....	394
7.6 Estrategias de Diseño de Controladores.....	397
7.6.1 Requisitos para un Control Adecuado.....	397
7.6.2 Compatibilidad de Especificaciones Robustas en Cada Frecuencia.....	399
7.6.3 Compatibilidad de Especificaciones Robustas Entre Frecuencias.	
Modelado de L_0	410
Índice de Figuras.....	424
Índice de Tablas.....	425
8 Conclusiones.....	427
8.1 Resumen de Resultados.....	429
8.2 Conclusiones Finales.....	432
8.3 Posibles Vías de Continuación.....	433
Apéndice. Producción Científica.....	435
Glosario.....	439
Referencias.....	449

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Resumen

El presente trabajo de investigación se plantea en la necesidad de conocer y cuantificar las dificultades en la resolución simultánea de distintos objetivos de control, arbitrariamente exigentes y algunos contrapuestos, en presencia de incertidumbres, también arbitrariamente grandes. Desde QFT, la teoría robusta de realimentación cuantitativa, la repuesta se encuentra en el estudio de los contornos o curvas de restricción que expresan frecuentemente las necesidades de control para satisfacer las especificaciones robustas.

Contenidos

1	Introducción.....	1
1.1	Problemática.....	3
1.2	Aportaciones.....	5
1.3	Organización.....	7

1 INTRODUCCIÓN

1.1 PROBLEMÁTICA

La Teoría de Realimentación Cuantitativa, conocida más comúnmente como QFT (*Quantitative Feedback Theory*), e inicialmente desarrollada por I. Horowitz (1959) ha resultado hasta el momento ser una metodología muy potente de diseño en sistemas de control realimentado. Su versatilidad reside en su capacidad para sintonizar controladores *robustos*, entendiendo la robustez como la capacidad de gobernar el proceso a pesar de la incertidumbre existente en el modelo matemático de la planta y en las perturbaciones, ambos siempre presentes en mayor o menor magnitud en todo sistema real. Del mismo modo, la consideración en términos *cuantitativos* de tantos objetivos de control como sean necesarios en un problema realista permite realizar de manera transparente diseños teóricos de controladores, fácilmente ajustables en su fase de implementación práctica.

QFT ha sido, ya desde sus comienzos, una teoría revolucionaria de control. Su postulado sobre la necesidad de realimentación sólo en presencia de incertidumbres y la necesidad de considerar éstas ya desde el proceso de diseño, le valieron las primeras duras críticas desde la comunidad de control. A pesar de todo, la versatilidad de QFT en la resolución de los problemas prácticos más complejos le han acabado dando la razón. El dilema de la existencia de solución al problema de control realimentado ha sido otro foro de discusión. Sin embargo, ésta no es una carencia de la técnica empleada, QFT o cualquier otra, sino del problema en sí mismo. Unos beneficios de realimentación arbitrariamente grandes en presencia de incertidumbres arbitrariamente grandes son imposibles, al menos en un sentido práctico. Atendiendo a las especificaciones de comportamiento, cuando la ganancia del controlador se incrementa, la respuesta en la salida de la planta frente a perturbaciones se atenúa, y su sensibilidad frente a incertidumbres también decrece, mejorando el seguimiento de referencias. Sin embargo, en contrapartida esto necesariamente implica una mayor ganancia y, por tanto, una mayor frecuencia de cruce o un mayor ancho de banda. Éste tampoco puede reducirse con una pendiente de caída infinita de la ganancia en moderadamente alta frecuencia, debido a problemas de estabilidad. En definitiva, un mejor comportamiento en las frecuencias de interés se traduce necesariamente en una amplificación de ruidos introducidos por el sensor en una banda de frecuencias mayor. El planteamiento *cuantitativo* de especificaciones robustas a través de los contornos sobre la función de transferencia nominal de lazo abierto, $L_0=GP_0$, permite en QFT adoptar soluciones de compromiso ante esta problemática. Los contornos expresan

frecuencialmente las necesidades de control consideradas las especificaciones de comportamiento y la incertidumbre. Por tanto, contrariamente a la supuesta desventaja de QFT sobre la existencia de solución al problema de control, su formulación cuantitativa permitirá predecir ésta. La cuestión entonces reside en cómo extraer dicha información.

El problema de la existencia de solución en el control realimentado se plantea entonces como el conocimiento de qué agresividad de especificaciones de comportamiento son alcanzables simultáneamente dada una incertidumbre inherente al sistema.

Ante la urdida necesidad, planteada desde otras escuelas de control 'excesivamente' matemáticas que presentan grandes deficiencias en la fase de implementación, de una teoría matemática rigurosa que avalase los beneficios abogados por QFT, Horowitz afirma en su *'Survey'* (1991) que: 'la técnica QFT permite deducir de manera relativamente sencilla al menos condiciones suficientes sobre la existencia de solución a un problema de control arbitrariamente severo en términos cuantitativos'. Dichos teoremas de existencia de solución aparecen por primera vez en Horowitz, 1979 App1, para sistemas de simple entrada y simple salida. Y en este mismo campo aparecen posteriormente múltiples trabajos de investigación: Gera y Horowitz (1979), Nwokah (1984, 1988), Nwokah y Thompson (1989, 1990), Thompson y Nwokah (1989, 1994), Thompson (1990, 1998), Nwokah et al. (1990, 1994), Yaniv (1991), Yaniv y Schwartz (1991), Jayasuriya (1993), Jayasuriya y Zhao (1994), Nordgren et al. (1994). Supuestos unos contornos o curvas de restricción, que expresan en QFT las especificaciones de comportamiento incluida la incertidumbre sobre $L_0=GP_0$, las aportaciones hasta el momento plantean la existencia de solución como la posibilidad de encontrar un controlador G , tal que $L_0(j\omega)$ satisfaga sus contornos para cada frecuencia. Entonces, los trabajos anteriores demuestran que tal L_0 existe, es única, y óptima (satisface especificaciones robustas con la menor ganancia de alta frecuencia) cuando reside exactamente sobre los contornos (Horowitz y Sidi, 1972). Sin embargo, esto sólo se garantiza bajo ciertas premisas sobre la planta con incertidumbre $\{P\}$ y también para ciertas restricciones sobre las tolerancias de comportamiento exigidas. Una vez más nos encontramos ante la pura limitación física de que los beneficios del control realimentado no pueden ser infinitos.

El presente trabajo enfoca el problema de la existencia de solución desde una perspectiva distinta y para la generalidad de especificaciones y plantas con incertidumbre.

1.2 APORTACIONES

El problema de la existencia de solución, aunque se materialice con el modelado de L_0 cumpliendo los contornos de especificación robusta, recae en último término en los compromisos de diseño planteados por éstos. Luego la información contenida en los contornos es quien revela la dificultad en la solución del problema realimentado.

En primer lugar, para la existencia de solución deberá existir compatibilidad de especificaciones dada una incertidumbre. Esto se traduce en que los contornos que expresan éstas presenten intersección no nula en cada frecuencia. En trabajos anteriores esto era considerado un problema menor. Al tenerse en cuenta el coste de la realimentación (disminución de ganancia de alta frecuencia) nada más que como un objetivo implícito (ningún contorno lo representa) y debido a las restricciones impuestas sobre el resto de especificaciones, la síntesis de L_0 partía de la premisa, en la mayoría de los casos, de la compatibilidad de los contornos. Cuando el planteamiento de las especificaciones dada una incertidumbre resultaba en la ausencia de solución, ya desde los contornos, se resolvía simplemente con un replanteamiento de las tolerancias de especificación antes de abordar el diseño. Todas las aportaciones de formalismos matemáticos hasta el momento son, por tanto, loables pero escasas en la práctica, pues restringen a unos pocos, los sistemas a los que son aplicables.

El presente trabajo aporta nuevas ideas sobre la existencia de solución desde un estudio más riguroso de los contornos, sin considerar ninguna restricción sobre las especificaciones ni sobre la planta. El objetivo es definir cómo la incertidumbre y las especificaciones influyen en la representación del problema de control a través de los contornos. Con la ayuda de la formulación matemática ya existente para el cálculo de estos últimos, empleada hasta ahora sólo para la representación de éstos y para el diseño gráfico del controlador, es posible predecir y cuantificar la exigencia del problema de control planteado.

El estudio de la influencia de la incertidumbre y de las especificaciones en los contornos resultantes pretende:

- Analizar la compatibilidad en cada frecuencia de los contornos que representan la incertidumbre y las especificaciones. Es decir, la existencia de solución en los contornos.
- Estudiar en cada frecuencia los compromisos de control para otras frecuencias que suponen una elevada incertidumbre o unas especificaciones más agresivas. Es decir, analizar desde los contornos la dificultad en la síntesis del controlador.

El problema se resolverá para:

- Cualquier tamaño de incertidumbre en la planta. Los sistemas estudiados son lineales, invariantes en el tiempo y de simple entrada – simple salida. No obstante, la metodología de análisis desarrollada podría generalizarse fácilmente a cualquier sistema, incluso no lineal o de múltiples entradas y/o salida, en futuros trabajos.
- Cualquier requerimiento en las especificaciones de comportamiento o estabilidad. Los problemas de control analizados serán:
 - Tolerancias sobre la función de sensibilidad complementaria. Ante una tolerancia máxima, ésta interviene fundamentalmente en la estabilidad, en el nivel de amplificación de ruidos en la salida y en el esfuerzo de control ante perturbaciones en la entrada. Cuando se imponen restricciones dobles sobre la sensibilidad complementaria en QFT se resolverá el problema del seguimiento de señales con dos grados de libertad (controlador y prefiltro).
 - Restricciones sobre la función de sensibilidad. Ésta condiciona hasta frecuencias medias-altas la dinámica de rechazo de perturbaciones en la entrada y en la salida y, en alta frecuencia, el pico máximo de estabilidad. Indirectamente influye en la dinámica de seguimiento de referencias, en virtud de la suma unitaria entre la sensibilidad y la sensibilidad complementaria.
 - Tolerancias sobre el esfuerzo de control empleado en el rechazo de ruidos, seguimiento de referencias o rechazo de perturbaciones. Este constituye en términos de ancho de banda el principal coste de la realimentación.

Todo ello permitirá:

- Predecir la existencia de solución para un proceso con una cierta incertidumbre inherente al mismo y planteadas unas especificaciones deseadas de control realimentado.
- Considerada la incertidumbre fija e inherente al sistema, cuantificar los compromisos entre las especificaciones a elegir de modo que se garantice la existencia de solución en cada frecuencia (compatibilidad de contornos) y la posibilidad de modelar una L_0 que satisfaga requisitos explícitos e implícitos. Los objetivos explícitos, o representados mediante contornos, son habitualmente los de estabilidad y el rechazo de perturbaciones y/o el seguimiento de referencias. Los requisitos implícitos de diseño suelen ser el ancho de banda y la complejidad del controlador, entre otros.
- Si dadas unas especificaciones mínimas de comportamiento se advierte, debido a la excesiva incertidumbre, la inexistencia de solución en los

contornos, o una excesiva complejidad en la síntesis del controlador, se planteará la reducción de la incertidumbre. Ésta también puede resultar interesante por el sobrediseño implícito en el empleo de un único controlador para todas las plantas en el dominio de incertidumbre. Todo esto sugiere el empleo de estructuras robusto-adaptativas. Estudiados los contornos se desarrollará una metodología de división de la incertidumbre, dejando en manos de futuros trabajos la construcción de la estructura de control robusto-adaptativa.

1.3 ORGANIZACIÓN

Los objetivos planteados en este Capítulo 1 se estructuran a lo largo del presente trabajo del modo ahora indicado. Una revisión de la técnica QFT se incluye en el Capítulo 2. En ella se justifica el empleo del control realimentado, cuantitativo y de dos grados de libertad. También se resumen las aportaciones científicas hasta el momento a la metodología de diseño QFT, describiéndose ésta a través de un ejemplo. Su versatilidad y aplicaciones prácticas son también brevemente comentadas.

El Capítulo 3 incluye las primeras aportaciones. Siguiendo la metodología de diseño con QFT, extrae algunas conclusiones sobre las características de la incertidumbre frecuencial representada con plantillas. A continuación, establece el potencial de los contornos QFT en la resolución del problema de control. Se detalla la formulación genérica de los contornos. El estudio de éstos se desglosará como sigue dentro de los distintos objetivos de control en los Capítulos 4, 5 y 6. Primeramente se estudia la tipología y formulación de los contornos obviada la incertidumbre. Posteriormente se analiza la contribución de esta última y también de la tolerancia de comportamiento impuesta.

El Capítulo 4 estudia la sensibilidad complementaria desde el punto de vista de la estabilidad, del nivel de amplificación de ruidos en la salida y del esfuerzo de control ante perturbaciones en la entrada. El Capítulo 5 se centra en la sensibilidad. Ésta condiciona hasta moderadamente altas frecuencias la dinámica de rechazo de perturbaciones en la entrada y en la salida, y en alta frecuencia el pico máximo de estabilidad. Ambos Capítulos 4 y 5 incluyen una caracterización matemática bastante exhaustiva de sus contornos representativos.

El Capítulo 6 estudia primero el precio pagado por la realimentación en términos de esfuerzo de control. Y en segundo lugar, se analizan los servosistemas, donde se imponen también condiciones sobre la sensibilidad complementaria pero con una finalidad diferente a la del Capítulo 4. Estructurados del modo antes indicado los estudios sobre la influencia de la

incertidumbre y las tolerancias de especificación, al final de los Capítulos 4, 5 y 6 se incluyen las conclusiones sobre la solución del problema de control en los contornos de cada frecuencia y en la síntesis del controlador.

El Capítulo 7 aborda el problema del cumplimiento conjunto de especificaciones en presencia de incertidumbre. En el se recogen los principales resultados estudiados en detalle en los capítulos anteriores, mostrándose su utilidad a través de un ejemplo de control de un motor de corriente continua. El Capítulo 8 establece las conclusiones resumiendo las principales aportaciones de la tesis. También introduce los posibles trabajos futuros.

Al final del documento se incluye un Apéndice con la producción científica que este trabajo ha originado, el Glosario de la simbología utilizada y las Referencias Bibliográficas.

CAPÍTULO 2

REVISIÓN DE QFT

Resumen

La teoría de realimentación cuantitativa presentada por Horowitz en 1959 ha resultado ser una potente metodología de diseño de controladores de realimentación en sistemas con incertidumbre. Su fundamento es el empleo de la realimentación sólo en su justa medida y ante la presencia de algún tipo de incertidumbre. Desde 1959 han sido múltiples las contribuciones científicas sobre la metodología de diseño QFT, y sobre la generalización de su uso desde los sistemas más simples, lineales, invariantes y mono-variables, a los más complejos, no lineales y con múltiples variables. Todo ello, avalado con una gran variedad de aplicaciones prácticas resueltas con QFT. Este capítulo resume las principales aportaciones hasta el momento sobre las materias mencionadas, así como un ejemplo de diseño que introduce al lector en el empleo de QFT.

Contenidos

2	Revisión de QFT	9
2.1	Presentación.....	11
2.2	Justificación de QFT.....	12
2.2.1	Porqué la Realimentación.....	13
2.2.2	Realimentación Cuantitativa	15
2.2.3	Dos Grados de Libertad en el Diseño	18
2.3	Metodología QFT	19
2.3.1	Las Especificaciones	21
2.3.2	La Incertidumbre. Plantillas	28
2.3.3	Los Contornos	32
2.3.4	La Síntesis del Controlador.....	39
2.3.5	El Diseño del Pre-filtro	43
2.3.6	La Validacion de los Diseños.....	44
2.4	Versatilidad y Breve Historia de QFT	45
2.5	Algunas Aplicaciones Prácticas.....	47
2.6	Ventajas de QFT.....	47
2.7	Principales Puntos de Partida de la Tesis.....	48
2.7.1	Horowitz (1973).....	48
2.7.2	Horowitz (1979).....	50
2.7.3	Chait y Yaniv (1993).....	53
	Índice de Figuras.....	55

2 REVISIÓN DE QFT

2.1 PRESENTACIÓN

Un ingeniero, y en particular un ingeniero de control, ante cualquier problema que requiera su intervención ha de ser riguroso en los planteamientos, sobrio en los medios empleados, eficaz en los resultados, resolviendo los problemas planteados evitando crearlos donde no los haya. Con este mismo planteamiento justificó I. M. Horowitz en el comienzo de los años sesenta su revolucionaria técnica de control conocida como *Quantitative Feedback Theory*, Teoría de Realimentación Cuantitativa, o comúnmente denominada QFT (Horowitz, 1959, 1963). Con QFT aparece un conjunto, en rápido crecimiento, de técnicas de diseño para satisfacer las especificaciones de comportamiento y estabilidad deseadas sobre un sistema, a pesar de la incertidumbre inherente a éste y a las perturbaciones que lo afectan. Desde 1972, QFT ha sido extendida a sistemas SISO y MIMO, lineales y no lineales, variantes e invariantes en el tiempo, con realimentación de la salida o de las variables internas, para plantas de parámetros concentrados o distribuidos.

La validez, al menos en sentido práctico, de otras muchas escuelas de control era puesta en entredicho por QFT sin más que incidir sobre lo que Bode había ya postulado años antes (Bode, 1945). Sin embargo, aceptadas las teorías de Bode, no ocurrió lo mismo con la QFT de Horowitz, que fue y aún sigue siendo duramente criticada por la ‘teoría moderna de control’ (Doyle, 1986). Rebatidos sus infundados argumentos de crítica en Yaniv y Horowitz (1987), desde los años setenta (Horowitz y Sidi, 1972; Horowitz, 1973) QFT ha estado consolidando un puesto de cada vez mayor relevancia en el mundo de la ingeniería de control. En este capítulo se argumentarán las razones fundamentales de su éxito y las principales aportaciones científicas en éste campo hasta el momento.

La Sección 2.1 expone los fundamentos de QFT. La Sección 2.2, repasando la metodología de diseño con QFT para un sistema en el dominio continuo, de simple-entrada/simple-salida (SISO), lineal e invariante en el tiempo (LTI), revisa las principales aportaciones científicas en cada uno de los pasos de diseño. La Sección 2.3 comenta la versatilidad de QFT para cualquier otro tipo de sistema. Algunas aplicaciones prácticas se revisan en la Sección 2.4, y finalmente la Sección 2.5 resume las ventajas de QFT.

2.2 JUSTIFICACIÓN DE QFT

Una cuestión básica en control es ¿por qué y cuándo es necesaria la realimentación?. Sólo cuando el problema físico real lo requiera debe ser ésta empleada, como se justifica en la Sección 2.1.1. De hecho, muchos procesos pueden ser gobernados con un 'control en lazo abierto', o en particular con un 'control prealimentado', mucho más simples y con menos 'riesgos' que una estructura con realimentación, aunque también más limitados.

Allí donde el empleo de la realimentación este justificado, deben también tenerse en cuenta sus 'riesgos'. Toda intervención sobre un proceso en busca de unos objetivos, ineludiblemente implica el sacrificar otros, lo que en términos de control se expone en la Sección 2.2.2. Esta idea ya analizada por Bode en (1945) como el 'coste de la realimentación', fue adoptada por Horowitz en un sentido mucho más amplio. El inventor de QFT aseveró que cualquier técnica de control debería 'cuantificar' los distintos factores que intervienen, con el fin de decidir sobre su importancia relativa en una situación particular.

El resultado final es una técnica que emplea la **realimentación** en términos **cuantitativos**, lo que dio nombre a QFT. Otra idea novedosa planteada en QFT es la distinción entre sistemas de uno y dos grados de libertad en el diseño, que se denominarán **1-DOF** y **2-DOF**, respectivamente, en adelante. La necesidad de cumplir diversas especificaciones de control, puede requerir el empleo de los últimos siendo insuficientes las estructuras 'clásicas' 1-DOF como se demostrará en la Sección 2.2.3.

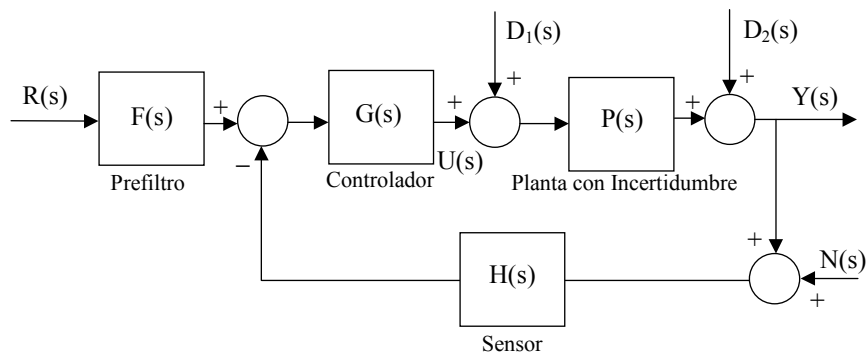


Figura 2—1: Estructura genérica de control realimentado

Una estructura genérica de control realimentado aparece en la Figura 2—1. $P(s)$ representa el modelo de la planta, que contiene algún tipo de incertidumbre, $P \in \wp = \{P\}$. $D_1(s)$ y $D_2(s)$ en el dominio de Laplace, o $d_1(t)$ y

$d_2(t)$ en el dominio temporal, representan perturbaciones no deseadas a la entrada y a la salida de la planta, respectivamente. En general las perturbaciones son a priori desconocidas dentro de un cierto rango, $D_{12} \in \mathcal{D}$, no siendo variables medibles. El objetivo de un sistema de control será lograr que la variable salida $Y(s)$ se comporte del modo deseado manipulando la entrada a la planta $U(s)$. Un problema de regulación requiere el ajuste de U para contrarrestar el efecto de D_{12} en la salida. El problema del servomecanismo se basa en manipular U para mantener la salida tan próxima como sea posible a una entrada de referencia dada R . Se demostrará en la Sección 2.2.1 que para conseguir estos objetivos y sólo en presencia de incertidumbre ($P \in \mathcal{P}$ y $D_{12} \in \mathcal{D}$) es necesaria la realimentación.

Una estructura de realimentación se fundamenta en la medida de la salida real $Y(s)$, lo que requiere un sensor representado por la función de transferencia $H(s)$. Dicha medida inevitablemente llevará acoplada una señal de ruido $N(s)$; se considera que $n(t)$ no está correlacionado con $y(t)$. La introducción de ruidos con la señal de realimentación susceptibles de ser amplificados (conduciendo incluso a la desestabilización del sistema) es uno de los precios pagados por la realimentación.

Entonces, el beneficio de la realimentación será el adecuado rechazo de perturbaciones y/o seguimiento de señales preservando la estabilidad, y todo en presencia de incertidumbres. Pero dicha realimentación aumentará el ancho de banda del sistema respecto al lazo abierto, ‘coste de realimentación’ que puede ser pagado muy caro si no se toman las precauciones oportunas. Un ancho de banda excesivo puede amplificar enormemente perturbaciones insignificantes y ruidos, los cuales saturando los actuadores impedirán que éstos respondan a las necesidades primarias de control, e incluso pueden llegar a desestabilizar el sistema. Estos factores se analizan en la Sección 2.2.2.

Los elementos de diseño para gobernar el proceso adecuadamente son: únicamente el controlador $G(s)$ (cuando se trata de un control 1-DOF) y, genéricamente, cuando se requieran dos grados de libertad (2-DOF) se añadirá además el prefiltro $F(s)$. En la Sección 2.2.3 se demostrará que la estructura 2-DOF es necesaria para hacer frente simultáneamente a un problema regulador (rechazo de D) y uno de tipo servo (seguimiento de R). Si las dos entradas de perturbación, $d_1(t)$ y $d_2(t)$ fueran medibles, entonces hablaríamos de una estructura 4-DOF.

2.2.1 PORQUÉ LA REALIMENTACIÓN

Los dos tipos de perturbación en la Figura 2—1, en la salida (D_2) y en entrada (D_1) de la planta, pueden reducirse a un único tipo de perturbación

$D(s)$ como indica la Figura 2—2, con el fin de simplificar las ecuaciones de comportamiento del sistema. Se añade la función de transferencia $P_d(s)$. Cuando D exprese una perturbación en la entrada del proceso (equivalente a D_1), entonces $P_d=P$. Y cuando D introduzca una perturbación en la salida de la planta (tipo D_2), entonces $P_d=1$. P_d combinará ambos modos anteriores si existen perturbaciones en la entrada y en la salida (tipo D_1 y D_2).

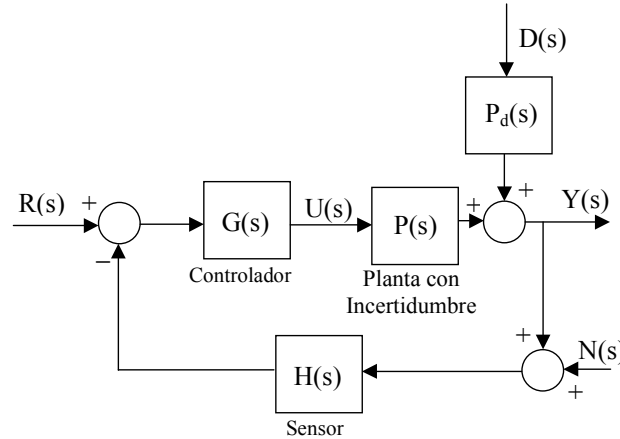


Figura 2—2: Estructura de control realimentado con perturbaciones reducidas a la salida

Ahora el comportamiento del sistema de partida (sin realimentación) responde a:

$$Y = P \cdot U + P_d D \quad (2.1)$$

El objetivo es obtener la salida deseada $Y=R$, lo cual puede conseguirse con un controlador,

$$G(s) = P^{-1}(s) \quad (2.2)$$

y una estructura de control prealimentado (o *feedforward*), tal que la entrada de control resulte:

$$U = G \cdot (R - P_d D) \quad (2.3)$$

Sustituyendo (2.3) en (2.1), puede comprobarse como en la salida se obtiene el valor deseado, $Y=R$. Este modo de operación no utiliza la salida medida del sistema, $Y+N$, y por tanto, no es un control realimentado sino en lazo abierto. Sin embargo, el control prealimentado tiene un uso limitado, necesiándose la realimentación cuando:

- Existe incertidumbre en el sistema, representada por la familia de plantas $\wp=\{P\}$, ya que entonces no se podría construir el controlador $G(s)$ según (2.2).

- El conjunto de perturbaciones, a priori no medibles, son desconocidas o parcialmente conocidas, es decir, son miembros de un conjunto que se expresará como $D=\{D\}$. En tal caso no sería posible construir el lazo de prealimentación y la ley de control (2.3) no se podría obtener.

Incluso aunque P y D sean conocidas con exactitud:

- Si P es inestable, porque plantas inestables sólo pueden ser estabilizadas mediante la realimentación; ver Skogestad y Postlethwite (1996).
- Si P contiene retardos puros, ya que $G=P^{-1}$ implica una predicción, es decir, U no es causal.

Aunque el control prealimentado podría llevarse a cabo, en los casos siguientes supone ciertas dificultades que lo hacen inapropiado:

- Si P contiene ceros en el semiplano derecho (P es de fase no mínima), y entonces, el controlador $G=P^{-1}$ resulta inestable.
- Si P contiene más polos que ceros, ya que $G=P^{-1}$ es irrealizable físicamente. (Todo sistema físico es estrictamente propio, más polos que ceros).
- Si $|P^{-1}P_d|$ o $|P^{-1}R|$ son elevadas, pues U probablemente excederá el valor máximo físicamente permitido por los actuadores.

Recurriendo a una estructura de realimentación estas dificultades pueden superarse, aunque no sin asumir ciertos ‘riesgos’ o limitaciones que se estudian en la siguiente sección.

2.2.2 REALIMENTACIÓN CUANTITATIVA

Se supondrá por motivos de simplicidad para el estudio básico de las ventajas e inconvenientes de la realimentación: (a) $F=1$, es decir una estructura 1-DOF; (b) realimentación unitaria $H=1$, (c) todas las perturbaciones reducidas a la salida $\{D_1, D_2\} \rightarrow D$, a través de P_d .

El comportamiento en lazo cerrado del esquema de la Figura 2—2 puede expresarse a través de sus variables salida, Y , ley de control, U , y error¹ $E=Y-R$, como:

$$Y = \frac{P_d}{1+G \cdot P} \cdot D + \frac{G \cdot P}{1+G \cdot P} \cdot R - \frac{G \cdot P}{1+G \cdot P} N \quad (2.4)$$

$$U = \frac{G}{1+P \cdot G} \cdot R - \frac{P_d \cdot G}{1+P \cdot G} \cdot D - \frac{G}{1+P \cdot G} \cdot N \quad (2.5)$$

¹ Nótese que el error no se define como la entrada al controlador $R-(Y+N)$, es decir no es función de la salida medida $Y+N$, sino de la salida real Y , y por tanto, se define como $Y-R$.

$$E = \frac{P_d}{1+G \cdot P} \cdot D - \frac{1}{1+G \cdot P} \cdot R - \frac{G \cdot P}{1+G \cdot P} N \quad (2.6)$$

Resulta habitual en la terminología de control el empleo de las funciones sensibilidad, S , y sensibilidad complementaria, T . Definiendo la función de transferencia de lazo abierto $L=GP$, la sensibilidad del lazo de realimentación (es decir, excluyendo el prefiltro) se expresa como:

$$S = \frac{\partial T / T}{\partial P / P} = \frac{1}{1+L} \quad (2.7)$$

Y la sensibilidad complementaria se define:

$$T = L \cdot (1+L)^{-1} \quad (2.8)$$

Cumpléndose que:

$$S + T = 1 \quad (2.9)$$

Según la relación biunívoca (Bode, 1945) entre la fase y la magnitud de la representación frecuencial de un sistema (tomando las debidas precauciones en sistemas de fase no mínima) los objetivos de control se reducen a modelar $|S|$ y/o $|T|$. O equivalentemente la función $|L|$.

De acuerdo a las ecuaciones (2.4) y (2.6) idealmente se requiere una $|S|$ lo bastante pequeña (o $|T| \approx 1$) para obtener los beneficios de la realimentación: pequeño error (E) en (2.6) frente a perturbaciones (D) y señales de referencia (R). Esto a su vez implica que $|L|$ debe ser grande. Pero al mismo tiempo en (2.6), para evitar que el ruido (N) se transmita a la salida se necesita que $|T| \approx 0$ (o $|S| \approx 1$ o $|L| \approx 0$). Estos dos objetivos contrapuestos necesitan de un primer compromiso entre especificaciones, lo que sugiere una consideración ‘cuantitativa’ de los distintos requisitos de control. Este primer problema suele resolverse con un ‘compromiso’ frecuencial entre las especificaciones: en bajas y medias frecuencias una $|L|$ grande aporta las necesidades requeridas por la realimentación, sin temor a que los ruidos, señales de alta frecuencia, se transmitan a la salida. Paralelamente, en altas frecuencias donde dominan los modos de alto orden ni siquiera modelados no tiene sentido pretender controlar el sistema, por lo que una $|L|$ muy pequeña evita la amplificación de ruidos. Otra solución, es el filtrado de estos últimos por elementos físicos ajenos al controlador.

De cualquier modo, el compromiso de mayor ‘riesgo’ en el control realimentado es el debido al esfuerzo de control en (2.5), que en Horowitz (1963) se denominó como el ‘coste de la realimentación’. No basta con que $|L|$ sea pequeño en altas o incluso en medias frecuencias, y además según Bode (1945) la máxima pendiente de decremento de $|L|$ está limitada por problemas de estabilidad. Entonces, el mayor peligro existe en frecuencias

intermedias donde, aún siendo $|L| \ll 1$, se tiene $|L| > |P|$, es decir, en la zona donde se incrementa el ancho de banda entre $|P|$ y $|L|$ debido al controlador de realimentación $|G|$ (Horowitz, 1973, 1991). Cuanto mayor sea el rango de frecuencias donde $|L/P| > 1$ mayor es el pico de la función $|L/P|$ que de acuerdo con (2.5) equivale a picos de $|U/R|$, $|U/D|$ y $|U/N|$. Estos picos también aparecen cuando se trabaja con la función $|S|$ como así lo afirma la Integral de Bode de Sensibilidad y la Integral de Sensibilidad Ponderada (Skogestad y Postlethwaite, 1996; Capítulo 5), por lo que se deben considerar especificaciones que limiten su máximo en medias-altas frecuencias (Horowitz y Sidi, 1978). La limitación del pico debido a $|R|$ en la zona de exceso de ancho de banda suele conseguirse con el mismo prefiltro, F (Horowitz y Sidi, 1978). Pero una limitación de $|L/P|$ suficiente para D en medias y altas frecuencias, no suele serlo para N cuando el exceso de ancho de banda es grande. Entonces, el ruido de naturaleza estocástica saturará tanto G como P , impidiendo que las señales útiles de control para R y D se apliquen. Y este es el principal precio pagado por la realimentación, por el que $|L|$ debe decrecer lo más rápidamente posible (Horowitz y Sidi, 1972) sin violar la pendiente límite de estabilidad (Bode, 1945).

Los diseños de compromiso se agravan aún más cuando el sistema es de fase no mínima con retardos o muestreado, por el adelanto de fase que éstos suponen, limitando aún más el ancho de banda de $|L|$ o la zona en la que $|S| \ll 1$ y $|L| \gg 1$. Los compromisos de diseño en este tipo de sistemas se estudian en Horowitz y Sidi (1978), Horowitz (1983), Horowitz y Liao (1984, 1986). Lo mismo ocurre con los sistemas inestables en lazo abierto. Éstos requieren una $|L|$ muy elevada para estabilizar el sistema por lo que en contrapartida presentan anchos de banda especialmente grandes o picos de sensibilidad (o de $|L/P|$) muy elevados. Los compromisos de diseño en todos estos tipos de sistemas se estudian genéricamente en Middleton (1991) y Skogestad y Postlethwaite (1996).

En las frecuencias donde se elige $|L|$ suficientemente grande, la dinámica de rechazo de perturbaciones D y de seguimiento de señales R tampoco es la misma, por lo que se necesita de algún control más además de G (véase Sección 2.2.3).

Además, conforme aumenta la incertidumbre inherente al sistema, $\{P\}$, y a las perturbaciones $\{D\}$, se necesita una mayor $|L|$ en bajas y medias frecuencias. Y como la pendiente de decremento de $|L|$ estaba limitada por problemas de estabilidad, el ancho de banda de $|L|$ aumenta, con los consiguientes riesgos derivados de un mayor ‘coste de realimentación’.

Todo esto pone de manifiesto la necesidad de cuantificar los distintos objetivos de control e incertidumbre. De esta manera, se puedan adoptar soluciones de compromiso, si es posible, que satisfagan en una medida

cuantificada todas las especificaciones, o al menos cuantificar los riesgos de aquellas que sean sacrificadas en favor de otras. El dominio frecuencial resulta más transparente que el temporal o el de Laplace, para llevar a cabo estas tareas (Horowitz, 1991).

Aunque las especificaciones robustas corresponden al sistema en lazo cerrado, en QFT se transformarán en especificaciones para la función $|L|$ en la etapa de diseño. Las ventajas de trabajar con $|L|$ en lugar de la función $|S|$, es que la primera es mucho más sensible a un mayor coste de realimentación (mayor pico de $|L/P|$), como se demuestra en Horowitz (1991). Además, en la síntesis de L puede observarse directamente la complejidad del controlador que se va diseñando. Sin embargo, esto no resulta tan evidente en S por lo que las técnicas de diseño basadas en esta función en ocasiones producen resultados un tanto impracticables. Así mismo, el diseño con la función T tampoco resulta adecuado. Mientras que el ancho de banda de $|L|$ y $|S|$ son buenos indicadores del comportamiento en lazo cerrado² el ancho de banda de $|T|$ puede resultar confuso. Para cumplir con el requisito de que $T \approx 1$ para un buen comportamiento en las frecuencias de interés en la realimentación, no basta con satisfacer que $|T| \approx 1$, sino que también hay que considerar la fase. Sin embargo, el requisito de $S \approx 0$ para un buen desempeño dinámico es equivalente a $|S| \approx 0$, independientemente de la fase. Un ejemplo ilustrativo puede encontrarse en Skogestad y Postlethwaite (1996, Cap.2).

En resumen, el objetivo del controlador $G(s)$, es satisfacer las especificaciones de comportamiento frente a $D(s)$ y $R(s)$, considerando la incertidumbre de la planta $P \in \mathcal{P}$, y de las perturbaciones $D \in \mathcal{D}$, sin solicitar un elevado esfuerzo de control $U(s)$ a los actuadores. La solución simplista de diseñar una $|L|$ elevada en las frecuencias inferiores a las de cruce, mientras que $|L|$ debe ser lo suficientemente pequeño en altas frecuencias, no siempre es factible en la práctica, mejorándose la calidad de los resultados cuando se utiliza una técnica cuantitativa.

2.2.3 DOS GRADOS DE LIBERTAD EN EL DISEÑO

Considérese el error definido en (2.6), donde se asumió $H=1$ y $F=1$, y supóngase nulo el ruido introducido en la medida ($N=0$), con lo que la ecuación (2.6) se resume como:

$$E = \frac{1}{1 + G \cdot P} \cdot (P_d D - R) \quad (2.10)$$

² Al menos en cuanto a las ventajas de la realimentación, ya que en cuanto a los riesgos ya se argumentó que $|L|$ resulta más adecuado.

En (2.10) puede apreciarse que G tiene el mismo efecto sobre ambos objetivos, salvando el signo. Por ello, para eliminar el error producido por perturbaciones y por el seguimiento de referencias, se diseñará un G lo suficientemente grande, como se comentó en la anterior sección. Sin embargo, ¿qué dinámica es la más apropiada para G ? o ¿cómo de grande debe ser la ganancia de G ? Nótese que la naturaleza de ambas entradas es completamente diferente, una de ellas se trata de una perturbación, a priori desconocida, o predecible en un cierto rango de incertidumbre, y la otra se trata de una señal de referencia totalmente definida y sin incertidumbre. Luego, si ambas entradas son y se comportan de manera diferente, el controlador G tan sólo podrá diseñarse para cumplir uno de los dos objetivos. Entonces, en sistemas donde coexistan perturbaciones y señales de referencia, y ambas requieran una dinámica de tratamiento específica, no es posible utilizar una estructura de un solo grado de libertad. Para una estructura 2-DOF donde $F \neq 1$, se puede desacoplar el gobierno de ambos objetivos transformándose la ecuación (2.10) en:

$$E = \frac{1}{1+G \cdot P} \cdot P_d D + \left(\frac{F \cdot G \cdot P}{1+G \cdot P} - 1 \right) \cdot R \quad (2.11)$$

Nótese que en (2.11) siguen apareciendo los dos términos presentes en (2.10). En ellos G afecta exclusivamente a la función sensibilidad S , definida en (2.7). Luego el diseño de G debe reducir la sensibilidad del sistema en lazo cerrado FT , frente a las incertidumbres, tanto de las perturbaciones como del error de modelado (que también afecta al seguimiento de R). El grado de libertad extra es aportado por F en el término $(F-1)L/(1+L)$, que modela las referencias para mejorar el comportamiento en el seguimiento de éstas, o dicho de otro modo modelando T .

2.3 METODOLOGÍA QFT

En esta sección se describe la metodología de diseño con QFT para sistemas continuos, lineales, invariantes en el tiempo, de fase mínima y de simple-entrada/simple-salida, ilustrándose a través de un ejemplo. Se incluyen también las principales aportaciones científicas en cada uno de los pasos de diseño, así como aquellos campos donde QFT queda abierta a cualquier innovación. Algunos de ellos son el punto de partida del presente trabajo.

Información más exhaustiva sobre el empleo de la técnica puede encontrarse en Horowitz (1991), Horowitz (1992), Houpis *et al.* (1994), D'Azzo y Houpis (1995), Houpis y Rasmussen (1999), Yaniv (1999b). En el Capítulo 3 del presente documento se profundizará en aquellas

particularidades de la técnica QFT que constituyen la base de posteriores estudios.

Existen varias herramientas software que ayudan en el diseño con QFT, entre ellas cabe citar: la *Toolbox* de QFT para Matlab (Borghesani *et al.*, 1994), la *Toolbox* Qsyn para uso con Matlab (Gutman, 1996) y el Software QFT de las Fuerzas Aéreas de USA (Houpis y Sating, 1997).

* * *

La Figura 2—1 esquematizaba un esquema genérico de control realimentado 2-DOF (de 2 grados de libertad) necesario en el gobierno estable de sistemas con incertidumbre para asegurar comportamientos adecuados en el seguimiento de señales, $R(s)$, y en el rechazo de perturbaciones, $D_1(s)$ y/o $D_2(s)$. $P(s)$ representa la planta perteneciente a una familia \mathcal{P} (sistema con incertidumbre). La incertidumbre puede ser estructurada, no estructurada o mixta. Un diseño QFT se realiza en dos etapas, en la primera se sintoniza el controlador, $G(s)$, que reduce la variación de la planta en lazo cerrado debida la incertidumbre en el modelo (lazo abierto) y las entradas de perturbación. Reducida dicha sensibilidad en lazo cerrado, el pre-filtro $F(s)$ se diseña en una segunda etapa para asegurar el comportamiento exacto en cada frecuencia en el seguimiento de señales de referencia.

El proceso de diseño con QFT para llevar a cabo estos objetivos se compone de los siguientes pasos:

1. Definición de las **especificaciones** de estabilidad y comportamiento robustas en lazo cerrado deseadas. Se trasladarán al dominio frecuencial.
2. Determinación del **modelo** de la planta con incertidumbre (familia de plantas), LTI, SISO, fase mínima y con incertidumbre paramétrica, como el caso más sencillo. Evaluación de la familia de plantas en las frecuencias de interés. Para cada frecuencia se obtiene una representación fase[°]-magnitud[dB] de la planta con incertidumbre sobre el plano de Nichols (NC ó *Nichols Chart*), que se denomina **plantilla o template** ω_i , $\mathcal{S}P(\omega_i)$. En cada plantilla se selecciona una planta nominal, $P_0(j\omega_i)$.
3. La incertidumbre de la planta, implícita en las plantillas, y las especificaciones de lazo cerrado, se transforman en unas curvas de restricción, denominadas **contornos o bounds**, existiendo uno para cada frecuencia y cada tipo de especificación. Al igual que las especificaciones, habrá contornos de estabilidad robusta, $B_U(j\omega_i)$, y de comportamiento robusto: $B_R(j\omega_i)$ para el seguimiento de señales y $B_D(j\omega_i)$ para el rechazo de perturbaciones. Finalmente se determina en cada frecuencia, el contorno

intersección más desfavorable entre los que representan cada especificación, $B(j\omega)$.

4. Para cumplir las especificaciones robustas a pesar de la incertidumbre, la función de transferencia nominal de lazo abierto, $L_0(j\omega)$, debe satisfacer el contorno $B(j\omega)$ en cada frecuencia ω . Para ello, se añade a la planta nominal $P_0(j\omega)$ el controlador adecuado $G(j\omega)$, resultando $L_0(j\omega) = G(j\omega)P_0(j\omega)$. Este proceso se conoce como **síntesis o loop-shaping del controlador**.

5. **Diseño del pre-filtro**, $F(s)$, o segundo grado de libertad que permite desacoplar el comportamiento en el seguimiento de señales del desempeño en el rechazo de perturbaciones. Reducida la sensibilidad frente a incertidumbre con el controlador, el prefiltro permite modelar en cada frecuencia el comportamiento del lazo cerrado según la especificación robusta requerida en el seguimiento de señales.

6. **Validación** de los diseños en el dominio temporal, ya que éstos se han llevado a cabo en el dominio de la frecuencia.

A continuación se desarrollan cada una de estas etapas junto con un ejemplo ilustrativo. La exposición de las principales aportaciones científicas hasta el momento en cada uno de estos pasos, será el punto de partida del presente trabajo de investigación y de posibles trabajos futuros.

Como ejemplo se tomará un proceso P de simple-entrada / simple-salida (SISO), lineal y no variante en el tiempo (LTI). Su incertidumbre se expresa a través de un modelo con parámetros que dan lugar a la siguiente familia de plantas:

$$\mathcal{P} = \left\{ P(s) = \frac{k}{(s/a + 1)} : k \in [1, 10], a \in [1, 5] \right\} \quad (2.12)$$

2.3.1 LAS ESPECIFICACIONES

En la Sección 2.2.1 se argumentaba cómo el control de procesos con incertidumbre en el modelo y en las perturbaciones exigía una estructura realimentada. Y la Sección 2.2.2 añadía como la realimentación no es ‘gratuita’ sino que supone un ‘precio’ o coste. Dicho de otro modo, en la práctica no pueden satisfacerse simultáneamente todos los requisitos explícitos e implícitos en un control realimentado y esto conduce a soluciones de compromiso entre las especificaciones de diseño. Por ello, una formulación y resolución del problema en términos cuantitativos como la

presentada por QFT obtiene resultados tan eficientes. Los principales compromisos en el diseño se resumen a continuación.

- La sensibilidad $S=1/1+L$ de la salida de la planta a señales de referencia y a entradas de perturbación disminuye cuando L aumenta, y la sensibilidad complementaria T se aproxima a la unidad. Es decir, mejora el comportamiento en el seguimiento de señales y en el rechazo de perturbaciones.
- Si además el modelo del sistema contiene incertidumbres, cuando L aumenta se reduce la sensibilidad del sistema en lazo cerrado ΔT a variaciones en los parámetros en lazo abierto ΔP , permitiendo mejorar el comportamiento.
- Un desconocimiento mayor de las perturbaciones exige también mayor L para su rechazo.
- Cuando L aumenta, se incrementa también la respuesta de la entrada de la planta U , ante ruidos introducidos por el sensor N , ante entradas de perturbación D y ante entradas de referencia R . Un elevado esfuerzo de control U puede desestabilizar el sistema y/o saturar los actuadores de la planta, de modo que las especificaciones de comportamiento dinámico ante referencias o perturbaciones no pueden obtenerse. Este es el principal ‘coste de la realimentación’.
- El efecto del ruido en la medida N sobre la salida Y se incrementa cuando L aumenta.
- Si la planta tiene un retardo puro y/o es de fase no mínima (n.m.p.) y/o el controlador es digital, la amplitud del controlador $|G|=|L/P|$ tampoco puede aumentarse demasiado. Esto hace referencia al concepto de ‘estabilidad nominal’ en plantas estables, que requiere L pequeña.
- En términos de estabilidad robusta, esto es, cuando se considera la incertidumbre, el controlador debe ser lo bastante pequeño a partir de ciertas frecuencias, supuesta P estable.
- Debido al desconocimiento del comportamiento dinámico de la planta en altas frecuencias, la incertidumbre en el modelado en bajas y medias frecuencias, y/o las dinámicas complejas propias de altas frecuencias (por ejemplo, resonancias altamente subamortiguadas), L debe ser lo bastante pequeño.
- La estabilización de plantas P inestables, requiere L grandes.
- Controladores físicos han de ser estrictamente propios, de modo que $G \rightarrow 0$ ó $L \rightarrow 0$ en altas frecuencias.

- Controladores agresivos se traducen en respuestas rápidas y de gran amplitud por parte de los actuadores, lo que reduce el tiempo de vida de éstos y puede provocar importantes efectos en los alrededores.

Los beneficios de la realimentación (L grande en el rango de frecuencias deseado) siempre se incluyen explícitamente entre las especificaciones QFT. Sin embargo, los compromisos derivados de la realimentación (disminución de L lo más rápidamente posible para reducir el ancho de banda) no siempre se formulan explícitamente, sino que se consideran implícitos en la etapa de diseño. Pero, ¿qué ocurre si el coste de la realimentación se formula explícitamente?. El presente trabajo se centra precisamente en el estudio de los compromisos de control, de manera que se garantice la existencia de solución al problema planteado. Y si esta existe, que el controlador sea el más efectivo y simple posible.

A partir de las ecuaciones (2.4) a (2.6) se pueden establecer distintas relaciones o funciones de transferencia salida-entrada, como $|Y/R|$, $|E/D|$ o $|U/N|$, entre otras. Si sobre éstas se imponen unas tolerancias o modelos de comportamiento máximos y/o mínimos, δ , las desigualdades resultantes expresan la especificación robusta deseada en QFT. Tanto las tolerancias como las funciones de transferencia, es decir las desigualdades de especificación, se expresan en el dominio de la frecuencia. Esto simplifica enormemente la formulación y resolución del problema de control, al igual que ocurriría si se trabajara en el dominio de Laplace (por ejemplo, considerar cómo las integrales en t desaparecen en el dominio s y por tanto en $j\omega$); Horowitz (1991). También, de acuerdo a Horowitz y Sidi (1972) en sistemas de fase mínima resultará suficiente limitar los módulos de las funciones de transferencia salida/entrada. La magnitud especifica completamente la función de transferencia y también la respuesta temporal, en virtud de la relación biunívoca magnitud/fase demostrada por Bode. En el caso de sistemas de fase no mínima, restricciones adicionales teniendo en cuenta la curva de Bode de fase han de ser consideradas (Horowitz y Sidi, 1978) en la fase de síntesis sobre el diagrama de Nichols. Recientemente, Moreno *et al.* (2001) trata el diseño con QFT considerando las especificaciones en términos de la fase.

El ingeniero de control suele estar más familiarizado con las especificaciones y características de comportamiento en el dominio temporal, tratadas habitualmente en la bibliografía de control clásico (D'Azzo y Houpis, 1995; Dorf, 1998). Por ello, a menudo en QFT se definen en primer lugar especificaciones temporales que son trasladadas después al dominio frecuencial, (Horowitz y Sidi, 1972). Los métodos de transformación más usuales son la técnica basada en modelos (véase ejemplo) y la técnica en Krishnan y Cruickshanks (1977).

La evaluación final del comportamiento del sistema debe realizarse en el dominio temporal. Sin embargo, llevados a cabo los diseños QFT en la frecuencia, puede ocurrir que éstos no satisfagan las especificaciones temporales. Es decir, no existe una transformación biunívoca entre ambos dominios, temporal y frecuencial. Mientras que especificaciones de tipo sensibilidad o *tracking* en el dominio frecuencial son suficientes para satisfacer especificaciones temporales de la forma $a_m \leq y^{(m)} \leq b_m$, donde $y^{(m)}$ representa la derivada m -ésima de las salida de la planta (Horowitz y Sidi, 1978), en la práctica se deben adoptar soluciones de compromiso entre las especificaciones temporales y el ancho de banda del controlador. También es posible encontrar aplicaciones (en el dominio académico más que en el industrial o práctico) en las que se verifican todas las especificaciones frecuenciales y se incumplen las temporales (véase, por ejemplo, Nordgren *et al.*, 1994). Por ello, es necesaria una etapa de validación de resultados como se indica posteriormente.

Métodos de diseño QFT que trabajan directamente con especificaciones temporales pueden encontrarse en Horowitz (1992), y en Pritchard y Wigdorowitz (1997). Éstos últimos aportan un método para obtener, a partir de la función de transferencia en lazo cerrado con incertidumbre debido a la planta, las limitaciones temporales correspondientes.

QFT presenta ciertas ventajas respecto a otras técnicas de diseño frecuenciales ya que de una manera sencilla e intuitiva permite un rediseño allí donde aun cumpliéndose las especificaciones frecuenciales se violen las temporales. De cualquier modo, cualquier nueva aportación en este campo es bienvenida en QFT.

El modo o dominio de formulación de las especificaciones no es el objetivo del presente trabajo, por lo que se adoptará el procedimiento habitual de trabajo en QFT que hasta el momento ha resultado eminentemente práctico. Es decir, una vez definidas las especificaciones de estabilidad y comportamiento, en el dominio que más cómodo resulte al diseñador, se expresarán éstas en términos de frecuencia. Y como se describió anteriormente, las especificaciones se denotarán mediante desigualdades entre la relación salida/entrada a controlar y el modelo(s) o tolerancia de comportamiento deseado(s).

Un ejemplo

Sobre la planta en (2.12) se pretende: (i) preservar la estabilidad a pesar de las incertidumbres (estabilidad robusta), restricción que debe estar presente en cualquier control, y (ii) un comportamiento robusto adecuado en el seguimiento de señales de referencia. Ambas especificaciones se particularizan a continuación.

(i) **Estabilidad robusta.** En términos de QFT ésta se expresa como:

$$\left| \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| \leq \delta_U, \text{ para toda } P \in \mathcal{P}, \omega_{hU} \in [0, \infty] \quad (2.13)$$

siendo $L=G \cdot P$ y δ_U una tolerancia constante para todas las frecuencias. El controlador G será el responsable de adecuar la sensibilidad de lazo cerrado $|T'/F|$ debida a variaciones en $|P|$, a la tolerancia δ_U , en cada una de las frecuencias discretas ω_{hU} . La estabilidad debe garantizarse en el intervalo global de frecuencias de trabajo del sistema. Se discretizará el intervalo $[0, \omega_{hf}]$, con ω_{hf} a efectos prácticos un valor de frecuencia lo bastante grande para cada planta en particular.

El cumplimiento de la desigualdad (2.13) impone un máximo sobreimpulso en la respuesta temporal y frecuencial del sistema en lazo cerrado. Y esto equivale a imponer un valor mínimo en el coeficiente de amortiguamiento de los polos dominantes en lazo cerrado. Al mismo tiempo, garantiza unos márgenes de fase y ganancia mínimos para todas las plantas $P \in \mathcal{P}$, índices con los que el control clásico mide el grado de estabilidad de un sistema. Dichos márgenes pueden calcularse de forma simple a partir de la tolerancia δ_U como sigue (Chait y Yaniv, 1993):

$$MF \geq 180^\circ - \arccos\left(\frac{0.5}{\delta_U^2} - 1\right) \quad (2.14)$$

$$MG \geq 1 + \frac{1}{\delta_U} \quad (2.15)$$

Como criterio general de diseño para obtener una estabilidad relativa aceptable, Biernson (1988) aconseja unos márgenes mínimos de fase y ganancia de 45° y 1.77 (o 5dB), respectivamente. Aplicando (2.14) y (2.15) resulta un mínimo $\delta_U=1.3$ en términos de QFT, tolerancia que se adoptará para el ejemplo demostrativo.

(ii) **Seguimiento robusto de señales.** QFT expresa esta especificación con la doble desigualdad:

$$\delta_{RL}(\omega) \leq \left| \frac{F(j\omega) \cdot L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| \leq \delta_{RU}(\omega) \text{ para toda } P(s) \in \mathcal{P}, \omega_{hR} < \omega_{hR} \quad (2.16)$$

Se maneja una doble tolerancia variable con la frecuencia, $\delta_{RU}(\omega)$ que representa un modelo superior de comportamiento frente a señales de referencia y $\delta_{RL}(\omega)$ que especifica un modelo inferior. Entre ellos debe estar contenida la función de transferencia de lazo cerrado $|T'|=|FL/(1+L)|$ a pesar de la incertidumbre debida a $|P|$. Este objetivo se resuelve en dos etapas. Primero, el controlador $G(j\omega)$ disminuirá la sensibilidad de $|T'(j\omega)/F(j\omega)|$ a

variaciones en $|P(j\omega)|$, hasta incluirla en la tolerancia $\delta_{RU}(\omega)/\delta_{RL}(\omega)$. Debe tenerse en cuenta, que además de este objetivo, $G(j\omega)$ debe simultáneamente cumplir el objetivo en (2.13) referente a la estabilidad robusta, y tantas otras especificaciones más que pudieran plantearse. Como en el caso de existieran perturbaciones a tener en cuenta, resultaría imposible con sólo G modelar de manera independiente el comportamiento ante éstas, $\delta_D(\omega)$, y ante la señal de referencia (véanse (2.10) y (2.11) en Sección 2.2.3), se añade un grado de libertad más en el diseño, el prefiltro F . Diseñándose éste en una segunda etapa, con $|F(j\omega)|$ se aportará la ganancia necesaria en cada frecuencia para que se satisfaga completamente la doble desigualdad (2.16). Para llevar a cabo los diseños QFT mencionados se elegirá un vector discreto de frecuencias ω_{hR} en el intervalo de interés en el seguimiento de señales $[0, \omega_{hR}]$.

A menudo, los modelos frecuenciales $\delta_{RU}(\omega)$ y $\delta_{RL}(\omega)$ se determinan a partir de modelos temporales, en los que se manejan índices de comportamiento típicos ante entradas escalón. Por ejemplo, para el modelo superior temporal $T_{RU}(s)$ es adecuado elegir un comportamiento subamortiguado característico de un sistema de segundo orden. Para el modelo inferior $T_{RL}(s)$ se suele optar por una dinámica sobreamortiguada. Ambos se pueden definir a partir de índices tales como el máximo sobreimpulso M_p , el tiempo de pico t_p , el tiempo de establecimiento t_s , el tiempo de respuesta t_r y/o la ganancia estática K_m . A los modelos de comportamiento temporales de segundo orden conviene añadir un tercer polo en el modelo inferior y un cero en el superior, tal que no modifiquen la dinámica característica de segundo orden (D’Azzo y Houpis, 1995). Con ello, se pretende que sus curvas de ganancia frecuenciales se separen con la frecuencia, esto es $\delta_{RU}(\omega)/\delta_{RL}(\omega)$ se incremente indefinidamente a partir de una cierta frecuencia. Simplemente la variación aceptable, $\Delta|T|$, supera la variación real del proceso, $\Delta|P|$, no existiendo necesidad de realimentación en estas frecuencias (Horowitz y Sidi, 1972). En general, el incremento de $\delta_{RU}(\omega)/\delta_{RL}(\omega)$ con la frecuencia facilita la etapa de síntesis del controlador al garantizarse que los contornos o *bounds* representativos de esta especificación disminuyan en altura. El Capítulo 6 incluye una información más exhaustiva al respecto, o véase también Nordgren *et al.* (1994). Finalmente, los modelos temporales superior $T_{RU}(s)$ e inferior $T_{RL}(s)$ podrían expresarse como (D’Azzo y Houpis, 1995):

$$T_{RU}(s) = \frac{(\omega_n^2/a) \cdot (s+a)}{s^2 + 2\delta\omega_n \cdot s + \omega_n^2} \quad (2.17)$$

$$T_{RL}(s) = \frac{K}{(s-\sigma_1) \cdot (s-\sigma_2) \cdot (s-\sigma_3)} \quad (2.18)$$

Y para el ejemplo ilustrativo, si se desea $M_p=1.2$ y $t_s=2s$ para el modelo superior, y $t_s=2s$ para el modelo inferior, los modelos frecuenciales resultan:

$$\delta_{RU}(\omega) = |T_{RU}(j\omega)| = \left| \frac{0.66(j\omega + 30)}{(j\omega + 2 \pm j3.97)} \right| \quad (2.20)$$

$$\delta_{RL}(\omega) = |T_{RL}(j\omega)| = \left| \frac{8400}{(j\omega + 3)(j\omega + 4)(j\omega + 10)(j\omega + 70)} \right| \quad (2.19)$$

El comportamiento de los modelos anteriores en el dominio temporal se ilustra en la Figura 2—3 y su curva de Bode de magnitud (dominio frecuencial) en la Figura 2—4.

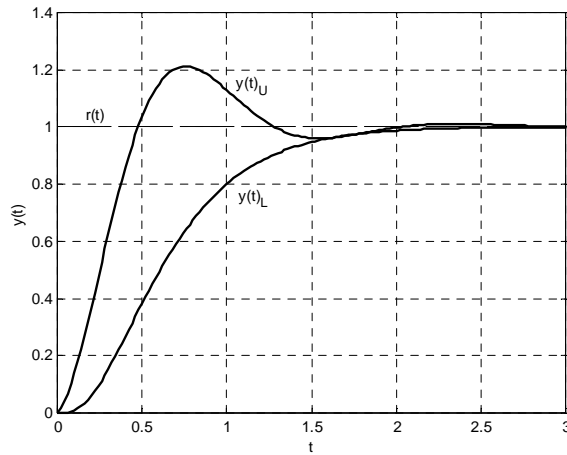


Figura 2—3: Respuesta temporal a escalón de T_{RU} en (2.19) y T_{RL} en (2.20)

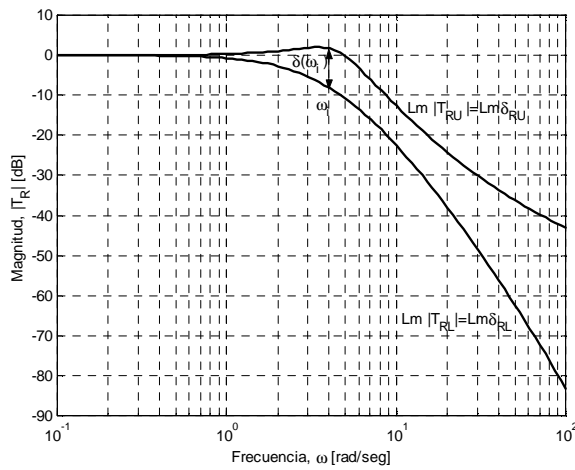


Figura 2—4: Curvas de Bode de magnitud de δ_{RU} en (2.19) y δ_{RL} en (2.20)

* * *

Además de las especificaciones de robustez descritas anteriormente, estabilidad y comportamiento frente al seguimiento de señales, QFT permite considerar otras muchas. Entre las más usuales cabe citar: el comportamiento en el rechazo de perturbaciones, el rechazo del ruido y el esfuerzo de control, en presencia de incertidumbres.

2.3.2 LA INCERTIDUMBRE. PLANTILLAS

La técnica QFT defiende la realimentación sólo en aquellos casos en que exista incertidumbre, como se justificó en la Sección 2.2.1. Existiendo ésta en mayor o menor medida en todo proceso real, QFT resultará eminentemente robusta en la práctica por incluir la incertidumbre en el diseño. Pero ¿qué se entiende por incertidumbre? y ¿cómo se expresa ésta en QFT?. Este apartado incluye algunas nociones básicas al respecto.

Incertidumbre y Robustez. Incertidumbre en el modelo.

El término de ‘robustez’ hace referencia a la insensibilidad del sistema controlado frente a las diferencias existentes entre el sistema real y el modelo de dicho sistema, siendo este último el realmente empleado en el diseño del controlador. Estas diferencias se conocen habitualmente como incertidumbre del modelo, desajustes modelo/planta o simplemente incertidumbre.

Sin embargo, la incertidumbre en el modelo no es el único factor a tener en cuenta cuando se habla de la robustez de un sistema. Otras consideraciones incluyen fallos en sensores y actuadores, restricciones físicas, cambios en los objetivos de control, apertura y cierre de lazos. También, los algoritmos numéricos diseñados pueden carecer de robustez, Las perturbaciones (que pueden incluir muchos de los conceptos anteriores) presentes en todo proceso industrial y que afectan a diferentes puntos de éste, también son desconocidas en un cierto margen. Y además, habitualmente no suelen ser medibles.

La incertidumbre en el modelo y la incertidumbre en las perturbaciones motivan la realimentación cuantitativa. La incertidumbre en las perturbaciones será tomada en cuenta convenientemente en las tolerancias de especificación al respecto. La incertidumbre en el modelo de la planta (o simplemente la incertidumbre de la planta) se tendrá en cuenta en el cumplimiento de todas las especificaciones, es decir en el diseño global. Por ello, en el presente trabajo, el término de robustez se refiere fundamentalmente a la incertidumbre del modelo, asumiéndose que el/los

elementos de control diseñados carecen de incertidumbre. La incertidumbre en el modelo puede tener diversos **orígenes**:

- Existencia de parámetros en el modelo lineal que son conocidos tan sólo de forma aproximada.
- Variaciones en los parámetros debido a no linealidades en el sistema físico real, o a cambios en las condiciones de operación.
- Imperfecciones en los elementos de medida.
- En alta frecuencia, incluso la estructura y el orden del modelo son desconocidos (llegándose en ciertas frecuencias al desconocimiento total del modelo).
- Aún conociéndose el modelo exacto, puede interesar trabajar con un modelo nominal simplificado (menor orden), y representar las dinámicas despreciadas en términos de incertidumbre.
- El controlador implementado puede diferir del obtenido en el proceso de síntesis (*loopshaping*). La incertidumbre incluida en el sistema en la fase de diseño, permitiría reducir el orden del controlador, así como salvar las imprecisiones en su implementación.

Todas las imprecisiones de modelado citadas se pueden incluir en tres clases

- **Incertidumbre paramétrica** (o estructurada), cuando la estructura del modelo (incluido el orden) son conocidos, pero algunos parámetros contienen incertidumbre.
- **Incertidumbre no paramétrica** (o no estructurada). Existe un error en el modelo debido a dinámicas no tenidas en cuenta, normalmente en altas frecuencias, bien deliberadamente o por desconocimiento del proceso físico. Cualquier modelado de un sistema real lleva implícita esta incertidumbre, aunque luego no sea tenida en cuenta explícitamente.
- **Incertidumbre mixta** que combina las dos anteriores.

Aunque inicialmente la técnica QFT podía manejar exclusivamente incertidumbre paramétrica³ (Horowitz y Sidi, 1972), aportaciones posteriores han permitido la inclusión de la incertidumbre no paramétrica o mixta, respondiendo a casos más realistas (Gutman *et al.*, 1989; Jayasuriya, 1993; Nordgren *et al.*, 1994; Glaría *et al.*, 1992; Chait *et al.*, 1995). Los resultados del presente trabajo pueden ser aplicados a cualquier tipo de incertidumbre. No obstante, por motivos de claridad en la demostración de resultados se emplearán modelos paramétricos con incertidumbre mucho más sencillos e

³ Originalmente, Horowitz no tuvo en cuenta la incertidumbre no paramétrica (normalmente presente en altas frecuencias) en la formulación del método, al menos explícitamente.

intuitivos. Las conclusiones se generalizan fácilmente a cualquier tipo de incertidumbre.

Incetidumbre frecuencial. Plantillas.

Una vez descrita la región de incertidumbre en el modelo continuo de la planta, se escoge un número finito de J puntos en el contorno de esta región, $P_r(s)$, $r=1, \dots, J$. Se elige también un conjunto discreto y finito de frecuencias de interés, $\{\omega_i\}$. A continuación, la plantilla o *template* ω_i se obtiene evaluando las J plantas del dominio en 's' en la frecuencia ω_i , obteniéndose $\{P_r(j\omega_i), r=1, \dots, J\}$ que se representa sobre el diagrama de Nichols (NC). Para el cálculo de las curvas de restricción (contornos o *bounds*), en el siguiente paso de diseño con QFT, basta considerar el contorno de las plantillas o *templates*; (Chait *et al.*, 1995 y Capítulos 4, 5 y 6). El proceso se repite para todas las frecuencias de interés, ω_i , $i=1, \dots, n$, obteniéndose sobre el NC un conjunto de n plantillas, $\{\mathcal{S}P(j\omega_i), i=1, \dots, n\}$. Las frecuencias de estudio ω_i se escogen de acuerdo con los intervalos de frecuencias propios de cada especificación y según las características intrínsecas de la planta. Considerando estas últimas, habitualmente se elige aquel rango de frecuencias para el que las plantillas cambian de forma; para altas y bajas frecuencias las plantillas adoptan un comportamiento asintótico y su forma es constante (véase la Sección 3.2.2 y también Horowitz y Sidi, 1972). La elección de las J plantas en el espacio de parámetros no es un problema trivial. Han de elegirse cuidadosamente de modo que en cada frecuencia éstas sigan representando el contorno real de la incertidumbre, ahora frecuencialmente, sobre el NC. Y además, el número de plantas discretas ha de ser el menor posible para mejorar la eficiencia computacional, sobre todo en el siguiente paso de diseño que calcula los contornos. El problema se agrava cuando la incertidumbre del sistema da lugar a plantillas no convexas o no conectadas. Aunque las plantillas convexas son las frecuentemente utilizadas en el mundo teórico, en la práctica los sistemas reales casi siempre responden a plantillas no convexas. El suponer un perfil convexo que circunscriba al no convexo simplifica el problema, pero es también bastante más conservador. En una primera aproximación la presente tesis trabaja con plantillas convexas que resultan mucho más intuitivas en la ilustración de resultados. En un segundo paso, las conclusiones se extrapolan a cualquier tipo de plantilla. Esto constituye una importante aportación sobre todo en el cálculo automático de contornos, pudiéndose obtener algunas mejoras. Hasta el momento la herramienta software QFT más extendida (Borghesani *et al.* 1994) trabaja del lado de la seguridad obteniendo los resultados equivalentes a plantillas convexas que circunscriben a las no convexas.

Para una información más exhaustiva referente al cálculo de las plantillas puede consultarse: Bailey y Hui (1989), Bartlett (1993), Lasky y Ravani

(1997), Chen y Ballance (1999), Nataraj y Sardar (2000). Estos dos últimos contienen abundantes referencias al respecto. Una herramienta CAD soportada en una sólida base teórica para la reducción del número de puntos de las plantillas puede encontrarse en García-Sanz y Vital (1999). Nordgren *et al.* (1994) presenta una nueva formulación de QFT que incorpora explícitamente la incertidumbre no paramétrica y elimina la necesidad de manejar plantillas.

Una planta arbitraria del conjunto de las J plantas (se corresponde con un valor fijo de parámetros) se selecciona como el caso nominal, obteniéndose n plantas nominales al calcular su respuesta frecuencial, $\{P_0(j\omega), i=1, \dots, n\}$. Cualquier planta seleccionada en el espacio de parámetros es igualmente válida (Jayasuriya, 1993), como se demostrará en el presente trabajo.

Un ejemplo

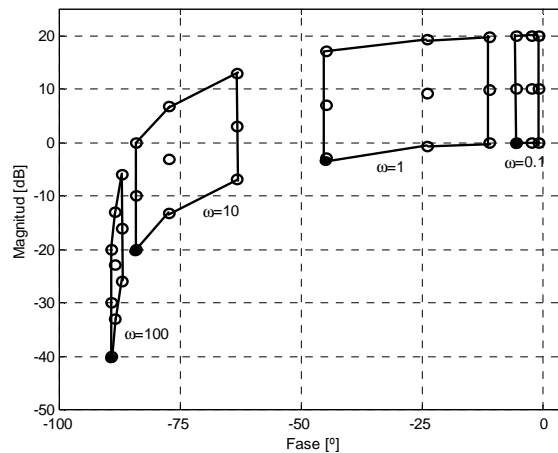


Figura 2—5: Plantillas y planta nominal

Para el modelo con incertidumbre en (2.12) se ha tomado un vector finito de frecuencias $\omega_i^*=[0.1, 1, 10, 100]$. La Figura 2—5 muestra las $N=4$ plantillas para cada ω_i^* . Las $J+1=9$ plantas de cada plantilla ω_i (marcadas ‘o’ en la figura) se obtuvieron combinando cada valor discreto de k con un valor discreto de a . La discretización del espacio de parámetros $k \in [1, 10]$ y $a \in [1, 5]$ fue de 3 puntos logarítmicamente espaciados. Las $J=8$ plantas que definen el perfil de cada plantilla (línea continua) excluyen la combinación de los valores intermedios de k^* y a^* . Sin embargo, esto no implica que los valores internos de los intervalos de incertidumbre den siempre puntos interiores al perfil. Como ejemplo sencillo puede considerarse un polo de segundo orden con incertidumbre en la frecuencia natural y el amortiguamiento. Ejemplos no tan evidentes y que pueden dar lugar a simplificaciones erróneas pueden

encontrarse en García-Sanz y Vital (1999). Como planta nominal (representada ‘•’) se eligió $k^*=1$ y $a^*=1$.

2.3.3 LOS CONTORNOS

En este apartado se incluyen algunas nociones básicas sobre los contornos y las principales aportaciones científicas hasta el momento en este campo. También se incluye un ejemplo ilustrativo.

¿Qué son los contornos QFT?

La incertidumbre, expresada ahora en el dominio de la frecuencia a través de las plantillas de $P(j\omega)$ sobre el NC, y las especificaciones de lazo cerrado, también frecuenciales, se transforman en unas curvas de restricción o *bounds* para la función de transferencia de lazo abierto nominal, $L_0(j\omega)=G(j\omega)P_0(j\omega)$. Las plantillas de la función de transferencia de lazo abierto $L(j\omega)=G(j\omega)P(j\omega)$, que denominaremos $\mathfrak{S}L$, son las mismas que las calculadas para la planta $P(j\omega)$, $\mathfrak{S}P$, trasladadas horizontal y verticalmente en cada frecuencia el valor en fase y magnitud introducido por el controlador $G(j\omega)$, que no contiene incertidumbre.

Existirá un contorno específico para cada especificación y para cada frecuencia ω . Si se desean cumplir simultáneamente para cada frecuencia el conjunto de especificaciones, la intersección resultante de contornos en dicha frecuencia, debe ser satisfecha por la función de transferencia en lazo abierto también a esa frecuencia, $L_0(j\omega)$. Para ello, el controlador aportará a la planta nominal la ganancia y fase necesarias, $L_0(j\omega)=G(j\omega)P_0(j\omega)$. Si esto se cumple para el conjunto de frecuencias de interés el problema de control queda resuelto con QFT.

Por tanto, los contornos QFT son el punto clave en la solución al problema de control, y su estudio constituye el eje central del presente trabajo de investigación. Se pretenderá predecir a partir de los contornos si las especificaciones, dada la propia naturaleza del sistema (incluida la incertidumbre), son alcanzables por un controlador G lo suficientemente sencillo. A partir de aquí, se derivan otros múltiples objetivos, como ¿cuál es el comportamiento más agresivo exigible al sistema?, o ¿cómo modificar la incertidumbre y al mismo tiempo cumplir unas especificaciones prefijadas?. Todo ello, necesita resolver una única cuestión: el conocimiento más exhaustivo posible de los contornos QFT.

Breve historia sobre los contornos en QFT

Desde los comienzos de la técnica QFT se eligió trabajar con la función L_0 en lugar de con la función sensibilidad $S_0=1/1+L_0$, como ocurre en otras

técnicas de control robusto (como H_∞). La razón más importante es que S resulta mucho más insensible que L a un mayor 'coste de realimentación' (Horowitz, 1991). Este coste, como afirmó Bode (1945), el pionero de la teoría de realimentación, se traduce en un aumento del ancho de banda, el cual implica la amplificación de ruidos (ver Capítulo 6). Otra razón para el uso de L , argumentada también en Horowitz (1991), es la necesidad en todo diseño práctico de que $G(s)$ tenga el exceso óptimo de polos sobre ceros, e_g , para que sea físicamente realizable ($e_g > 0$) y a la vez economizar en el orden del controlador (mínimo e_g). Estos criterios pueden tenerse en cuenta fácilmente cuando se diseña sobre $L_0 = GP$, no resultando tan obvios cuando se trabaja con S_0 , como demuestran muchos de los diseños impracticables a los que se llega en estos casos. Por ello, en QFT se traducen especificaciones e incertidumbres en unas curvas de restricción para L_0 sobre el diagrama de Nichols, que constituyen los contornos QFT.

Tradicionalmente, los contornos se trazaban manualmente a partir de las plantillas sobre el diagrama de Nichols (D'azzo y Houpis, 1995). Ante la necesidad de reducir el gran esfuerzo requerido en el procedimiento gráfico, han surgido diferentes algoritmos de cálculo automático de los contornos.

Los primeros algoritmos de generación de contornos usaban técnicas geométricas y/o técnicas de búsqueda basadas en herramientas CAD (*Computer Aided Design*). Por ejemplo, Longdon y East (1978) y Thompson y Nowokah (1989) usan una aproximación poligonal de la plantilla para simplificar el cálculo computacional, mientras que Jayasuriya (1990) utiliza la interpretación geométrica de las especificaciones de lazo cerrado. En Wang *et al.* (1991) se introducen las inecuaciones cuadráticas en el cálculo de los contornos que representan especificaciones de lazo cerrado, incluyéndose márgenes de ganancia y fase, y funciones de sensibilidad y de sensibilidad complementaria. Otros trabajos aparecen en Bailey *et al.* (1988), East (1981), Houpis y Lamont (1988), Yaniv (1990), Nataraj (1994). Sin embargo, todos estos algoritmos normalmente son lentos.

Posteriormente se han desarrollado algoritmos numéricos más eficientes, entre los que se encuentran los basados en inecuaciones cuadráticas, Chait y Yaniv (1993), Yaniv y Chait (1991, 1992, 1993), y Chait *et al.* (1995). Estos autores utilizan inecuaciones cuadráticas para sistemas genéricos, incluyendo sistemas continuos y discretos, así como modelos paramétricos y no paramétricos. Las inecuaciones cuadráticas expresan la relación existente entre la incertidumbre de la planta, las especificaciones de lazo cerrado y los contornos que el controlador (o la función de transferencia de lazo abierto) debe cumplir para satisfacerlas. Hasta el momento dicha formulación de los contornos ha sido utilizada para su representación gráfica sobre la que realizar la síntesis del controlador. De este modo, los algoritmos de Chait y

Yaniv constituyen la base de la *Toolbox* de QFT para MATLAB (Borghesani *et al.*, 1994). En el presente trabajo la resolución de las inecuaciones cuadráticas que forman los contornos será utilizada para algo más. Se tratará de demostrar formalmente y cuantificar como influyen las tolerancias de especificación y la incertidumbre en la ‘agresividad’ de los contornos. Y finalmente como esto condiciona la existencia de solución o la dificultad para obtenerla (véase Sección 3.3).

Otro algoritmo en Gutman y Neumann (1985), dibuja sobre el plano de Nichols dos curvas, la de controladores que nunca satisfacen la especificación y la de los que la satisfacen en cualquier caso. Sobre este panorama una rejilla permite la transformación de dichas curvas en los contornos para L_0 . Otros algoritmos de cálculo automático de contornos aparecen en Thompson (1995) y Rodrigues *et al.* (1995). La generación de contornos automática para plantas intervalares también ha sido estudiada en: Brown y Petersen (1991), Fialho *et al.* (1992), Zhao y Jayasuriya (1994). Otros trabajos que mejoran la eficiencia y precisión de los algoritmos para el cálculo de contornos pueden encontrarse en: Rodrigues *et al.* 1997), Nataraj y Sardar (2000).

Respecto a la tipología o forma de los contornos (véanse Sección 3.3.3 y Figura 3–6), queda patente en el presente trabajo su importancia para la existencia de solución o cuanto menos para realizar un diseño más fácil. En la literatura de QFT cabe destacar cómo Thompson y Nowokah (1994) clasificaron los contornos en mono-valuados y multi-valuados. En la misma línea, Thompson (1998) propone y expresa formalmente mediante inecuaciones cuadráticas tres categorías de contornos: mono-valuados superiores, mono-valuados inferiores y multi-valuados.

Un ejemplo

La planta con incertidumbre en (2.12) fue representada frecuentemente en la Figura 2—5. Considerando la incertidumbre de las plantillas y las especificaciones robustas en (2.13), (2.19) y (2.20), ahora son trazados los contornos.

(i) Contorno de estabilidad (contorno U)

Para que el sistema sea estable a pesar de la incertidumbre, después de la realimentación ninguna planta en $\Im L(j\omega)$ (o $\Im P$ antes del control) deberá rodear al punto (0dB, -180°) del NC (diagrama de Nichols). Y aun más, la $L(j\omega)$ más desfavorable en $\Im L$ deberá cumplir con las especificaciones mínimas de MG (margen de ganancia) y MF (margen de fase) establecidas con δ_U ; ver (2.13) a (2.15).

Por otro lado, la especificación habitual en control del máximo pico de resonancia permitido en lazo cerrado, M_m (ó M_p si se trabaja en el dominio temporal), se traduce en que $\Im L(j\omega)$ no se introduzca en un determinado círculo- M del NC. Esto vuelve a garantizar unos ciertos MG y MF positivos. Para la especificación de estabilidad del ejemplo, $\delta_U=1.3$, se consiguen unos mínimos márgenes de $MG \geq 5\text{dB}$ según (2.15) y $MF \geq 45^\circ$ según (2.14), y un pico de resonancia máximo de $M_m=2\text{dB}$.

En alta frecuencia cualquier función racional se transforma en:

$$P(j\omega) = k \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \frac{k}{s^{n-m}} \quad (2.21)$$

donde k representa la ganancia en alta frecuencia y $n-m$ el exceso de polos sobre ceros. Por ello, la posible variación en módulo a alta frecuencia ω_{hf} , debido a la variación de parámetros será:

$$\Delta Lm | P | = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [Lm | P |_{max} - Lm | P |_{min}] = Lm k_{max} - Lm k_{min} = V\text{dB} \quad (2.22)$$

siendo $Lm = 20 \log_{10}(\)$. En el ejemplo ilustrativo con $k \in [1, 10]$, resulta $V = 20\text{dB}$.

De esta forma el contorno de estabilidad de alta frecuencia o $U\text{-contour}$ ⁴ se traza trasladando hacia abajo sobre el NC el círculo- M correspondiente (función del valor de especificación δ_U) una magnitud V (función de la incertidumbre vertical a la que se reduce $\Im P(\omega_{hf})$). La Figura 2—6 ilustra este procedimiento para $\omega_{hf} = 100 \text{ rad/s}$, trasladando el círculo- M de 2dB una cantidad $V = 20\text{dB}$.

En las descripciones resumidas de la técnica QFT (ejemplo en D'azzo y Horowitz, 1995) a menudo se considera únicamente el trazado de los contornos de estabilidad para altas frecuencia. Esto obedece a que es en estas frecuencias donde dichos contornos son dominantes. Hasta moderadamente altas frecuencias los contornos de comportamiento frente a perturbaciones y para el seguimiento de referencias suelen resultar siempre dominantes, por lo que el cálculo de los contornos de estabilidad resulta en un coste adicional, muy caro cuando el trazado es manual. No obstante, ¿cómo delimitar cuándo su trazado resulta o no necesario?. Tras la aparición de las técnicas automáticas para el cálculo de los contornos (ver Sección 3.3) resulta más seguro trazar los contornos de estabilidad para todo el rango de frecuencias, tal y como indica la especificación (2.13). Gráficamente, el trazado del contorno de estabilidad para cualquier ω , equivale a trasladar sobre el NC

⁴ Como se empieza a denominar en Horowitz y Sidi (1972) al contorno dominante en alta frecuencia.

cada punto del círculo- M que precise δ_U , una magnitud y una fase determinadas por la forma de la plantilla $\mathfrak{S}P(\omega)$.

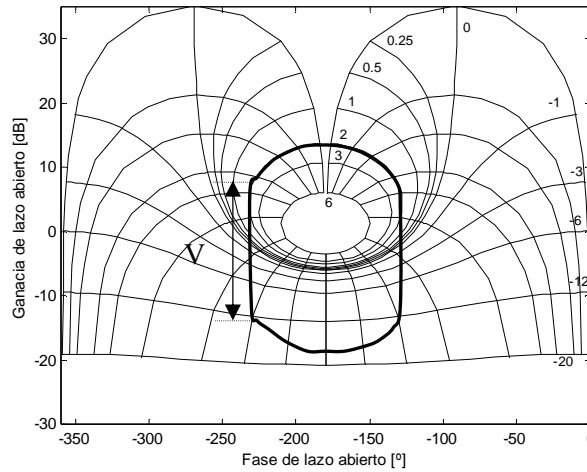


Figura 2—6: Contorno de estabilidad de alta frecuencia $\omega=100\text{rad/s}$

(ii) Contorno de seguimiento de señales

Dados unos modelos $T_{RU}(j\omega)$ y $T_{RL}(j\omega)$ como los de (2.19) y (2.20), éstos implican que para toda planta $P(j\omega)$ en la plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega)$, el módulo de su función de transferencia de lazo cerrado $|T'(j\omega)|=|F(j\omega)L(j\omega)/(1+L(j\omega))|$, debe incluirse entre la curva de Bode de magnitud de ambos modelos (ver Figura 2—4). Como se argumentó en el planteamiento de especificaciones, esto se consigue en dos pasos de diseño, G y F . El controlador G será el responsable de disminuir la sensibilidad de $|T_R(j\omega)|=|T'(j\omega)/F(j\omega)|$ a variaciones en $|P(j\omega)|$ (incertidumbre expresada con $\mathfrak{S}P$), hasta incluirla en la tolerancia $\delta_{RU}(\omega)/\delta_{RL}(\omega)$. Resumiendo, el margen absoluto de incertidumbre permitida en lazo cerrado podría expresarse como:

$$\delta_R(\omega) = |T_{RU}(j\omega)| / |T_{RL}(j\omega)| = \delta_{RU}(\omega) / \delta_{RL}(\omega) \quad (2.23)$$

La especificación (2.16) se reduce ahora a una única desigualdad:

$$\Delta |T_R(j\omega)| \leq \delta_R(\omega) \quad (2.24)$$

o bien,

$$\Delta |L(j\omega)| \leq \delta_R(\omega) \quad (2.25)$$

Es decir que la incertidumbre vertical de la plantilla $\mathfrak{S}P$ (igual a la de $\mathfrak{S}L$) debe reducirse de acuerdo a δ_R . Según esto, el procedimiento de trazado del contorno de seguimiento de señales para la frecuencia ω sería:

- Se toma una plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega)$ con su planta nominal $P_0(j\omega)$.

- En NC, a lo largo de una línea de fase constante, se desplaza la plantilla $\Im P(j\omega_k)$ hacia arriba o hacia abajo, hasta que los extremos de ésta sean tangentes a dos líneas M (que representan el comportamiento de lazo cerrado $T_R=T'/F$), tal que $M_{max}-M_{min}\leq\delta_R(\omega)$.
- Entonces, la posición ocupada por la planta nominal $P_0(j\omega)$ será el punto del contorno del servo $B_R(j\omega)$ en la línea de fase constante tomada.

La Figura 2—7 ilustra el procedimiento siendo $\delta_R(\omega=1)=1$. El procedimiento se repite para distintas fases en $[-360^\circ, 0^\circ]$ hasta completar el contorno $B_R(j\omega)$ para la frecuencia ω .

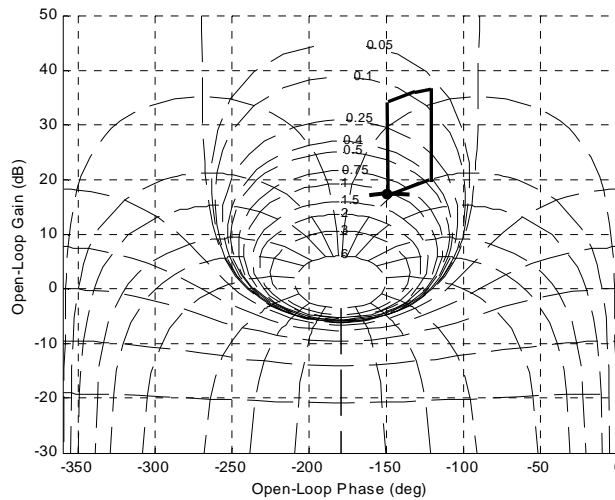


Figura 2—7: Trazado del contorno del servo en $\omega=1\text{rad/s}$, $\delta_R(\omega=1)=1$

Posteriormente se repite el mismo procedimiento para el resto de frecuencias de interés $\omega_{hR}\in[0, \omega_{hR}]$ hasta calcular los contornos para todas ellas. La Figura 2—8, muestra éstos para el caso ejemplo.

El procedimiento expuesto de cálculo de contornos responde al proceso manual empleado en los comienzos de QFT. Éste puede encontrarse en cualquier introducción sobre QFT (D’Azzo y Houpis, 1995; Houpis, 1996; Houpis y Rassmussen, 1999). A pesar de los algoritmos automáticos desarrollados posteriormente, el método manual sigue siendo imprescindible en la comprensión de la técnica.

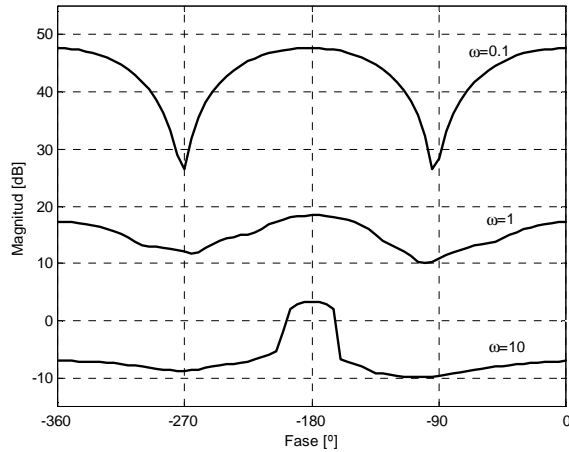


Figura 2—8: Contornos del servosistema para $\omega=[0.1 \ 1 \ 10]$

(iii) Contorno Intersección

Trazados los contornos para todas las especificaciones en sus frecuencias de interés, se obtuvieron para el ejemplo: $B_R(j\omega_{iR})$ y $B_U(j\omega_{iU})$. Seguidamente se calcularán los contornos intersección $B(j\omega)$ en el conjunto de frecuencias $\omega_{i=1,\dots,n}$, $\omega_i = \omega_{iR} \cup \omega_{iU}$. Cuando en una misma frecuencia coexistan contornos que representen distintas especificaciones, se seleccionarán las porciones más desfavorables de cada uno de ellos. En el ejemplo, se deberá calcular la intersección de B_U y B_R en las frecuencias $\omega_{iU} \cap \omega_{iR}$. Véase Figura 2—9.

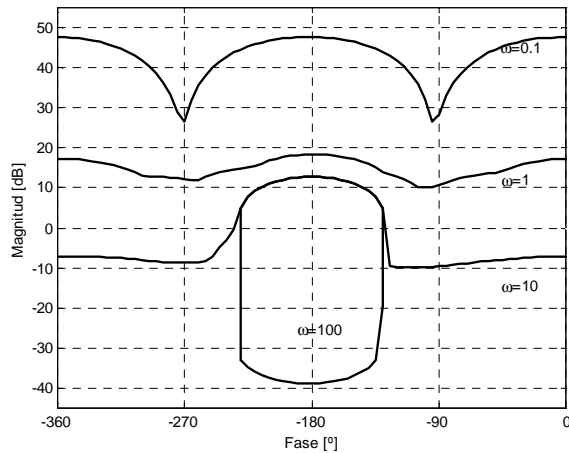


Figura 2—9: Intersección de contornos en $\omega_i=[0.1 \ 1 \ 10 \ 100]$

2.3.4 LA SÍNTESIS DEL CONTROLADOR

El diseño del controlador QFT, $G(s)$, se lleva a cabo sobre el Diagrama de Nichols (NC) en el que se han representado los contornos para cada ω , $B(j\omega)$, y la planta nominal $P_0(j\omega)$. Los contornos expresan la mínima posición a alcanzar por la planta nominal de lazo abierto para cumplir las especificaciones de lazo cerrado que ya incluyen la incertidumbre. De este modo, con la técnica de síntesis o *loop-shaping* se añaden elementos ganancia, polos y ceros tal que la planta nominal de cada frecuencia satisfaga su correspondiente contorno (se sitúe por encima o por debajo, según especificaciones). Esto garantizará que ninguna $L \in \{L\}$ (ninguna planta P en $\{P\}$ de las previstas en el modelado) violará las especificaciones planteadas.

Un ejemplo

Para el ejemplo ilustrativo, la Figura 2—10 muestra la situación de partida, y la Figura 2—11 los resultados una vez diseñado $G(s)$:

$$G(s) = \frac{4(s/1.1 + 1)}{s(s/117 + 1)} \quad (2.26)$$

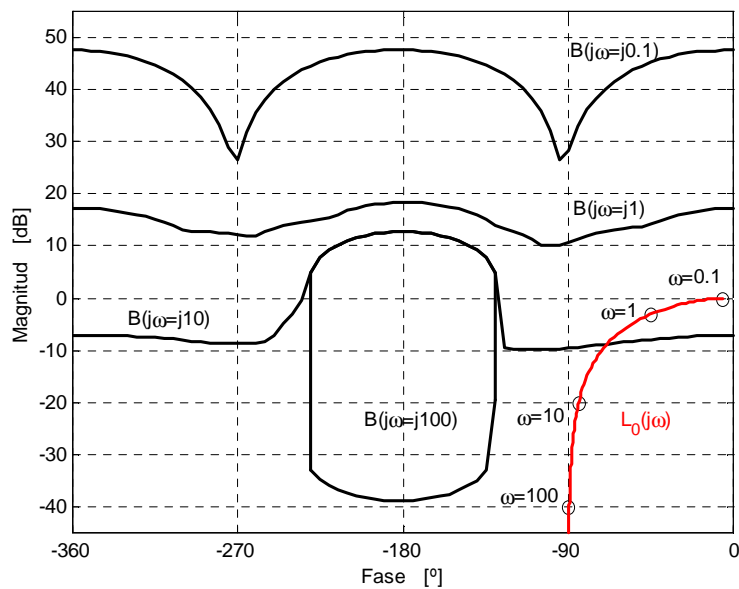


Figura 2—10: $B(j\omega)$ y $P_0(j\omega)$ para $\omega_i=[0.1 \ 1 \ 10 \ 100]$

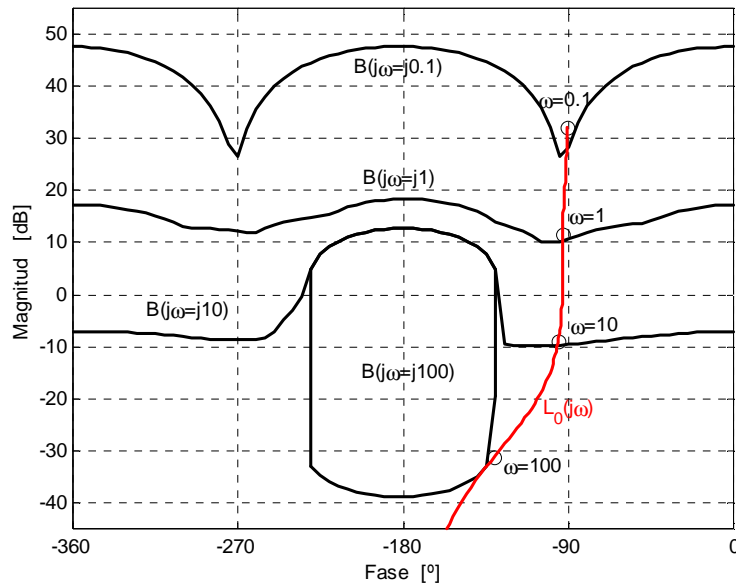


Figura 2—11: $B(j\omega)$ y $L_0(j\omega) = G(j\omega)P_0(j\omega)$ para $\omega_i = [0.1 \ 1 \ 10 \ 100]$

Comentarios sobre la síntesis de L_0

La síntesis de alguna función L_0 (o controlador G) que satisfaga en cada frecuencia los contornos, que incluyen especificaciones e incertidumbre, puede no ser una tarea sencilla. Para empezar, no es posible hacer que $L(j\omega)$ presente un recorrido arbitrario sobre el plano de Nichols, puesto que se debe satisfacer la integral de Bode que relaciona magnitud y fase (Bode, 1945)

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \theta d \ln \omega = -[\ln|L(0)| - \ln|L(\infty)|] \quad (2.27)$$

(con un retardo de fase adicional por cada cero situado en el semiplano derecho para sistemas de fase no mínima).

Otro hecho que dificulta el proceso de síntesis son los compromisos de diseño en el control realimentado, analizados en la Sección 2.2.2. A continuación se comenta un ejemplo sencillo. Supóngase (i) un único contorno de comportamiento en baja frecuencia que exige una $|L|$ mínima para el correcto rechazo de perturbaciones o seguimiento de señales; (ii) y en alta frecuencia un único contorno que limita la máxima $|L|$ para garantizar el rechazo de ruidos a partir de dicha frecuencia de ruidos; (iii) por último, existe la limitación de que en su frecuencia de cruce la pendiente de $|L|$ no puede sobrepasar $\approx -35\text{dB/década}$ para garantizar unos márgenes de fase y ganancia positivos, es decir estabilidad. Incluso, aunque esta última

especificación no estuviera representada por ningún contorno, evidentemente, si el contorno para (i) es muy elevado y el de (ii) muy bajo es imposible sintonizar una $L(j\omega)$ que pase de $L(j\omega_f)$ a $L(j\omega_{ff})$ sin violar el requisito (iii).

Tradicionalmente no se incluían explícitamente especificaciones de limitación del ancho de banda, sin embargo desde los comienzos se habla de que $L_0(j\omega)$ debe reducir su ganancia tan pronto como sea posible sin violar los márgenes de estabilidad (Horowitz y Sidi, 1972; Horowitz, 1973). Al no incluirse explícitamente estas limitaciones, bajo ciertas condiciones sobre la planta y las tolerancias de especificación en Horowitz (1979, Ap.1) se demuestra la existencia de $L_0(j\omega)$. En el mismo trabajo y en Horowitz (1973) y Horowitz y Sidi (1978) también se prueba que dicha $L_0(j\omega)$ es óptima y única cuando recae justamente sobre los contornos. El concepto de optimidad hace referencia al mínimo sobrediseño posible, sobre todo en términos de ancho de banda. Entonces, situando $L_0(j\omega)$ justo encima de los contornos, el controlador $G(j\omega)$ permitirá satisfacer en cada frecuencia la especificación robusta dominante sin añadir esfuerzo de control innecesario. No obstante, existirá siempre un sobrediseño desde el punto de vista que se toma como referencia la especificación más desfavorable en cada frecuencia, pero esto es inevitable (Horowitz, 1991). Por ejemplo, si en una frecuencia dominan los contornos de seguimiento de referencias, habrá un sobrediseño en el rechazo de perturbaciones, e inversamente ocurre lo mismo.

Otros trabajos que incluyen teoremas de existencia de solución óptima, prácticamente bajo las mismas premisas que en Horowitz (1979), pero con ciertas particularidades son: Gera y Horowitz (1980), Nwokah (1984, 1988a), Nwokah y Thompson (1989), Thompson y Nwokah (1989, 1990, 1994), Thompson (1998), Nwokah *et al.* (1990, 1994), Yaniv (1991a), Yaniv y Schwartz (1991), Jayasuriya (1993), Jayasuriya y Zhao (1994b), Nordgren *et al.* (1994)

A pesar de todo el esfuerzo realizado en demostrar la existencia de $L_0(j\omega)$ óptima, éste sigue siendo un problema matemáticamente no resuelto en QFT. En primer lugar las restricciones sobre las especificaciones son tales que garantizan la compatibilidad de contornos. El presente trabajo de investigación, se centra precisamente en demostrar que ocurre con los contornos para cualquier tipo de especificación e incertidumbre. Y en segundo lugar, las restricciones sobre la planta entre otras imponen que $P \rightarrow k/s^{np-nz}$ cuando $\omega \rightarrow \infty$, con $np-nz$ el exceso de polos sobre ceros. Aunque teóricamente esto ocurre en cualquier planta racional, en la práctica las plantillas de alta frecuencia tienen limitada la incertidumbre en ganancia, pero la incertidumbre en fase ocupa todo el intervalo de diseño.

La existencia de $L_0(j\omega)$ óptima como aquella que se ubica justamente sobre los contornos y tiene la mínima ganancia de alta frecuencia, también es criticable en un sentido práctico. Es bastante probable que el controlador que satisficiera estos requisitos fuera irracional. Aproximado éste por uno racional resultaría de tan elevado orden que lo haría impracticable. Y no se debe olvidar la finalidad eminentemente práctica de todo diseño, en particular con QFT, que nunca debe ser sacrificada por entelequias matemáticas. La complejidad del controlador resultante también se puede predecir con un estudio exhaustivo de los contornos, tal y como se demuestra en este trabajo.

Ante este panorama, realizar manualmente esta etapa de síntesis es una de las principales ventajas de QFT pero al mismo tiempo requiere usuarios expertos en control y diseño sobre el diagrama de Nichols. Permite descubrir especificaciones imposibles, encontrar los puntos de equilibrio entre especificaciones contrapuestas, visualizar el compromiso que existe entre complejidad del controlador y proximidad al diseño óptimo y, en general, visualizar físicamente el significado de las especificaciones. Sin embargo, es inevitable que los controladores que se obtienen manualmente se alejen de las curvas de restricción, al menos para un cierto número de frecuencias. El sobrediseño resultante es susceptible de ser mejorado por técnicas de síntesis automática, sin olvidar que el controlador final debe ser práctico.

Por todo ello, automatizar esta etapa es uno de los objetivos más perseguidos por los investigadores en QFT. Gera y Horowitz (1980) es uno de los primeros trabajos. Éste utiliza la integral de Bode de magnitud-fase para la síntesis de L_0 de un modo iterativo. Sin embargo, no existe garantía de convergencia y se requiere una aproximación final de L_0 por una función racional. Este trabajo fue automatizado en la *Toolbox* para QFT de Ballance y Gawthrop (1991) que simplificaba el método iterativo y permitía aproximaciones de mayor orden de la integral de Bode. Bailey y Hui (1989) desarrollaron una herramienta CAD para la síntesis automática. Thompson y Nwokah (1994) presentan un método basado en programación no lineal. El inconveniente es que se debe partir de un controlador inicial conocido, y, además, se busca sólo en el entorno de los parámetros de éste. Esto hace al método muy sensible a las condiciones iniciales y susceptible de no converger en un óptimo global, al igual que todas las técnicas de optimización no lineal. Thompson (1998) es una extensión del anterior y aporta, además, una función de coste a minimizar más elaborada. En la misma línea de programación no lineal insiste Fransson *et al.* (2000), con una función de coste que trata separadamente las propiedades a baja, media y alta frecuencia. Bryant y Halikias (1995) utiliza programación lineal, evitando los riesgos de la optimización no lineal, obteniendo sin embargo

resultados bastante conservadores debido a las aproximaciones. Zhao y Jayasuriya (1993) introducen la parametrización de Youla para transformar el problema sobre el diagrama de magnitud-fase en una búsqueda en una única dimensión; sin embargo el método se restringe a que sea un único parámetro del controlador el diseñado automáticamente. Chait (1997) presenta un algoritmo que utiliza el método de optimización convexa para optimizar sólo los ceros del controlador. Chait *et al.* (1999) utiliza también programación lineal, pero reduce las costosas aproximaciones al utilizar la función de sensibilidad complementaria. Aún así, como el propio artículo indica, el método sólo es útil para obtener un controlador inicial, que debe ser refinado manualmente. Zolotas y Halikias (1999) propone un algoritmo específico para obtener controladores de tipo PID. Otro algoritmo de síntesis automática de controladores QFT en sistemas de fase mínima aparece en Gutierrez y Rabins (1993).

En la síntesis de L_0 la *Toolbox* de QFT para Matlab (Borghesani *et al.*, 1994) posee una potente herramienta gráfica. También se incluye esta etapa de diseño pero de manera más ardua en la *Toolbox* Qsyn para uso con Matlab (Gutman, 1996) y el Software QFT de las Fuerzas Aéreas de USA (Houpis y Sating, 1997).

2.3.5 EL DISEÑO DEL PRE-FILTRO

Como se argumentaba en la Sección 2.2.3, ante un problema de seguimiento de señales y rechazo de perturbaciones es necesario el empleo de dos grados de libertad: el controlador y el prefiltro.

En la síntesis de $G(j\omega)$ y en relación con los contornos de comportamiento, sólo las incertidumbres absolutas de $|T(j\omega)|=|L(j\omega)/(1+L(j\omega))|$ fueron reducidas a $\delta_R(\omega)=\delta_{RU}(\omega)/\delta_{RL}(\omega)$. Será necesario ahora desplazar las curvas de lazo cerrado $|T(j\omega)|$ de modo que las nuevas $|T'(j\omega)|=|T(j\omega)||F(j\omega)|$ queden incluidas según precisa la doble desigualdad en (2.16). El prefiltro $F(j\omega)$ aportará la magnitud necesaria en cada frecuencia. El método de diseño de F suele ser una tarea sencilla (ver D'Azzo y Houpis, 1995), muchas veces incluida en las propias herramientas CAD antes citadas para la ayuda en la síntesis de G . El caso multivariable puede ser menos trivial (Zhao y Jayasuriya, 1996). Boje (2001) propone un método que utiliza tanto la ganancia como la fase para el diseño del prefiltro.

En el **ejemplo** ilustrativo resulta suficiente para satisfacer los modelos de la Figura 2—4 un prefiltro como:

$$F(s) = \frac{21}{(s^2 + 4.3s + 21)} \quad (2.27)$$

2.3.6 LA VALIDACION DE LOS DISEÑOS

Validación frecuencial

En el proceso de diseño se realizaron dos simplificaciones fundamentalmente: la discretización del dominio de parámetros y la discretización del intervalo de frecuencias de interés, ambos físicamente continuos. Por ello, una vez diseñados el controlador, $G(s)$ y el prefiltro, $F(s)$, se simula el nuevo sistema para el mayor número posible de plantas $P(s)$ del espacio de parámetros, en el mismo intervalo de frecuencias pero con mayor densidad de éstas. Las propias herramientas CAD de diseño suelen incorporar esta utilidad.

La Figura 2—12 muestra la validación frecuencial del ejemplo ilustrativo para la especificación de estabilidad robusta. Otra gran ventaja de QFT es la facilidad de rediseño que ofrece si se incumpliera alguna especificación.

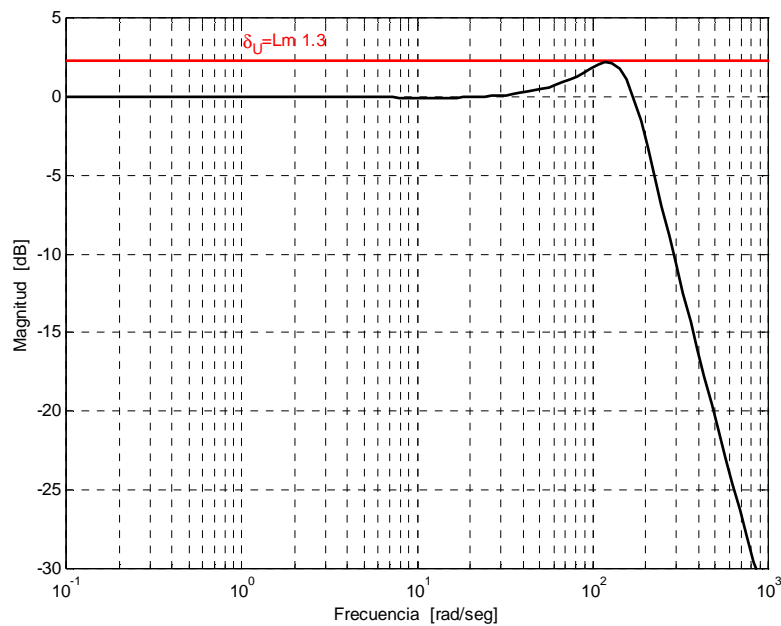


Figura 2—12: Comprobación de especificación de estabilidad

Validación temporal

Como se argumentaba en la Sección 2.3.1, no existe una transformación exacta del dominio frecuencial al temporal. Por ello, cumplidas las especificaciones frecuenciales podría existir algún problema en el dominio temporal.

La herramienta software en Borghesani *et al.* (1994), contiene funciones para la validación frecuencial de los diseños pero no para la temporal. El software presentado en Gutman (1996) si que incluye esta última utilidad.

2.4 VERSATILIDAD Y BREVE HISTORIA DE QFT

Los fundamentos de la realimentación en presencia de incertidumbre datan de los primeros trabajos: Horowitz (1959, 1963). Pero fue a partir de Horowitz y Sidi (1972) cuando comenzaron a proliferar las aportaciones a QFT. Desde entonces, la teoría de realimentación cuantitativa (QFT) viene acuñado un conjunto creciente de técnicas de diseño aplicables a todo tipo de sistemas.

En Horowitz y Sidi (1972), Horowitz (1973) y Sidi (1973) se tratan los sistemas lineales, invariantes en el tiempo, de fase mínima y de simple-entrada/simple salida. Horowitz y Sidi (1973) generaliza el estudio para sistemas de múltiples lazos en cascada. Horowitz (1975) analiza el caso particular de los sistemas lineales pero variantes en el tiempo. Y los sistemas no lineales se tratan en Yaniv (1999a,b) y Baños y Barreiro (2000). Para los sistemas SISO variantes y además no lineales existen aportaciones en Horowitz (1976), Oldak *et al.* (1994) y Yaniv (1999b). Controladores lineales y variantes para plantas SISO no lineales se analizan en Yaniv y Boneh (1997) y Yaniv (1999a).

El caso de los sistemas multivariable (MIMO) también cuenta con un gran número de aportaciones. Shaked *et al.* (1974) trataron el problema multivariable sin interacción. Los sistemas lineales y de fase mínima MIMO se estudian por primera vez en Horowitz (1979). Posteriormente, aparecen: Horowitz y Loecher (1981), Horowitz (1982), Yaniv y Horowitz (1986), Nowokah (1988b), Yaniv y Chait (1992), Boje y Nwokah (1997), Franchek *et al.* (1997), Yaniv (1999a,b), Egaña y García-Sanz (1999), García-Sanz y Egaña (2002) y otros. QFT traduce un sistema multivariable a una secuencia equivalente de diseños de una entrada y una salida. El caso particular de sistemas MIMO no lineales se estudia en Yaniv (1991a) y Horowitz y Breiner (1981). En Yaniv (1999a) se distingue entre los sistemas MIMO no lineales gobernados con controladores lineales e invariantes por un lado, y con controladores lineales y variantes por otro.

La metodología QFT para los sistemas de fase no mínima se discute en varios trabajos. Sidi (1976) y Horowitz y Sidi (1978) presentan una metodología óptima de diseño de controladores de realimentación para sistemas de fase no mínima con incertidumbre. Su técnica de síntesis descubre al diseñador los compromisos entre el desempeño y el ancho de banda, y también define un criterio implícito para determinar si existe o no

solución. Sidi (1980) desarrolló un criterio para estimar el máximo ancho de banda de un sistema muestreado que garantice unos márgenes de fase y ganancia positivos. Horowitz y Liao (1984) extendieron esta técnica a plantas estables con varios ceros de fase no mínima. Una rigurosa extensión de la técnica QFT para los sistemas muestreados puede encontrarse en Yaniv y Chait (1993), cuya técnica incluye algoritmos que garantizan las especificaciones de lazo cerrado en la salida de la planta tanto si es continua como si es muestreada. Las particularidades para los sistemas MIMO de fase no mínima se encuentran en Horowitz *et al.* (1986). El caso de sistemas con retardos se considera en Horowitz (1983) y en García-Sanz *et al.* (2001).

Los sistemas de parámetros distribuidos se estudian en QFT en Kelmen y Bagchi (1993). Y las plantas intervalares en Nataraj *et al.* (2001).

Para las plantas que contienen incertidumbre en polos complejos altamente subamortiguados QFT puede obtener muy buenos resultados. Algunos trabajos ilustrativos pueden encontrarse en Kridon y Yaniv (1996) y Yaniv y Horowitz (1990).

La metodología QFT ha sido también combinada con otras técnicas de control. En Jayasuriya (1993) se analizan algunas semejanzas y diferencias con otras técnicas. Nordgren *et al.* (1994) concluye, tras presentar su nueva formulación, que QFT y H_∞ comparten una filosofía de diseño común, diferenciándose en cómo se representa la incertidumbre. Bailey *et al.* (1994) comparan la filosofía de diseño empleada por QFT y H_∞ . Theodor y Shaked (1994) combinan QFT y H_∞ en el diseño de controladores H_∞ sin apenas sobrediseño. Zhao y Jayasuriya (1996, 1998) dan un paso más al formular y resolver el problema de QFT como un problema H_∞ . Nwokah *et al.* (1999) pone de relieve la fragilidad real de muchas de las técnicas de control robusto (H_∞, μ); fragilidad de la que, al parecer, está a salvo QFT. Castillejo *et al.* (2001) proponen un método basado en QFT para la reducción de orden de controladores obtenidos con otras técnicas de diseño, tales como H_∞ .

Las diferencias conceptuales en el tratamiento de la incertidumbre entre el control robusto QFT y el control adaptativo también han sido foro de discusión. El hecho de no ser asumida la incertidumbre en el proceso de diseño del controlador, sino tan sólo valoradas con la identificación, es una de las carencias que han privado al control adaptativo clásico (Aström y Wittenmark, 1995) de una mayor aplicabilidad práctica. Sin embargo, el empleo de estructuras adaptativas combinadas con diseños QFT puede tener su utilidad práctica. A pesar de la falta de una teoría matemática rigurosa que combine ambas técnicas, algunos trabajos interesantes aparecen en: Aström *et al.* (1986), Gawthrop, P.J. (1988), Gutman (1988), Gutman *et al.* (1988),

Yaniv *et al.* (1990), Gil-Martínez y García-Sanz (2000). En el presente trabajo se incluyen algunas aportaciones más al respecto.

La robustez del controlador PID que le ha valido su generalizada aplicación industrial ha suscitado también su comparación con QFT. La optimización de PIDs aprovechando QFT se estudia en Franchek *et al.* (1997). En Egaña y García-Sanz (2000) se emplea QFT para la síntesis de PIDs en sistemas multivariables.

2.5 ALGUNAS APLICACIONES PRÁCTICAS

Si algo caracteriza a QFT es la robustez de sus diseños en un sentido eminentemente práctico. A continuación se comentan algunos problemas reales resueltos con ésta técnica.

El campo de la Ingeniería Aeronáutica es, de la mano de Houppis, uno de los que mayor aplicabilidad que QFT presenta. Houppis *et al.* (1994) presenta varios ejemplos (con sus respectivas referencias) con soluciones, debidamente probadas e implementadas, para ciertos problemas de control de vuelo.

La Robótica, con su creciente necesidad de robots industriales cada vez más precisos a la vez que rápidos, es también un gran campo de aplicación de QFT. Se encuentran aplicaciones en Yaniv y Horowitz (1990), Kelemen y Bagchi (1993), Piedmonte *et al.* (1998), Choi *et al.* (1999), Egaña *et al.* (2001), entre otros.

Park *et al.* (1997) aplican QFT multivariable para el control robusto de un CD-ROM. Una aplicación para la industria de procesos se encuentra en García-Sanz y Ostolaza (1998) para el control de una planta de depuración de aguas por fangos activos. En la bibliografía pueden encontrarse decenas de otras aplicaciones, casi siempre con un marcado carácter más industrial y menos académico.

2.6 VENTAJAS DE QFT

Conocida la metodología básica de QFT, descrita su versatilidad avalada por la gran variedad de sistemas a los que es aplicable y por la complejidad de sistemas reales controlados con QFT, a continuación se resumen algunas de las ventajas que proporciona esta técnica frente a otras.

- Obtención de un diseño robusto, insensible a variaciones e incertidumbres en la planta.

- El método de diseño conduce pronto a visualizar si alguna especificación no se podrá cumplir.
- Queda patente el compromiso entre complejidad en el controlador y el coste de la realimentación (un controlador más sencillo implica un sobrediseño que supone un ancho de banda mayor del realmente necesario; un controlador más complejo supone una más difícil aplicación).
- Queda patente el compromiso entre requerimientos contrapuestos. El diseñador sabe cómo afecta lo que hace a las prestaciones.
- No requiere herramientas matemáticas complejas.
- Una contribución esencial de QFT es el reconocimiento a la importancia de reducir la ganancia del controlador, para evitar saturaciones en actuadores o planta debidas a la amplificación del ruido del sensor. Este aspecto es propio de QFT, y no aparece en otras técnicas de control robusto, que tratan simplemente de cumplir con ciertas especificaciones (Jayasuriya, 1993). El uso de la función de transferencia en lazo abierto permite que este aspecto aflore de manera natural en QFT, mientras queda oculto en otras técnicas basadas en la función sensibilidad.
- Utiliza funciones de transferencia, en vez de la representación en variables de estado, en general más compleja.

2.7 PRINCIPALES PUNTOS DE PARTIDA DE LA TESIS

En las secciones anteriores se repasa la técnica QFT, así como las aportaciones científicas que han aparecido sucesivamente sobre ésta teoría. De entre los trabajos antes comentados, muchos son los precursores de la presente tesis. No obstante, merecen especial atención los que se resumen a continuación: Horowitz (1973), Horowitz (1979) en su Apéndice 1, y Chait y Yaniv (1993). Dichos trabajos pueden considerarse el punto de partida de la presente tesis.

2.7.1 HOROWITZ (1973)

“Función de transferencia óptima en sistemas realimentados de lazos simples y fase mínima”

Este trabajo, anterior a Horowitz (1979), ya incluye los primeros teoremas de existencia de solución bajo ciertas restricciones al problema multiobjetivo de control realimentado en procesos con incertidumbre. No obstante, Horowitz (1979) es más riguroso en este campo, por lo que los fundamentos

y discusiones sobre la existencia de solución se incluyen en la siguiente sección que resume el citado trabajo (véase Sección 2.7.2).

La relevancia de Horowitz (1973) de cara a la presente tesis reside entonces en la definición de existencia de una L óptima. Como I. Horowitz afirma desde sus primeros trabajos (Horowitz, 1959) la realimentación es necesaria en presencia de algún tipo de incertidumbre en los parámetros o en las perturbaciones no deseadas. Se parte de un esquema de control como el de la Figura 2—1. El objetivo de la realimentación (especificaciones robustas) es reducir la sensibilidad del sistema a la incertidumbre en la planta (para un adecuado seguimiento de referencia) y para atenuar las perturbaciones. Las especificaciones de sensibilidad se formulan en términos de contornos o curvas de restricción que delimitan los valores aceptables de $L(j\omega)$. Además, debido a la presencia de ruido en el camino de realimentación de todo sistema real, es de vital importancia satisfacer los contornos de sensibilidad con una $L(j\omega)$ cuya magnitud sea lo más pequeña posible en alta frecuencia. Éstas son las características que definen una L óptima, es decir, aquella L que satisface las especificaciones de sensibilidad (magnitud de L suficientemente grande para garantizar la reducción de incertidumbre y rechazo de perturbaciones exigidos) y, al mismo, tiempo presenta la mínima ganancia de alta frecuencia. En Horowitz (1973) se demuestra que tal $L(j\omega)$ óptima existe, es única y es la que reside sobre el contorno en cada frecuencia ω . Las restricciones de existencia de dicha L óptima se centran en un cierto tipo de plantas y determinadas especificaciones, tal y como detalla Horowitz (1979) más exhaustivamente (véase la Sección 2.7.2).

Comentarios sobre Horowitz (1973)

- Las restricciones sobre el tipo de plantas y el tipo de especificaciones que garantizan la existencia de L óptima se comentan en el análisis de Horowitz (1979) (véase Sección 2.7.2).
- Bajo las restricciones anteriores, una $L=GP$ óptima y única existiría, pero también implicaría un controlador G de orden infinito e incluso no racional que permita ajustar $L(j\omega)$ a sus contornos en cada frecuencia ω . Esto puede desembocar en soluciones inviables desde un punto de vista práctico. Para aquellos casos en los que el teorema es aplicable, la presente tesis aprovecha la demostración formal en Horowitz (1973) que garantiza la existencia de solución. Así mismo, se tratará de demostrar como el incremento de la incertidumbre y/o unas especificaciones sobre la sensibilidad más agresivas, hacen más compleja la síntesis de una $L(j\omega)$ que se ajuste a sus contornos de cada frecuencia. Finalmente, se mostrará

como esto se traduce en un incremento de la complejidad del controlador, debiéndose adoptar soluciones de compromiso en la práctica.

2.7.2 HOROWITZ (1979)

“Síntesis cuantitativa de sistemas realimentados con incertidumbre y de múltiple entrada-salida”

Este trabajo generaliza la técnica QFT, presentada en Horowitz y Sidi (1972) para los sistemas de simple entrada-salida, ahora para los sistemas multivariable. No obstante y de cara a la presente tesis, la importancia de Horowitz (1979) reside en su Apéndice 1. Éste versa sobre los teoremas de existencia de solución en el diseño de lazos simples realimentados, aplicables a sistemas de simple entrada-salida y también a sistemas multivariables descompuestos en sistemas simples en las condiciones que se muestran en el trabajo. Tal y como se detalla en la Sección 2.3.4, posteriormente a Horowitz (1979) han aparecido múltiples trabajos en torno al tema de la existencia de la solución al control realimentado con QFT. Sin embargo, desde el punto de vista de su validez en un sentido estrictamente práctico y, en líneas generales, todos se basan y se pueden reducir a lo que el precursor de todos ellos, Horowitz (1979), postula. Por ello, a continuación se resume el alcance de este último trabajo, como carta de presentación a los estudios que se llevan a cabo en la presente tesis.

Horowitz (1979) parte de un esquema de control de dos grados de libertad como el de la Figura 2—1, con realimentación unitaria, $H(s)=1$, y sólo perturbaciones que afectan a la entrada del proceso, $D(s)=D_I(s)$. Se parte de una planta con incertidumbre $\wp=\{P(s)\}$ sobre la que se imponen unas tolerancias explícitas de comportamiento robusto: en el seguimiento de señales $T(j\omega)=Y(j\omega)/R(j\omega)$, y en el rechazo de perturbaciones en la entrada $T_2(j\omega)=Y(j\omega)/D(j\omega)$. Imponiendo una serie de restricciones sobre la familia de plantas \wp y sobre las especificaciones de comportamiento robusto, Horowitz (1979) garantiza y demuestra la existencia de un controlador de realimentación G y un prefiltro F que permiten satisfacer los objetivos de control antes citados en presencia de incertidumbre. A continuación se resumen las restricciones que garantizan la solución del problema.

(i) Restricciones sobre \wp

- (i.1) $\{P(s)\}$ son funciones racionales y de fase mínima.
- (i.2) Las plantillas resultantes, $\{P(j\omega_i), \omega_i=1, \dots, n\}$, han de ser conectadas.

(i.3) Cuando $s \rightarrow \infty$, se tiene $P(s) \rightarrow k/s^e$, con $e \geq 1$ un valor fijo de exceso de polos sobre ceros en alta frecuencia, y con $k \in [k_{min}, k_{max}]$ que representa la incertidumbre en ganancia de alta frecuencia y satisface $\infty > k_{max} > k_{min} > 0$.

(i.4) La planta nominal pertenece a la familia, $P_0(s) \in \{P(s)\}$, y es estable. También $L_0 = G P_0$ satisface el criterio de estabilidad asintótica de Nyquist.

(ii) Restricciones sobre las especificaciones de comportamiento $|T(j\omega)|$ y $|T_d(j\omega)|$.

(ii.1) En el comportamiento robusto en el seguimiento de señales se tiene que $0 < A(\omega) \leq |T(j\omega)| \leq B(\omega)$, en un intervalo finito $\omega \in [0, \omega_r]$, con $A, B \in [0, \infty]$, $B(\omega)/A(\omega) \geq 1$.

(ii.2) A partir de una determinada frecuencia, $\omega > \omega_\lambda$, la relación de especificación $B(\omega)/A(\omega)$ supera a la incertidumbre de lazo abierto de alta frecuencia k_{max}/k_{min} , en virtud de la limitación exigida por la Integral de Sensibilidad de Bode, $\int_0^\infty \ln |S| d\omega = 0$ (Bode, 1945; Skogestad y Postlethwaite, 1996).

(ii.3) El comportamiento robusto de rechazo de perturbaciones en la entrada se expresa como $|T_d(j\omega)| \leq Q(\omega) > 0$, en un intervalo finito $\omega \in [0, \omega_{rd}]$.

(ii.4) A partir de una determinada frecuencia (alta frecuencia), $\omega > \omega_b$, la tolerancia de especificación respecto a perturbaciones debe satisfacer: $|Q/P| > 1$.

(ii.5) Tanto $T_d(j\omega)$ como $T(j\omega)$ deben ser estables para todo $P \in \{P\}$ y de fase mínima.

(iii) Bajo las restricciones en (i) y (ii), Horowitz (1979) en su Apéndice 1 demuestra en un primer paso la existencia de $L_0(j\omega) = G(j\omega)P_0(j\omega)$, es decir, de un controlador de realimentación G . Y en segundo lugar la existencia del prefiltro F . La síntesis de ambos es suficiente para que estructura de control rechace perturbaciones y siga señales de referencia de acuerdo a las especificaciones, $Q(\omega)$, $A(\omega)$ y $B(\omega)$.

Comentarios sobre el Teorema de Existencia en Horowitz (1979)

- El punto (i) restringe la demostración formal de existencia de solución al problema de control realimentado mediante QFT a un determinado tipo de procesos bastante restringido. La presente tesis incluye nuevas ideas sobre la existencia de solución sin imponer restricciones sobre $P(s)$. El enfoque del problema no pretende deducir teoremas formales de condiciones de existencia, sino que para la generalidad de plantas con incertidumbre se pretende estudiar la influencia de dicha incertidumbre sobre la

compatibilidad de especificaciones y sobre la dificultad en el diseño, $L_0 = GP_0$.

- De acuerdo a los puntos (ii-1) y (ii-3) el teorema únicamente considera explícitamente especificaciones de seguimiento de señales y de rechazo de perturbaciones. Las condiciones de estabilidad robusta y un esfuerzo de control limitado se logran imponiendo las restricciones (ii-2) y (ii-4) sobre las tolerancias explícitas. La relajación de las especificaciones en (ii-2) y (ii-4), necesaria en todo diseño práctico, tiene su fundamento en las Integrales de Bode, demostradas en la bibliografía de control: Doyle *et al.* (1992, p.100), Zhou *et al.* (1996), Freudenberg y Looze (1985; 1988).
- Unos mayores beneficios de la realimentación en (ii-1) necesitan una disminución de $B(\omega)/A(\omega)$, siendo esta relación tan cercana a la unidad como sea posible (mayor reducción de la sensibilidad de lazo cerrado respecto de la lazo abierto). Y esto se materializa con una mayor ganancia L que ha de aportar G . Un mayor beneficio de realimentación en (ii-3) precisa de una relación $|Q/P|$ tan cercana a cero como sea posible. Considerando P con incertidumbre fija este objetivo también se materializa elevando la ganancia L a través de G . Paralelamente a los beneficios de la realimentación existe un precio pagado por esto, tanto mayor cuanto mayores sean los beneficios. El principal coste de la realimentación y sus mayores beneficios es fundamentalmente en términos de ancho de banda (Horowitz, 1991). Esto conlleva un incremento del esfuerzos de control en altas y medias frecuencias que pueden saturar los actuadores (Horowitz y Sidi, 1972), además de acoplar un mayor ruido en la salida. Un coste de realimentación moderado precisa de una L suficientemente pequeña en alta frecuencia. Por otro lado, los criterios de estabilidad de Nyquist limitan la pendiente de transición entre una L elevada en baja frecuencia a una L suficientemente pequeña en alta frecuencia. Las restricciones (ii-2) y (ii-3), extractadas de Horowitz (1979), solamente garantizan que se pueda disminuir la ganancia L a partir de una cierta frecuencia. Si los beneficios de baja frecuencia son muy ambiciosos y/o la incertidumbre muy alta, ineludiblemente la frecuencia en la que L alcanza su asíntota de decrecimiento puede ser muy alta. Luego, en cierto modo convendría utilizar especificaciones explícitas que limiten el esfuerzo de control. Sin embargo, la consideración explícita de objetivos de comportamiento contrapuestos puede desembocar en la inexistencia de solución, problemática que se agrava ante una incertidumbre creciente. Ambos aspectos no se consideran en Horowitz (1979) siendo objeto de estudio en la presente tesis. Otra pretendida aportación es cuantificar en que medida unos mayores beneficios de realimentación y/o una mayor incertidumbre complican la síntesis del

controlador, partiendo de que existe solución bajo las condiciones de Horowitz (1979).

2.7.3 CHAIT Y YANIV (1993)

“Diseños de controladores asistidos por ordenador para sistemas de múltiple-entrada y simple-salida utilizando QFT”

Dicho trabajo demuestra que existe una transformación formal entre el conjunto, planta con incertidumbre y especificación de lazo cerrado, y los contornos. En particular, dicha función de transformación es una inecuación cuadrática. Estas fórmulas simplifican enormemente los aspectos computacionales en QFT, en particular, los relativos al cálculo eficiente de los contornos.

Para los sistemas de un único lazo de realimentación, Chait y Yaniv (1993) presentaron un algoritmo de cálculo de contornos. Este se introduce como Algoritmo 3.1 en la Sección 3.3.2, donde se aportan ciertas modificaciones, necesarias para los estudios abordados en capítulos posteriores.

Partiendo de un esquema de control como el de la Figura 2—1, con $H(s)=1$, los problemas de control formulados con inecuaciones cuadráticas en Chait y Yaniv (1993), se resumen como:

- Márgenes de fase y ganancia: $|T(j\omega)| \leq \lambda$, $\omega \in [0, \infty]$; con $T=PG/(1+PG)$ y λ una constante equivalente a δ_U en (2.13), que da lugar por tanto a los márgenes expresados en (2.14) y (2.15). Expresando G y P en forma polar, $G=ge^{j\phi}$ y $P=pe^{j\theta}$, se deduce la inecuación cuadrática: $g^2p^2+2gpcos(\phi+\theta)+1 \geq 0$.
- Rechazo de ruido: $|T(j\omega)| \leq \delta(\omega)$, $\omega < \omega_n$. Y la inecuación resultante: $g^2p^2(1-1/\delta^2)+2gpcos(\phi+\theta)+1 \geq 0$.
- Rechazo de perturbaciones en la salida: $|T_1(j\omega)| \leq \delta_1(\omega)$, $\omega < \omega_n$; con $T_1=S/(1+PG)$. La inecuación obtenida es: $g^2p^2+2gpcos(\phi+\theta)+(1-1/\delta_1^2) \geq 0$.
- Ajuste del modelo: $|T_2(j\omega)-F(j\omega)| \leq \delta_2(\omega)$, $\omega < \omega_n$; con $T_2=TF$. Similar al problema anterior.
- Seguimiento de señales: $\alpha(\omega) \leq |T_2(j\omega)| \leq \beta(\omega)$, $\omega < \omega_n$. Definiendo $\delta_6(\omega)=\beta(\omega)/\alpha(\omega)$, y dos plantas $P_i=p_i e^{j\theta_i}$ y $P_k=p_k e^{j\theta_k}$, resulta la inecuación cuadrática: $g^2p_k^2p_i^2(1-1/\delta_6^2)+2g[p_k^2p_i^2cos(\phi+\theta_i)-p_kp_i^2/\delta_6^2cos(\phi+\theta_k)]+[p_k^2-p_i^2/\delta_6^2] \geq 0$.
- Rechazo de perturbaciones en la entrada: $|T_3(j\omega)| \leq \delta_3(\omega)$, $\omega < \omega_n$; con $T_3=P/(1+PG)$. La inecuación obtenida es: $g^2p^2+2gpcos(\phi+\theta)+(1-p^2/\delta_3^2) \geq 0$.

- Esfuerzo de control: $|T_4(j\omega)| \leq \delta_4(\omega)$, $\omega < \omega_n$; con $T_4 = G/(1+PG)$. La inecuación obtenida es: $g^2(p^2 - 1/\delta_4^2) + 2gp\cos(\phi + \theta) + 1 \geq 0$.

La presente tesis reorganiza estos problemas en (véase Sección 3.1):

- Especificaciones robustas sobre la función de **sensibilidad complementaria**: $|T_1(j\omega)| \leq \delta_1(\omega)$, con $T_1 = T = L/1+L$, $L = PG$. Las tolerancias δ_1 sobre $|T|$ condicionan fundamentalmente: la estabilidad robusta (sustitúyase $\delta_1 = \delta_l$ en (2.13)), y el comportamiento robusto en la atenuación de ruidos en la salida $|Y/N|$ y en el esfuerzo de control ante perturbaciones a la entrada $|U/D_1|$.
- Especificaciones robustas sobre la función de **sensibilidad**: $|T_2(j\omega)| \leq \delta_2(\omega)$, con $T_2 = S = 1/1+L$. Las tolerancias δ_2 sobre $|S|$ condicionan fundamentalmente: la estabilidad robusta, y el comportamiento robusto en el rechazo de perturbaciones en la salida de la planta, $|Y/D_2|$.
- Especificaciones robustas sobre la función de **sensibilidad con la planta**: $|T_3(j\omega)| \leq \delta_3(\omega)$, con $T_3 = S' = P/1+L$. Las tolerancias δ_3 sobre $|S'|$ condicionan, fundamentalmente, el comportamiento robusto en el rechazo de perturbaciones en la entrada de la planta: $|Y/D_1|$.
- Especificaciones robustas sobre la función de **esfuerzo de control**: $|T_4(j\omega)| \leq \delta_4(\omega)$, con $T_4 = G/1+L$. Las tolerancias δ_4 limitan la entrada de control: en el rechazo de perturbaciones en la entrada, $|U/D_2|$, en la atenuación de ruidos, $|U/Y|$, y en el seguimiento de señales, $|Y/R|$.
- Especificaciones robustas sobre el seguimiento de señales de referencia: $\delta_{5inf}(\omega) \leq |T_5(j\omega)| \leq \delta_{5sup}(\omega)$, con $T_5 = FT$. La tolerancia doble $\delta_{5sup}/\delta_{5inf}$ exige que G reduzca la incertidumbre de lazo cerrado, y después F modela T entre los modelos superior δ_{5sup} , e inferior δ_{5inf} , de comportamiento.

Se estudiarán en profundidad las inecuaciones cuadráticas que representan estos problemas de control. Esto permitirá: clasificar los contornos en categorías con diferentes particularidades y estudiar la influencia de la incertidumbre $\{P = p \angle \theta\}$ y de la tolerancia de especificación $\delta_{k=1, \dots, 5}$, en los contornos resultantes. Realizado este análisis se podrán establecer conclusiones sobre la solución al problema de control, es decir, si es posible lograr el cumplimiento simultáneo de especificaciones robustas mediante el diseño de control realimentado de G y F . Esto se tratará desde dos puntos de vista: la compatibilidad de especificaciones dada una incertidumbre, y la dificultad en la síntesis de los elementos de control, en particular del controlador⁵ G .

⁵ Nótese que es G quien debe satisfacer varias especificaciones simultáneamente, mientras que F sólo interviene en el problema del servomecanismo.

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 2—1: Estructura genérica de control realimentado.....</i>	<i>12</i>
<i>Figura 2—2: Estructura de control realimentado con perturbaciones reducidas a la salida.....</i>	<i>14</i>
<i>Figura 2—3: Respuesta temporal a escalón de T_{RU} en (2.19) y T_{RL} en (2.20).....</i>	<i>27</i>
<i>Figura 2—4: Curvas de Bode de magnitud de δ_{RU} en (2.19) y δ_{RL} en (2.20).....</i>	<i>27</i>
<i>Figura 2—5: Plantillas y planta nominal.....</i>	<i>31</i>
<i>Figura 2—6: Contorno de estabilidad de alta frecuencia $\omega=100\text{rad/s}$.....</i>	<i>36</i>
<i>Figura 2—7: Trazado del contorno del servo en $\omega=1\text{rad/s}$, $\delta_R(\omega=1)=1$.....</i>	<i>37</i>
<i>Figura 2—8: Contornos del servosistema para $\omega_i=[0.1 \ 1 \ 10]$.....</i>	<i>38</i>
<i>Figura 2—9: Intersección de contornos en $\omega_i=[0.1 \ 1 \ 10 \ 100]$.....</i>	<i>38</i>
<i>Figura 2—10: $B(j\omega)$ y $P_0(j\omega)$ para $\omega_i=[0.1 \ 1 \ 10 \ 100]$.....</i>	<i>39</i>
<i>Figura 2—11: $B(j\omega)$ y $L_0(j\omega)=G(j\omega)P_0(j\omega)$ para $\omega_i=[0.1 \ 1 \ 10 \ 100]$.....</i>	<i>40</i>
<i>Figura 2—12: Comprobación de especificación de estabilidad.....</i>	<i>44</i>

CAPÍTULO 3

PLANTILLAS Y CONTORNOS QFT

Resumen

Las plantillas QFT expresan en el dominio frecuencial de Nichols la incertidumbre del proceso a controlar. Los contornos QFT muestran la ‘cantidad’ necesaria de realimentación para satisfacer un conjunto de especificaciones de comportamiento, dada una incertidumbre en el modelo del sistema que se expresa a través de las plantillas.

El análisis de las plantillas y, sobre todo, de los contornos permitirá cuantificar la dificultad del problema e incluso predecir una posible ausencia de solución al problema multiobjetivo en presencia de incertidumbre. El estudio de los contornos se fundamenta en el análisis de sus ecuaciones matemáticas. Entre otras formulaciones el presente trabajo se basa en la desarrollada por Chait y Yaniv en 1993, a partir de la resolución de inecuaciones cuadráticas que incluyen el modelo con incertidumbre, las especificaciones y el controlador. Hasta el momento dichas fórmulas han sido utilizadas tan sólo para el cálculo automático de los contornos y su representación gráfica sobre la que realizar los diseños de control. Este capítulo hace hincapié en el potencial de la formulación matemática de los contornos para algo más: la demostración formal y cuantificación de la exigencia de los requisitos de control y del tamaño de la incertidumbre en el modelo.

Contenidos

3 Plantillas y Contornos QFT	57
3.1 Los Objetivos de Control.....	59
3.2 El Análisis de la Incertidumbre	63
3.2.1 Modelos con Incertidumbre.....	63
3.2.2 Incertidumbre Frecuencial. Plantillas	66
3.2.3 Topología y Parámetros Característicos de las Plantillas	67
3.3 El potencial de los Contornos	74
3.3.1 Qué son los Contornos	74
3.3.2 Como se Calculan los Contornos. Inecuaciones Cuadráticas	75
3.3.3 Contornos para el Controlador sin la Incertidumbre. Tipologías.....	79
3.3.4 Contornos para el Controlador con la Incertidumbre	85
3.3.5 Contornos de Lazo Abierto	90
3.3.6 ‘Agresividad’ de un Contorno.....	93
3.4 Solución en los Contornos al Problema de Control	94
3.5 Solución en el Diseño al Problema de Control	95
Índice de Figuras.....	97

3 PLANTILLAS Y CONTORNOS QFT

3.1 LOS OBJETIVOS DE CONTROL

En el lenguaje de control los objetivos planteados pueden resumirse en dos: especificaciones de estabilidad y especificaciones de comportamiento. Se habla de **sistema nominal estable**, cuando el sistema es estable no existiendo incertidumbre en el modelo, y de prestaciones de desempeño o **comportamiento nominal** para hacer referencia a las especificaciones de comportamiento cuando no existe incertidumbre. En presencia de esta última en el modelo de la planta, si la estabilidad y el comportamiento según especificaciones se cumplen para todo el conjunto de plantas que definen la incertidumbre, se habla de **estabilidad robusta** y **comportamiento robusto**. Por tanto, en tanto en cuanto el presente trabajo estudia el control realimentado para sistemas con incertidumbre, se plantearán especificaciones de estabilidad y comportamiento robustos.

Las especificaciones robustas son tratadas por QFT desde el dominio frecuencial, lo que simplifica enormemente la formulación y resolución del problema de control (Horowitz, 1991); véanse los comentarios a este respecto en el Capítulo 2. Concretamente, QFT formula las especificaciones de lazo cerrado mediante desigualdades o inecuaciones que contienen tolerancias $\delta_k(\omega)$ para algunas funciones de transferencia $|T_k(j\omega)|$ que expresan relaciones entre ciertas entradas y salidas. Debido a la relación biunívoca entre la magnitud y la fase en sistemas de fase mínima (Bode, 1945) bastará imponer restricciones en una de ellas. QFT elige la representación de especificaciones robustas de lazo cerrado en términos de magnitud (Horowitz y Sidi, 1972). En sistemas de fase no mínima la técnica sigue siendo igualmente válida tomando las debidas precauciones (Horowitz y Sidi, 1978).

En el presente trabajo se clasificarán las desigualdades que expresan las especificaciones robustas en dos tipos, simples y dobles.

Las especificaciones con desigualdad simple se expresan como:

$$|T_k(j\omega)| \leq \delta_k(\omega), \omega \in \Omega_k \quad (3.1)$$

Éstas presentan una única tolerancia o modelo superior de comportamiento $\delta_k(\omega)$ y son satisfechas por $|T_k(j\omega)|$ con la adición de un único elemento de control, que se denominará G o controlador. Por ello, los problemas de control que representan se nombrarán también como problemas 1-DOF (un *degree of freedom*) o de un grado de libertad: G .

Cuando se plantea una doble desigualdad se tiene:

$$\delta_{k_inf}(\omega) \leq |T_k(j\omega)| \leq \delta_{k_sup}(\omega), \omega \in \Omega_k \quad (3.2)$$

Ahora, el comportamiento $|T_k(j\omega)|$ queda limitado entre dos modelos, uno inferior, $\delta_{k_inf}(\omega)$, y otro superior, $\delta_{k_sup}(\omega)$. Ello exige el empleo de dos grados de libertad, el controlador G , que además debe satisfacer simultáneamente el resto de especificaciones simples, y el prefiltro F . De ahí que en ocasiones estos problemas se también se denominan como 2-DOF o de dos grados de libertad. Los diseños de ambos elementos de control se ejecutan en dos pasos. Para la síntesis de G se supondrá F unitaria, transformándose T_k en T'_k . Entonces, la doble desigualdad en (3.2) queda reducida a una desigualdad simple del tipo (3.1):

$$|T'_k(j\omega)| \leq \delta_{k_sup}(\omega) / \delta_{k_sup}(\omega), \omega \in \Omega_k \quad (3.3)$$

Considerando todas las especificaciones, ahora simples, se llevará a cabo el diseño de G . Posteriormente, la completa verificación de (3.2) requerirá la síntesis del segundo grado de libertad, F , que suele ser una tarea menor y exclusiva de un único problema (un F por cada doble desigualdad).

Nótese que las tolerancias o modelos en (3.1) y (3.2) pueden ser constantes, $\delta_k(\omega) = \delta_k$, pero en general, serán variables con la frecuencia, $\delta_k(\omega)$; véanse Capítulos 4 al 6. El planteamiento de especificaciones simples (3.1) o dobles (3.2), responde a necesidades objetivas en el control. Por ejemplo, como se demostró en la Sección 2.2.3, el tratamiento simultáneo del rechazo de perturbaciones (D) y del seguimiento de señales (R), requería una estructura desacoplada en dos grados de libertad. Como caso adicional, si las perturbaciones D_1 y/o D_2 fueran medibles (sin incertidumbre) podrían plantearse especificaciones del tipo (3.2) para rechazar éstas, necesitándose según el argumento anterior un grado de libertad más por cada desigualdad doble añadida. En el presente trabajo, se emplearán estructuras de control como la de la Figura 2.1 (véase Capítulo 2), considerándose las perturbaciones como no medibles, hecho habitual en la práctica. Entonces, las especificaciones del tipo (3.2) sólo se plantean en el seguimiento de referencias. No obstante, las conclusiones en el presente trabajo para especificaciones 2-DOF en servosistemas pueden fácilmente generalizarse a problemas distintos. La única premisa es que la especificación doble (3.2) sea siempre reducible a una del tipo (3.1) o (3.3), con el fin de poder diseñar un único G para el conjunto de especificaciones simples o reducidas a simples. Esto resulta sencillo siempre que los grados de libertad adicionales (el prefiltro F en el caso que nos ocupa) se ubiquen independientemente del lazo de realimentación. Para funciones de transferencia T_k más complejas

(estructuras de control diferentes) donde el segundo grado de libertad no pueda ser fácilmente independizado, el diseño global (G y F) puede resultar más complejo.

A continuación se plantearán las especificaciones más frecuentes en control de acuerdo a los formatos genéricos (3.1) y (3.2) o (3.3). En el esquema de control de la Figura 2-1 (véase Capítulo 2) las salidas $\{Y, U\}$ y las entradas $\{R, N, D_1, D_2\}$ se relacionan mediante las siguientes ecuaciones:

$$Y = \frac{P}{1+P \cdot G \cdot H} \cdot D_1 + \frac{1}{1+P \cdot G \cdot H} \cdot D_2 + \frac{P \cdot G \cdot H}{1+P \cdot G \cdot H} \cdot (F \cdot R - N) \quad (3.4)$$

$$U = \frac{G}{1+P \cdot G \cdot H} \cdot (F \cdot R - D_2 - N) + \frac{P \cdot G \cdot H}{1+P \cdot G \cdot H} \cdot D_1 \quad (3.5)$$

A partir de las relaciones salida/entrada implícitas en (3.4) y (3.5) y siguiendo los formatos de desigualdad descritos para las especificaciones en QFT, los objetivos de control más comunes pueden recogerse en cinco expresiones: $|T_k(j\omega)| < \delta_k(\omega)$, $k=1, \dots, 5$. Por simplicidad, se ha asumido realimentación unitaria, $H(s)=1$.

▪ **Sensibilidad complementaria del sistema o función T ; ($k=1$)**

$$\begin{aligned} |T_1(j\omega)| &= \left| \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| = \left| \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)F(j\omega)} \right| = \left| \frac{U(j\omega)}{D_1(j\omega)} \right| = \left| \frac{Y(j\omega)}{N(j\omega)} \right| \\ &= \left| \frac{P(j\omega)G(j\omega)}{1+P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_1(\omega), \quad \omega \in \Omega_1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

T_1 representa el concepto habitualmente denominado en control como “sensibilidad complementaria” del sistema, $T=L/1+L$, en nuestro caso excluyendo el prefiltro. Según (3.6) el módulo de dicha sensibilidad complementaria es limitado superiormente por la tolerancia δ_1 , con lo que ello lleva implícito en términos de control. Esto será comentado e interpretado desde los contornos QFT en el Capítulo 4. La expresión (3.6) puede implicar tanto condiciones de comportamiento como de estabilidad robusta sobre: los márgenes de estabilidad, el ancho de banda de lazo cerrado, el esfuerzo de control para el rechazo de perturbaciones en la entrada, $|U/D_1|$ y la influencia en la salida de los ruidos introducidos por el sensor, $|Y/N|$, entre otros.

▪ **Sensibilidad del sistema o función S y S' ($k=2,3$)**

$$|T_2(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+L(j\omega)} \right| = \left| \frac{Y(j\omega)}{D_2(j\omega)} \right| = \left| \frac{1}{1+G(j\omega) \cdot P(j\omega)} \right| \leq \delta_2(\omega), \quad \omega \in \Omega_2 \quad (3.7)$$

T_2 representa el concepto habitualmente denominado en control como “sensibilidad” del sistema $S=1/1+L$. La tolerancia δ_2 supone un límite superior al modulo de la sensibilidad. Lo que ello supone en términos de control y como lo expresa QFT será analizado exhaustivamente en el Capítulo 5. Entre otros objetivos, la desigualdad (3.7) restringe la influencia en la salida, Y , de perturbaciones que se producen en la propia salida de la planta, D_2 .

Para analizar determinados efectos la función sensibilidad clásica, $S=1/1+L$, debe considerar también la dinámica del modelo, que denominaremos $S'=P/1+L$. Y su limitación en QFT se expresa:

$$|T_3(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{D_1(j\omega)} \right| = \left| \frac{P(j\omega)}{1 + G(j\omega) \cdot P(j\omega)} \right| \leq \delta_3(\omega), \quad \omega \in \Omega_3 \quad (3.8)$$

Entre otros posibles objetivos, la expresión (3.8) condiciona el comportamiento robusto en la salida, Y , ante perturbaciones que afectan a la entrada de la planta, D_1 , mediante la tolerancia δ_3 . El Capítulo 5 también describe las particularidades de este problema.

▪ **Esfuerzo de control ($k=4$)**

$$\begin{aligned} |T_4(j\omega)| &= \left| \frac{U(j\omega)}{D_2(j\omega)} \right| = \left| \frac{U(j\omega)}{N(j\omega)} \right| = \left| \frac{U(j\omega)}{R(j\omega)F(j\omega)} \right| = \\ &= \left| \frac{G(j\omega)}{1 + P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_4(\omega), \quad \omega \in \Omega_4 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$|T_4|$ expresa la magnitud esfuerzo de control debido a: la atenuación de perturbaciones en la salida, $|U/D_2|$; el rechazo de ruidos en el sensor, $|U/N|$; y/o el seguimiento de señales de referencia, $|U/RF|$. El esfuerzo de control es el principal precio pagado en el control realimentado, fundamentalmente en términos de ancho de banda o ‘coste de la realimentación’ (Bode, 1945; Horowitz, 1963). Por ello, especificaciones del tipo $k=4$ y 1, deben tenerse en cuenta siempre, explícita o implícitamente. El Capítulo 6 revisa en particular el problema $k=4$ en (3.9).

▪ **El seguimiento de señales de referencia o los servosistemas ($k=5$)**

$$\delta_{5\text{inf}}(\omega) < |T_5(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} \right| = \left| F(j\omega) \frac{P(j\omega)G(j\omega)}{1 + P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_{5\text{sup}}(\omega), \quad \omega \in \Omega_5 \quad (3.10)$$

T_5 expresa el comportamiento en el seguimiento de señales de referencia, Y/R . En estructuras 2-DOF, el controlador de realimentación G reduce la

sensibilidad en $|T|=|T_5/F|$ ante incertidumbres en la planta $|P|$, reduciendo la desigualdad doble en (3.10) a una simple:

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{T_5(j\omega)}{F(j\omega)} \right| = \left| \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)F(j\omega)} \right| = \left| \frac{P(j\omega)G(j\omega)}{1+P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \frac{\delta_{5\text{sup}}(\omega)}{\delta_{5\text{inf}}(\omega)}, \omega \in \Omega_5 \quad (3.11)$$

Y el prefiltro F posiciona $|T_5(j\omega)|=|F(j\omega)|\cdot|T(j\omega)|$ dentro de los modelos de especificación superior, $\delta_{5\text{sup}}(\omega)$, e inferior, $\delta_{5\text{inf}}(\omega)$, para satisfacer la doble desigualdad (3.10). Este problema, $k=5$, se analiza en el Capítulo 6.

* * *

Los distintos objetivos de control pueden ser en mayor o menor medida contrapuestos, por lo que se requiere adoptar soluciones de compromiso en los valores $\delta_k(\omega)$, $k=1,\dots,5$. El problema se agrava con la presencia de incertidumbre en el modelo $\{P\}$. La existencia o no de solución al problema con QFT, o cualquier otra técnica de control, depende de todo ello como se discute en los Capítulos 4 al 6.

3.2 EL ANÁLISIS DE LA INCERTIDUMBRE

Como se demostró en la Sección 2.2.1, la realimentación es tan solo necesaria en presencia de algún tipo de incertidumbre. A continuación se distingue entre la incertidumbre del modelo en el dominio continuo y cómo QFT la representa mediante las plantillas. Se establecerán ciertas relaciones curiosas entre el formato de la incertidumbre y las plantillas resultantes, así como la evolución de éstas con la frecuencia. Finalmente se definirán sobre las plantillas algunos parámetros útiles para los estudios posteriores.

3.2.1 MODELOS CON INCERTIDUMBRE

Los estudios presentados en este documento se basan en modelos continuos, SISO, lineales e invariantes en el tiempo. No obstante, siguiendo la misma metodología de análisis pueden ampliarse a cualquier otro sistema: discreto, MIMO, no lineal y/o variante en el tiempo. Para ello deben tenerse en cuenta las consideraciones que QFT toma respecto a estos sistemas: Horowitz (1975, 1976, 1979), Houppis y Rasmussen (1999), Yaniv (1999b).

La incertidumbre en el modelo y la incertidumbre en las perturbaciones motiva nuestra realimentación cuantitativa. La incertidumbre en las perturbaciones será tomada en cuenta convenientemente en las tolerancias de especificación al respecto. La incertidumbre en el modelo de la planta (o simplemente la incertidumbre de la planta) se tendrá en cuenta en el cumplimiento de todas las especificaciones, es decir en el diseño global. Por

ello, en el presente trabajo, el término de robustez se refiere fundamentalmente a la incertidumbre del modelo, asumiéndose que el/los elementos de control diseñados carecen de incertidumbre. Los orígenes de la incertidumbre en el modelo del proceso se revisaron en la Sección 2.3.2. Todas las imprecisiones de modelado citadas se pueden incluir en tres clases

- **Incetidumbre paramétrica** (o estructurada), cuando la estructura del modelo (incluido el orden) es conocida, pero algunos parámetros contienen incertidumbre.
- **Incetidumbre no paramétrica** (o no estructurada). Existe un error en el modelo debido a dinámicas no tenidas en cuenta, normalmente en altas frecuencias, bien deliberadamente o por desconocimiento del proceso físico. Cualquier modelado de un sistema real lleva implícita esta incertidumbre, aunque luego no sea tenida en cuenta explícitamente.
- **Incetidumbre mixta** que combina las dos anteriores.

La técnica QFT¹ (Jayasuriya, 1993; Nordgren *et al.*, 1994; Chait *et al.*, 1995) y en particular el presente trabajo, permite considerar cualquier tipo de incertidumbre de las expuestas anteriormente. El proceso, $P(s)$, con incertidumbre se describe a través de la familia de plantas \wp . Se establecen dos formatos, \wp_1 y \wp_2 :

$$\wp_1 = \left\{ \begin{array}{l} P(s) = \frac{k \cdot \prod_{i=1, \dots, m} (s/z_i + 1) \prod_{h=1, \dots, l} ((s/\omega_{nz_h})^2 + (2\xi_{z_h}/\omega_{nz_h})s + 1)}{s^r \cdot \prod_{j=1, \dots, n} (s/p_j + 1) \prod_{g=1, \dots, q} ((s/\omega_{np_g})^2 + (2\xi_{p_g}/\omega_{np_g})s + 1)} \cdot e^{-Ls} (1 + \Delta_m(s)) : \\ k \in [k_{\min}, k_{\max}], z_i \in [z_{i_min}, z_{i_max}], \omega_{nz_h} \in [\omega_{nz_h_min}, \omega_{nz_h_max}] \\ p_i \in [p_{j_min}, p_{j_max}], \omega_{np_g} \in [\omega_{np_g_min}, \omega_{np_g_max}] \quad L \in [L_{\min}, L_{\max}] \\ |\Delta_m(s)| < |R_m(s)| \end{array} \right. \quad (3.12)$$

$$\wp_2 = \left\{ \begin{array}{l} P(s) = \frac{k \cdot \prod_{i=1, \dots, m} (s + z_i) \prod_{h=1, \dots, l} (s^2 + 2\xi_{z_h} \omega_{nz_h} s + \omega_{nz_h}^2)}{s^r \cdot \prod_{j=1, \dots, n} (s + p_j) \prod_{g=1, \dots, q} (s^2 + 2\xi_{p_g} \omega_{np_g} s + \omega_{np_g}^2)} \cdot e^{-Ls} \cdot (1 + \Delta_m(s)) : \\ k \in [k_{\min}, k_{\max}], z_i \in [z_{i_min}, z_{i_max}], \omega_{nz_h} \in [\omega_{nz_h_min}, \omega_{nz_h_max}] \\ p_i \in [p_{j_min}, p_{j_max}], \omega_{np_g} \in [\omega_{np_g_min}, \omega_{np_g_max}] \quad L \in [L_{\min}, L_{\max}] \\ |\Delta_m(s)| < |R_m(s)| \end{array} \right. \quad (3.13)$$

¹ Originalmente, Horowitz no tuvo en cuenta la incertidumbre no paramétrica (normalmente presente en altas frecuencias) en la formulación del método, al menos explícitamente.

Los términos de incertidumbre en \wp_1 y \wp_2 pueden resumirse como sigue:

- Incertidumbre paramétrica:
 - Términos ganancia: k
 - Ceros reales: z
 - Ceros complejos, parametrizados a través de su frecuencia natural, ω_{nz} , y su coeficiente de amortiguamiento, ξ_z .
 - Polos en el origen (genéricamente, podrían existir también ceros en el origen).
 - Polos reales²: p
 - Polos complejo conjugados. Frecuencia natural, ω_{np} , y amortiguamiento, ξ_p .
 - Retardos puros: L

La incertidumbre paramétrica podría expresarse de otro modo a través de los coeficientes de los polinomios del numerador y del denominador de la función de transferencia, más el retardo. No obstante, los formatos seleccionados en (3.12) y (3.13) resultan más cómodos de interpretar, pues manejan la incertidumbre desglosada en los términos habituales de control: ganancia, polos y ceros, además del posible retardo.

- Incertidumbre no paramétrica. Existiendo múltiples formas de expresar ésta, se ha preferido el formato de incertidumbre multiplicativa mediante el término $1+\Delta_m(s)$ en (3.12) y (3.13). La herramienta de diseño más habitual en QFT, la Toolbox de Matlab (Borghesani *et al.*, 1994) utiliza también la incertidumbre multiplicativa como $1+\Delta_m(s)$. En ella, $\Delta_m(s)$ debe ser estable³ y $|R(s)|$ limita en cada frecuencia ($s=j\omega$) la incertidumbre no estructurada dentro de un radio máximo de amplitud sobre los ejes [°] vs. [dB] del diagrama de Nichols (NC).

Las familias \wp_1 y \wp_2 difieren tan solo en el formato de la incertidumbre paramétrica de ceros y polos. La distinción entre ambas en el presente trabajo radica en que cada una origina una incertidumbre frecuencial (tipo de plantilla) diferente sobre el NC, como se demuestra en la siguiente sección.

² No debe confundirse p que indica un parámetro polo en el modelo P de la planta, con la misma notación p empleada para describir la magnitud de dicho modelo al expresarse en forma polar como $P=p\angle\theta$

³ La premisa de Δ estable puede relajarse, pero entonces las condiciones de estabilidad y comportamiento robustos serían más complejas de definir y de cumplir. Además, usando un formato apropiado de incertidumbre y permitiendo múltiples perturbaciones, se puede siempre generar la familia de plantas deseadas con Δ estable. Por tanto, el asumir Δ estable no es realmente una restricción (Skogestad y Postlethwaite, 1996).

Aunque los resultados obtenidos en el presente trabajo son válidos para cualquier tipo de plantilla sobre el NC, **las conclusiones y ejemplos se centrarán en la incertidumbre paramétrica**, resultando ésta mucho más intuitiva en la comprensión de las innovaciones presentadas.

3.2.2 INCERTIDUMBRE FRECUENCIAL. PLANTILLAS

El significado de las plantillas QFT fue repasado en la exposición resumen de dicha técnica en la Sección 2.3.2. Las familias de plantas en (3.12) y (3.13), \mathcal{P}_{12} , que representan la incertidumbre de P , pueden contener hasta $1+m+2l+r+n+2q+1+1$ dimensiones de incertidumbre en el dominio ‘ s ’, correspondientes al número de parámetros ganancia, ceros y polos (reales, complejos o en el origen), al elemento de retardo y a la incertidumbre no paramétrica. Trasladada esta incertidumbre en ‘ s ’ al **dominio frecuencial** ‘ $j\omega$ ’ de QFT sobre el diagrama de Nichols, **la incertidumbre se define ahora en tan solo dos dimensiones, magnitud-logarítmica y fase, a través de las plantillas o templates**. Ahora bien, dichas incertidumbres en magnitud y fase son variables con la frecuencia (existe un plantilla para cada ω).

Para muchos problemas prácticos es difícil, si no imposible, describir analíticamente las plantillas, que representan al proceso frecuencialmente. Por ello, la planta con incertidumbre, $\{P(s)\}$, se discretiza en un conjunto J de plantas LTI (lineales e invariantes), $\{P_r(s), r=1, \dots, J\}$.

Se determinará también un intervalo discreto de frecuencias $\omega_i, i=1, \dots, n$ dentro del intervalo global de frecuencias de interés, $\omega \in \Omega$. Y en ellas se calculará cada plantilla $\mathfrak{P}_r(j\omega) = \{P_r, r=1, \dots, J\}$ resultando un conjunto de éstas $\{\mathfrak{P}_r(j\omega_i), i=1, \dots, N\}$. Por motivos de simplicidad de nomenclatura a lo largo del documento, al conjunto de plantas discretas o plantilla se le denominará indistintamente $\mathfrak{P} = \{P\}$, o bien estrictamente $\mathfrak{P}_r = \{P_r\}$.

La determinación de las J plantas en el dominio ‘ s ’, que deberán representar la incertidumbre sobre el diagrama de Nichols (plantillas), no es una tarea sencilla ni totalmente resuelta actualmente en QFT (Cervera *et al.*, 2001). El presente trabajo hace algunas aportaciones al respecto.

Para cada frecuencia y para cada uno de los J puntos, se debe resolver una ecuación cuadrática en el cálculo de los contornos o *bounds* (como se describe en la Sección 3.3). Por ello, cuanto mayor es el número de puntos de cada plantilla (incremento de J), mayor es el coste de computación de los contornos. Por otro lado, como la incertidumbre física es un parámetro continuo que se ha discretizado, a efectos prácticos, a mayor densidad de

puntos, mayor fidelidad en la descripción de la incertidumbre real a través de los contornos QFT. Por ello, la aproximación de la planta con incertidumbre por un conjunto de J -puntos debe adoptar una solución de compromiso entre complejidad de cálculo y precisión (Hwang y Yang, 2001).

En el cálculo de los contornos (representación de las especificaciones robustas en términos de $L_0=GP_0$ sobre NC), Chait *et al.* (1995) determinaron que basta considerar el perfil de las plantillas. Esto supone un notable ahorro al eliminar los puntos interiores que no aportan información. A este respecto, el presente documento demuestra la validez de dicha simplificación. Y aún más, es posible incluso reducir el número de puntos a ciertas porciones de dicho perfil. Esta simplificación última no es genérica a todos los problemas de control, sino que cada uno presenta sus peculiaridades como se establece en los Capítulos 4 al 6.

El considerar solamente el perfil (o porciones de éste) en una plantilla, supone otros problemas adicionales. Dicho perfil no siempre es una única línea cerrada y convexa, tal como se detectó tempranamente en la resolución de problemas industriales con QFT y como se muestra en algunos ejemplos de Chait *et al.* (1995). En el caso de las plantillas no conectadas existen varios perfiles independientes. También son posibles plantillas de perfil conectado pero con ‘huecos’ internos, en las que habrá que considerar el perfil exterior e interior. Otro tipo son las plantillas no convexas cuyo perfil presenta concavidades (Boje, 2000). Ante esta diversidad de formatos de plantillas, el suponerlas convexas conectadas simplifica el problema en la fase de diseño, pero el resultado es más conservador. Téngase en cuenta que en la simplificación pueden incluirse plantas que realmente no pertenezcan a la familia de incertidumbre real. Dado que la definición de las plantillas no es el objetivo del presente trabajo, en **los ejemplos ilustrativos se supondrán plantillas convexas conectadas**. No obstante, los resultados podrían ampliarse, con las consideraciones oportunas, a cualquier otro modelo de plantilla.

Para una información más exhaustiva referente al cálculo de las plantillas consúltense las referencias incluidas en la Sección 2.3.2.

3.2.3 TOPOLOGÍA Y PARÁMETROS CARACTERÍSTICOS DE LAS PLANTILLAS

Según lo expuesto anteriormente, la multitud de dimensiones $(1+m+2l+r+n+2q+1+1)$ necesarias para expresar la incertidumbre en el dominio de Laplace, se reduce a dos en el dominio frecuencial de Nichols: la magnitud y la fase. Es posible analizar la incertidumbre frecuencial en

magnitud y fase aportada a la plantilla de frecuencia ω_i por cada tipo de elemento con incertidumbre: ganancia, polos, ceros, retardo e incertidumbre no paramétrica multiplicativa. Sin embargo, este estudio no es una tarea sencilla. No se trata de elementos con valores precisos cuya contribución en fase y magnitud es ya un problema resuelto y ampliamente tratado en la bibliografía de control clásico frecuencial (Kuo, 1996). Por el contrario, cada punto (fase-magnitud) en NC que representaría a un elemento sin incertidumbre en ω_i se convierte ahora en una forma geométrica debido a la incertidumbre en fase y en ganancia. Y ésta ha de superponerse a la contribución del resto de elementos que conforman el modelo $\{P\}$. El siguiente paso, por motivos de ahorro computacional, sería determinar el contorno de dicha plantilla. Para ello, habría que analizar qué valores concretos de cada elemento (ganancia, polo, ...) dentro de su dominio de incertidumbre en 's' son significativos por estar en el contorno de las plantillas en cada ω_i discreta. Intervalos de incertidumbre paramétrica discontinuos e incertidumbres no paramétricas complican aun más la determinación de las plantillas frecuenciales y los estudios posteriores. La complejidad y extensión de este estudio se escapa a los objetivos del presente trabajo, constituyendo una posible vía de continuación a las innovaciones científicas presentadas. Una primera aportación, si incluida a este respecto, es la topología característica de las plantillas para ciertos modelos paramétricos, tal y como se detalla a continuación. Y una segunda aportación es la determinación de las porciones significativas⁴ de los perfiles de las plantillas, que se muestra en los Capítulos 4 al 6.

A continuación se presentan algunas de las formas más típicas de plantillas y sus parámetros característicos, para **incertidumbres paramétricas tales que las plantillas resultantes sean convexas y conexas**. Éstas servirán de base para los estudios e ilustraciones posteriores.

Plantillas genéricas y Definición de parámetros característicos

Cada planta discreta, $P_r(j\omega_i)$, en la plantilla $\mathfrak{P}P_r(j\omega_i)$ se expresará en forma polar como: $P_r(j\omega_i)=p\angle\theta$, donde p representa el módulo o magnitud y θ el argumento o fase.

La Figura 3-1 muestra la forma característica de plantillas para modelos con formato \mathfrak{P}_1 en (3.12), considerando sólo la incertidumbre paramétrica. Se cumple que cuando el modelo incierto es de tipo \mathfrak{P}_1 , la incertidumbre en

⁴ Este término alude a aquellas porciones del perfil que intervienen en la conformación de los contornos QFT.

magnitud de cualquier plantilla ω_i es sólo aportada por el parámetro ganancia, k . Por otro lado, a su incertidumbre en fase contribuyen los parámetros polo, cero y retardo.

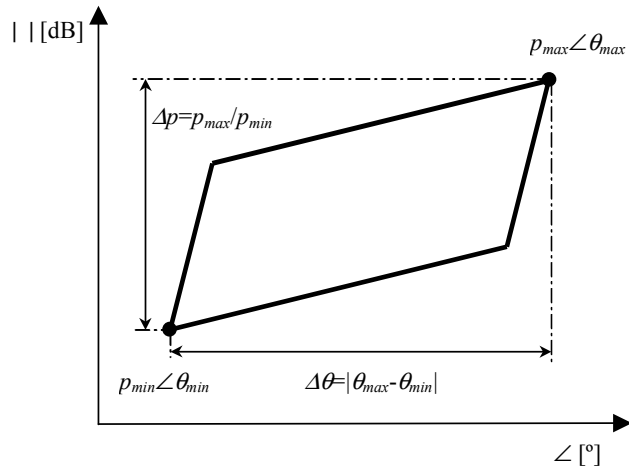


Figura 3-1: Contorno plantilla ω_i en modelos con incertidumbre paramétrica según ϕ_1

Por el contrario, en los modelos con formato ϕ_2 en (3.13) la incertidumbre en magnitud de la plantilla ω_i no sólo es aportada por los parámetros ganancia, sino también por los polos y ceros (reales y/o complejos). Estos últimos (ceros y polos) y el retardo aportan además la incertidumbre en fase. La forma característica de estas plantillas se muestra en la Figura 3-2.

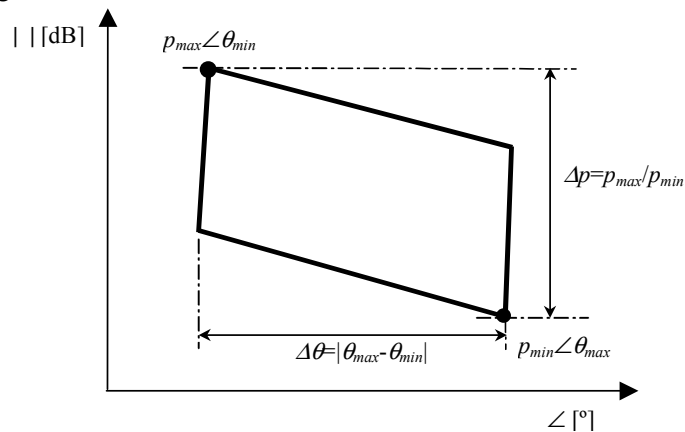


Figura 3-2: Contorno plantilla ω_i en modelos con incertidumbre paramétrica según ϕ_2

Siendo $P_i(j\omega_i) = p \angle \theta$, se definen (véanse Figura 3-1 y Figura 3-2):

- $p_{min}\angle\theta$ o planta discreta de módulo mínimo, p_{min} , en la plantilla $\mathfrak{S}P_r(j\omega_i)$.

$$p_{min} = \min\{|P_r(j\omega_i)|, r = 1, \dots, J\} \quad (3.14)$$

- $p_{max}\angle\theta$ o planta discreta de módulo máximo, p_{max} , en $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$.

$$p_{max} = \max\{|P_r(j\omega_i)|, r = 1, \dots, J\} \quad (3.15)$$

En el documento se hará referencia a los módulos p indistintamente en magnitudes lineales o en decibelios, añadiendo en este último caso las unidades, [dB], cuando haya lugar a error de interpretación. En los algoritmos que calculan los contornos las unidades de todos los módulos son lineales, aunque sobre el NC se representen luego en decibelios. En cualquier caso, los módulos p siempre responden a números mayores que cero, es decir, en magnitudes lineales: $0 < p < +\infty$, y en decibelios: $-\infty \text{dB} < p < +\infty$. Conforme aumenta la frecuencia, en plantas propias, el módulo p disminuye ($p \rightarrow 0$ o $-\infty \text{dB}$).

- $p\angle\theta_{min}$ o planta discreta de menor fase, θ_{min} , en $\mathfrak{S}P_r(j\omega_i)$.

$$\theta_{min} = \min\{\angle P_r(j\omega_i), r = 1, \dots, J\} \quad (3.16)$$

- $p\angle\theta_{max}$ o planta discreta de mayor fase, θ_{max} , en $\mathfrak{S}P_r(j\omega_i)$.

$$\theta_{max} = \max\{\angle P_r(j\omega_i), r = 1, \dots, J\} \quad (3.17)$$

Los argumentos θ se expresan en grados, [°], sobre el NC, pero en la resolución de las ecuaciones que calculan los contornos, su unidades son los radianes, [rad]. En cualquier caso los argumentos siempre responden a valores negativos, de acuerdo al intervalo de diseño empleado por Nichols: $[-360^\circ, 0^\circ]$, es decir, $-360^\circ \leq \theta \leq 0^\circ$ o $-2\pi \leq \theta \leq 0 \text{rad}$.

Nótese cómo en las plantillas para las familias \wp_1 la planta de módulo mínimo es también la de menor fase, $p_{min}\angle\theta_{min}$, y la de módulo máximo es también la de mayor fase, $p_{min}\angle\theta_{min}$. Sin embargo, para familias \wp_2 se tiene $p_{min}\angle\theta_{max}$ y $p_{max}\angle\theta_{min}$. Esto es debido, al comentario anterior referente a la contribución de los parámetros polos y ceros, en la incertidumbre en fase exclusivamente para \wp_1 o en ambas incertidumbres (fase y en ganancia) para \wp_2 .

Se definirá también:

- Δp , o genéricamente $\Delta p(\omega_i)$, como la incertidumbre en magnitud absoluta de una plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$, también denominada incertidumbre vertical, modular o en ganancia:

$$\Delta p(\omega_i) = Lm \frac{P_{max}}{P_{min}} [dB] \text{ o } \Delta p(\omega_i) = \frac{P_{max}}{P_{min}} \quad (3.18)$$

El término ' Lm ' se empleará a lo largo del documento haciendo referencia a la expresión ' $20 \cdot \log_{10}$ ', que transforma magnitudes lineales en decibelios. Nótese también que un incremento puramente lineal de módulos, $p_{max} - p_{min}$, se transforma en un cociente, p_{max}/p_{min} , al aplicar Lm $p_{max} - Lm p_{min}$. En el documento se hará referencia a la incertidumbre en magnitud indistintamente como p_{max}/p_{min} , $p_{max}/p_{min}[dB]$ o Δp .

- $\{p\}$ define la incertidumbre relativa del módulo o de la magnitud de la planta p .
- $\Delta\theta$, o genéricamente $\Delta\theta(\omega)$ para expresar la incertidumbre en fase absoluta de una plantilla $\Im P(j\omega)$, también denominada incertidumbre horizontal:

$$\Delta\theta(\omega_i) = |\theta_{max}(\omega_i) - \theta_{min}(\omega_i)| \quad (3.19)$$

- $\{\theta\}$ define la incertidumbre relativa de la fase de la planta θ .

Las **incertidumbres absolutas** de las plantillas en cada frecuencia (tamaño de la incertidumbre), $\Delta p(\omega)$ e $\Delta\theta(\omega)$, son **decisivas en la resolución del problema de control**. Resulta evidente, que un sistema sin incertidumbre resulta más sencillo de gobernar y se podrán lograr comportamientos (especificaciones) más agresivos que en un sistema donde el modelo no esté perfectamente definido (todo sistema presenta esta característica en la práctica en mayor o menor medida). En estos últimos un excesivo desconocimiento del sistema puede incluso impedir alcanzar unos comportamientos robustos mínimos o que los posibles comportamientos alcanzables sean insuficientes, en cuyo caso, la división de la incertidumbre puede resolver el problema. La dificultad en el control de sistemas debido a su incertidumbre, no viene sólo condicionada por el tamaño absoluto de ésta, sino también por sus **valores relativos**, es decir, por la ubicación de la plantilla $\Im P$ y en definitiva de sus valores $\{\theta\}$ y $\{p\}$. La dificultad en el control con incertidumbre se muestra a través de los contornos QFT que serán tanto más agresivos cuanto mayor sea la incertidumbre absoluta, y también, función de los valores relativos de ésta (ubicación de la plantilla).

Para una plantilla genérica donde, a priori, $\Delta\theta \neq 0$ e $\Delta p \neq 0$, el estudio de la influencia de la incertidumbre (absoluta y relativa) en magnitud y en fase sobre los contornos QFT será abordado en dos pasos. Por un lado, se analizará la influencia de la incertidumbre vertical $\{p\}$ e Δp supuesta nula la incertidumbre horizontal (θ constante e $\Delta\theta = 0$). Y por otro, la influencia de

$\{\theta\}$ e $\Delta\theta$ supuesto p constante e $\Delta p=0$. Esto nos introduce en la definición de plantillas con sólo incertidumbre vertical u horizontal.

Plantillas con sólo incertidumbre vertical u horizontal

Aparte de la simplificación que éstas persiguen en el estudio de la influencia sobre los contornos de la incertidumbre horizontal y vertical por separado, para determinados modelos paramétricos y en ciertas frecuencias se dan realmente este tipo de plantillas. A continuación se describen algunos casos.

Las **plantillas con tan sólo incertidumbre vertical**, $\Im P$ con $\Delta\theta=0$, se denotarán como: $\Im P=\{p\} \angle \theta$. Plantillas de estas características son típicas en bajas (ω_{lf}) y altas frecuencias (ω_{hf}), en ausencia de parámetros retardo con incertidumbre y prescindiendo de la incertidumbre no estructurada (particular de las altas frecuencias). Nótese que todo modelo real racional, incluso con incertidumbre, tiene un comportamiento asintótico por debajo de una cierta frecuencia, ω_{lf} , y por encima de otra, ω_{hf} .

En alta frecuencia, tomando límites sobre la forma racional⁵ de $P(j\omega)$ en (3.12) y (3.13) más un posible retardo sin incertidumbre se tiene:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_{hf} = \infty} P(j\omega) = \frac{K}{(j\omega_{hf})^{(n^\circ \text{ pol} - n^\circ \text{ zer})}} e^{-j\omega_{hf} L_{cte}} \quad (3.20)$$

Y en baja frecuencia:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_{lf} = 0} P(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^{n_{pol_origen}}} \quad (3.21)$$

donde K en (3.20) y (3.21) es el parámetro que representa la incertidumbre vertical de la plantilla. K tomará dos tipos de valores en función del formato de planta, \wp_1 o \wp_2 , y de la frecuencia, ω_{lf} o ω_{hf} . Y en función de ellos también se modificará la incertidumbre vertical, $\Delta p = Lm(K_{max}/K_{min})$ según (3.18). Se darán dos posibles valores para K e Δp :

$$K = k \Rightarrow \Delta p = Lm \frac{k_{max}}{k_{min}} \quad (3.22)$$

$$K = \frac{k \cdot \prod_{i=1, \dots, m} z_i \prod_{h=1, \dots, l} \omega_{nz_h}^2}{\prod_{j=1, \dots, n} p_j \prod_{g=1, \dots, q} \omega_{np_g}^2} \Rightarrow$$

⁵ Se prescinde de la incertidumbre no estructurada

$$\Delta p = Lm \left(\frac{k_{max}}{k_{min}} \prod_{i=1}^m \frac{z_{i_max}}{z_{i_min}} \prod_{j=1}^n \frac{p_{j_min}}{p_{j_max}} \prod_{h=1}^l \frac{\omega_{nz_h_max}}{\omega_{nz_h_min}} \prod_{g=1}^q \frac{\omega_{np_g_min}}{\omega_{np_g_max}} \right) \quad (3.23)$$

En **alta frecuencia**, ω_{hf} , para familias con formato \wp_1 , el valor de K en (3.20) se corresponde con el definido en (3.23). La correspondiente incertidumbre vertical de la plantilla, Δp , también se define en (3.23). Y de acuerdo a (3.20) la fase donde se centra la plantilla es:

$$\theta = -90^\circ (n^\circ \text{pol} - n^\circ \text{zer}) - L = \text{cte.} \quad (3.24)$$

Para familias \wp_2 la plantilla de incertidumbre sólo vertical en alta frecuencia también se sitúa sobre la fase constante en (3.24), pero su incertidumbre vertical, Δp , se corresponde con la definida en (3.22).

En **baja frecuencia**, ω_{bf} , para familias con formato \wp_1 , el valor de K en (3.21) se corresponde con el definido en (3.22). La correspondiente incertidumbre vertical de la plantilla, Δp , también se define en (3.22). Y de acuerdo a (3.21) la fase donde se centra la plantilla sería:

$$\theta = -90^\circ (n^\circ \text{pol_origen}) = \text{cte.} \quad (3.25)$$

Para familias \wp_2 la plantilla de incertidumbre sólo vertical de baja frecuencia también se sitúa sobre la fase constante en (3.25), pero su incertidumbre vertical, Δp , se corresponde con la definida en (3.23).

La Figura 3-3 muestra algunas topologías características de las plantillas con sólo incertidumbre vertical.

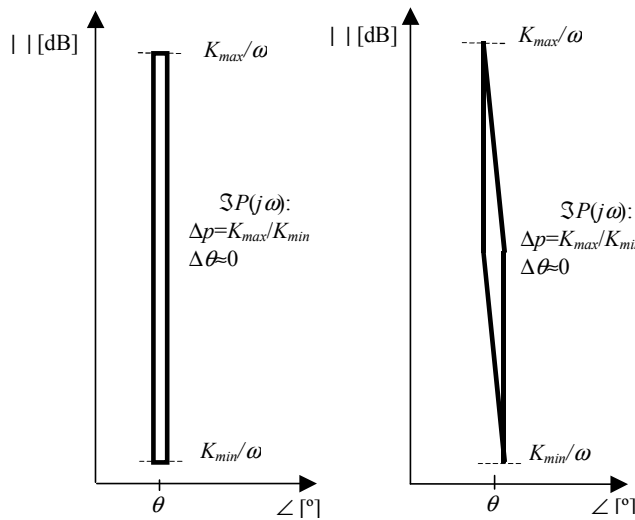


Figura 3-3: Plantilla con sólo incertidumbre vertical

Como dato curioso, no existen referencias bibliográficas que analicen la evolución en la forma de las plantillas cuando aumenta la frecuencia. Kelemen y Bagchi (1993) apuntan que esta evolución podría dar luz sobre los fenómenos físicos que generan la incertidumbre en la planta.

Las **plantillas con tan sólo incertidumbre horizontal**, $\mathfrak{S}P$ con $\Delta p=0$, se denotarán como $\mathfrak{S}P=p\angle\{\theta\}$. Por ejemplo, éstas pueden darse en cualquier frecuencia, cuando el único parámetro con incertidumbre es el retardo L , o también en el intervalo $\omega_f \ll \omega \ll \omega_{hf}$ para plantas con formato $\mathfrak{S}P_1$ que no presentan incertidumbre en su parámetro ganancia, k , o su incertidumbre es muy pequeña respecto a la de los parámetros cero y polo. Su apariencia se muestra de forma genérica en la Figura 3-4.

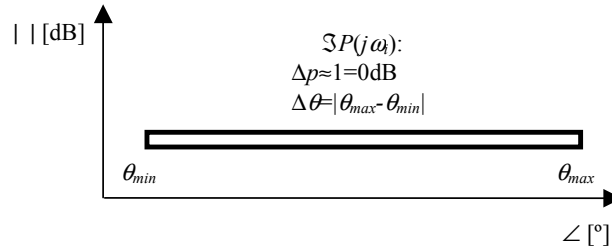


Figura 3-4: Plantilla genérica con sólo Incertidumbre Horizontal

Planta nominal

De las J plantas discretas que forman la plantilla ω_i se seleccionará una como nominal, sin que la elección de una u otra condicione el diseño posterior (Jayasuriya, 1993). Esto se demuestra también en este documento en la Sección 3.3.3. Posteriormente, se hará referencia a dicha planta nominal como $P_0(j\omega)=p_0\angle\theta_0$.

3.3 EL POTENCIAL DE LOS CONTORNOS

3.3.1 QUÉ SON LOS CONTORNOS

La idea básica en QFT es convertir las especificaciones robustas de diseño en lazo cerrado, genéricamente⁶ $|T_k(j\omega)| \leq \delta_k(\omega_i)$, $k=1, \dots, M$ (véase Sección 3.1), y la incertidumbre del sistema, expresada con las plantillas $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$ (véase Sección 3.2), en curvas de restricción o contornos de estabilidad y comportamiento robustos para la función de transferencia de lazo abierto

⁶ Nótese que las especificaciones con desigualdad doble se reducen a una simple desigualdad como ésta durante el proceso de síntesis de G , y cobran entidad propia en el diseño de F .

nominal, $L_0(j\omega_i)$. Existirá un contorno específico para cada especificación k y para cada frecuencia ω_i : $B_{0k}(j\omega_i)$, $k=1, \dots, M$; $i=1, \dots, N$. Si se desean cumplir simultáneamente para cada frecuencia el conjunto de especificaciones, la intersección resultante de contornos en dicha frecuencia $B_0(j\omega_i) = \bigcap_{k=1}^M B_{0k}(j\omega_i)$, debe ser satisfecha por la función de transferencia en lazo abierto a esa frecuencia, $L_0(j\omega_i)$. Para ello, el controlador aportará a la planta nominal, $P_0(j\omega)$, la ganancia y la fase necesarias, $L_0(j\omega) = G(j\omega)P_0(j\omega)$. Si esto se cumple para el conjunto de frecuencias de interés, $\omega_{i=1, \dots, N}$, el problema de control con QFT queda resuelto.

Por tanto, los contornos QFT son el punto clave en la solución al problema de control. Éstos expresan en una única entidad, la naturaleza (incluida la incertidumbre) del sistema a controlar, y al mismo tiempo los objetivos del diseñador (especificaciones) para ese sistema. Y si sobre este panorama, añadimos la situación de partida, es decir, la planta nominal, se posee información suficiente (gráfica o analíticamente) sobre qué puede esperarse y qué no del control realimentado de ese sistema. En definitiva, si las especificaciones, dada la propia naturaleza del sistema, son alcanzables por un controlador G lo suficientemente sencillo. A partir de aquí, se derivan otros múltiples objetivos, como ¿cuál es el comportamiento más agresivo exigible al sistema?, o ¿cómo modificar éste y al mismo tiempo cumplir unas especificaciones prefijadas?. Todo ello, necesita resolver una única cuestión: el conocimiento más exhaustivo posible de los contornos QFT.

El primer problema a tratar en este planteamiento es cómo se calculan los contornos, cuáles son sus ecuaciones, para posteriormente estudiar éstas con detalle. Esta primera aportación se incluye en este apartado. En los Capítulos 4 al 6 se analizarán los contornos específicos de cada problema de control planteados en (3.6) a (3.10), extrayéndose algunas conclusiones generales junto con algún ejemplo. El Capítulo 7 presenta un ejemplo global de ilustración de resultados.

3.3.2 COMO SE CALCULAN LOS CONTORNOS. INECUACIONES CUADRÁTICAS

Desde los comienzos de la técnica QFT se eligió trabajar con la función de transferencia de lazo abierto L por su buena sensibilidad frente a incrementos del coste de realimentación (Bode, 1945) y porque en ella es fácilmente identificable ($L=GP$) el controlador resultante, que ante todo ha de ser práctico; (Horowitz, 1991). Por ello, los contornos QFT se trazan para esta función y les denominaremos L -contornos (o contornos para L).

De entre los múltiples algoritmos que se han venido desarrollando para automatizar de forma eficiente el cálculo de los contornos (véase Sección 2.3.3), este trabajo se basa fundamentalmente en los presentados en: Chait y Yaniv (1993) (véase Sección 2.7.3), Yaniv y Chait (1991, 1992, 1993), y Chait *et al.* (1995). Estos autores han desarrollado inecuaciones cuadráticas para sistemas genéricos incluyendo sistemas continuos y discretos, así como modelos paramétricos y no paramétricos. Las inecuaciones cuadráticas expresan la relación existente entre la incertidumbre de la planta, las especificaciones de lazo cerrado, y los contornos que el controlador (o la función de transferencia de lazo abierto) debe cumplir para satisfacerlas. Estos algoritmos constituyen la base de cálculo de los contornos en la Toolbox de QFT de MATLAB (Borghesani *et al.*, 1994). Así mismo, el cálculo de contornos con inecuaciones cuadráticas es el fundamento de las aportaciones científicas en este documento presentadas.

Basado en Chait y Yaniv (1993) a continuación se incluye el Algoritmo 3.1 para el cálculo de los contornos que representan a los $|T_k(j\omega)| \leq \delta_k(\omega)$ $k=1, \dots, 5$ problemas de control introducidos en la Sección 3.1.

Algoritmo 3.1: Cálculo de Contornos con Inecuaciones Cuadráticas

1. Seleccionar el problema de control k , entre $k=1, \dots, M$, con formato $|T_k(j\omega)| \leq \delta_k(\omega)$ en (3.6) a (3.11).
2. Discretizar el dominio de frecuencias $\omega \in \Omega$, en el que ha de satisfacerse la especificación $\delta_k(\omega)$, en un conjunto finito de frecuencias: $\Omega_k = \{\omega_i, i=1, \dots, N\}_k$.
3. Evaluación de la planta con incertidumbre $\wp = \{P(j\omega)\}$ en cada $\omega_i \in \Omega_k$, obteniéndose un conjunto de N plantillas: $\mathfrak{P} = \{\mathfrak{P}(j\omega_i), i=1, \dots, N\}$. Cada plantilla $\mathfrak{P}(j\omega_i)$ esta formado a su vez por un conjunto discreto de J puntos correspondientes a la discretización del espacio de incertidumbre paramétrica (ver Sección 3.2): $\mathfrak{P}(j\omega_i) = \{P_r(j\omega_i), r=1, \dots, J\}$. Cada planta puede expresarse en forma polar como: $P_r(j\omega_i) = p_r(\omega_i) \cdot e^{j\theta_r(\omega_i)} = p \angle \theta$. De las J plantas que forman cada plantilla, seleccionar cualquiera como planta nominal $P_0(j\omega_i) = p_0 \angle \theta_0$.
4. El controlador a diseñar se puede expresar en forma polar como: $G(j\omega_i) = g(\omega_i) \cdot e^{j\phi} = g \angle \phi$. Definir un rango Φ de variación de la fase ϕ del controlador y discretizarlo, por ejemplo $\Phi = [-360^\circ : 5^\circ : 0^\circ]$. La dependencia

que tiene la fase del controlador de la frecuencia ha sido omitida asumiendo que es la misma para los contornos de todas las frecuencias y de todas las especificaciones.

5. Seleccionar una frecuencia $\omega_i \in \Omega_k$.
6. Seleccionar en la plantilla ω_i , (i) una planta $P_r(j\omega_i) = p \angle \theta$, en especificaciones simples o problemas 1-DOF; o (ii) dos plantas arbitrarias $p_d \angle \theta_d$ y $p_e \angle \theta_e$, para especificaciones dobles o en problemas 2-DOF.
7. Seleccionar una fase del controlador $\phi \in \Phi$.
8. En este paso del algoritmo, el problema de control k , $|T_k(j\omega)| \leq \delta_k(\omega)$, se traduce en la resolución de una inequación cuadrática sin incertidumbre con el siguiente formato:

$$I_{\omega_i}^k = a \cdot g^2 + b \cdot g + c \geq 0 \quad (3.26)$$

Tras los pasos 5, 6 y 7, los coeficientes a , b y c toman valores discretos: (i) función de p , θ , δ_k y ϕ para 1-DOF y (ii) función de p_d , θ_d , p_e , θ_e , δ_k y ϕ en 2-DOF. Entonces, el único parámetro desconocido en (3.26) es la magnitud del controlador, g . La resolución de la ecuación cuadrática $I_{\omega_i}^k = 0$, entrega dos raíces g_1 y g_2 , correspondientes al valor negativo y positivo de la raíz cuadrada, respectivamente. Escogiendo la/s solución/es real/es g_1 y/o g_2 , y en función del signo de a , se calcula para el valor de especificación δ_k y la planta $p \angle \theta$ (o plantas $p_d \angle \theta_d$ y $p_e \angle \theta_e$, en 2-DOF) uno o dos puntos del contorno, $g_{sup} \angle \phi$ y/o $g_{inf} \angle \phi$. Estos puntos de contorno deben ser satisfechos por el módulo g en la fase discreta ϕ .

9. Repetir el Paso 7 en todas las fases en Φ definidas en el Paso 4. Se obtiene el **G-contorno en ω_i** o $B_k(j\omega_i)$, formado por $g_{sup} \angle \phi$ y/o $g_{inf} \angle \phi$, para el intervalo de diseño $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0]$, **para un sistema sin incertidumbre** $p \angle \theta$, y el valor de especificación δ_k ; (véase Sección 3.3.3). Para satisfacer (3.26), el controlador $G = g \angle \phi$ debe cumplir el contornos $B_k(j\omega_i)$ del siguiente modo:

$$\{ \boxed{g \angle \phi \geq g_{sup} \angle \phi} \text{ y/o } \boxed{g \angle \phi \leq g_{inf} \angle \phi}; \boxed{\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]} \} \quad (3.27)$$

10. Repetir el Paso 6 para: (i) las J plantas de $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$ en especificaciones 1-DOF, (ii) las J plantas combinadas en parejas para especificaciones 2-DOF.

11. Seleccionar entre el conjunto de curvas calculadas en el Paso 10, $\{g_{sup} \angle \phi\}$ y/o $\{g_{inf} \angle \phi\}$, la/s curva/s intersección más desfavorable/s cumpliendo la inequación (3.27). Se obtiene el **G-contorno en la frecuencia ω** : $B_k(j\omega_k) = \{g_{SUP} \angle \phi \text{ y/o } g_{INF} \angle \phi, \phi \in [-360^\circ, 0]\}$, **para un sistema con incertidumbre**: $\Im P(j\omega_k) = \{p \angle \theta\}$, y un valor de especificación $\delta_k(\omega)$; (véase Sección 3.3.4). Ahora la restricción (3.27) se extiende a:

$$\boxed{g \angle \phi \geq g_{SUP} \angle \phi} \text{ y/o } \boxed{g \angle \phi \leq g_{INF} \angle \phi}; \boxed{\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]} \quad (3.28)$$

12. Referenciar los contornos a la planta nominal. Hacer $l_{0INF} = p_0 g_{INF}$ y $l_{0SUP} = p_0 g_{SUP}$, siendo $\psi_0 = \phi + \theta_0$. Se obtienen el **L_0 -contorno en la frecuencia ω** : $B_{0k}(j\omega_k) = \{l_{0SUP} \angle \psi_0 \text{ y/o } l_{0INF} \angle \psi_0, \psi_0 \in [-360^\circ, 0]\}$, que debe satisfacer $L_0(j\omega_k) = l_0 \angle \psi_0$ para cumplir $|T_k(j\omega_k)| \leq \delta_k(\omega_k)$ de modo que:

$$\boxed{l_0 \angle \psi_0 \geq l_{0SUP} \angle \psi_0} \text{ y/o } \boxed{l_0 \angle \psi_0 \leq l_{0INF} \angle \psi_0}; \boxed{\psi_0 \in \Psi_0 = [-360^\circ, 0^\circ]} \quad (3.29)$$

13. Repetir el Paso 5 en todo el rango de frecuencias Ω_k . Se obtiene un conjunto de N contornos, $B_{0k}(j\omega) = \{B_{0k}(j\omega_k), i=1, \dots, N\}$, para $L_0(j\omega)$. Paralelamente, al conjunto de N contornos para $G(j\omega)$, se le representará como: $B_k(j\omega) = \{B_k(j\omega_k), i=1, \dots, N\}$.

14. Repetir el Paso 1 para todos los objetivos de control $k=1, \dots, M$. Calculándose el conjunto de L_0 -contornos $B_0(j\omega) = \{B_{0k}(j\omega), k=1, \dots, M\}$ y de G -contornos $B(j\omega) = \{B_k(j\omega), k=1, \dots, M\}$.

15. Determinar el conjunto unión de rangos de frecuencias para los diferentes problemas de control, $\{\cup \Omega_k, k=1, \dots, M\}$. Y en cada frecuencia $\omega_i \in \{\cup \Omega_k, k=1, \dots, M\}$, calcular el contorno intersección más desfavorable para $L_0(j\omega_k)$ respetando (3.29):

$$B_0(j\omega_i) = \bigcap_{k=1}^M B_{0k}(j\omega_i), \quad \omega_i \in \bigcup_{k=1}^M \Omega_k \quad (3.30)$$

$B_0(j\omega)$ estará formado por una o dos curvas que se deberán cumplir de modo que:

$$\boxed{l_0 \angle \psi_0 \geq b_{0SUP} \angle \psi_0} \text{ y/o } \boxed{l_0 \angle \psi_0 \leq b_{0INF} \angle \psi_0}; \boxed{\psi_0 \in \Psi_0 = [-360^\circ, 0^\circ]} \quad (3.31)$$

El conjunto de dichos contornos considerando todas las frecuencias, $B_0(j\omega) = \{B_0(j\omega_k), i=1, \dots, N\}$, son finalmente los contornos QFT, sobre los que se realiza la síntesis de $L_0(j\omega) = G(j\omega)P_0(j\omega)$.

Paralelamente los contornos intersección para el controlador $G(j\omega)$ serían:

$$B(j\omega) = \{B(j\omega_i), i = 1, \dots, N\}, \quad B(j\omega_i) = \bigcap_{k=1}^M B_k(j\omega_i), \quad \omega_i \in \bigcup_{k=1}^M \Omega_k \quad (3.32)$$

Y en cada frecuencia se cumplirá:

$$\boxed{g\angle\phi \geq b_{SUP}\angle\phi} \text{ y/o } \boxed{g\angle\phi \leq b_{INF}\angle\phi}; \quad \boxed{\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]} \quad (3.33)$$

La existencia de solución al problema de control realimentado, en presencia de incertidumbre y con múltiples objetivos de comportamiento, depende de los contornos obtenidos con el Algoritmo 3.1. En particular, de que exista intersección no nula entre los contornos que representan los M problemas de control en la frecuencia ω . Es decir, que exista intersección no nula en (3.30) y por tanto exista $B_\theta(j\omega)$ para los L_θ -contornos. Esto a su vez, se cumple si existe intersección no nula entre los G -contornos, es decir, si existe $B(j\omega)$ según (3.32). La equivalencia entre los resultados para los G - y los L_θ -contornos se analiza a continuación en la Sección 3.3.5.

A su vez, la intersección no nula en los G -contornos en ω_i depende del valor de especificación y de los valores absolutos y relativos de la incertidumbre en dicha frecuencia. Los G -contornos en ω_i , $g_{INF}\angle\phi$ y/o $g_{SUP}\angle\phi$, calculados en los Pasos 10 y 11 del Algoritmo 3.1 se estudian en la Sección 3.3.4.

Y en último término la existencia de solución depende de los valores complejos $g_1\angle\phi$ y $g_2\angle\phi$ que resuelven la ecuación cuadrática en (3.26) en el Paso 8 del Algoritmo 3.1. Y también de cómo se conforman $g_{inf}\angle\phi$ y $g_{sup}\angle\phi$ en el Paso 9, consideradas éstas curvas las restricciones para un sistema sin incertidumbre. Esto se revisa a continuación en la Sección 3.3.3.

3.3.3 CONTORNOS PARA EL CONTROLADOR SIN LA INCERTIDUMBRE. TIPOLOGÍAS

Para el problema de control k , $|T_k(j\omega)| \leq \delta(\omega)$, seleccionada una frecuencia discreta ω_i , se tiene un único valor de especificación $\delta_k(\omega_i)$ y una plantilla de incertidumbre frecuencial $\Im P(j\omega)$. Y si además se selecciona una única planta $p\angle\theta$ en $\Im P$ (dos plantas para 2-DOF, $p_d\angle\theta_d$ y $p_e\angle\theta_e$), al resolver $I_{\omega_i}^k \geq 0$ en (3.26) para el conjunto de fases $\Phi = \{\phi\} = [-360^\circ, 0^\circ]$ se obtendrá un G -contorno o restricción para $g\angle\phi$, $B_k(j\omega)$. Nótese que todavía no se ha considerado la incertidumbre, es decir, el conjunto de plantas: $\Im P = \{p\angle\theta\}$. En la resolución de la inecuación sin incertidumbre $I_{\omega_i}^k \geq 0$ existen distintos

- Si $a > 0$ (recta real superior en la Figura 3-5), la inecuación (3.34) se cumple si en ϕ , $g > g_{max}$ o $g < g_{min}$ (signos positivos de I_{α}^k). En este caso diremos que en ϕ , existen dos contornos, uno superior $g_{sup} = g_{max}$ y otro inferior $g_{inf} = g_{min}$, o también un contorno doble-valuado (dos valores reales y positivos en la misma fase), g_{inf_sup} . En el presente trabajo los contornos doble-valuados, con $a > 0$, se denominarán de **TIPOLOGÍA A**; véase Figura 3-6(a).
- Si $a < 0$ (recta real inferior en la Figura 3-5), la inecuación (3.34) se cumple si en ϕ , $g_{min} < g < g_{max}$ (dando signo positivo en I_{α}^k). En este caso diremos que en ϕ , existen dos contornos, uno superior (porque g debe permanecer por encima) $g_{sup} = g_{min}$ y otro inferior $g_{inf} = g_{max}$. Nótese que también se trata de contornos doble-valuados (dos valores reales y positivos en la misma fase), g_{inf_sup} , pero que la forma de satisfacerlos es distinta a la tipología anterior. En el presente trabajo los contornos doblevaluados, con $a < 0$, se denominarán de **TIPOLOGÍA C**; véase la Figura 3-6(c).
- g_1 o g_2 es real y positivo, y el otro es real y negativo. Existe un único contorno en ϕ , $g_{max} = \max\{g_1, g_2\}$. Sobre la Figura 3-5, se cumpliría, que $g_{min} < 0 < g_{max}$, y además, en función del signo de a , la especificación (3.34) se satisface para un intervalo distinto de valores de g :
 - Si $a > 0$ (recta real superior en la Figura 3-5), la inecuación (3.34) se cumple si $g > g_{max}$ en ϕ . En este caso diremos que en ϕ , existe un único contorno superior $g_{sup} = g_{max}$ o también un contorno simple-valuado superior. En el presente trabajo los contornos simple-valuados superiores ($a > 0$) se denominarán de **TIPOLOGÍA B**; véase la Figura 3-6(b).
 - Si $a < 0$ (recta real inferior en la Figura 3-5), la inecuación (3.34) se cumple si $g_{min} < g$ en ϕ . En este caso diremos que en ϕ , existe un único contorno inferior $g_{inf} = g_{min}$ o también un contorno simple-valuado inferior. En el presente trabajo los contornos simple-valuados inferiores ($a < 0$) se denominarán de **TIPOLOGÍA D**; véase Figura 3-6(d).

Nótese que el concepto de contorno ‘superior’ (‘inferior’) hace referencia a la forma en que el módulo del controlador g debe satisfacer el contorno, $g \geq g_{sup}$ ($g \leq g_{inf}$), y sin embargo, el término ‘máximo’ (‘mínimo’) hace referencia a qué contorno tiene un módulo o altura mayor (menor), $g_{max} = \max\{g_1, g_2\}$ ($g_{min} = \min\{g_1, g_2\}$). Siguiendo el criterio habitual en QFT (Borghesani *et al.* 1994) los contornos superiores se representan con línea continua y los inferiores con discontinua, como se ilustra en la Figura 3-6.

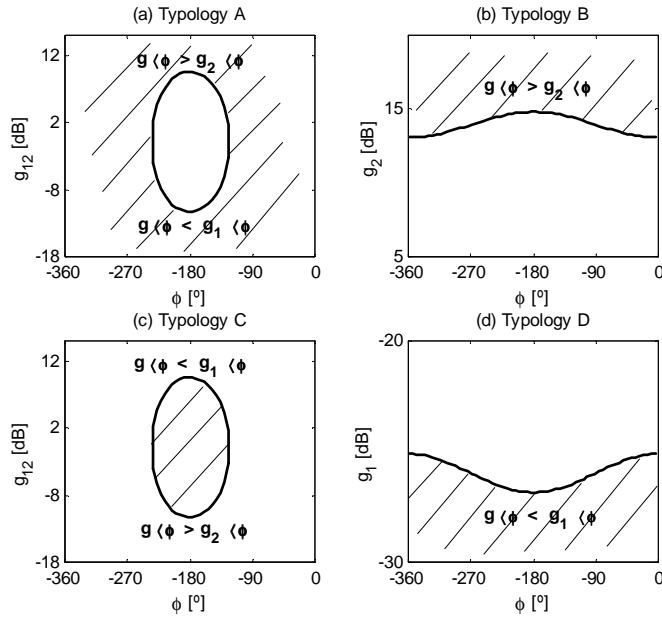


Figura 3-6: Tipologías de contornos sin considerar la incertidumbre

Los Capítulos 4 al 6 estudian la resolución de la inecuación (3.34) particularizándola para los problemas de control $k=1, \dots, 5$, planteados en (3.6) a (3.11), y analizan la tipología y formulación de los contornos resultantes. A partir de los resultados descritos en dichos capítulos se puede **simplificar la clasificación y nomenclatura genérica de contornos sin incertidumbre** como sigue:

- (i) Las soluciones g_1 y/o g_2 , **siempre** responden a **tipologías A, B, D** (la tipología **C no aparece**). Ver Figura 3-6.
- (ii) Las soluciones g_1 siempre pertenecen a **contornos inferiores**: mono-valorados, cuando g_2 resulte negativa; o doble-valorados, cuando g_2 sea también positiva, cumpliéndose entonces también que $g_1 < g_2$. Luego, en el presente trabajo se cumple la equivalencia $g_{inf} = g_1$, y se debe satisfacer $g < \phi \leq g_1 < \phi$.
- (iii) Las soluciones g_2 siempre responden a **contornos superiores**: mono-valorados, cuando g_1 no es válida por ser negativa; o doble valorados, cuando sea válida también g_1 , y además resulta que $g_1 < g_2$. Entonces, en el presente trabajo se cumple la equivalencia $g_{sup} = g_2$, que debe satisfacerse tal que $g < \phi \geq g_2 < \phi$.

- (iv) Cuando para una fase ϕ aparecen dos soluciones reales y positivas, $g_1 < g_2$ o $g_{inf} < g_{sup}$, en otra fase ambos valores son complejos conjugados o ambos negativos. Entonces, los contornos doble-valorados o de tipología A (g_1 y g_2 reales y positivos) existen en una banda angular $\Phi_{12} = [-180^\circ + \theta \mp \varepsilon]$, $\varepsilon \leq 90^\circ$, dentro del intervalo de diseño $\Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. Figura 3-6(a).
- (v) Cuando para una fase ϕ aparece sólo una solución real y positiva (g_1 o g_2), esto mismo ocurre para el resto de las fases $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. Si la solución real positiva es $g_1 = g_{inf}$, el contorno es de tipología D; Figura 3-6(d). Y si la solución real positiva es $g_2 = g_{sup}$, el contorno es de tipología B; Figura 3-6(b).

Debe remarcar que estas simplificaciones sólo son válidas: (a) para los problemas planteados en el presente trabajo, no descartándose la posibilidad de que con otros planteamientos pudieran aparecer tipologías C, para las que se debería emplear la definición genérica de contornos superior e inferior; (b) para el sistema sin incertidumbre, haciéndose extensibles al sistema global con incertidumbre según se indica en la siguiente sección (Sección 3.3.4).

La tipología B en problemas 2-DOF (especificaciones dobles en (3.19) para los servosistemas) puede presentar formas alternativas a la que expresa la Figura 3-6(b). No obstante, sigue tratándose de un contorno simple-valorado superior (véase la Figura 3-7) pues ocupa todo el intervalo de diseño y el controlador debe situarse por encima del contorno: $g < \phi \geq g_2 < \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$.

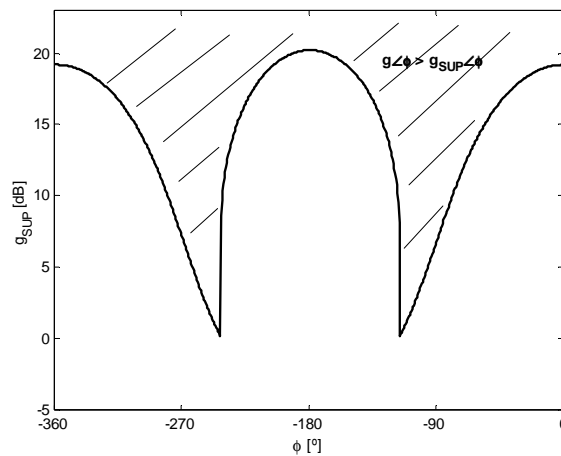


Figura 3-7: Otros formatos de tipología B para el problema 2-DOF del servo

Definición de parámetros característicos en contornos sin incertidumbre

A continuación se definen algunos de los parámetros geométricos característicos de cada tipología A, B y D, respectivamente, en la Figura 3-8, la Figura 3-9 y la Figura 3-10.

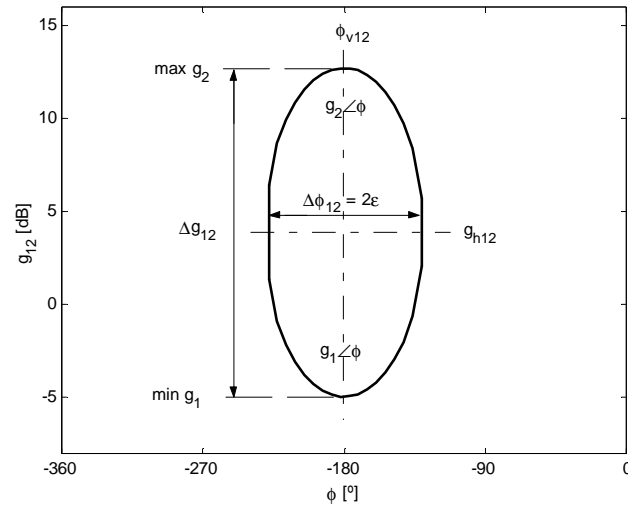


Figura 3-8: Parámetros en contornos de tipología A sin considerar la incertidumbre

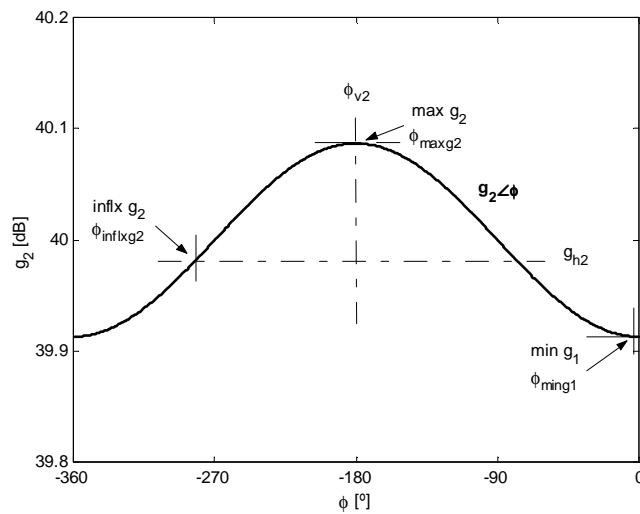


Figura 3-9: Parámetros en contornos de tipología B sin considerar la incertidumbre

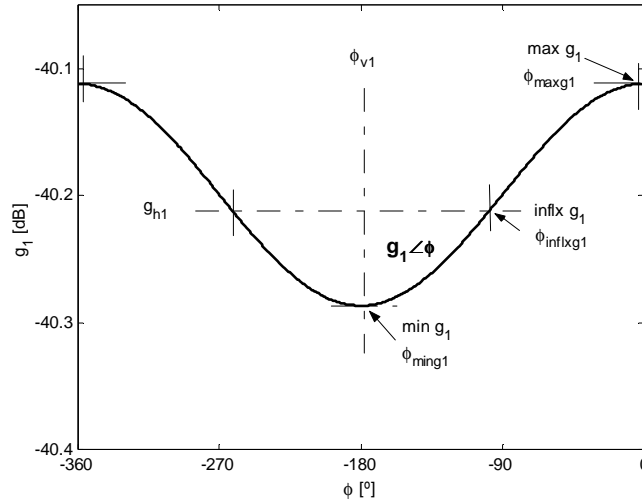


Figura 3-10: Parámetros en contornos de tipología D sin considerar la incertidumbre

3.3.4 CONTORNOS PARA EL CONTROLADOR CON LA INCERTIDUMBRE

Cálculo

Para el mismo problema de control k y la misma frecuencia ω_i que en los Pasos 8 y 9 (solución sin incertidumbre), ahora en el Paso 10 del Algoritmo 3.1 (Sección 3.3.2) se repiten los pasos anteriores calculándose el conjunto de G -contornos para las J plantas en la plantilla ω_i , $\mathcal{P}(j\omega_i) = \{p \angle \theta\}_{1, \dots, J}$. Por tanto, se obtiene un conjunto de contornos $\{g_{inf} \angle \phi\}$ y/o $\{g_{sup} \angle \phi\}$, o de acuerdo a las simplificaciones para los problemas tratados en el presente trabajo, $\{g_1 \angle \phi\}$ y/o $\{g_2 \angle \phi\}$. Como para satisfacer la inecuación (3.26) o (3.34) se debe cumplir (3.27), $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$ y/o $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$, para todas y cada una de las soluciones anteriores, $\{g_1 \angle \phi\}$ y/o $\{g_2 \angle \phi\}$, el contorno intersección superior, $g_{SUP} \angle \phi$, y/o el inferior, $g_{INF} \angle \phi$, se obtendrán como sigue:

$$g_{INF} \angle \phi = \min \{g_{inf} \angle \phi\}_{r=1, \dots, J} = \min \{g_1 \angle \phi\}_{r=1, \dots, J} \quad (3.35)$$

$$g_{SUP} \angle \phi = \max \{g_{sup} \angle \phi\}_{r=1, \dots, J} = \max \{g_2 \angle \phi\}_{r=1, \dots, J} \quad (3.36)$$

Calculados éstos y como resume el Algoritmo 3.1 en el Paso 10, el controlador debe satisfacerlos como indicaba (3.28):

$$g \angle \phi \geq g_{SUP} \angle \phi \text{ y/o } g \angle \phi \leq g_{INF} \angle \phi; \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$$

Al aplicar (3.36) todas las soluciones $\{g_2 \angle \phi\}_{1, \dots, J}$ para el conjunto de plantas $\mathfrak{S}P = \{p \angle \theta\}_{1, \dots, J}$ no tienen por qué pertenecer a la misma tipología. Es decir, $g_2 \angle \phi$ puede ser un contorno monovaluado de tipología B, si todas sus soluciones homólogas g_1 en $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ son reales y negativas. O también, $g_2 \angle \phi$ puede ser el contorno superior de un contorno doblevaluado o de tipología A, cuando ambas soluciones g_{12} son reales y positivas para ciertos ϕ , y complejas o negativas para otros. La Figura 3-11 ilustra el cálculo del contorno solución, $g_{SUP} \angle \phi$, cuando existe homogeneidad de tipologías (gráficas a y b) y cuando no (gráfica c).

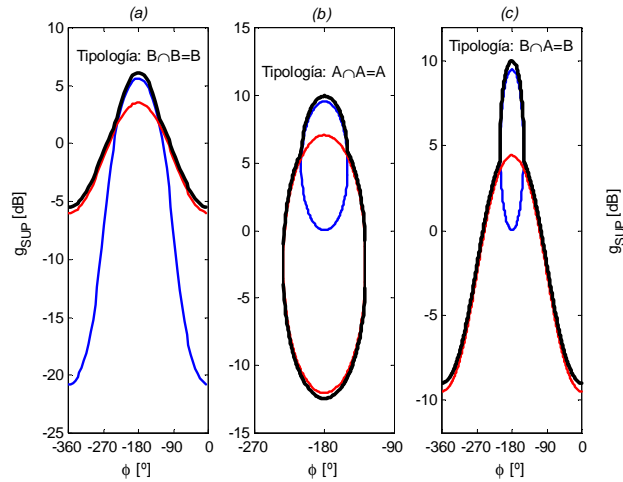


Figura 3-11: Contorno intersección, $g_{SUP} \angle \phi = \max\{g_2 \angle \phi\}$, para distintas tipologías simples $g_2 \angle \phi$

Algo similar ocurre con el cálculo de $g_{INF} \angle \phi$ según (3.35). Las soluciones simples $g_1 \angle \phi$ pueden ser contornos simple-valuados de tipología D (si g_2 es real negativa en $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$), o la parte inferior de contornos doblevaluados de tipología A (si g_{12} son reales y positivas para ciertos ϕ y complejas para otros). La Figura 3-12 ilustra el cálculo de los contornos intersección, $g_{INF} \angle \phi$, cuando existe homogeneidad de tipologías (gráficas a y b) y cuando no (gráfica c).

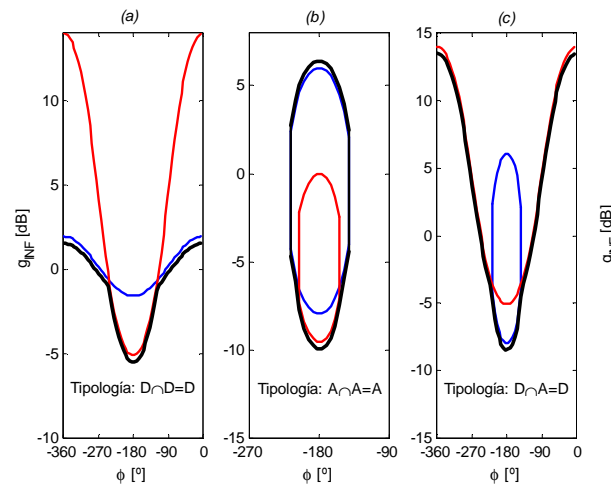


Figura 3-12: Contorno intersección $g_{INF} \angle \phi = \min\{g_1 \angle \phi\}$ para distintas tipologías simples $g_1 \angle \phi$

Tipologías de contornos considerando la incertidumbre

Calculados $g_{INF} \angle \phi$ y $g_{SUP} \angle \phi$, estos G -contornos considerando la incertidumbre pueden seguir clasificándose en tipologías A, B y D, de acuerdo a las pautas ilustradas en la Figura 3-11 y en la Figura 3-12:

- (i) Se presentará una **tipología A** de contornos cuando **para todas las plantas** de la plantilla ω_i se cumple: que las soluciones g_1 y g_2 **son reales y positivas solo en ciertas fases** $\phi \in \Phi_{12} \subset [-360^\circ, 0^\circ]$, **y para el resto de fases**, $\phi \in \bar{\Phi}_{12}$, g_{12} son siempre **complejo conjugadas o negativas**. (En caso de existir una tipología C, se debe añadir la condición de que el parámetro a en (3.26) ha de ser positivo para tratarse de una tipología A). Véase la Figura 3-11b y la Figura 3-12b. El contorno doblevaluado considerando la incertidumbre se calculaba según (3.36) la parte superior, y según (3.35) la inferior.
- (ii) Una **tipología B** de contornos se produce cuando **para alguna** de las **plantas** de la plantilla ω_i se cumple que la solución g_1 **es negativa y real y la solución g_2 es positiva y real, en todas las fases** $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$. Para el resto de plantas las soluciones pueden seguir este mismo patrón (véase la Figura 3-11a) o ser de tipología A simple que no será dominante en la intersección (véase la Figura 3-11b). El contorno superior resultante se calcula de acuerdo a (3.36).

(iii) Una **tipología D** de contornos se produce cuando **para alguna** de las plantas de la plantilla ω_i se cumple que su solución g_2 es **negativa y real** y su solución g_1 es **positiva y real**, en todas las fases $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$. Para el resto de plantas las soluciones pueden seguir este mismo patrón (véase la Figura 3-12a) o ser de tipología A no dominante (véase la Figura 3-12b). El contorno inferior resultante se calcula de acuerdo a (3.35).

Definición de parámetros característicos en contornos con incertidumbre

La Figura 3-13, Figura 3-14 y Figura 3-15 muestran algunos parámetros geométricos característicos para los contornos de tipología A, B y D, respectivamente, considerada la incertidumbre.

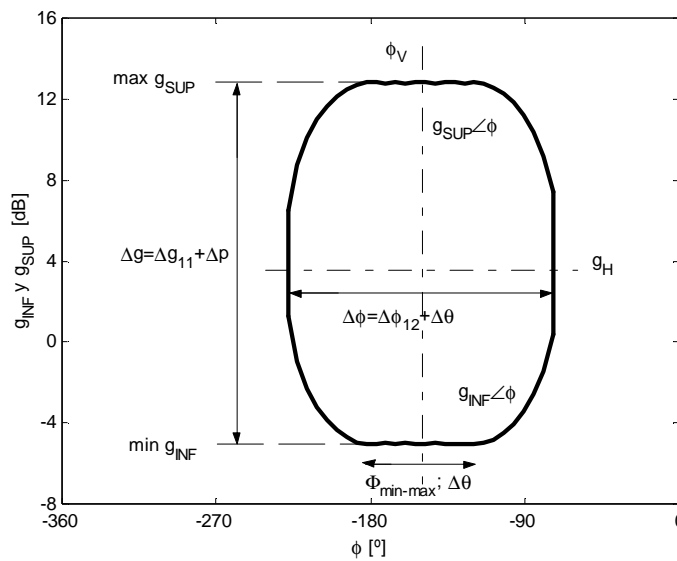


Figura 3-13: Parámetros en contornos de tipología A considerada la incertidumbre

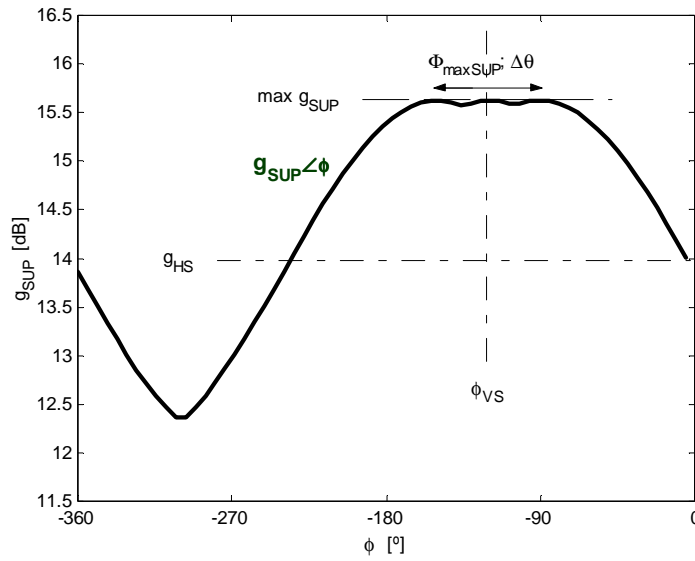


Figura 3-14: Parámetros en contornos de tipología B considerada la incertidumbre

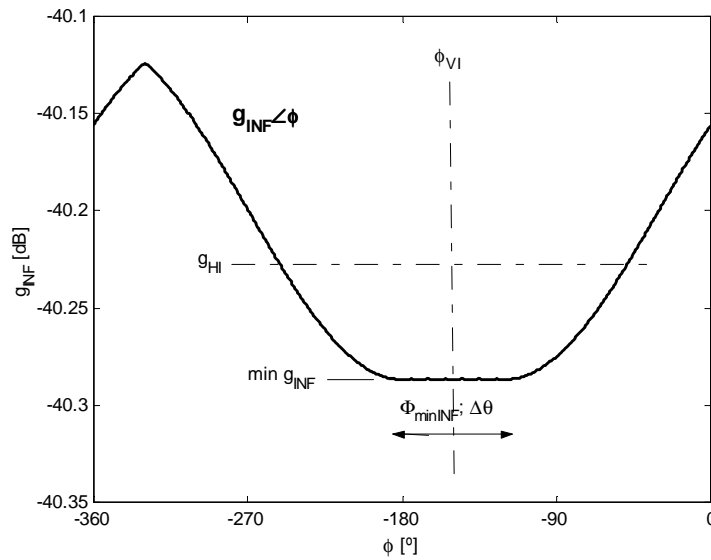


Figura 3-15: Parámetros en contornos de tipología D considerada la incertidumbre

La existencia de solución en el problema de control o la dificultad en su resolución está afectada por los contornos que expresan dicho problema de control sobre el NC. Hasta ahora, se ha mostrado cómo dichos contornos se

caracterizan por una tipología, una altura y una desviación angular. Para el G -contorno en la frecuencia ω , $B_k(j\omega) = \{g_{INF} \angle \phi \text{ y/o } g_{SUP} \angle \phi\}$ las citadas características varían en función de la incertidumbre inherente al sistema en esa frecuencia $\mathcal{S}P(j\omega) = \{p \angle \theta\}$ y en función del valor de especificación también a esa frecuencia, $\delta_k(\omega)$. Pero además, la incertidumbre y la tolerancia de especificación son variables para cada frecuencia, $\omega_i \in \{\omega_i, i=1, \dots, N\}$. La influencia de estos factores tampoco es uniforme para todos los problemas de control, $\{|T_k(j\omega)| \leq \delta(\omega), k=1, \dots, M\}$, por lo que su estudio se particulariza para cada uno de ellos en los Capítulos 4 al 6. El objetivo final es arrojar alguna luz en el problema de la existencia de solución en presencia de múltiples objetivos de comportamiento en presencia de incertidumbre.

3.3.5 CONTORNOS DE LAZO ABIERTO

En el documento se diferencia entre contornos o curvas de restricción para el controlador G y los contornos para la función de transferencia en lazo abierto $L_0 = GP_0$. Los G -contornos para la frecuencia ω y la especificación robusta $|T_k(j\omega)| \leq \delta(\omega)$ se obtienen en el Paso 11 del Algoritmo 3.1, y los L_0 -contornos en el Paso 12.

Dadas unas especificaciones y una incertidumbre en un sistema, los G -contornos y los L_0 -contornos expresan lo mismo, como se demuestra a continuación. De este modo, las conclusiones sobre la existencia de solución al problema global de control desde el punto de vista de la intersección no nula de contornos, pueden extraerse tanto de los contornos para G como para L_0 . En realidad, lo que garantiza o impide la existencia de solución son el valor de las especificaciones deseadas y el tamaño de la incertidumbre inherente en el sistema de partida.

Los G -contornos expresan las necesidades o limitaciones para el controlador $G(j\omega) = g \angle \phi$. Partiendo de que inicialmente no existe control, se tiene $G(j\omega) = g \angle \phi = 1 \angle 0^\circ = 0\text{dB} \angle 0^\circ$. Luego, la posición relativa entre el punto $0\text{dB} \angle 0^\circ$ y el G -contorno de que se trate, muestra las necesidades a aportar por el controlador.

Para calcular los L_0 -contornos (véase el Paso 12 del Algoritmo 3.1) se trasladan los G -contornos en magnitud una cantidad p_0 y en fase un valor θ_0 , siendo $P_0 = p_0 \angle \theta_0$ la planta nominal en la plantilla $\mathcal{S}P$. Luego, los L_0 -contornos mantienen la forma de los G -contornos, pero un punto de referencia distinto, que ahora es la planta nominal o punto de partida sobre el que se diseña G . Por tanto, aunque los contornos se desplazan una cantidad $p_0 \angle \theta_0$, como el punto de referencia se traslada la misma cantidad (es decir,

de $1 \angle 0^\circ$ a $p_0 \angle \theta_0$, las necesidades o limitaciones que expresan los contornos para G y para L_0 son las mismas. Desde este punto de vista queda también justificado **que no tiene importancia la planta seleccionada como planta nominal** en la plantilla $\mathfrak{S}P$, como ya se afirmaba en Jayasuriya (1993).

El desplazamiento del G -contorno y del punto de referencia no sólo se produce para el contorno representativo del problema k a la frecuencia ω_i , sino también para el resto de contornos que representan otros problemas de control en dicha frecuencia. Al ser el punto nominal el mismo para todos ellos, el conjunto de contornos ahora en L_0 resulta equivalente. Esta transformación se ejecuta para todas las frecuencias. La planta nominal toma un valor distinto en cada ω_i que desplaza tanto contornos como puntos de referencia, y por tanto, el sistema global de L_0 -contornos y el de G -contornos es equivalente.

Cuando el módulo de la planta nominal, p_0 , cumple $0 < p_0 < 1$, en decibelios equivale a $-\infty \text{dB} < p_0 < 0 \text{dB}$, y por tanto, el G -contorno se desplaza hacia abajo verticalmente. A su vez, si $p_0 > 1$ el desplazamiento es verticalmente hacia arriba. Como la fase θ_0 siempre es negativa, tal que $-360^\circ < \theta_0 < 0^\circ$, el G -contorno se desplazará hacia fases decrecientes o más negativas un valor $|\theta_0|$. Como los contornos se definen en el rango de fases de Nichols, $\Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, aquellas magnitudes cuya fase $\phi - \theta_0$ supere -360° reaparecerán por las fases más positivas (complemento a -360° de $\phi - \theta_0$).

Como comprobación de todos estos resultados se trazarán los G - y L_0 -contornos en ω_i , primero para un sistema sin incertidumbre en la Figura 3-16, y en la Figura 3-17 para un modelo con incertidumbre. Se ha empleado una especificación del tipo $|T_2(j\omega)| \leq \delta_2(\omega)$ en (3.7), con $\delta_2(\omega) = 0.8$.

Como planta sin incertidumbre en ω_i se tiene $P(j\omega_i) = p \angle \theta$ con $p = 0.1$ (-20dB) y $\theta = -90^\circ$. Al no contener incertidumbre, la planta nominal es la única planta existente. En la Figura 3-16 puede comprobarse cómo el L_0 -contorno en ω_i , $B_{0k=2}(j\omega_i) = l_{02} \angle \psi_0$, se obtiene al trasladar el G -contorno, $B_{k=2}(j\omega_i) = g_2 \angle \phi$, un valor $p_0 \angle \theta_0 = p \angle \theta = -20 \text{dB} \angle -90^\circ$. Respecto a sus respectivos puntos de referencia (marcados con el símbolo 'o'), $-20 \text{dB} \angle -90^\circ$ en el L_0 -contorno y $0 \text{dB} \angle 0^\circ$ en el G -contorno, ambos contornos expresan las mismas necesidades. De acuerdo a la simplificación (ii) en la Sección 3.3.3, se emplea g_2 en lugar de g_{sup} , y por tanto, también l_{02} en vez de l_{0sup} . Como además, el sistema carece de incertidumbre, resulta $g_2 = g_{SUP}$ y $l_{02} = l_{0SUP}$.

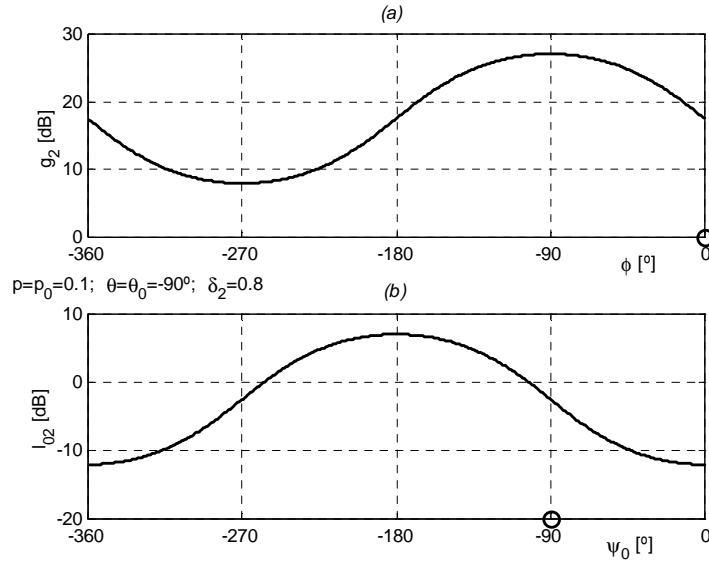


Figura 3-16: Contornos sin la incertidumbre (a) para G y (b) para L_0

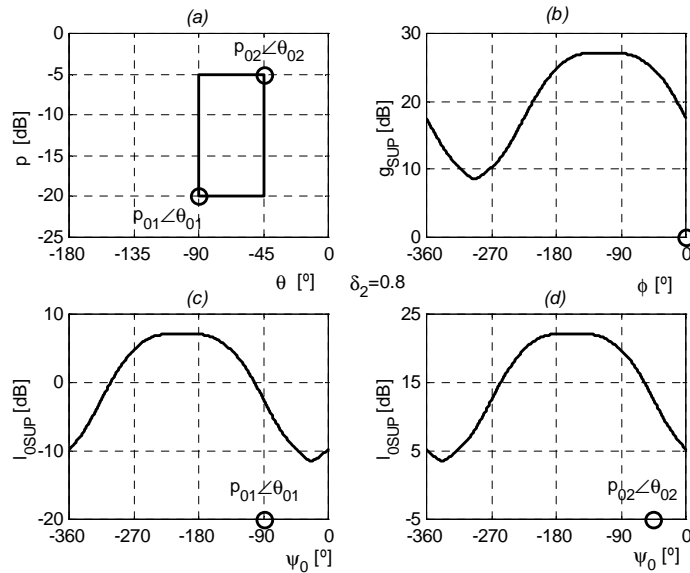


Figura 3-17: Contornos para G y L_0 con la incertidumbre

Para un sistema con incertidumbre $\mathcal{I}P(j\omega_i)=\{p \angle \theta\}$, ésta se representa en el gráfico (a) de la Figura 3-17, junto a dos posibles plantas nominales $p_{01} \angle \theta_{01}$ y $p_{02} \angle \theta_{02}$. Puede comprobarse cómo cuando el sistema presenta

incertidumbre, también el L_0 -contorno, l_{0SUP} en gráficas (c) y (d), y el G -contorno, g_{SUP} en la gráfica (b), expresan lo mismo respecto a sus puntos de referencia marcados con el símbolo 'o'. Comparando los gráficos (c) y (d) se ilustra cómo la elección de la planta nominal, $p_{01} \angle \theta_{01}$ o $p_{02} \angle \theta_{02}$ en el gráfico (a), traslada el L_0 -contorno de forma diferente pero al cambiar también el punto de referencia, los contornos finales para L_0 resultan equivalentes.

Una particularidad de los L_0 contornos, $l_{0SUP} \angle \psi_0$ y/o $l_{0INF} \angle \psi_0$, es que siempre alguno de sus puntos de máximo y/o mínimo está sobre el eje de fase -180° . Más en concreto, dicho punto coincide con el punto de máximo y/o mínimo del contorno simple $l_{02} \angle \psi_0$ y/o $l_{01} \angle \psi_0$ que generó la planta nominal. Compruébense también estas conclusiones en los gráficos anteriores, Figura 3-16 y Figura 3-17.

3.3.6 'AGRESIVIDAD' DE UN CONTORNO

La 'agresividad' de un contorno caracteriza la fuerza de la limitación que se impone sobre G (o L_0) para cumplir la especificación a pesar de la incertidumbre. Un contorno es tanto más agresivo cuando la limitación o la dificultad para satisfacerlo se incrementa. Y en tanto en cuanto los contornos reflejan en el dominio log-magnitud/fase de QFT las especificaciones de comportamiento y estabilidad del sistema, contornos más agresivos implican especificaciones más ambiciosas.

Bajo estas premisas, la agresividad de los contornos QFT puede entenderse desde la magnitud o desde la fase.

En cuanto a la fase, los contornos que ocupan toda la banda angular $[-360^\circ, 0^\circ]$, es decir los simple-valuados ó tipologías B y D, son más agresivos que los doble-valuados o de tipo A, ya que los primeros imponen restricciones sobre g (o l_0) en un mayor número de ángulos ϕ (o ψ_0). Dentro de los contornos doble-valuados o de tipo A y C, que sólo están definidos en una banda angular $\mp \varepsilon$ alrededor de -180° , serán tanto más agresivos cuanto mayor sea ε .

En cuanto a la magnitud, los contornos 'superiores', es decir, donde se debe cumplir que $g \geq g_2$, tanto si son simple-valuados o tipo B (sólo existe g_2 pero en toda la banda angular), como si son doble-valuados o tipo A (existe un g_1 para la misma fase en que existe g_2), son más agresivos cuanto mayor es la magnitud g_2 en cada una de las fases ϕ de existencia. Paralelamente, los contornos inferiores donde se debe cumplir que $g \leq g_1$, son tanto más agresivos cuanto menor es la magnitud g_1 para cada una de las fases ϕ en las que toma valores reales y positivos. En el caso de contornos tipo D o simple-

valuados estas fases se extienden de -360° a 0° , y para los contornos tipo A o doble-valuados g_l es real y positivo solo en un cierto rango $\mp \varepsilon$ alrededor de -180° .

3.4 SOLUCIÓN EN LOS CONTORNOS AL PROBLEMA DE CONTROL

La tipología de los contornos para G y su magnitud y fase, $g_{INF} \angle \phi$ y/o $g_{SUP} \angle \phi$ ($l_{0INF} \angle \psi_0$ y/o $l_{0SUP} \angle \psi_0$ para contornos sobre L_0), depende de las tolerancias de especificación de lazo cerrado, δ_k , $k=1, \dots, 5$, y de la incertidumbre de la planta en lazo abierto $\{P\}$, con $\{p\}$ la incertidumbre en magnitud y $\{\theta\}$ la incertidumbre en fase. Por tanto, las necesidades de control G y la dificultad para satisfacer todas las especificaciones simultáneamente, $|T_k| \leq \delta_k$, $k=1, \dots, 5$, vendrá condicionada por cómo las tolerancias de especificación δ_k y la incertidumbre, $\{p\}$ y $\{\theta\}$, influyan en la conformación y agresividad de los contornos. Éste es el primer objetivo abordado en los Capítulos 4 al 6 para los distintos problemas de control. En primer lugar, se analizará la tipología y formulación de los contornos sin considerar la incertidumbre, es decir, las fórmulas $g_1 \angle \phi$ y/o $g_2 \angle \phi$. A continuación se analizará la influencia de la incertidumbre y, por tanto, se estudiarán los contornos $g_{INF} \angle \phi$ y/o $g_{SUP} \angle \phi$. Luego se estudiará la influencia de la tolerancia de especificación, δ_k . Y finalmente, se analizará la compatibilidad de los contornos en cada frecuencia (solución simultánea de problemas desde los contornos).

Unas primeras conclusiones sobre la solución del problema de control desde el punto de vista de los contornos se incluyen a continuación.

- El cumplimiento simultáneo de los contornos, que representan cada especificación, se comprueba para cada frecuencia. Es decir, deberá existir intersección no nula de contornos en cada frecuencia para garantizar la existencia de solución. Ello indicará, si en cada frecuencia, dada una cierta incertidumbre, los objetivos de control planteados son a priori alcanzables.
- Los contornos de tipología A en una frecuencia dada son compatibles con cualquier otro contorno de tipología B o D en la misma frecuencia. Sin embargo, los contornos de tipo B y D son difíciles de compatibilizar entre sí en una misma frecuencia.

- Conceptualmente, un aumento de la incertidumbre y de la rigurosidad de las especificaciones de comportamiento debería dificultar la existencia de solución en los contornos, tal y como se demostrará en este documento.
- Los compromisos de control realimentado explícitamente considerados condicionan la elección de las tolerancias de especificación, de tal modo que dada una incertidumbre se garantice la compatibilidad de contornos.

El estudio de la compatibilidad de contornos no ha sido considerado hasta el momento en ningún otro trabajo sobre QFT. La posible intersección no nula de contornos era advertida por el diseñador una vez calculados éstos antes de la etapa de síntesis, necesitando un nuevo planteamiento de especificaciones de comportamiento en caso de incompatibilidad. En este sentido, el trabajo presentado supone una aportación de relevancia.

3.5 SOLUCIÓN EN EL DISEÑO AL PROBLEMA DE CONTROL

El primer objetivo en la existencia de solución simultánea a todas las especificaciones considerada la incertidumbre, era garantizar la compatibilidad de los contornos en cada frecuencia. El segundo objetivo es la posibilidad de diseñar una $L_0 = GP_0$ que se ajuste a sus contornos en cada frecuencia. En este campo han sido numerosas las aportaciones científicas que incluyen teoremas de existencia (véase Sección 2.3.4). Todas ellas imponen ciertas restricciones sobre la planta P y sobre las especificaciones planteadas $|T_k| \leq \delta_k$, tal y como resumen la Sección 2.7.1 y la Sección 2.7.2. Dichas restricciones garantizan la compatibilidad de contornos siendo posible demostrar que siempre existe una L_0 única y óptima que debe recaer sobre sus contornos en cada frecuencia. Sin embargo, el problema real es bastante diferente. Las restricciones sobre la planta no contemplan el tamaño de la incertidumbre, y las limitaciones sobre las tolerancias de especificación restringen mucho los tipos de problemas a resolver. Las aportaciones del presente documento permiten considerar cualquier tamaño de incertidumbre y cualquier tolerancia de especificación. Entonces, en cuanto a la síntesis de L_0 unas primeras aportaciones se podrían resumir como sigue:

- El modelado de L_0 no es un problema independiente en cada frecuencia (como ocurría en la compatibilidad de contornos). De este modo, los elementos ganancia, polos o cero añadidos en cada frecuencia afectan a las restantes. L_0 no contiene incertidumbre, tras haber sido ésta incluida en los contornos.
- La agresividad de los contornos en cada frecuencia condiciona la mayor o menor dificultad en el modelado de L_0 .

- Los compromisos de control implícitos (objetivos no representados por contornos) no influirán en la existencia de solución en los contornos. Sin embargo, sus consecuencias se pagarán en la dificultad de modelado de L_0 .

Al final de los Capítulos 4 al 6, junto a las reflexiones sobre la compatibilidad de todos los contornos en cada frecuencia, se comentará también la dificultad en el modelado de L_0 . Ésta se pone también de manifiesto en el Capítulo 7 que discute un ejemplo global.

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 3-1: Contorno plantilla ω_1 en modelos con incertidumbre paramétrica según β_1</i>	69
<i>Figura 3-2: Contorno plantilla ω_1 en modelos con incertidumbre paramétrica según β_2</i>	69
<i>Figura 3-3: Plantilla con sólo incertidumbre vertical</i>	73
<i>Figura 3-4: Plantilla genérica con sólo Incertidumbre Horizontal</i>	74
<i>Figura 3-5: Signo de T_{α}^k para valores de g reales</i>	80
<i>Figura 3-6: Tipologías de contornos sin considerar la incertidumbre</i>	82
<i>Figura 3-7: Otros formatos de tipología B para el problema 2-DOF del servo</i>	83
<i>Figura 3-8: Parámetros en contornos de tipología A sin considerar la incertidumbre</i>	84
<i>Figura 3-9: Parámetros en contornos de tipología B sin considerar la incertidumbre</i>	84
<i>Figura 3-10: Parámetros en contornos de tipología D sin considerar la incertidumbre</i>	85
<i>Figura 3-11: Contorno intersección, $g_{SUP} \angle \phi = \max\{g_2 \angle \phi\}$,</i>	86
<i>Figura 3-12: Contorno intersección $g_{INF} \angle \phi = \min\{g_1 \angle \phi\}$</i>	87
<i>Figura 3-13: Parámetros en contornos de tipología A considerada la incertidumbre</i>	88
<i>Figura 3-14: Parámetros en contornos de tipología B considerada la incertidumbre</i>	89
<i>Figura 3-15: Parámetros en contornos de tipología D considerada la incertidumbre</i>	89
<i>Figura 3-16: Contornos sin la incertidumbre (a) para G y (b) para L_0</i>	92
<i>Figura 3-17: Contornos para G y L_0 con la incertidumbre</i>	92

CAPÍTULO 4

LA SENSIBILIDAD COMPLEMENTARIA

Resumen

Una única tolerancia superior sobre la sensibilidad complementaria permite establecer condiciones de estabilidad robusta y limitaciones del ancho de banda del sistema en lazo cerrado de realimentación. La estabilidad es el requisito fundamental en todo control, y el excesivo ancho de banda es el principal precio pagado por una elevada incertidumbre o unos excesivos beneficios de realimentación. El estudio de los contornos representativos de este problema de control, permitirán arrojar alguna luz sobre la dificultad para cumplir simultáneamente los requisitos de estabilidad y de un ancho de banda limitado en presencia de incertidumbre, y a su vez obtener una dinámica de comportamiento adecuada en el rechazo de perturbaciones y en el seguimiento de señales.

Contenidos

4 La Sensibilidad Complementaria.....	99
4.1 Generalidades	101
4.2 Contornos sin la Incertidumbre. Tipologías de Contornos	103
4.2.1 Tipología y Formulación de Contornos para Especificaciones $0 < \delta_j < 1$	104
4.2.2 Tipología y Formulación Contornos para Especificaciones $\delta_j > 1$	108
4.3 Influencia de la Incertidumbre.....	113
4.3.1 Influencia de la Incertidumbre en Fase.....	114
4.3.1.1 Influencia de la Fase (θ).....	114
4.3.1.2 Contornos de Tipología D ($0 < \delta_j < 1$) para Plantillas con Sólo Incertidumbre en Fase	115
4.3.1.3 Contornos de Tipología A ($\delta_j > 1$) para Plantillas con Sólo Incertidumbre en Fase	120
4.3.2 Influencia de la Incertidumbre en Ganancia.....	125
4.3.2.1 Influencia de la Magnitud (p).....	125
4.3.2.2 Contornos de Tipología D ($0 < \delta_j < 1$) para Plantillas con Sólo Incertidumbre en Magnitud	126
4.3.2.3 Contornos de Tipología A ($\delta_j > 1$) para Plantillas con Sólo Incertidumbre en Magnitud	129
4.3.3 Conclusiones sobre la Influencia de la Incertidumbre.....	132
4.3.3.1 Contornos de Tipología D	135
4.3.3.2 Contornos de Tipología A	138
4.4 Influencia de la Especificación, $\delta_j(\omega)$	144
4.4.1 Valor de la Especificación en Contornos Tipo D ($0 < \delta_j < 1$).....	145
4.4.2 Valor de Especificación en Contornos de Tipo A ($\delta_j > 1$)	149
4.5 Solución al Problema de la Sensibilidad Complementaria	155
4.5.1 Un Pequeño Resumen sobre los Contornos.....	155
4.5.2 La Estabilidad.....	156
4.5.3 La Atenuación de Ruidos	165
4.5.4 El Esfuerzo de Control ante Perturbaciones en la Entrada	166
4.5.5 Los Servosistemas	168
Indice de Figuras.....	169

4 LA SENSIBILIDAD COMPLEMENTARIA

4.1 GENERALIDADES

En la Figura 2-1 se presentaba el esquema genérico de control de control realimentado con dos grados de libertad. A partir de éste, las ecuaciones (3.4) y (3.5) definían la contribución a las señales: Y (salida del sistema) y U (esfuerzo de control), de las señales de entrada: D_1 (perturbación a la entrada), D_2 (perturbación a la salida), R (entrada de referencia) y N (ruido en el sensor). Si a las posibles funciones de transferencia entre las salidas y entradas en (3.4) y (3.5) se les impone unas tolerancias δ_k quedan definidas las especificaciones robustas de comportamiento y estabilidad deseadas en QFT. En particular, ahora se analizan aquellas relaciones salida/entrada cuya función de transferencia responde a la función sensibilidad complementaria, $T=L/1+L$. Genéricamente, se incluyen en el problema de control $k=1$, definido en (3.6):

$$|T_1(j\omega)| = \left| \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| = \left| \frac{Y(j\omega)}{N(j\omega)} \right| = \left| \frac{U(j\omega)}{D_1(j\omega)} \right| = \left| \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)F(j\omega)} \right| \leq \delta_1(\omega), \quad \omega \in \Omega_1$$

Entonces, T_1 equivale a la sensibilidad complementaria $T=L/1+L$ excluyendo el prefiltro, $T'=FT$. Según (3.6) el módulo de dicha sensibilidad es limitado superiormente por la tolerancia δ_1 en las frecuencias Ω_1 , lo que puede expresar diversos objetivos de control comentados a continuación.

Por un lado, la limitación del pico máximo del comportamiento de lazo cerrado $|T|$, se corresponde con un círculo- M máximo sobre el diagrama de Nichols que no debe ser penetrado. Y ello, implica unos ciertos márgenes de estabilidad y fase. Cuanto menor sea δ_1 la limitación de $|T|$ es mayor y por tanto los márgenes más conservadores.

Una tolerancia máxima δ_1 sobre $|T|=|L/1+L|$ condiciona también el ancho de banda del sistema en lazo cerrado. Esto permitirá reducir la influencia del ruido introducido por el sensor $|Y/N| \leq \delta_1$. Para ello, L , función de transferencia de lazo abierto utilizada en el diseño con QFT, debe disminuir su ganancia lo más rápidamente posible con la frecuencia. No obstante, en la limitación del ancho de banda resulta más adecuado utilizar otras funciones de transferencia mucho más sensibles a un mayor coste de realimentación que T (ancho de banda en lazo cerrado); por ejemplo, el ancho de banda de L es más significativo (Horowitz, 1991).

El esfuerzo de control solicitado a los actuadores para el rechazo de ciertas perturbaciones, $|U/D_1|$, puede también ser limitado a un valor máximo δ_1 . Y

por último, el problema del seguimiento de señales $|Y/FR|$, desde el punto de vista del controlador G aparentemente también podría ser gobernado con $|L/1+L| \leq \delta_1$. Sin embargo, debido a la incertidumbre en el modelo y a las perturbaciones que afectan al sistema, el problema del servo requiere dos limitaciones de la función sensibilidad complementaria, tal y como expresa (3.10) (véanse Sección 2.2.3 y Sección 6.3).

Por tanto, la limitación de la sensibilidad complementaria en (3.6), $|L/1+L| \leq \delta_1$, básicamente condiciona la ganancia de lazo abierto $|L|=|GP|$ en dos sentidos: (a) limita la pendiente máxima de modelado de L en sus frecuencias de cruce (estabilidad); y (b) limita el módulo de $|L|$ en alta frecuencia para evitar la amplificación de ruidos. Estas restricciones no deben considerarse como un problema aislado, $|T|=|T_{k=1}| \leq \delta_{k=1}$, sino que simultáneamente habrán de satisfacerse otros objetivos de control, $|T_{k=2,\dots,5}| \leq \delta_{k=2,\dots,5}$, en algunos casos contrapuestos. Este capítulo estudia el problema (3.6) en sí mismo hasta la Sección 4.4, relacionándose con los restantes objetivos de control en la Sección 4.5 y en los capítulos siguientes.

En el análisis de la limitación de la sensibilidad complementaria $|L/1+L| \leq \delta_1$ debe considerarse, por un lado, que el sistema contiene incertidumbre, $\{L\}$, y por otro, la agresividad deseada de comportamiento, δ_1 . QFT recoge estos conceptos en una única entidad, los contornos que el sistema nominal $L_0=GP_0$ debe satisfacer. En el algoritmo de cálculo de dichos contornos, las curvas de restricción para L_0 se trazan a partir de los contornos o necesidades que debe suplir el controlador G (véase Sección 3.3). Por tanto, el problema se reduce al estudio de la influencia de la incertidumbre del sistema $\{P\}$ y del comportamiento deseado δ_1 , en los contornos (para G o L_0) que los representan.

El estudio planteado se llevará a cabo siguiendo la formulación y metodología genéricas presentadas en la Sección 3.3. Primeramente la Sección 4.2 estudiará las tipologías o formatos de los contornos para G sin considerar la incertidumbre: $g_1 \angle \phi$ y/o $g_2 \angle \phi$ (Pasos 8 y 9 en Algoritmo 3.1 de Cálculo de Contornos). A continuación, la Sección 4.3 analizará la modificación de éstos como $g_{INF} \angle \phi$ y/o $g_{SUP} \angle \phi$ (Pasos 10 y 11 en Algoritmo 3.1) al considerar la incertidumbre en fase, o en ganancia o conjuntamente ambas en la plantilla \mathcal{SP} (ésta representa frecuencialmente sobre el NC la incertidumbre). Se demostrará también la equivalencia entre lo expresado por los contornos para el controlador G y para la ganancia de lazo abierto nominal L_0 , siendo estos últimos $l_{0INF} \angle \psi_0$ y/o $l_{0SUP} \angle \psi_0$ (Paso 12 del Algoritmo 3.1). La Sección 4.4 analizará la influencia del valor de especificación, δ_1 , en los contornos trazados. Y finalmente, la Sección 4.5 hace una valoración global de los resultados, cuantificando la agresividad de

los contornos que representan este problema, así como las garantías de solución al considerarse conjuntamente otras especificaciones. Se discutirán los valores más frecuentes de incertidumbre en cada frecuencia y la problemática que ésta plantea, y también, las tolerancias frecuenciales de especificación y los objetivos que pueden cubrir.

4.2 CONTORNOS SIN LA INCERTIDUMBRE. TIPOLOGÍAS DE CONTORNOS

Para una mejor comprensión de esta sección se recomienda consultar la Sección 3.3.2 y 3.3.3. Se trata de calcular los contornos $g_1 \angle \phi$ y/o $g_2 \angle \phi$ que el controlador $G(j\omega) = g \angle \phi$ ha de cumplir de manera que se satisfaga la desigualdad de especificación $|T_i| \leq \delta_i$ en (3.6). Para ello, se aplicarán los Pasos 8 y 9 del Algoritmo 3.1.

El Paso 8 resolvía una inecuación cuadrática que se particulariza en este caso como:

$$I_{\omega_i}^1(p, \theta, \delta_1, \phi) = p^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\delta_1^2}\right) \cdot g^2 + 2 \cdot p \cdot \cos(\phi + \theta) \cdot g + 1 \geq 0 \quad (4.1)$$

donde, $p \angle \theta$ es una planta cualquiera de la plantilla $\mathfrak{SP}(j\omega)$, $\delta_i = \delta_i(\omega_i)$ es el valor de especificación, constante a la frecuencia ω_i , y $g \angle \phi$ es la expresión polar del controlador, sin incertidumbre en ω_i .

Resolviendo en g la ecuación cuadrática $I_{\omega_i}^1 = 0$ asociada a (4.1), se obtienen dos soluciones: g_1 (para el valor negativo de la raíz cuadrada) recogida en (4.2a) y g_2 (valor positivo de la raíz cuadrada) en (4.2b):

$$g_{1,2} = \frac{1}{p \cdot \left(1 - \frac{1}{\delta_1^2}\right)} \left(-\cos(\phi + \theta) \mp \sqrt{\cos^2(\phi + \theta) - \left(1 - \frac{1}{\delta_1^2}\right)} \right) \quad (4.2 a,b)$$

Ahora la inecuación (4.1) puede re-escribirse como:

$$I_{\omega_i}^1(p, \theta, \delta_1, \phi) = p^2 \left(1 - \frac{1}{\delta_1^2}\right) \cdot (g - g_1) \cdot (g - g_2) \geq 0 \quad (4.3)$$

Por tanto, el parámetro genérico a de la inecuación (3.26), de cuyo signo se describió que dependía el intervalo de valores solución (véase la Figura 3-5), ahora en (4.3) se particulariza como:

$$a = p^2 \left(1 - \frac{1}{\delta_1^2}\right) \quad (4.4)$$

Por simplicidad de notación se definen las variables α y c como sigue:

$$\alpha = \left(1 - \frac{1}{\delta_1^2}\right) \quad (4.5)$$

$$c = \cos(\phi + \theta) \quad (4.6)$$

Y de acuerdo a las nuevas variables, las soluciones g_{12} en (4.2) se expresan como:

$$g_{12} = \frac{1}{p} \left(\underbrace{\frac{-c}{\alpha}}_{t_1} \mp \underbrace{\frac{\sqrt{c^2 - \alpha}}{\alpha}}_{t_2} \right) \quad (4.7a,b)$$

En consonancia con lo establecido en la Sección 3.3.3, el signo de a en (4.4) condiciona la tipología del contorno resultante. El módulo de la planta p es siempre positivo ($0 < p < +\infty$), e indudablemente, su función cuadrática, p^2 , será siempre mayor que cero. Luego, el signo de a depende exclusivamente del valor de especificación a la frecuencia ω_i , $\delta_i = \delta_i(\omega_i)$. De este modo, se plantean dos casos de estudio: cuando $0 < \delta_i < 1$ y cuando $\delta_i > 1$. Si $0 < \delta_i < 1$ (especificación de atenuación en la relación salida/entrada que defina $|T_i|$), resulta que $a < 0$ y, por tanto, aparecerá una tipología C o D de contornos (véase Sección 3.3.3). Y para $\delta_i > 1$, que implica en (4.4) que $a > 0$, surgirán tipologías A o B de contornos. A continuación se definirán las tipologías exactas en cada caso y sus parámetros característicos.

4.2.1 TIPOLOGÍA Y FORMULACIÓN DE CONTORNOS PARA ESPECIFICACIONES $0 < \delta_i < 1$

Las tolerancias de atenuación para $|T_i|$, cuando $0 < \delta_i(\omega_i) < 1$, se interpretan en la Sección 4.4. Ahora, se pretende exclusivamente definir la tipología o forma de los contornos sin incertidumbre, lo que en este caso depende solamente del valor δ_i . Si $0 < \delta_i < 1$, resultó $a < 0$ en (4.4), con lo que pueden aparecer tipologías de contornos C o D según la Sección 3.3.3. Se demostrará a continuación que la tipología de contornos para $0 < \delta_i(\omega_i) < 1$ será D o contornos monovaluados inferiores.

Según α en (4.5), se cumple que:

$$\alpha = \left(1 - \frac{1}{\delta_1^2}\right) < 0 \quad (4.8)$$

Como la función c^2 siempre toma valores positivos, y $\alpha < 0$ según (4.8), se satisface:

$$c^2 - \alpha > 0 \quad (4.9)$$

Y por tanto, su raíz cuadrada, toma siempre un valor real.

$$\sigma = \sqrt{c^2 - \alpha} \equiv \text{valor_real} \quad (4.10)$$

Además, con $\alpha < 0$ según (4.8) también se satisface:

$$|\sqrt{c^2 - \alpha}| > |c| \quad (4.11)$$

Y por tanto, en la ecuación (4.7) se cumplen las siguientes afirmaciones:

(i) t_2 será siempre real de acuerdo a (4.9) y (4.10), y negativo ya que $\alpha < 0$ según (4.8). t_1 tomará siempre valores reales.

(ii) $|t_2| > |t_1|$, según (4.11).

(iii) t_1 es real y positivo cuando $c > 0$, teniendo en cuenta que $\alpha < 0$ según (4.8)

(iv) t_1 es real y negativo cuando $c < 0$.

(v) En la solución g_1 en (4.7a) se restan $t_1 - t_2$. Al cumplirse (i) $t_2 < 0$, se tiene realmente $g_1 \triangleq t_1 + |t_2|$. Y al satisfacerse (ii) $|t_2| > |t_1|$, independientemente del signo de t_1 (ver iii e iv), la magnitud g_1 resulta **para todo $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$: $g_1 > 0$ y real**. Por tanto, $g_1 \angle \phi$ constituye un contorno válido para $g \angle \phi$.

(vi) En la solución g_2 en (4.7b) se suman $t_1 + t_2$. Al cumplirse (i) $t_2 < 0$, realmente $g_2 \triangleq t_1 - |t_2|$. Y al satisfacerse (ii) $|t_2| > |t_1|$, independientemente del signo de t_1 , la magnitud g_2 resulta **para todo $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$: $g_2 < 0$ y real**. Como g no puede ser negativo, $g_2 \angle \phi$ no constituye un contorno válido.

(vii) Como a en (4.4) cumple $a < 0$, para satisfacer (4.3) se debe cumplir: $0 \leq g \leq g_1$.

Por tanto, se ha demostrado hasta ahora que cuando $0 < \delta_1 < 1$, $g_1 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, es un contorno monovaluado inferior o de tipología D, independientemente de la incertidumbre expresada con $\{p, \theta\}$.

Para definir totalmente el contorno, se analizará ahora la variación de la magnitud g_1 en el intervalo $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. A las conclusiones anteriores se puede añadir:

(viii) La variación de $|t_2|^2$ respecto a $\phi + \theta$, es proporcional a la variación de $c^2 = \cos^2(\phi + \theta)$.

(ix) Siendo $\alpha < 0$ en (4.8), la variación del término t_1 es proporcional a $c = \cos(\phi + \theta)$.

Se definirán dos intervalos de fases en $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$: intervalo $\Phi_1 = [-270^\circ - \theta, -90^\circ - \theta]$, e intervalo $\overline{\Phi}_1 = \{[-360^\circ, -270^\circ] - \theta \cup [-90^\circ, 0^\circ] - \theta\}$.

(x) En $\phi \in \Phi_1$, resulta $c < 0$, y según (iii) $t_1 < 0$. Luego, considerando (v), se tiene que $g_1 \triangleq |t_2| - |t_1|$. Al contribuir los dos términos de manera contrapuesta, en Φ_1 se darán los valores mínimos de la magnitud del contorno g_1 . Considerando (viii) y (ix), la función g_1 tomará su valor mínimo en $\phi = -180^\circ - \theta$ (que definirá el eje vertical del contorno, ϕ_{v1}) creciendo hacia ambos extremos del intervalo Φ_1 . Véase la Figura 4-1. Sustituyendo en (4.2a) se obtienen los parámetros característicos del punto de mínimo del contorno:

$$\boxed{\min g_1 = \frac{\delta_1}{p(1 + \delta_1)}, \quad \phi_{\min g_1} = -180^\circ - \theta} \quad (4.12)$$

(xi) En $\phi \in \bar{\Phi}_1$, se tiene $c > 0$ y según (iv) $t_1 > 0$. Luego, considerando (v), se tiene que $g_1 \triangleq |t_2| + |t_1|$. Al contribuir los dos términos positivamente en g_1 , para las fases $\bar{\Phi}_1$ se obtendrán magnitudes g_1 mayores que en las fases Φ_1 . Teniendo en cuenta (viii) y (ix), la función g_1 será estrictamente decreciente en el intervalo $[-360^\circ - \theta, -270^\circ - \theta]$. Y simétricamente respecto a $-180^\circ - \theta$, g_1 será estrictamente creciente en el intervalo $[-90^\circ - \theta, 0^\circ - \theta]$. Véase la Figura 4-1. En $\phi = 0^\circ - \theta$ (y simétricamente en $\phi = -360^\circ - \theta$) se tiene el máximo absoluto del contorno, considerados los resultados en (x):

$$\boxed{\max g_1 = \frac{\delta_1}{p(1 - \delta_1)}, \quad \phi_{\max g_1} = 0^\circ - \theta, \quad -360^\circ - \theta} \quad (4.13)$$

(xii) Considerando (x) y (xi), en $\phi = -90^\circ - \theta$ (y simétricamente en $\phi = -270^\circ - \theta$) se produce un cambio del signo de la pendiente del contorno, es decir, son los puntos de inflexión. Ver Figura 4-1.

$$\boxed{\text{inflex } g_1 = \frac{+\delta_1 \sqrt{1 - \delta_1^2}}{p(1 - \delta_1^2)}, \quad \phi_{\text{inflex } g_1} = -90^\circ - \theta, \quad -270^\circ - \theta} \quad (4.14)$$

Nótese que los puntos de máximo y mínimo son puntos de mínima (nula) sensibilidad de g_1 a variaciones en ϕ , mientras que el punto de inflexión es un punto de máxima sensibilidad.

(xiii) Se definirá un eje vertical del contorno, ϕ_{v1} , sobre su fase de mínima ganancia, $\phi_{\min g_1}$. Y un eje horizontal, g_{h1} , que coincide con la altura del punto de inflexión, $\text{inflex } g_1$.

$$\boxed{\phi_{v1} = -180^\circ - \theta} \quad (4.15)$$

$$\boxed{g_{h1} = \frac{+\delta_1 \sqrt{1 - \delta_1^2}}{p(1 - \delta_1^2)}} \quad (4.16)$$

Los parámetros característicos de un contorno tipo D $g_l \angle \phi$ sin considerar todavía la incertidumbre, introducidos ya en la Sección 3.3.3 (Figura 3-8), se particularizan en la Figura 4-1 para el problema $|T|=|T_{k=1}| \leq \delta_{k=1}$. Para mayor simplicidad se ha tomado $p=1$ y $\theta=0^\circ$. El valor de especificación en el intervalo $[0, 1]$, se toma $\delta_l=0.2$. Aplicando (4.12) resulta $min-g_l=0.16$ (-15.6dB), $\phi_{ming_l}=-180^\circ$. Según (4.13): $max-g_l=0.25$ (-12dB), $\phi_{maxg_l}=-0^\circ$ (-360°). Y de acuerdo a (4.14): $influx-g_l=0.20$ (-13.8dB), $\phi_{influxg_l}=-90^\circ$ (-270°). Los ejes vertical y horizontal resultan, $\phi_{v1}=-180^\circ$ y $g_{h1}=0.20$ (-13.8dB).

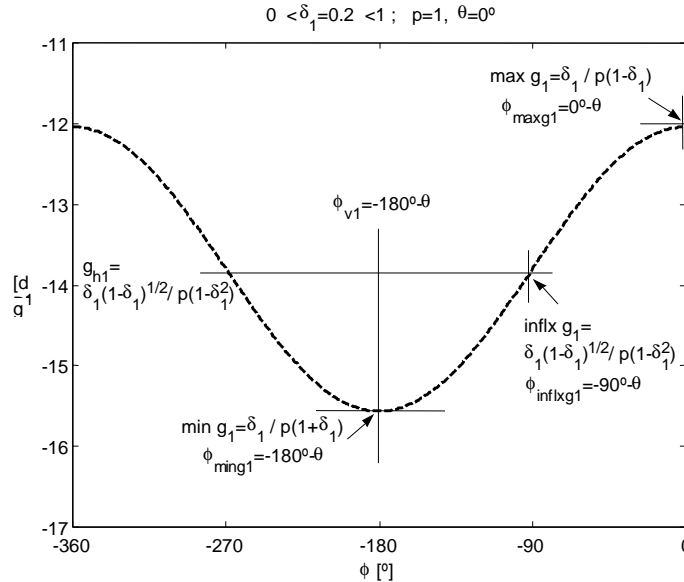


Figura 4-1: Contorno de tipología D sin la incertidumbre, $g_l \angle \phi$, para $0 < \delta_l(\omega) < 1$

Conclusión sobre los contornos sin la incertidumbre que expresan la limitación de la sensibilidad complementaria, $|T_l|=|L/I+L|$, con tolerancias de atenuación, $\delta_l < 1$

En las frecuencias ω_i donde $0 < \delta_l(\omega_i) < 1$, para las J plantas $p \angle \theta$ de la plantilla ω_i , siempre existe un g_l real y positivo para todo $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, lo que da lugar a un contorno mono-valuado inferior $g_l \angle \phi$ de tipología D, cuya magnitud g_l se define en (4.2a). Este contorno debe ser satisfecho por el controlador de modo que $g \angle \phi \leq g_l \angle \phi$ con el fin cumplir la especificación $|T_l(j\omega)| \leq \delta_l(\omega_i)$. Las características del contorno se pueden resumir como: (i) alcanza su altura mínima $min-g_l$ según (4.12). La fase de altura mínima define el eje vertical del contorno, en

$\phi_i = -180^\circ - \theta$, (ii) la magnitud del contorno es estrictamente creciente hacia los extremos del intervalo $[-360^\circ - \theta, 0^\circ - \theta]$ donde alcanza su altura máxima, $max-g_i$, según (4.13); (iii) presenta dos puntos de inflexión (puntos de sensibilidad máxima a variaciones de ϕ) según (4.14) en las dos fases de corte, $-90^\circ - \theta$ y $-270^\circ - \theta$, con su eje de horizontal, g_{hl} . Véase la Figura 4-1.

4.2.2 TIPOLOGÍA Y FORMULACIÓN CONTORNOS PARA ESPECIFICACIONES $\delta_i > 1$

Las tolerancias para $|T_i|$, tal que $\delta_i(\omega_i) > 1$, se interpretan en términos de control en la Sección 4.4. No obstante, se anticipa que el caso de $\delta_i > 1$ tiene especial interés en tanto en cuanto exprese especificaciones de estabilidad robusta. La estabilidad del sistema es el objetivo prioritario de todo control realimentado, y unos márgenes de ganancia y fase adecuados exigirán $\delta_i \approx 1.3$, y por tanto, $\delta_i > 1$.

En esta sección se pretende exclusivamente definir la tipología o forma de los contornos sin considerar todavía la incertidumbre, lo que depende solamente del valor $\delta_i > 1$. Para dicha tolerancia, resultó a en (4.4) positiva, $a > 0$, por lo que puede aparecer una tipología de contornos A o B, según la Sección 3.3.3. Se demostrará a continuación que la tipología de contornos para $\delta_i(\omega_i) > 1$ será la A, también denominados contornos doblevaluados.

Según α , definida en (4.5), en la frecuencia ω_i para $\delta_i = \delta_i(\omega_i) > 1$ se cumple que:

$$0 < \alpha = \left(1 - \frac{1}{\delta_i^2} \right) < 1 \quad (4.17)$$

Se define σ como:

$$\sigma = \sqrt{c^2 - \alpha} \quad (4.18)$$

La función coseno, c en (4.6), está acotada de modo que $0 < c^2 < 1$. Entonces, considerando (4.17), σ tomará valores reales en las fases donde se cumpla:

$$\alpha < c^2 < 1, \quad (4.19)$$

siendo α en (4.5) variable en función del valor de especificación δ_i , y c en (4.6) variable en función de la fase $\phi + \theta$. Como ϕ varía en un intervalo continuo de valores en $[-360^\circ, 0^\circ]$, la función coseno cuadrado, $c^2 = \cos^2(\phi + \theta)$, es una función continua en $\phi + \theta$ si los valores de incertidumbre en fase de la planta θ pertenecen a un intervalo continuo. Esto se cumple siempre si las plantillas son conexas en cada ω_i (incertidumbre frecuencial conectada),

asumido como premisa¹. Entonces, como la función coseno cuadrado es continua en $\phi+\theta$ (o simplemente en ϕ) siempre existe algún $\phi+\theta$ (o algún ϕ) que cumple (4.19) si, siendo $\alpha>0$, simplemente se satisface:

$$\alpha = \left(1 - \frac{1}{\delta_1^2}\right) < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\delta_1^2} \Rightarrow \delta_1 \neq \infty \tag{4.20}$$

Por tanto, según (4.20) para cualquier valor *práctico* (valor finito) de especificación δ_1 se cumple (4.19) en alguna fase $\phi+\theta$, y por tanto, se obtienen valores σ reales en (4.18) o soluciones reales en (4.7).

Demostrado que siempre existe algún $\phi+\theta$ (o algún ϕ) que cumple (4.19) si δ_1 es finito y θ pertenece a un intervalo conectado, la cantidad de ángulos que satisfacen (4.19) y, por tanto, dan soluciones reales, se incrementa:

- Si δ_1 disminuye (α disminuye), es decir, como $\delta_1>1$ cuando $\delta_1\rightarrow 1$. Esto implica, una especificación más agresiva y, por tanto, es lógica la aparición de contornos para g en un mayor número de fases ϕ , (véase la Sección 4.4 referente a la influencia de δ_1 en los contornos).
- Donde $c^2 = \cos^2(\phi+\theta)$ toma valores máximos, es decir, en las fases $\phi+\theta$ próximas a $0^\circ, -180^\circ$ o -360° .

Se demostró que para las fases ϕ que satisfagan (4.19), los valores σ en (4.18) serán reales. Y además, de acuerdo a (4.17) y a (4.18) para dichos valores σ reales, se cumple:

$$|c| > \left| \sqrt{c^2 - \alpha} \right| \tag{4.21}$$

De acuerdo a estas conclusiones, se analizará la ecuación (4.7a,b):

$$g_{12} = \frac{1}{p} \left(\underbrace{\frac{-c}{\alpha}}_{t_1} \mp \underbrace{\frac{\sqrt{c^2 - \alpha}}{\alpha}}_{t_2} \right)$$

Existirán soluciones válidas para g , es decir, g_{12} tomarán valores reales y positivos cuando se cumplan simultáneamente:

- (A) t_1 sea real y positivo, ya que $|t_1|>|t_2|$ según (4.21). t_1 es siempre real. t_1 es positivo cuando $c<0$, ya que $\alpha>0$ según (4.17).
- (B) t_2 sea real, es decir, σ en (4.18) sea real. Donde se cumple (4.19), $\alpha<c^2<1$, t_2 es real.

¹ Si la incertidumbre $\{\theta\}$ es no conectada, se obtendrá un contorno de tipología D para cada una de las partes conectadas en que se pueda subdividir la plantilla frecuencial ω .

La condición (B) se satisface para fases $\phi+\theta$ en un cierto intervalo alrededor de -360° (ó 0°) y -180° . La condición (A) se cumple para $\phi+\theta \in [-270^\circ, -90^\circ]$. Luego, ambas se satisfacen para $\phi \in [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, con $0^\circ \leq \varepsilon \leq 90^\circ$. Para las fases $\phi+\theta$ donde no se satisface (B), g_1 y g_2 toman valores complejos. Y donde cumpliéndose (B), no se satisface (A), g_1 y g_2 toman ambos valores reales pero negativos. En ambos casos anteriores, donde (A) y (B) no se satisfacen simultáneamente, no existen limitaciones para g , es decir, no existen contornos. Y donde se cumplan (A) y (B), $\phi \in [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, $0^\circ \leq \varepsilon \leq 90^\circ$, existirán contornos doblevaluados.

A continuación se definirá el valor angular positivo² ε . Los valores reales de σ , y por tanto también de g_1 y g_2 , se daban para $c^2 > \alpha$ según (4.19). Resolviendo la igualdad $c^2 = \alpha$, con $c = \cos(\phi+\theta)$ y $\alpha = (1 - 1/\delta_1^2)$, ε será el primer valor positivo $\phi+\theta$ que satisface la igualdad. Luego,

$$\varepsilon = \frac{180^\circ}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{\delta_1^2 - 1}}{\delta_1} [^\circ], \quad 0 \leq \varepsilon \leq 90^\circ \quad (4.22)$$

Entonces, el intervalo angular de existencia de soluciones reales y positivas, es decir, donde existen limitaciones o contornos para el controlador, tiene una amplitud 2ε y se define:

$$\Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon], \quad \phi_{v12} = -180^\circ - \theta, \quad \Delta\phi_{12} = 2\varepsilon \quad (4.23)$$

Nótese según (4.22) que **la amplitud del intervalo angular Φ_{12} donde existen contornos $g_{12} < \phi$, es decir 2ε , depende exclusivamente del valor de especificación δ_1 , siendo $\delta_1 > 1$.**

Teniendo en cuenta el signo de los términos t_1 y t_2 , su efecto se suma o resta en las magnitudes g_1 o g_2 . Todo ello se resume en las siguientes afirmaciones:

- (i) g_{12} son reales y positivas en $\phi \in \Phi_{12}$, $\Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$. En $\phi \in \overline{\Phi}_{12}$, g_{12} son ambas complejas o negativas. g_{12} se define en (4.2) y ε en (4.22).
- (ii) En $\phi \in \Phi_{12}$, t_1 es real y positivo como exigían (A) y (B).
- (iii) En $\phi \in \Phi_{12}$, t_2 es real y positivo como exigían (A) y (B).
- (iv) En $\phi \in \Phi_{12}$, $|t_1| > |t_2|$ según (4.21), o simplemente $t_1 > t_2$, según (ii) y (iii).
- (v) En $\phi \in \Phi_{12}$, según (ii) a (iv) en (4.7a) resulta $g_1 \triangleq |t_1| - |t_2|$, o simplemente $g_1 \triangleq t_1 - t_2$.

² Nótese que los valores angulares para ϕ y θ se definían en $[-360^\circ, 0^\circ]$ siendo por tanto negativos. Mientras tanto, ε es una fase positiva.

- (vi) En $\phi \in \Phi_{12}$, según (ii) a (iv) en (4.7b) $g_2 \triangleq |t_1| + |t_2|$, o simplemente $g_2 \triangleq t_1 + t_2$
 (vii) En $\phi \in \Phi_{12}$, $g_2 > g_1$, según (v) y (vi).

Por tanto, se ha demostrado hasta ahora que cuando $\delta_l > 1$, $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, es un contorno simple doblevaluado (véase Sección 3.3.3) de tipología A, con g_{12} en (4.2) y ε en (4.22), independientemente de la incertidumbre expresada con $\{p\}$, $\{\theta\}$; (véase Figura 4-2).

A continuación se analiza el valor relativo de la magnitud del contorno, g_{12} , en función de la fase $\phi \in \Phi = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, ε en (4.22). Sus parámetros característicos, definidos para una tipología A genérica en la Sección 3.3.3, se particularizan para el problema $|T_l| \leq \delta_l$ con $\delta_l > 1$.

Se definió c en (4.6) como $c = \cos(\phi + \theta)$. Y para p y δ_l constantes (α y ε constantes):

- (viii) Como $t_1 > 0$ según (ii) y α es constante, en $\phi \in \Phi_{12}$ la variación de t_1 con la fase $\phi + \theta$ es proporcional a la variación de $|c| = |\cos(\phi + \theta)|$.
 (ix) En $\phi \in \Phi_{12}$ con α constante, la variación de t_2^2 respecto a $\phi + \theta$ es proporcional a la variación de $|c|^2 = \cos^2(\phi + \theta)$.

Por tanto, de acuerdo a la variación de la función coseno en función del ángulo y considerando la contribución de los términos t_1 y t_2 en g_{12} según (v) y (vi), se puede concluir (véase Figura 4-2):

- (x) g_1 toma su valor mínimo en $\phi = -180^\circ + \theta$ y aumenta hacia los extremos del intervalo $\Phi = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, ε en (4.22). Sustituyendo en (4.2a) se define:

$$\boxed{\min g_1 = \frac{\delta_l}{p(\delta_l + 1)}, \phi_{\max \min} = -180^\circ - \theta} \quad (4.24)$$

- (xi) g_2 toma su valor máximo en $\phi = -180^\circ + \theta$ y disminuye hacia los extremos del intervalo $\Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, ε en (4.22). Sustituyendo en (4.2b) se define:

$$\boxed{\max g_2 = \frac{\delta_l}{p(\delta_l - 1)}, \phi_{\max \min} = -180^\circ - \theta} \quad (4.25)$$

- (xii) Considerando (x) y (xi), se define el eje vertical del contorno que pasa por los puntos de máximo y mínimo:

$$\boxed{\phi_{v12} = -180^\circ - \theta} \quad (4.26)$$

- (xiii) El eje horizontal que separa la solución $g_1 \angle \phi$ de $g_2 \angle \phi$ se sitúa a una altura g_{h12} , calculada cuando el término $c = \cos(\phi + \theta)$ en (4.2) no aportan amplitud, es decir $c = 0$. La separación máxima entre la porción superior e

inferior de los contornos sobre el eje vertical en decibelios se denomina Δg_{h12} .

$$g_{h12} = \frac{+\delta_1 \sqrt{\delta_1^2 - 1}}{p(\delta_1^2 - 1)}, \quad \Delta g_{12} = Lm \frac{\max g_2}{\max g_1} = Lm \frac{\delta_1 + 1}{\delta_1 - 1} \quad (4.27)$$

g_{h12} en (4.27) se expresa en magnitudes lineales e Δg_{h12} en decibelios.

Nótese el paralelismo entre las ecuaciones (4.12), (4.13) (4.15) y (4.16) para $0 < \delta_i(\omega_i) < 1$ y (4.24), (4.25), (4.26) y (4.27) para $\delta_i(\omega_i) > 1$.

La Figura 4-2 ilustra los resultados anteriores. Se tomó $p=1$, $\theta=0^\circ$, y $\delta_1=1.3$. Los parámetros característicos del contorno $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, resultan: $\min g_1 = 0.56 (-4.9\text{dB})$ según (4.24) y $\max g_2 = 4.3 (12.7\text{dB})$ según (4.25), en $\phi_{v12} = -180^\circ$ según (4.26); $g_{h12} = 1.56 (3.9\text{dB})$ y $\Delta g_{12} = 17.7\text{dB}$ según (4.27); $\Delta \phi_{12} = 2\varepsilon = 100^\circ$ según (4.22) y (4.23).

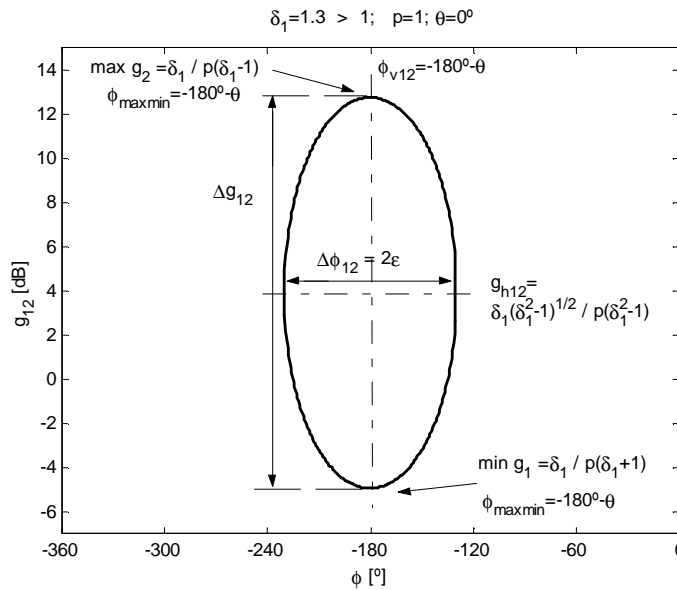


Figura 4-2: Contorno de tipología A ($\delta_i(\omega) > 1$) sin la incertidumbre

Conclusión sobre los contornos sin la incertidumbre que expresan la limitación de la sensibilidad complementaria, $|T_j| = |L/I + L|$, con tolerancias $\delta_i > 1$

Para la especificación robusta $|T_l(j\omega)| \leq \delta_l(\omega)$, en las frecuencias ω donde $\delta_l(\omega) > 1$, para las J plantas $p \angle \theta$ de la plantilla ω , siempre existe alguna solución real y positiva g_1 y g_2 , definidas en (4.2) con $g_2 > g_1$, para

todo $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, ε definido en (4.22). Esto da lugar a un contorno doble-valuado $g_{12} \angle \phi$ de tipología A que debe ser satisfecho por $G(j\omega)$ tal que: $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$ y $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$, con el fin de cumplir la especificación $|T_1(j\omega)| \leq \delta_l(\omega)$. Las características de dicho contorno son: (a) la curva inferior $g_1 \angle \phi$ se hace mínima, *min-g₁*, según (4.24) y la curva superior $g_2 \angle \phi$ alcanza su máximo, *max-g₂*, según (4.25), ambas en la fase $\phi_{v12} = -180^\circ - \theta$ (eje vertical del contorno); (b) a partir de dicho eje, ϕ_{v12} , la curva $g_1 \angle \phi$ es estrictamente creciente y la curva $g_2 \angle \phi$ estrictamente decreciente, ambas hacia los extremos del intervalo Φ_{12} en (4.23); (c) existe un eje de simetría horizontal g_{h12} definido en (4.27) que separa ambas curvas superior e inferior. (Véase Figura 4-2).

4.3 INFLUENCIA DE LA INCERTIDUMBRE

Para una mejor comprensión de este apartado se recomienda revisar la Sección 3.3. Los Pasos 8 y 9 del Algoritmo 3.1 resuelven la inecuación en (4.1):

$$I_{\omega_i}^1(p, \theta, \delta_l, \phi) = p^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\delta_l^2}\right) \cdot g^2 + 2 \cdot p \cdot \cos(\phi + \theta) \cdot g + 1 \geq 0,$$

para un valor de especificación constante δ_l en la frecuencia ω_i y una única planta $p \angle \theta$ de la plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$, por tanto, para el sistema sin incertidumbre. Esto daba lugar a contornos en ω_i para el controlador $G = g \angle \phi$: (i) monovaluados inferiores (tipología D), $g_1 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, cuando $0 < \delta_l(\omega_i) < 1$; o (ii) contornos doblevaluados (tipología A), $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, para $\delta_l(\omega_i) > 1$ (véase Sección 4.2).

Considerando ahora la incertidumbre, es decir el conjunto de plantas $\{p \angle \theta\}_{1, \dots, J}$ en la plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$, el Paso 10 resuelve (4.1) para cada planta $p \angle \theta$ resultando: (i) $\{g_1 \angle \phi\}$ si $0 < \delta_l(\omega_i) < 1$, y (ii) $\{g_{12} \angle \phi\}$ si $\delta_l(\omega_i) > 1$. Luego, **debido a la incertidumbre no se mezclan tipologías simples D y A, sino que en función del valor $\delta_l(\omega_i)$ todos los contornos simples para las plantas en ω_i serán o bien D, o bien A.** El Paso 11 del Algoritmo 3.1 calcula el G-contorno intersección en ω_i :

(i) $g_{INF} \angle \phi$ según (3.35), $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, si $0 < \delta_l(\omega_i) < 1$; (tipología D)

(ii) $g_{INF} \angle \phi$ según (3.35) y $g_{SUP} \angle \phi$ según (3.36), $\phi \in \Phi_{INFSUP} \subseteq [-360^\circ, 0^\circ]$ si $\delta_l(\omega_i) > 1$; (tipología A).

$$g_{INF} \angle \phi = \min\{g_{\text{inf}} \angle \phi\}_{1, \dots, J} = \min\{g_1 \angle \phi\}_{1, \dots, J} \quad (3.35)$$

$$g_{SUP} \angle \phi = \max\{g_{\text{sup}} \angle \phi\}_{1, \dots, J} = \max\{g_2 \angle \phi\}_{1, \dots, J} \quad (3.36)$$

El objetivo de esta Sección 4.3 será determinar qué plantas $p \angle \theta$ son críticas en $\mathfrak{I}P(j\omega) = \{p \angle \theta\}$, es decir, las que determinan en cada ϕ la menor magnitud g_1 para tipologías D, y la menor magnitud g_1 y mayor g_2 para tipologías A (las magnitudes g_{12} se definen en (4.2)). Dada la complejidad del objetivo, se desglosa en dos. Primero se estudiarán plantillas con solo incertidumbre en fase, $\mathfrak{I}P(j\omega) = p_{cte} \angle \{\theta\}$, en la Sección 4.3.1. A continuación la Sección 4.3.2 analiza la contribución de la incertidumbre en ganancia, utilizando plantillas $\mathfrak{I}P(j\omega) = \{p\} \angle \theta_{cte}$. Y finalmente, las conclusiones se extienden a plantillas genéricas con incertidumbre horizontal y vertical, $\mathfrak{I}P(j\omega) = \{p \angle \theta\}$, en la Sección 4.3.3.

4.3.1 INFLUENCIA DE LA INCERTIDUMBRE EN FASE

Se pretende estudiar la contribución en los contornos para G y L_0 de la incertidumbre en fase del sistema. Para ello, se analizarán plantillas que sólo contienen este tipo de incertidumbre, $\mathfrak{I}P(j\omega) = p_{cte} \angle \{\theta\}$. Primero se estudiará la contribución de las una fase discreta θ (Sección 4.3.1.1) y posteriormente la del conjunto $\{\theta\}$ para las dos tipologías posibles de contornos: tipología D para $0 < \delta_l(\omega) < 1$ (Sección 4.3.1.2) o tipología A para $\delta_l(\omega) > 1$ (Sección 4.3.1.3).

4.3.1.1 Influencia de la Fase (θ)

Observando g_{12} en (4.2), el parámetro θ se integra exclusivamente en los términos coseno, por lo que su influencia en los contornos se puede resumir como sigue:

La fase de la planta, θ , traslada horizontalmente un ángulo $-\theta$ las magnitudes g_1 o g_{12} en cada fase ϕ del intervalo de diseño del controlador $\Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. Por tanto, los mínimos, máximos, puntos de inflexión, fases de existencia (sólo en tipologías A) y ejes de simetría quedan desplazados la misma cantidad, $-\theta$. Luego la fase de la planta θ no modifica la forma de los contornos de tipología D o A sino sólo su posición angular (véase la Figura 4-3). Por consiguiente, varía la posición relativa entre el G-contorno y el punto de referencia en el diseño $1 \angle 0^\circ$ (0db $\angle 0^\circ$), y por tanto, cambia la agresividad o las necesidades de control que el contorno expresa.

Teniendo en cuenta que θ representa el valor en fase de una planta en la plantilla $\mathfrak{I}P(j\omega)$ sobre el diagrama de Nichols, θ tomará valores negativos

tal que: $\theta \in [-360^\circ, 0^\circ]$. Cuando al sumar $\phi + \theta$ resulten fases fuera del intervalo de diseño del controlador $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, se calculará su complemento dentro de dicho intervalo. Por ello, tomando como referencia el eje vertical de simetría de los contornos, ϕ_{v1} en (4.15) o ϕ_{v12} en (4.26), cuando $0^\circ > \theta > -180^\circ$, se desplazan $g_1 \angle \phi$ y/o $g_2 \angle \phi$ hacia la derecha (hacia fases crecientes o menos negativas) en $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. Paralelamente, cuando $-360^\circ < \theta < -180^\circ$, el desplazamiento final de los contornos resulta el contrario (es decir, hacia la izquierda o hacia fases más negativas), una vez calculado el complemento de $\phi + \theta$ dentro de Φ .

Todos estos resultados se ilustran en la Figura 4-3. La gráfica (a) representa una tipología de contornos D (simplevaluados inferiores), $g_1 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, para plantas con el mismo módulo $p=1$ y distinta fase $\theta = \{-270^\circ, -90^\circ, 0^\circ\}$, siendo el valor de especificación constante $0 < \delta_1 = 0.2 < 1$. En la gráfica (b) se muestra la influencia de θ en contornos tipo A (doblevaluados), $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, siendo $\delta_1 = 1.3 > 1$. Las necesidades finales de realimentación se expresan con la distancia del contorno respecto al punto de partida en el diseño o control unitario, $0 \text{db} \angle 0^\circ$.

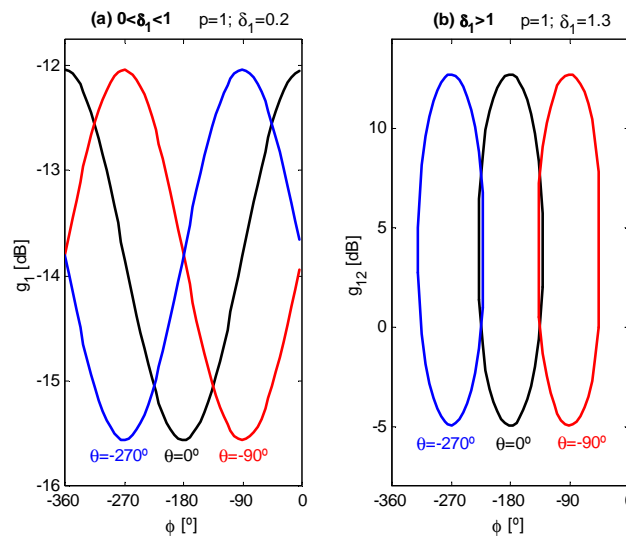


Figura 4-3: Influencia de la fase θ en contornos de (a) tipología D (b) tipología A

4.3.1.2 Contornos de Tipología D ($0 < \delta_1 < 1$) para Plantillas con Sólo Incertidumbre en Fase

Para los contornos del controlador de tipo D ($0 < \delta_1 < 1$) se trata de calcular según (3.35): $g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, seleccionando la mínima magnitud

g_I en cada ϕ , de entre los $\{g_I \angle \phi\}$ calculados para cada $p \angle \theta$ en $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$. Se asume que la plantilla sólo contiene incertidumbre horizontal, y por tanto, $\mathfrak{S}P = p_{cte} \angle \{\theta\}$. Posteriormente, se calculan los contornos para L_0 : $l_{0INF} \angle \psi_0$, $\psi_0 \in [-360^\circ, 0^\circ]$. Las principales conclusiones se enumeran y describen a continuación, ilustrándose a través de gráficos.

(i) El contorno $g_{INF} \angle \phi$ en el intervalo de fases $\phi \in \Phi_{min_INF}$ donde su altura se hace mínima, $min-g_{INF}$, queda determinado por la unión de los puntos mínimos de las curvas $g_I \angle \phi$ de todas las plantas de la plantilla con incertidumbre vertical nula, $\mathfrak{S}P = p_{cte} \angle \{\theta\}$. Esta forma de proceder supone un error proporcional al tamaño de discretización en el intervalo continuo de incertidumbre $\{\theta\}$, cometido por todos los algoritmos de cálculo automático de contornos QFT desarrollados hasta el momento. Para evitar el error de discretización, bastaría calcular el valor mínimo de cualquier $g_I \angle \phi$, $min-g_I$, según (4.12), siendo este el valor también mínimo y constante de $g_{INF} \angle \phi$ en $\phi \in \Phi_{min_INF}$. A este valor mínimo se le denominará $min-g_{INF}$. El intervalo de mínimos, Φ_{min_INF} , ocupa una amplitud absoluta de fases igual al tamaño de incertidumbre horizontal de la plantilla, $\Delta\theta = |\theta_{min} - \theta_{max}|$ según (3.19), y se centra en ϕ_{VI} . Todo esto se ilustra en la Figura 4-4 y se resume como:

$$\boxed{min\ g_{INF} = min\ g_I = \frac{\delta_1}{p(\delta_1 + 1)}, \quad \phi \in \Phi_{min_INF} = \left[\phi_{VI} \mp \frac{\Delta\theta}{2} \right]} \quad (4.28)$$

Teniendo en cuenta que en el intervalo de mínimos, Φ_{min_INF} , las dos soluciones de los extremos $g_I \angle \phi$ corresponden a $p \angle \theta_{min}$ y $p \angle \theta_{max}$, el eje de vertical del contorno ϕ_{VI} se define:

$$\boxed{\phi_{VI} = -180^\circ - \left(\frac{\theta_{min} + \theta_{max}}{2} \right)} \quad (4.29)$$

(ii) Para el cálculo de $g_{INF} \angle \phi$ en el resto de fases, $\phi \in \overline{\Phi_{min_INF}}$, basta emplear solamente las soluciones $g_I \angle \phi$ de las plantas extremas en la plantilla $\mathfrak{S}P$, es decir, $g_I \angle \phi$ para $p \angle \theta_{min}$ y $g_I \angle \phi$ para $p \angle \theta_{max}$; (véase la Figura 4-4). Los puntos de inflexión de dichas soluciones según (4.14), determinan el eje de simetría horizontal que pasa por los puntos de inflexión del contorno $g_{INF} \angle \phi$, definido como sigue:

$$g_{HI} = inflex\ g_{INF} = g_{h1} = inflex\ g_I = \frac{+\delta_1 \sqrt{1 - \delta_1^2}}{p(1 - \delta_1^2)} \quad (4.30)$$

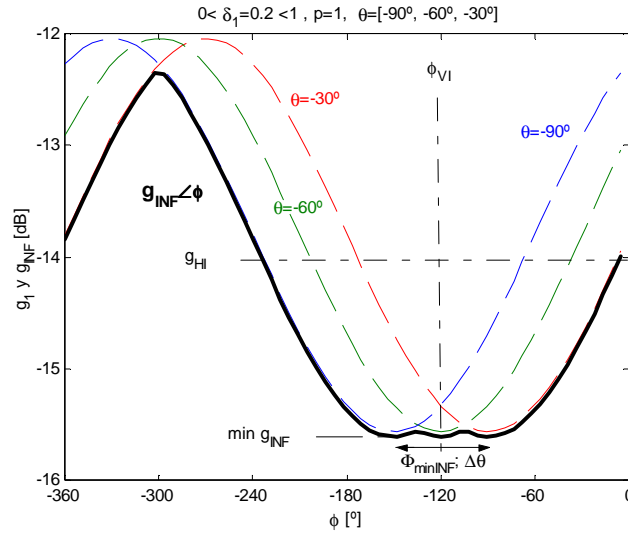


Figura 4-4: Contorno intersección tipo D ($\delta_i < 1$) en plantillas con sólo incertidumbre en fase

Luego el G -contorno de tipología D, $g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, para la plantilla $\mathcal{P}(j\omega) = p_{cte} \angle \{\theta\}$ y la especificación $\delta_i(\omega)$, se puede determinar de la forma indicada en (i) e (ii), a partir de tan sólo las dos soluciones discretas, $\{g_I \angle \phi\}$, correspondientes a las plantas de los extremos de la plantilla, $p \angle \theta_{max}$ y $p \angle \theta_{min}$. Estas conclusiones se ilustran en la Figura 4-4 donde se muestra la superposición de contornos $\{g_I \angle \phi\}$ para el conjunto discreto de plantas $\{p=1, \theta = [-90^\circ, -60^\circ, -30^\circ]\}$, y el $g_{INF} \angle \phi$ resultante. Los parámetros característicos son: $\theta_{min} = -90^\circ$ según (3.16), $\theta_{max} = -30^\circ$ según (3.17), $\Delta\theta = 60^\circ$ según (3.19); y aplicando (4.28) y (4.29): $min-g_{INF} = 0.17$ (-15.6dB), $\Phi_{min_INF} = [-120^\circ \mp 30^\circ] = [-150^\circ, -30^\circ]$, $\phi_{VI} = -120^\circ$; finalmente, según (4.30) $g_{HI} = 0.20$ (-14.0dB).

(iii) **Cuanto mayor sea el tamaño de la incertidumbre**, en este caso **incertidumbre en fase** e igual a $\Delta\theta$, **más agresivo** en altura será el **G-contorno**, ya que $g_{INF} \angle \phi$ alcanza valores mínimos, $min-g_{INF}$, en un mayor número de fases, igual a $\Delta\theta$. Es decir, el intervalo Φ_{min_INF} en (4.28) aumenta. En el caso más desfavorable Φ_{min_INF} podría englobar todo el intervalo de diseño, $[-360^\circ, 0^\circ]$, si $\Delta\theta = 360^\circ$. En la Figura 4-5 se ilustran estas conclusiones. El gráfico superior representa el contorno de tipología D para una plantilla ω_i de incertidumbre horizontal pequeña, $\Delta\theta = 10^\circ$, típica de bajas y altas frecuencias; el gráfico intermedio para una

incertidumbre muy grande, $\Delta\theta=180^\circ$; y el gráfico inferior para el tamaño de incertidumbre más desfavorable $\Delta\theta=360^\circ$. Junto a $g_{INF}\angle\phi$ (línea discontinua de trazo grueso) los gráficos anteriores muestran el contorno simple $g_I\angle\phi$ (línea discontinua de trazo fino) para las plantas extremas del intervalo de incertidumbre, $p\angle\theta_{max}$ y $p\angle\theta_{min}$.

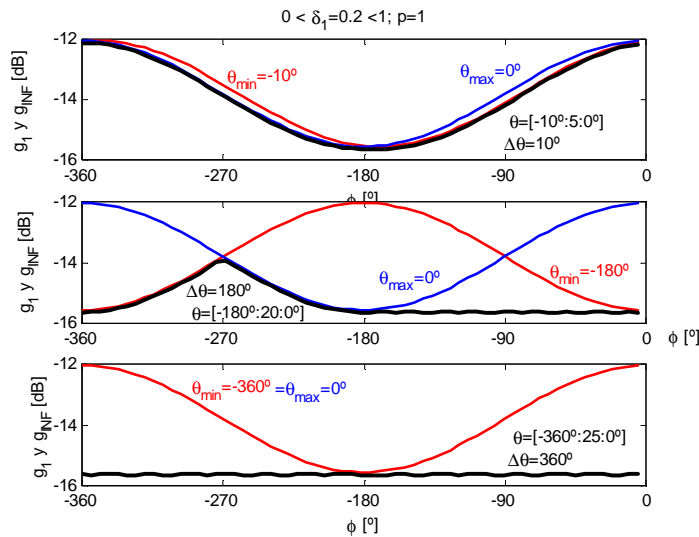


Figura 4-5: Influencia del tamaño de la incertidumbre en fase en contornos D ($\delta_1 < 1$)

(iv) Sistemas con el **mismo tamaño de incertidumbre horizontal** (igual $\Delta\theta$), siendo $p=\text{cte}$, presentan G -contornos de igual forma pero desplazados sobre $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0]$ una fase relativa al conjunto de valores $\{\theta\}$. Luego la posición relativa de los contornos respecto al punto de partida $0\text{db}\angle 0^\circ$ ($G=1$) varía. Por tanto, su **agresividad** o las necesidades que ellos expresan para cumplir la especificación **es distinta**. Esto se ilustra en la Figura 4-6, donde al ser distinta la posición relativa de los valores $\{\theta\}$, aunque $\Delta\theta=45^\circ=\text{cte.}$, en el gráfico (a) es necesario añadir un controlador $G=g\angle\phi$ que en la fase $\phi=0^\circ$ garantice una ganancia por debajo de -4dB , ($g < 0.6$). Mientras tanto, en el gráfico (b) se cumple la especificación con control unitario ($G=1$), o incluso se tiene en 0° una ganancia de 4dB inferior a la exigida.

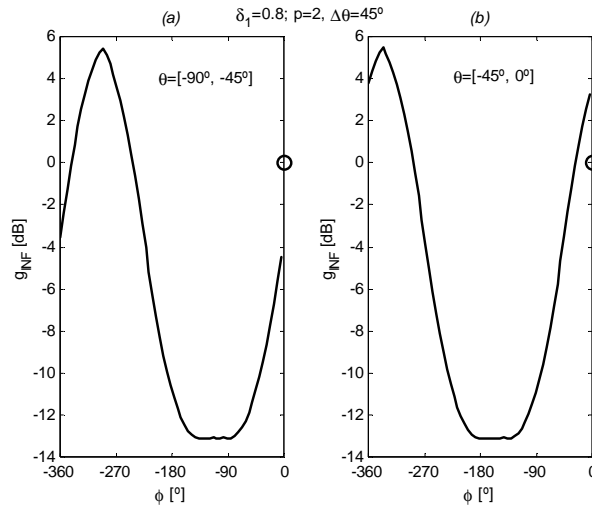


Figura 4-6: Influencia de la fase en la agresividad de los contornos D ($\delta_l < 1$)

(v) Como se demostró en la Sección 3.3.5 los contornos para L_0 expresan lo mismo que los contornos para G . No sólo se traslada la curva $g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$, una cantidad $p_0 \angle \theta_0$ para obtener el contorno $l_{0INF} \angle \psi_0$, $\psi_0 \in [-360^\circ, 0^\circ]$, sino que también el punto de referencia se desplaza la misma cantidad, pasando de ser $0 \text{ dB} \angle 0^\circ$ a $p_0 \text{ dB} \angle \theta_0$. Siguiendo este mismo razonamiento, la selección de la planta nominal tampoco modifica la información expresada con el contorno de L_0 . Véase Figura 4-7.

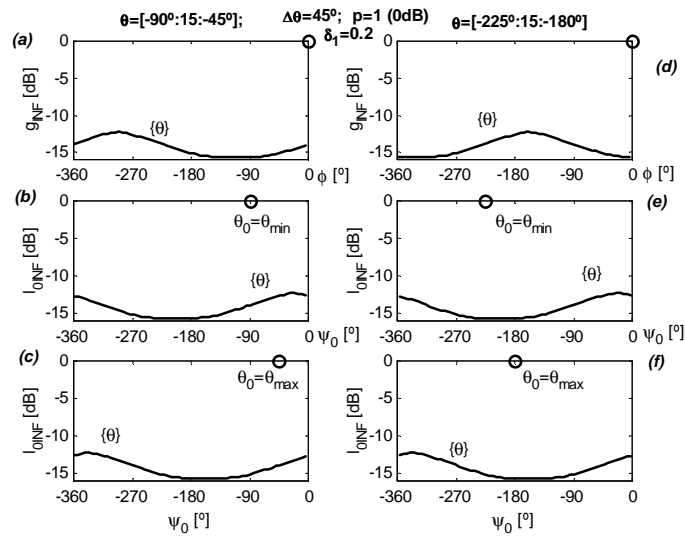


Figura 4-7: Comparación de contornos tipo D ($\delta_l < 1$) para G y para L_0

4.3.1.3 Contornos de Tipología A ($\delta_l > 1$) para Plantillas con Sólo Incertidumbre en Fase

De manera similar se lleva a cabo el cálculo de $g_{INF} \angle \phi$ y $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} \subseteq [-360^\circ, 0^\circ]$ en contornos de tipo A ($\delta_l > 1$). Calculados $\{g_{12} \angle \phi, \phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]\}$ para el conjunto de plantas $\mathfrak{S}P(j\omega_i) = p_{cte} \angle \{\theta\}$, ahora se seleccionará la mínima magnitud g_1 y la máxima g_2 en cada $\phi \in \Phi_{IS}$, que darán g_{INF} y g_{SUP} , respectivamente. Las magnitudes g_{12} se definen en (4.2) y su intervalo angular de existencia será función de ε en (4.22). Nótese que la unión de los intervalos de existencia de cada solución simple (sin incertidumbre), Φ_{12} , dará el intervalo de existencia de los contornos considerada la incertidumbre, Φ_{IS} . Los resultados se resumen a continuación:

(i) g_{INF} se hace mínima y g_{SUP} máxima en el conjunto de fases Φ_{min_max} , donde cada $g_1 \angle \phi$ y $g_2 \angle \phi$ (calculadas para $\mathfrak{S}P = p \angle \{\theta\}$) se hacen mínima y máxima, respectivamente, según (4.24) y (4.25). El intervalo Φ_{min_max} tiene una amplitud $\Delta\theta$ y se centra en la fase ϕ_{VIS} , tomada ésta última como eje vertical de los G -contornos $g_{INF_SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS}$. Por tanto, la porción de máximo y mínimo de estas curvas puede definirse mediante la intersección del conjunto de $\{g_{12} \angle \phi\}$ o simplemente extendiendo los valores mínimos y máximos para una planta a lo largo del intervalo correspondiente según la siguiente formulación. Véase Figura 4-8.

$$\boxed{\min g_{INF} = \min g_1 = \frac{\delta_1}{p(\delta_1 + 1)}, \phi \in \Phi_{minmax} = \left[\phi_{VIS} \mp \frac{\Delta\theta}{2} \right]} \quad (4.31)$$

$$\boxed{\max g_{SUP} = \max g_2 = \frac{\delta_1}{p(\delta_1 - 1)}, \phi \in \Phi_{minmax} = \left[\phi_{VIS} \mp \frac{\Delta\theta}{2} \right]} \quad (4.32)$$

$$\boxed{\phi_{VIS} = -180^\circ - \left(\frac{\theta_{min} + \theta_{max}}{2} \right)} \quad (4.33)$$

(ii) Para el cálculo de $g_{INF} \angle \phi$ y $g_{SUP} \angle \phi$ en el resto de fases, $\phi \in \overline{\Phi}_{minmax}$, basta emplear las soluciones $g_{12} \angle \phi$ de las plantas extremas en la plantilla $\mathfrak{S}P$, es decir, $g_{12} \angle \phi$ para $p \angle \theta_{max}$ y $g_{12} \angle \phi$ para $p \angle \theta_{min}$. Véase Figura 4-8.

(iii) Como los contornos $g_{INF_SUP} \angle \phi$ en el caso de plantillas $\mathfrak{S}P = p_{cte} \angle \{\theta\}$ no se desplazan verticalmente respecto a las soluciones simples $\{g_{12} \angle \phi\}$, el eje horizontal de simetría, constante para estas últimas y definido en (4.27), es también el eje horizontal para los contornos intersección.

$$\boxed{g_{HIS} = g_{h12} = \frac{+ \delta_1 \sqrt{\delta_1^2 - 1}}{p(\delta_1^2 - 1)}} \quad (4.34)$$

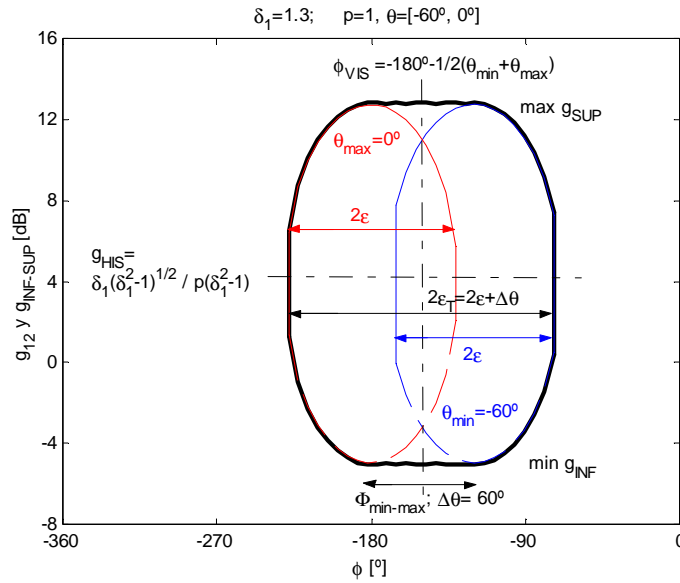


Figura 4-8: Contornos intersección tipo A ($\delta_1 > 1$) en plantillas con sólo incertidumbre en fase

(iv) Las soluciones sin incertidumbre $g_{12} \angle \phi$ existen en un intervalo $\phi \in [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$. ε definido en (4.22) no varía al modificarse p o θ , tan sólo cuando varía δ_1 (véase Sección 4.2.2 y 4.4.2). Entonces, en el caso bajo estudio (influencia de la incertidumbre horizontal $p_{cte} \angle \{\theta\}$) ε se mantiene constante. Y como las $g_{12} \angle \phi$ originadas por $\mathcal{S}P = p_{cte} \angle \{\theta\}$ se desplazan una respecto a otra una fase $-\theta$, finalmente la amplitud del intervalo Φ_{IS} donde existen los contornos intersección, $g_{INF} \angle \phi$ y $g_{SUP} \angle \phi$, es igual a $2\varepsilon_T$ con $\varepsilon_T = \varepsilon + \Delta\theta/2$. Véase Figura 4-8. Es decir, el intervalo angular de existencia de los contornos para G de tipología A, $\Phi_{IS} \subseteq [-360^\circ, 0^\circ]$, cuando sólo existe incertidumbre horizontal se define:

$$\Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T], \quad \varepsilon_T = \varepsilon + \Delta\theta/2, \quad \phi_{VIS} = -180^\circ - 1/2(\theta_{min} + \theta_{max}) \quad (4.35)$$

Por ello, mientras que sin incertidumbre (único θ) la máxima amplitud en fase ocupada por los contornos $g_{12} \angle \phi$ era $2\varepsilon = 180^\circ$ (cuando $\varepsilon = 90^\circ$ en $\phi \in [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$), ahora $g_{INF_SUP} \angle \phi$ pueden llegar a ocupar todo el intervalo de diseño si la incertidumbre $\Delta\theta$ es muy grande (incluso aunque $\varepsilon \ll 90^\circ$). La máxima anchura para contornos simples, 2ε con $\varepsilon \rightarrow 90^\circ$, se produce cuando $\delta_1 \rightarrow 1$ (véase Sección 4.4), y si δ_1 disminuye aún más se hace $\delta_1 < 1$ y se cambia a una tipología D de contornos. Sin embargo, la

máxima anchura de los contornos intersección, $2\varepsilon_T$, según (4.35) se produce o bien cuando $\Delta\theta$ crece hasta el límite ($\Delta\theta/2 \rightarrow 180^\circ$) independientemente de ε y, por tanto, de δ_i , o bien ante un incremento de $\Delta\theta$ (con $\Delta\theta/2 \ll 180^\circ$) reforzado por un decremento de δ_i ($\delta_i \rightarrow 1$ y $\varepsilon \rightarrow 90^\circ$). En el segundo caso ($\Delta\theta/2 \ll 180^\circ$) al presentarse una tipología A o en el límite ($\delta_i \rightarrow 1$) un cambio a tipología D, a priori siempre habrá solución (considerando exclusivamente la especificación $|T_I| \leq \delta_i$). Sin embargo, en el primer caso cuando la incertidumbre se acerca al límite ($\Delta\theta \approx 360^\circ$, $\delta_i > 1$) persiste una tipología A y como existe una curva g_{SUP} y otra g_{INF} que ocupan todo el intervalo $[-360^\circ, 0^\circ]$, no hay solución posible para satisfacer $|T_I| \leq \delta_i$. En resumen, **cuando la incertidumbre $\Delta\theta$ aumenta las garantías de solución para $|T_I| = |L/I + L| \leq \delta_i$, con $\delta_i < 1$ (tipología A) disminuyen pudiendo incluso llegar a la inexistencia de solución;** véase Figura 4-9. **Y si dada una incertidumbre $\Delta\theta$, la especificación δ_i disminuye, tras pasar de una tipología A a una tipología D de contornos (véase Figura 4-10), aunque se garantice la solución particular de $|T_I| \leq \delta_i$ la solución global se complica cuando simultáneamente se persiguen otros objetivos contrapuestos, $|T_{2,3 \text{ o } 5}| \leq \delta_{2,3 \text{ o } 5}$.** Véase Sección 4.5 y Capítulos 5, 6 y 7.

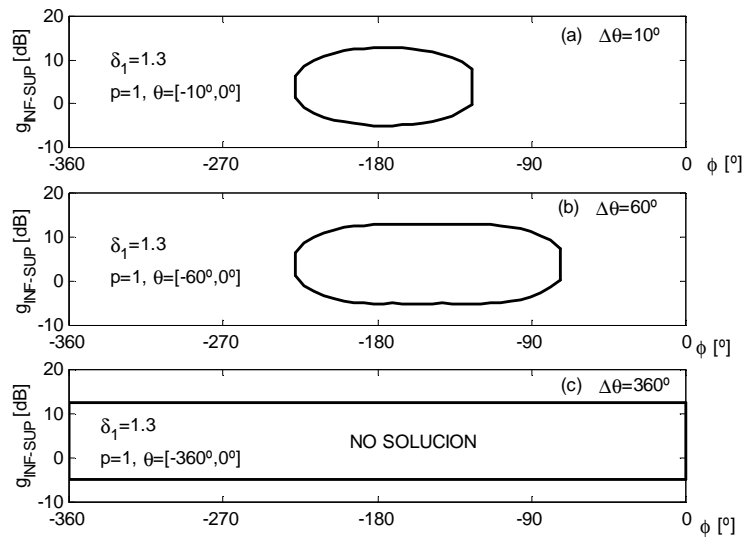


Figura 4-9: Influencia del tamaño de incertidumbre, $\Delta\theta$, en contornos tipo A ($\delta_i > 1$)

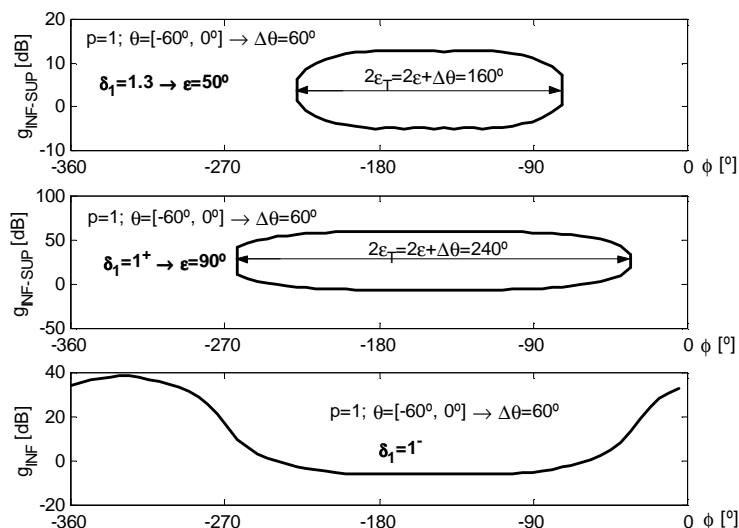


Figura 4-10: Influencia del tamaño de la incertidumbre en fase $\Delta\theta$, y del valor de especificación δ_1 , para contornos de tipo A ($\delta_1 > 1$)

(v) La posición relativa del intervalo de incertidumbre $\{\theta\}$ (incluso para $\Delta\theta$ constante) sobre $[-360^\circ, 0^\circ]$, también modifica la agresividad del contorno doblevaluado $g_{INF_SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS}$, ya que cambia su posición en fase relativa al punto $0\text{dB} \angle 0^\circ$ ($G=1$). Véase la Figura 4-11. Tomando como referencia el eje vertical del contorno, ϕ_{VIS} definido en (4.33), para la gráfica superior donde $\{\theta\} = [-60^\circ, 0^\circ]$, los contornos se centran en $\phi_{VIS} = -150^\circ$. Mientras tanto, en la gráfica inferior donde $\{\theta\} = [-120^\circ, -60^\circ]$, siendo $\phi_{VIS} = -90^\circ$, los contornos se acercan a la fase de partida en el diseño 0° . Esto puede entenderse como que el margen de fase de seguridad ha disminuido (menor distancia al contorno), o desde el punto de vista de que es necesaria la aportación de una fase menor para conseguir el comportamiento “óptimo”³ robusto respecto a δ_l en la frecuencia ω_l sin violar esta restricción. Nótese como la fase final a aportar o el margen de seguridad en la fase quedan condicionados por el tamaño de la incertidumbre, $\Delta\theta$. Como la fase de partida es 0° ($G=1$) y según la ubicación de Φ_{IS} en (4.35), la fase absoluta a aportar para el diseño óptimo es $\phi_{VIS} + \epsilon + \Delta\theta/2$.

³ Horowitz y Sidi (1972) y Horowitz (1973) definen el diseño óptimo QFT como aquel que ubica L_θ junto a sus contornos (véase Sección 2.7.1). Si L_θ viola alguno de sus contornos se incumple la especificación que lo representa, y si se sitúa demasiado lejos existe un sobredimensionamiento no exigido por la especificación y que puede ‘pagarse’ en la satisfacción de esa u otras especificaciones de control a otras frecuencias.

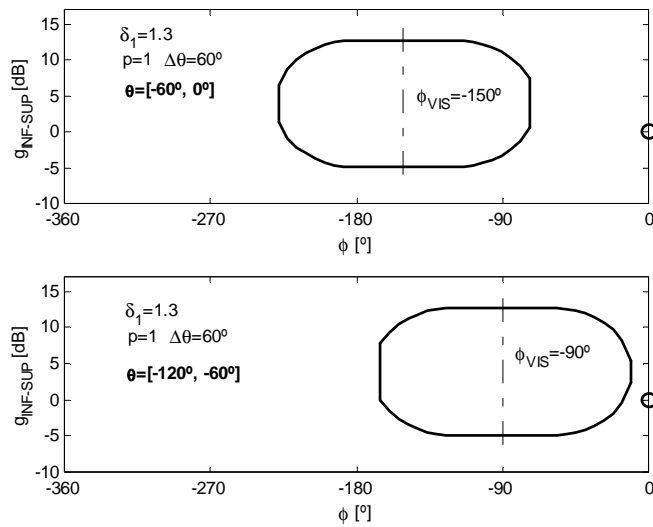


Figura 4-11: Influencia de la incertidumbre en fase relativa, $\{\theta\}$, en contornos tipo A ($\delta_j > 1$)

(vi) Los contornos para G , $g_{INF_SUP} \angle \phi$ y para L_0 , $l_{0INF_SUP} \angle \psi_0$ (calculados según se indica en el Paso 12 del Algoritmo 3.1), expresan lo mismo respecto a sus puntos de referencia ($0\text{dB} \angle 0^\circ$ y $p_0\text{dB} \angle \theta_0$), tal como se demostró en el Capítulo 3 (Sección 3.3.5). La selección de la planta nominal, $p_0 \angle \theta_0$, tampoco es relevante en este sentido. Véase Figura 4-12.

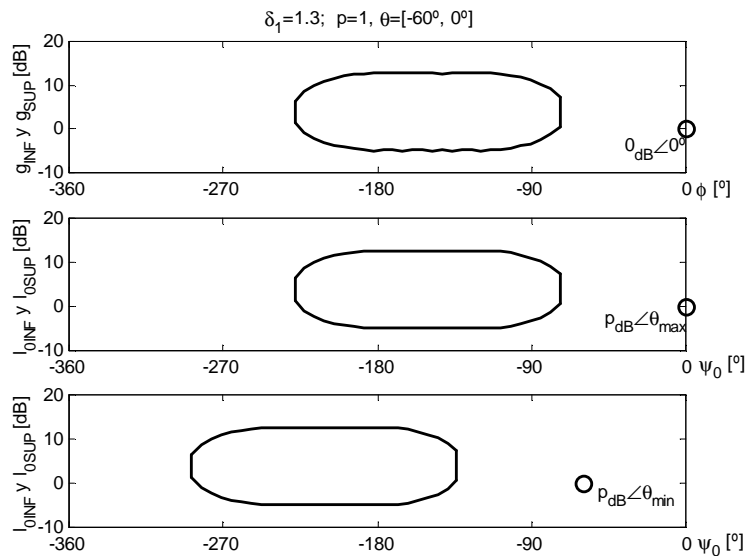


Figura 4-12: Comparación de contornos para G y L_0 en tipologías A

4.3.2 INFLUENCIA DE LA INCERTIDUMBRE EN GANANCIA

Se pretende estudiar la contribución en los contornos para G y L_0 de la incertidumbre en ganancia del sistema. Se analizarán plantillas que sólo contienen este tipo de incertidumbre, $\mathfrak{S}P(j\omega) = \{p\} \angle \theta_{cte}$. Primero se estudiará la contribución de valores p discretos (Sección 4.3.2.1) y, posteriormente, la del conjunto $\{p\}$ en función de la tipología de contornos, D para $0 < \delta_l(\omega) < 1$ (Sección 4.3.2.2) o A para $\delta_l(\omega) > 1$ (Sección 4.3.2.3).

4.3.2.1 Influencia de la Magnitud (p)

De acuerdo con (4.2) las magnitudes g_1 y/o g_2 son inversamente proporcionales al módulo p . Por ello, cuando p aumenta, ambas disminuyen proporcionalmente para todo ϕ , tanto en los contornos de tipología D como A. Además, en el caso de contornos tipo A, p no modifica su intervalo angular de existencia según ε definido en (4.22). Véase la Figura 4-13.

Por tanto, para $0 < \delta_l < 1$ cuando p aumenta implica un incremento en la agresividad en magnitud del contorno monovaluado inferior $g_1 \angle \phi$, ya que su altura g_1 disminuye $\forall \phi$ (gráfico (a) en la Figura 4-13). Esta deducción desde el análisis matemático de (4.2) es interpretable físicamente. Cuanto mayor sea la ganancia aportada por la planta (aumento de p), tanto mayor será la atenuación exigida por g , tal que se limite $|L| = l = g \cdot p$ según exige $|T_1| < \delta_l$ (limitación del pico de sensibilidad complementaria y/o la ganancia de alta frecuencia; véase Sección 4.4 y 4.5). El efecto deseado es justamente el opuesto en problemas que tratan de mejorar el comportamiento dinámico, como $|T_k| < \delta_k$, $k=2,3,5$ en (3.7), (3.8) y (3.10). Por ejemplo, el rechazo de perturbaciones en la salida $|T_2| < \delta_2$ en lugar de limitar la ganancia máxima, exige una ganancia mínima para $|L| = l = g \cdot p$, y por ello, sus contornos serán de tipología B. Este tipo de curvas expresan una mayor agresividad cuanto más altas sean sus magnitudes (consultar Capítulos 5 y 6).

Respecto a los contornos doblevaluados (cuando $\delta_l > 1$) el incremento del módulo p rebaja la altura tanto de la curva $g_1 \angle \phi$ como de $g_2 \angle \phi$, (gráfico (b) en la Figura 4-13). De acuerdo al razonamiento anterior el contorno inferior $g_1 \angle \phi$ se hace más restrictivo, pero el contorno $g_2 \angle \phi$ al ser de tipo ‘superior’⁴ y disminuir su altura se relaja su agresividad. No obstante, y debido a que el objetivo de las especificaciones $|T_1| < \delta_l$ en (3.6) es limitar la ganancia de $|L|$, la porción inferior del contorno $g_1 \angle \phi$ es la curva crítica, mientras que la

⁴ Se debe satisfacer *por encima*, es decir, $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$.

curva superior $g_2 \angle \phi$ nunca va a ser dominante cuando se consideren también especificaciones $|T_{2,3} \text{ o } s| < \delta_{2,3} \text{ o } s$ en (3.7), (3.8) o (3.10). El intervalo de fases Φ_{12} de existencia de contornos $g_{12} \angle \phi$, definido en (4.23), no depende de p , luego no se modifica al variar la incertidumbre en ganancia. Esto puede comprobarse igualmente en la propia definición de la magnitud de los contornos g_{12} en (4.2), donde p no afecta a los términos coseno que inflúan en las fases de definición de los contornos de tipo A.

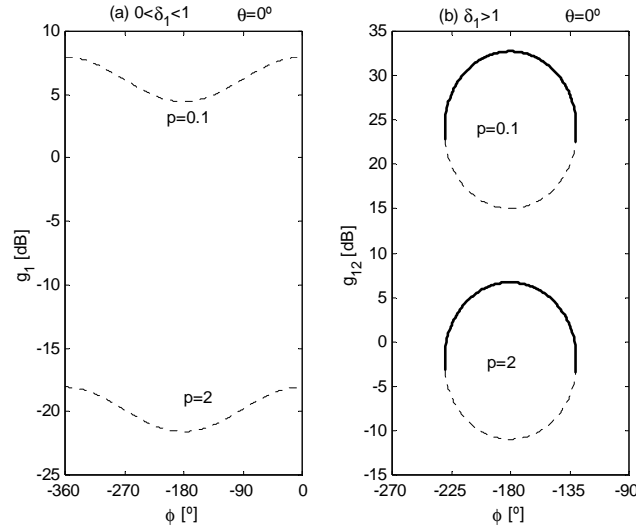


Figura 4-13: Influencia de la magnitud p en los contornos (a) tipología D (b) tipología A.

4.3.2.2 Contornos de Tipología D ($0 < \delta_l < 1$) para Plantillas con Sólo Incertidumbre en Magnitud

A partir de los resultados de la sección anterior resulta sencillo demostrar la influencia de la incertidumbre en magnitud $\{p\}$ de una plantilla, supuesta nula su incertidumbre en fase, es decir, $\mathcal{I}P(j\omega) = \{p\} \angle \theta_{cte}$. Se trata de calcular para tipologías D ($0 < \delta_l < 1$): $g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, según (3.35) a partir del conjunto $\{g_l \angle \phi, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]\}$ obtenido para $\{p\} \angle \theta_{cte}$. A continuación se enumeran los resultados:

- (i) La planta de mayor módulo en la plantilla, $p = p_{max}$ según (3.15), es la que origina la **curva $g_l \angle \phi$ más restrictiva** (menor altura g_l en cada ϕ). Por tanto, dicho contorno será tomado como $g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. Véanse el gráfico (a) de la Figura 4-13 y también la Figura 4-14. Como $g_{INF} \angle \phi$ coincide con $g_l \angle \phi$ para $p_{max} \angle \theta_{cte}$, se conservan todas sus propiedades ya estudiadas en la Sección 4.2.1: mínimo y fase de mínimo en (4.12), máximo y fase de máximo en (4.13), módulo y fase del punto de inflexión

en (4.14), y ejes vertical y horizontal en (4.15) y (4.16). Véase la Figura 4-14.

$$\boxed{\min g_{INF} = \frac{\delta_1}{p_{max}(\delta_1 + 1)}} \quad \phi_{\min g_{INF}} = -180^\circ - \theta \quad (4.36)$$

$$\max g_{INF} = \frac{\delta_1}{p_{max}(1 - \delta_1)}, \quad \phi_{\max g_{INF}} = 0^\circ - \theta, -360^\circ - \theta \quad (4.37)$$

$$\text{influx } g_{INF} = \frac{+\delta_1 \sqrt{1 - \delta_1^2}}{p_{max}(1 - \delta_1^2)}, \quad \phi_{\text{influx } g_{INF}} = -90^\circ - \theta, -270^\circ - \theta \quad (4.38)$$

$$\boxed{\phi_{VI} = -180^\circ - \theta} \quad (4.39)$$

$$\boxed{g_{HI} = \frac{+\delta_1 \sqrt{1 - \delta_1^2}}{p_{max}(1 - \delta_1^2)}} \quad (4.40)$$

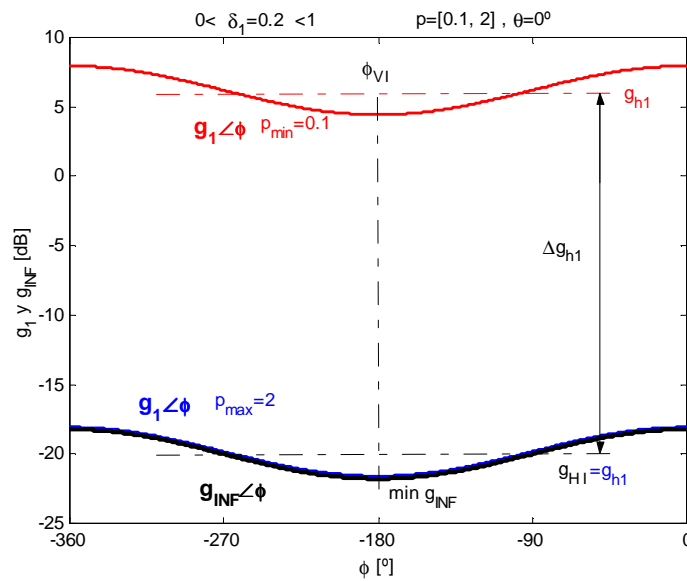


Figura 4-14: Contornos tipo D ($\delta_1 < 1$) para plantillas con sólo incertidumbre en magnitud

También resulta interesante conocer el salto de altura existente entre el eje horizontal g_{h1} de dos soluciones $g_1 \angle \phi$ para dos plantas genéricas $p_2 \angle \theta_2$ y $p_1 \angle \theta_1$, donde $p_2 > p_1$. Sustituyendo en (4.16), se define:

$$\Delta g_{h1} = Lm \frac{p_2}{p_1} \quad (4.41)$$

Nótese que los ‘incrementos’ en módulo se calculan en base logarítmica.

Según estas definiciones (4.36) a (4.40) los parámetros más característicos de $g_{INF} \angle \phi$ para el ejemplo sobre la Figura 4-14 resultan: magnitud mínima, $\min g_{INF} = 0.083 (-21.7\text{dB})$ según (4.36); eje vertical, $\phi_I = -180^\circ$ según (4.39); eje horizontal, $g_{HI} = 0.10 (-20\text{dB})$ según (4.40).

(ii) De acuerdo a (i) el tamaño absoluto de incertidumbre, Δp , no influye en la agresividad expresada por el contorno $g_{INF} \angle \phi$, sino que es tan sólo sus valores relativos $\{p\}$, y en concreto el valor p_{max} , el que condiciona su altura. La Figura 4-15 ilustra estos resultados. Nótese que el descenso de altura (incremento de agresividad) para distintos p_{max} puede calcularse a partir de (4.41), haciendo $p_2 = \max\{p_{max}\}$ y $p_1 = \min\{p_{max}\}$. Según esto en la Figura 4-15, los gráficos (a) o (b) representarían $p_2 = p_{max} = 10$ y el gráfico (c) $p_1 = p_{max} = 1$. Aplicando (4.41) se comprueba efectivamente una diferencia de alturas de 20dB entre los contornos en (a) o (b) y el contorno en (c).

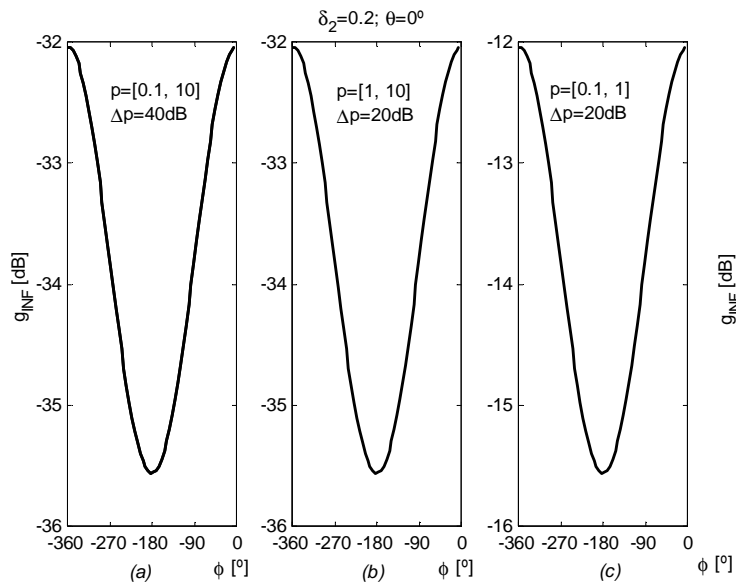


Figura 4-15: Influencia de la incertidumbre en magnitud absoluta Δp y relativa $\{p\}$, para contornos intersección de tipo D ($0 < \delta_1 < 1$)

(iii) Los contornos para L_θ expresan lo mismo que los contornos para G . El razonamiento ya ha sido expuesto anteriormente: no sólo se desplaza el contorno sino que el punto de referencia se modifica en la misma cantidad. Por ello, tampoco influye la selección de la planta nominal. La Figura 4-16 ilustra estas conclusiones.

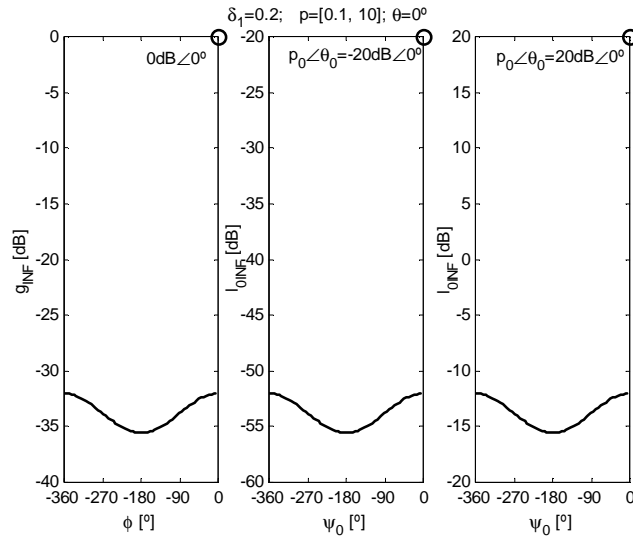


Figura 4-16: Comparación de contornos intersección tipo D ($\delta_l < 1$) para L_0 y G , para plantillas con sólo incertidumbre en magnitud

4.3.2.3 Contornos de Tipología A ($\delta_l > 1$) para Plantillas con Sólo Incertidumbre en Magnitud

Para tipologías A ($\delta_l > 1$), el objetivo es obtener $g_{INF_SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} \subseteq [-360^\circ, 0^\circ]$, a partir de $\{g_{l2} \angle \phi, \phi \in [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]\}$ de acuerdo a (3.35) y (3.36). El conjunto de soluciones $\{g_{l2} \angle \phi\}$ corresponde a una plantilla con sólo incertidumbre vertical, $\Im P(j\omega) = \{p\} \angle \theta_{cte}$. A continuación se enumeran las conclusiones principales.

- (i) La planta de mayor módulo en la plantilla ω_i , $p = p_{max}$ según (3.15), es la que origina la curva $g_1 \angle \phi$ de menor altura (más restrictiva). Y la planta de menor módulo, $p = p_{min}$ según (3.14), la que da lugar a la curva $g_2 \angle \phi$ de mayor altura. Por tanto, $g_{INF} \angle \phi$ se corresponde con la solución $g_1 \angle \phi$ calculada para $p_{max} \angle \theta_{cte}$ sustituyendo en (4.2a) Y $g_{SUP} \angle \phi$ se corresponde con la solución $g_2 \angle \phi$ calculada para $p_{min} \angle \theta_{cte}$ sustituyendo en (4.2b). Véase el gráfico (b) en la Figura 4-13 y también la Figura 4-17
- (ii) Al no existir incertidumbre horizontal, sino una única fase θ , el eje vertical de simetría ϕ_{VIS} es idéntico al de todas las soluciones $\{g_{l2} \angle \phi\}$. Figura 4-17.

$$\phi_{VIS} = -180^\circ - \theta \tag{4.42}$$

(iii) Como p no modifica ε según (4.22), todas las soluciones $\{g_{12}\angle\phi\}$ están centradas en ϕ_{VIS} en (4.42) y se extienden sobre el mismo intervalo de fases de amplitud 2ε (Figura 4-17):

$$\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon] \quad (4.43)$$

Luego, ni el tamaño de la incertidumbre vertical, Δp , ni los valores relativos de ésta, $\{p\}$, modifican Φ_{IS} (intervalo de fases de existencia del contorno doblevaluado $g_{INFSUP}\angle\phi$).

(iv) De acuerdo a (i) el mínimo del contorno $g_{INFSUP}\angle\phi$, $min-g_{INFSUP}$, se alcanza en la fase ϕ_{VIS} en (4.42), y se corresponde con el mínimo de la solución $g_1\angle\phi$. Este se calcula evaluando la ecuación (4.24) para $p_{max}\angle\theta$. Figura 4-17.

$$\boxed{min\ g_{INFSUP} = \frac{\delta_1}{p_{max}(\delta_1 + 1)}, \phi_{VIS} = -180^\circ + \theta} \quad (4.44)$$

(v) Y el máximo de $g_{INFSUP}\angle\phi$, $max-g_{INFSUP}$, se alcanza en la fase ϕ_{VIS} en (4.42), y se corresponde con el máximo de la solución $g_2\angle\phi$. Se calcula según la ecuación (4.25) evaluada en $p_{min}\angle\theta$. Figura 4-17.

$$\boxed{max\ g_{INFSUP} = \frac{\delta_1}{p_{min}(\delta_1 - 1)}, \phi_{VIS} = -180^\circ + \theta} \quad (4.45)$$

(vi) El nuevo eje de simetría horizontal, g_{HIS} , de los contornos $g_{INFSUP}\angle\phi$, $\phi \in \Phi_{IS}$, depende de los ejes de simetría g_{h12} de los contornos simples $g_{12}\angle\phi$ para las plantas $p_{max}\angle\theta$ y $p_{min}\angle\theta$, definidos en (4.27). La media entre g_{h12} para p_{max} y g_{h12} para p_{min} ha de calcularse en magnitudes logarítmicas resultando (Figura 4-17):

$$\boxed{g_{HIS}\ dB = \frac{1}{2} Lm\left(\frac{\delta_1^2}{(\delta_1^2 - 1)} \frac{1}{p_{max}p_{min}}\right)} \quad (4.46)$$

Nótese que calculando la media entre g_{h12} para p_{max} y g_{h12} para p_{min} en magnitudes lineales no se obtendría el mismo resultado, ya que el logaritmo de una suma difiere de la suma de logaritmos.

El salto entre los dos ejes de simetría g_{h12} asociados a las soluciones simples $g_{12}\angle\phi$ para $p_{max}\angle\theta$ y $g_{12}\angle\phi$ para $p_{min}\angle\theta$ puede calcularse sustituyendo en (4.27). Para mayor generalidad de la expresión, se formula en términos de dos plantas cualesquiera $p_2\angle\theta_2$ y $p_1\angle\theta_1$, donde $p_2 > p_1$ como sigue (véase Figura 4-17):

$$\Delta g_{h12} = Lm\frac{p_2}{p_1}, \quad p_2 \geq p_1 \quad (4.47)$$

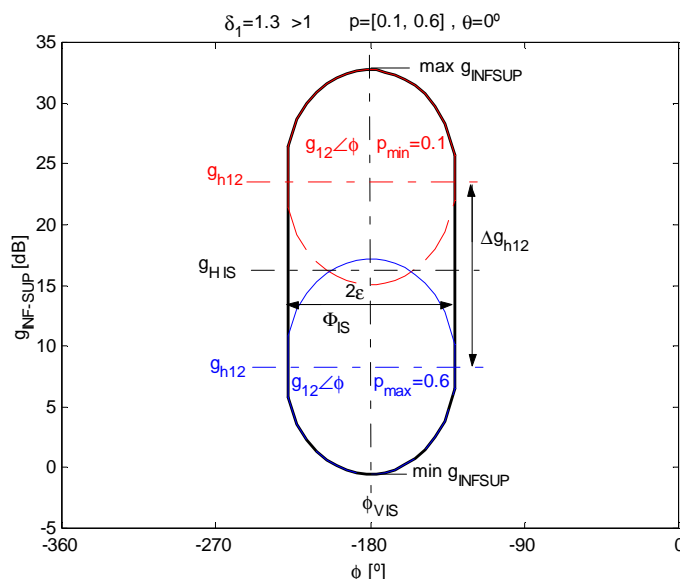


Figura 4-17: Contornos tipo A ($\delta_1 > 1$) para plantillas con sólo incertidumbre en magnitud

Las conclusiones (i) a (vi) se ilustran en la Figura 4-17 para una plantilla $\mathfrak{S}P = \{p = [0.1, 0.6], \theta = 0^\circ\}$ y un valor de especificación $\delta_1 = 1.3 > 1$. Resultan: $g_{INF} \angle \phi = g_1 \angle \phi$, según (4.2a) para $p = p_{max} = 0.6$ y $\theta = 0^\circ$; $g_{SUP} \angle \phi = g_2 \angle \phi$, según (4.2b) para $p = p_{min} = 0.1$ y $\theta = 0^\circ$; $\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_V \mp \epsilon]$ según (4.43), con $\epsilon = 50^\circ$ según (4.22) y $\phi_{VIS} = -180^\circ$ según (4.42), luego $\Phi_{IS} = [-230^\circ, -130^\circ]$; $min-g_{INFSUP} = 0.94 (-0.52 \text{dB})$ según (4.44); $max-g_{INFSUP} = 43.3 (32.7 \text{dB})$ según (4.45); y eje horizontal $g_{HIS} = 16 \text{dB}$ según (4.46). Según (4.27), para p_{min} se tiene $g_{h12} = 15.6 (23.9 \text{dB})$ y para p_{max} se calcula $g_{h12} = 2.6 (8.3 \text{dB})$, comprobándose que el salto entre ambos coincide con la expresión (4.47), $\Delta g_{h12} = 15.6 \text{dB}$.

(vii) Una incertidumbre en magnitud Δp variable produce un distanciamiento proporcional entre la porción inferior $g_{INF} \angle \phi$ y superior $g_{SUP} \angle \phi$ del contorno doblevaluado, en función de los nuevos valores p_{max} y p_{min} del intervalo $\{p\}$. Como la porción superior, $g_{SUP} \angle \phi$, del contorno doblevaluado para $\delta_1 > 1$, no será dominante al considerar en la misma frecuencia los contornos para $\delta_{2,3,5}$, lo que interesa vigilar es la curva inferior del contorno doblevaluado, es decir, $g_{INF} \angle \phi$. Y dicha curva disminuye en altura (más exigente) si p_{max} aumenta, independientemente del tamaño de incertidumbre Δp . La Figura 4-18 muestra algunos ejemplos para distintos Δp , modificando y sin modificar p_{max} . Nótese que la magnitud de referencia es siempre 0dB ($G=1$).

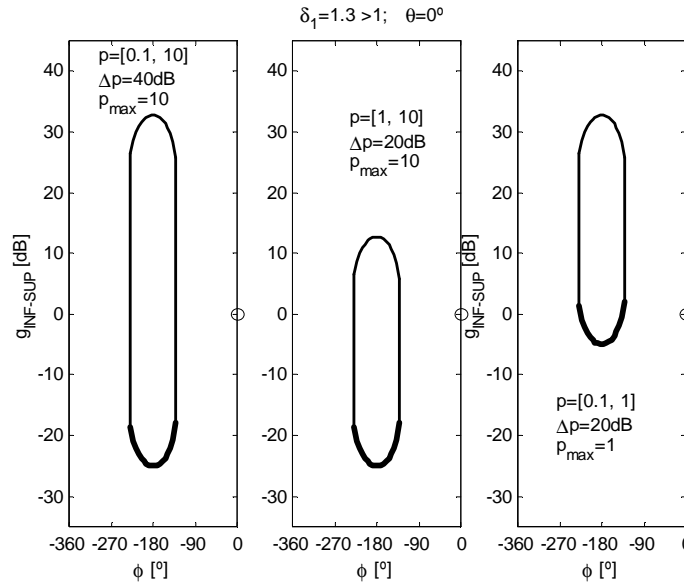


Figura 4-18: Influencia de la incertidumbre vertical relativa, $\{p\}$, y absoluta, Δp

(viii) Al igual que en los casos estudiados anteriormente, los contornos para L_0 expresan lo mismo que los contornos para G , sin importar tampoco la planta seleccionada como nominal P_0 .

4.3.3 CONCLUSIONES SOBRE LA INFLUENCIA DE LA INCERTIDUMBRE

En las Secciones 4.3.1 y 4.3.2 se analizaron los contornos para plantillas con sólo incertidumbre en fase, $\mathfrak{S}P(j\omega) = p_{cte} \angle \{\theta\}$, o con sólo incertidumbre en ganancia, $\mathfrak{S}P(j\omega) = \{p\} \angle \theta_{cte}$. Las primeras son típicas de sistemas con incertidumbre tan sólo en su parámetro retardo, y las segundas son características del comportamiento en baja y alta frecuencia de la mayoría de los sistemas sin incertidumbre en el retardo o en cualquier frecuencia cuando sólo existe incertidumbre en el parámetro ganancia. Las conclusiones aportadas en las citadas secciones se utilizan ahora para analizar los contornos de una plantilla genérica $\mathfrak{S}P(j\omega) = \{p \angle \theta\}$ en la que existe tanto incertidumbre en fase como en ganancia; véase la Figura 4-19(a). De los estudios anteriores se puede deducir:

(i) En cuanto a la influencia de la incertidumbre en fase (véase la Sección 4.3.1), a igualdad de módulos p el conjunto de fases $\{\theta\}$ de todas las plantas en $\mathfrak{S}P = \{p \angle \theta\}$ contribuyen en la determinación de los contornos: monovaluado inferior (si $0 < \delta_l < 1$) o doblevaluado (si $\delta_l > 1$); véase Figura 4-4 y Figura 4-8.

- (ii) Si sobre (i) se añade la contribución de la incertidumbre en ganancia $\{p\}$ (véase la Sección 4.3.2) se distinguirá entre dos casos. Si la especificación es tal que, $0 < \delta_l < 1$, entonces, **las plantas que determinan el contorno monovaluado inferior son las de módulos mayores dentro de $\{p\}$** (véase la Figura 4-14) **para cada fase θ , que denominaremos $\{p_{max} \angle \theta\}$ o perfil superior de la plantilla.** Sin embargo, si $\delta_l > 1$ en el **contorno doblevaluado resultante intervienen las plantas de módulo máximo y mínimo** (véase Figura 4-17) **para cada θ , que referiremos como $\{p_{max} \angle \theta\}$ y $\{p_{min} \angle \theta\}$, o perfiles superior e inferior de la plantilla.** Las anteriores simplificaciones son ciertas en el caso de **plantillas convexas.** **Si no lo fueran deberían considerarse todas las plantas $\{p \angle \theta\}$ en el perfil de la plantilla, $\partial \{p \angle \theta\}$,** ya que éste puede presentar concavidades.
- (iii) El número de plantas a considerar en **tipologías A** puede reducirse a las plantas críticas en tipologías D, es decir, exclusivamente a las **plantas de módulo máximo** en cada fase $\{p_{max} \angle \theta\}$, **si en la misma frecuencia aparecen especificaciones $\delta_{2,3,5}$** ; (para plantillas convexas o no). Ha de tenerse en cuenta que las especificaciones δ_l persiguen la limitación de la ganancia máxima $|L|$. Por ello, aunque aparezcan contornos superiores dentro de la tipología A (si $\delta_l > 1$), éstos no van a ser dominantes respecto a los contornos que representan a las especificaciones $\delta_{2,3,5}$ cuyo objetivo es garantizar una ganancia mínima $|L|$.

La Figura 4-19(a) muestra la plantilla $\Im P(j\omega_i) = \{p \angle \theta\}$ para un sistema con incertidumbre paramétrica $\wp = \{P(s) = k/(s/a+1); k \in [1, 10], a \in [1, 10]\}$, evaluado a la frecuencia $\omega_i = 2 \text{ rad/s}$. En la discretización de los intervalos de incertidumbre se han empleado 3 puntos logarítmicamente espaciados en ambos dominios paramétricos. Considerando las conclusiones (i) e (ii) las plantas significativas para el cálculo de contornos si $0 < \delta_l(\omega_i) < 1$ se reducen al perfil superior, seleccionado en la Figura 4-19(c). Y si $\delta_l(\omega_i) > 1$ se escogen los perfiles superior e inferior de la plantilla, representados en la Figura 4-19(b). Teniendo en cuenta la simplificación en (iii) las plantas en la Figura 4-19(c), serían suficientes para los casos de $\delta_l(\omega_i) > 1$.

El tamaño de discretización de los intervalos de incertidumbre condiciona sin duda los resultados obtenidos. Una discretización muy fina eleva el coste computacional, ya que se debe resolver una ecuación cuadrática para cada planta discreta. Pero también, una discretización demasiado grosera conduce a unos contornos menos exactos, al calcularse éstos por la intersección de soluciones discretas. En este sentido, las aportaciones de este documento pueden resultar muy útiles. **El conocer el perfil significativo** (el que aporta información al contorno intersección) de la plantilla permite **ahorrar esfuerzo de cálculo** al eliminar plantas no significativas, esfuerzo que puede

concentrarse en una mayor densidad de plantas en el perfil significativo (**mayor precisión** en el cálculo del contorno). En el ejemplo de la Figura 4-19, los gráficos (a), (b) y (c) muestran un tamaño de discretización excesivamente grande, elegido simplemente con fines ilustrativos sobre la contribución de la incertidumbre en el contorno resultante, tal y como se describe a continuación. El gráfico (d) emplea un tamaño de discretización más fino sobre el parámetro a (10 puntos logarítmicamente espaciados) que permitiría calcular con mayor precisión los contornos, incrementando el esfuerzo computacional sólo donde es necesario (perfil superior). Para algunos casos particulares (véase el ejemplo demostrativo en (i) de la Sección 4.3.1.2), incluso el error debido al tamaño de discretización podría anularse totalmente.

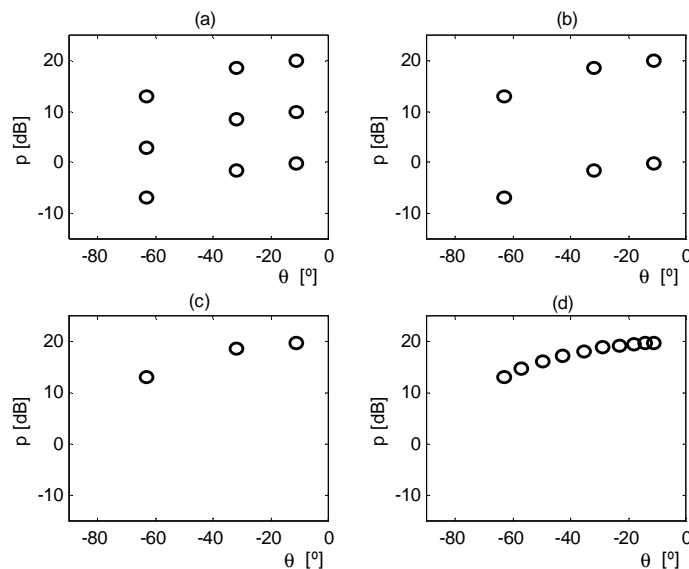


Figura 4-19: (a) Plantilla genérica. Plantas significativas en (b) contornos A y en (c) contornos D. (d) Tamaño fino de discretización.

Se recomienda, en cualquier simplificación, tomar las precauciones oportunas: (a) valorar los perfiles significativos de las plantillas en función no sólo de una especificación en particular, sino dentro del conjunto de especificaciones; (b) en plantillas no convexas, se deben extremar las precauciones. Las simplificaciones en (i), (ii) y (iii) se pueden resumir como sigue:

Enunciado Simplificación 1:

Dado un sistema con incertidumbre $\mathfrak{S}P(j\omega_t) = \{p \angle \theta\}$, plantilla cuyo perfil es convexo, para especificaciones robustas $|T_l(j\omega_t)| \leq \delta_l(\omega_t)$, en el trazado de

los contornos intervienen exclusivamente: (a) el perfil superior de la plantilla si $0 < \delta_l(\omega) < 1$; (b) el perfil superior e inferior de la plantilla si $\delta_l(\omega) > 1$; (c) aun siendo $\delta_l(\omega) > 1$, el perfil inferior de la plantilla, si existen para la misma frecuencia especificaciones del tipo $|T_{2,3} \text{ o } s(j\omega)| \leq \delta_{2,3} \text{ o } s(\omega)$ con $\delta_2(\omega) < 1$, $\delta_3(\omega) < \{p\}$ o $\delta_5(\omega) < p_{max}/p_{min}$.

La certeza de (a) y (b) queda patente tras los estudios abordados en este capítulo. La afirmación en (c) se deduce de las conclusiones extraídas en los Capítulos 5 y 6.

A continuación se analizan en detalle los contornos intersección en tipologías D y A para plantillas genéricas $\mathfrak{S}P(j\omega) = \{p \angle \theta\}$.

4.3.3.1 Contornos Intersección de Tipología D

La Figura 4-20 muestra los contornos $g_l \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ para cada una de las plantas en el perfil superior en la Figura 4-19(c), exigida una tolerancia de especificación $0 < \delta_l = 0.7 < 1$, todo ello en la frecuencia $\omega = 2 \text{ rad/s}$. La intersección más desfavorable de todos los contornos simples (mínima de las ganancias g_l en cada fase $\phi \in \Phi$) da lugar al contorno intersección $g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in \Phi$ (línea ‘negra’ de trazos). Paralelamente a los contornos, el gráfico superior de la Figura 4-20 representa las plantas pertenecientes al perfil superior de la plantilla.

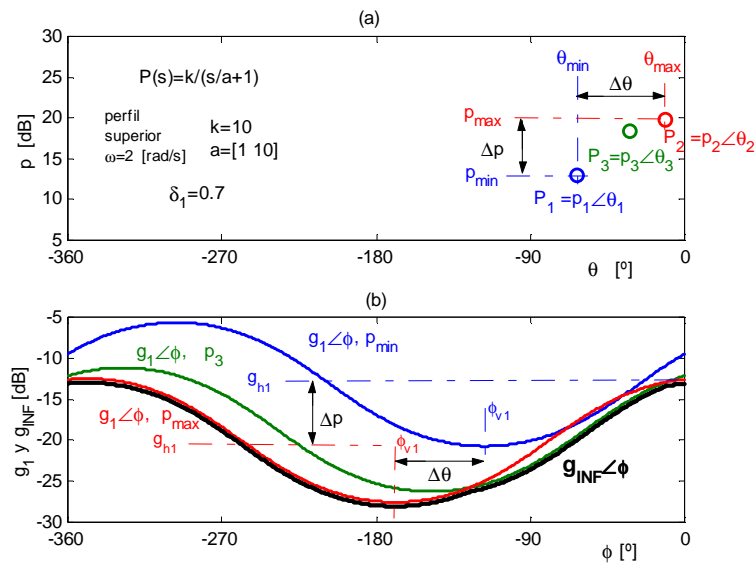


Figura 4-20: Contornos tipo D para plantilla genérica

(i) Como era de esperar (véase Sección 4.2.1) el mismo desfase entre plantas discretas ($\Delta\theta$) se muestra en el desfase sobre ϕ de sus correspondientes contornos $g_l \angle \phi$. E igualmente, el incremento en ganancia logarítmica entre plantas discretas (Δp) se muestra en la variación de altura g_l de sus contornos $g_l \angle \phi$.

Denominando $p_2 \angle \theta_2$ la planta de mayor módulo y $p_1 \angle \theta_1$ la de módulo menor, ambas en el perfil superior de la plantilla, se cuantificarán ambas variaciones, Δp e $\Delta\theta$. La variación máxima de altura (Δp) entre los dos contornos $g_l \angle \phi$ asociados a las plantas extremas verticalmente en el perfil superior, se puede calcular a partir de su diferencia de altura entre ejes horizontales g_{hl} en (4.16), es decir, como especificaba (4.41):

$$\Delta p = \Delta g_{hl} = Lm g_{hl}(p_2) - Lm g_{hl}(p_1) = Lm \frac{p_2}{p_1}, \quad p_2 \geq p_1 \quad (4.48)$$

Y la variación máxima en fase ($\Delta\theta$) entre los dos contornos $g_l \angle \phi$ asociados a las plantas extremas horizontalmente puede medirse según el desfase entre los dos ejes verticales ϕ_{vl} de dichos contornos, definidos en (4.15).

$$\Delta\theta = |\phi_{v1}(\theta_2) - \phi_{v1}(\theta_1)| = |\theta_2 - \theta_1| \quad (4.49)$$

(ii) El mínimo absoluto del contorno intersección lo origina siempre la planta de módulo máximo p_{max} independientemente de su fase θ . Por tanto, de acuerdo a (4.36) se define:

$$p_{max} \angle \theta \Rightarrow \boxed{\min g_{INF} = \frac{\delta_1}{p_{max}(\delta_1 + 1)}} \quad \boxed{\phi_{mingINF} = -180^\circ - \theta} \quad (4.50)$$

En el ejemplo de la Figura 4-20, para una tolerancia de especificación $\delta_1=0.7$, se comprueba como el contorno simple para la planta $P_1=p_{min} \angle \theta_{min}=4.5(13\text{dB}) \angle -63^\circ$, presenta un eje horizontal $g_{hl}=0.21(-13.2\text{dB})$ según (4.16) y un eje vertical $\phi_{vl}=117^\circ$ según (4.15); y para la planta $P_2=p_{max} \angle \theta_{max}=9.8(19.8\text{dB}) \angle -11^\circ$, el contorno originado tiene $g_{hl}=0.1(-20\text{dB})$ según (4.16) y $\phi_{vl}=169^\circ$ según (4.15). Calculando las distancias dichos ejes horizontales (g_{hl}) y verticales (ϕ_{vl}) de los contornos $g_l \angle \phi$ para P_1 y P_2 , se comprueba su coincidencia con los incrementos en módulo y fases entre ambas plantas, tal y como muestran (4.48) y (4.49). Numéricamente resulta, $\Delta p=6.7\text{dB}$ y $\Delta\theta=52.1^\circ$. En cuanto al contorno intersección, $g_{INF} \angle \phi$, su mínimo absoluto según (4.50) resulta $\min-g_{INF}=0.04(-27.7\text{dB})$ en $\phi_{mingINF}=-170^\circ$.

Sobre la conclusión resumen (Simplificación 1): “**para una plantilla genérica $\mathfrak{P}(j\omega)=\{p\angle\theta\}$, en el contorno de tipología D ($0<\delta_i(\omega)<1$) resultante, $g_{INF}\angle\phi$, $\phi\in\Phi=[-360^\circ, 0^\circ]$, intervienen todas las plantas que conforman el perfil superior⁵ de la plantilla**”, pueden argumentarse las siguientes simplificaciones.

Simplificación 2

Si la especificación δ_i disminuye (véase Sección 4.4), en el contorno D calculado para cada planta, $g_i\angle\phi$, **la variación entre su mínimo y máximo disminuye**. Es decir, el contorno pierde desnivel. Si dicha variación es inferior a la variación Δp máxima entre las plantas que constituyen el perfil superior, expresada en (4.48) (véase la Figura 4-20), entonces el contorno $g_{INF}\angle\phi$ se reduce a la solución $g_i\angle\phi$ que aporta la planta de máximo módulo $p_{maxabs}\angle\theta$. Es decir **del conjunto de plantas que forman la plantilla, tan sólo una es significativa**.

La variación entre el máximo y mínimo de un contorno D puede calcularse a partir de $min-g_i$ en (4.12) y $max-g_i$ en (4.13), expresados en decibelios.

$$\Delta g_1 = Lm(max\ g_1) - Lm(min\ g_1) = Lm\frac{(1+\delta_1)}{(1-\delta_1)} \quad (4.51)$$

Nótese que (4.51) depende exclusivamente del valor de especificación, y por tanto es el mismo para todas las soluciones simples $g_i\angle\phi$ en la plantilla $\mathfrak{P}=\{p\angle\theta\}$.

Tomando límites en (4.51): cuando $\delta_i\rightarrow 0^+$, $\Delta g_i\rightarrow 0$ dB (el contorno D es una línea recta) y cuando $\delta_i\rightarrow 1^-$, $\Delta g_i\rightarrow -\infty$ (el contorno se transforma en uno de tipología A). Si el contorno simple $g_i\angle\phi$ se reduce a una línea recta ($\delta_i\rightarrow 0^+$), por pequeña que sea la variación de módulo (Δp) entre las plantas del perfil superior según (4.48), bastará una de ellas para determinar el contorno intersección $g_{INF}\angle\phi$. La razón es que las demás plantas aportarán la misma recta $g_i\angle\phi$ desplazada una fase $-\theta$. Si la especificación δ_i aumenta, la curvatura del contorno aumenta hasta transformarse en uno de tipología A. En estos últimos casos, aún dentro de una tipología D de contornos, es necesario emplear todo el perfil superior de la plantilla (no aplicable la Simplificación 2).

⁵ Se entiende por perfil superior de una plantilla aquel que contiene para cada fase θ la planta de mayor módulo p . Esta definición es válida para cualquier tipo de plantilla con perfiles curvos o rectos, convexos o no.

En resumen, si $\Delta g_I \gg \Delta p$, definidas en (4.51) y (4.48), no resulta adecuado aplicar la Simplificación 2. Dicha simplificación será aplicable cuando $\Delta g_I < \min-\Delta p$, siendo $\min-\Delta p$ el salto entre las plantas discretas adyacentes de *máximo módulo* en la plantilla.

En el ejemplo, para $\delta_I=0.7$ resulta $\Delta g_I=15\text{dB}$ según (4.51), y esto se cumple para las soluciones simples $g_I \angle \phi$ de toda la plantilla, incluidas las plantas del perfil superior. En dicho perfil, el máximo Δp entre las plantas extremas en módulo, P_1 y P_2 , resultó aplicando (4.48) $\max-\Delta p=6.7\text{dB}$ y el mínimo Δp , entre las plantas P_2 y P_3 , es tan sólo de $\min-\Delta p=1\text{dB}$. Estos Δp coinciden con el salto entre los ejes g_{hi} de los contornos simples $g_I \angle \phi$ de las plantas afectadas, P_1 y P_2 por un lado, y P_2 y P_3 por otro. Y como $\Delta g_I=15\text{dB}$ en cualquier contorno $g_I \angle \phi$ es muy superior a los Δp , no resulta adecuado realizar la Simplificación 1. Así lo demuestra el contorno intersección en la Figura 4-20 donde los contornos simples de ambas soluciones $g_I \angle \phi$ para P_1 y para P_3 intervienen en la determinación de $g_{INF} \angle \phi$.

Enunciado Simplificación 2 para tipologías D

Para el cálculo de $g_{INF} \angle \phi$ bastaría el contorno simple $g_I \angle \phi$ asociado a la planta de módulo máximo en la plantilla $p_{max} \angle \theta$ si: $\Delta g_I < \min-\Delta p$, siendo $\min-\Delta p$ el salto mínimo modular entre las plantas discretas adyacentes de *máximo módulo* en el perfil superior de la plantilla. (Δg_I definido en (4.51) y Δp definido en (4.48)). Si $\Delta g_I \gg \max-\Delta p$, siendo $\max-\Delta p$ el salto modular entre las plantas discretas extremas en el perfil superior de la plantilla no resulta adecuado aplicar la Simplificación 2.

Enunciado Simplificación 3 para tipologías D

Supuesta una plantilla rectangular al considerar su perfil superior (cuando la Simplificación 1 es aplicable), este perfil representa una plantilla con sólo incertidumbre en fase y módulo constante e igual a p_{max} , por lo que el contorno $g_{INF} \angle \phi$ resultante y sus parámetros característicos, se reducen a lo expuesto en la Sección 4.3.1.1.

4.3.3.2 Contornos de Tipología A

Continuando con el mismo ejemplo anterior donde $\Im P(j\omega) = \{p \angle \theta\}$ es la plantilla genérica en la Figura 4-19(a), ahora la especificación $\delta_I=1.3 > 1$ **da lugar a contornos de tipología A**, $g_{INF\text{SUP}} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} \subseteq [-360^\circ, 0^\circ]$, para cuya definición se necesitaban tanto el perfil superior como el inferior

de la plantilla⁶ en la Figura 4-19(b). Estos contornos merecen especial atención ya que están presentes en todos los problemas de control representando márgenes de estabilidad adecuados (véase la Sección 4.5.2). La planta con incertidumbre del ejemplo es $\wp = \{P(s) = k/(s/a+1); k \in [1, 10], a \in [1, 10]\}$, evaluada en la frecuencia $\omega = 2 \text{ rad/s}$. El perfil superior lo constituyen las plantas discretas para $k=10$ y 3 puntos logarítmicamente espaciados para $a \in [1, 10]$. Y el perfil inferior $k=1$ y los 3 puntos en el dominio $a \in [1, 10]$. La Figura 4-21 reproduce los perfiles a considerar, definiéndose las plantas y magnitudes características que luego condicionarán los parámetros de los contornos tipo A: $P_{2S} = 10(20\text{dB}) \angle -11^\circ$, $P_{2I} = 1(0\text{dB}) \angle -11^\circ$, $P_{1S} = 4.5(13\text{dB}) \angle -63^\circ$, $P_{1I} = 0.5(-7\text{dB}) \angle -63^\circ$.

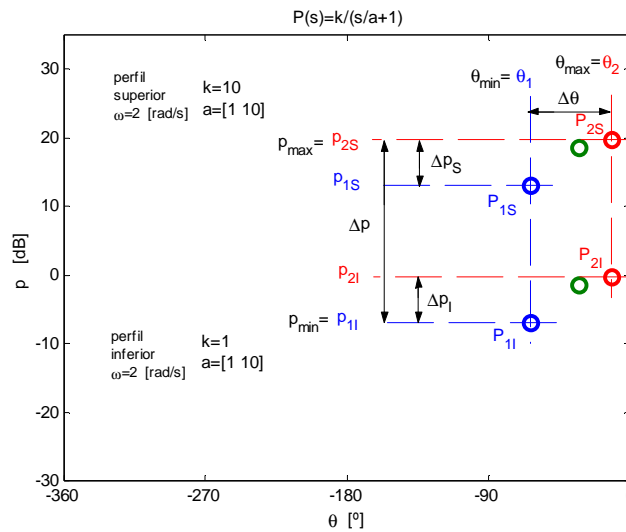


Figura 4-21: Plantilla y parámetros típicos para contorno intersección tipo A

Y los contornos intersección de tipología A resultantes, $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} \subseteq [-360^\circ, 0^\circ]$, para una plantilla genérica $\mathfrak{P}(j\omega) = \{p \angle \theta\}$ se muestran en la Figura 4-22. Sobre ella se anotan los parámetros característicos, calculables a partir de las definiciones hechas tanto para contornos simples en la Sección 4.2 como para contornos con incertidumbre en fase (Sección 4.3.1.3) y en ganancia (Sección 4.3.2.3). A continuación se resumen todos ellos.

⁶ Véase Enunciado Simplificación 1. En plantillas no convexas se requiere todo el perfil no convexo.

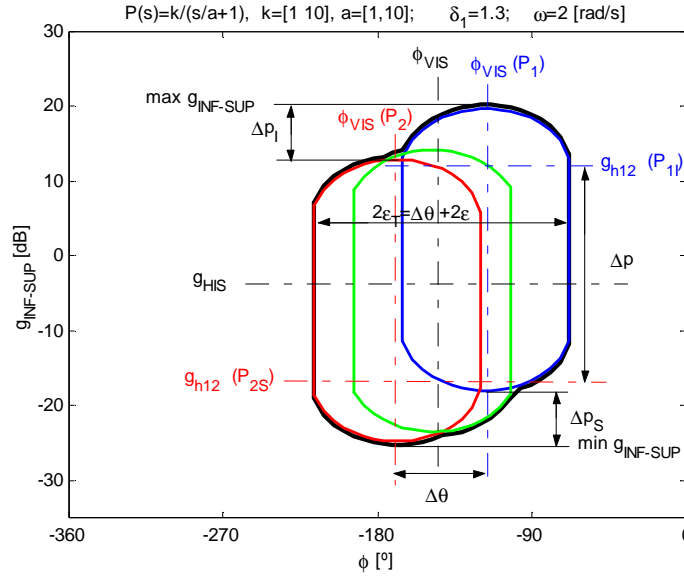


Figura 4-22: Contornos tipo A para plantilla genérica

(i) De acuerdo a la Sección 4.3.2.3 tomando P_{IS} y P_{II} como una plantilla de sólo incertumbre en magnitud (plantas con la misma fase θ_{min} y distinto módulo), el eje vertical ϕ_{VIS} de sus contornos coincide y se definía en (4.42). Lo mismo ocurre para las plantas P_{2S} y P_{2I} , que comparten la misma fase θ_{max} . Entonces, el nuevo eje vertical del contorno A resultante será:

$$\phi_{VIS} = -180^\circ - \frac{(\theta_{min} + \theta_{max})}{2} = -180^\circ - \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \quad (4.52)$$

Y también según (4.42) la distancia que separa ambos ejes verticales (ϕ_{VIS} para las dos P_I y ϕ_{VIS} para las dos P_2) resulta igual a la incertumbre horizontal de la plantilla considerada:

$$\Delta\theta = |\phi_{VIS}(\theta_2) - \phi_{VIS}(\theta_1)| = |\theta_2 - \theta_1| = |\theta_{max} - \theta_{min}| \quad (4.53)$$

La amplitud horizontal de los contornos resultará:

$$2\epsilon_T = \Delta\theta + 2\epsilon \quad (4.54)$$

Y por tanto, el intervalo de existencia de contornos se define:

$$\Phi_{IS} = \phi_{VIS} \mp \epsilon_T = \phi_{VIS} \mp [\Delta\theta / 2 + \epsilon] \quad (4.55)$$

con ϕ_{VIS} en (4.52), ϵ_T en (4.54), ϵ en (4.22) y $\Delta\theta$ en (4.53).

En el ejemplo, siendo $\theta_{max}=\theta_2=-11^\circ$ y $\theta_{min}=\theta_1=-63^\circ$ (véase Figura 4-21), resultan: $\phi_{VIS}=-143^\circ$ según (4.52), $\Delta\theta=52^\circ$ según (4.53), $\varepsilon=50^\circ$ en (4.22), $2\varepsilon_I=152^\circ$ según (4.54), y $\Phi_{IS}=[-219^\circ, -67^\circ]$; (véase la Figura 4-22).

Nótese que la expresión (4.54) era igualmente válida para contornos A intersección cuando sólo existía incertidumbre horizontal (véase (4.35) y la Figura 4-8). Por tanto, los comentarios allí pronunciados son ahora igualmente aplicables. Según aquellos, si la incertidumbre horizontal, $\Delta\theta$, es muy grande los contornos $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} \subseteq [-360^\circ, 0^\circ]$, pueden llegar a ocupar toda la banda angular $\Phi_{IS} = \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, incluso aunque $\varepsilon \ll 90^\circ$. La máxima anchura 2ε ($\varepsilon \rightarrow 90^\circ$) se produce cuando $\delta_I \rightarrow 1$, y si δ_I disminuye aún más se hace $\delta_I < 1$ y se cambia a tipología D de contornos; véase Sección 4.4. Sin embargo, la máxima anchura $2\varepsilon_I$ se produce o bien cuando $\Delta\theta/2 \rightarrow 180^\circ$ (independientemente de ε y por tanto de δ_I) o cuando $\Delta\theta/2$ crece ($\Delta\theta < 360^\circ$) reforzado por un decremento de δ_I ($\delta_I \rightarrow 1$ y $\varepsilon \rightarrow 90^\circ$). En el segundo caso ($\Delta\theta < 360^\circ$), al presentarse una tipología A o en el límite ($\delta_I \rightarrow 1$) un cambio a tipología D, a priori siempre a priori habrá solución (sin considerar la contribución del resto de especificaciones). Sin embargo, en el primer caso, cuando la incertidumbre se acerca al límite ($\Delta\theta \approx 360^\circ$, $\delta_I > 1$) persiste una tipología A y como existe una curva g_{SUP} y otra g_{INF} que ocuparán todo el intervalo de diseño $[-360^\circ, 0^\circ]$, no hay solución posible para $|T_I(j\omega_i)| \leq \delta_I(\omega_i)$. En resumen, **cuando la incertidumbre $\Delta\theta$ aumenta las garantías de solución para cumplir la especificación robusta en ω_i $|T_I| = |L/I+L| \leq \delta_I$, con $\delta_I < 1$ (tipología A) disminuyen, pudiendo incluso llegar a inexistencia de solución; véase la Figura 4-9. Y si dada una incertidumbre $\Delta\theta$ la especificación δ_I disminuye, tras pasar de una tipología A a una tipología D de contornos (véase Figura 4-10), también disminuye la posibilidad de solución al considerar $|T_k| \leq \delta_k$, $k=1$ junto con $k=2, 3$ y 5 (véase Sección 4.4 y Capítulos 5, 6 y 7).**

- (ii) La magnitud máxima del contorno tipo A, $max-g_{INFSUP}$, coincide con la máxima magnitud del contorno simple para la planta de módulo mínimo p_{min} en la plantilla $\{p \angle \theta\}$. Sustituyendo $p_{min} \angle \theta$ en $max-g_2$ de (4.25) o en $max-g_{INFSUP}$ de (4.43) se define:

$$p_{min} \angle \theta \Rightarrow \boxed{max g_{INFSUP} = \frac{\delta_1}{p_{min}(\delta_1 - 1)}, \phi_{maxg} = -180^\circ - \theta} \quad (4.56)$$

Según la Figura 4-21, $p_{min} \angle \theta$ coincide con $P_{II} = p_{II} \angle \theta_I = 0.5(-7\text{dB}) \angle -63^\circ$. Se comprueba según (4.56) $max-g_{INFSUP} = 8.7(18.8\text{dB})$ en $\phi_{maxg} = -117^\circ$; véase el resultado sobre la Figura 4-22).

Nótese que la plantilla genérica del ejemplo en la Figura 4-19(a) sigue un modelo de plantilla φ_1 en (3.12) (véase Figura 3-1 en Capítulo 3). En ella la planta de módulo mínimo es también la de fase mínima, $p_{min}\angle\theta_{min}$. Sin embargo, en plantillas de tipo φ_2 en (3.12) la planta de módulo mínimo tiene fase máxima, $p_{min}\angle\theta_{max}$. Por ello, genéricamente se empleará $p_{min}\angle\theta$.

(iii) Paralelamente, la magnitud mínima del contorno intersección de tipo A, $min-g_{INFSUP}$, coincide con la mínima magnitud del contorno simple para la planta de módulo máximo p_{max} . Sustituyendo $p_{max}\angle\theta$ en $min-g_1$ en (4.24) o en $min-g_{INFSUP}$ en (4.44) se define:

$$p_{max}\angle\theta \Rightarrow \boxed{min\ g_{INFSUP} = \frac{\delta_1}{p_{max}(\delta_1 + 1)}, \phi_{ming} = -180^\circ - \theta} \quad (4.57)$$

Según la Figura 4-21, $p_{max}\angle\theta$ coincide con $P_{2S}=p_{2S}\angle\theta_2=10(20dB)\angle-11^\circ$. Se comprueba según (4.57) $min-g_{INFSUP}=0.06(-25dB)$ en $\phi_{ming}=-169^\circ$; (véase sobre la Figura 4-22).

(iv) El nuevo eje de simetría horizontal del contorno intersección $g_{INFSUP}\angle\phi$, $\phi \in \Phi_{IS}$ depende de los ejes de simetría g_{h12} de los contornos simples doblevaluados $g_{12}\angle\phi$ para las plantas $p_{max}\angle\theta$ y $p_{min}\angle\theta$, definidos en (4.27). La media entre g_{h12} para p_{max} y g_{h12} para p_{min} ha de calcularse en magnitudes logarítmicas resultando la misma expresión que en (4.46)⁷:

$$\boxed{g_{HIS} dB = \frac{1}{2} Lm \left(\frac{\delta_1^2}{(\delta_1^2 - 1)} \frac{1}{p_{max} p_{min}} \right)} \quad (4.58)$$

Nótese que calculando la media en magnitudes lineales entre el eje horizontal g_{h12} del contorno para p_{max} y el eje g_{h12} para p_{min} no se obtendría el mismo resultado, ya que el logaritmo de una suma difiere de la suma de logaritmos.

Para el ejemplo ($\delta_1=1.3$), siendo $P_{2S}=p_{max}\angle\theta=10(20dB)\angle-11^\circ$ y $P_{1I}=p_{min}\angle\theta=0.5(-6dB)\angle-63^\circ$, se comprueba que el eje horizontal del contorno intersección doblevaluado resulta $g_{HIS}dB=-3dB$ según (4.58). También según (4.27) resulta para la planta P_{2S} un eje de su contorno doblevaluado simple $g_{h12}=0.16(-16dB)$, y para P_{1I} se tiene $g_{h12}=3.13(9.91dB)$. Véase la Figura 4-22.

(v) Del mismo modo el salto de altura Δg_{h12} entre los ejes horizontales de los contornos simples doblevaluados para p_{max} y p_{min} coincide con el

⁷ En (4.46) las plantas p_{max} y p_{min} tenían la misma fase al tratarse de una plantilla con solo incertidumbre vertical. Ahora, para una plantilla genérica, p_{max} y p_{min} tendrán fases diferentes.

calculado en (4.47) para plantillas con sólo incertidumbre horizontal, aunque ahora el ángulo de ambas plantas sea distinto, $p_{max} \angle \theta_{2S}$ y $p_{min} \angle \theta_{1I}$

$$\Delta g_{h12} = Lm \frac{p_{max}}{p_{min}} = \Delta p \quad (4.59)$$

Dado que Δg_{h12} coincide con la incertidumbre vertical de la plantilla, Δp , cuanto mayor sea ésta, mayor será la separación entre la curva superior $g_{SUP} \angle \phi$ e inferior $g_{INF} \angle \phi$ del contorno intersección tipo A. Y por tanto, se incrementa su agresividad absoluta en magnitud del contorno a satisfacer por el controlador.

En el ejemplo resulta para P_{II} según (4.27) un eje horizontal de su contorno simple doblevaluado $g_{h12}=3.13(9.91\text{dB})$ y para P_{2S} resulta $g_{h12}=0.16(-16\text{dB})$. Es decir, el salto en decibelios entre ambos ejes resulta $\Delta g_{h12}=26\text{dB}$, que coincide con el obtenido a partir de (4.59), donde $\Delta p=26\text{dB}$. Véase la Figura 4-22.

- (vi) No sólo la incertidumbre horizontal absoluta, $\Delta \theta$, incrementa la agresividad de los contornos, como se demostró en (i). También, los valores relativos de $\{\theta\}$ condicionan ésta, del mismo modo que se argumentó en la Sección 4.3.1.3, apartado (v). Véase la Figura 4-11.
- (vii) No sólo la incertidumbre vertical absoluta, Δp , incrementa la agresividad de los contornos, como se demostró en (v). También, los valores relativos de $\{p\}$ condicionan ésta, tal y como se discutió en la Sección 4.3.2.3, apartado (vii). Véase la Figura 4-18.
- (viii) Como se demuestra en otros apartados, los contornos para G y para L_0 expresan lo mismo, no importando tampoco la selección de la planta nominal P_0 . Véase, por ejemplo, la Figura 4-12.

Enunciado Simplificación 1(c) y 3 para tipologías A

Si se emplean especificaciones $\delta_{2,3,5}$, en (3.7), (3.8) y (3.20), la curva superior del contorno intersección doblevaluado de tipología A, $g_{SUP} \angle \phi$, de estas especificaciones va a dominar a la curva superior para $\delta_1(\omega) > 1$, siempre que a la misma frecuencia $\delta_2(\omega) < 1$, $\delta_3(\omega) < \{p(\omega)\}$ o $\delta_5(\omega) < p_{max}(\omega)/p_{min}(\omega)$. En este supuesto, para δ_1 basta vigilar solamente el contorno intersección inferior $g_{INF} \angle \phi$, generado por el perfil superior⁸ de la plantilla genérica (evitamos el inferior, responsable de $g_{SUP} \angle \phi$). Y si además

⁸ Se parte de las premisas en la Simplificación 1, donde se exigían plantillas convexas. Si éstas no lo son puede no ser correcta la simplificación, ya que no se basta decidir entre un perfil superior o inferior absolutos, sino que los perfiles laterales también influyen.

la plantilla es rectangular, el perfil inferior se correspondería con una plantilla de solo incertidumbre horizontal. Luego, este caso se remite al estudiado en la Sección 4.3.1.1.

4.4 INFLUENCIA DE LA ESPECIFICACIÓN, $\delta_l(\omega)$

De acuerdo a las conclusiones en la Sección 4.2, dependiendo **exclusivamente** del valor de la tolerancia de especificación en cada frecuencia, $\delta_l(\omega)$, el contorno ω_r , $B(j\omega)$, que representa la especificación $|T_l(j\omega)| \leq \delta_l(\omega)$ se corresponderá con una tipología D (contorno simplevaluado inferior si $0 < \delta_l < 1$) o con una tipología A (contorno doblevaluado si $\delta_l > 1$) (véase la Figura 4-23).

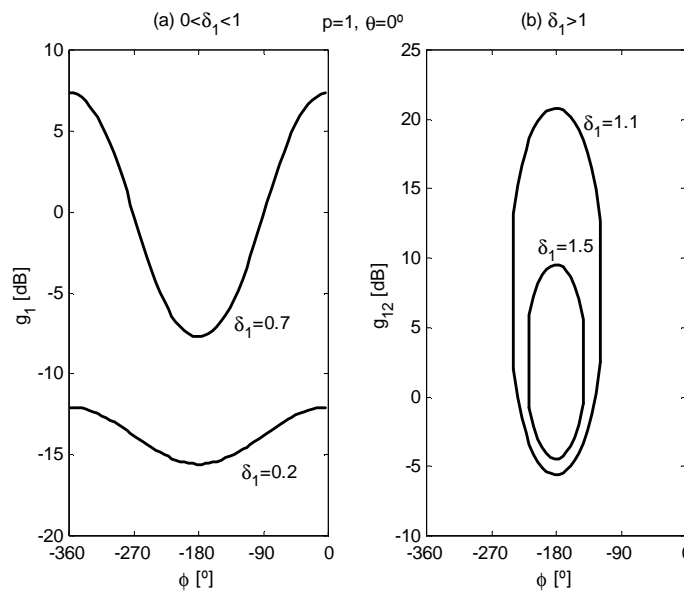


Figura 4-23: Influencia de la tolerancia de especificación δ_l en los contornos

En términos de control una disminución de δ_l , si $|T_l| < \delta_l$ según (3.6), implica una reducción de la tolerancia máxima para la función sensibilidad complementaria (excluyendo el prefiltro) en cada frecuencia, $|T| = |T_l| = |L/(1+L)|$. En definitiva, δ_l limita el ancho de banda del sistema en lazo cerrado $|T|$, y también la magnitud de las relaciones salida/entrada implícitas en $|T|$, es decir: $|Y/RF|$, $|U/D_l|$, $|Y/N|$, (véase la Figura 2.1). Luego, parece lógico pensar que cuando δ_l disminuye, el contorno representativo deberá ser más ‘agresivo’. Así lo demuestra la transición entre una tipología A de contornos para valores $\delta_l > 1$ (menos restrictiva pues los contornos

$g_{12} \angle \phi$ o $g_{INFSUP} \angle \phi$ existen sólo en una cierta banda angular) a una tipología D (contornos $g_1 \angle \phi$ o $g_{INF} \angle \phi$ ocupando todo el intervalo de fases diseño) cuando $0 < \delta_l < 1$. A continuación se analizará dentro de cada tipología cómo la disminución de δ_l también implica un contorno D o A más agresivos. Para mayor simplicidad se emplearán los contornos sin considerar la incertidumbre $g_1 \angle \phi$ (tipología D) o $g_{12} \angle \phi$ (tipología A) formulados en (4.2), para estudiar la influencia de su parámetro δ_l . Después, los resultados obtenidos se generalizarán directamente para el sistema con incertidumbre (tratado ya en la Sección 4.3). Nótese que la incertidumbre no implica un cambio de tipología, aunque sí que influye en la agresividad dentro de cada tipo de contorno.

4.4.1 VALOR DE LA ESPECIFICACIÓN EN CONTORNOS TIPO D ($0 < \delta_l < 1$)

Cuando $0 < \delta_l(\omega) < 1$ los contornos representativos son de tipología D (tan sólo existe g_1 pero en todo $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ y debe cumplirse que $g \leq g_1 \forall \phi$). Por tanto, cuanto menor es el módulo g_1 en (4.2a) más agresivo es el contorno. Y así se demostrará que ocurre cuando δ_l disminuye, como ilustra la Figura 4-23(a). Esto se resume como,

$$\delta_l \downarrow \Rightarrow g_1 \downarrow, \forall \phi \in [-360^\circ, 0^\circ] \quad (4.60)$$

Demostración de (4.60)

Considerando p y θ constantes, se analizará la influencia de δ_l en $g_1 \angle \phi$ en (4.2a). Según las ecuaciones (4.2a) y (4.7a), el valor de especificación δ_l únicamente afecta a la variable α en (4.5). Para estudiar con mayor claridad la influencia de α en $g_1 \angle \phi$, se reescribe la ecuación (4.7a) como:

$$g_1 = \frac{1}{p} \left(\underbrace{\frac{-c}{\alpha}}_{t_1} + \sqrt{\underbrace{\left(\frac{c}{\alpha}\right)^2}_{|t_2|} + 1} \right), \quad (4.61)$$

donde los términos t_1 y t_2 , son los mismos que en (4.7), y por tanto, se cumplen las conclusiones (i)-(xii) enunciadas y demostradas en la Sección 4.2.1, y que se resumen como: (i) $t_2 < 0$ y real, (ii) $|t_2| > |t_1|$, (iii) $t_1 < 0$ y real, si $c < 0$ (iv) $t_1 > 0$ y real, si $c > 0$, (x) en $\phi \in \Phi_l = [-270^\circ - \theta, -90^\circ - \theta]$, $g_1 \triangleq |t_2| - |t_1|$, (xi) en $\phi \in \overline{\Phi}_1$, $g_1 \triangleq |t_2| + |t_1|$.

De acuerdo con (4.61), la magnitud α afecta a la magnitud de ambos términos t_1 y t_2 . Según α definida en (4.5), si δ_l disminuye siendo

$0 < \delta_l < 1$ ($\alpha < 0$), $|\alpha|$ aumenta, y por tanto, $|t_1|$ y $|t_2|$ disminuyen. Como $|t_1|$ y $|t_2|$ se suman o restan en función del intervalo de fases, Φ_l o $\overline{\Phi}_l$, de acuerdo a (x) y (xi), se puede afirmar:

- En $\phi \in \overline{\Phi}_l$, como según (xi) $g_l \triangleq |t_2| + |t_1|$, y ambos términos disminuyen al disminuir δ_l , la altura del contorno $g_l \angle \phi$ disminuye en dichas fases.
- En $\phi \in \Phi_l$, como según (x) $g_l \triangleq |t_2| - |t_1|$, y ambos términos disminuyen al disminuir δ_l , el resultado absoluto sobre la magnitud g_l será de disminución si se cumple:

$$\left| \frac{dt_2}{d\alpha} \right| > \left| \frac{dt_1}{d\alpha} \right| \quad (4.62)$$

Siendo

$$\left| \frac{dt_2}{d\alpha} \right| = \frac{c^2}{\left| \alpha^3 \sqrt{\left(\frac{c}{\alpha}\right)^2 + 1} \right|} \quad (4.63)$$

y,

$$\left| \frac{dt_1}{d\alpha} \right| = \left| \frac{c}{\alpha^2} \right| \quad (4.64)$$

Comparando (4.63) y (4.64), se cumple (4.62) si:

$$\left| \sqrt{\left(\frac{c}{\alpha}\right)^2 + 1} \right| > \left| \frac{c}{\alpha} \right|, \quad (4.65)$$

condición cierta de acuerdo a (ii), y que se demostró también necesaria según (4.11) para que g_l fuera positivo, además de ser real (véase Sección 4.2.1).

* * *

De acuerdo al estudio de $g_l \angle \phi$ particularizado en la demostración de (4.60) para $\phi \in \Phi_l$ y $\phi \in \overline{\Phi}_l$ se puede añadir la siguiente afirmación:

- En $\phi \in \overline{\Phi}_l$, como $g_l \triangleq |t_2| + |t_1|$, las variaciones en t_1 y t_2 suman sus efectos. Por el contrario, en $\phi \in \Phi_l$, como $g_l \triangleq |t_2| - |t_1|$, las variaciones en t_1 y t_2 influyen de forma contrapuesta. Por ello, en las fases $\phi \in \overline{\Phi}_l$ la magnitud g_l es más sensible (mayor variación) a variaciones en δ_l .

Demostrada (4.60): $\delta_l \downarrow \Rightarrow g_l \downarrow, \forall \phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$, siendo $0 < \delta_l < 1$, se estudia ahora el comportamiento del contorno $g_l \angle \phi$ en los extremos del

intervalo, esto es cuando $\delta_l \rightarrow 0^+$ y cuando $\delta_l \rightarrow 1^-$. Calculando los límites de la expresión g_l en (4.2a) se obtiene (véase la Figura 4-24⁹):

$$\lim_{\delta_l \rightarrow 0^+} g_l = 0 \tag{4.66}$$

$$\lim_{\delta_l \rightarrow 1^-} g_l = \begin{cases} \frac{1}{2p|\cos(\phi + \theta)|}, & \phi \in \Phi_1 = [-270^\circ - \theta, -90^\circ - \theta] \\ +\infty, & \phi \in \bar{\Phi}_1 \end{cases} \tag{4.67}$$

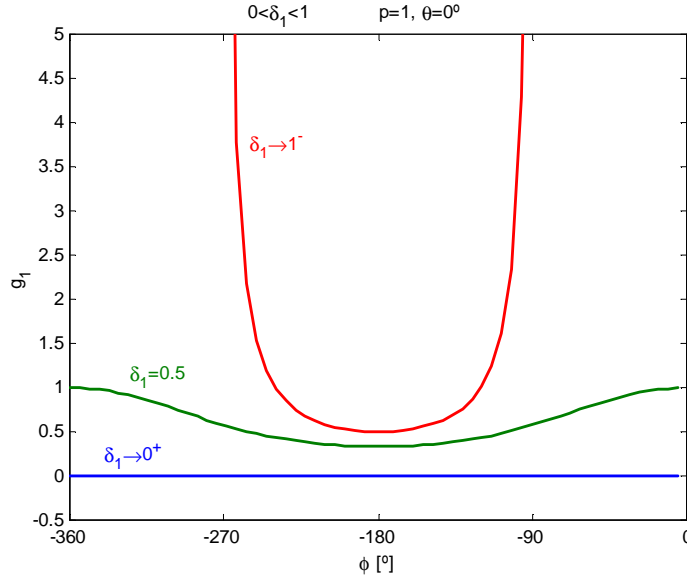


Figura 4-24: Influencia de la especificación, $0 \leq \delta_l \leq 1$, en contornos simples tipo D

Según se demostró anteriormente, la sensibilidad del contorno $g_l \angle \phi$ a variaciones en δ_l no es uniforme en todo el intervalo $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$, tal como ilustra la Figura 4-23(a) o la Figura 4-24. Una forma de cuantificar la variación absoluta en $g_l \angle \phi$ es medir la variación entre su punto de máximo y mínimo. Empleando las definiciones $min-g_l$ en (4.12) y $max-g_l$ en (4.13), se define Δg_l como:

$$\Delta g_l = Lm(max g_l) - Lm(min g_l) = Lm \frac{(1 + \delta_l)}{(1 - \delta_l)} \tag{4.68}$$

Y tomando límites en esta expresión:

$$\lim_{\delta_l \rightarrow 0^+} \Delta g_l = 0 \text{ [dB]} \tag{4.69}$$

⁹ Nótese que las magnitudes son lineales no en dB como es habitual en el resto de gráficos. Esto permite recoger en unas dimensiones verticales adecuadas todas las magnitudes.

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow 1^-} \Delta g_1 = -\infty \text{ [dB]} \quad (4.70)$$

Con todo este análisis se puede determinar de forma exacta la contribución de δ_l en todo el intervalo $0 \leq \delta_l \leq 1$, como sigue.

Conclusión: influencia del valor de especificación δ_l en contornos D ($0 \leq \delta_l \leq 1$) sin considerar la incertidumbre ($g_l \angle \phi, \phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$)

De acuerdo a (4.60) cuando δ_l se reduce el contorno $g_l \angle \phi$ disminuye su altura $g_l \forall \phi, \phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$, y además según (4.69) la curva pierde desnivel (es menos sensible a la variación de δ_l). En el límite, $\delta_l \rightarrow 0^-$, dicho contorno $g_l \angle \phi$ no tiene pendiente (línea recta) según (4.69) y desaparece (g_l se hace $0 \forall \phi$) según (4.66), lo que implica que no se requiere ninguna aportación de control $g \angle \phi$ para cumplir la especificación robusta. La Figura 4-24 ilustra este resultado. Nótese que las magnitudes son lineales no en dB (esto permite recoger en unas dimensiones verticales adecuadas todos las magnitudes).

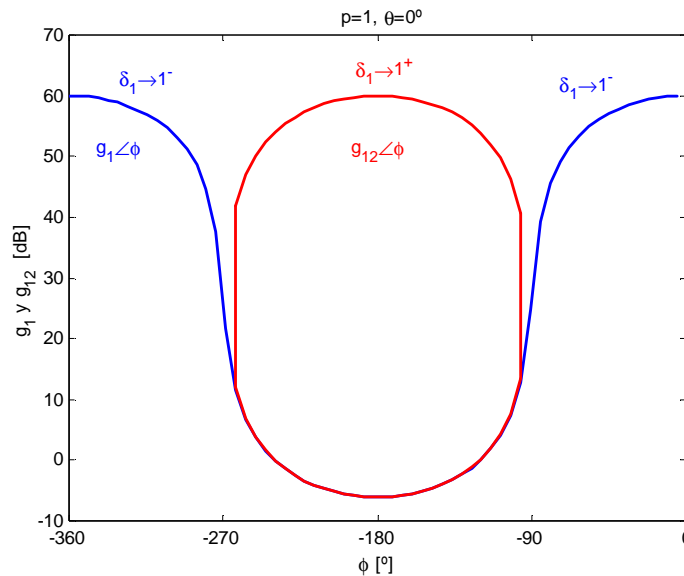


Figura 4-25: Cambio de tipología de contornos simples: D para $\delta_l \rightarrow 1^-$ y A para $\delta_l \rightarrow 1^+$

Por el contrario, un aumento de δ_l según (4.60) produce un elevamiento del contorno $g_l \angle \phi, \forall \phi, \phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$. Además, de acuerdo a (4.70) la diferencia entre sus puntos de máximo y mínimo se agudiza. Véase la Figura 4-24. En el límite cuando $\delta_l \rightarrow 1^-$ según (4.67) y (4.70) el contorno

$g_1 \angle \phi$ solo existiría (valores reales y positivos de g_1) en $\phi \in [-270^\circ - \theta, -90^\circ - \theta]$, es decir, **se convierte en un contorno de tipología A**. En las mismas fases, para $\delta_l \rightarrow 1^+$, aparecerá la curva $g_2 \angle \phi$ (valores reales y positivos también para g_2). Véase la Figura 4-25.

Conclusión: influencia del valor de especificación δ_l en contornos D ($0 \leq \delta_l \leq 1$) considerando la incertidumbre ($g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$)

El efecto de la variación de δ_l sobre los contornos con y sin incertidumbre es el mismo. Teniéndose en cuenta la contribución de la incertidumbre (estudiada en la Sección 4.3) la conclusión anterior para contornos simples (sin la incertidumbre) puede generalizarse como:

Cuando δ_l disminuye el contorno $g_{INF} \angle \phi$ reduce su altura $g_{INF} \forall \phi$, $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$, y además la curva pierde pendiente (es menos sensible a la variación de δ_l). **En el límite, $\delta_l \rightarrow 0$** , dicho contorno $g_{INF} \angle \phi$ tiende a una línea recta (**no tiene pendiente**) y **desaparece** (g_{INF} se hace 0 $\forall \phi$). Cuando **δ_l aumenta el contorno $g_{INF} \angle \phi$ se eleva $\forall \phi$** . Además, la **diferencia entre sus puntos de máximo y mínimo se agudiza**. **En el límite cuando $\delta_l \rightarrow 1^-$** el contorno $g_{INF} \angle \phi$ sólo existe (valores reales y positivos g_1 y, por tanto, g_{INF}) en $\phi \in [-270^\circ - \theta, -90^\circ - \theta]$, es decir, **se convierte en un contorno de tipología A**. En las mismas fases para $\delta_l \rightarrow 1^+$ aparecerá la curva $g_{SUP} \angle \phi$ (valores reales y positivos también g_2). En el punto de transición: cuando $\delta_l \rightarrow 1^-$ solo existe $g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, y cuando $\delta_l \rightarrow 1^+$ se tiene $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp (\Delta\theta/2 + \varepsilon)]$, ϕ_{VIS} en (4.52), $\Delta\theta$ en (4.53) y $\varepsilon = 90^\circ$ según (4.22).

4.4.2 VALOR DE ESPECIFICACIÓN EN CONTORNOS DE TIPO A ($\delta_l > 1$)

Cuando $\delta_l(\omega) > 1$, se obtiene una tipología A de contornos simples (sin la incertidumbre), es decir, existen g_{12} en $\phi \in \Phi_{12} = [\phi_{v12} \mp \varepsilon]$, g_{12} en (4.2), ϕ_{v12} en (4.26) y ε en (4.22). Para cumplir la especificación robusta $|T_1| < \delta_l$, estos contornos deben satisfacerse tal que: $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$ y $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$. Según esto, dichos contornos doblevaluados serán más agresivos en fase cuando la banda real donde g_{12} son reales y positivos aumenta (ε o Φ_{12} aumentan). Y serán más agresivos en magnitud cuando el módulo g_2 aumenta, y el módulo g_1 disminuye. Una disminución de la tolerancia de especificación δ_l produce un incremento de agresividad en fase y magnitud del modo indicados, tal y como ilustra la Figura 4-23(b), y resume la siguiente ecuación:

$$\delta_l \downarrow \Rightarrow \varepsilon \uparrow, g_1 \downarrow, g_2 \uparrow \text{ para } g_{12} \angle \phi, \phi \in \Phi_{12} = [\phi_{v12} \mp \varepsilon] \quad (4.71)$$

Demostración de (4.71)

Considerando p y θ constantes, se analizará la influencia de δ_l en el contorno simple doblevaluado $g_{l2} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{l2}$. Según las ecuaciones (4.2) y (4.7), el valor de especificación δ_l únicamente afecta a la variable α en (4.5). Esta última siendo $\delta_l > 1$ cumple $\alpha > 0$. Para estudiar con mayor claridad la influencia de α en $g_{l2} \angle \phi$, se reescribe la ecuación (4.7a,b) como:

$$g_{l2} = \frac{1}{p} \left(\underbrace{\frac{-c}{\alpha}}_{t_1} \mp \sqrt{\underbrace{\left(\frac{c}{\alpha}\right)^2 - 1}_{t_2}} \right), \quad (4.72a,b)$$

donde los términos t_1 y t_2 , son los mismos que en (4.7), y por tanto, se cumplen las conclusiones (i)-(vi) enunciadas y demostradas en la Sección 4.2.2, y que se resumen como: en $\phi \in \Phi_{l2}$, $\Phi_{l2} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, ε en (4.22): (i) g_{l2} reales y positivas; (ii) $t_1 > 0$ y real; (iii) $t_2 > 0$ y real; (iv) $t_1 > t_2$; (v) $g_1 \triangleq |t_1| - |t_2|$; (vi) $g_2 \triangleq |t_1| + |t_2|$.

De acuerdo con (4.72), la magnitud α afecta a la magnitud de ambos términos t_1 y t_2 . Según α definida en (4.5), si δ_l disminuye siendo $\delta_l > 1$ ($\alpha > 0$), α disminuye, y por tanto, t_1 y t_2 aumenta, ya que ambos son positivos según (ii) y (iii). De acuerdo a (v) y (vi), ambos términos t_1 y t_2 , que aumentan, se restan en g_1 y se suman en g_2 . Luego:

- En $\phi \in \Phi_{l2}$, si según (vi) $g_2 \triangleq t_1 + t_2$, al aumentar ambos t_1 y t_2 positivos cuando δ_l disminuye, aumentará también la magnitud g_2 .
- En $\phi \in \Phi_{l2}$, si según (v) $g_1 \triangleq t_1 - t_2$, al aumentar t_1 y t_2 positivos (disminución de δ_l), el resultado absoluto sobre g_1 será de disminución si, el aumento del término t_2 que aparece restando en la ecuación (v) es mayor que el aumento del término t_1 . Esto implica que se debe cumplir:

$$\left| \frac{dt_1}{d\alpha} \right| > \left| \frac{dt_2}{d\alpha} \right| \quad (4.73)$$

Siendo

$$\left| \frac{dt_2}{d\alpha} \right| = \frac{c^2}{\left| \alpha^3 \sqrt{\left(\frac{c}{\alpha}\right)^2 - 1} \right|} \quad (4.74)$$

y,

$$\left| \frac{dt_1}{d\alpha} \right| = \left| \frac{c}{\alpha^2} \right| \quad (4.75)$$

Comparando (4.74) y (4.75), se cumple (4.73) si:

$$\left| \frac{c}{\alpha} \right| > \left| \sqrt{\left(\frac{c}{\alpha} \right)^2 - 1} \right|, \quad (4.76)$$

condición cierta de acuerdo a (iv), y también según (4.19) y (4.21), que se demostraron necesarias para que las magnitudes g_{12} fueran positivas, además de ser reales. De esta forma, aunque el aumento del término t_2 es mayor que el del t_1 (y por tanto disminuye g_1), se sigue cumpliendo que $t_1 > t_2$, y por tanto $g_1 \triangleq t_1 - t_2$ sigue siendo positivo aunque disminuya.

- La sensibilidad de g_1 a la variación de δ_1 (g_1 disminuye al disminuir δ_1) es menor que la de g_2 (g_2 aumenta al disminuir δ_1). Esto es debido a que los términos t_1 y t_2 , contribuyen de forma contrapuesta en g_1 , mientras que sus efectos se suman en g_2 . Esto también puede comprobarse en la Figura 4-23(b).
- Si δ_1 disminuye para $\delta_1 > 1$, α disminuye, y para un mayor número de fases $\phi + \theta$ se satisface (4.19). Por tanto el término t_2 será real y positivo de acuerdo a (iii) en un mayor rango de fases Φ_{12} . Por tanto, existirán soluciones reales y positivas g_{12} en un intervalo mayor Φ_{12} , luego, ε aumenta.

* * *

Demostrada $\delta_1 \downarrow \Rightarrow \varepsilon \uparrow$, $g_1 \downarrow$, $g_2 \uparrow$ para $g_{12} < \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [\phi_{v12} \mp \varepsilon]$ en (4.71) siendo $\delta_1 \geq 1$, se analizan ahora los valores extremos de especificación, es decir, cuando $\delta_1 \rightarrow 1^+$ y cuando $\delta_1 \rightarrow +\infty$.

Calculando los límites de la expresión g_{12} en (4.2) y de ε en (4.22), cuando $\delta_1 \rightarrow +\infty$ se obtiene:

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow +\infty} g_{12} = \frac{1}{p} \left(-\cos(\phi + \theta) \mp \sqrt{\cos^2(\phi + \theta) - 1} \right) \quad (4.77)$$

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow +\infty} \varepsilon = 0^\circ \quad (4.78)$$

Teniendo en cuenta (4.77) y (4.78) se comprueba que cuando la especificación se relaja hasta el límite $\delta_1 \rightarrow +\infty$, el intervalo angular Φ_{12} de existencia de contornos (necesidad de control para cumplir la especificación)

se reduce a un punto cuya fase¹⁰ es $-180^\circ - \theta$. Luego, el contorno resultante se resume como (véase Figura 4-26):

$$\lim_{\delta_i \rightarrow +\infty} g_{12} \angle \phi = \frac{1}{p} \angle -180^\circ - \theta \quad (4.79)$$

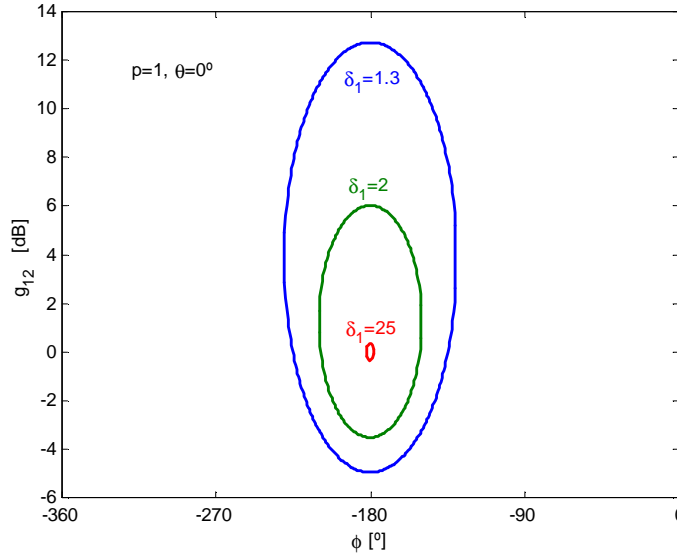


Figura 4-26: Aumento de la tolerancia de especificación δ_i siendo $\delta_i > 1$

Y en el otro extremo de variación de δ_i , calculando los límites cuando $\delta_i \rightarrow 1^+$ de la expresión g_{12} en (4.2) y de ε en (4.22), y teniendo en cuenta que Φ_{12} como máximo se extiende en $[-270^\circ - \theta, -90^\circ - \theta]$ se obtiene (véase Figura 4-27):

$$\lim_{\delta_i \rightarrow 1^+} \varepsilon = 90^\circ \quad (4.80)$$

$$\begin{cases} \lim_{\delta_i \rightarrow 1^+} g_1 = \frac{1}{2p|\cos(\phi + \theta)|} \\ \lim_{\delta_i \rightarrow 1^+} g_2 = +\infty, \end{cases} \quad \phi \in \Phi_{12} = [-270^\circ - \theta, -90^\circ - \theta] \quad (4.81)$$

¹⁰ Nótese que se está trabajando con contornos simples, cuando se considere la incertidumbre el punto se transforma en un intervalo de fases de amplitud igual a la incertidumbre horizontal, $\Delta\theta$.

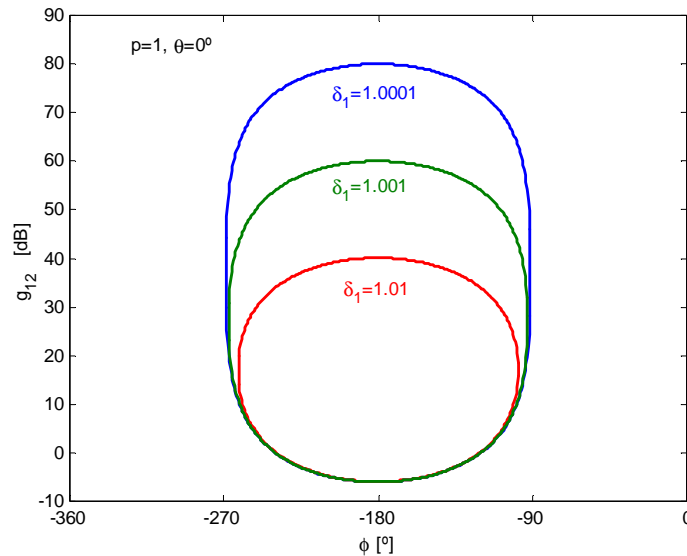


Figura 4-27: Disminución de la tolerancia de especificación δ_1 siendo $\delta_1 > 1$

Las ecuaciones (4.79) y (4.81) resumen el comportamiento de los contornos en los valores límite del intervalo de variación de la especificación, $\infty > \delta_1 \geq 1$. Según éstas y la ecuación (4.71) puede afirmarse:

Conclusión: influencia del valor de especificación δ_1 en contornos tipo A ($\delta_1 > 1$) sin considerar la incertidumbre de la planta ($g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [\phi_{v12} \mp \varepsilon]$)

De acuerdo a (4.71) cuando δ_1 se reduce, el contorno $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [\phi_{v12} \mp \varepsilon]$, es más agresivo en magnitud y fase: aumenta g_2 , disminuye g_1 y aumenta ε (aumenta la amplitud del intervalo Φ_{12}). Además, $g_2 \angle \phi$ es más sensible que $g_1 \angle \phi$ a la variación de δ_1 . En el límite ($\delta_1 \rightarrow 1^+$) según (4.81): las curvas $g_{12} \angle \phi$ ocupan el intervalo máximo posible en fase, es decir, $\phi \in \Phi_{12} = [-180 - \theta \mp 90^\circ]$; la curva superior $g_2 \angle \phi$ se eleva hasta el infinito, y la curva inferior $g_1 \angle \phi$ desciende hasta $2/p |\cos(\phi + \theta)|$. Véase Figura 4-27. El valor límite de especificación $\delta_1 \rightarrow 1^+$, marca la transición a una tipología D de contornos (estudiados anteriormente), en la que con $\delta_1 \leq 1$, g_2 pasará a tomar valores negativos $\forall \phi$, y g_1 tomará valores positivos y reales. Véase Figura 4-25.

De acuerdo a (4.71) cuando δ_l aumenta, el contorno $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [\phi_{12} \mp \varepsilon]$ disminuye su agresividad (aumenta g_1 , disminuye g_2 y ε se reduce). En el límite, $\delta_l \rightarrow +\infty$, ε se reduce a 0° por lo que los contornos son tan sólo un punto, $1/p \angle -180^\circ - \theta$. Véase Figura 4-26.

Conclusión: influencia del valor de especificación δ_l en contornos A ($\delta_l \geq 1$) considerando la incertidumbre de la planta ($g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS}$)

El efecto de la variación de δ_l sobre los contornos con y sin incertidumbre es el mismo. Teniéndose en cuenta la contribución de la incertidumbre (estudiada en la Sección 4.3) la conclusión anterior puede generalizarse como:

- (i) Cuando δ_l se reduce, el contorno $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T]$ es más agresivo en magnitud y fase: aumenta g_{SUP} y su punto de máximo en (4.56); disminuye g_{INF} y su punto de mínimo en (4.57); aumenta la amplitud del intervalo Φ_{IS} en (4.55) (ya que aumenta $2\varepsilon_T$, al aumentar ε con $\Delta\theta = cte$) y el eje vertical ϕ_{VIS} en (4.52) no se modifica. Además, $g_{SUP} \angle \phi$ es más sensible que $g_{INF} \angle \phi$ a la variación de δ_l .
- (ii) En el límite inferior ($\delta_l \rightarrow 1^+$) las curvas $g_{INFSUP} \angle \phi$ ocupan el intervalo máximo posible en fase para $\Delta\theta = cte$, al tomar ε su valor máximo 90° . Luego, según (4.55) $\Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp (\Delta\theta/2 + 90^\circ)]$, con ϕ_{VIS} en (4.52) e $\Delta\theta$ constantes. Además, para $\delta_l \rightarrow 1^+$, y considerando $\Delta p = cte$, la curva superior $g_{SUP} \angle \phi$ se eleva hasta el infinito y la curva inferior $g_{INF} \angle \phi$ descende hasta $2/p_{max} |\cos(\phi + \theta)|$. Este valor límite de especificación, $\delta_l \rightarrow 1^+$, marca la transición a una tipología D de contornos (estudiados anteriormente).
- (iii) Cuando δ_l aumenta el contorno $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T]$, disminuye su agresividad (aumenta g_{INF} , disminuye g_{SUP} y ε_T se reduce).
- (iv) En el límite, $\delta_l \rightarrow +\infty$, ε se reduce a 0° por lo que según (4.55) los contornos ocupan un intervalo de fases $\Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \Delta\theta/2]$, con ϕ_{VIS} en (4.52) e $\Delta\theta$, ambos constantes. Luego, la amplitud del intervalo Φ_{IS} se reduce a $2\varepsilon_T = \Delta\theta$. Y en ganancias, la curva superior $g_{INFSUP} \angle \phi$ se calculan según (4.79) con $\phi \in \Phi_{IS}$. El máximo de $g_{SUP} \angle \phi$ se hace $1/p_{min}$ y el mínimo de $g_{INF} \angle \phi$ descende hasta, $1/p_{max}$. La separación entre los ejes horizontales de ambas curvas $g_{SUP} \angle \phi$ y $g_{INF} \angle \phi$ se reduce a Δp . Y entre sus ejes verticales a $\Delta\theta$.

4.5 SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE CONTROL SOBRE LA SENSIBILIDAD COMPLEMENTARIA

Este apartado analiza paralelamente qué representa la especificación robusta (tolerancia de comportamiento más incertidumbre) sobre la sensibilidad complementaria y cómo expresan los contornos dichas condiciones en presencia de incertidumbre. Todo lo cual finalmente contribuye a la factibilidad de la síntesis del controlador que satisfaga la especificación robusta sobre la sensibilidad complementaria y el resto de objetivos de control.

La especificación robusta sobre la ganancia de la sensibilidad complementaria del sistema en lazo cerrado, $|T|=|L/(1+L)|$ se definía en (3.6):

$$|T_1(j\omega)| = \left| \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| = \left| \frac{Y(j\omega)}{N(j\omega)} \right| = \left| \frac{U(j\omega)}{D_1(j\omega)} \right| = \left| \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)F(j\omega)} \right| \leq \delta_1(\omega), \quad \omega \in \Omega_1$$

Esto podía perseguir distintos objetivos de comportamiento y estabilidad robustos tal como se describía en la Sección 4.1.

4.5.1 UN PEQUEÑO RESUMEN SOBRE LOS CONTORNOS

En primer lugar debe recordarse que los contornos para el controlador, G , y para la función de transferencia nominal de lazo abierto, L_0 , expresan las mismas necesidades. Esto era debido a que la misma cantidad que se trasladan los contornos sobre los ejes grados-decibelios se traslada también el punto de referencia ($0\text{dB} \angle 0^\circ$ para G y la planta nominal $p_0 \angle \theta_0$ para L_0). Por ello, indistintamente hablaremos de contornos en términos de G o de L . (véanse Figura 4-7, Figura 4-12, Figura 4-16)

Conforme disminuye la tolerancia de especificación δ_1 , sobre la sensibilidad complementaria $|T|=|L/(1+L)|$, los contornos se hacen más agresivos. Así lo demuestra el paso de una tipología A de contornos para $\delta_1 > 1$ a una tipología D (más agresivos) para $\delta_1 < 1$; véanse Sección 4.2 y 4.4. Y dentro de cada tipología también un decremento de δ_1 implicaba unos contornos más desfavorables, según se ilustraba en la Figura 4-23: los contornos A ocupan una mayor área de ganancias y fases sobre el plano de Nichols y los contornos D disminuyen en altura; véase Sección 4.4.

También la incertidumbre contribuye a unos contornos representativos más difíciles de satisfacer. Para el caso de la incertidumbre en fase, los contornos de tipo A ocupan un mayor intervalo de fases (Figura 4-9) en función de $\Delta\theta$ y se desplazan sobre $[-360^\circ, 0^\circ]$ según los valores relativos de incertidumbre, $\{\theta\}$ (Figura 4-11). Y los contornos de tipo D también se trasladan en función

de $\{\theta\}$ (Figura 4-6) y toman valores máximos en un mayor rango de fases en función de $\Delta\theta$ (Figura 4-5). Para la incertidumbre en ganancia, en los contornos tipo D sólo el perfil superior de las plantillas era significativo, y los contornos descendían (más agresivos) cuanto mayores fueran los valores máximos (Figura 4-15). En los contornos A, tanto el perfil superior como el inferior de las plantillas eran significativos, descendiendo en altura cuando aumentaban los valores relativos de incertidumbre $\{p\}$ (Figura 4-18).

4.5.2 LA ESTABILIDAD

La meta fundamental en control es la de garantizar la estabilidad robusta del sistema. Cuando $\delta_1(\omega_i)$ representa condiciones en este sentido, toma un valor constante δ_1 para todas las frecuencias ω_i . Dicho valor δ_1 fija el pico máximo permitido de sensibilidad complementaria, $|T'/F|=|T|=|L/(1+L)|$, y por tanto, se corresponde directamente con los círculos- M del diagrama de Nichols:

$$\delta_1 = M_T = \max_{\omega} |T(j\omega)| = \text{círculo} - M_{cte} \quad (4.82)$$

A su vez, esto garantiza unos márgenes mínimos de ganancia y fase, obtenidos a partir de δ_1 como (Chait y Yaniv, 1993):

$$MG \geq 20 \log \left(\frac{\delta_1 + 1}{\delta_1} \right) \quad [dB] \quad (4.83)$$

$$MF \geq 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{2\delta_1} \right) \geq \frac{1}{\delta_1} \quad [rad] \quad (4.84)$$

La incertidumbre de la planta en la frecuencia ω_i se expresaba con la plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega)$. La incertidumbre de dicha plantilla coincide en términos absolutos con la incertidumbre de lazo abierto $\mathfrak{S}L(j\omega)$. Como se discutió en la Sección 2.3.3 (véase Figura 2-6), la incertidumbre del sistema estira el círculo- $M=\delta_1$ de (4.82) una magnitud y fase según $\mathfrak{S}L(j\omega)$ o $\mathfrak{S}P(j\omega)$, obteniéndose los contornos de estabilidad. Si el modelado de $L_0=GP_0$, no viola en ninguna ω_i el contorno correspondiente se garantiza la estabilidad robusta del sistema, mínimo MG en (4.83) y MF en (4.84), para todas las plantas en $\mathfrak{S}P$.

Para obtener valores razonables de estabilidad, Biernson (1988) aconseja $\delta_1 \leq 1.3$ ($MF \geq 45^\circ$ y $MG \geq 5dB$). De acuerdo a la Sección 4.2.2 se demostraba cómo valores $\delta_1 > 1$ daban siempre tipologías A de contornos. Estas se

caracterizan por dos curvas de restricción¹¹: $g_{INF\text{SUP}} \angle \phi$, localizadas en un intervalo reducido de fases, $\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T] \subseteq [-360^\circ, 0^\circ]$.

A partir de las fórmulas (4.83) y (4.84) puede deducirse que valores $\delta_i \gg 1$ implican $MG \rightarrow 0$ y $MF \rightarrow 0$, lo que puede poner en peligro la estabilidad del sistema. Así se demostraba en la Sección 4.4.2, donde para $\delta_i \rightarrow +\infty$ los contornos doblevaluados de tipología A se transformaban tal que: $\varepsilon_T \rightarrow 0$, $g_{INF} \rightarrow 1(0\text{dB})$ y $g_{SUP} \rightarrow 1(0\text{dB})$; véase Figura 4-26. Entonces el contorno se extingue en un punto y los márgenes de fase y ganancia no se limitan, siendo posibles márgenes negativos y, por tanto, diseños inestables que deberían haberse evitado.

Cuando δ_i disminuye, aparecen contornos doblevaluados tipo A cada vez más restrictivos: mayor ε_T , menor g_{INF} y mayor g_{SUP} para una plantilla $\Im P(j\omega_i)$. Esto garantiza, a pesar de la incertidumbre, unos MG y MF cada vez conservadores (mayores márgenes). Para valores $\delta_i < 1$, incluso se obtiene una transición de tipología de contornos (véase Figura 4-25). El nuevo contorno simplevaluado inferior (tipo D) puede llegar a disminuir indefinidamente hasta $0 (-\infty\text{dB})$ cuando $\delta_i \rightarrow 0$ (véase Figura 4-24). Entonces los márgenes de ganancia y fase se hacen infinitos, lo que demandaría un sistema infinitamente estable a costa de una disminución infinita de la ganancia en la frecuencia de cruce de fase. Esto resulta imposible si se han de satisfacer otras especificaciones con una mínima ganancia $|L_0|$, para obtener los beneficios del control realimentado (rechazo de perturbaciones, seguimiento de señales o estabilización de polos inestables), incluso aunque dichas especificaciones sean demandadas en frecuencias inferiores a las de dominio de los contornos de estabilidad (frecuencias de cruce).

Para los valores aconsejables de estabilidad, $\delta_i \approx 1.3$ ($MF \approx 45^\circ$ y $MG \approx 5\text{dB}$), los contornos resultan en cualquier frecuencia ω_i de tipología A (doblevaluados). En las bajas frecuencias no serán dominantes frente a las tipologías B de contornos que persiguen los beneficios de realimentación con una $|L_0|$ (o $|G|$) lo suficientemente grande en baja frecuencia (véanse Capítulos 5 y 6). En medias frecuencias los contornos tipo A de estabilidad empiezan a ser significativos. Cuando en estas frecuencias exista otro contorno de tipo B, el contorno doblevaluado tipo A, $g_{INF\text{SUP}} \angle \phi$, puede ser relevante en las fases donde su curva superior $g_{SUP} \angle \phi$ toma valores máximos.

De cualquier modo, la curva de restricción más importante que limita la sensibilidad complementaria es la de moderadamente alta frecuencia, donde

¹¹ Las conclusiones en la Sección 4.2.2 para contornos sin incertidumbre $g_{I2} \angle \phi$, se han generalizado para sistemas con incertidumbre dando contornos $g_{INF\text{SUP}} \angle \phi$ comentados en la Sección 4.3..

L_0 debe alcanzar sus frecuencias de cruce de fase y ganancia. Supuesto razonable un $\delta_l \approx 1.3$, y un sistema sin incertidumbre, el contorno de estabilidad se corresponde con el círculo-M de 2.28dB según (4.82) y se respetarían unos márgenes mínimos de: $\min MF \approx 45^\circ$ según (4.84) y $\min MG \approx 5\text{dB}$ según (4.83). Así mismo, la altura de la curva superior e inferior, $g_{12} \angle \phi$, del contorno para G se calcularían según (4.2), y su intervalo de fases de existencia $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$ queda limitado por $\varepsilon = 58^\circ$ según (4.22). Ahora bien, el contorno de estabilidad se hace más restrictivo cuando aparece la incertidumbre en fase y ganancia, tal como se estudió en la Sección 4.3. Véase el resultado sobre la Figura 4-22, que se adjunta de nuevo.

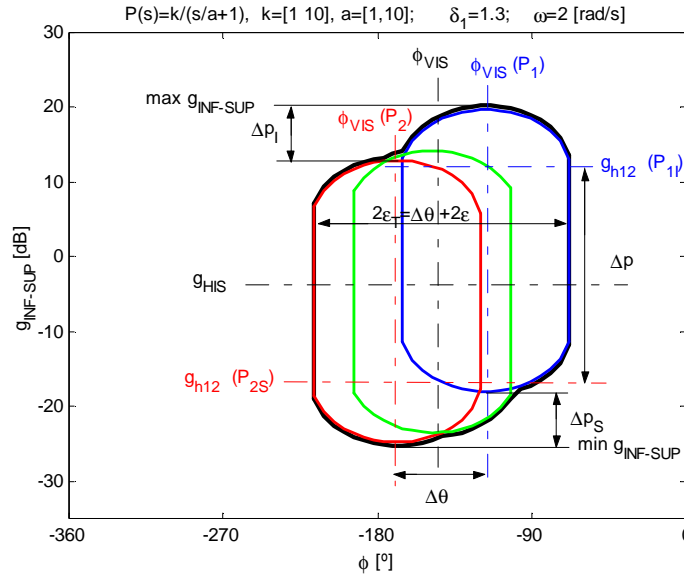


Figura 4-28: Influencia de la incertidumbre en el contorno de T de alta frecuencia

Sobre la Figura 4-28 puede comprobarse como un aumento de la incertidumbre absoluta en fase $\Delta\theta$, conduce a que las curvas de restricción de estabilidad prohíban la ocupación de un mayor área en el intervalo de diseño. Sin llegar al extremo en el que no existe solución, como se ilustraba en la Figura 4-9 (c), es evidente que la libertad en el modelado para L_0 se reduce notablemente cuando se incrementa la incertidumbre en fase. Sin embargo, la incertidumbre en fase de alta frecuencia, donde dominan los contornos de estabilidad, no suele tenerse en cuenta. Según se demostró en la Sección 3.2.3 (véanse (3.20), (3.22), (3.23) y Figura 3-3) es habitual considerar que en alta frecuencia las plantillas presenten sólo incertidumbre en ganancia si no existe retardo o éste no contiene incertidumbre. Sin

embargo, el retardo, se modele o no, está presente en mayor o menor medida en todo sistema real, siendo desconocido su valor exacto. Y tampoco debe obviarse la contribución de la incertidumbre no estructurada, característica precisamente de las altas frecuencias. Por ello, la dificultad en diseño de L_0 debido a la incertidumbre en fase de alta frecuencia no debe ser del todo ignorada. No obstante, la contribución de la incertidumbre en magnitud es mucho más evidente, analizándose un ejemplo a continuación.

También sobre la Figura 4-28 puede comprobarse cómo un incremento de la incertidumbre absoluta en ganancia, Δp , amplifica la separación de las curvas superior e inferior del contorno A de sensibilidad complementaria de alta frecuencia. Y lo que es aún de mayor relevancia, conforme los valores relativos de $\{p\}$ aumentan, el contorno de tipología A desciende sobre el eje en decibelios; véase la Figura 4-18. Esto va a complicar la síntesis de L_0 existiendo mayores compromisos en su diseño, como muestra a continuación un ejemplo. La naturaleza de la incertidumbre en magnitud en las plantillas de moderadamente alta frecuencia (donde dominan los contornos de estabilidad) tiene dos orígenes fundamentalmente, tal y como se demostró en la Sección 3.2.3. La incertidumbre exclusivamente debida a parámetros ganancia según (3.22), para familias de plantas con formato φ_1 en (3.12). Y la contribución adicional a la incertidumbre vertical de alta frecuencia de los parámetros polos y cero según (3.23) cuando el formato es φ_2 en (3.13). Tampoco, debe obviarse la contribución de la incertidumbre no estructurada, característica precisamente de alta frecuencia.

Ejemplo

Se desea controlar una familia de plantas $\varphi = \{P(s)\} = \{k/(s/a+1)\}$ cuyo polo es fijo en $a=1$ y su parámetro ganancia k presentará una incertidumbre variable. La especificación de estabilidad robusta para $\{P\}$ se plantea con una desigualdad $|T_1| = |L/1+L| \leq \delta_1$, con $\delta_1 \approx 1.3$ en $\omega = [10, 100]$ rad/s. Esto según (4.83) y (4.84) garantizará para toda $L \in \{L\}$, unos mínimos márgenes de fase y ganancia de 45° y 5dB, respectivamente. Así mismo, se desea una atenuación en bajas frecuencias ($\omega=10$ rad/s) de posibles perturbaciones D_2 en la salida del lazo de realimentación Y , tal que $|T_2| = |1/1+L| \leq \delta_2$, con $\delta_2 = 0.09$. Sobre la Figura 4-29 se muestran los contornos representativos para ambas especificaciones cuando no existe incertidumbre, $k=10$, y cuando el parámetro ganancia es variable en $k \in [10, 50]$. Se muestra directamente el contorno intersección a cada frecuencia. Para $\omega=10$ rad/s (trazo verde) dominan los contornos de rechazo robusto de perturbaciones de tipología B (véase Capítulo 5) sobre los de estabilidad robusta de tipología A y menor altura. En alta frecuencia, $\omega=100$ rad/s, el único objetivo de la realimentación es preservar la estabilidad, que da lugar a un contorno de tipo A. Cuando el

sistema no contiene incertidumbre los contornos para L_0 se han representado en trazo rojo, y cuando la planta tiene incertidumbre en trazo azul. En el primer caso el contorno coincide según (4.82) con el círculo-M de 2.28dB sobre el diagrama de Nichols.

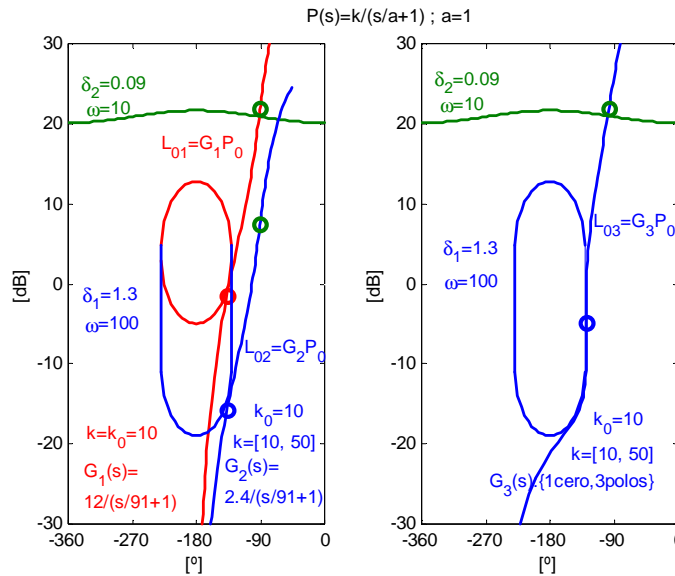


Figura 4-29: Las especificaciones de estabilidad robusta y el diseño de control

Para realizar los diseños se toma como planta nominal P_0 , la de parámetros $k_0=10$, $a_0=1$. Sobre el sistema sin incertidumbre se realiza el modelado de $L_{01}=G_1P_0$, tal como ilustra la Figura 4-29, resultando el controlador de realimentación:

$$G_1(s) = \frac{12}{\frac{s}{91} + 1} \quad (4.85)$$

L_{01} satisface tanto los contornos de rechazo de perturbaciones, dominantes en baja frecuencia $\omega_f=10$, como los de estabilidad, dominantes en alta frecuencia $\omega_f=100$.

El comportamiento temporal del sistema en lazo cerrado se muestra en la Figura 4-30. Sobre el gráfico (a) puede observarse el esperado comportamiento de rechazo de una perturbación $d_2(t)$ de tipo escalón en el instante $t=1$ seg., cuya influencia en la salida $y(t)$ es reducida en un 91% después de 0.12 seg. La evolución del esfuerzo de control gastado $u(t)$ se muestra en el gráfico (b). Las gráficas (c) y (d) ilustran el comportamiento dinámico de $y(t)$ y $u(t)$ considerando el ruido introducido por el sensor $n(t)$.

Para simular este efecto, se ha empleado una fuente que aproxima un ruido blanco¹². Nótese como la elevada ganancia del sistema en alta frecuencia, $|L_{01}(\omega=100)|=-1.5\text{dB}$ puede conllevar problemas de amplificación de ruidos en la salida $y(t)$, y sobre todo en la entrada de control $u(t)$ que puede saturar los actuadores. Compárese la escala vertical de los gráficos (c) y (d) donde se detecta un efecto del ruido 85% veces mayor en $u(t)$ que en $y(t)$.

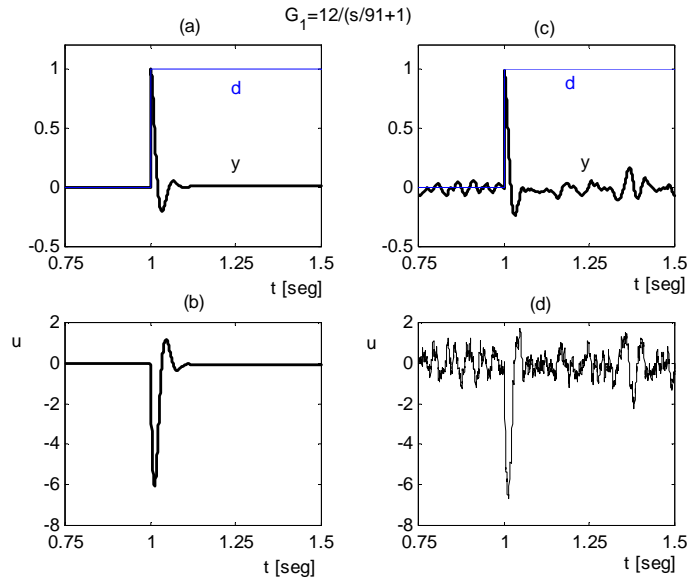


Figura 4-30: Comportamiento realimentado con el controlador G_1

Considerando ahora la incertidumbre, k no toma sólo el valor discreto $k=10$, sino que $k \in [10, 50]$. Ante mayores valores de k , tal y como se demostraba en la Sección 4.3.2.3, la curva inferior del contorno se desplaza hacia abajo; véase la Figura 4-29. Este incremento de agresividad puede cuantificarse con la formulación desarrollada. Las plantas de máximo y mínimo en $\omega=100$ rad/s resultan $p_{max} \angle \theta = 0.5(-6\text{dB}) \angle -90^\circ$ y $p_{min} \angle \theta = 0.1(-20\text{dB}) \angle -90^\circ$. Entonces, el descenso del contorno inferior de estabilidad se puede calcular aplicando (4.44) a ambas plantas (o 4.47). Se obtiene que el contorno de estabilidad a respetar ha descendido -14dB .

El diseño L_{01} es ahora insuficiente violándose los márgenes de estabilidad robusta por alguna de las plantas en $\{L\}$, tal y como ilustra la Figura 4-29. Ello obliga a nuevos compromisos de diseño. El modelado L_{02} apuesta por

¹² Dicha fuente se encuentra implementada en el bloque de la Toolbox de Simulink 'ruido blanco de banda limitada' parametrizado con una altura de la densidad espectral cruzada de 4.6×10^{-5} y un tiempo de correlación de 4.6×10^{-4} . (Mathworks, Inc. 1990).

un controlador G_2 sencillo, que al igual que G_1 contiene un término ganancia y un polo real:

$$G_2(s) = \frac{2.4}{\frac{s}{91} + 1} \quad (4.86)$$

L_{02} se ha diseñado simplemente reduciendo la ganancia de L_{01} en una magnitud igual al descenso del contorno, es decir -14dB . Entonces, el precio pagado por la sencillez es una ganancia insuficiente en bajas frecuencias. Ésta no podrá garantizar un nivel de atenuación de 0.09 (-21dB) para frecuencias de perturbación de 10rad/s , según se requería en las especificaciones, violándose su contorno representativo dibujado en trazo verde sobre la Figura 4-29.

El comportamiento temporal del sistema en lazo cerrado con G_2 se ilustra en la Figura 4-31, comparándose al mismo tiempo con el obtenido para G_1 .

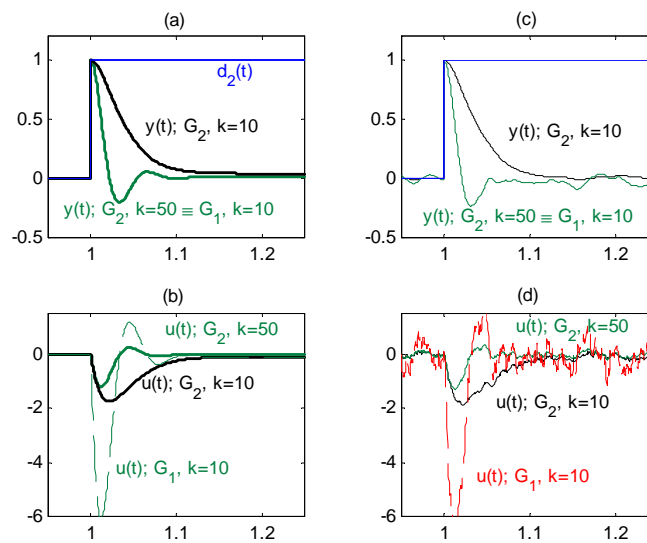


Figura 4-31: Comportamiento temporal realimentado con G_2 y G_1

Tras una perturbación tipo escalón unitario en la salida del sistema, $d_2(t=1)$, el gráfico(a) muestra la evolución temporal de las salida $y(t)$ para los sistemas extremos de incertidumbre paramétrica: $P_1(s)=10/(s+1)$ (línea de trazo negro) y $P_2(s)=50/(s+1)$ (línea de trazo verde). La planta más desfavorable en el dominio de incertidumbre, $k \in [10, 50]$, en cuanto a la atenuación de la perturbación con G_2 , es la de menor ganancia, $P_1(s)=10/(s+1)$. Para ésta se consigue un nivel de atenuación 14dB menor en

lazo abierto que el obtenido para la planta de mayor ganancia $P_2(s)=50/(s+1)$, como demostraba la Figura 4-29 en la que se violaba el contorno de baja frecuencia. Nótese como el comportamiento dinámico en la salida del sistema P_2 realimentado con el controlador G_2 es idéntico al de la planta P_1 cuando la realimentación es con G_1 . Con todo ello, se comprueba que en el sistema con incertidumbre uno de los precios pagados por ésta, si se quiere mantener el mismo nivel de estabilidad y de sencillez del controlador, es el deterioro del comportamiento dinámico frente a las perturbaciones, al menos para alguna de las plantas. Sin embargo, el gráfico(b) de la Figura 4-31 muestra algunas ventajas del control con G_2 . Se trata del esfuerzo de control, que se reduce notablemente con el empleo de un controlador de menor ganancia; compárense G_2 en (4.86) y G_1 en (4.85). En presencia de ruido, inevitable en todos los procesos realimentados reales, las ventajas en alta frecuencia de un controlador menos agresivo en baja frecuencia se hacen aún más notables; véanse gráficos (c) y (d).

Sobre la Figura 4-29, puede también comprobarse cómo los márgenes de estabilidad de L_{02} (sistema nominal) parecen haber aumentado (compruébense los puntos de corte con las líneas de 0dB y -180°), sin embargo, esto no debe resultar engañoso. La planta nominal sí ha ganado en estabilidad pero existirá una planta en $\{L\}$ cuyos márgenes sean exactamente 45° y 5dB. Entonces, en cierto modo al existir incertidumbre uno de los costes es el sobrediseño de algunas plantas para garantizar que todas cumplan los mínimos requisitos exigidos por las tolerancias de especificación planteadas. Esto podría sugerir el empleo de algún tipo de control adaptativo, con el fin de reducir la incertidumbre y de reducir el sobrediseño. Estas ideas se discutirán para otros problemas de control, considerándose que en términos de estabilidad el diseño más seguro es el que considera toda la incertidumbre real del problema.

Parte del sobrediseño (margen de ganancia) en la estabilidad de la planta nominal puede corregirse mediante un mayor ajuste de L_{02} a sus contornos. Y al mismo tiempo, se pueden garantizar los niveles de atenuación de perturbaciones de $\omega=10\text{rad/s}$ planteados. En este caso, el precio pagado será la complejidad del controlador. La Figura 4-29 ilustra estas conclusiones con el modelado de $L_{03}=G_3P_0$, resultando:

$$G_3(s) = \frac{13\left(\frac{s}{113} + 1\right)}{\left(\frac{s}{33} + 1\right)\left(\frac{s^2}{556^2} + \frac{2 \cdot 0.46}{556}s + 1\right)} \quad (4.87)$$

Sobre el gráfico(a), líneas de trazo rojo y negro, de la Figura 4-32 puede comprobarse como para el caso más desfavorable (planta en lazo abierto de

menor ganancia $P_I(s)=10/(s+1)$) el controlador de realimentación G_3 consigue una atenuación más rápida y de menor error estacionario que el controlador G_2 . La diferencia viene marcada en el diseño de L_{03} en la Figura 4-29. Éste satisface el contorno de baja frecuencia que representa el rechazo de perturbaciones $|Y/D_2| \leq \delta_2 = 0.09$, mientras que L_{02} lo incumple. La mejora no sólo implica un aumento en la complejidad de G_3 respecto a G_2 , sino también un aumento del esfuerzo de control solicitado a los actuadores, como refleja el gráfico(b) en la Figura 4-32. Aceptados los niveles máximos de $u(t)$ en el instante en que se produce una perturbación ($t=1$), en la práctica habrá que tener en cuenta el ruido introducido por el sensor¹³. Éste, más que a la variable salida $y(t)$, fundamentalmente afecta a la variable $u(t)$, como ilustran los gráficos (c) y (d) de la Figura 4-32. Como se predijo en párrafos anteriores la mayor ganancia de alta frecuencia ($\omega=100$) de L_{03} frente a L_{02} provoca una mayor amplificación de los ruidos de medida. Una mayor amplitud o menor frecuencia de la señal de ruido, puede finalmente requerir la relajación de la especificación de rechazo de perturbaciones.

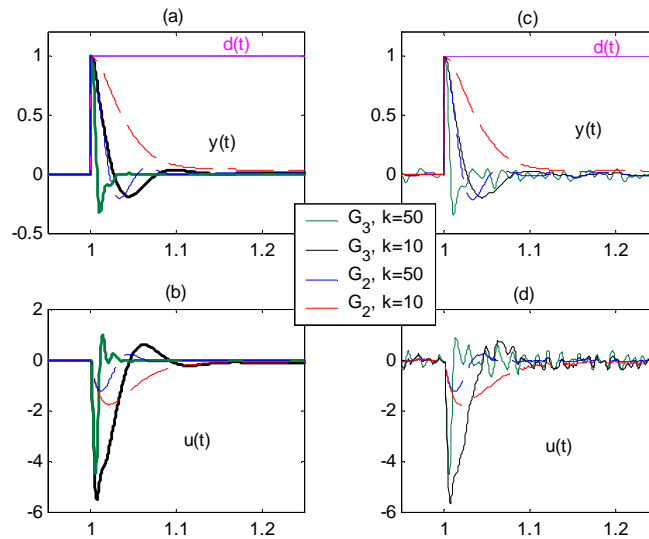


Figura 4-32: Comportamiento temporal realimentado con G_3 y G_2

En conclusión, si el problema de control fue planteado vigilando correctamente el efecto de los ruidos del sensor y la incertidumbre, el controlador G_3 es el más adecuado. Éste implica el menor sobrediseño

¹³ Se ha simulado con una aproximación a un ruido blanco, utilizando el bloque Simulink 'ruido blanco de banda limitada'. Éste ha sido parametrizado con una altura de densidad espectral cruzada de $4.6e-6$ y un tiempo de correlación de $4.6e-4$. (Mathworks, Inc. 1990).

posible respetando los márgenes de estabilidad requeridos, lo que permite una mejora en la dinámica de rechazo de perturbaciones.

4.5.3 LA ATENUACIÓN DE RUIDOS

El sensor $H(s)$ de medida de la señal de salida (véase Figura 2-1) constituye una importante fuente de entrada de perturbaciones de alta frecuencia, comúnmente denominadas ruidos. La atenuación de ruidos de alta frecuencia no es el objetivo principal de la realimentación, pero la amplificación de éstos puede ser uno de sus efectos secundarios. Como se apuntaba en las Secciones 2.2.2 y 3.1, un adecuado comportamiento en el rechazo de perturbaciones o en el seguimiento de señales de referencia requiere una $|L|$ elevada (sus contornos representativos se analizan en los Capítulos 5 y 6). Y al mismo tiempo, la pendiente de caída de L en sus frecuencias de cruce está limitada por los márgenes de estabilidad, como demostraba el contorno de estabilidad estudiado en la sección anterior. Entonces, inevitablemente $|L|$ puede alcanzar valores grandes hasta elevadas frecuencias. Por esto entre otras causas, siempre QFT ha tenido en cuenta implícitamente en sus diseños la disminución, tan rápida como sea posible, de la ganancia $|L|$ de alta frecuencia (Horowitz y Sidi, 1972; Horowitz, 1973 comentado en Sección 2.7).

El ejemplo en la sección anterior ilustraba el efecto del ruido introducido por el sensor N tanto en la salida Y como en los actuadores U ; véanse Figura 4-30, Figura 4-31 y Figura 4-32. Se demostraba como una elevada ganancia en alta frecuencia era especialmente peligrosa en la amplificación de ruidos a la entrada a los actuadores U/N (gráficos (d) de las figuras anteriores), tal y como se estudiará matemáticamente en la Sección 6.1.

De acuerdo al problema de control estudiado en este capítulo, una limitación explícita de la sensibilidad complementaria limitaría la magnitud $|Y/N|$. Pero como todas las funciones de transferencia de control se interrelacionan, una limitación de $|U/N|$ limitará también $|Y/N|$.

Si en un proceso se advirtiera la introducción de ruidos N por parte del sensor en frecuencias próximas a las de trabajo, convendría introducir especificaciones explícitas sobre $|Y/N| \leq \delta_1$. Obviamente, en las frecuencias de filtrado, la tolerancia de atenuación debe satisfacer $\delta_1(\omega) < 1$, y entonces aparecerían contornos de tipología D. Éstos, al ocupar toda la banda de diseño, son mucho más restrictivos que los de estabilidad. Mientras que en los últimos, al ser de tipología A, L_0 puede permanecer a la derecha (o izquierda de éstos), en los contornos D necesariamente L_0 debe ubicarse por debajo de la curva de restricción. La restricción $\delta_1(\omega_{nf}) \approx 1.3$ puede resultar insuficiente, pues no atenúa ruidos sino tan sólo limita su influencia en la

salida. Evidentemente, para filtrar señales de una determinada frecuencia, la ganancia $|L_0|=|GP_0|$ debe permanecer por debajo de un cierto valor (contorno) independientemente de la fase, como exigen los contornos tipo D con $\delta_l < 1$.

Con el fin de no sobrecargar al controlador G con tareas adicionales, si el problema del ruido de alta frecuencia no pudiera evitarse aceptablemente con la reducción de $|L_0|$ tan rápido como sea posible con la frecuencia, se recomienda la utilización de un filtrado externo o si no se deberán relajar las especificaciones que exigen una ganancia mínima de baja frecuencia.

4.5.4 EL ESFUERZO DE CONTROL ANTE PERTURBACIONES EN LA ENTRADA

La amplificación en Y de ruidos introducidos por el sensor N tratada en la sección anterior no es el precio más alto pagado por la realimentación. El mayor coste es la saturación de los actuadores U , debido precisamente al ruido del sensor o a perturbaciones D_1 o D_2 , que a priori hubieran parecido insignificantes. Este efecto fue advertido desde los comienzos de QFT (Horowitz, 1963).

El mayor riesgo de la realimentación existe en frecuencias intermedias, donde aun siendo $|L| \ll 1$, se tiene $|L| > |P|$, es decir, en la zona donde se incrementa el ancho de banda entre $|P|$ y $|L|$ debido al controlador de realimentación $|G|$ (Horowitz, 1973, 1991). Cuanto mayor sea el rango de frecuencias donde $|L/P| > 1$, mayor es el pico de la función $|L/P|$ que de acuerdo con (3.5) equivale a picos de $|U/D_1|$, $|U/D_2|$, $|U/R|$, y $|U/N|$. Si el pico de $|L/P|$ es muy grande, por pequeñas que sean las perturbaciones $D_{1,2}$ o los ruidos de alta frecuencia N , éstos se amplifican de tal manera que saturan los actuadores, y las señales de control de interés, por ejemplo para el seguimiento de señales, no surten ningún efecto. Esto evidencia la necesidad de limitar el pico de $|L/P|$ (Horowitz y Sidi, 1978).

Desde otro punto de vista, los picos mencionados fueron ya predichos por Bode en su integral sobre la función sensibilidad $S=1/1+L$. En virtud de dicha integral una $|S| < 1$ en bajas frecuencias para obtener los beneficios de la realimentación, obliga a que $|S|$ alcance picos superiores a la unidad, $|S| > 1$, en moderadamente altas frecuencias. Y esto se cumple en todo sistema de control en la práctica que debe reducir su ganancia de alta frecuencia. Paralelamente, $|T| \approx 1$ en baja frecuencia y presentará un pico $|T| > 1$ en alta frecuencia. Estos efectos deben ser limitados para evitar amplificaciones de perturbaciones y ruidos no deseados.

Aparentemente una limitación del pico de la sensibilidad complementaria, $|L/1+L| \leq \delta_1$, sólo limitaría el máximo de $|U/D_I|$. Sin embargo, existe una relación entre las funciones de sensibilidad complementaria $T=L/1+L$, sensibilidad $S=1/1+L$, sensibilidad mas la planta $S'=P/1+L$ y la función del esfuerzo de control $G/1+L$. En virtud de ella, una especificación robusta del tipo $|T_I|=|L/1+L| \leq \delta_1$, limita el pico máximo de todas aquellas funciones, y por tanto el coste de la realimentación. De igual modo, se podrían haber limitado los máximos con especificaciones $|1/1+L| \leq \delta_2$, estudiadas en el Capítulo 5, o con $|G/1+L| \leq \delta_4$ analizada en el Capítulo 6.

Como los máximos a limitar son superiores a la unidad a partir de una determinada frecuencia, según predecían las integrales de Bode, las tolerancias toman valores tales que $\delta_1 > 1$ o $\delta_2 > 1$. Esto da lugar a tipologías A de contornos según la Sección 4.2.2 para $\delta_1 > 1$ y también para $\delta_2 > 1$, como posteriormente demostrará la Sección 5.2. Al no ocupar toda la banda de diseño sólo en el caso de una incertidumbre en fase excesiva podrían plantear problemas de inexistencia de solución; véase la Sección 4.5.2 sobre los contornos de estabilidad para $\delta_1 \approx 1.3 > 1$. Sin embargo, las tolerancias $|G/1+L| \leq \delta_4$, que limitan el esfuerzo de control por excelencia, pueden plantear tipologías de contornos incompatibles (véase Capítulo 6, Sección 6.1)

Conforme aumenta la incertidumbre inherente al sistema, $\{P\}$, y a las perturbaciones $\{D\}$, se necesita una mayor $|L|$ en bajas y medias frecuencias. Y como la pendiente de decremento de $|L|$ estaba limitada por problemas de estabilidad, el ancho de banda de $|L|$ aumenta, con lo que la limitación del ‘coste de realimentación’ se agrava. Y para sistemas de fase no mínima o con retardo el problema es aún mayor.

En determinados problemas puede específicamente ser necesario limitar el esfuerzo de control debido a perturbaciones D_I , independientemente del problema del coste de la realimentación. Considérese por ejemplo un sistema con perturbaciones D_I significativas y unos actuadores elegidos en función de los esfuerzos requeridos para el seguimiento de referencias RF . Para evitar la saturación de los actuadores debido a $|U/D_I|$ sería necesaria una tolerancia $|L/1+L| \leq \delta_1$. Si se elige a este efecto $\delta_1 > 1$, a priori la tipología A resultante no implicará incompatibilidad con las tipologías de contornos de otras especificaciones. Pero si se necesita $\delta_1 < 1$, los contornos de tipo D que limitan el esfuerzo de control pueden ser incompatibles con los contornos tipo B para el seguimiento de referencias Y/RF o la dinámica de rechazo de perturbaciones Y/D_I . Los contornos de tipo B que aparecen en éstos últimos problemas de control se estudian en los capítulos siguientes, donde se muestran algunos ejemplos de inexistencia de solución.

4.5.5 LOS SERVOSISTEMAS

Entendida $|Y/RF|=|L/1+L|\leq\delta_r(\omega)$, como una especificación a cumplir por G en el seguimiento de señales, $\delta_r(\omega)$ podría establecer o bien un máximo o bien un mínimo en la respuesta $|Y/RF|$, pero no ambos. Sin embargo, será necesario reducir la incertidumbre en $\{T\}$ debido a la incertidumbre en $\{P\}$ para lo que se requieren simultáneamente un modelo máximo y mínimo de comportamiento para la sensibilidad complementaria. Por ello, estos problemas se resuelven con especificaciones dobles del tipo $\delta_{5inf}<|Y/R|<\delta_{5sup}$ que se satisfacen con la ayuda de dos grados de libertad, G y F , del modo descrito en la Sección 2.2.3 y más exhaustivamente en la Sección 6.2.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 4-1: Contorno de tipología D sin la incertidumbre, $g_1 \angle \phi$, para $0 < \delta_1(\omega) < 1$	107
Figura 4-2: Contorno de tipología A ($\delta_1(\omega) > 1$) sin la incertidumbre.....	112
Figura 4-3: Influencia de la fase θ en contornos de (a) tipología D (b) tipología A.....	115
Figura 4-4: Contorno tipo D ($\delta_1 < 1$) para plantillas con sólo incertidumbre en fase.....	117
Figura 4-5: Influencia del tamaño de la incertidumbre en fase en contornos D ($\delta_1 < 1$).....	118
Figura 4-6: Influencia de la fase en la agresividad de los contornos D ($\delta_1 < 1$).....	119
Figura 4-7: Comparación de contornos tipo D ($\delta_1 < 1$) para G y para L_0	119
Figura 4-8: Contornos tipo A ($\delta_1 > 1$) para plantillas con sólo incertidumbre en fase.....	121
Figura 4-9: Influencia del tamaño de incertidumbre, $\Delta\theta$, en contornos tipo A ($\delta_1 > 1$).....	122
Figura 4-10: Influencia del tamaño de la incertidumbre en fase $\Delta\theta$, y del valor de especificación δ_1 , para contornos de tipo A ($\delta_1 > 1$).....	123
Figura 4-11: Influencia de la incertidumbre en fase relativa, $\{\theta\}$, en contornos tipo A ($\delta_1 > 1$).....	124
Figura 4-12: Comparación de contornos para G y L_0 en tipologías A.....	124
Figura 4-13: Influencia de la magnitud p en los contornos (a) tipología D (b) tipología A.....	126
Figura 4-14: Contornos tipo D ($\delta_1 < 1$) para plantillas con sólo incertidumbre en magnitud.....	127
Figura 4-15: Influencia de la incertidumbre en magnitud absoluta Δp y relativa $\{p\}$,.....	128
Figura 4-16: Comparación de contornos tipo D ($\delta_1 < 1$) para L_0 y G,.....	129
Figura 4-17: Contornos tipo A ($\delta_1 > 1$) para plantillas con sólo incertidumbre en magnitud.....	131
Figura 4-18: Influencia de la incertidumbre vertical relativa, $\{p\}$, y absoluta, Δp	132
Figura 4-19: (a) Plantilla genérica. Plantas significativas en (b) contornos A y en (c) contornos D. (d) Tamaño fino de discretización.....	134
Figura 4-20: Contornos tipo D para plantilla genérica.....	135
Figura 4-21: Plantilla y parámetros típicos para contorno intersección tipo A.....	139
Figura 4-22: Contornos tipo A para plantilla genérica.....	140
Figura 4-23: Influencia de la tolerancia de especificación δ_1 en los contornos.....	144
Figura 4-24: Influencia de la especificación, $0 \leq \delta_1 \leq 1$, en contornos simples tipo D.....	147
Figura 4-25: Cambio de tipología de contornos simples: D para $\delta_1 \rightarrow 1^-$ y A para $\delta_1 \rightarrow 1^+$	148
Figura 4-26: Aumento de la tolerancia de especificación δ_1 siendo $\delta_1 > 1$	152
Figura 4-27: Disminución de la tolerancia de especificación δ_1 siendo $\delta_1 > 1$	153
Figura 4-28: Influencia de la incertidumbre en el contorno de T de alta frecuencia.....	158
Figura 4-29: Las especificaciones de estabilidad robusta y el diseño de control.....	160
Figura 4-30: Comportamiento realimentado con el controlador G_1	161
Figura 4-31: Comportamiento temporal realimentado con G_2 y G_1	162
Figura 4-32: Comportamiento temporal realimentado con G_3 y G_2	164

CAPÍTULO 5

LA SENSIBILIDAD

Resumen

El problema de mantener un proceso en el punto de trabajo a pesar de las perturbaciones es el objetivo más habitual del control industrial, una vez garantizada la estabilidad. Un adecuado rechazo de las perturbaciones en las frecuencias de interés está limitado por el ancho de banda y la estabilidad del sistema. Todos estos objetivos pueden resolverse simultáneamente con el adecuado modelado de la función sensibilidad. El estudio de los contornos representativos de las tolerancias impuestas sobre la sensibilidad en presencia de incertidumbre en el modelo, arrojarán la información suficiente sobre la dificultad de solución del conjunto de especificaciones robustas de control que deben satisfacerse simultáneamente.

Contenidos

5 La Sensibilidad 171

5.1 Generalidades 173

5.2 La Sensibilidad Clásica 176

5.2.1 Contornos Sin la Incertidumbre. Tipologías de Contornos..... 176

5.2.1.1 Tipología y Formulación de Contornos para Especificaciones $0 < \delta_2 < 1$.. 178

5.2.1.2 Tipología y Formulación de Contornos para Especificaciones $\delta_2 > 1$ 181

5.2.2 Influencia de la Incertidumbre..... 185

5.2.2.1 Influencia de la Incertidumbre en Fase 186

5.2.2.2 Influencia de la Incertidumbre en Magnitud..... 194

5.2.2.3 Conclusiones sobre la Influencia de la Incertidumbre 202

5.2.3 Influencia de la Especificación, $\delta_2(\omega)$ 217

5.2.3.1 Valor de Especificación en Contornos Tipo B ($0 < \delta_2 < 1$) 219

5.2.3.2 Valor de Especificación en Contornos Tipo A ($\delta_2 > 1$) 222

5.3 La Sensibilidad Incluida la Planta 227

5.3.1 Tipologías de Contornos sin la Incertidumbre..... 227

5.3.1.1 Tipología de Contornos para Especificaciones $\delta_3/p < 1$ 229

5.3.1.2 Tipología de Contornos para Especificaciones $\delta_3/p > 1$ 230

5.3.1.3 Transición de Tipología de Contornos ($\delta_3/p = 1$) sin Considerar la Incertidumbre..... 232

5.3.2 Influencia de la Incertidumbre del Modelo 233

5.3.2.1 Influencia de la incertidumbre en Ganancia, $\{p\}$ 234

5.3.2.2 Influencia de la Incertidumbre en Fase, $\{\theta\}$ 243

5.3.2.3 Conclusiones sobre la Influencia de la Incertidumbre 244

5.3.3 Influencia de la Especificación, δ_3 250

5.4 Solución al Problema de Control sobre la Sensibilidad 255

5.4.1 Algunas Conclusiones sobre los Contornos 256

5.4.2 Rechazo de Perturbaciones..... 258

5.4.3 Estabilidad..... 264

Índice de Figuras 266

5 LA SENSIBILIDAD

5.1 GENERALIDADES

En la Figura 2-1 se presentaba el esquema genérico de control realimentado. A partir de éste, las ecuaciones (3.4) y (3.5) definían la contribución a las señales: Y (salida del sistema) y U (esfuerzo de control), de las señales de entrada: D_1 (perturbación a la entrada), D_2 (perturbación a la salida), R (entrada de referencia) y N (ruido en el sensor). Si a las posibles funciones de transferencia entre las salidas y entradas en (3.4) y (3.5) se les impone unas tolerancias δ_k , quedan definidas las especificaciones robustas de comportamiento y estabilidad deseadas en QFT. En particular, ahora se analizan aquellas relaciones salida/entrada cuya función de transferencia responde a la función sensibilidad.

Tradicionalmente la sensibilidad de un sistema de realimentación, tal y como se definió en (2.7) $S=1/1+L$, representa la variación de su función de transferencia de lazo cerrado, ΔT , debido a la incertidumbre de la planta en lazo abierto, ΔP . Este concepto toma especial importancia en las técnicas robustas de control, que consideran la incertidumbre en el proceso de diseño.

De acuerdo a (3.4) y (3.5) supuesto $H=1$, la función de transferencia $S=1/1+L$ representa la relación entre la salida, Y , y las perturbaciones que la afectan, D_2 , es decir, Y/D_2 . Sin embargo, debido a los compromisos de la realimentación (en especial, a la relación $S+T=1$) toda tolerancia impuesta sobre $S=1/1+L$ condiciona también otras funciones de transferencia: la sensibilidad considerando el proceso, $S'=P/1+L$, la sensibilidad complementaria, $T=L/1+L$, y el esfuerzo de control $G/1+L$. Nótese que en todos ellos aparece la función de transferencia de lazo abierto, $L=GP$, seleccionada por QFT como la más adecuada para establecer los compromisos de realimentación que interrelacionan las funciones de transferencia anteriores (Horowitz, 1991). Tales condiciones sobre L se resumieron en la Sección 2.3.1 y en este capítulo se estudian sus contornos QFT a partir de las tolerancias de especificación sobre las funciones sensibilidad: $S=1/1+L$ y $S'=P/1+L$. Tales especificaciones robustas se definieron en (3.7) y (3.8) como:

$$|T_2(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+L(j\omega)} \right| = \left| \frac{Y(j\omega)}{D_2(j\omega)} \right| \leq \delta_2(\omega), \quad \omega \in \Omega_2$$

$$|T_3(j\omega)| = \left| \frac{P(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| = \left| \frac{Y(j\omega)}{D_1(j\omega)} \right| \leq \delta_3(\omega), \quad \omega \in \Omega_3$$

El rechazo de perturbaciones Y/D_1 e Y/D_2 es, después de garantizar la estabilidad, el objetivo más habitual del control realimentado. La mayoría de los procesos y sistemas industriales trabajan en un punto de operación o consigna, que es necesario mantener. Sin embargo, en el funcionamiento real existen multitud de fenómenos externos (perturbaciones), además del envejecimiento de los elementos del sistema y el desconocimiento parcial de su modelo real, que alejan al sistema de su punto de trabajo. Ello exige un cierto control y dado que la variabilidad de estos parámetros es a priori desconocida, la realimentación se hace imprescindible para mantener constante el punto de operación.

Ante la necesidad de un rechazo dinámicamente adecuado de las perturbaciones, S y S' deben ser lo suficientemente pequeñas ($0 < |S| \ll 1$) en las frecuencias de interés para la realimentación, $\Omega_2 = \{\omega_1 < \omega_2\}$ y $\Omega_3 = \{\omega_1 < \omega_3\}$. Sin embargo, en todo sistema práctico esto implica que existirá un pico de $|S| > 1$, en otras frecuencias. Esto se deriva de la Integral de Sensibilidad de Bode (Bode, 1945), incluso aunque el sistema no sea de fase mínima y no tenga polos inestables. La razón es que $|S|$ no puede tender a 1 en un intervalo infinito de frecuencias para cumplir $\int_0^\infty |S| = 0$, ya que el excesivo ancho de banda derivado amplificaría cualquier ruido, saturándose los actuadores.

Por todo ello, cuando existan problemas de perturbaciones, se emplearán especificaciones del tipo (3.7) y/o (3.8). En las bajas y medias frecuencias se tomarán $\delta_2 < 1$ y $\delta_3 < p$, consiguiéndose una correcta dinámica de atenuación de D_2 y/o D_1 .

Y en las frecuencias moderadamente altas la limitación del pico de sensibilidad, siempre mayor que 1 en un sistema práctico, aconseja la utilización de $\delta_2 > 1$ y/o $\delta_3 > p$, con δ_2 y/o δ_3 tan pequeños como se puedan. Restricciones de este tipo (limitando el pico de la función sensibilidad), deben aparecer en todo sistema de control realimentado, incluso aunque no existan problemas de perturbaciones. Si no fuera así y en el diseño de L se optara por una reducción demasiado rápida de $|L|$ con la frecuencia (evitar amplificación de ruidos), se producirían picos de $|S|$ que desestabilizarían el sistema (limitación de la pendiente $|L|$). O por el contrario, si se optara por una reducción de L demasiado lenta, el sistema, aunque muy estable, amplificaría enormemente los ruidos de alta frecuencia. Por ello, las tolerancias $\delta_2(\omega_i)$ y/o $\delta_3(\omega_i)$ deben ser modeladas convenientemente incluso en moderadamente altas frecuencias. Cuando tratan de limitar tan solo el pico máximo en $|S|$, representan condiciones de estabilidad y toman valores constantes, $\delta_2(\omega_i) = \delta_2$ y $\delta_3(\omega_i) = \delta_3$. El mismo efecto se conseguía con la especificación $|T| = |T_i| \leq \delta_i$ con $\delta_i > 1$, por lo que para garantizar estabilidad

robusta se puede optar por limitar la sensibilidad complementaria o la sensibilidad $|S|=|T_2|\leq\delta_2$.

En resumen, la limitación de la sensibilidad en (3.7), $|1/1+L|\leq\delta_2$, y en (3.8) $|P/1+L|\leq\delta_3$, básicamente condicionan la ganancia de lazo abierto $|L|=|GP|$ en dos sentidos: (a) garantizan una mínima $|L|$ en bajas y medias frecuencias para una dinámica adecuada de rechazo de perturbaciones; (b) limitan la pendiente máxima de modelado de L en sus frecuencias de cruce (estabilidad). Estas restricciones no deben considerarse como un problema aislado, $|S|=|T_{k=2,3}|\leq\delta_{k=2,3}$, sino que simultáneamente habrán de satisfacerse otros objetivos de control, $|T_{k=1,4,5}|\leq\delta_{k=1,4,5}$, en algunos casos contrapuestos ($k=1,4$).

Siguiendo la metodología QFT, este capítulo analiza el correcto modelado de L_0 , teniendo en cuenta su incertidumbre $\{L\}$, las limitación $\delta_{2,3}$ sobre $|S|$ y $|S'|$, y el resto de tolerancias que definen el problema global de control, $\delta_{1,4,5}$. Para ello, se estudiarán los contornos representativos que el sistema nominal $L_0=GP_0$ debe satisfacer. En el algoritmo de cálculo de dichos contornos, las curvas de restricción para L_0 se trazan a partir de los contornos o necesidades que debe suplir el controlador G (véase Sección 3.3). Por tanto, el problema se reduce al estudio de la influencia de la incertidumbre del sistema $\{P\}$ y del comportamiento deseado $\delta_{2,3}$, en los contornos para G o L_0 .

Los contornos para las especificaciones robustas sobre $S=1/1+L$ y $S'=P/1+L$ presentan cada cual sus peculiaridades, estudiadas por separado en las Secciones 5.2 y 5.3. En particular, las Secciones 5.2.1 y 5.3.1, analizarán las tipologías o formatos de los contornos para G sin considerar la incertidumbre: $g_1\angle\phi$ y/o $g_2\angle\phi$ (Pasos 8 a 9 en Algoritmo 3.1 de cálculo de contornos). A continuación, las Secciones 5.2.2 y 5.3.2, estudiarán la modificación de éstos, $g_{INF}\angle\phi$ y/o $g_{SUP}\angle\phi$ (Pasos 10 y 11 en Algoritmo 3.1) al considerar la incertidumbre en fase, o en ganancia, o conjuntamente ambas, en la plantilla \mathcal{SP} (ésta representa frecuencialmente sobre el NC la incertidumbre). Se demostrará también la equivalencia entre lo expresado por los contornos para el controlador G y para la ganancia de lazo abierto nominal L_0 , siendo estos últimos $l_{0INF}\angle\psi_0$ y/o $l_{0SUP}\angle\psi_0$ (Paso 12 del Algoritmo 3.1). Las Secciones 5.2.3 y 5.3.3 buscarán la influencia del valor de especificación, δ_2 y δ_3 respectivamente, en los contornos.

La Sección 5.4 discute los problemas en la síntesis del controlador que resuelve el problema de la sensibilidad en particular, y el resto de objetivos de control. Para ello, la Sección 5.4.1 resume algunas conclusiones a partir del análisis previo sobre los contornos. Y la Sección 5.4.2 y la Sección 5.4.3 ilustran las dificultades en el modelado de L_0 .

Como consecuencia del estudio en profundidad de los contornos, se advirtieron ciertos aspectos susceptibles de mejora en los algoritmos automáticos de cálculo de contornos que plantean Borghesani *et. al* (1994). Éstos se incluyen en las Secciones 5.2.2 y 5.3.2.

5.2 LA SENSIBILIDAD CLÁSICA

Esta sección analiza los contornos para G y L_0 derivados de una especificación robusta sobre la función de sensibilidad como describe (3.7):

$$|T_2(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+L(j\omega)} \right| = \left| \frac{Y(j\omega)}{D_2(j\omega)} \right| \leq \delta_2(\omega), \quad \omega \in \Omega_2$$

Primero la Sección 5.2.1 analiza los contornos simples (sin la incertidumbre), deduciéndose las tipologías de contornos representativas del problema (3.7). A continuación, se demostrará la contribución de la incertidumbre del modelo en los contornos (Sección 5.2.2). Y por último, la contribución de la tolerancia de especificación δ_2 se estudia en la Sección 5.2.3.

5.2.1 CONTORNOS SIN LA INCERTIDUMBRE. TIPOLOGÍAS DE CONTORNOS

Se trata de calcular los contornos $g_1 \angle \phi$ y/o $g_2 \angle \phi$ que el controlador $G(j\omega) = g \angle \phi$ ha de cumplir de manera que se satisfaga la desigualdad de especificación $|T_2| \leq \delta_2$ en (3.7). Para ello, se aplicarán los Pasos 8 y 9 del Algoritmo 3.1.

El Paso 8 resolvía una inecuación cuadrática que se particulariza en este caso como:

$$I_{\omega_i}^{k=2}(p, \theta, \delta_2, \phi) = p^2 \cdot g^2 + 2 \cdot p \cdot \cos(\phi + \theta) \cdot g + \left(1 - \frac{1}{\delta_2^2}\right) \geq 0 \quad (5.1)$$

donde, $p \angle \theta$ es una planta cualquiera de la plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$, $\delta_2 = \delta_2(\omega_i)$ es el valor de especificación a la frecuencia ω_i y $g \angle \phi$ la expresión polar del controlador en ω_i .

Resolviendo en g la ecuación cuadrática $I_{\omega_i}^2 = 0$ asociada a (5.1), se obtienen dos soluciones: g_1 (valor negativo de la raíz cuadrada) en (5.2a) y g_2 (valor positivo de la raíz cuadrada) en (5.2b):

$$g_{1,2} = \frac{1}{p} \left(-\cos(\phi + \theta) \mp \sqrt{\cos^2(\phi + \theta) - \left(1 - \frac{1}{\delta_2^2}\right)} \right) \quad (5.2 a,b)$$

Ahora, la inecuación (5.1) podría expresarse como:

$$I_{\omega_i}^{k=2}(p, \theta, \delta_2, \phi) = p^2 \cdot (g - g_1) \cdot (g - g_2) \geq 0 \quad (5.3)$$

El parámetro genérico a en (3.26), de cuyo signo dependía la tipología de contornos resultantes, se particulariza para el problema $k=2$ según (5.1) como:

$$a = p^2 \quad (5.4)$$

Como el módulo de la planta siempre toma valores positivos, se cumple que $a > 0$. Entonces, según lo expuesto en el Capítulo 3 (Sección 3.3.3) las tipologías de contornos asociadas a $|T_2| \leq \delta_2$ serán A y/o B. Como se demuestra a continuación, el valor de especificación condiciona el que aparezca una u otra tipología, A o B. Por ello, se estudiarán dos supuestos: cuando $0 < \delta_2 < 1$, que implica condiciones de atenuación entre la relación salida/entrada que define $|T_2|$, y cuando $\delta_2 > 1$, que indica tolerancias mayores que la unidad en la función de transferencia expresada por $|T_2|$. El primero de ellos ($0 < \delta_2 < 1$) se representará siempre con contornos monovaluados superiores o de tipología B, y el segundo ($\delta_2 > 1$) con contornos doblevaluados o de tipología A.

En las demostraciones siguientes, por motivos de simplicidad en la notación empleada, se definen las variables α y c como sigue:

$$\alpha = \left(1 - \frac{1}{\delta_2^2}\right) \quad (5.5)$$

$$c = \cos(\phi + \theta) \quad (5.6)$$

Y de acuerdo a las nuevas variables las soluciones g_{12} en (5.2a,b) se expresan como:

$$g_{12} = \frac{1}{p} \left(\underbrace{-c}_{i_1} \mp \sqrt{\underbrace{c^2 - \alpha}_{i_2}} \right) \quad (5.7a,b)$$

5.2.1.1 Tipología y Formulación de Contornos para Especificaciones $0 < \delta_2 < 1$

Para $0 < \delta_2(\omega) < 1$ y según se definió α en (5.5), se cumple que:

$$\alpha = \left(1 - \frac{1}{\delta_2^2}\right) < 0 \quad (5.8)$$

Y paralelamente a lo que se demostró para los contornos simples para $|T_1| \leq \delta_1$ cuando $0 < \delta_1(\omega) < 1$ (ver Capítulo 4, Sección 4.2.1), se cumplen también:

$$c^2 - \alpha > 0 \quad (5.9)$$

$$\sigma = \sqrt{c^2 - \alpha} \equiv \text{valor_real} \quad (5.10)$$

$$|\sqrt{c^2 - \alpha}| > |c| \quad (5.11)$$

Entonces, en la ecuación (5.7) se satisfacen las siguientes afirmaciones:

- (i) t_2 igual a σ en (5.10) es siempre real de acuerdo a (5.9), y positivo.
- (ii) $|t_2| > |t_1|$, según (5.11).
- (iii) t_1 es siempre real, y positivo cuando $c < 0$.
- (iv) t_1 es siempre real, y negativo cuando $c > 0$.
- (v) La solución g_2 en (5.7b) es proporcional a $t_1 + t_2$, es decir, $g_2 \triangleq t_1 + t_2$. Al cumplirse (i) $t_2 > 0$ y real y (ii) $|t_2| > |t_1|$, independientemente del signo de término real t_1 , la magnitud g_2 es siempre real y positiva.
- (vi) La solución g_1 en (5.7a) es proporcional a $t_1 - t_2$, es decir, $g_1 \triangleq t_1 - t_2$. Al cumplirse (i) $t_2 > 0$ y real, y (ii) $|t_2| > |t_1|$, independientemente del signo del término real t_1 , la magnitud g_1 es siempre real y negativa.

Como el módulo del controlador g sólo puede tomar valores reales y positivos, g_2 será la única restricción válida (contorno) para la ecuación $F_\omega(p, \theta, \delta_2, \phi) = 0$ asociada a (5.3). Y siendo $p^2 > 0$, para satisfacer la inecuación (5.3) se debe cumplir: $g \geq g_2$.

Se ha demostrado que para la especificación $|T_2(j\omega)| \leq \delta_2(j\omega)$, la curva $g_2 \angle \phi$ es el único contorno real y positivo para g en todo $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, independientemente de la incertidumbre expresada con $\mathcal{S}P(j\omega) = \{p \angle \theta\}$ cuando $0 < \delta_2 < 1$. Dicho contorno se clasifica como un contorno monovaluado superior o de tipología B, $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$ (véase Sección 3.3.3).

A continuación se definen los parámetros más importantes del contorno simple (sin considerar la incertidumbre del modelo) monovaluado superior. Se definirán dos intervalos de fases en $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. El rango $\Phi_2 = [-270^\circ - \theta, -90^\circ - \theta]$, y su complementario $\bar{\Phi}_2 = \{[-360^\circ, -270^\circ] - \theta \cup [-90^\circ, 0^\circ] - \theta\}$.

(vii) La variación de t_2 (siempre $t_2 \geq 0$ y real) respecto a $\phi + \theta$, es proporcional a la variación de $c^2 = \cos^2(\phi + \theta)$.

(viii) La variación del término real t_1 es proporcional a $c = \cos(\phi + \theta)$.

(ix) Según (v) $g_2 \triangleq t_1 + t_2$, además de ser real y positivo. Y como según (i) $t_2 \geq 0$, entonces $g_2 \triangleq t_1 + |t_2|$. En $\phi \in \Phi_2$ al ser $c \leq 0$, resulta $t_1 \geq 0$ según (iii). Luego, $g_2 \triangleq |t_1| + |t_2|$. Al sumarse los dos términos positivos $|t_1|$ y $|t_2|$, en Φ_2 se darán los valores máximos de g_2 . Considerando (vii) y (viii), la función g_2 tomará su valor máximo en $\phi = -180^\circ - \theta$ (fase que definirá el eje vertical del contorno) decreciendo hacia ambos extremos del intervalo Φ_2 (véase la Figura 5-1). Sustituyendo en (5.2b) se obtienen los parámetros característicos del punto de máximo del contorno:

$$\boxed{\max g_2 = \frac{1 + \delta_2}{p \delta_2}, \quad \phi_{\max g_2} = -180^\circ - \theta} \quad (5.12)$$

(x) En $\phi \in \bar{\Phi}_2$, se tiene $c \geq 0$ y según (iv) $t_1 \leq 0$. Luego, $g_2 \triangleq |t_2| - |t_1|$. Al contribuir los dos términos de manera contrapuesta en g_2 , en el intervalo de fases $\bar{\Phi}_2$ se obtendrán magnitudes g_2 menores que en el intervalo Φ_2 , pero siempre positivas y reales según (v). Teniendo en cuenta (vii) y (viii), la función g_2 será estrictamente decreciente desde $-90^\circ - \theta$ hacia $0^\circ - \theta$, y simétricamente respecto al eje vertical $-180^\circ - \theta$, desde $-270^\circ - \theta$ a $-360^\circ - \theta$, (véase la Figura 5-1). Entonces, en $\phi = 0^\circ - \theta$ (y simétricamente en $\phi = -360^\circ - \theta$) el contorno simple alcanza su mínimo absoluto:

$$\boxed{\min g_2 = \frac{1 - \delta_2}{p \delta_2}, \quad \phi_{\min g_2} = 0^\circ - \theta, \quad -360^\circ - \theta} \quad (5.13)$$

(xi) Considerando (ix) y (x) en $\phi = -90^\circ - \theta$ (y simétricamente en $\phi = -270^\circ - \theta$) se produce un cambio del signo de la pendiente del contorno, es decir, son puntos de inflexión (véase Figura 5-1).

$$\boxed{\text{inflx } g_2 = \frac{+\sqrt{1 - \delta_2^2}}{p \delta_2}, \quad \phi_{\text{inflx } g_2} = -90^\circ - \theta, \quad -270^\circ - \theta} \quad (5.14)$$

Nótese que los puntos de máximo y mínimo son puntos de mínima (nula) sensibilidad de g_2 a variaciones en ϕ , mientras que el punto de inflexión es un punto de máxima sensibilidad.

(xii) Se definirá un eje vertical del contorno, ϕ_{v2} , que coincide con su fase de máxima ganancia, ϕ_{maxg2} . Y también un eje horizontal, g_{h2} , que coincide con la altura del punto de inflexión, $inflex\ g_2$.

$$\boxed{\phi_{v2} = -180^\circ - \theta} \quad (5.15)$$

$$\boxed{g_{h2} = \frac{+\sqrt{1-\delta_2^2}}{p\delta_2}} \quad (5.16)$$

Los parámetros característicos de un contorno tipo B sin la incertidumbre $g_2 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, introducidos ya en la Sección 3.3.3 (Figura 3-9), se han particularizado en (ix) a (xii) para el problema $|T_2(j\omega)| \leq \delta_2(j\omega)$ y se ilustran en la Figura 5-1. Por motivos de simplicidad se ha tomado $p=1$ y $\theta=0^\circ$. El valor de especificación en el intervalo $[0, 1]$, se toma $\delta_2=0.01$. Aplicando (5.12) resulta $max-g_2=101(40.08\text{dB})$, $\phi_{maxg2}=-180^\circ$. Según (5.13): $min-g_2=99(39.91\text{dB})$, $\phi_{ming2}=0^\circ$ y -360° . Y de acuerdo a (5.14): $inflex-g_2=100(40\text{dB})$, $\phi_{inflexg2}=-90^\circ$ y -270° . Los ejes vertical y horizontal resultan, $\phi_{v2}=-180^\circ$ y $g_{h2}=100(40\text{dB})$.

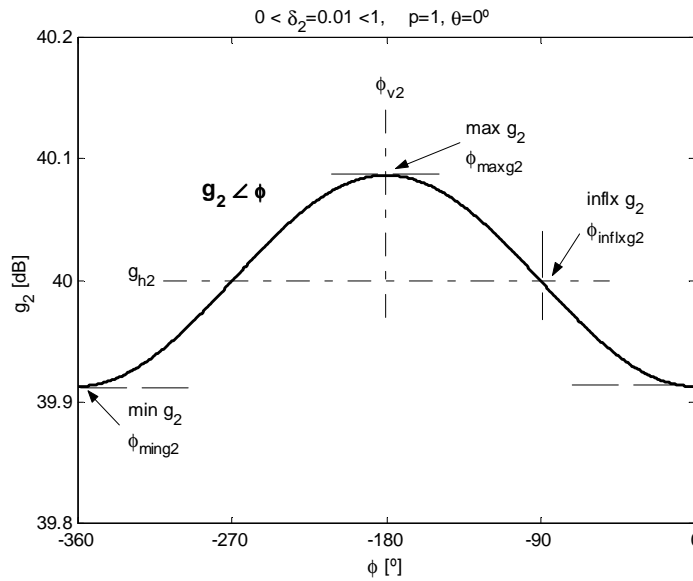


Figura 5-1: Contorno de tipología B sin la incertidumbre, $g_2 \angle \phi$, para $0 < \delta_2(\omega) < 1$

Resumiendo se puede enunciar la siguiente conclusión:

Conclusión sobre los contornos sin considerar la incertidumbre que limitan la sensibilidad, $|T_2|=1/|1+L|$, con tolerancias de atenuación, $\delta_2 < 1$

En las frecuencias ω donde $0 < \delta_2(\omega) < 1$, para las J plantas $p \angle \theta$ de la plantilla ω , siempre existe un g_2 real y positivo, en todo $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, lo que da lugar a un contorno simple mono-valuado, $g_2 \angle \phi$, de tipología B cuya magnitud se define en (5.2b). Esta curva de restricción debe ser satisfecha por $G(j\omega)$ tal que $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$, con el fin cumplir la especificación $|T_2(j\omega)| \leq \delta_2(\omega)$. Dicho contorno: (a) alcanza su máximo según (5.12), *max-g₂*, sobre el que se define el eje vertical del contorno, en $\phi_{v2} = -180^\circ - \theta$, (b) es estrictamente decreciente hacia los extremos del intervalo $[-360^\circ - \theta, 0^\circ - \theta]$, donde alcanza su magnitud mínima, *min-g₂*, según (5.13); (c) presenta dos puntos de inflexión según (5.14) o de sensibilidad máxima a variaciones de ϕ en las dos fases de corte ($-90^\circ - \theta$ y $-270^\circ - \theta$) con su eje horizontal g_{h2} en (5.16). Véase la Figura 5-1.

5.2.1.2 Tipología y Formulación de Contornos para Especificaciones $\delta_2 > 1$

Las tolerancias $\delta_2 > 1$ son el precio pagado en medias frecuencias por una reducción de sensibilidad $|S| \leq \delta_2$ con $0 < \delta_2 < 1$ en bajas frecuencias. Formalmente las especificaciones $|S| \leq \delta_2$ con $\delta_2 > 1$ se expresan mediante contornos de tipología A, paralelamente al caso $|T| \leq \delta_1$ con $\delta_1 > 1$ descrito en el Capítulo 4. Por ello, en esta sección tan sólo se resumen brevemente las conclusiones aplicables ahora al caso $|S| \leq \delta_2$ con $\delta_2 > 1$.

Se transcribe de nuevo la ecuación (5.7a,b):

$$g_{1,2} = \frac{1}{p} \left(\underbrace{-c}_{t_1} \mp \sqrt{\underbrace{c^2 - \alpha}_{t_2}} \right)$$

Comparando en (5.7) los términos t_1 y t_2 con los de (4.7) para $\delta_1 > 1$ (Sección 4.2) difieren tan sólo en que no aparece el término α en sus denominadores. Como $\alpha > 0$, las afirmaciones cualitativas referentes a los contornos para $\delta_1 > 1$ siguen siendo válidas ahora para $\delta_2 > 1$. El estudio cualitativo de la influencia modular y angular también será el mismo, ya que α en (5.5) no depende de p ni de θ . Como en α interviene tan sólo la especificación δ_2 , únicamente en el estudio sobre la tolerancia de especificación (Sección 5.3.3) se particularizarán las demostraciones.

Entonces, paralelamente a las ecuaciones para $\delta_1 > 1$ (Sección 4.2.2), ahora para $\delta_2 > 1$ en (5.7a,b) son ciertas:

$$0 < \alpha = \left(1 - \frac{1}{\delta_2^2}\right) < 1 \quad (5.17)$$

$$\sigma = \sqrt{c^2 - \alpha} \quad (5.18)$$

y σ toma valores reales en las fases donde:

$$\alpha < c^2 < 1 \quad (5.19)$$

Y para plantillas $\Im P(j\omega)$ de incertidumbre conectada, (5.19) se cumple para cualquier valor finito de δ_2 ,

$$\alpha = \left(1 - \frac{1}{\delta_2^2}\right) < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\delta_2^2} \Rightarrow \delta_2 \neq \infty \quad (5.20)$$

También se cumple,

$$|c| > \left|\sqrt{c^2 - \alpha}\right| \quad (5.21)$$

Y extendiendo las afirmaciones para $\delta_1 > 1$ en la Sección 4.2.2, ahora para $\delta_2 > 1$ en (4.7) se cumple:

(i) g_{12} son reales y positivas en $\phi \in \Phi_{12}$, $\Phi_{12} = [-180^\circ + \theta \mp \varepsilon]$. En $\phi \in \bar{\Phi}_{12}$, g_{12} son ambas complejas o negativas.

(ii) En $\phi \in \Phi_{12}$, t_1 es real y positivo.

(iii) En $\phi \in \Phi_{12}$, t_2 es real y positivo

(iv) En $\phi \in \Phi_{12}$, $|t_1| > |t_2|$, o simplemente $t_1 > t_2$, según (ii) y (iii).

(v) En $\phi \in \Phi_{12}$, $g_1 \triangleq |t_1| - |t_2|$, o simplemente $g_1 \triangleq t_1 - t_2$

(vi) En $\phi \in \Phi_{12}$, $g_2 \triangleq |t_1| + |t_2|$, o simplemente $g_2 \triangleq t_1 + t_2$

(vii) En $\phi \in \Phi_{12}$, $g_2 > g_1$, según (v) y (vi).

(viii) Como $t_1 > 0$ según (ii), en $\phi \in \Phi_{12}$ la variación de t_1 con la fase $\phi + \theta$ es proporcional a la variación de $|c| = |\cos(\phi + \theta)|$.

(ix) En $\phi \in \Phi_{12}$, la variación de t_2 respecto a $\phi + \theta$ es proporcional también a la variación de $|c| = |\cos(\phi + \theta)|$.

El intervalo Φ_{12} , donde existen soluciones reales y positivas g_{12} , tiene una amplitud 2ε y se define según:

$$\boxed{\varepsilon = \arccos \frac{\sqrt{\delta_2^2 - 1}}{\delta_2} [rad], \quad 0 \leq \varepsilon \leq 90^\circ} \quad (5.22)$$

$$\Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon] \tag{5.23}$$

Nótese según (5.22) que la amplitud del intervalo angular Φ_{12} donde existen contornos simples $g_{12} < \phi$, es decir 2ε , depende exclusivamente del valor de especificación δ_2 , cuando $\delta_2 > 1$.

Luego si $\delta_2(\omega) > 1$, la curva $g_{12} < \phi$, $\phi \in \Phi = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, es un contorno simple doblevaluado (véase Sección 3.3.3) de tipología A, con g_{12} en (5.2) y ε en (5.22), independientemente de la incertidumbre expresada con $\{p\}$, $\{\theta\}$. Véase Figura 5-2.

Y paralelamente a los parámetros definidos para el caso $\delta_j > 1$, se calcularán ahora los parámetros para $\delta_2 > 1$. De acuerdo a la variación de la función coseno en función del ángulo y su contribución a los términos t_1 y t_2 según (viii) y (ix), y considerando la integración de estos términos en g_{12} según (v) y (vi), se puede concluir (véase Figura 5-2):

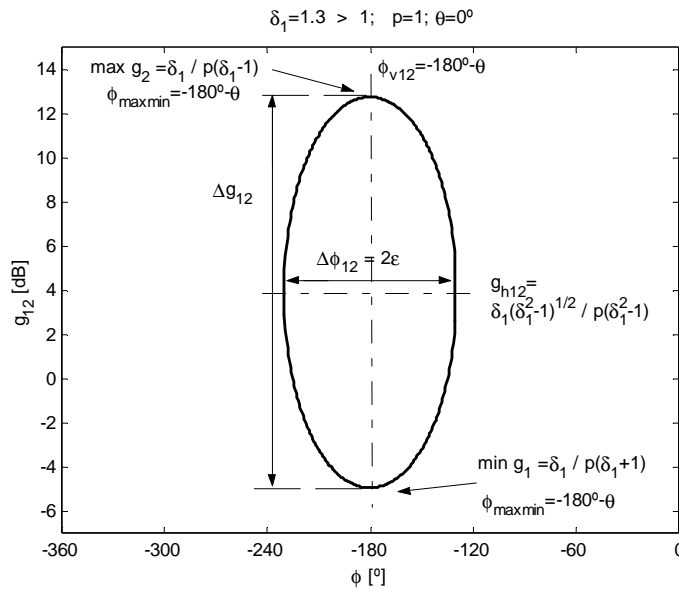


Figura 5-2: Contorno de tipología A sin la incertidumbre, $g_{12} < \phi$, para $\delta_2(\omega) > 1$

(x) g_1 toma su valor mínimo en $\phi = -180^\circ + \theta$ y aumenta hacia los extremos del intervalo $\Phi = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, ε en (5.22). Sustituyendo en (5.2a) se define:

$$\min g_1 = \frac{(\delta_2 - 1)}{p\delta_2}, \quad \phi_{\max\min} = -180^\circ - \theta \tag{5.24}$$

(xi) g_2 toma su valor máximo en $\phi = -180^\circ + \theta$ y disminuye hacia los extremos del intervalo $\Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, ε en (5.22). Sustituyendo en (5.2b) se define:

$$\boxed{\max g_2 = \frac{(\delta_2 + 1)}{p\delta_2}, \quad \phi_{\max\min} = -180^\circ - \theta} \quad (5.25)$$

(xii) Considerando (x) y (xi), se define el eje vertical del contorno que pasa por los puntos de máximo y mínimo:

$$\boxed{\phi_{v12} = -180^\circ - \theta} \quad (5.26)$$

(xiii) El eje horizontal que separa la solución $g_1 \angle \phi$ de $g_2 \angle \phi$ se calcula cuando los términos $c = \cos(\phi + \theta)$ en (5.2) no aportan amplitud, es decir $c = 0$. Sustituyendo, se define:

$$\boxed{g_{h12} = \frac{+\sqrt{\delta_2^2 - 1}}{p\delta_2}} \quad (5.27)$$

La Figura 5-2 ilustra los resultados anteriores. Se tomó $p = 0.01$, $\theta = -90^\circ$, y $\delta_2 = 1.3$. Los parámetros característicos del contorno simple doblevaluado $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$ resultan: $\min-g_1 = 23.1$ (27.3dB) según (5.24) y $\max-g_2 = 177$ (45dB) según (5.25), en $\phi_{\max\min} = -90^\circ$; $g_{h12} = 63.9$ (36dB) según (5.26); $\Delta\phi_{12} = 2\varepsilon = 100^\circ$ según (5.22) y (5.23); $\Delta g_{12} = 17.7$ dB.

Finalmente, se puede enunciar la siguiente conclusión:

Conclusión sobre los contornos sin la incertidumbre que expresan la limitación de la sensibilidad, $|T_2| = |1/I+L|$, con tolerancias $\delta_2 > 1$

Para la especificación robusta $|T_2(j\omega)| \leq \delta_2(\omega)$, en las frecuencias ω donde $\delta_2(\omega) > 1$, para las J plantas $p \angle \theta$ de la plantilla ω , siempre existe alguna solución g_1 y g_2 real, positiva, $g_2 > g_1$, definidas en (5.2), para todo $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, ε definido en (5.22). Esto da lugar a un contorno simple doble-valuado $g_{12} \angle \phi$ de tipología A que debe ser satisfecho por $G(j\omega)$ tal que: $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$ y $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$. Las características de dicho contorno son: (a) la curva inferior $g_1 \angle \phi$ se hace mínima, $\min-g_1$, según (5.24) y la curva superior $g_2 \angle \phi$ alcanza su máximo, $\max-g_2$, según (5.25), ambas en la fase $\phi_{v12} = -180^\circ - \theta$ (eje vertical del contorno); (b) a partir de dicho eje, ϕ_{v12} , la curva $g_1 \angle \phi$ es estrictamente creciente y la curva $g_2 \angle \phi$ estrictamente decreciente, ambas hacia los extremos del intervalo Φ_{12} en (5.23); (c) existe un eje de simetría horizontal g_{h12} definido en (5.27) que separa ambas curvas superior e inferior. (Véase Figura 5-2).

5.2.2 INFLUENCIA DE LA INCERTIDUMBRE

Como se describe en la sección anterior, los Pasos 8 y 9 del Algoritmo 3.1 resuelven la inecuación en (5.1):

$$I_{\omega_i}^2(p, \theta, \delta_2, \phi) = p^2 \cdot g^2 + 2 \cdot p \cdot \cos(\phi + \theta) \cdot g + \left(1 - \frac{1}{\delta_2^2}\right) \geq 0,$$

para un valor de especificación $\delta_2 = \delta_2(\omega_i)$ y una única planta $p \angle \theta \in \mathfrak{S}P(j\omega_i)$, por tanto, para el sistema sin incertidumbre. De ella resultan contornos para $G = g \angle \phi$: (i) monovaluados superiores (tipología B), $g_2 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, cuando $0 < \delta_2(\omega_i) < 1$, tal que se debe cumplir $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$, y (ii) contornos doblevaluados (tipología A), $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, para $\delta_2(\omega_i) > 1$, debiéndose satisfacer $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$ y $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$, (véase Sección 5.2.1).

Considerando ahora la incertidumbre, es decir el conjunto de plantas $\{p \angle \theta\}$ en $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$, el Paso 10 del Algoritmo 3.1 resuelve (5.1) para cada una de ellas resultando: (i) $\{g_2 \angle \phi\}$ si $0 < \delta_2(\omega_i) < 1$, y (ii) $\{g_{12} \angle \phi\}$ si $\delta_2(\omega_i) > 1$. Luego, **debido a la incertidumbre no se mezclan tipologías simples B y A de contornos, sino que en función del valor constante $\delta_2(\omega_i)$ el contorno simple en ω_i que representa a la especificación $|T_2(j\omega_i)| \leq \delta_2(\omega_i)$ en (3.6) será o bien B, o bien A.** Calculados los contornos simples para todas las plantas, el Paso 11 del algoritmo calcula el contorno intersección para G en ω_i :

(i) $g_{SUP} \angle \phi$ según (3.36), $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, si $0 < \delta_2(\omega_i) < 1$; (tipología B de contornos)

(ii) $g_{INF} \angle \phi$ según (3.35) y $g_{SUP} \angle \phi$ según (3.36), $\phi \in \Phi_{INF SUP} \subseteq [-360^\circ, 0^\circ]$ si $\delta_2(\omega_i) > 1$; (tipología A de contornos).

$$g_{INF} \angle \phi = \min\{g_{inf} \angle \phi\}_{r=1, \dots, J} = \min\{g_1 \angle \phi\}_{r=1, \dots, J} \quad (3.35)$$

$$g_{SUP} \angle \phi = \max\{g_{sup} \angle \phi\}_{r=1, \dots, J} = \max\{g_2 \angle \phi\}_{r=1, \dots, J} \quad (3.36)$$

El objetivo de esta Sección 5.2.2 será determinar qué plantas $p \angle \theta$ son críticas en $\mathfrak{S}P(j\omega_i) = \{p \angle \theta\}$, es decir, aquellas que determinan en cada ϕ la mayor magnitud g_2 según (3.36) para tipologías B de contornos simples, y la menor magnitud g_1 y mayor g_2 según (3.35) y (3.36) para tipologías A. Las magnitudes g_1 y g_2 se definían en (5.2). Para una mejor comprensión del problema, este se desglosa en dos. Primero se estudiarán plantillas con sólo incertidumbre en fase, $\mathfrak{S}P(j\omega_i) = p_{cte} \angle \{\theta\}$, en la Sección 5.2.2.1. A continuación la Sección 5.2.2.2 analiza la contribución de la incertidumbre en magnitud, utilizando plantillas $\mathfrak{S}P(j\omega_i) = \{p\} \angle \theta_{cte}$. Y finalmente, las conclusiones se extienden a plantillas genéricas con incertidumbre horizontal

y vertical, $\Im P(j\omega)=\{p\angle\theta\}$, en la Sección 5.2.2.3. Como el estudio es paralelo al realizado para el problema $|T_1|<\delta_1$ en el Capítulo 4 (Sección 4.3), ahora se enumerarán directamente las conclusiones principales para $|T_2|<\delta_2$.

5.2.2.1 Influencia de la Incertidumbre en Fase

Influencia de la Fase de la Planta (θ)

Observando g_{12} en (5.2), el parámetro θ se integra exclusivamente en los términos coseno, por lo que su influencia en los contornos se puede resumir como sigue:

La fase de la planta, θ , traslada horizontalmente las magnitudes g_2 o g_{12} en cada ϕ del intervalo de diseño $[-360^\circ, 0^\circ]$ un ángulo $-\theta$. Por tanto, los mínimos, máximos, puntos de inflexión, fases de existencia (sólo en tipologías A) y ejes de simetría quedan desplazados la misma cantidad, $-\theta$. Luego la fase de la planta θ , no modifica la forma de los contornos de tipología B o A sino sólo su posición angular (véase la Figura 5-3). Por consiguiente, varía la posición relativa entre el contorno para G y el punto de referencia $1\angle 0^\circ$ (0db $\angle 0^\circ$), y por tanto, cambian la agresividad o las necesidades de control que éste expresa. Para aquellas magnitudes g_1 y/o g_2 cuyos $\phi+\theta$ resulten mayores que 0° en el desplazamiento, se calculará el complemento a -360° de su fase.

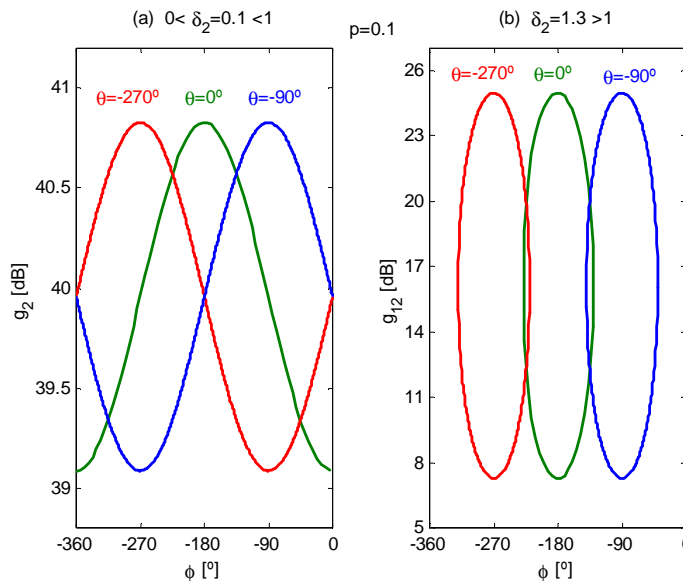


Figura 5-3: Influencia de la fase θ en contornos simples de (a) tipología B (b) tipología A

Todos estos resultados se ilustran en la Figura 5-3. El gráfico (a) representa una tipología de contornos A (simplevaluados superiores) simples, $g_2 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, para plantas con el mismo módulo $p=0.1$ y distinta fase $\theta = \{-270^\circ, -90^\circ, 0^\circ\}$, siendo el valor de especificación constante $0 < \delta_2 = 0.1 < 1$. En el gráfico (b) se muestra la influencia de θ en contornos tipo A (doblevuados) simples, $g_{12} \angle \phi$, siendo $\delta_2 = 1.3 > 1$ y constante. Nótese también la variación en la posición relativa de los contornos para G respecto al punto de partida o control unitario, $0 \text{ db} \angle 0^\circ$.

Contornos Intersección Tipo B ($0 < \delta_2 < 1$) para Incertidumbre Sólo en Fase

Para contornos sobre G de tipo B ($0 < \delta_2 < 1$) se trata de calcular según (3.36) $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, seleccionando la máxima magnitud g_2 en cada ϕ , de entre las $\{g_2 \angle \phi\}$ calculadas para cada $p \angle \theta$ en $\mathcal{P}(j\omega)$. Se asume que la plantilla sólo contiene incertidumbre horizontal, y por tanto, $\mathcal{P}(j\omega) = p_{cte} \angle \{\theta\}$. Posteriormente, se calculan los contornos en $L_0, l_{0INF} \angle \psi_0$, $\psi_0 \in [-360^\circ, 0^\circ]$. Las principales conclusiones se enumeran y describen a continuación, ilustrándose a través de gráficos.

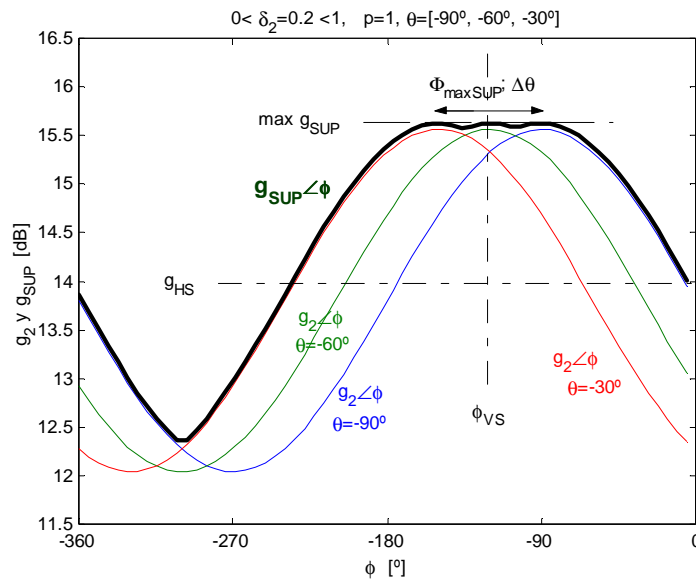


Figura 5-4: Contorno intersección tipo B ($\delta_2 < 1$) en plantillas con sólo incertidumbre en fase

- (i) El contorno intersección $g_{SUP} \angle \phi$ se hace máximo, $max-g_{SUP}$, en un intervalo de fases $\phi \in \Phi_{max_SUP}$. Estos puntos de máximo quedan determinados por los puntos máximos de las curvas $\{g_2 \angle \phi\}$ calculadas

para todas las plantas de la plantilla con incertidumbre vertical nula, $\mathfrak{S}P=p_{cte}\angle\{\theta\}$. Esta forma de proceder supone un error proporcional al tamaño de discretización en la incertidumbre continua $\{\theta\}$, cometido por todos los algoritmos de cálculo automático de contornos QFT desarrollados hasta el momento. Véase, por ejemplo, el más extendido en Borghesani *et al.* (1994). Para evitar el error de discretización, bastaría calcular el valor máximo de cualquier $g_2\angle\phi$, $max-g_2$, según (5.12), siendo este el valor también máximo y constante de $g_{SUP}\angle\phi$ en $\phi\in\Phi_{max_SUP}$. El intervalo de máximos ocupa una amplitud absoluta de fases igual al tamaño de incertidumbre horizontal de la plantilla, $\Delta\theta=|\theta_{min}-\theta_{max}|$ según (3.19), y se centra en ϕ_{VS} . Todo esto se ilustra en la Figura 5-4 y se resume como:

$$\boxed{max\ g_{SUP} = max\ g_2 = \frac{1 + \delta_2}{p\ \delta_2}, \ \phi \in \Phi_{max_SUP} = \left[\phi_{VS} \mp \frac{\Delta\theta}{2} \right]} \quad (5.28)$$

En el intervalo de máximos, Φ_{max_SUP} , las dos soluciones de los extremos $g_2\angle\phi$ corresponden a $p\angle\theta_{min}$ y $p\angle\theta_{max}$. Luego el eje de vertical del contorno ϕ_{VS} se define:

$$\boxed{\phi_{VS} = -180^\circ - \left(\frac{\theta_{min} + \theta_{max}}{2} \right)} \quad (5.29)$$

(ii) El contorno intersección $g_{SUP}\angle\phi$ en el resto de fases, $\phi\in\overline{\Phi_{max_SUP}}$, queda determinado por las soluciones $g_2\angle\phi$ de las plantas extremas en la plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega)$ horizontal, $p\angle\theta_{min}$ y $p\angle\theta_{max}$; (véase la Figura 5-4). Como no existe desplazamiento vertical, los puntos de inflexión de dichas soluciones, según (5.14), determinan el eje de simetría horizontal que pasa por los puntos de inflexión del contorno intersección $g_{SUP}\angle\phi$, definido como sigue:

$$g_{HS} = inflex\ g_{SUP} = g_{h2} = inflex\ g_2 = \frac{+\sqrt{1-\delta_2^2}}{p\ \delta_2} \quad (5.30)$$

Luego el contorno intersección de tipología B para el controlador, $g_{SUP}\angle\phi$, $\phi\in\Phi=[-360^\circ, 0^\circ]$, dada una plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega)=p_{cte}\angle\{\theta\}$ y una especificación $\delta_2(\omega)$, se puede determinar de la forma indicada en (i) e (ii), a partir de tan sólo las dos soluciones discretas, $\{g_2\angle\phi\}$, correspondientes a las plantas de los extremos de la plantilla, $p\angle\theta_{max}$ y $p\angle\theta_{min}$. Estas conclusiones se ilustran en la Figura 5-4 donde se muestra la

superposición de contornos $\{g_2 \angle \phi\}$ para el conjunto discreto de plantas $\{p=1, \theta=\{-90^\circ, -60^\circ, -30^\circ\}\}$, y el $g_{SUP} \angle \phi$ resultante. Los parámetros característicos son: $\theta_{min}=-90^\circ$ según (3.16), $\theta_{max}=-30^\circ$ según (3.17), $\Delta\theta=60^\circ$ según (3.19); y aplicando (5.28) y (5.29): $max-g_{SUP}=6$ (15.6dB), $\Phi_{max_SUP}=[-120^\circ \mp 30^\circ]=[-150^\circ, -30^\circ]$, $\phi_{VS}=-120^\circ$; finalmente según (5.30) $g_{HS}=5$ (14dB).

(iii) **Cuanto mayor sea el tamaño de la incertidumbre**, en este caso **horizontal** e igual a $\Delta\theta$, **más agresivo** en altura será el **contorno**, ya que el intervalo de máximos Φ_{max_SUP} en (5.28) aumenta. En el caso más desfavorable Φ_{max_SUP} podría ocupar todo el intervalo de diseño, $[-360^\circ, 0^\circ]$, si $\Delta\theta=360^\circ$. En la Figura 5-5 se ilustran estas conclusiones para $\Delta\theta=10^\circ, \Delta\theta=90^\circ$ y $\Delta\theta=360^\circ$.

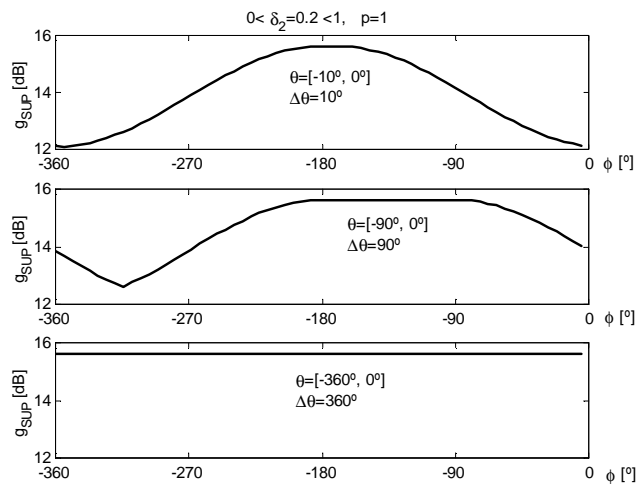


Figura 5-5: Influencia del tamaño de incertidumbre en fase, $\Delta\theta$, en contornos B ($\delta_2 < 1$)

(iv) La posición relativa de los valores $\{\theta\}$, aun definiendo el **mismo tamaño de incertidumbre horizontal** (igual $\Delta\theta$), implica una ubicación diferente del contorno para G respecto al punto de referencia $0db \angle 0^\circ$ ($G=1$), es decir, muestra unas necesidades distintas de actuación. La Figura 5-6 ilustra esta conclusión para dos sistemas con $\Delta\theta=45^\circ=cte$. En el gráfico de ‘trazo rojo’ será necesario añadir un $G=g \angle \phi > 1 \angle 0^\circ$, mientras que para el gráfico de ‘trazo azul’ se cumple la especificación sin necesidad de añadir ganancia, polos o ceros ($G=1$).

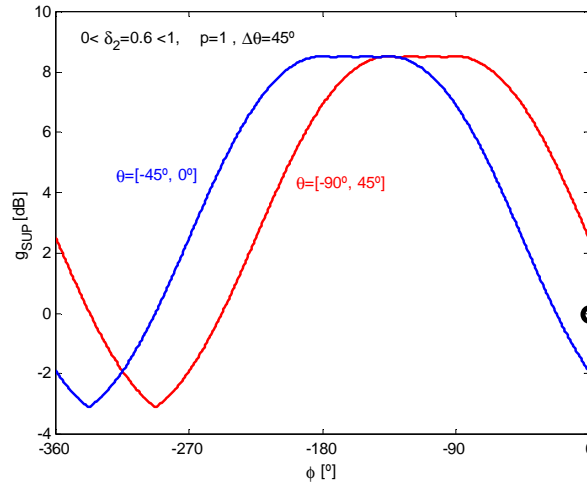


Figura 5-6: Influencia de la fase θ en la agresividad de los contornos B ($\delta_2 < 1$)

(v) Como se demostró en la Sección 3.3.5 los contornos para L_0 expresan lo mismo que los contornos para G . No sólo se traslada $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$ una cantidad $p_0 \angle \theta_0$ para obtener $l_{0SUP} \angle \psi_0$, $\psi_0 \in [-360^\circ, 0^\circ]$, sino que también el punto de referencia se desplaza la misma cantidad, pasando de ser $0\text{dB} \angle 0^\circ$ a $p_0\text{dB} \angle \theta_0$. Siguiendo este mismo razonamiento, la selección de la planta nominal en el intervalo de incertidumbre no modifica la información expresada por el contorno para L_0 resultante. Véanse los ejemplos gráficos en la Sección 5.2.2.3 y, en particular, la Figura 5-20.

Contornos Intersección Tipo A ($\delta_2 > 1$) para Incertidumbre Sólo en Fase

Ahora se trata de determinar los contornos intersección de tipo A $g_{INF} \angle \phi$ y $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} \subseteq [-360^\circ, 0^\circ]$ para $\delta_2 > 1$. Calculados los contornos simples $\{g_{I2} \angle \phi, \phi \in \Phi_{I2} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]\}$ para el conjunto de plantas $\mathfrak{S}P(j\omega_k) = p_{cle} \angle \{\theta\}$, ahora se seleccionará la mínima magnitud g_I según (3.35) y la máxima g_2 según (3.36) en cada $\phi \in \Phi_{IS}$, que darán g_{INF} y g_{SUP} , respectivamente. Las magnitudes g_{I2} se definen en (5.2) y su intervalo angular de existencia ε en (5.22). Nótese que el intervalo de existencia de las soluciones sin incertidumbre, Φ_{I2} , es distinto que cuando se considera ésta, Φ_{IS} (definido posteriormente). El procedimiento utilizado es paralelo al del supuesto $\delta_1 > 1$ estudiado en la Sección 4.3.1.3 del Capítulo 4. Los resultados se resumen a continuación.

(i) g_{INF} se hace mínima y g_{SUP} máxima en el conjunto de fases Φ_{min_max} , donde cada $g_1 \angle \phi$ y $g_2 \angle \phi$ (calculadas para $\mathfrak{S}P=p \angle \{\theta\}$) se hacían mínima y máxima, respectivamente, según (5.24) y (5.25). El intervalo Φ_{min_max} tiene una amplitud $\Delta\theta$ y se centra en la fase ϕ_{VIS} , tomada esta última como eje vertical de los contornos $g_{INF_SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS}$. Véase la Figura 5-7.

$$\min g_{INF} = \min g_1 = \frac{(\delta_2 - 1)}{p \delta_2}, \phi \in \Phi_{minmax} = \left[\phi_{VIS} \mp \frac{\Delta\theta}{2} \right] \quad (5.31)$$

$$\max g_{SUP} = \max g_2 = \frac{(\delta_2 + 1)}{p \delta_2}, \phi \in \Phi_{minmax} = \left[\phi_{VIS} \mp \frac{\Delta\theta}{2} \right] \quad (5.32)$$

$$\phi_{VIS} = -180^\circ - \left(\frac{\theta_{min} + \theta_{max}}{2} \right) \quad (5.33)$$

(ii) Los contornos intersección $g_{INF} \angle \phi$ y $g_{SUP} \angle \phi$ en el resto de fases, $\phi \in \overline{\Phi}_{minmax}$, coinciden con los contornos simples $g_{12} \angle \phi$ de las plantas extremas en la plantilla $p \angle \theta_{max}$ y $p \angle \theta_{min}$. Véase Figura 5-7.

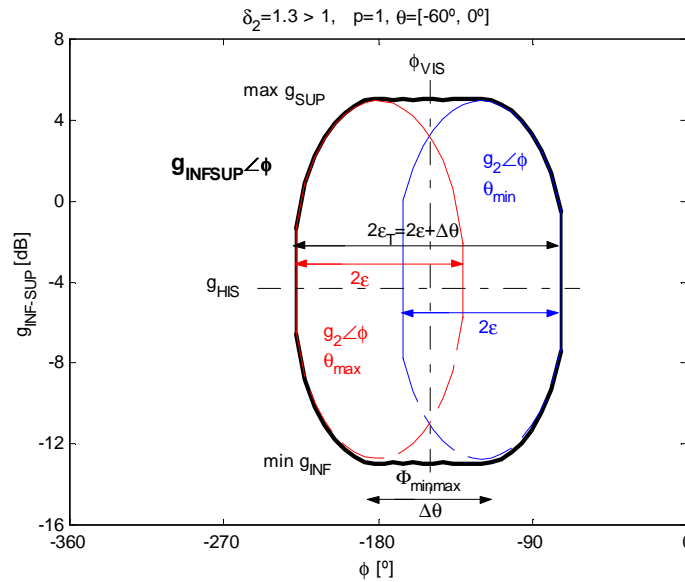


Figura 5-7: Contorno intersección tipo A ($\delta_2 > 1$) en plantillas con sólo incertidumbre en fase

(iii) Como el contornos intersección doblevaluado, $g_{INFSUP} \angle \phi$, cuando no existe incertidumbre vertical $\mathfrak{S}P=p_{cte} \angle \{\theta\}$, no se desplaza verticalmente respecto a las soluciones simples $\{g_{12} \angle \phi\}$, el eje horizontal constante para estas últimas, definido en (5.27), es también el eje horizontal para los contornos intersección:

$$g_{HIS} = g_{h12} = \frac{+\sqrt{1-\delta_2^2}}{p \delta_2} \quad (5.34)$$

(iv) Las soluciones sin incertidumbre $g_{12} \angle \phi$ existían en un intervalo $\phi \in [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$. El parámetro ε , definido en (5.22), no varía al modificarse p o θ , tan sólo cuando varía δ_2 (véase Sección 5.2.3). Como en el caso ahora estudiado δ_2 es constante, ε también es constante. Y como las curvas $g_{12} \angle \phi$ originadas por $\Im P = p_{cte} \angle \{\theta\}$ se desplazan una respecto a otra una fase $-\theta$, finalmente la amplitud del intervalo Φ_{IS} donde existen contornos, $g_{INF} \angle \phi$ y $g_{SUP} \angle \phi$, es igual a $2\varepsilon_T$, $\varepsilon_T = \varepsilon + \Delta\theta/2$. Véase Figura 5-7. En resumen, el intervalo angular de existencia de los contornos intersección de tipología A cuando sólo existe incertidumbre horizontal se define:

$$\Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T], \quad \varepsilon_T = \varepsilon + \Delta\theta/2, \quad \phi_{VIS} = -180^\circ - 1/2(\theta_{min} + \theta_{max}) \quad (5.35)$$

Por ello, mientras que sin la incertidumbre (único θ) la máxima anchura en fase de los contornos simples $g_{12} \angle \phi$ era $2\varepsilon = 180^\circ$ (si $\varepsilon = 90^\circ$ en $\phi \in [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$), ahora los contornos intersección $g_{INF_SUP} \angle \phi$ pueden llegar a ocupar todo el intervalo de diseño si la incertidumbre $\Delta\theta$ es muy grande (incluso aunque $\varepsilon < 90^\circ$). La máxima anchura 2ε ($\varepsilon \rightarrow 90^\circ$) se produce cuando $\delta_2 \rightarrow 1$ (véase Sección 5.2.3), y si δ_2 disminuye aún más, se hace $\delta_2 < 1$ y se cambia a una tipología B de contornos. Sin embargo, la máxima anchura $2\varepsilon_T$ se produce o bien cuando $\Delta\theta/2 \rightarrow 180^\circ$ (independientemente de ε y por tanto de δ_2) o bien cuando $\Delta\theta/2$ crece (siendo $\Delta\theta \ll 360^\circ$) reforzado por un decremento de δ_2 ($\delta_2 \rightarrow 1$ y $\varepsilon \rightarrow 90^\circ$). En el segundo caso ($\Delta\theta \ll 360^\circ$), al presentarse una tipología A, o en el límite ($\delta_2 \rightarrow 1$) un cambio a tipología B, siempre a priori (sin considerar la contribución del resto de especificaciones) habrá solución. Sin embargo, en el primer caso, cuando la incertidumbre se acerca al límite ($\Delta\theta \approx 360^\circ$, $\delta_2 > 1$) persiste una tipología A y como existe una curva g_{SUP} y otra g_{INF} que ocuparán todo el intervalo $[-360^\circ, 0^\circ]$, no hay solución posible para $|S| = |T_2| \leq \delta_2$. Véase Figura 5-8. En resumen, **cuando la incertidumbre $\Delta\theta$ aumenta, las garantías de solución para $|S| = |T_2| \leq \delta_2$ con $\delta_2 < 1$ (tipología A) disminuyen, pudiendo incluso llegar a la inexistencia de solución¹. Y si dada una incertidumbre $\Delta\theta$ la especificación δ_2 disminuye, tras pasar de una tipología A a una tipología B de contornos** (véase Sección

¹ imposibilidad de pasar a la etapa de diseño del controlador debido a la incompatibilidad de la especificación en presencia de incertidumbre.

5.2.3), también se complica la síntesis del controlador al considerar $|S|=|T_2| \leq \delta_2$ junto con $|T|=|T_1| \leq \delta_1$ y $|T_4|=|G/1+L| \leq \delta_4$ (véase Sección 5.4).

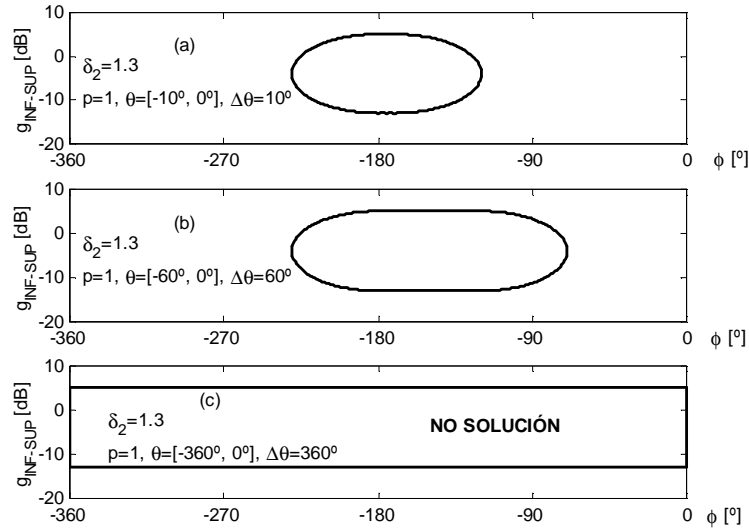


Figura 5-8: Influencia del tamaño de incertidumbre en fase para contornos tipo A ($\delta_2 > 1$)

(v) **La posición relativa del intervalo de incertidumbre $\{\theta\}$** (incluso para $\Delta\theta$ constante) sobre $[-360^\circ, 0^\circ]$, también modifica la agresividad del contorno intersección $g_{INF_SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS}$, ya que cambia su fase relativa al punto $0\text{dB} \angle 0^\circ$ ($G=1$). Véase la Figura 5-9. Tomando como referencia el eje vertical del contorno, ϕ_{VIS} definido en (5.33), para la gráfica superior en la Figura 5-9 donde $\theta \in [-60^\circ, 0^\circ]$, los contornos intersección se centran en $\phi_{VIS} = -150^\circ$. Mientras tanto, en la gráfica inferior donde $\theta \in [-120^\circ, -60^\circ]$, siendo $\phi_{VIS} = -90^\circ$, los contornos se acercan a la fase de partida en el diseño 0° . Esto puede entenderse como que el margen de fase de seguridad ha disminuido (menor distancia al contorno), o desde el punto de vista de que es necesaria la aportación de una fase mayor para conseguir el comportamiento *óptimo*² robusto respecto a δ_2 sin violar esta restricción. Nótese cómo tanto la fase final a aportar como el margen de seguridad en la fase quedan condicionados por el tamaño de incertidumbre $\Delta\theta$. Como la fase de partida es 0° ($G=1$) y según la ubicación de Φ_{IS} en (5.35), la fase absoluta a aportar para el diseño óptimo es $\phi_{VIS} + \varepsilon + \Delta\theta/2$, con ε en (5.22).

² Horowitz (1973) definió el diseño óptimo QFT como aquel que ubica L_0 junto a sus contornos. Si L_0 viola sus contornos se incumple la especificación, y si se sitúa demasiado lejos existe un sobredimensionamiento que puede pagarse en el cumplimiento de otras especificaciones.

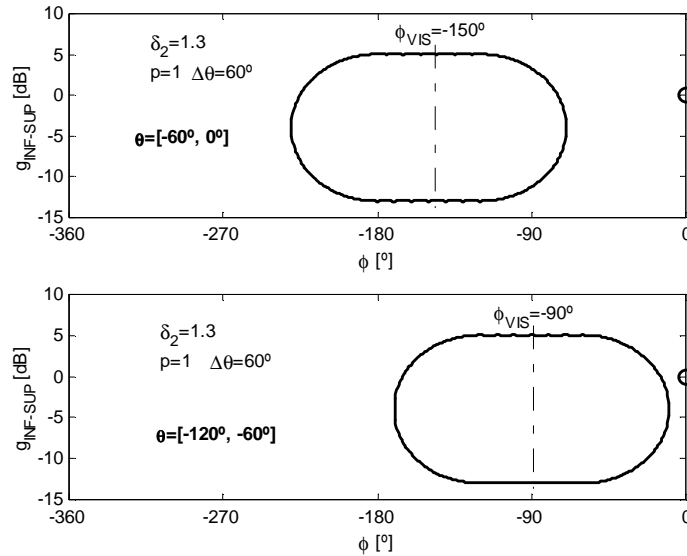


Figura 5-9: Influencia de las fases de incertidumbre, $\{\theta\}$, en contornos tipo A ($\delta_2 > 1$)

(vi) Los contornos intersección para G , $g_{INF_SUP} \angle \phi$, y para L_0 , $l_{0INF_SUP} \angle \psi_0$ (calculados según se indica en el Paso 12 del Algoritmo 3.1), expresan lo mismo, cambiando tan sólo el punto de referencia (de $0\text{dB} \angle 0^\circ$ a $p_0\text{dB} \angle \theta_0$); véase el Capítulo 3 (Sección 3.3.5). La selección de la planta nominal, $p_0 \angle \theta_0$, tampoco importa. Véanse los ejemplos gráficos en la Sección 5.2.2.3 y, en particular, la Figura 5-21.

5.2.2.2 Influencia de la Incertidumbre en Magnitud

Se pretende estudiar la contribución de la incertidumbre en ganancia en los contornos QFT para especificaciones robustas del tipo $|T_2| \leq \delta_2$. Se analizarán plantillas que sólo contienen este tipo de incertidumbre, $\mathfrak{I}P(j\omega) = \{p\} \angle \theta_{cte}$. Primero se estudiará la contribución de parámetros discretos p y, posteriormente, la del conjunto $\{p\}$ en función de las tipologías de contornos B ($0 < \delta_2(\omega) < 1$) o A ($\delta_2(\omega) > 1$).

Influencia del Módulo de la Planta (p)

De acuerdo con (5.2) las magnitudes g_1 y/o g_2 son inversamente proporcionales al módulo p . Por ello, cuando p disminuye, ambas aumentan proporcionalmente para todo ϕ , tanto en los contornos simples de tipología B como A. Además, en el caso de contornos tipo A, p

no modifica su intervalo angular de existencia $\nexists \mathcal{E}$ definido en (5.22). Véase la Figura 5-10.

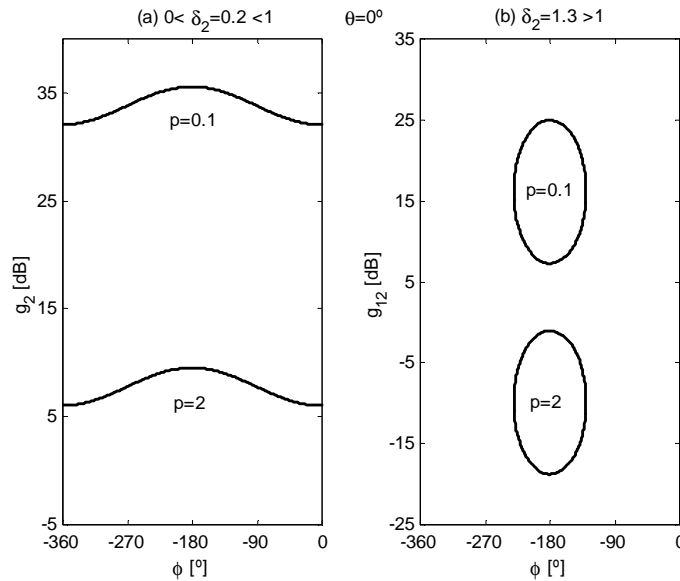


Figura 5-10: Influencia del módulo p en contornos simples de (a) tipología B, (b) tipología A.

Esto implica un incremento en la agresividad en magnitud de los contornos simples monovaluados superiores ($0 < \delta_2 < 1$), $g_2 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, cuando p disminuye, ya que su altura g_2 aumenta $\forall \phi \in \Phi$ (gráfico (a) en la Figura 5-10). Parece lógico pensar que, cuanto menor sea la ganancia aportada por la planta (disminución de p), mayor será la ganancia a aportar por el controlador (g) para problemas de control $|S|=|T_2| \leq \delta_2$, que necesitan una ganancia mínima en $|L|$ para rechazar con la dinámica adecuada las perturbaciones D_2 (véase Sección 5.4). El efecto deseado es justamente el opuesto en problemas que tratan de limitar el esfuerzo de control (problemas $|T|=|T_1| \leq \delta_1$, $|G/1+L|=|T_4| \leq \delta_4$). Estos últimos limitan la ganancia máxima en $|L|$ (e indirectamente, en la función de sensibilidad $|S|$), y por ello, sus contornos serán de tipología D, cuya agresividad es menor cuanto menor es la magnitud del contorno (consúltense Capítulos 4 y 6).

Respecto a los contornos simples doblevaluados (cuando $\delta_2 > 1$), $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} \subset [-360^\circ, 0^\circ]$, una disminución del módulo p eleva la altura tanto de $g_1 \angle \phi$ como de $g_2 \angle \phi$, (gráfico (b) en la Figura 5-10). De acuerdo al razonamiento anterior el contorno superior $g_2 \angle \phi$ se hace más restrictivo, pero el contorno $g_1 \angle \phi$ al ser de tipo ‘inferior’³ y aumentar su altura, se relaja

³ Se debe satisfacer *por debajo*, es decir, $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$.

su agresividad. Las fases de existencia de $\{g_{12} \angle \phi\}$ es decir $\mp \varepsilon$, no se modifican al variar p , ya que este parámetro no afecta a los términos coseno según (5.2) o más concretamente al parámetro ε en (5.22).

En resumen, si el objetivo de la especificación $|T_2| \leq \delta_2$ es garantizar una mínima ganancia de $|L|$ para el rechazo de perturbaciones, el contorno superior $g_2 \angle \phi$ es la curva crítica, mientras que la curva inferior $g_1 \angle \phi$ no va a existir ($g_1 < 0$) si $0 < \delta_2 < 1$, o no va a ser dominante si $\delta_2 > 1$ frente a los contornos para los objetivos $|T_{1,i}| \leq \delta_{1,i}$. Si la finalidad de la especificación $|T_2| \leq \delta_2$ es limitar el pico de $|S|$ en medias frecuencias para garantizar unos márgenes aceptables de estabilidad, se tomará $\delta_2 > 1$ y se vigilará la porción inferior $g_1 \angle \phi$ del contorno doblevaluado $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12}$. Esto mismo ocurrirá para $\delta_i > 1$ que limitaba el pico de la sensibilidad complementaria $|T| = |T_i| \leq \delta_i$; (véase Sección 4.3 y 4.4).

Contornos Intersección de Tipo B ($0 < \delta_2 < 1$) para Incertidumbre Sólo en Magnitud

A partir de los resultados de la sección anterior, resulta sencillo demostrar la influencia de la incertidumbre vertical de una plantilla, supuesta nula su incertidumbre horizontal, es decir, $\mathcal{I}P(j\omega_i) = \{p\} \angle \theta_{cte}$. Se trata de calcular para tipologías B ($0 < \delta_2 < 1$) de contornos: $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, según (3.36) a partir del conjunto $\{g_2 \angle \phi, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]\}$ obtenido para $\{p\} \angle \theta$. A continuación se enumeran los resultados:

(i) La planta de menor módulo $p = p_{min}$ es la que presenta la **curva $g_2 \angle \phi$ más restrictiva** (necesita más ganancia y, por tanto, tiene la mayor altura g_2 en cada ϕ). Dicho contorno simple será tomado como contorno intersección $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$. Véase el gráfico (a) en la Figura 5-10 y también la Figura 5-11. Como $g_{SUP} \angle \phi$ coincide con $g_2 \angle \phi$ para $p_{min} \angle \theta_{cte}$ se conservan todas sus propiedades de este último contorno simple, estudiadas en la Sección 5.2.1.1: máximo y fase de máximo en (5.12), mínimo y fase de mínimo en (5.13), módulo y fase del punto de inflexión en (5.14), y ejes vertical y horizontal en (5.15) y (5.16). Véase la Figura 5-11.

$$\boxed{\max g_{SUP} = \frac{(1 + \delta_2)}{p_{min} \delta_2}}, \phi_{\max g_{SUP}} = -180^\circ - \theta \quad (5.36)$$

$$\boxed{\min g_{SUP} = \frac{(1 - \delta_2)}{p_{min} \delta_2}}, \phi_{\min g_{SUP}} = 0^\circ - \theta, -360^\circ - \theta \quad (5.37)$$

$$\text{influx } g_{INF} = \frac{+\sqrt{1-\delta_2^2}}{p_{min} \delta_2}, \quad \phi_{\text{influx}g_{SUP}} = -90^\circ - \theta, -270^\circ - \theta \quad (5.38)$$

$$\phi_{VS} = -180^\circ - \theta \quad (5.39)$$

$$g_{HS} = \frac{+\sqrt{1-\delta_2^2}}{p_{min} \delta_2} \quad (5.40)$$

También interesa conocer el salto de altura existente entre el eje horizontal g_{h2} de dos soluciones simples $g_2 \angle \phi$ para dos plantas genéricas $p_2 \angle \theta_2$ y $p_1 \angle \theta_1$, donde $p_2 > p_1$. Sustituyendo en (5.40), se define:

$$\Delta g_{h2} = Lm \frac{p_2}{p_1} \quad (5.41)$$

Nótese que los ‘incrementos’ en módulo se calculan en base logarítmica.

Según estas definiciones los parámetros más característicos del contorno intersección $g_{SUP} \angle \phi$ para el ejemplo sobre la Figura 5-11 resultan: magnitud máxima, $max g_{SUP} = 60$ (35.6dB) según (5.36); eje vertical, $\phi_{VS} = -180^\circ$ según (5.39); eje horizontal, $g_{HS} = 49$ (33.8dB) según (5.40).

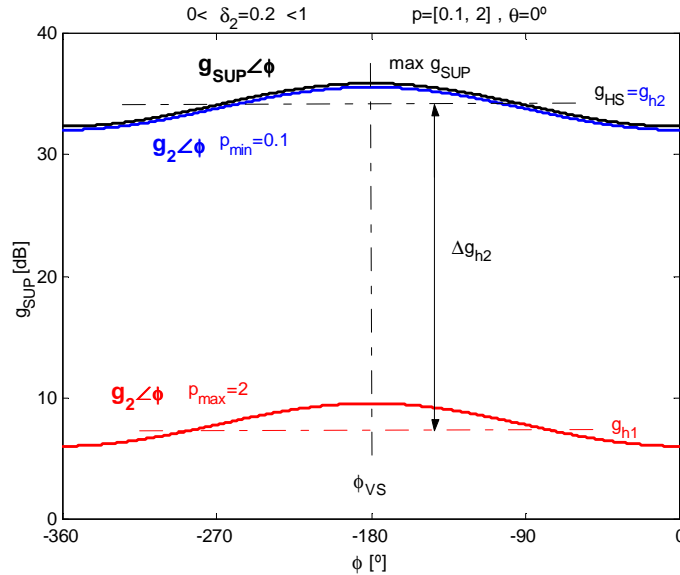


Figura 5-11: Contorno intersección tipo B ($\delta_2 < 1$) para sólo incertidumbre en magnitud

(ii) De acuerdo a (i) el tamaño de incertidumbre, Δp , no influye en la agresividad (altura) del contorno $g_{SUP} \angle \phi$. En este sentido, compárense los gráficos (a) y (c) de la Figura 5-12 que presentan distinto Δp y, sin

embargo, sus contornos son idénticos. Lo que realmente afecta a la agresividad en altura del contorno intersección es la posición relativa de los valores de incertidumbre (valores $\{p\}$), y en concreto del valor p_{min} . Así lo demuestran los gráficos (b) y (c) de la Figura 5-12, sus contornos intersección corresponden a plantillas con el mismo tamaño de incertidumbre, $\Delta p=20\text{dB}$, pero distintos valores de p_{min} , 1 y 0.1, respectivamente. Esto determina que los contornos en (c) sean más exigentes que los de (b). El resultado es razonable desde el punto de vista de que los contornos B buscan una ganancia mínima, en este caso para un adecuado rechazo de la perturbación.

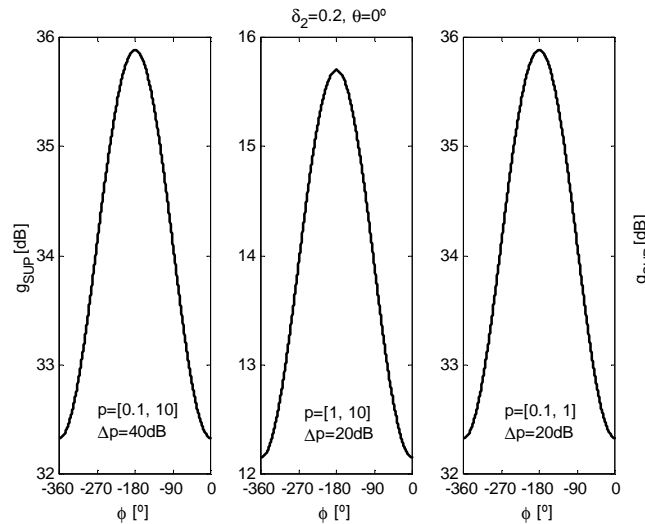


Figura 5-12: Influencia de la incertidumbre en magnitud, absoluta Δp y relativa $\{p\}$, en contornos intersección de tipo B ($0 < \delta_2 < 1$)

(iii) Los contornos para L_0 expresan las mismas necesidades que los contornos en G . El razonamiento ya ha sido expuesto anteriormente: no sólo se desplaza el contorno (cálculo del L_0 -contorno a partir del G -contorno) sino que también el punto de referencia se modifica en la misma cantidad. Por ello, tampoco influye la selección de la planta nominal. En la Sección 5.2.2.3 se muestran algunos ejemplos (Figura 5-20).

Contornos Intersección de Tipo A ($\delta_2 > 1$) para Incertidumbre Sólo en Magnitud

Para tipologías A de contornos ($\delta_2 > 1$), el objetivo es obtener el contorno intersección doblevaluado $g_{INF_SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} \subseteq [-360^\circ, 0^\circ]$, a partir de los contornos simples doblevaluados $\{g_{12} \angle \phi, \phi \in [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]\}$ aplicando (3.35)

y (3.36). El conjunto de soluciones simples $\{g_{12} \angle \phi\}$ se obtuvo para una plantilla con solo incertidumbre vertical, $\Im P(j\omega) = \{p\} \angle \theta_{cte}$. A continuación se enumeran las conclusiones principales.

(i) La planta de mayor módulo $p=p_{max}$ según (3.15) es la que presenta la curva simple $g_1 \angle \phi$ de menor altura (más restrictiva), y la de menor módulo $p=p_{min}$ según (3.14) la que originará la curva $g_2 \angle \phi$ de mayor altura. Por tanto, la curva inferior del contorno intersección $g_{INF} \angle \phi$ se corresponde con la solución $g_1 \angle \phi$ calculada para $p_{max} \angle \theta_{cte}$ sustituyendo en (5.2a). Y la curva superior $g_{SUP} \angle \phi$ se corresponde con la solución $g_2 \angle \phi$ calculada para $p_{min} \angle \theta_{cte}$ sustituyendo en (5.2b). Véase el gráfico (b) en la Figura 5-10 y la Figura 5-13.

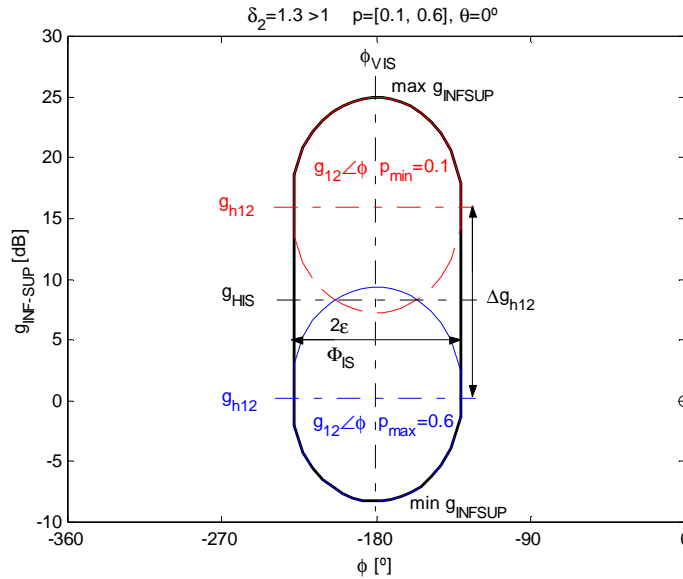


Figura 5-13: Contorno intersección tipo A ($\delta_2 > 1$) para sólo incertidumbre en magnitud

(ii) Al no existir incertidumbre horizontal, sino un único punto θ , el eje vertical de simetría ϕ_{VIS} es idéntico al de todas las soluciones $\{g_{12} \angle \phi\}$. Figura 5-13.

$$\phi_{VIS} = -180^\circ - \theta \tag{5.42}$$

(iii) Como p no modifica ϵ según (5.22), todas las soluciones $\{g_{12} \angle \phi\}$ están centradas en ϕ_{VIS} definido en (5.42) y presentan la misma amplitud de fases de existencia 2ϵ , (Figura 5-13):

$$\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \epsilon] \tag{5.43}$$

Luego ni el tamaño de la incertidumbre vertical, Δp , ni los valores relativos $\{p\}$ modifican Φ_{IS} (intervalo de fases de existencia del contorno $g_{INFSUP} \angle \phi$).

(iv) De acuerdo a (i) el mínimo del contorno intersección $g_{INFSUP} \angle \phi$, $min-g_{INFSUP}$, se alcanza en la fase ϕ_{VIS} en (5.42), y se corresponde con el mínimo de la solución $g_1 \angle \phi$ según la ecuación (5.24) evaluada en $p_{max} \angle \theta_{cte}$. Figura 5-13.

$$\boxed{\min g_{INFSUP} = \frac{(\delta_2 - 1)}{p_{max} \delta_2}, \phi_{VIS} = -180^\circ + \theta} \quad (5.44)$$

(v) Y el máximo del contorno intersección $g_{INFSUP} \angle \phi$, $max-g_{INFSUP}$, se alcanza en la fase ϕ_{VIS} en (5.42), y se corresponde con el máximo de la solución $g_2 \angle \phi$ según la ecuación (5.25) evaluada en $p_{min} \angle \theta_{cte}$. Figura 5-13.

$$\boxed{\max g_{INFSUP} = \frac{(\delta_2 + 1)}{p_{min} \delta_2}, \phi_{VIS} = -180^\circ + \theta} \quad (5.45)$$

(vi) El nuevo eje de simetría horizontal del contorno intersección, $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS}$, depende de los ejes de simetría g_{h12} de los contornos simples $g_{12} \angle \phi$ para las plantas $p_{max} \angle \theta_{cte}$ y $p_{min} \angle \theta_{cte}$, definidos en (5.27). La media entre g_{h12} para p_{max} y g_{h12} para p_{min} ha de calcularse en magnitudes logarítmicas resultando (Figura 5-13):

$$\boxed{g_{HIS} \text{ dB} = \frac{1}{2} \text{Lm} \left(\frac{(\delta_2^2 - 1)}{\delta_2^2} \frac{1}{p_{max} p_{min}} \right)} \quad (5.46)$$

Nótese que calculando la media entre g_{h12} para p_{max} y g_{h12} para p_{min} en magnitudes lineales no se obtendría el mismo resultado, ya que el logaritmo de una suma difiere de la suma de logaritmos.

El salto entre los dos ejes de simetría g_{h12} asociados a las soluciones $g_{12} \angle \phi$ para $p_{max} \angle \theta_{cte}$ y $g_{12} \angle \phi$ para $p_{min} \angle \theta_{cte}$ puede calcularse sustituyendo en (5.27). Para mayor generalidad de la expresión se formula en términos de dos plantas cualesquiera $p_2 \angle \theta_2$ y $p_1 \angle \theta_1$, donde $p_2 > p_1$. Figura 5-13.

$$\Delta g_{h12} = \text{Lm} \frac{p_2}{p_1}, \quad p_2 \geq p_1 \quad (5.47)$$

Las conclusiones (i) a (vi) se ilustran en la Figura 5-13 para una incertidumbre $\Im P(j\omega) = \{p \in [0.1, 0.6], \theta = 0^\circ\}$ y un valor de especificación $\delta_2(\omega) = 1.3 > 1$. Resultan: $g_{INF} \angle \phi = g_1 \angle \phi$, sustituyendo en (5.2a) $p = p_{max} = 0.6$ y

$\theta=0^\circ$; $g_{SUP}\angle\phi=g_2\angle\phi$, sustituyendo en (5.2b) los valores $p=p_{min}=0.1$ y $\theta=0^\circ$; $\phi\in\Phi_{IS}=[\phi_1\mp\epsilon]$ según (5.43), con $\epsilon=50^\circ$ según (5.22) y $\phi_{VIS}=-180^\circ$ según (5.42), luego, $\Phi_{INFSUP}=[-230^\circ, -130^\circ]$; también, $min-g_{INFSUP}=0.38(-8.3dB)$ según (5.44); $max-g_{INFSUP}=17.7(25dB)$ según (5.45); y finalmente, el eje horizontal $g_{HIS}dB=8.3dB$ según (5.46). Según (5.27), para p_{min} se tiene $g_{h12}=6.4$ (16.1dB) y para p_{max} se calcula $g_{h12}=1.1$ (0.5dB), comprobándose que el salto entre ambos coincide con la expresión (5.47), $\Delta g_{h12}=15.6dB$.

(vii) Un Δp variable produce un distanciamiento proporcional entre la porción inferior $g_{INF}\angle\phi$ y superior $g_{SUP}\angle\phi$ del contorno doblevaluado intersección, que estará en función de los valores p_{max} y p_{min} , respectivamente.

Cuando $\delta_2(\omega_i)>1$ exprese condiciones de rechazo de perturbaciones (medias y altas frecuencias ω_i), la porción inferior, $g_{INF}\angle\phi$, del contorno doblevaluado para $\delta_2>1$ no será dominante al considerar simultáneamente en ω_i los contornos para $\delta_{i,4}(\omega_i)$. Entonces, la curva a vigilar en la solución del problema global de control, en lo que respecta a la especificación δ_2 , es el aumento de agresividad de $g_{SUP}\angle\phi$. Y $g_{SUP}\angle\phi$ aumenta en altura (más exigente) si p_{min} disminuye, independientemente del tamaño de la incertidumbre absoluta Δp . En este sentido compárense los gráficos (b) y (c) de la Figura 5-14, donde un mismo $\Delta p=40dB$ produce distinta altura de $g_{SUP}\angle\phi$, función de los distintos valores p_{min} (1 y 0.1). Paralelamente los gráficos (a) y (c) muestran el mismo $g_{SUP}\angle\phi$ para distintos valores de Δp debido a que responden al mismo $p_{min}=0.1$.

Cuando $\delta_2(\omega_i)>1$ exprese condiciones de estabilidad, la porción inferior del contorno $g_{INF}\angle\phi$ será la curva crítica, ya que la curva superior $g_{SUP}\angle\phi$ no será dominante al considerar problemas que buscan ganancia mínima, tal como $\delta_{3,5}(\omega_i)$ u otro $0<\delta_2(\omega_i)<1$ para rechazo de perturbaciones, todos en la misma ω_i . Respecto a la curva $g_{INF}\angle\phi$, si existe una condición $\delta_i(\omega_i)>1$ (lógicamente para otra problemática que no sea la estabilidad), debe tenerse en cuenta que a igualdad de tolerancias $\delta_2=\delta_i>1$, los contornos intersección $g_{INF}\angle\phi$ para δ_2 son menores que para δ_i (compárense la Figura 5-14 con la Figura 4-18). Atendiendo a la agresividad del contorno intersección $g_{INF}\angle\phi$ para $\delta_2(\omega_i)>1$, ésta crece cuando aumenta p_{max} , independientemente del valor de Δp , como puede comprobarse en la Figura 5-14.

Considerando exclusivamente en sí mismo el problema $\delta_2>1$, un Δp mayor produce un distanciamiento entre $g_{INF}\angle\phi$ y $g_{SUP}\angle\phi$ sin modificar su intervalo de fases de existencia Φ_{IS} , por lo que a priori la agresividad en magnitud del contorno doblevaluado aumenta (compárense en la Figura

5-14 el gráfico (a) para $\Delta p=40\text{dB}$ con los gráficos (b) y (c) para $\Delta p=20\text{dB}$.

Nótese también el punto de referencia en el diseño $0\text{dB}\angle 0^\circ (G=1)$ tratándose de contornos para G . La distancia entre dicho punto y el contorno es una medida de la agresividad requerida por este último.

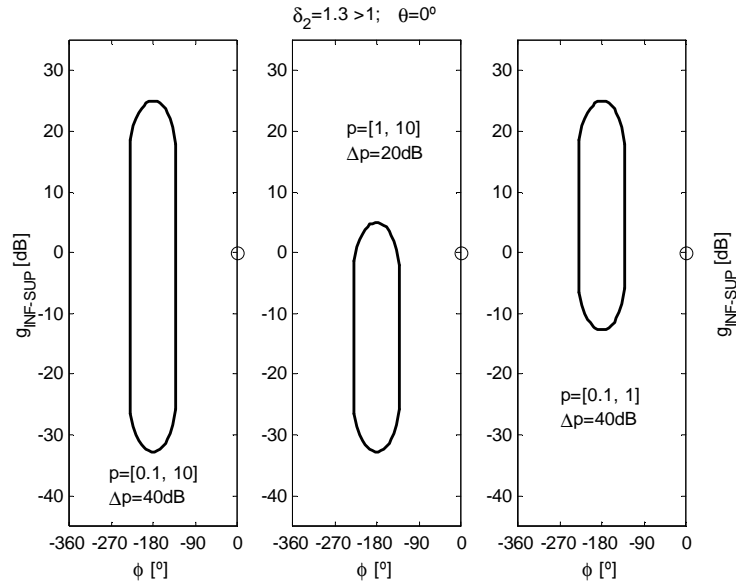


Figura 5-14: Influencia del módulo y su incertidumbre ($\{p\}$ y Δp) en contornos tipo A ($\delta_2 > 1$)

(viii) Al igual que en los casos estudiados anteriormente, los contornos para L_0 expresan lo mismo que los contornos para G , sin importar tampoco la planta seleccionada como nominal. (Véase Figura 5-21)

5.2.2.3 Conclusiones sobre la Influencia de la Incertidumbre

En las Secciones 5.2.2.1 y 5.2.2.2 se analizaron los contornos para G y L_0 debidos a plantillas: con incertidumbre en fase exclusivamente, $\mathfrak{S}P(j\omega)=p_{cte}\angle\{\theta\}$, o en ganancia, $\mathfrak{S}P(j\omega)=\{p\}\angle\theta_{cte}$. Las primeras son típicas de sistemas con incertidumbre tan sólo en su parámetro retardo (Figura 3-4), y las segundas son características del comportamiento en baja y alta frecuencia de la mayoría de los sistemas (Figura 3-3). Además, las conclusiones aportadas en las secciones anteriores se utilizan ahora para analizar los contornos de una plantilla genérica $\mathfrak{S}P(j\omega)=\{p\}\angle\theta$ en la que existe tanto incertidumbre en fase como en ganancia; véase la Figura 5-15(a). De los estudios anteriores se puede deducir:

- (i) Considerando la influencia de la incertidumbre en fase (véase la Sección 5.2.2.1), a igualdad de módulos p , el conjunto de fases $\{\theta\}$ de todas las plantas en $\mathfrak{S}P(j\omega) = \{p \angle \theta\}$ contribuyen en la determinación de los contornos: monovaluado superior (si $0 < \delta_2 < 1$) o doblevaluado (si $\delta_2 > 1$); véanse la Figura 5-4 y la Figura 5-7.
- (ii) Si sobre (i) se añade la contribución de la incertidumbre vertical (véase la sección 5.2.2.2) se distinguirá entre dos casos. Si la especificación es tal que, $0 < \delta_2 < 1$, entonces, **las plantas que determinan el contorno monovaluado superior, $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS}$, son las de módulos menores dentro de $\{p\}$ (véase la Figura 5-11) para cada fase θ , es decir, el perfil inferior de $\mathfrak{S}P$, $\{p_{min} \angle \theta\}$.** Sin embargo, si $\delta_2 > 1$ en el contorno doblevaluado resultante intervienen las **plantas de módulo máximo y mínimo** (véase Figura 5-13) **para cada θ , es decir, los perfiles inferior y superior de $\mathfrak{S}P$, $\{p_{max} \angle \theta\}$ y $\{p_{min} \angle \theta\}$.** Las anteriores simplificaciones sobre los perfiles significativos de $\mathfrak{S}P$ son válidas exclusivamente en el caso de **plantillas convexas**. Si no lo fueran, deberían considerarse **todas las plantas $\{p \angle \theta\}$ a lo largo del perfil de la plantilla, $\partial\{p \angle \theta\}$** , ya que éste puede presentar concavidades.
- (iii) En ocasiones, el número de plantas a considerar para el cálculo de contornos intersección de tipología A puede reducirse. Si $\delta_2 > 1$ expresa condiciones límite para la ganancia en alta frecuencia (estabilidad robusta) normalmente serán críticas sólo las plantas de módulo máximo en cada fase $\{p_{max} \angle \theta\}$ (perfil superior de la plantilla). Si $\delta_2 > 1$ expresa condiciones de rechazo de perturbaciones (habitualmente en medias y altas frecuencias) serán dominantes los punto de contornos debidos sólo a las plantas de módulo mínimo en cada fase $\{p_{min} \angle \theta\}$ (perfil inferior de la plantilla). En general, esta simplificación dependerá de las características del resto de especificaciones en la misma frecuencia, $|T_k(j\omega_k)| \leq \delta_k(\omega_k)$.

La Figura 5-15(a) muestra la plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega_k) = \{p \angle \theta\}$ para una familia paramétrica de plantas $\mathcal{P} = \{P(s) = k/(s/a+1), k \in [1, 10], a \in [1, 10]\}$ evaluada a la frecuencia $\omega_k = 2 \text{ rad/s}$. En la discretización de los intervalos de incertidumbre se han empleado 3 puntos logarítmicamente espaciados en cada dominio. Considerando (i) e (ii) las plantas significativas para el cálculo de contornos si $0 < \delta_2 < 1$ se reducen al perfil inferior como muestra la Figura 5-15(c), y si $\delta_2 > 1$ al perfil superior e inferior de la plantilla, en la Figura 5-15(b). Teniendo en cuenta la simplificación en (iii) tan sólo el perfil superior o el inferior serían suficientes en función de los objetivos perseguidos con $\delta_2 > 1$.

El tamaño de discretización de los intervalos de incertidumbre condiciona sin duda los resultados obtenidos. Una discretización muy fina eleva el coste computacional, ya que se debe resolver una ecuación cuadrática para cada planta discreta (Algoritmo 3.1 en Sección 3.3.2). Pero también, una discretización demasiado grosera conduce a unos contornos menos exactos, al calcularse éstos por la intersección de soluciones discretas. En este sentido, las aportaciones de este documento pueden resultar muy útiles. **El conocer el perfil significativo** (el que aporta información al contorno intersección en ω_i para la especificación δ_k) de la plantilla permite **ahorrar esfuerzo de cálculo** al eliminar plantas no significativas. Esfuerzo que puede concentrarse en una mayor densidad de plantas en el/los perfiles significativos (**mayor precisión** en el cálculo del contorno). En el ejemplo de la Figura 5-15, los gráficos (a), (b) y (c) muestran un tamaño de discretización excesivamente grande, elegido simplemente con fines ilustrativos de cómo contribuye la incertidumbre en el contorno, tal y como se describe a continuación. El gráfico (d) emplea un tamaño de discretización más fino sobre el parámetro a (10 puntos logarítmicamente espaciados), que permitiría calcular con mayor precisión los contornos si la aplicación práctica real lo exige. En este caso se ha incrementado el esfuerzo computacional tan sólo donde es necesario (perfil significativo). Con las aportaciones presentadas, incluso el error debido al tamaño de discretización podría anularse totalmente en algunos casos.

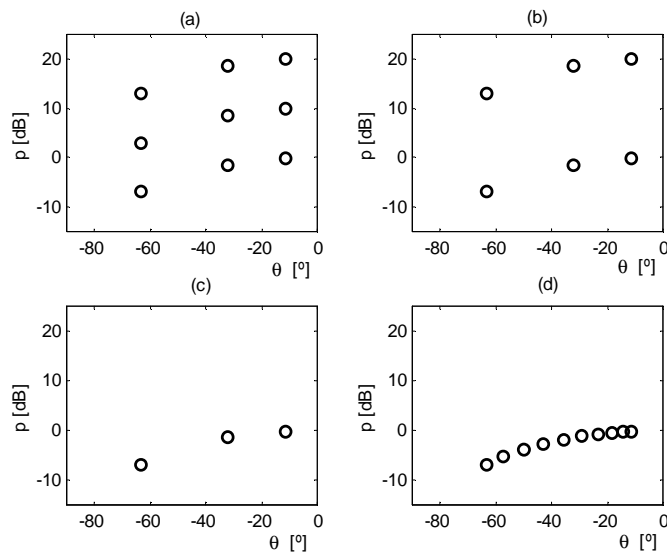


Figura 5-15: (a) Plantilla genérica. Plantas significativas en (b) contornos A (c) contornos B. (d) Discretización fina de perfil inferior.

Se recomienda, en cualquier simplificación, tomar las precauciones oportunas: (a) valorar los perfiles significativos de las plantillas, en función no sólo de una especificación en particular, sino dentro del conjunto de especificaciones; (b) en plantillas no convexas, se deben extremar las precauciones. Las simplificaciones en (i), (ii) y (iii) se pueden resumir como sigue:

Enunciado Simplificación 1:

Dado un sistema con incertidumbre $\mathfrak{SP}(j\omega_i)=\{p\angle\theta\}$, plantilla cuyo perfil es convexo, para el trazado de los contornos que representa la especificación robusta $|T_2(j\omega)|\leq\delta_2(\omega_i)$ en (3.7) intervienen exclusivamente: (a) el perfil inferior de la plantilla si $0<\delta_2(\omega_i)<1$; (b) en general, el perfil superior e inferior de la plantilla si $\delta_2(\omega_i)>1$; (c) para $\delta_2(\omega_i)>1$, sólo el perfil inferior de la plantilla, si existen para la misma frecuencia especificaciones del tipo $|T_{2,3\sigma 5}(j\omega)|\leq\delta_{2,3\sigma 5}(\omega_i)$ con $\delta_2(\omega_i)<1$, $\delta_3(\omega_i)<\{p\}$ o $\delta_3(\omega_i)<p_{max}/p_{min}$; (d) para $\delta_2(\omega_i)>1$, sólo el perfil superior de la plantilla, si existen para la misma frecuencia especificaciones del tipo $|T_{1,4}(j\omega)|\leq\delta_{1,4}(\omega_i)$ y cualquier valor $\delta_{1,4}(\omega_i)$.

La certeza de (a) y (b) ha quedado patente tras los estudios abordados en este capítulo. Las afirmaciones (c) y (d) son fácilmente deducibles tras los estudios en los Capítulos 4 y 6.

* * *

A continuación se analizan los contornos intersección de tipologías B y A para plantillas genéricas $\mathfrak{SP}(j\omega)=\{p\angle\theta\}$, incluyéndose algunos ejemplos.

Contornos Intersección de Tipología B

La Figura 5-16(a) reproduce el perfil crítico (perfil inferior) de la plantilla ω_i en el cálculo del contorno intersección de tipo B, adjuntándose algunas medidas significativas. La Figura 5-16(b) muestra los contornos simples $g_2\angle\phi$, $\phi\in\Phi=[-360^\circ, 0^\circ]$, representativos de $|T_2(j\omega)|\leq\delta_2(\omega_i)$ con $0<\delta_2=0.8<1$, para cada una de las plantas en la Figura 5-16(a); y también el contorno intersección de todos ellos, $g_{SUP}\angle\phi$, $\phi\in\Phi$.

A continuación se resumen las principales características de los contornos intersección tipo B para una plantilla genérica, calculados a partir del perfil inferior (de acuerdo a la Simplificación 1) de ésta.

- (i) Como era de esperar (véase Sección 5.2.2.1), el desfase entre dos plantas discretas cualesquiera, $|\theta_2-\theta_1|$, es el mismo desfase sobre $\Phi=[-360^\circ, 0^\circ]$ existente entre sus respectivos contornos simples $g_2\angle\phi$. Como demostraba la Figura 5-4, existe un intervalo de fases, denominado Φ_{maxSUP} , donde el

contorno intersección $g_{SUP} \angle \phi$ lo determina la unión de todos los contornos simples asociados al conjunto de plantas del perfil inferior de la plantilla, $\{p_{min} \angle \theta\}$. Dicho intervalo Φ_{maxSUP} tiene una amplitud $\Delta\theta = |\theta_{max} - \theta_{min}|$ y se sitúa en la media aritmética de los ejes verticales, ϕ_{v2} en (5.15), de los contornos simples, $g_2 \angle \phi$, de las plantas extremas $p_{min} \angle \theta_{min}$ y $p_{min} \angle \theta_{max}$. En el resto de fases, $\overline{\Phi}_{maxSUP}$, el contorno intersección, $g_{SUP} \angle \phi$, coincide con el contorno simple $g_2 \angle \phi$ asociado a $p_{min} \angle \theta_{min}$ y con el contorno simple $g_2 \angle \phi$ asociado a $p_{min} \angle \theta_{max}$ (es decir, sólo contribuyen las plantas extremas en el perfil inferior de la plantilla).

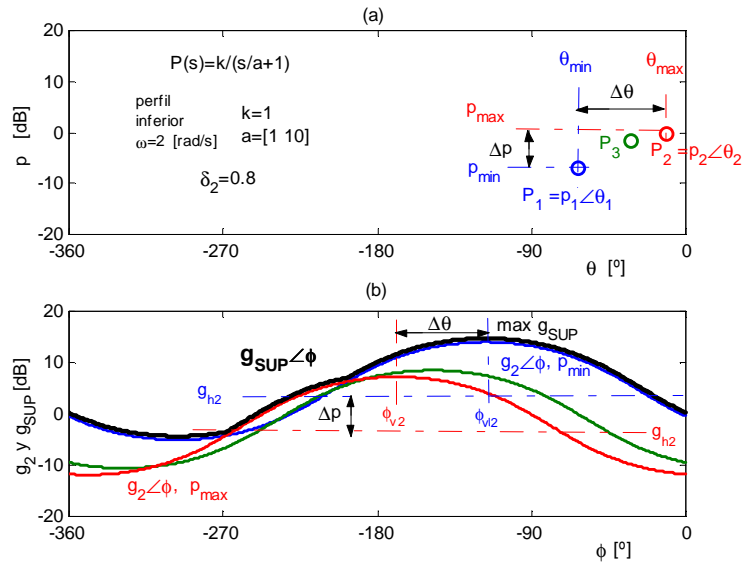


Figura 5-16: Contorno intersección tipo B para plantilla genérica

(ii) De igual modo, (véase la Sección 5.2.2.2) el incremento en ganancia logarítmica entre plantas discretas, $Lm p_2/p_1$, se refleja en el incremento en magnitud logarítmica entre sus respectivos contornos $g_2 \angle \phi$ (tómese como referencia su eje horizontal, g_{h2} , en (5.16); siendo el más elevado el que origina la planta de menor módulo p . Véase el Δp sobre ambos gráficos en la Figura 5-16. Por este motivo, según la Simplificación 1 bastaba seleccionar el perfil inferior de las plantillas. Y dentro de este perfil inferior, las plantas de módulo mínimo originarán los puntos máximos del contorno intersección. Según esto, el máximo absoluto del contorno intersección, $max-g_{SUP} \angle \phi$, puede calcularse a partir de la planta de módulo mínimo p_{min} en la plantilla, sea cual sea su fase θ . Sustituyendo en (5.12)

$$p_{min} \angle \theta \Rightarrow \boxed{\max g_{SUP} = \frac{(1 + \delta_2)}{p_{min} \delta_2}}, \phi_{maxgSUP} = -180^\circ - \theta \quad (5.48)$$

Y los saltos entre ejes horizontales y verticales de contornos simples reflejados en el contorno intersección como indica la Figura 5-16 pueden calcularse como:

$$\Delta p = Lm g_{h2}(p_{max}) - Lm g_{h2}(p_{min}) = Lm \frac{p_{max}}{p_{min}} \quad (5.49)$$

$$\Delta \theta = |\phi_{v1}(\theta_{min}) - \phi_{v1}(\theta_{max})| = |\theta_{max} - \theta_{min}| \quad (5.50)$$

El caso particular de plantillas con igual módulo mínimo en varias fases se reduce al supuesto estudiado como plantillas con sólo incertidumbre horizontal y módulo constante (en este caso igual a p_{min}); véase la Sección 5.2.2.1.

En el ejemplo de la Figura 5-15 y la Figura 5-16, para $\delta_2=0.8$, se comprueba la formulación expuesta. Para la solución simple $P_1=p_{min} \angle \theta_{min}=0.45(-7\text{dB}) \angle -63^\circ$, se tiene $g_{h2}=1.7(4.4\text{dB})$ según (5.16) y $\phi_{v2}=117^\circ$ según (5.15); y en la solución simple $P_2=p_{max} \angle \theta_{max}=0.98(-0.2\text{dB}) \angle -11^\circ$, se tiene $g_{h2}=0.76(-2.3\text{dB})$ según (5.16) y $\phi_{v2}=169^\circ$ según (5.15). Calculando las distancias entre los ejes horizontales, g_{h2} , y verticales, ϕ_{v2} , de los contornos $g_2 \angle \phi$ para P_1 y P_2 , se comprueba su coincidencia con los incrementos en módulo y fases entre ambas plantas como muestran (5.49) y (5.50). Numéricamente resulta, $\Delta p=7.2\text{dB}$ y $\Delta \theta=52.1^\circ$. En cuanto al contorno intersección, $g_{SUP} \angle \phi$, su máximo absoluto según (5.48) resulta $\max-g_{SUP}=5(14\text{dB})$ en $\phi_{maxgSUP}=-170^\circ$.

En resumen (como ya predecía la Simplificación 1), para una plantilla convexa $\mathfrak{I}p(j\omega_i)=\{p \angle \theta\}$, en el contorno intersección de tipología B resultante, $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi=[-360^\circ, 0^\circ]$, intervienen todas las plantas que conforman el perfil inferior de la plantilla para especificaciones $|T_2(j\omega_i)| \leq \delta_2(\omega_i)$, con $0 < \delta_2(\omega_i) < 1$. Sobre esta afirmación pueden argumentarse las siguientes simplificaciones:

Simplificación 2

Si la especificación δ_2 disminuye (véase Sección 5.2.3), en el contorno simple B calculado para cada planta, $g_2 \angle \phi$, la variación entre su mínimo y máximo disminuye. Es decir, el contorno pierde desnivel. Si dicho declive es inferior a la variación Δp máxima entre las plantas que constituyen el perfil inferior, expresada en (5.49) (véase la Figura 5-16), entonces el contorno $g_{SUP} \angle \phi$ se reduce a la solución $g_2 \angle \phi$ que aporta la planta de mínimo módulo

$p_{min} \angle \theta$. Es decir, del conjunto de plantas que forman la plantilla, tan sólo una es significativa, como se demuestra a continuación.

La variación entre el máximo y mínimo de un contorno simple tipo B puede calcularse a partir de $max-g_2$ en (5.12) y $min-g_2$ en (5.13), expresados en decibelios.

$$\Delta g_2 = Lm(max g_2) - Lm(min g_2) = Lm \frac{(1 + \delta_2)}{(1 - \delta_2)} \quad (5.51)$$

Nótese que (5.51) depende exclusivamente del valor de la tolerancia de especificación, δ_2 , y por tanto es el mismo para todas las soluciones simples $g_2 \angle \phi$ en la plantilla $\mathfrak{S}P = \{p \angle \theta\}$.

Tomando límites en (5.51): cuando $\delta_2 \rightarrow 0^+$, $\Delta g_2 \rightarrow 0$ dB (el contorno B es una línea recta) y cuando $\delta_2 \rightarrow 1^-$, $\Delta g_2 \rightarrow \infty$ dB (el contorno tipo B se transforma en uno de tipología A). Si el contorno simple $g_2 \angle \phi$ se reduce a una línea recta ($\delta_2 \rightarrow 0^+$), por pequeña que sea la variación del módulo (Δp) entre las plantas del perfil inferior según (5.49), bastará una de ellas para determinar $g_{SUP} \angle \phi$, ya que las demás aportarán la misma ‘recta’ $g_2 \angle \phi$ desplazada una fase $-\theta$. Si la especificación δ_2 aumenta, la curvatura del contorno aumenta hasta transformarse en uno de tipología A. En estos casos, dentro de la tipología B, es necesario emplear todo el perfil inferior de la plantilla, no siendo aplicable la Simplificación 2 que nos ocupa.

En resumen, si $\Delta g_2 \gg \Delta p$, definidas en (5.51) y (5.49), no resulta adecuado aplicar la Simplificación 2. Dicha simplificación será aplicable cuando $\Delta g_2 < min-\Delta p$, siendo $min-\Delta p$ el salto en magnitud mínimo entre plantas discretas adyacentes en el perfil inferior de la plantilla. Compárense la Figura 5-16 y la Figura 5-17 como se detalla a continuación.

En el ejemplo, para $\delta_2=0.8$ resulta $\Delta g_2=19.1$ dB según (5.51), y esto es válido para todas las soluciones simples $g_2 \angle \phi$ de las plantas en la plantilla, incluidas las plantas del perfil inferior. En dicho perfil el máximo Δp entre las plantas extremas en módulo, P_1 y P_2 , resultó aplicando (5.49) $\Delta p=7.2$ dB. Esta magnitud coincide con el salto entre los ejes g_{h2} de sus contornos simples $g_2 \angle \phi$ para P_1 y P_2 . Luego como dicho salto $\Delta p=7.2$ dB, es bastante inferior a la variación en magnitud máxima dentro de cada contorno, $\Delta g_2=19.1$ dB, no resulta adecuado realizar la Simplificación 1. Así lo demuestra el contorno intersección en la Figura 5-16 donde los contornos simples de ambas soluciones $g_2 \angle \phi$ para P_1 y P_2 intervienen en la determinación de $g_{SUP} \angle \phi$. Sin embargo, si se utilizara un $\delta_2=0.01$, resultaría $\Delta g_2=0.17$ dB, muy inferior a cualquier Δp entre las plantas del perfil inferior

(entre ellos el mínimo Δp), por lo que la Simplificación 2 podría aplicarse (véase la Figura 5-17). Ahora, el mínimo Δp a vigilar se produce entre las plantas P_1 y P_3 , pertenecientes ambas al perfil inferior de la plantilla. Resulta $\min-\Delta p=1.7\text{dB} \gg \Delta g_2=0.17\text{dB}$, por lo que bastaría $p_{\min} \angle \theta$ para el cálculo del contorno $g_{\text{SUP}} \angle \phi$.

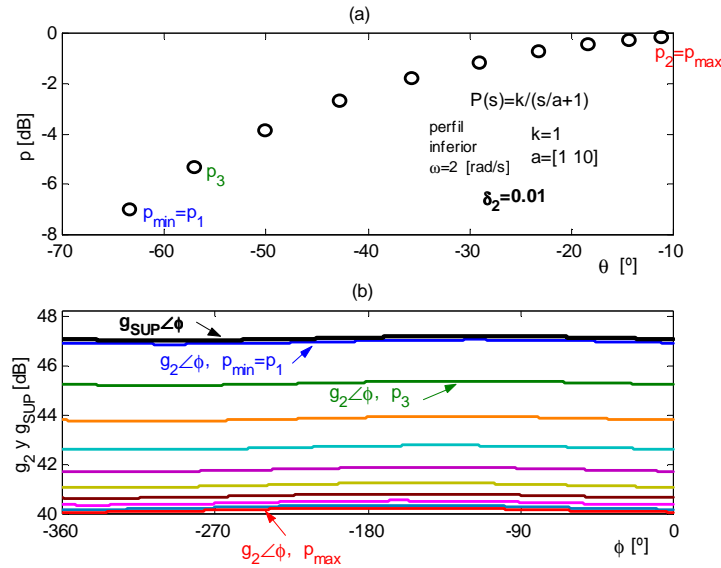


Figura 5-17: Contorno intersección tipo B para plantilla genérica, cuando $\delta_2 > 1$ disminuye

Enunciado Simplificación 2 (supuesta válida la Simplificación 1):

Para el cálculo del contorno intersección, $g_{\text{SUP}} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, bastaría la solución $g_2 \angle \phi$ asociada a la planta de módulo mínimo en la plantilla, $p_{\min} \angle \theta$ si: $\Delta g_2 < \min-\Delta p$, siendo $\min-\Delta p$ el salto mínimo en magnitud entre plantas discretas adyacentes del perfil inferior de la plantilla. Δg_2 se define en (5.51) e Δp en (5.49). Si $\Delta g_2 \gg \max-\Delta p$, siendo $\max-\Delta p$ el salto en magnitud entre las plantas discretas extremas en el perfil inferior de la plantilla, no resulta adecuado aplicar la Simplificación 2.

Contornos Intersección de tipología A

Continuando con el mismo ejemplo anterior, donde $\mathfrak{I}P(j\omega_i) = \{p \angle \theta\}$ es la plantilla genérica en la Figura 5-15(a), ahora la especificación $\delta_2=1.3 > 1$ da lugar a contornos de tipología A, $g_{\text{INF SUP}} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{\text{IS}} \subseteq [-360^\circ, 0^\circ]$. En su

definición intervenían tanto el perfil superior como el inferior de la plantilla convexa en la Figura 5-15(b), según la Simplificación 1. La planta con incertumbre del ejemplo es: $\wp = \{P(s) = k/(s/a+1), k \in [1, 10], a \in [1, 10]\}$, evaluada en la frecuencia $\omega_i = 2 \text{ rad/s}$. El perfil superior lo constituyen las plantas discretas para $k=10$, y tres puntos logarítmicamente espaciados para $a \in [1, 10]$. Y el perfil inferior, $k=1$ y los tres puntos en $a \in [1, 10]$. La Figura 5-18 reproduce los perfiles superior e inferior de plantilla a considerar. Sobre ellos se definen las plantas y magnitudes características en la determinación del contorno intersección: $P_{2S} = 10(20\text{dB}) \angle -11^\circ$, $P_{2I} = 1(0\text{dB}) \angle -11^\circ$, $P_{1S} = 4.5(13\text{dB}) \angle -63^\circ$, $P_{1I} = 0.5(-7\text{dB}) \angle -63^\circ$. Las conclusiones son paralelas a las del caso $\delta_j > 1$ en la Sección 4.3.3.2.

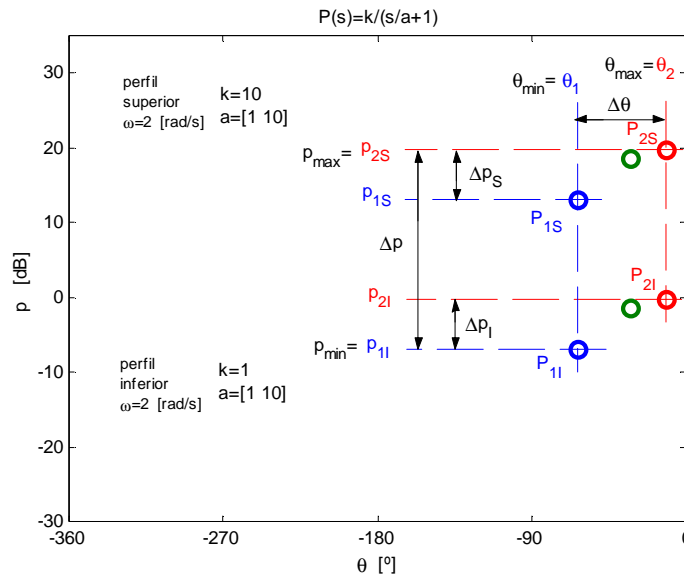


Figura 5-18: Definición de variables sobre plantilla para contornos tipo A ($\delta_2 > 1$)

Los contornos de tipología A resultantes, $\mathcal{G}_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} \subseteq [-360^\circ, 0^\circ]$, para la plantilla genérica $\mathcal{S}P(j\omega) = \{p \angle \theta\}$ de la Figura 5-18 se muestran en la Figura 5-19. Sobre ésta se anotan los parámetros característicos del contorno intersección, calculables a partir de las definiciones hechas tanto para contornos simples en la Sección 5.2.1 como para contornos con incertumbre horizontal (Sección 5.2.2.1) y vertical (Sección 5.2.2.2). A continuación se resumen todos ellos.

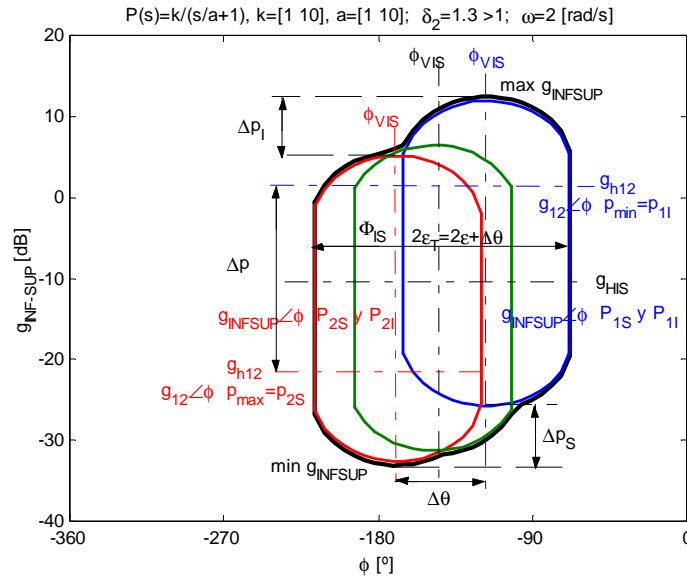


Figura 5-19: Contorno intersección tipo A ($\delta_2 > 1$) para plantilla genérica

(i) Las dos plantas P_I : P_{1I} y P_{1S} dan lugar a dos contornos simples con el mismo eje vertical ϕ_{VIS} según (5.42), ya que poseen la misma fase $\theta_{min} = \theta_I$. Lo mismo ocurre para las plantas P_I : P_{1I} y P_{1S} , que comparten la misma fase $\theta_{max} = \theta_2$. El eje vertical del contorno intersección tipo A puede calcularse entonces:

$$\phi_{VIS} = -180^\circ - \frac{(\theta_{min} + \theta_{max})}{2} = -180^\circ - \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \quad (5.52)$$

Y también según (5.42) la distancia que separa ambos ejes verticales (ϕ_{VIS} para P_1 y ϕ_{VIS} para P_2) resulta igual a la incertidumbre horizontal de la plantilla considerada:

$$\Delta\theta = |\phi_{VIS}(\theta_2) - \phi_{VIS}(\theta_1)| = |\theta_2 - \theta_1| = |\theta_{max} - \theta_{min}| \quad (5.53)$$

La amplitud horizontal de los contornos resultará:

$$2\varepsilon_T = \Delta\theta + 2\varepsilon \quad (5.54)$$

Y por tanto, el intervalo de existencia de contornos se define:

$$\Phi_{IS} = \phi_{VIS} \mp \varepsilon_T = \phi_{VIS} \mp [\Delta\theta / 2 + \varepsilon] \quad (5.55)$$

con ϕ_{VIS} en (5.52), ε_T en (5.54), ε en (5.22) y $\Delta\theta$ en (5.53).

En el ejemplo, siendo $\theta_{max} = \theta_2 = -11^\circ$ y $\theta_{min} = \theta_1 = -63^\circ$ (véase Figura 5-18), resultan: $\phi_{VIS} = -143^\circ$ según (5.52), $\Delta\theta = 52^\circ$ según (5.53), $\varepsilon = 50^\circ$ en (5.22),

$2\varepsilon_T=152^\circ$ según (5.54), y $\Phi_{IS}=[-219^\circ, -67^\circ]$ según (5.55); (véase la Figura 5-19).

Nótese que la definición de ε_T en (5.54) coincide con la de (5.35), válida para contornos A cuando sólo existía incertidumbre horizontal en la plantilla (véase la Figura 5-7). Por tanto, los comentarios allí pronunciados son ahora igualmente aplicables. Según aquellos, si la incertidumbre horizontal, $\Delta\theta$, es muy grande, los contornos $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} \subseteq [-360^\circ, 0^\circ]$, pueden llegar a ocupar toda la banda angular $\Phi_{IS} = \Phi [-360^\circ, 0^\circ]$, incluso aunque $\varepsilon \ll 90^\circ$. La máxima anchura de contornos A simples 2ε ($\varepsilon \rightarrow 90^\circ$) se produce cuando $\delta_2 \rightarrow 1$ (véase Sección 5.2.3), y si δ_2 disminuye aún más se hace $\delta_2 < 1$ y se cambia a tipología B de contornos. Sin embargo, la máxima anchura de contornos A intersección $2\varepsilon_T$ se produce, o bien cuando $\Delta\theta/2 \rightarrow 180^\circ$ (independientemente de ε y, por tanto, de δ_2) o cuando $\Delta\theta/2$ crece (aun siendo $\Delta\theta \ll 360^\circ$) reforzado por un decremento de δ_2 ($\delta_2 \rightarrow 1$ y $\varepsilon \rightarrow 90^\circ$). En el segundo caso ($\Delta\theta \ll 360^\circ$), al presentarse una tipología A de contornos intersección o en el límite ($\delta_2 \rightarrow 1$) un cambio a tipología B, siempre a priori (sin considerar la contribución del resto de especificaciones) habrá solución. Sin embargo, en el primer caso cuando la incertidumbre se acerca al límite ($\Delta\theta \approx 360^\circ$, $\delta_2 > 1$) persiste una tipología A de contornos intersección. Y como para ésta, existe una curva g_{SUP} y otra g_{INF} que ocuparán todo el intervalo $[-360^\circ, 0^\circ]$, no hay solución posible para la especificación $|T_2(j\omega_i)| \leq \delta_2(\omega_i)$, con $\delta_2(\omega_i) > 1$.

En resumen, **cuando la incertidumbre horizontal de la plantilla $\Delta\theta$ aumenta, las garantías de solución para cumplir $|T_2(j\omega)| \leq \delta_2(\omega)$ con $\delta_2 > 1$ (tipología A) disminuyen. Incluso puede llegarse a la inexistencia de solución. Véase la Figura 5-8. Y si dada una incertidumbre $\Delta\theta$ la tolerancia de especificación δ_2 disminuye, tras pasar de una tipología A a una tipología B de contornos intersección en ω_i , también disminuye la posibilidad de solución al considerar el resto de especificaciones $|T_k| \leq \delta_k$, $k=1,4$ en la misma o en próximas frecuencias ω_i ; véase Sección 5.4.**

- (ii) La magnitud máxima del contorno intersección de tipo A, $max-g_{INFSUP}$, coincide con la máxima magnitud del contorno simple para la planta de módulo mínimo, $p_{min} \angle \theta$, en la plantilla $\{p \angle \theta\}$. Sustituyendo $p_{min} \angle \theta$ en $max-g_2$ en (5.25) o en $max-g_{INFSUP}$ en (5.45) se define:

$$p_{min} \angle \theta \Rightarrow \boxed{\max g_{INFSUP} = \frac{(\delta_2 + 1)}{p_{min} \delta_2}, \phi_{maxg} = -180^\circ + \theta} \quad (5.56)$$

Según la Figura 5-18, $p_{min} \angle \theta$ coincide con $P_{1I} = p_{1I} \angle \theta_I = 0.5(-7\text{dB}) \angle -63^\circ$. Se comprueba según (5.56): $\max g_{INFSUP} = 3.5(11\text{dB})$ en $\phi_{maxg} = -117^\circ$. Véase la Figura 5-19.

Nótese que la plantilla genérica del ejemplo en la Figura 5-15(a) sigue un modelo de plantilla φ_1 (véase Figura 3-1 en Capítulo 3), donde la planta de módulo mínimo es también la de fase mínima, $p_{min} \angle \theta_{min}$. Sin embargo, en plantillas de tipo φ_2 la planta de módulo mínimo tiene fase máxima, $p_{min} \angle \theta_{max}$. Por ello, genéricamente se empleará $p_{min} \angle \theta$.

(iii) Paralelamente, la magnitud mínima del contorno intersección de tipo A, $\min g_{INFSUP}$, coincide con la mínima magnitud del contorno simple doblevaluado para la planta de módulo máximo $p_{max} \angle \theta$. Sustituyendo $p_{max} \angle \theta$ en $\min g_I$ en (5.24) o en $\min g_{INFSUP}$ en (5.44) se define:

$$p_{max} \angle \theta \Rightarrow \boxed{\min g_{INFSUP} = \frac{(\delta_2 - 1)}{p_{max} \delta_2}, \phi_{ming} = -180^\circ + \theta} \quad (5.57)$$

Según la Figura 5-18, $p_{max} \angle \theta$ coincide con $P_{2S} = p_{2S} \angle \theta_2 = 10(20\text{dB}) \angle -11^\circ$. Se comprueba según (5.57) $\min g_{INFSUP} = 0.023(-32.7\text{dB})$ en $\phi_{ming} = -169^\circ$. Véase la Figura 5-19.

(iv) El nuevo eje de simetría horizontal del contorno intersección $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS}$ depende de los ejes de simetría g_{h12} de los contornos simples $g_{12} \angle \phi$ para las plantas de los extremos de la plantilla, $p_{max} \angle \theta$ y $p_{min} \angle \theta$. Definidos dichos ejes en (5.27), la media entre ambos, g_{h12} para p_{max} y g_{h12} para p_{min} , ha de calcularse en magnitudes logarítmicas, resultando la misma expresión que en (5.46)⁴:

$$\boxed{g_{HIS} \text{ dB} = \frac{1}{2} Lm \left(\frac{\delta_2^2 - 1}{\delta_2^2} \frac{1}{p_{max} p_{min}} \right)} \quad (5.58)$$

Nótese que calculando la media entre g_{h12} para p_{max} y g_{h12} para p_{min} en magnitudes lineales no se obtendría el mismo resultado, ya que el logaritmo de una suma difiere de la suma de logaritmos.

En el ejemplo ($\delta_2 = 1.3$), siendo $P_{2S} = p_{max} \angle \theta = 10(20\text{dB}) \angle -11^\circ$ y $P_{1I} = p_{min} \angle \theta = 0.5(-7\text{dB}) \angle -63^\circ$, se comprueba que $g_{HIS} \text{ dB} = -10.9\text{dB}$ según

⁴ En (5.46) las plantas p_{max} y p_{min} tenían la misma fase al tratarse de una plantilla con sólo incertidumbre vertical. Ahora, para una plantilla genérica (incertidumbre en fase y ganancia), p_{max} y p_{min} tendrán fases diferentes.

(5.58). También según (5.27) resulta para P_{2S} $g_{h12}=0.064(-23.9\text{dB})$, y para P_{1I} se tiene $g_{h12}=1.28(2.1\text{dB})$. Véase la Figura 5-19.

(v) Del mismo modo Δg_{h12} para p_{max} y p_{min} coincide con el calculado en (5.47) para plantillas con sólo incertidumbre horizontal, aunque ahora el ángulo de ambas plantas sea distinto.

$$\Delta g_{h12} = Lm \frac{p_{max}}{p_{min}} = \Delta p \quad (5.59)$$

Dado que Δg_{h12} coincide con la incertidumbre vertical de la plantilla, Δp , cuanto mayor sea ésta, mayor será la separación entre la curva superior $g_{SUP} \angle \phi$ e inferior $g_{INF} \angle \phi$ del contorno doblevaluado intersección. Y por tanto, se incrementa su agresividad absoluta en magnitud.

En el ejemplo resulta para P_{1I} según (5.27) $g_{h12}=1.28(2.1\text{dB})$ y para P_{2S} resulta $g_{h12}=0.064(-23.9\text{dB})$. Es decir, el salto en decibelios entre ambos ejes resulta $\Delta g_{h12}=26\text{dB}$, que coincide con el obtenido a partir de (5.59), donde $\Delta p=26\text{dB}$. Véase la Figura 5-19.

(vi) No sólo la incertidumbre horizontal absoluta, $\Delta \theta$, incrementa la agresividad de los contornos intersección, como se demostró en (i). También, los valores relativos de $\{\theta\}$ condicionan ésta del mismo modo que se argumentó en la Sección 5.2.2.1, apartado (v) para tipología A. Véase la Figura 5-9.

(vii) No solo la incertidumbre vertical absoluta, Δp , incrementa la agresividad de los contornos, como se demostró en (v). También, los valores relativos de $\{p\}$ condicionan ésta, tal y como se discutió en la Sección 5.2.2.2, apartado (vii) para tipología A. Véase la Figura 5-14.

(viii) Los contornos para G y para L_0 expresan lo mismo, no importando tampoco la selección de la planta nominal.

Simplificación 3

Si el objetivo de $\delta_2(\omega_i) > 1$ es la atenuación de perturbaciones, la porción relevante del contorno intersección doblevaluado o de tipo A será la superior, $g_{SUP} \angle \phi$. En estos casos la curva inferior, $g_{INF} \angle \phi$, no será dominante frente a las que generen especificaciones $\delta_i(\omega_i) > 1$ (por ejemplo, para estabilidad) o $\delta_f(\omega_i)$ (para limitar el esfuerzo de o control), en la misma frecuencia ω_i . En estos casos, bastaría emplear el perfil inferior de la plantilla, responsable de la curva $g_{SUP} \angle \phi$. Y si además, la plantilla en ω

fuera rectangular, su perfil inferior se corresponde con una plantilla de sólo incertidumbre horizontal, revisada en la Sección 5.2.2.1.

Simplificación 4

Si el objetivo de $\delta_2(\omega) > 1$ es limitar la función sensibilidad $|S| = |1/(1+L)|$ con el fin de garantizar unos márgenes robustos de estabilidad, interesará vigilar la curva inferior del contorno intersección doblevaluado, $g_{INF} \angle \phi$ en $g_{INFSUP} \angle \phi$. En frecuencias altas las especificaciones de estabilidad y, por tanto, dichos contornos $g_{INF} \angle \phi$ dominarán a los contornos representativos de especificaciones del tipo $\delta_{2,3,5}$ que buscan los beneficios de la realimentación. Dichas tolerancias $\delta_{2,3,5}$ que persiguen una ganancia mínima de comportamiento dinámico no pueden perpetuarse hasta altas frecuencias, donde deben relajarse sus valores. Donde dominan las especificaciones de estabilidad $\delta_2(\omega) > 1$, para determinar la curva $g_{INF} \angle \phi$ bastará emplear el perfil superior de la plantilla de alta frecuencia ω_i . Y si además la plantilla fuera rectangular, el perfil superior se correspondería con una plantilla de sólo incertidumbre horizontal, revisada en la Sección 5.2.2.1.

Comparación de Contornos para G y para L_0

De acuerdo al Paso 12 del Algoritmo 3.1 en el Capítulo 3, los contornos para L_0 se calculan desplazando los contornos para G una magnitud y fase determinadas por la planta nominal, $P_0(j\omega) = p_0 \angle \theta_0$. Como además del desplazamiento vertical y horizontal de los contornos, también cambia el nuevo punto de referencia en el diseño, las necesidades a aportar con el control realimentado pueden interpretarse indistintamente en los contornos para G o para L_0 . El punto de referencia en los G -contornos es el $0\text{dB} \angle 0^\circ$, situación de partida en la que $G=1$. En los L_0 contornos se parte de la planta nominal, $p_0 \angle \theta_0$, que representa la situación de partida $G=1$, $L_0=P_0$. Por este mismo razonamiento resulta también indiferente que planta sea seleccionada como planta nominal.

A continuación se muestran unas gráficas que ilustran la equivalencia entre lo expresado por los contornos para el controlador, G , y por los contornos para la función de transferencia en lazo abierto, L_0 . La Figura 5-20 para una tipología B de contornos ($0 < \delta_2 < 1$) y la Figura 5-21 para una tipología A ($\delta_2 > 1$).

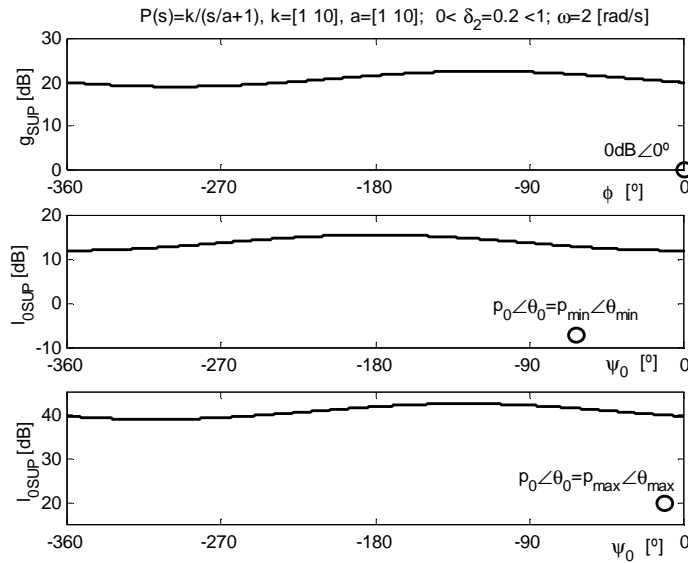


Figura 5-20: Comparación de contornos para G y L_0 en tipologías B ($0 < \delta_2 < 1$)

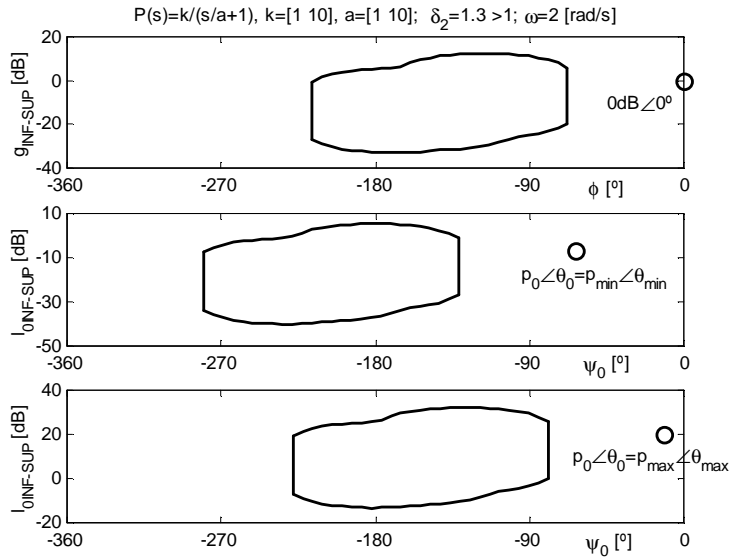


Figura 5-21: Comparación de contornos para G y L_0 en tipologías A ($\delta_2 > 1$)

5.2.3 INFLUENCIA DE LA ESPECIFICACIÓN, $\delta_2(\omega)$

De acuerdo a las conclusiones de la Sección 5.2.1, dependiendo exclusivamente del valor de la especificación en cada frecuencia, $\delta_2(\omega)$, el contorno ω que representa la especificación robusta $|T_2(j\omega)| \leq \delta_2(\omega)$ será de tipo (contorno simplevaluado superior) si $0 < \delta_2 < 1$ o de tipología A (contorno doblevaluado) si $\delta_2 > 1$; véase Figura 5-22.

Si $|T_2| < \delta_2$ según (3.7), donde $|T_2| = |1/(1+L)|$ representa la función de sensibilidad $|S|$, la tolerancia δ_2 implica un límite superior para dicha $|S|$.

Sobre el esquema de control de la Figura 2.1 y las ecuaciones (3.4) y (3.7) se comprueba que $|T_2|$ expresa el efecto en la salida de perturbaciones que se suman en ésta, $|Y/D_2|$. Desde este punto de vista, δ_2 debe eliminar el efecto de las posibles perturbaciones en la salida, D_2 , sobre la propia salida, Y . Para ello, lo más adecuado son tolerancias de atenuación del tipo $0 < \delta_2 < 1$, que darán lugar a tipologías B de contornos. La tipología B exige una ganancia mínima en L para eliminar adecuadamente la perturbación. Según esto parece lógico pensar que una disminución de δ_2 (siendo $0 < \delta_2 < 1$) exige un mayor nivel de atenuación y, por tanto, la agresividad expresada con el contorno tipo B debe aumentar. Es decir, los contornos simples $\{g_2 \angle \phi\}$ y su contorno intersección $g_{SUP} \angle \phi$ deben elevarse para todo $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, al disminuir δ_2 . Véase la Figura 5-22(a).

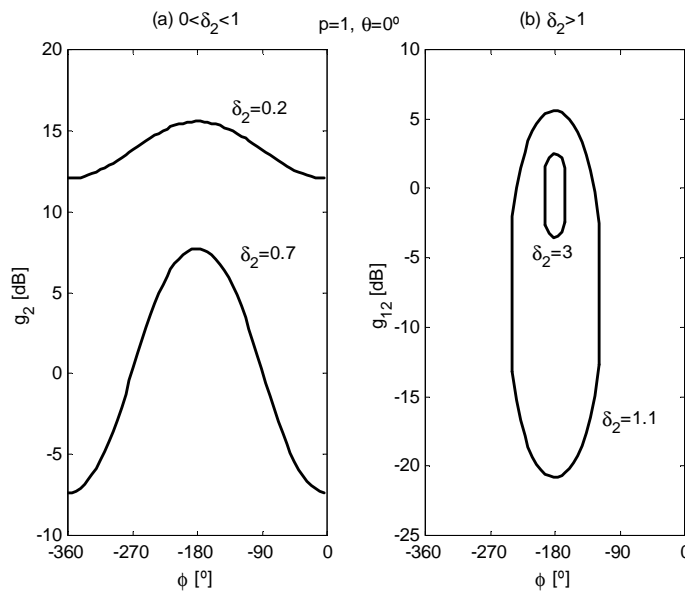


Figura 5-22: Influencia del valor de especificación δ_2 en contornos QFT

Por otro lado, aunque en el sistema las perturbaciones D_2 no fueran importantes, nunca debe excluirse una limitación del tipo $|T|=|T_1|=|L/(1+L)|\leq\delta_1$ o $|S|=|T_2|=|1/(1+L)|\leq\delta_2$ para evitar la amplificación de pequeñas e incluso insignificantes perturbaciones D_2 en Y (Horowitz y Sidi, 1972). La limitación de la sensibilidad complementaria $|T|$ con δ_1 suele entenderse como una especificación de estabilidad robusta, exigiendo $\delta_1=1.3$ como mínimo para conseguir unos márgenes de estabilidad adecuados. De manera equivalente puede limitarse la sensibilidad $|S|$ con tolerancias δ_2 también para garantizar una estabilidad mínima, en virtud de la relación en (2.9) entre las funciones S y T , hallada por Bode (1945). La equivalencia entre los márgenes de ganancia y fase obtenidos a partir de δ_1 o δ_2 se expresa en la Sección 5.4. En cualquier caso, unos márgenes de estabilidad adecuados siempre exigirán $\delta_2>1$ (o $\delta_1>1$), dando lugar a unos contornos de tipología A, simples $g_{12}\angle\phi$ o intersección $g_{INFSUP}\angle\phi$. Una disminución de δ_2 (siendo $\delta_2>1$) implica unas condiciones de estabilidad más severas (mayores márgenes de ganancia y fase) por lo que los contornos de tipo A deberán ser igualmente más agresivos. Véase la Figura 5-22(b). Valores δ_2 por debajo de la unidad o cercanos a ésta hasta elevadas frecuencias (suavización del pico en $|S|$), en términos de estabilidad equivalen a unos márgenes muy conservadores. Éstos no resultan adecuados en la práctica ya que el ancho de banda de L aumenta mucho. Entonces, ante pequeñas señales de perturbación o ruidos se saturarán los actuadores impidiendo alcanzar los objetivos de la realimentación

Luego, en general, una reducción de la tolerancia δ_2 conceptualmente debe implicar contornos más agresivos. Así lo demuestra la transición entre una tipología A de contornos para valores $\delta_2>1$ (menos restrictiva ya que los contornos $g_{12}\angle\phi$ o $g_{INFSUP}\angle\phi$ existen sólo en una cierta banda angular) a una tipología B de contornos ($g_2\angle\phi$ o $g_{SUP}\angle\phi$ ocupando todo el intervalo de fases diseño) cuando $0<\delta_2<1$. Y dentro de cada tipología A o B una disminución de δ_2 debe también implicar un contorno A o B más agresivo. Véase la Figura 5-22.

A continuación se demuestran formalmente para QFT estas conclusiones, predecibles conceptualmente en términos de control realimentado. En la Sección 5.2.3.1 se trata la tipología B de contornos y en la Sección 5.2.3.2 la tipología A. En cada una de estas secciones, para mayor simplicidad, se emplearán primeramente los contornos sin considerar la incertidumbre, es decir, $g_2\angle\phi$ en la tipología B y $g_{12}\angle\phi$ en la tipología A. Después, los resultados obtenidos se generalizarán directamente para el sistema con incertidumbre (tratado previamente en la Sección 5.2.2). Nótese que la

incertidumbre no implicaba un cambio de tipología, aunque sí aumentaba la agresividad expresada dentro de cada tipo de contorno.

5.2.3.1 Valor de Especificación en Contornos Tipo B ($0 < \delta_2 < 1$)

Cuando $0 < \delta_2 < 1$ los contornos son de tipo B (existe g_2 positivo y real en todo $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$ y debe cumplirse que $g \geq g_2 \forall \phi$). Por tanto, cuanto mayor es el módulo g_2 en (5.2b) más agresivo es el contorno. Y así se demostrará que ocurre cuando δ_2 disminuye, como ilustra la Figura 5-22(a). Esto se resume como,

$$\delta_2 \downarrow \Rightarrow g_2 \uparrow, \forall \phi \in [-360^\circ, 0^\circ] \tag{5.60}$$

Demostración de (5.60)

Considerando p y θ constantes, se analizará la influencia de δ_2 en el contorno $g_2 \angle \phi$. Se demostraron en la Sección 5.2.1.1 las siguientes afirmaciones sobre la ecuación (5.7b): (i) $t_2 > 0$ y real, (ii) $|t_2| > |t_1|$, (iii) t_1 real y $t_1 > 0$, si $c < 0$, c en (5.6), (iv) $t_1 < 0$ y real, si $c > 0$, (v) $g_2 \triangleq t_1 + |t_2|$, g_2 real y positivo.

Comparando las ecuaciones (5.2b) y (5.7b), el valor de especificación δ_2 únicamente afecta a la variable α , definida en (5.5). Se cumple que $\alpha < 0$ cuando $0 < \delta_2 < 1$. De acuerdo con (5.7b), la variable α afecta tan sólo a la magnitud del término t_2 , de forma que si δ_2 disminuye, siendo $0 < \delta_2 < 1$ ($\alpha < 0$), $|\alpha|$ aumenta. Y entonces, como $\alpha < 0$, el término t_2 aumenta, siendo $t_2 > 0$ según (i). Paralelamente, al variar δ_2 , t_1 no varía. Y como también se cumple (ii) $|t_2| > |t_1|$, la magnitud g_2 en (v), $g_2 \triangleq t_1 + |t_2|$, aumentará en todo $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$ al incrementarse $t_2 > 0$, independientemente del signo de t_1 . Es decir, al disminuir δ_2 aumenta g_2 en todo $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$, quedando demostrada (5.60).

Demostrada (5.60) para $0 < \delta_2 < 1$, se estudia ahora el comportamiento del contorno $g_2 \angle \phi$ en los extremos del intervalo, esto es, cuando $\delta_2 \rightarrow 0^+$ y cuando $\delta_2 \rightarrow 1^-$. Calculando los límites de la expresión g_2 en (5.2b) se obtiene (véase la Figura 5-23⁵):

$$\lim_{\delta_2 \rightarrow 0^+} g_2 = +\infty \tag{5.61}$$

$$\lim_{\delta_2 \rightarrow 1^-} g_2 = \begin{cases} \frac{2|\cos(\phi + \theta)|}{p}, & \phi \in \Phi_2 = [-270^\circ - \theta, -90^\circ - \theta] \\ 0, & \phi \in \bar{\Phi}_2 \end{cases} \tag{5.62}$$

⁵ Nótese que las magnitudes en la formulación son lineales, mientras que sobre la figura se expresan en dB.

A partir de (5.62), se puede definir el máximo del contorno, $max-g_2$, cuando $\delta_2 \rightarrow 1^-$, como el valor que toma (5.62) en $\phi + \theta = -180^\circ$. El mismo resultado se obtiene aplicando límites en la expresión (5.12).

$$\lim_{\delta_2 \rightarrow 1^-} max g_2 = \frac{2}{p}, \phi_{maxg_2} = -180^\circ - \theta \quad (5.63)$$

La sensibilidad de $g_2 \angle \phi$ a variaciones en δ_2 no es uniforme en todo el intervalo $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, tal como ilustra la Figura 5-22(a) o la Figura 5-23. Una forma de cuantificar la variación absoluta en $g_2 \angle \phi$ es medir la variación entre su punto de máximo y mínimo. Empleando las definiciones $min g_2$ en (5.13) y $max g_2$ en (5.12), se define Δg_2 como:

$$\Delta g_2 = Lm(max g_2) - Lm(min g_2) = Lm \left(\frac{1 + \delta_2}{1 - \delta_2} \right) \quad (5.64)$$

Y tomando límites en esta expresión:

$$\lim_{\delta_2 \rightarrow 0^+} \Delta g_2 = 0 \text{ [dB]} \quad (5.65)$$

$$\lim_{\delta_2 \rightarrow 1^-} \Delta g_2 = +\infty \text{ [dB]} \quad (5.66)$$

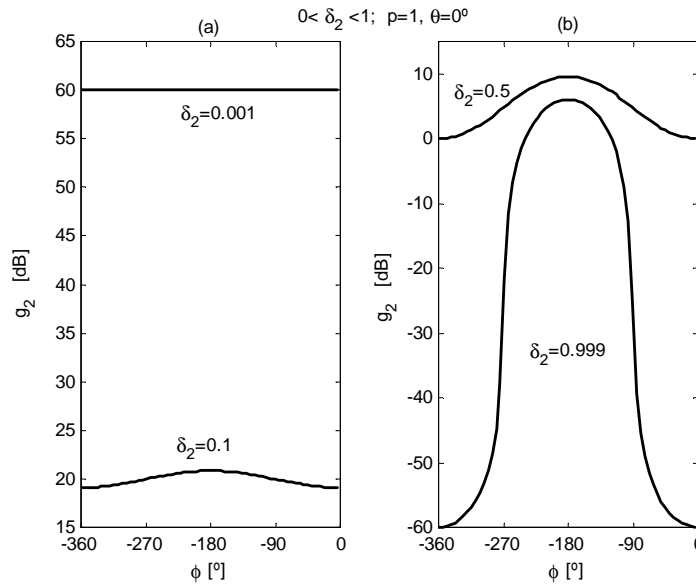


Figura 5-23: Influencia de $0 \leq \delta_2 \leq 1$ en contornos tipo B sin incertidumbre

De acuerdo a (5.60), (5.61), (5.62), (5.65) y (5.66) se puede determinar de forma exacta la contribución de δ_2 en todo el intervalo $0 \leq \delta_2 \leq 1$, como sigue:

Conclusión: influencia del valor de especificación δ_2 en contornos de tipo B ($0 \leq \delta_2 \leq 1$) sin considerar la incertidumbre ($g_2 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$)

De acuerdo a (5.60) cuando δ_2 se reduce (especificación más agresiva) el contorno $g_2 \angle \phi$ aumenta su altura (g_2) $\forall \phi$, $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$, y además según (5.65) la curva pierde desnivel (es menos sensible a la variación de δ_2). En el límite, $\delta_2 \rightarrow 0^+$, dicho contorno $g_2 \angle \phi$ no tiene pendiente (línea recta) según (5.65) y se eleva indefinidamente según (5.61). La Figura 5-23 ilustra este resultado. Nótese que las magnitudes sobre la gráfica se representan en dB, mientras que los límites calculados en la formulación están en magnitudes lineales.

Por el contrario, un aumento de δ_2 (relajación de la especificación) según (5.60) produce un descenso de $g_2 \angle \phi$, $\forall \phi$. Además, de acuerdo a (5.66) la diferencia entre sus puntos de máximo y mínimo se agudiza. Véase la Figura 5-23. En el límite, cuando $\delta_2 \rightarrow 1^-$, según (5.62) y (5.66) el contorno $g_2 \angle \phi$ sólo existiría (real, positivo y mayor que cero) en $\phi \in \Phi_2 = [-270^\circ - \theta, -90^\circ - \theta]$, tomando el valor límite cosenoidal que define (5.62). En particular su valor máximo según (5.63) es $2/p$ en $\phi = -180^\circ - \theta$. En $\phi \in \bar{\Phi}_2$ el contorno $g_2 \angle \phi$ se hace mínimo hasta extinguirse ($g_2 = 0$). Es decir, cuando $\delta_2 \rightarrow 1^-$ hay una transición a tipología A de contornos. En $\phi \in \Phi_2$, para $\delta_2 \rightarrow 1^+$, aparecerá también la curva $g_1 \angle \phi$ (valores reales y positivos también para g_1). Véase la Figura 5-24.

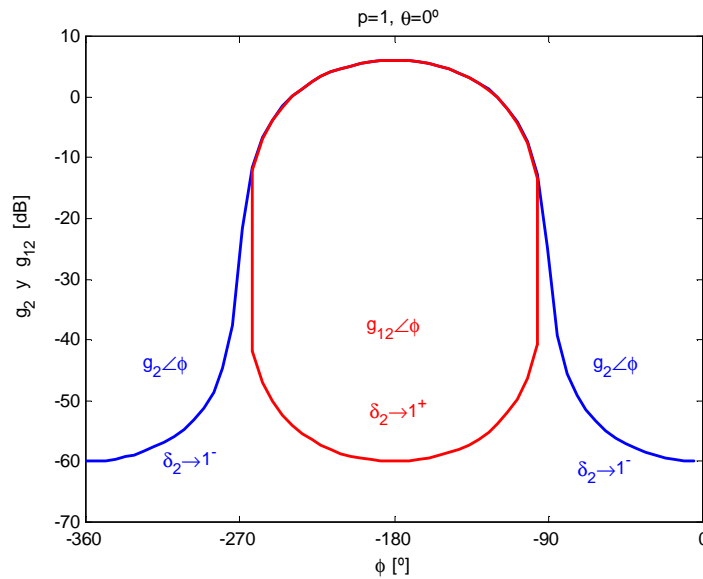


Figura 5-24: Cambio de tipología de contornos: B para $\delta_2 \rightarrow 1^-$ y A para $\delta_2 \rightarrow 1^+$

Conclusión: influencia del valor de especificación δ_2 en contornos B ($0 \leq \delta_2 \leq 1$) considerando la incertidumbre ($g_{SUP} \angle \phi, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$)

El efecto de la variación de δ_2 sobre los contornos con y sin incertidumbre es el mismo. Teniéndose en cuenta la contribución de la incertidumbre, estudiada en la Sección 5.2.2, la conclusión anterior puede generalizarse como:

- (i) Cuando δ_2 disminuye el contorno $g_{SUP} \angle \phi$ incrementa su altura $g_{SUP} \forall \phi, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, y además la curva pierde pendiente (es menos sensible a la variación de δ_2).
- (ii) En el límite, $\delta_2 \rightarrow 0^-$, dicho contorno $g_{SUP} \angle \phi$ tiende a una línea recta (no tiene pendiente) y se eleva infinitamente ($g_{SUP} = +\infty \forall \phi$).
- (iii) Cuando δ_2 aumenta el contorno $g_{SUP} \angle \phi$ desciende $\forall \phi$. Además, la diferencia entre sus puntos de máximo y mínimo, definida en (5.51), se agudiza de acuerdo a (5.66). La influencia de la incertidumbre en fase y ganancia se detalló en la Sección 5.2.2.
- (iv) En el límite cuando $\delta_2 \rightarrow 1^-$ el contorno $g_{SUP} \angle \phi$ existe (real, positivo y mayor que cero) en $\phi \in \Phi_S = [-270^\circ - \theta_{max}, -90^\circ - \theta_{min}]$, y está limitado a un cierto valor. Éste (forma del contorno con incertidumbre $\delta_2 \rightarrow 1^-$) puede deducirse de los resultados en (5.62) para el contorno simple $g_2 \angle \phi$ junto con el estudio de la incertidumbre en la Sección 5.2.2. En particular, el valor máximo del contorno con incertidumbre se definiría aplicando límites en (5.48):

$$p_{min} \angle \theta \Rightarrow \lim_{\delta_2 \rightarrow 1^-} \max g_{SUP} = \frac{2}{p_{min}}, \phi_{maxg_{SUP}} = -180^\circ - \theta \quad (5.67)$$

En $\phi \in \bar{\Phi}_S$ el contorno $g_{SUP} \angle \phi$ desaparece. Es decir, cuando $\delta_2 \rightarrow 1^-$ hay una transición a tipología A de contornos. En $\phi \in \Phi_2$ para $\delta_2 \rightarrow 1^+$ aparecerá la curva $g_{INF} \angle \phi$ (valores reales, positivos y mayores que cero para $\{g_I\}$). En el punto de transición: cuando $\delta_2 \rightarrow 1^-$ solo existe $g_{SUP} \angle \phi, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, y cuando $\delta_2 \rightarrow 1^+$ se tiene $g_{INF} \angle \phi, \phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp (\Delta\theta/2 + \varepsilon)]$, ϕ_{VIS} en (5.52), $\Delta\theta$ en (5.53) y $\varepsilon = 90^\circ$ según (5.22).

5.2.3.2 Valor de Especificación en Contornos Tipo A ($\delta_2 > 1$)

Cuando $\delta_2 > 1$ se obtiene una tipología A de contornos simples (sin incertidumbre), es decir, existen g_{I2} en $\phi \in \Phi_{I2} = [\phi_{v12} \mp \varepsilon]$, g_{I2} en (5.2), ϕ_{v12} en (5.26) y ε en (5.22). Para cumplir la especificación robusta, estos contornos

deben satisfacerse tal que: $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$ y $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$. Según esto, los contornos doblevaluados serán más agresivos en fase cuando la banda real donde g_{12} son reales y positivos aumenta (ε aumenta). Y más agresivos en magnitud cuando el módulo g_2 aumenta y el módulo g_1 disminuye. Una disminución de δ_2 produce un incremento de la agresividad en fase y en magnitud del contorno del modo indicados, tal y como ilustra la Figura 5-22(b), y resume la siguiente ecuación (la interpretación en términos de control de este hecho se describe al comienzo de la Sección 5.2.3).

$$\delta_2 \downarrow \Rightarrow \varepsilon \uparrow, g_1 \downarrow, g_2 \uparrow \text{ para } g_{12} \angle \phi, \phi \in \Phi_{12} = [\phi_{v12} \mp \varepsilon] \quad (5.68)$$

Demostración de (5.68)

Considerando p y θ constantes, se analizará la influencia de la variación de δ_2 , siendo $\delta_2 > 1$, en el contorno $g_{12} \angle \phi, \phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, g_{12} en (5.2) y ε en (5.22). Comparando las ecuaciones (5.2) y (5.7), el valor de especificación δ_2 únicamente afecta a la variable α , definida en (5.5). Siendo $\delta_2 > 1$ se cumple $\alpha > 0$. Para la ecuación (5.7a,b):

$$g_{1,2} = \frac{1}{p} \left(\underbrace{-c}_{t_1} \mp \sqrt{\underbrace{c^2}_{t_2} - \alpha} \right),$$

siguen siendo ciertas las afirmaciones (i) a (vi) en la Sección 5.2.1.2, que se resumen a continuación. En $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, con ε en (5.22), se cumple: (i) g_{12} reales y positivas; (ii) $t_1 > 0$ y real; (iii) $t_2 > 0$ y real; (iv) $t_1 > t_2$; (v) $g_1 \triangleq |t_1| - |t_2|$; (vi) $g_2 \triangleq |t_1| + |t_2|$.

De acuerdo con (5.7), la magnitud α afecta tan sólo a la magnitud del término t_2 . Según α definida en (5.5), si δ_2 disminuye siendo $\delta_2 > 1$ ($\alpha > 0$), α disminuye. Y, por tanto:

- Para un mayor número de ángulos Φ_{12} se cumplía la expresión (5.19) resultando g_{12} reales y positivos. Es decir, Φ_{12} se amplía o lo que es lo mismo **ε aumenta al disminuir δ_2** .
- El término t_2 , allí donde es real ($\phi \in \Phi_{12}$), incrementa su magnitud, siendo según (iii) $t_2 > 0$. En $\phi \notin \Phi_{12}$ también según (ii) $t_1 > 0$ y (iv) $t_1 > t_2$, entonces al aumentar t_2 la magnitud g_1 disminuye, ya que según (v) $g_1 \triangleq |t_1| - |t_2|$. Y paralelamente, al incrementarse t_2 la magnitud g_2 aumenta, de acuerdo a (vi) $g_2 \triangleq |t_1| + |t_2|$. Luego **al disminuir δ_2 , la magnitud g_2 aumenta y la magnitud g_1 disminuye**.

* * *

Demostrada (5.68) para $\delta_2 > 1$, se analizan ahora los valores extremos de especificación, es decir, los contornos cuando $\delta_2 \rightarrow 1^+$ y cuando $\delta_2 \rightarrow +\infty$.

Calculando los límites de la expresión g_{12} en (5.2) y de ε en (5.22), cuando $\delta_2 \rightarrow +\infty$ se obtiene:

$$\lim_{\delta_2 \rightarrow +\infty} g_{12} = \frac{1}{p} \left(-\cos(\phi + \theta) \mp \sqrt{\cos^2(\phi + \theta) - 1} \right) \quad (5.69)$$

$$\lim_{\delta_2 \rightarrow +\infty} \varepsilon = 0^\circ \quad (5.70)$$

Teniendo en cuenta (5.69) y (5.70) se comprueba que cuando la especificación se relaja, en el límite ($\delta_2 \rightarrow +\infty$) el intervalo angular Φ_{12} de existencia de contornos (valores reales positivos) se reduce al punto $1/p \angle -180^\circ - \theta$. Luego, el contorno resultante se resume como (véase Figura 5-25):

$$\lim_{\delta_2 \rightarrow +\infty} g_{12} \angle \phi = \frac{1}{p} \angle -180^\circ - \theta \quad (5.71)$$

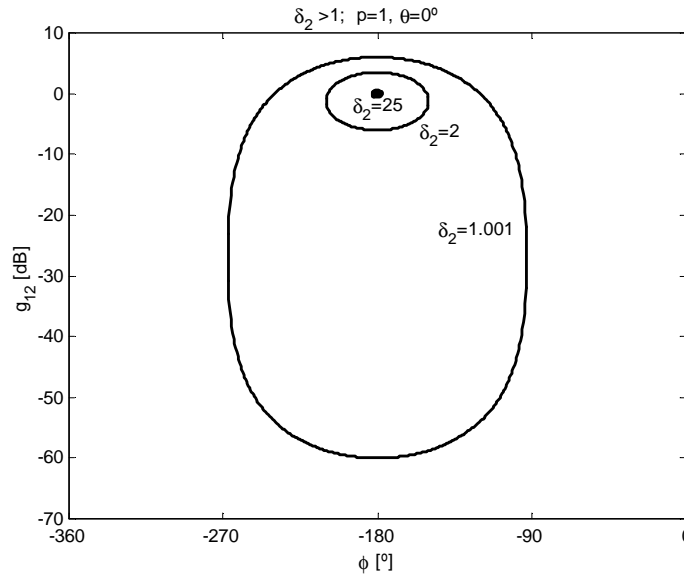


Figura 5-25: Influencia de $\delta_2 > 1$ en contornos tipo A sin la incertidumbre

Y en el otro extremo de variación de δ_2 , calculando los límites cuando $\delta_2 \rightarrow 1^+$ de la expresión g_{12} en (5.2) y de ε en (5.22), y teniendo en cuenta que Φ_{12} como máximo se extiende en $[-270^\circ - \theta, -90^\circ - \theta]$ se obtiene:

$$\lim_{\delta_2 \rightarrow 1^+} \varepsilon = 90^\circ \quad (5.72)$$

$$\begin{cases} \lim_{\delta_2 \rightarrow 1^+} g_2 = \frac{2|\cos(\phi + \theta)|}{p} \\ \lim_{\delta_2 \rightarrow 1^+} g_1 = 0, \end{cases}, \quad \phi \in \Phi_{12} = [-270^\circ - \theta, -90^\circ - \theta] \quad (5.73)$$

Teniendo en cuenta (5.72) y (5.73) se comprueba que cuando la especificación es más agresiva (en el límite para $\delta_2 > 1$ se tendría $\delta_2 \rightarrow 1^+$) el intervalo angular Φ_{12} de existencia de contornos (valores reales positivos) es el máximo, es decir $\varepsilon = 90^\circ$. Además, g_1 ha ido disminuyendo desde $1/p$ en (5.71) a 0 en (5.73). Y g_2 ha ido aumentando desde $1/p$ en (5.71) hasta $2|\cos(\phi + \theta)|/p$ según (5.73). Véase Figura 5-25. Nótese que en la formulación se manejan magnitudes lineales mientras que las figuras representan éstas en decibelios.

Conclusión: influencia del valor de especificación δ_2 en contornos tipo A ($\delta_2 > 1$) sin considerar la incertidumbre de la planta ($g_{12} < \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [\phi_{12} \mp \varepsilon]$)

De acuerdo a (5.68) cuando δ_2 se reduce (especificación más exigente), el contorno $g_{12} < \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [\phi_{12} \mp \varepsilon]$, es más agresivo en magnitud y fase: aumenta g_2 , disminuye g_1 y aumenta ε (aumenta amplitud de Φ_{12}). Además, $g_1 < \phi$ es más sensible que $g_2 < \phi$ a la variación de δ_2 . g_{12} se define en (5.2), ε en (5.22) y ϕ_{12} en (5.26).

En los valores límite, cuando la especificación se relaja infinitamente ($\delta_2 \rightarrow +\infty$) los contornos se reducen a un punto $1/p < -180^\circ - \theta$ según (5.71). A partir de aquí, si δ_2 disminuye, g_1 disminuye desde $1/p$ en (5.71) hasta 0 en (5.73) para $\delta_2 \rightarrow 1^+$. A su vez, g_2 aumenta desde $1/p$ en (5.71) para $\delta_2 \rightarrow +\infty$ hasta $2|\cos(\phi + \theta)|/p$ según (5.73) para $\delta_2 \rightarrow 1^+$. Y el intervalo de existencia de contornos $\Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$ se ensancha desde $\varepsilon = 0^\circ$ hasta $\varepsilon = 90^\circ$. Véase la Figura 5-25. El valor límite de especificación $\delta_2 \rightarrow 1^+$, marca la transición a una tipología B de contornos (estudiados anteriormente), en la que con $\delta_2 \leq 1$, g_1 pasará a tomar valores negativos $\forall \phi$ y g_2 tomará valores positivos y reales en todo el intervalo de diseño, $\Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. Véase Figura 5-24.

Conclusión: influencia del valor de especificación δ_2 en contornos A ($\delta_2 \geq 1$) considerando la incertidumbre de la planta ($g_{INFSUP} < \phi$, $\phi \in \Phi_{12}$)

El efecto de la variación de δ_2 sobre los contornos con y sin incertidumbre es el mismo. Teniéndose en cuenta la contribución de la incertidumbre (estudiada en la Sección 5.2.2) la conclusión anterior puede generalizarse como:

- (i) Cuando δ_2 se reduce, el contorno $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T]$, es más agresivo en magnitud y fase: se eleva su curva superior $g_{SUP} \angle \phi$ y su punto de máximo en (5.56); desciende la curva inferior $g_{INF} \angle \phi$ y su punto de mínimo en (5.57); aumenta la amplitud del intervalo Φ_{IS} en (5.55) (ya que aumenta $2\varepsilon_T$, al aumentar ε con $\Delta\theta = cte$) y el eje vertical ϕ_{VIS} en (5.52) no se modifica. Además, $g_{INF} \angle \phi$ es más sensible que $g_{SUP} \angle \phi$ a la variación de δ_2 .
- (ii) En el límite inferior ($\delta_2 \rightarrow 1^+$) las curvas $g_{INFSUP} \angle \phi$ ocupan el intervalo máximo posible en fase para $\Delta\theta = cte$, al tomar ε su valor máximo 90° . Luego, según (5.55) $\Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp (\Delta\theta/2 + 90^\circ)]$, con ϕ_{VIS} en (5.52) e $\Delta\theta$ ambos constantes. Además, para $\delta_2 \rightarrow 1^+$, y considerando $\Delta p = cte$, la curva superior $g_{SUP} \angle \phi$ se eleva hasta $2|\cos(\phi + \theta)|/p_{min}$ y la curva inferior $g_{INF} \angle \phi$ desciende hasta 0 (desaparece el contorno). Este valor límite de especificación, $\delta_2 \rightarrow 1^+$, marca la transición a una tipología B de contornos (estudiados anteriormente).
- (iii) Cuando δ_2 aumenta, el contorno $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T]$ disminuye su agresividad (aumenta g_{INF} , disminuye g_{SUP} y ε_T se reduce).
- (iv) En el límite, $\delta_2 \rightarrow +\infty$, ε se reduce a 0° por lo que según (5.55) los contornos ocupan un intervalo de fases $\Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \Delta\theta/2]$, con ϕ_{VIS} en (5.52) e $\Delta\theta$, ambos constantes. Luego, la amplitud del intervalo Φ_{IS} se reduce a $2\varepsilon_T = \Delta\theta$. Y en ganancias, el contorno intersección $g_{INFSUP} \angle \phi$ se calcula según (5.71) con $\phi \in \Phi_{IS}$. El máximo de la curva superior $g_{SUP} \angle \phi$ se hace $1/p_{min}$ y el mínimo de $g_{INF} \angle \phi$ desciende hasta, $1/p_{max}$. La separación entre los ejes horizontales de ambas curvas $g_{SUP} \angle \phi$ y $g_{INF} \angle \phi$ se reduce a Δp . Y entre sus ejes verticales a $\Delta\theta$.

5.3 LA SENSIBILIDAD INCLUIDA LA PLANTA

Esta sección analiza los contornos para G y L_0 derivados de una especificación robusta sobre la función sensibilidad más la planta como describe (3.8):

$$|T_3(j\omega)| = \left| \frac{P(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| = \left| \frac{Y(j\omega)}{D_1(j\omega)} \right| \leq \delta_3(\omega), \quad \omega \in \Omega_3$$

Primero la Sección 5.3.1 analiza los contornos sin la incertidumbre, deduciéndose las tipologías de contornos representativas del problema (3.8). A continuación, se demostrará la contribución de la incertidumbre del modelo en los contornos resultantes (Sección 5.3.2). Y por ultimo, la contribución de la tolerancia δ_3 se estudia en la Sección 5.3.3.

5.3.1 TIPOLOGÍAS DE CONTORNOS SIN LA INCERTIDUMBRE

Se trata de definir las tipologías de los contornos $g_1 \angle \phi$ y/o $g_2 \angle \phi$ que no consideran la incertidumbre, es decir, para $P(j\omega_i) = p \angle \theta$ fija, y dado también un valor constante de especificación, $\delta_3(\omega_i) = \delta_3$. Recuérdese que los contornos son las curvas que el controlador $G(j\omega_i) = g \angle \phi$ ha de cumplir para satisfacer la desigualdad de especificación robusta $|T_3| \leq \delta_3$ en (3.8).

El problema se remite a aplicar los Pasos 8 y 9 del Algoritmo 3.1. El Paso 8 resolvía una inecuación cuadrática que se particulariza en este caso como:

$$I_{\omega_i}^{k=3}(p, \theta, \delta_1, \phi) = p^2 \cdot g^2 + 2 \cdot p \cdot \cos(\phi + \theta) \cdot g + \left(1 - \frac{p^2}{\delta_3^2}\right) \geq 0 \quad (5.81)$$

donde, $p \angle \theta$ es una planta cualquiera de la plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$, $\delta_3 = \delta_3(\omega_i)$ es el valor de especificación constante a la frecuencia ω_i y $g \angle \phi$ la expresión polar del controlador en ω_i .

Resolviendo en g la ecuación cuadrática $I_{\omega_i}^{k=3} = 0$ asociada a (5.81), se obtienen dos soluciones: g_1 (valor negativo de la raíz cuadrada) en (5.82a) y g_2 (valor positivo de la raíz cuadrada) en (5.82b):

$$g_{1,2} = \frac{1}{p} \left(-\cos(\phi + \theta) \mp \sqrt{\cos^2(\phi + \theta) - \left(1 - \frac{p^2}{\delta_3^2}\right)} \right) \quad (5.82 a,b)$$

Ahora la inecuación (5.81) puede escribirse de nuevo como:

$$I_{\omega_i}^{k=3}(p, \theta, \delta_1, \phi) = p^2 \cdot (g - g_1) \cdot (g - g_2) \geq 0 \quad (5.83)$$

Por tanto, el parámetro genérico a de la inecuación (3.26), de cuyo signo dependía el intervalo de valores solución (véase la Figura 3.5), se particulariza para (5.83) como:

$$a = p^2 \tag{5.84}$$

Para simplificar la notación en las ecuaciones, se definen c y α como:

$$c = \cos(\phi + \theta) \tag{5.85}$$

$$\alpha = \left(1 - \frac{p^2}{\delta_3^2}\right) \tag{5.86}$$

Y expresando la ecuación (5.82) en los nuevos términos, se tiene:

$$g_{12} = \frac{1}{p} \left(\underbrace{-c}_{t_1} \mp \sqrt{\underbrace{c^2 - \alpha}_{t_2}} \right) \tag{5.87a,b}$$

Comparando (5.87) en el problema que nos ocupa (rechazo perturbaciones en la entrada de la planta, $k=3$), $|S'|=|T_3| \leq \delta_3$, con (5.7) en el problema $|S|=|T_2| \leq \delta_2$ (rechazo perturbaciones en salida de la planta, $k=2$), ambas ecuaciones coinciden. Tan sólo difieren en la definición de sus parámetros α , véase $\alpha_{k=3}$ en (5.86) y $\alpha_{k=2}=(1-1/\delta_2^2)$ en (5.5). Comparando ambos valores α , paralelamente al caso $\delta_2 < 1$, ahora $\delta_3/p < 1$ originará también una tipología B de contornos. Y tal como $\delta_2 > 1$ se representaba con contornos de tipología A, igualmente ocurrirá con $\delta_3/p > 1$. Según esto, el estudio de la tipología y formulación de los contornos para ambos supuestos ($\delta_3/p < 1$ y $\delta_3/p > 1$), así como la influencia de los parámetros p , θ y δ_3 , son similares a los desarrollados en la Sección 5.2. No obstante, el problema ahora analizado presenta sus particularidades. Nótese que la tipología del contorno no viene condicionada únicamente por el valor de especificación δ_3 (tal y como ocurría con δ_2), sino que también depende del módulo, p , siendo además este último un parámetro con incertidumbre. Por ello, el paralelismo no es tan simple, incluyéndose a continuación los cambios más significativos.

La Figura 5-26 resume las tipologías de contornos en el problema $|T_3| \leq \delta_3$. Su demostración formal se incluye a continuación.

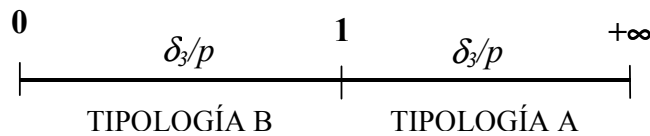


Figura 5-26: Tipologías de contornos en especificaciones sobre la función de sensibilidad incluida la planta, $|T_3|=|P/1+L| \leq \delta_3$

5.3.1.1 Tipología de Contornos para Especificaciones $\delta_3/p < 1$

Este supuesto es paralelo al desarrollado para $\delta_2 < 1$. Por ello, se incluye directamente la formulación apropiada y las conclusiones, recomendándose consultar la Sección 5.2.1.1 para una información más exhaustiva. Según la Figura 5-26 se demostrará formalmente que para $0 < \delta_3/p < 1$ se presenta una tipología B de contornos.

Si $0 < \delta_3/p < 1$, se cumplen:

$$\alpha = \left(1 - \frac{p^2}{\delta_3^2}\right) < 0 \quad (5.88)$$

$$c^2 - \alpha > 0 \quad (5.89)$$

$$\sigma = \sqrt{c^2 - \alpha} \equiv \text{valor_real} \quad (5.90)$$

$$|\sqrt{c^2 - \alpha}| > |c| \quad (5.91)$$

Por tanto, t_1 y t_2 en (5.87) satisfacen:

- (i) $t_2 = \sigma$ en (5.90) es real según (5.89), y positivo (el signo +/- de la raíz cuadrada es externo a t_2)
- (ii) $t_2 > |t_1|$, según (5.91)
- (iii) t_1 es real y positivo donde $c < 0$. c definido en (5.85) es negativo en $\phi \in \Phi_1 = [-270^\circ - \theta, -90^\circ - \theta]$.
- (iv) t_1 es real y negativo donde $c > 0$, luego en $\phi \in \bar{\Phi}_1 = \{[-360^\circ, -270^\circ] - \theta \cup [-90^\circ, 0^\circ] - \theta\}$.
- (v) g_2 en (5.87b) es proporcional a $t_1 + t_2$, es decir, $g_2 \triangleq t_1 + t_2$. Al cumplirse (i) $t_2 > 0$ y (ii) $|t_2| > |t_1|$, independientemente del signo de t_1 , la magnitud g_2 es siempre positiva, $g_2 \geq 0$.
- (vi) g_1 en (5.87a), paralelamente al problema $|T_2| \leq \delta_2$, resulta ser siempre negativa. Siendo $g_1 \triangleq t_1 - t_2$, como $t_2 > 0$ según (i) y $t_2 > |t_1|$ según (ii), se cumple que $g_1 \leq 0$.

Conclusión sobre los contornos simples para especificaciones sobre la sensibilidad incluida la planta, $|T_3| = |P/1+L| \leq \delta_3$, cuando $0 < \delta_3/p < 1$

De entre las J plantas $\{p \in \Theta\}$ de la plantilla ω , para aquéllas donde se cumpla $0 < \delta_3(\omega)/p(\omega) < 1$, siempre existe un g_2 real y positivo para todo $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$, lo que da lugar a un contorno mono-valuado superior $g_2 \angle \phi$ (tipología B), expresado en (5.82b). Éste debe ser satisfecho por $G(j\omega)$ tal que $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$ con el fin cumplir la especificación $|T_3(j\omega)| \leq \delta_3(\omega)$.

Para $p < \theta$ y δ_3 dados, la magnitud del contorno g_2 en (5.82b) es: (a) máxima en $\phi = -180^\circ - \theta$; (b) estrictamente decreciente hacia el extremo, $\phi = 0^\circ - \theta$, y simétricamente, decreciente hacia $\phi = -360^\circ - \theta$; (c) de sensibilidad máxima a variaciones de ϕ en $-90^\circ - \theta$ y $-270^\circ - \theta$, y nula en $-360^\circ - \theta$, $-180^\circ - \theta$, $0^\circ - \theta$. (Ver Figura 5-27)

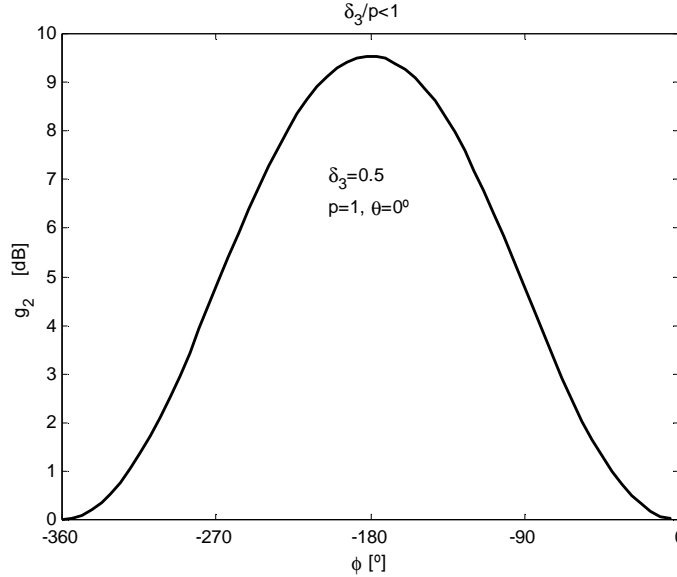


Figura 5-27: Contorno de tipología B ($\delta_3/p < 1$) sin considerar la incertidumbre

5.3.1.2 Tipología de Contornos para Especificaciones $\delta_3/p > 1$

Este supuesto es paralelo al desarrollado para $\delta_2 > 1$ en la Sección 5.2.1.2. Por ello, aquí se incluye directamente la formulación apropiada y las conclusiones. Se demostrará que para el supuesto $\delta_3/p > 1$ se obtiene una tipología A de contornos tal y como resumía la Figura 5-26.

Sobre la ecuación (5.87), ahora para $\delta_3/p > 1$ se cumple:

$$0 < \alpha = \left(1 - \frac{p^2}{\delta_3^2}\right) < 1 \quad (5.92)$$

$$\sigma = \sqrt{c^2 - \alpha} \quad (5.93)$$

y σ toma valores reales en las fases donde:

$$\alpha < c^2 < 1 \quad (5.94)$$

Además, $|c| > \sqrt{c^2 - \alpha}$ (5.95)

Por tanto, t_1 y t_2 en (5.87) cumplen:

(i) g_{12} son reales y positivas en $\phi \in \Phi_{12}$, $\Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$. En $\phi \in \bar{\Phi}_{12}$, g_{12} son ambas complejas si no se satisface (5.94), o reales pero negativas donde cumpliéndose (5.94) resulta $c > 0$ (ó $t_1 < 0$). El intervalo de soluciones reales positivas, Φ_{12} , se define resolviendo la igualdad $c^2 = \alpha$, siendo ε el primer valor positivo $\phi + \theta$ que satisface la igualdad.

$$\varepsilon = \frac{180^\circ}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{\delta_3^2 - p^2}}{\delta_3} [^\circ], \quad 0 \leq \varepsilon \leq 90^\circ \quad (5.96)$$

Entonces, el intervalo angular de existencia de soluciones reales y positivas, es decir, donde existen limitaciones o contornos para el controlador, tiene una amplitud 2ε , con ε en (5.96), y se resume en:

$$\Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon] \quad (5.97)$$

Nótese según (5.96) y (5.97) que **la amplitud del intervalo angular Φ_{12} donde existen contornos $g_{12} \angle \phi$, es decir 2ε , depende tanto del valor de especificación δ_3 , como del módulo⁶ p , y por tanto de la incertidumbre en magnitud, $\{p\}$.**

- (ii) En $\phi \in \bar{\Phi}$, t_1 es real y positivo.
- (iii) En $\phi \in \Phi_{12}$, t_2 es real y positivo
- (iv) En $\phi \in \bar{\Phi}_{12}$, $|t_1| > |t_2|$, o simplemente $t_1 > t_2$, según (ii) y (iii).
- (v) En $\phi \in \Phi_{12}$, $g_1 \triangleq |t_1| - |t_2|$, o simplemente $g_1 \triangleq t_1 - t_2$
- (vi) En $\phi \in \bar{\Phi}_{12}$, $g_2 \triangleq |t_1| + |t_2|$, o simplemente $g_2 \triangleq t_1 + t_2$
- (vii) En $\phi \in \bar{\Phi}_{12}$, $g_2 > g_1$, según (v) y (vi).

Conclusión sobre los contornos simples para especificaciones sobre la sensibilidad incluida la planta $|T_3| = |P/1+PG| \leq \delta_3$, cuando $\delta_3/p > 1$

De entre las J plantas $\{p \angle \theta\}$ de la plantilla ω , para aquellas que satisfagan $\delta_3(\omega)/p(\omega) > 1$, siempre existe un g_1 y un g_2 (definidos en 5.82) reales, positivos, y $g_2 > g_1$, en todo $\phi \in \Phi_{12}$, $\Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, ε en (5.96). Esto da lugar a un contorno doble-valuado $g_{12} \angle \phi$ de tipología A que debe ser satisfecho por $G(j\omega) = g \angle \phi$ tal que $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$ y $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$ con el

⁶ En esto el problema $k=3$ difiere del $k=2$ en la Sección 5.2.1.2, donde ε dependía sólo de δ_3 . Ahora, ε depende tanto de δ_3 como de p .

fin de cumplir la especificación robusta $|T_3(j\omega)| \leq \delta_3(\omega)$. Además, dicho contorno presenta mínima g_1 y máxima g_2 , en $\phi = -180^\circ + \theta$, y es estrictamente creciente g_1 y estrictamente decreciente g_2 hacia ambos extremos del intervalo Φ_{12} . Véase la Figura 5-28.

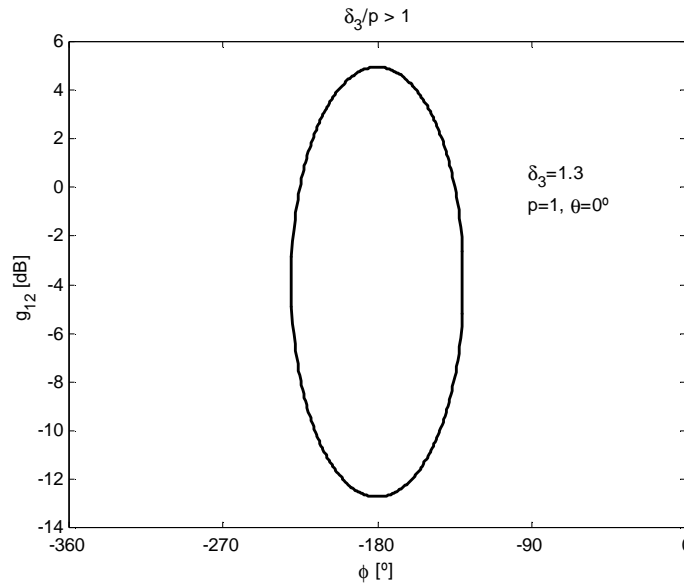


Figura 5-28: Contorno de tipología A ($\delta_3/p > 1$) sin considerar la incertidumbre

5.3.1.3 Transición de Tipología de Contornos ($\delta_3/p=1$) sin Considerar la Incertidumbre

En $\delta_3/p=1$ las soluciones g_{12} no toman valores finitos (esto mismo o la desaparición de los contornos, ocurre en $\delta_3/p=0^+$ y $\delta_3/p=+\infty$). Por ello, en los extremos de los intervalos en la Figura 5-26 el comportamiento de la especificación robusta se estudia a través de funciones límite para g_{12} . En particular para $\delta_3/p=1$ tiene lugar una transición de tipología B a tipología A de contornos. La primera se analizará cuando $\delta_3/p \rightarrow 1^-$ y la segunda cuando $\delta_3/p \rightarrow 1^+$. Reorganizando (5.82) o (5.87) se define:

$$g_{12} = \frac{-c \delta_3 \mp \sqrt{(c^2 - 1)\delta_3^2 + p^2}}{p \delta_3} \quad (5.98a,b)$$

donde c representa según (5.85) la función $\cos(\phi + \theta)$.

Nótese que el término δ_3/p , que marca la transición entre tipologías B y A, no aparece como tal en la ecuación (5.98). Además, en δ_3/p aparecen dos

parámetros a estudiar, el módulo con incertidumbre $\{p\}$ y la tolerancia de especificación δ_3 . Por ello, la transición de tipologías se estudiará por separado para ambos. El primer estudio, radica en la transición de tipología debida a la incertidumbre del modelo (en concreto a la incertidumbre en magnitud), $\{p\}$, por lo que se incluye en la Sección 5.3.2.1. La transición de tipología debida a la tolerancia de especificación, δ_3 , se estudiará en la Sección 5.3.3. La Figura 5-29 muestra un ejemplo ilustrativo de transición la tipología B y A de contornos, sin entrar en detalles.

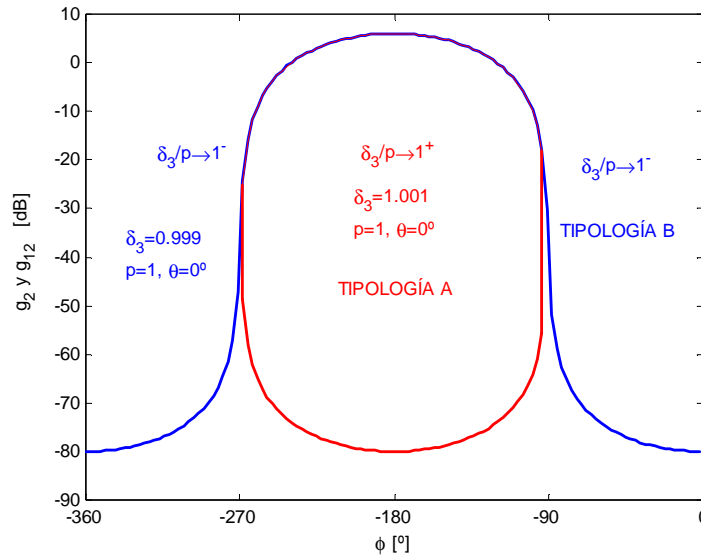


Figura 5-29: Transición ($\delta_3/p=1$) entre tipologías de contornos B y A sin considerar la incertidumbre

5.3.2 INFLUENCIA DE LA INCERTIDUMBRE DEL MODELO

Según se estudiaba en la sección anterior, los Pasos 8 y 9 del Algoritmo 3.1 resolvían la inecuación en (5.81):

$$I_{\omega_i}^{k=3}(p, \theta, \delta_1, \phi) = p^2 \cdot g^2 + 2 \cdot p \cdot \cos(\phi + \theta) \cdot g + \left(1 - \frac{p^2}{\delta_3^2}\right) \geq 0,$$

para un valor de especificación δ_3 y una única planta $p \angle \theta$, por tanto, para el sistema sin incertidumbre. De ella resultaron contornos simples para el controlador G : (a) monovaluados superiores (tipología B), $g_2 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, cuando $\delta_3(\omega_i)/p(\omega_i) < 1$; y (b) contornos doblevaluados (tipología A), $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, para $\delta_3(\omega_i)/p(\omega_i) > 1$; (véase Sección 5.3.1).

Considerando ahora la incertidumbre, es decir el conjunto de plantas $\{p \angle \theta\}$ en la plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$, el Paso 10 del Algoritmo 3.1 resuelve (5.81) para cada una de ellas. La tolerancia de especificación, $\delta_3(\omega_i)$, es la misma para toda la plantilla pues se trata de la misma frecuencia. Luego, se tiene $\delta_3(\omega_i) = \delta_3$. La intersección de contornos simples puede clasificarse como sigue:

- (i) Conjunto $\{g_2 \angle \phi\}_B$ si para toda $p \angle \theta \in \mathfrak{S}P = \{p \angle \theta\}_{r=1, \dots, j}$ se cumple $\delta_3/p < 1$. La intersección de contornos de tipologías B simples, dará también una tipología B, una vez considerada la incertidumbre: $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. En la Sección 5.3.2.1 se incluyen las pautas para su cálculo.
- (ii) Conjunto $\{g_{12} \angle \phi\}_A$ si para toda $p \angle \theta \in \mathfrak{S}P = \{p \angle \theta\}_{r=1, \dots, j}$ se cumple $\delta_3/p > 1$. La intersección de contornos de tipologías A simples, dará también una tipología A, considerada ahora la incertidumbre: $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{15} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon_T]$. En la Sección 5.3.2.1 se incluyen las pautas para su cálculo.
- (iii) Si para ciertas plantas $p \angle \theta \in \mathfrak{S}P$ se cumple $\delta_3/p < 1$, y para otras, $\delta_3/p > 1$, se tendrán soluciones simples de ambas tipologías, $\{g_2 \angle \phi\}_B$ y $\{g_{12} \angle \phi\}_A$. Como la tipología B es más restrictiva angularmente que la tipología A, el cumplimiento simultáneo de ambas tipologías simples se traduce finalmente en una tipología B. Por tanto, se seleccionarán $\{g_2 \angle \phi\}_B$ y $\{g_2 \angle \phi\}_A$ y se calculará el contorno de tipología B, $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, según indica la Sección 5.3.2.1.

Para poder seleccionar en cada ϕ las magnitudes g_1 y/o g_2 más desfavorables en la determinación de g_{INF} y/o g_{SUP} , es necesario primero conocer la influencia de los parámetros p y θ en dichas magnitudes. Primeramente se aborda este objetivo, concluyéndose después las pautas para el cálculo de los contornos intersección (con la incertidumbre de la planta).

5.3.2.1 Influencia de la incertidumbre en Ganancia, $\{p\}$

Dada una frecuencia ω_i , se tiene un único valor de especificación, $\delta_3(\omega_i) = \delta_3$, y una plantilla genérica con incertidumbre en fase y ganancia, $\mathfrak{S}P(j\omega_i) = \{p \angle \theta\}_{r=1, \dots, j}$. Ahora, para una fase constante θ , se pretende analizar cómo la incertidumbre en ganancia $\{p\}$ contribuye a los contornos resultantes. Por tanto la plantilla genérica se reduce a una que tiene tan sólo incertidumbre en ganancia, $\mathfrak{S}P(j\omega_i) = \{p\} \angle \theta$. Primeramente, se analizará la influencia de la variación del parámetro discreto p en las magnitudes g_1 y/o

g_2 de (5.82), considerando δ_3 y θ ambos constantes. Posteriormente, se concluirá cómo la incertidumbre en ganancia $\{p\}$ afecta a los contornos.

(i) Influencia del módulo p , con fase θ y especificación δ_3 constantes

De acuerdo al estudio de la tipología de contornos en 5.3.1, ésta venía determinada por el módulo p junto con la tolerancia de especificación δ_3 , según resumía la Figura 5-26. Si ahora se considera δ_3 constante, las tipologías de la plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega)=\{p\angle\theta\}_{r=1,\dots,j}$ se pueden definir de nuevo como ilustra la Figura 5-30⁷.

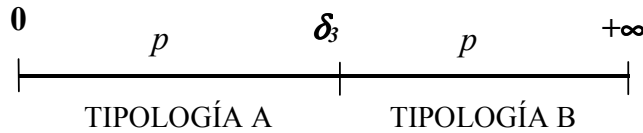


Figura 5-30: Tipologías de contornos según la variación de la magnitud de la planta p .

Para analizar la influencia de p , se estudiarán g_1 y/o g_2 en (5.98):

$$g_{12} = \frac{-c \delta_3 \mp \sqrt{(c^2 - 1)\delta_3^2 + p^2}}{p \delta_3}$$

donde c representa según (5.85) la función $\cos(\phi+\theta)$. Según resume la Figura 5-30 (véase también Sección 5.3.1): (a) para aquellos módulos p tal que $0 < p < \delta_3$, sólo existe un contorno simplevaluado superior: $g_2 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ con g_2 en (5.82b) (en Φ , exclusivamente g_2 toma valores reales, positivos y mayores que cero); (b) para aquellos módulos p tal que $\delta_3 < p < +\infty$, existe un contorno doblevaluado: $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, g_{12} en (5.82) y ε en (5.96) (en Φ_{12} , g_1 y g_2 toman ambos valores reales, positivos y mayores que cero).

* * *

La limitación del pico de $|S|$ en moderadamente altas frecuencias, tal y como se argumentó en la introducción del capítulo, es necesaria incluso en ausencia de perturbaciones importantes D_2 y/o D_1 (véase Figura 2-1). Dicha limitación es un indicativo también de la estabilidad del sistema. En estos casos las tolerancias sobre la función sensibilidad, δ_2 o δ_3 , toman valores tales que se originan contornos de tipología A ($\delta_2 > 1$ o $\delta_3 > p$) debido a las restricciones que impone la Integral de Bode de Sensibilidad (Skogestad y Postlethwaite, 1996). Estos contornos A aseguran unos mínimos márgenes

⁷ Nótese que en esta figura la transición de tipologías al crecer el módulo, p , respecto a la especificación, δ_3 , es de tipología A a B. Mientras tanto, en la Figura 5-26 al crecer la relación δ_3/p en el intervalo absoluto (0, $+\infty$), se daba una transición de B a A.

de fase y ganancia, y suelen ser los contornos dominantes en alta frecuencia, $\omega_r = \omega_{hf}$. Los objetivos de estabilidad también se lograban imponiendo condiciones sobre la sensibilidad complementaria, $|T| = |T_1| \leq \delta_l$ con $\delta_l > 1$, originándose también contornos de tipología A (véase Capítulo 4).

Desde este punto de vista, a continuación se analiza la evolución debida a p de los contornos de tipología A ($p < \delta_3$) que tratan de garantizar una estabilidad mínima, limitando el pico en la salida Y debido a perturbaciones D_l en la entrada (véase Figura 2-1), incluso aunque éstas fueran despreciables.

Para una **tipología A** de contornos, $0 < p < \delta_3$, la evolución de $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$ al variar p se muestra en la Figura 5-31. g_{12} se define en (5.82) y ε en (4.96).

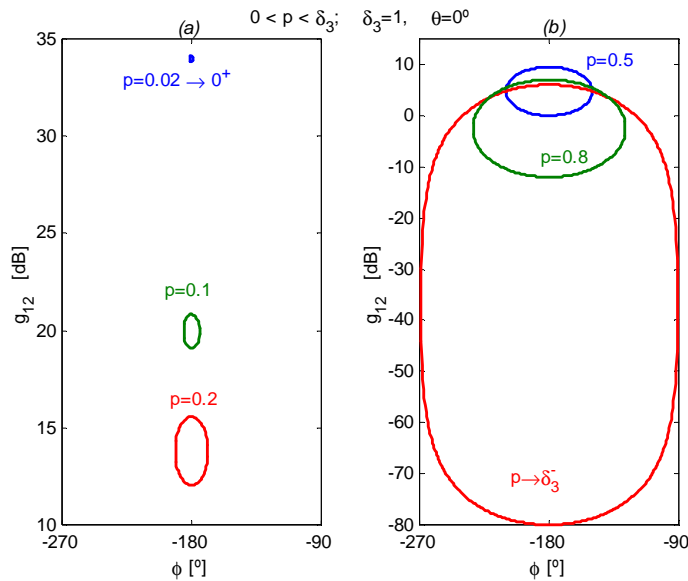


Figura 5-31: Influencia de la magnitud p en contornos de tipología A ($p < \delta_3$)

Es decir, cuando p aumenta en $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$: (a) $g_1 \angle \phi$ desciende (más agresivo⁸), (b) $g_2 \angle \phi$ desciende (menos agresivo⁹) y (c) ε en (5.96) aumenta (el intervalo Φ_{12} se ensancha, luego contornos más agresivos). Esto se resume en la siguiente ecuación:

⁸ La porción inferior del contorno doblevaluado ha de satisfacerse tal que: $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$, luego a menor altura g_1 en cada ϕ el controlador a diseñar ha de reducir más su ganancia g .

⁹ La porción superior del contorno doblevaluado ha de satisfacerse tal que: $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$, luego a menor altura g_2 en cada ϕ el controlador a diseñar necesita aportar menos ganancia g .

$$p \uparrow \Rightarrow \begin{cases} g_1 \angle \phi \downarrow \\ g_2 \angle \phi \downarrow \\ \varepsilon \uparrow \end{cases}, \phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon], 0 < \varepsilon < 90^\circ \quad (5.99)$$

En los extremos del intervalo $0 < p < \delta_3$, donde se presenta una tipología A de contornos simples, se comprueban los resultados gráficos sobre la Figura 5-31¹⁰ aplicando límites a g_{12} en (5.98) y a ε en (5.96):

$$\begin{cases} \lim_{p \rightarrow 0^+} g_{12} = +\infty \\ \lim_{p \rightarrow 0^+} \varepsilon = 0^\circ \end{cases}, \phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon] \Rightarrow g_{12} \angle \phi \xrightarrow{p \rightarrow 0^+} +\infty \angle -180 - \theta \quad (5.100)$$

$$\begin{cases} \lim_{p \rightarrow \delta_3^-} g_1 = 0 \text{ } (-\infty \text{ dB}) \\ \lim_{p \rightarrow \delta_3^-} g_2 = 2|\cos(\phi + \theta)| / \delta_3, \phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon] \\ \lim_{p \rightarrow \delta_3^-} \varepsilon = 90^\circ \end{cases} \quad (5.101)$$

A continuación se interpretan los resultados en las ecuaciones (5.99), (5.100) y (5.101); y en la Figura 5-31. En términos de control éstos implican que cuando el módulo de la planta p crece, evidentemente las necesidades de ganancia en el controlador, g , disminuyen si el objetivo es cumplir con una ganancia mínima de lazo abierto que rechace adecuadamente las perturbaciones D_l en la salida Y (en lazo cerrado, δ_3 expresa el nivel de atenuación $|Y/D_l|$). Por ello, las magnitudes g_{12} descienden. No obstante, la tipología A de contornos aparece en medias-altas frecuencias donde $p < \delta_3$ ya que toda planta en la práctica es estrictamente propia (p disminuye con la frecuencia) y los beneficios de la realimentación sólo son factibles hasta cierta frecuencia (δ_3 debe aumentar con la frecuencia). Para los contornos de tipología A en medias-altas frecuencias la limitación de la función sensibilidad debe entenderse más bien en términos de estabilidad, limitando el pico máximo frente a perturbaciones (Horowitz y Sidi, 1972; Skogestad y Postlethwaite, 1996). Como ahora la función sensibilidad es $|S'| = p|S|$, donde S es la función clásica de sensibilidad, $S = 1/1+L$, si p aumenta con δ_3 constante, como $|S'| = p|S| \leq \delta_3$, estamos exigiendo una limitación aún mayor del pico de la función $|S|$. El limitar más el pico de $|S|$ frente a perturbaciones implica en términos de estabilidad un sistema más estable. Por ello, cuando p

¹⁰ Nótese que en la formulación se trabaja en magnitudes lineales, mientras que sobre las gráficas dichas magnitudes se expresan en decibelios (dB).

aumenta hasta el límite, $p \rightarrow \delta_3^-$, es el caso más desfavorable representado por los contornos más desfavorables que pretenden garantizar los márgenes mínimos fijados por δ_3 para el conjunto $\{p\}$. Por todo ello, la curva inferior del contorno doblevaluado $g_1 \angle \phi$ desciende hasta $-\infty$ [dB], y los contornos existen en el máximo intervalo angular posible en tipologías A simples, $\varepsilon=90^\circ$.

* * *

Cuando las perturbaciones D_2 y/o D_1 (véase Figura 2-1) no son despreciables¹¹, además de vigilar por unos márgenes de estabilidad adecuados, las tolerancias δ_2 o δ_3 son mucho más restrictivas. Éstas deberán procurar por una dinámica adecuada de rechazo de la perturbación, lo que habitualmente exige tipologías B de contornos ($\delta_2 < 1$ o $\delta_3 < p$). Estas especificaciones dominan en las bajas y medias frecuencias, mientras que en las altas los requerimientos se reducen a garantizar una mínima estabilidad (tipología A debida a $\delta_2 > 1$, $\delta_3 > p$, o $\delta_1 > 1$). Las tipologías B ($\delta_3 < p$) de contornos para un rechazo adecuado de perturbaciones en los actuadores, $|Y/D_1| \leq \delta_3$ se analizan a continuación desde el punto de vista del módulo p .

Para una **tipología B** de contornos, $\delta_3 < p < +\infty$, la evolución de la curva $g_2 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ al variar p se muestra en la Figura 5-32.

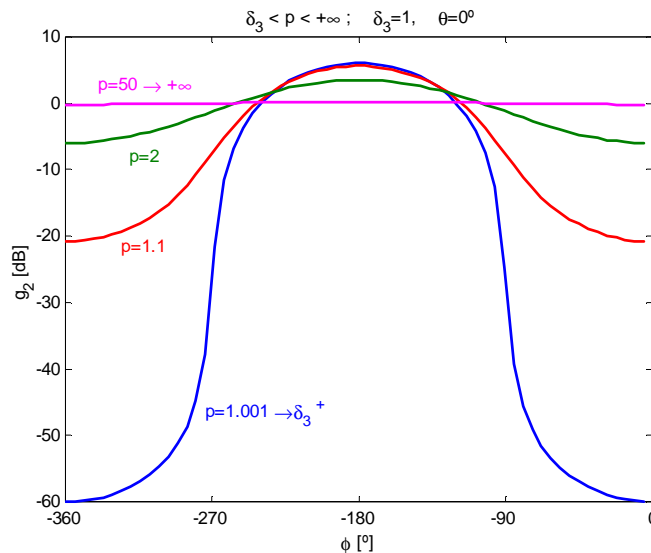


Figura 5-32: Influencia de la magnitud p en contornos de tipología B ($p > \delta_3$)

¹¹ Esto es típico de las bajas y medias frecuencia en la mayoría de los procesos industriales que pretend99en garantizar un punto de operación constante.

Es decir, cuando p aumenta: (a) $g_2 \angle \phi$ desciende (menos agresivo) en ciertas fases alrededor de $-180^\circ - \theta$, $\phi \in \Phi_2$; y (b) $g_2 \angle \phi$ se eleva (más agresivo) en las fases restantes, $\phi \in \bar{\Phi}_2$. Esto se resume en la siguiente ecuación:

$$p \uparrow \Rightarrow \begin{cases} g_2 \angle \phi \downarrow, & \phi \in \Phi_2 = [-180^\circ - \theta \mp \gamma] \\ g_2 \angle \phi \uparrow, & \phi \in \bar{\Phi}_2 \end{cases} \quad (5.102)$$

En los valores límite, $p = \delta_3$ (módulos de transición de tipología de contornos) y $p = +\infty$ (módulos muy grandes) se calcularán los límites de la magnitud g_2 en (5.98b), comprobándose lo mostrado en la Figura 5-32.

$$\begin{cases} \lim_{p \rightarrow \delta_3^+} g_2 = 2|\cos(\phi + \theta)| / \delta_3, & \phi \in \Phi_2 = [-270^\circ - \theta, -90^\circ - \theta] \\ \lim_{p \rightarrow \delta_3^+} g_2 = 0 (-\infty \text{dB}), & \phi \in \bar{\Phi}_2 \end{cases} \quad (5.103)$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} g_2 = 1 / \delta_3, \quad \phi \in [-360^\circ, 0^\circ] \quad (5.104)$$

A continuación se incluyen algunas reflexiones sobre el significado físico de las ecuaciones (5.102), (5.103) y (5.104), junto con la Figura 5-32. No debe olvidarse que la función de sensibilidad para perturbaciones D_1 en la entrada es $S' = P / (1 + PG)$, mientras que para perturbaciones D_2 en la salida, era $S = 1 / (1 + PG)$. En el problema $|T_2| = |S| < \delta_2$ cuando el módulo del proceso p aumentaba, el contorno $g_2 \angle \phi$ descendía hasta su desaparición ($g_2 = 0$, para todo ϕ). Esto es debido a que la dinámica de rechazo en Y de D_2 exigida por δ_2 se garantiza con la elevada ganancia aportada por el proceso $|P|$, sin necesidad de añadir $|G|$. Sin embargo, ahora en el problema $|T_3| = |S'| < \delta_3$ el módulo de la planta aparece también en el numerador de la función $|S'| = p / (1 + pg)$, por lo que aunque p aumente, no sólo el denominador aumenta, sino que también lo hace el numerador. Entonces, las necesidades de control (contornos) para garantizar una $|S'|$ pequeña no desaparecen al aumentar p . Éstas quedan limitadas a un contorno constante, función de la tolerancia de especificación según indica (5.104) cuando la ganancia aportada por la planta es grande.

La Figura 5-33 ilustra la transición entre las tipologías de contornos A y B, comprobándose las ecuaciones (5.101) y (5.103). Por ejemplo, para $\phi + \theta = 180^\circ$, la magnitud g_2 máxima se aproxima a $2 / \delta_3 = 2$ (6dB) cuando $p \rightarrow \delta_3$.

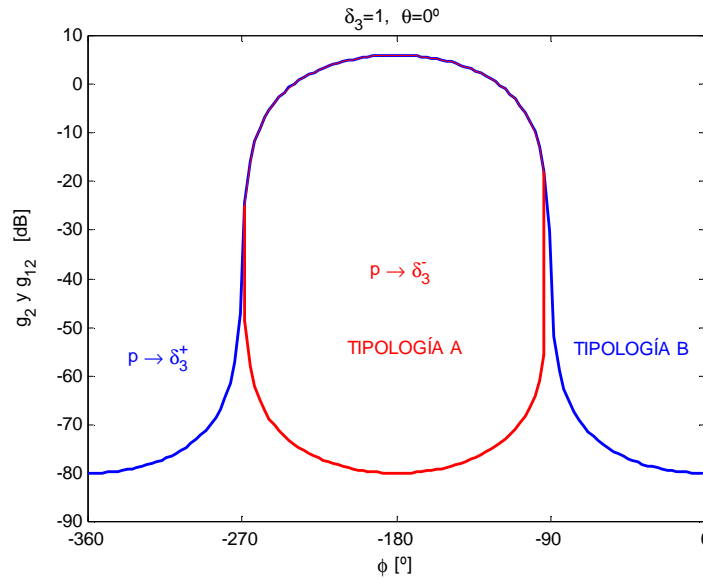


Figura 5-33: Transición entre tipología A, $p \rightarrow \delta_3^-$, y tipología B, $p \rightarrow \delta_3^+$, de contornos

* * *

En resumen, las conclusiones sobre la influencia del módulo de la planta p en los contornos de tipología A ($0 < p < \delta_3$) se ilustran en la Figura 5-31, comprobándose los resultados en (5.99), (5.100) y (5.101). Y para una tipología B ($\delta_3 < p < +\infty$) se ilustran en la Figura 5-32 comprobándose los resultados en (5.102), (5.103) y (5.104). La Figura 5-33 muestra la transición entre contornos A y B para $p = \delta_3$. De acuerdo a este estudio se puede inferir la influencia de la incertidumbre en magnitud $\{p(\omega)\}$ (considerando la fase $\theta(\omega) = \theta$ constante) de una plantilla ω_i con sólo incertidumbre en ganancia, $\Im P(\omega_i) = \{p\} \angle \theta$. Dado que el estudio se centra en la frecuencia ω_i , la tolerancia $\delta_3(\omega_i) = \delta_3$ es constante. Los resultados se resumen en tres casos:

- El conjunto $\{p\}$ origina exclusivamente contornos de tipologías simples A.
- La incertidumbre $\{p\}$ origina exclusivamente tipologías simples B.
- El conjunto $\{p\}$ origina contornos simples A y B.

(ii) Incertidumbre en magnitud, $\{p\}$, que origina exclusivamente contornos de tipologías A simples

Este caso se presenta cuando todos los $p(\omega_i)$ en la plantilla $\Im P(\omega_i)$ cumplen $p(\omega_i) < \delta_3(\omega_i)$, y por tanto, se dan exclusivamente tipologías A simples,

$\{g_{12} \angle \phi\}_A$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, g_{12} en (5.82) y ε en (5.96). El resultado final será también una tipología A de contornos intersección, $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon_T]$.

De acuerdo a la Figura 5-31 en la determinación del contorno intersección $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon_T]$, intervienen la solución simple $g_1 \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, de la planta de máximo módulo¹², $p_{max} \angle \theta$, y todas las soluciones $\{g_2 \angle \phi, \phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]\}$, para el conjunto de plantas $\{p\}$. El intervalo de fases solución, $\Phi_{IS} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon_T]$, se corresponde con el de la planta de máximo modulo, $\Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon_{p_{max}}]$. Luego $\varepsilon_T = \varepsilon_{p_{max}}$, se calcula sustituyendo $p_{max} \angle \theta$ en (5.96). Esto se resume en la siguiente ecuación:

$$g_{INFSUP} \angle \phi, \phi \in \Phi_{IS} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon_T]: \left\{ \begin{array}{l} g_{INF} \angle \phi = g_1 \angle \phi |_{A, p_{max} \angle \theta} \\ g_{SUP} \angle \phi = \max_{\phi \in \Phi_{IS}} \{g_2 \angle \phi\}_{A, \{p\} \angle \theta} \\ \varepsilon_T = \varepsilon |_{p_{max}} = \frac{180}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{\delta_3^2 - p_{max}^2}}{\delta_3} \end{array} \right. \quad (5.105)$$

Es decir, **las plantas significativas en el cálculo del contorno intersección son todas las del perfil de la plantilla ω_i sin excepción**. No obstante, se puede reducir el coste computacional en el cálculo de la curva $g_{INF} \angle \phi$, empleando el contorno inferior de la planta de mayor módulo según se indica en (5.105).

(iii) Incertidumbre en magnitud, $\{p\}$, que origina exclusivamente contornos de tipologías B simples

Este supuesto se presenta cuando todos los $p(\omega_i)$ en la plantilla $\mathfrak{SP}(\omega_i)$ cumplen $p(\omega_i) > \delta_3(\omega_i)$, y por tanto, se dan exclusivamente tipologías B simples: $\{g_2 \angle \phi\}_B$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. El resultado final considerada la incertidumbre $\{p\}$ será un contorno también de tipología B: $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$.

De acuerdo con la Figura 5-32 todos los contornos $\{g_2 \angle \phi\}_B$, intervienen en la determinación del contorno intersección $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, lo que se resume como:

$$g_{SUP} \angle \phi, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]: \max_{\phi \in \Phi} \{g_2 \angle \phi\}_{B, \{p\} \angle \theta} \quad (5.106)$$

¹² Ésta, por supuesto verificará $p_{max} < \delta_3$, condición imprescindible para que sólo existan tipologías A simples.

Es decir, las plantas significativas en el cálculo del contorno intersección son todas, sin excepción, las que pertenecen al perfil de la plantilla ω .

Una aproximación sería considerar tan sólo las soluciones $\{g_2 \angle \phi\}_B$ aportadas por las plantas de máximo y mínimo módulo, $p_{max} \angle \theta$ y $p_{min} \angle \theta$. Aunque esto supondría un cierto error en el contorno intersección obtenido en los alrededores de las fases $-270^\circ - \{\theta\}$ y simétricamente en $-90^\circ - \{\theta\}$.

(iv) **Incertidumbre en magnitud, $\{p\}$, que origina contornos de tipologías A y B simples**

En este supuesto algunos $p(\omega_i)$ en la plantilla $\Im P(\omega_i)$ cumplen $p(\omega_i) < \delta_3(\omega_i)$, originando contornos de tipologías A simples, $\{g_{12} \angle \phi\}_A$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$. Y otros $p(\omega_i)$ cumplen $p(\omega_i) > \delta_3(\omega_i)$, dando tipologías B simples, $\{g_2 \angle \phi\}_B$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. La intersección de dichos $\{g_{12} \angle \phi\}_A$ y $\{g_2 \angle \phi\}_B$ dará un contorno de tipología B, $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. Para su cálculo bastarán las soluciones $\{g_2 \angle \phi\}$, pero **aportadas por todas las plantas en el perfil de la plantilla ω** , es decir, se considerarán $\{g_2 \angle \phi\}_B$ y $\{g_2 \angle \phi\}_A$ tal y como demuestra la Figura 5-34.

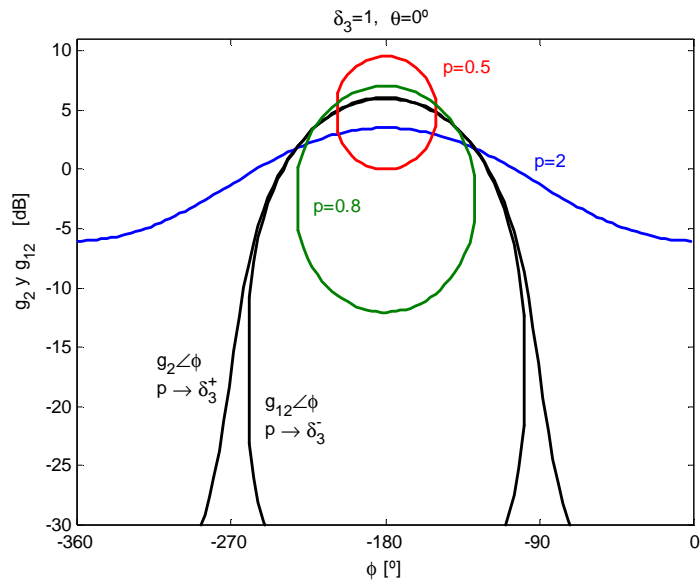


Figura 5-34: Influencia de $\{p\}$ en tipologías A y D simples

De acuerdo con las figuras: Figura 5-34, Figura 5-31, Figura 5-32, el cálculo del contorno resultante se resume en la siguiente ecuación:

$$g_{SUP} \angle \phi, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]: \max_{\phi \in \Phi} \{ \{g_2 \angle \phi\}_B \text{ y } \{g_2 \angle \phi\}_A \}_{\{p\} \angle \theta} \quad (5.107)$$

* * *

Determinadas: en (i) la influencia del parámetro p en los contornos simples; en (ii), (iii) y (iv) la forma de cálculo de los contornos intersección para el conjunto $\{p\}$; ahora se incluyen algunas afirmaciones más, referentes a plantillas con sólo incertidumbre en magnitud:

- (v) El tamaño de la incertidumbre vertical, Δp , condiciona los contornos de tipología tanto A como B. Para demostrarlo basta tener en cuenta las consideraciones en (ii), (iii) y (iv), donde se afirmaba que todas las plantas del intervalo de incertidumbre $\{p\}$ intervienen en la configuración de los contornos $g_{INF} \angle \phi$ y/o $g_{SUP} \angle \phi$.
- (vi) La posición relativa del intervalo de incertidumbre, es decir $\{p\}$, es especialmente importante en este problema de control. Ésta condiciona las tipologías de contornos resultantes, A o B, y su agresividad en altura y fase, como se ilustra con la Figura 5-31 hasta la Figura 5-33.

5.3.2.2 Influencia de la Incertidumbre en Fase, $\{\theta\}$

Según la Sección 5.3.1 la fase θ no interviene ni modifica la tipología del contorno. Es decir para el conjunto $\{\theta\}$ se mantiene la misma tipología que en las soluciones simples θ , o bien contornos B o bien contornos A, en función de la relación δ_3/p . Por ello, el análisis de la influencia de la incertidumbre en fase, $\{\theta\}$, es totalmente paralelo al desarrollado en la Sección 5.2.2.1, para el problema $|T_2|=|1/1+L| \leq \delta_2$. Las conclusiones allí demostradas son también ahora válidas para $|T_3|=|P/I+L| \leq \delta_3$, únicamente deben ahora particularizarse los valores característicos de los parámetros de los contornos ($max-g_{SUP}$, ϕ_{VS} , g_{HS} para la tipología B; y $min-g_{INF}$, $max-g_{SUP}$, ϕ_{VIS} , g_{HIS} , Φ_{IS} y ϵ_T para la tipología A). Dado que la metodología para su cálculo es la misma, aquí únicamente se resumirán las conclusiones:

- (i) La fase de la planta, θ , traslada horizontalmente las magnitudes g_2 o g_{I2} en cada ϕ del intervalo de diseño $[-360^\circ, 0^\circ]$ un ángulo $-\theta$. Por tanto, los mínimos, máximos, puntos de inflexión, fases de existencia (sólo en tipologías A) y ejes de simetría quedan desplazados la misma cantidad, $-\theta$. Luego la fase de la planta θ , no modifica la forma de los contornos de tipología B o A sino sólo su posición angular (véase la Figura 5-3). Por consiguiente, varía la posición relativa entre el G-contorno y el punto de referencia $1 \angle 0^\circ$ ($0db \angle 0^\circ$), y por tanto, cambian la agresividad o las necesidades de control que éste expresa.

(ii) De acuerdo con (i), en la determinación de los contornos de tipología B: $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, intervendrán las soluciones $\{g_2 \angle \phi\}$ asociadas a todas y cada una de las fases en $\{\theta\}$. Igualmente para los contornos de tipología A: $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon_T]$, intervendrán todas las soluciones $\{g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]\}$ para el conjunto $\{\theta\}$. El intervalo Φ_{IS} se definía en (5.35) como:

$$\Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T], \quad \varepsilon_T = \varepsilon + \Delta\theta/2, \quad \phi_{VIS} = -180^\circ - 1/2(\theta_{min} + \theta_{max}).$$

(iii) El tamaño de incertidumbre, $\Delta\theta = |\theta_{min} - \theta_{max}|$, incrementa la agresividad de los contornos tipo B y A. Para la tipología B en el sentido de que el intervalo de fases donde el contorno $g_{SUP} \angle \phi$ toma valores máximos aumenta, pudiéndose alcanzar valores máximos en todo el intervalo $\Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ para el caso más desfavorable cuando $\Delta\theta = 360^\circ$; véase la Figura 5-5. Y para tipologías A: aumenta el intervalo donde $g_{INF} \angle \phi$ toma valores mínimos y donde $g_{SUP} \angle \phi$ toma valores máximos, y aumenta Φ_{IS} (aumento de ε_T debido al incremento de $\Delta\theta$). En el caso, límite para $\Delta\theta = 360^\circ$ no existiría solución al problema de control $k=3$, tal y como ilustra la Figura 5-8 para el problema $k=2$.

(iv) La posición relativa de los valores $\{\theta\}$, incluso para $\Delta\theta = \text{constante}$, modifica la agresividad de los contornos de tipología B y A, al modificarse su posición relativa al punto de referencia $0\text{dB} \angle 0^\circ$. Véanse la Figura 5-6 y la Figura 5-9.

5.3.2.3 Conclusiones sobre la Influencia de la Incertidumbre

Según lo descrito en las secciones anteriores referente a la influencia de la incertidumbre en fase $\{\theta\}$ y ganancia $\{p\}$ por separado, se puede deducir qué ocurrirá con los contornos para el controlador en la frecuencia ω_i dada una plantilla genérica $\Im P(j\omega_i) = \{p \angle \theta\}$ con ambas incertidumbres. El valor de especificación en la frecuencia ω_i será constante, $\delta_3(\omega_i) = \delta_3$.

La plantilla genérica utilizada en los ejemplos gráficos responde a una familia de plantas $\wp = \{P(s) = k/(s/a+1), k \in [1, 10], a \in [1, 10]\}$, evaluada en la frecuencia $\omega_i = 2\text{rad/s}$. La Figura 5-35(a) incluye la totalidad de las plantas para una discretización en el parámetro ganancia con incertidumbre, k , de 5 puntos logarítmicamente espaciados y para el polo con incertidumbre, a , de 4 puntos logarítmicamente espaciados. La Figura 5-35(b) muestra el perfil de dicha plantilla. El perfil de las plantillas se denominará: $\partial(\Im P) = \partial\{p \angle \theta\}$.

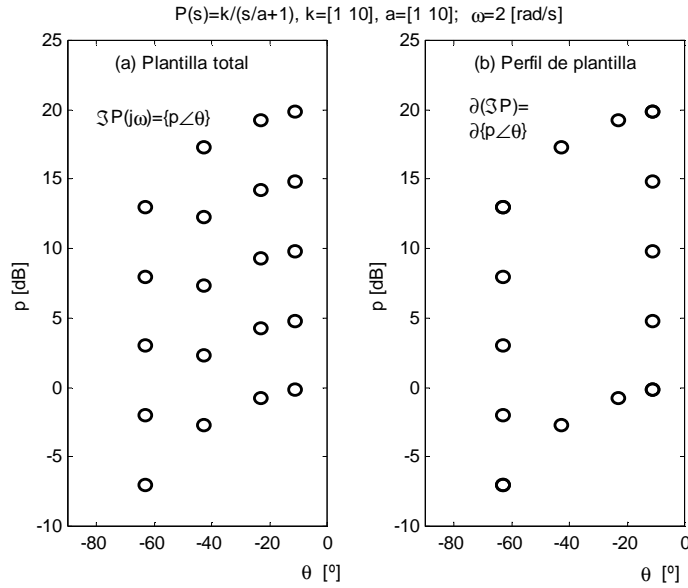


Figura 5-35: Plantilla genérica y perfil en $\omega_i=2\text{rad/s}$ para $\{P(j\omega_i)\}$

(i) Cuando todos los $p \angle \theta$ en la plantilla $\Im P(\omega_i)$ cumplen que $p < \delta_3$, se darán exclusivamente tipologías A simples, $\{g_{12} \angle \phi\}_A$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$ y ε en (5.96). El contorno intersección resultante será también de tipología A: $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T]$. En la determinación de la curva inferior del contorno doblevaluado, $g_{INF} \angle \phi$, intervienen las soluciones simples $g_1 \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$ de las plantas de módulo máximo p_{max} en cada θ , es decir, las plantas del perfil superior de la plantilla. Este perfil se denominará como $\partial p_{max} \angle \{\theta\}$. La curva superior del contorno doblevaluado, $g_{SUP} \angle \phi$, se calculará teniendo en cuenta todas las soluciones simples $\{g_2 \angle \phi\}_A$ asociadas a todas las plantas $p \angle \theta$ que conforman el perfil de la plantilla, $\partial \{p \angle \theta\}$. El conjunto solución descrito se resume en la siguiente ecuación:

$$g_{INFSUP} \angle \phi, \phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T]: \begin{cases} g_{INF} \angle \phi = \min_{\phi \in \Phi_{IS}} \{g_1 \angle \phi\}_A, \partial p_{max} \angle \{\theta\} \\ g_{SUP} \angle \phi = \max_{\phi \in \Phi_{IS}} \{g_2 \angle \phi\}_A, \partial \{p \angle \theta\} \\ 2\varepsilon_T = \varepsilon|_{p_{max} \angle \theta_{min}} + \varepsilon|_{p_{max} \angle \theta_{max}} + \Delta\theta \\ \phi_{VIS} = -180^\circ - 1/2(\theta_{min} + \theta_{max}) \end{cases} \quad (5.108)$$

Para el ejemplo $\{P(s)=k/(s/a+1), k \in [1, 10], a \in [1, 10]\}$, supóngase una tolerancia de especificación, $\delta_3=10.6(20.5\text{dB})$, cumpliéndose que para todo $p(\omega=2)$ en $\mathfrak{S}P(\omega)$ se cumple $p < \delta_3$. La Figura 5-36 muestra el perfil de plantilla utilizado.

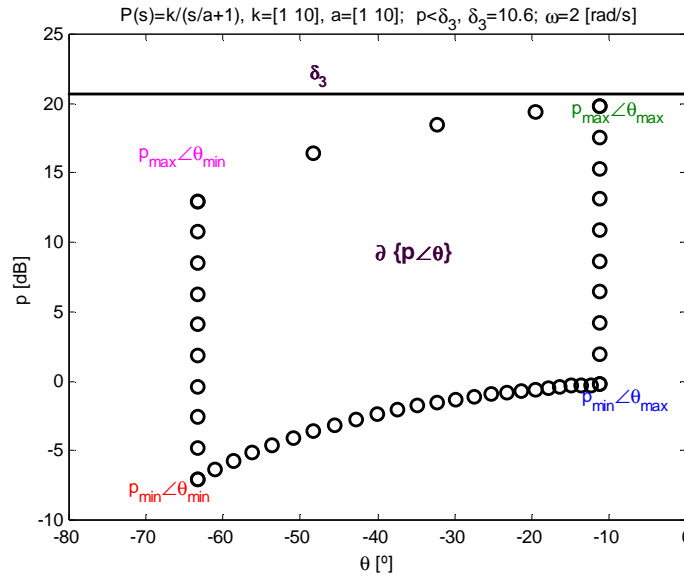


Figura 5-36: Perfil de plantilla con tamaños de discretización apropiados en sus aristas

Y la Figura 5-37 muestra el contorno intersección calculado según (5.108). Nótese como todas las aristas del perfil de la plantilla no tienen la misma densidad de puntos. El perfil inferior (módulos mínimos) exige una mayor densidad de puntos, ya que sus soluciones $g_{12} \angle \phi$ son reales en pequeños intervalos Φ_{12} (pequeños ϵ). Por el contrario las soluciones $g_{12} \angle \phi$ correspondientes a las plantas en el perfil superior presentan los mayores Φ_{12} , por lo que se necesita menor densidad de puntos. Por motivos de claridad de resultados, sobre la figura sólo se añaden los contornos simples $g_{12} \angle \phi$ para las plantas en los vértices de $\partial(\mathfrak{S}P)$, responsables del perfil del contorno intersección, $g_{INFSUP} \angle \phi$, también en sus vértices.

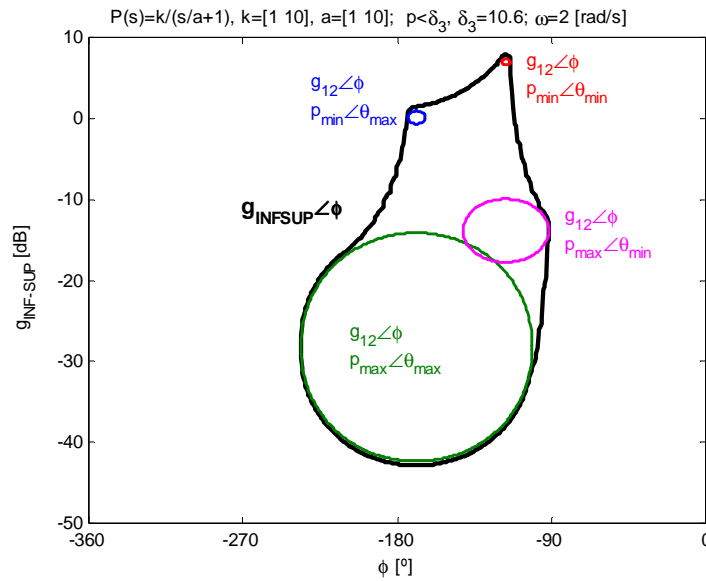


Figura 5-37: Contorno intersección de tipologías A simples para plantilla genérica

(ii) Cuando todas las plantas discretas $p \angle \theta$ en la plantilla $\mathfrak{S}P(\omega_i)$ cumplen que $p > \delta_3$, se darán exclusivamente tipologías B simples, $\{g_2 \angle \phi\}_B$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. El contorno intersección resultante será también de tipología B: $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi$. En la determinación de este $g_{SUP} \angle \phi$ intervienen el conjunto de soluciones simples $\{g_2 \angle \phi\}_B$ para todas las plantas del perfil, $\partial \{p \angle \theta\}$, tal y como resume la siguiente ecuación:

$$g_{SUP} \angle \phi, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]: \max_{\phi \in \Phi} \{g_2 \angle \phi\}_{B, \partial \{p \angle \theta\}} \quad (5.109)$$

Para el ejemplo $\{P(s)=k/(s/a+1), k \in [1, 10], a \in [1, 10]\}$, supóngase una tolerancia de especificación, $\delta_3=0.4(-8\text{dB})$, cumpliéndose que para todo $p(\omega_i=2)$ en $\mathfrak{S}P(\omega_i)$ se cumple $p > \delta_3$. La Figura 5-38 muestra el perfil de plantilla utilizado; nótese cómo no es necesaria una gran densidad de puntos. La Figura 5-39 muestra el contorno intersección calculado según (5.108). Sobre la figura sólo se añaden los contornos simples $g_2 \angle \phi$ para las plantas en los vértices de $\partial(\mathfrak{S}P)$.

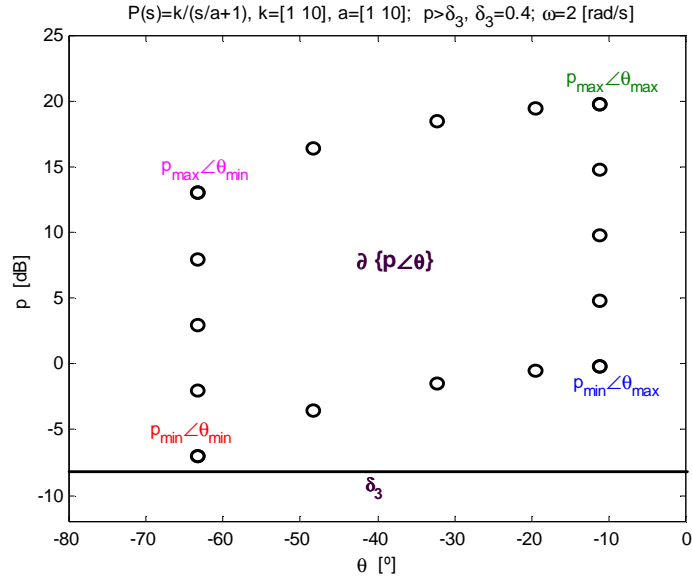


Figura 5-38: Perfil de plantilla con tamaños de discretización apropiados en sus aristas

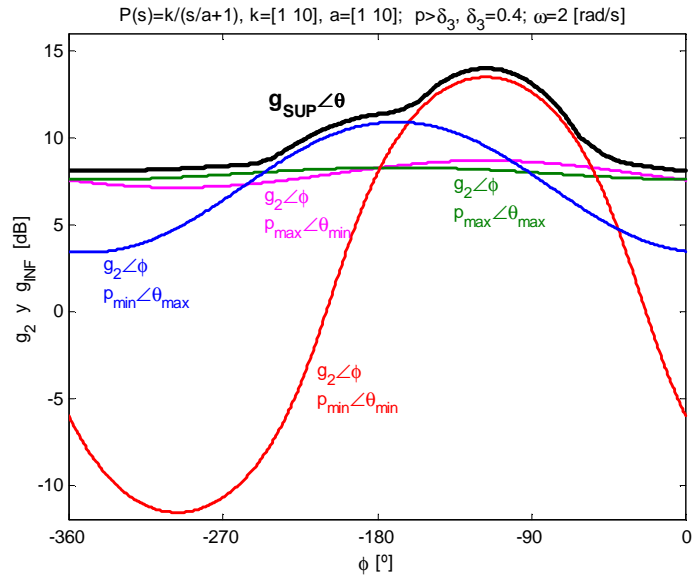


Figura 5-39: Contorno intersección de tipologías B simples para plantilla genérica

(iii) Algunos $p(\omega_i)$ en la plantilla $\mathfrak{S}P(\omega)$ cumplen $p(\omega_i) > \delta_3(\omega_i)$, originando contornos simples de tipologías B, $\{g_2 \angle \phi\}_B, \phi \in \Phi$. Y otros $p(\omega)$ cumplen $p(\omega) < \delta_3(\omega)$, dando tipologías A simples, $\{g_{12} \angle \phi\}_A, \phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$. La intersección de $\{g_2 \angle \phi\}_B$ y $\{g_{12} \angle \phi\}_A$ dará un contorno intersección monovaluado superior o de tipología B, $g_{SUP} \angle \phi, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. Para su cálculo bastarán las soluciones $\{g_2 \angle \phi\}_{B \vee A}$ pero de todas las plantas en el perfil $\partial\{p \angle \theta\}$. Esto se resume en la siguiente ecuación:

$$g_{SUP} \angle \phi, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]: \max_{\phi \in \Phi} \{ \{g_2 \angle \phi\}_B \text{ y } \{g_{12} \angle \phi\}_A \}_{\partial\{p \angle \theta\}} \quad (5.110)$$

Para el ejemplo $\{P(s)=k/(s/a+1), k \in [1, 10], a \in [1, 10]\}$, supóngase en $\omega=2\text{rad/s}$ una tolerancia de especificación, $\delta_3=1.1(0.8\text{dB})$. Por tanto, para ciertas plantas en la plantilla ω_i se tiene que $p < \delta_3$ y para otras $p > \delta_3$. La Figura 5-40 muestra el perfil de plantilla utilizado y la Figura 5-41 muestra el contorno intersección $g_{SUP} \angle \phi, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ calculado según (5.110). Por motivos de claridad en la ilustración de resultados, sobre la figura sólo se añaden los contornos simples $g_2 \angle \phi$ de tipología B y A para las plantas en los vértices de $\partial(\mathfrak{S}P)$.

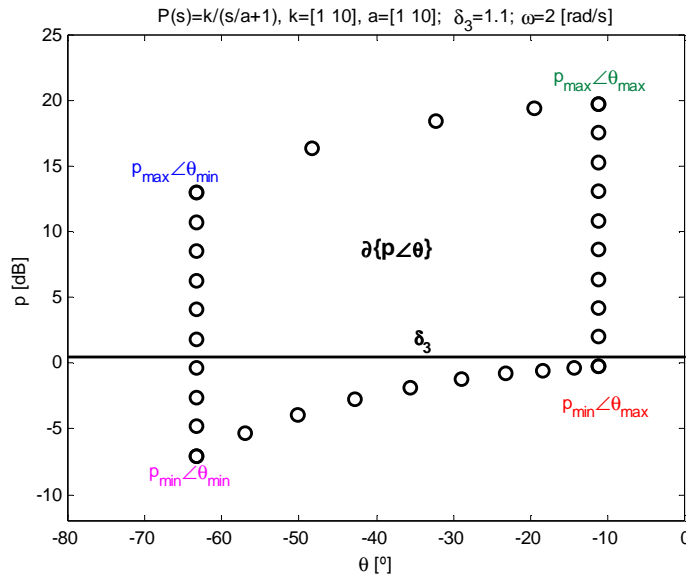


Figura 5-40: Perfil de plantilla con tamaños de discretización apropiados en sus aristas

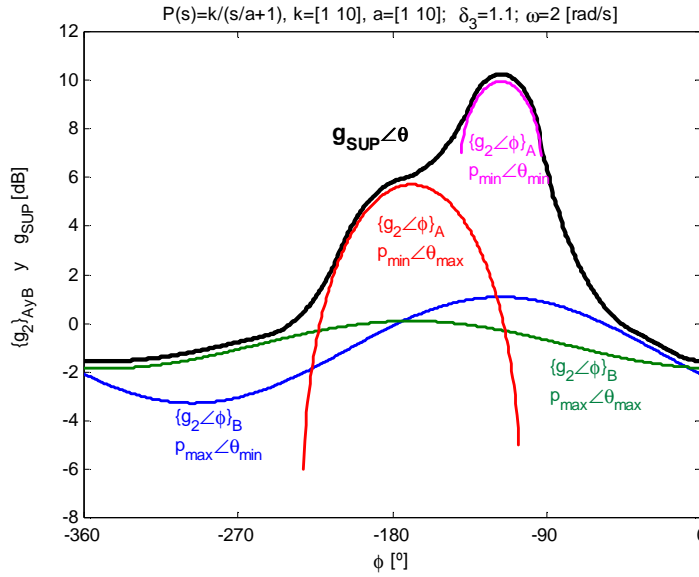


Figura 5-41: Contorno intersección de con tipologías simples A y B para plantilla genérica

5.3.3 INFLUENCIA DE LA ESPECIFICACIÓN, δ_3 .

Según el problema de control $k=3$ en (3.8), $|T_3(j\omega_i)| < \delta_3(\omega_i)$, en cada frecuencia ω_i se tiene un valor característico de especificación, $\delta_3(\omega_i)$. Y a esa misma frecuencia, un conjunto de plantas discretas (plantilla) con una cierta incertidumbre en fase y ganancia representa al sistema, $\mathfrak{S}P(j\omega) = \{p \angle \theta\}_{r=1, \dots, j}$. En esta sección se pretende analizar cómo la variación de la tolerancia de especificación $\delta_3(\omega)$ afecta a los contornos resultantes. Esto puede resolver dos preguntas: (a) cómo evolucionan los contornos con la frecuencia ω_i , ya que se tendrá un valor específico de δ_3 para cada una de ellas; y (b) de qué manera, para una misma frecuencia ω_i , tolerancias δ_3 más o menos agresivas se traducen en contornos más o menos exigentes. Ambas cuestiones, (a) y (b), afectan a la resolución del problema de control con QFT (véase Sección 5.4).

De acuerdo al estudio de los contornos en la Sección 5.3.1, el valor de especificación δ_3 , junto con el módulo p , determinan su tipología según resume la Figura 5-26. Si ahora se considera p constante, las tipologías de contornos en función de δ_3 se pueden clasificar como indica la Figura 5-42.

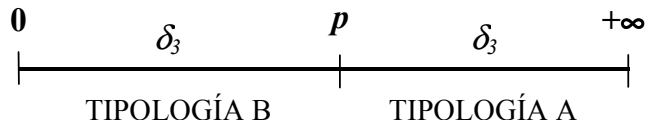


Figura 5-42: Tipologías de contornos en función de la tolerancia de especificación, δ_3

Para estudiar la influencia de δ_3 , se analizarán g_1 y/o g_2 en (5.98):

$$g_{12} = \frac{-c \delta_3 \mp \sqrt{(c^2 - 1)\delta_3^2 + p^2}}{p \delta_3}$$

donde c representa según (5.85) $\cos(\phi + \theta)$. De acuerdo a la Sección 5.3.1 y según resume la Figura 5-42: (a) para aquellos valores de especificación δ_3 tal que $0 < \delta_3 < p$, se da una tipología B de contornos, donde sólo existe $g_2 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ (en Φ , la magnitud g_2 toma valores reales, positivos y mayores que cero); (b) cuando la especificación es tal que $p < \delta_3 < +\infty$, producirá una tipología A de contornos, $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \epsilon]$, ϵ en (5.96) (en Φ_{12} , g_1 y g_2 toman ambos valores reales, positivos y mayores que cero).

Para una **tipología B** de contornos, $0 < \delta_3 < p$, la evolución del contorno simplevaluado $g_2 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ al variar δ_3 se muestra en la Figura 5-43.

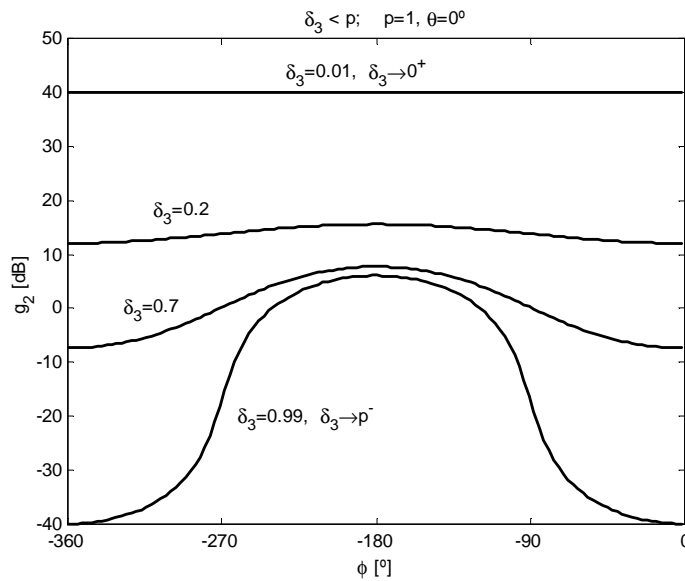


Figura 5-43: Influencia de la especificación δ_3 en contornos de tipología B ($\delta_3 < p$)

Es decir, cuando la tolerancia de especificación δ_3 disminuye (típico de medias hacia bajas frecuencias), el contorno simple $g_2 \angle \phi$ se eleva (más agresivo). Es lógico pensar que una limitación más exigente en la dinámica de rechazo de perturbaciones (δ_3 menor) necesitará una mayor ganancia de lazo abierto (g o $l=gp$), y por tanto un contorno tipo B a satisfacer de mayor altura. La siguiente ecuación resume el comportamiento ante una disminución de δ_3 en tipologías B de contornos ($0 < \delta_3 < p$).

$$\delta_3 \downarrow \Rightarrow g_2 \angle \phi \uparrow, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ] \quad (5.111)$$

También sobre la Figura 5-43 puede comprobarse la tendencia de los contornos B en los valores de especificación límite del intervalo donde aparece esta tipología, $\delta_3 \rightarrow 0^+$ y $\delta_3 \rightarrow p^-$. Los valores exactos¹³ se calculan tomando límites para g_2 en (5.98):

$$\lim_{\delta_3 \rightarrow 0^+} g_2 = +\infty, \forall \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ] \quad (5.112)$$

$$\lim_{\delta_3 \rightarrow p^-} g_2 = \begin{cases} \frac{2|\cos(\phi + \theta)|}{p}, & \phi \in \Phi_2 = [-270^\circ - \theta, -90^\circ - \theta] \\ 0 = -\infty \text{dB}, & \phi \in \bar{\Phi}_2 \end{cases} \quad (5.113)$$

Cuando el nivel de atenuación en Y de las perturbaciones D_l es muy exigente (disminución de δ_3), el contorno se eleva indefinidamente hasta el infinito para $\delta_3 \rightarrow 0^+$ como muestra (5.112).

Al relajarse la especificación (aumento de δ_3), en (5.113) se comprueba cómo en $\delta_3 \rightarrow p^-$ existe un cambio de tipología de contornos, tal y como resumía la Figura 5-42. En dicho límite, pero ahora para una tipología A de contornos, se deduce:

$$\begin{cases} \lim_{\delta_3 \rightarrow p^+} g_1 = 0 = -\infty \text{dB} \\ \lim_{\delta_3 \rightarrow p^+} g_2 = \frac{2|\cos(\phi + \theta)|}{p}, \phi \in [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon] \\ \lim_{\delta_3 \rightarrow p^+} \varepsilon = 90^\circ \end{cases} \quad (5.114)$$

La transición entre tipologías B y A se detalla en la Figura 5-44. Se comprueban las ecuaciones (5.113) y (5.114). Por ejemplo, para $\phi + \theta = 180^\circ$, la magnitud g_2 se acerca a $2/p = 2$ (6dB) cuando $\delta_3 \rightarrow p$ tanto por la izquierda como por la derecha.

¹³ Nótese que la formulación se expresa en magnitudes lineales, mientras que los gráficos representan estas en decibelios (dB).

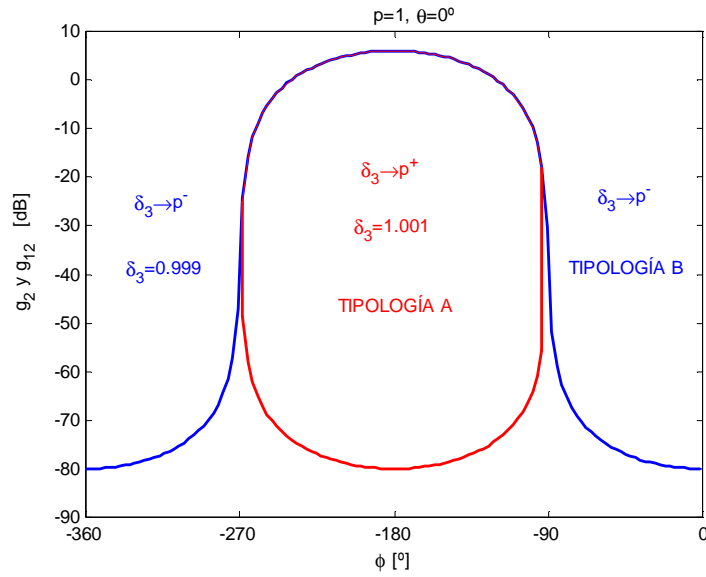


Figura 5-44: Transición entre tipología B, $\delta_3 \rightarrow p^-$, y tipología A, $\delta_3 \rightarrow p^+$, de contornos en función de la especificación δ_3

Para una **tipología A** de contornos, $p < \delta_3 < +\infty$, la evolución de $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, ε en (5.96), al variar δ_3 se muestra en la Figura 5-45.

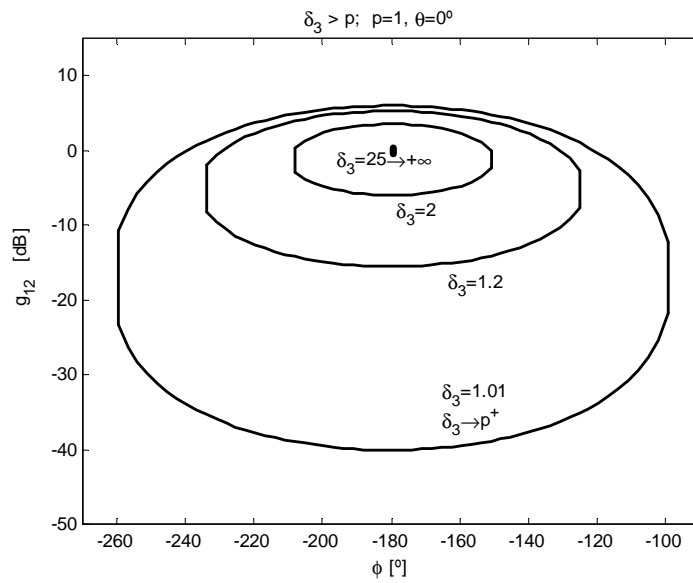


Figura 5-45: Influencia de la especificación δ_3 en contornos de tipología A ($\delta_3 > p$)

Es decir, cuando δ_3 aumenta (típico de medias hacia altas frecuencias) en $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$ se tiene que: (a) $g_1 \angle \phi$ se eleva (menos agresivo), (b) $g_2 \angle \phi$ descende (menos agresivo) y (c) ε en (5.96) disminuye (el intervalo Φ_{12} se estrecha, luego contornos menos agresivos). En definitiva esto implica que cuando la especificación que limita el pico máximo debido a perturbaciones D_I es más permisiva (márgenes de estabilidad menores), los contornos o limitaciones para el controlador también se relajan. El comportamiento descrito se resume en la siguiente ecuación:

$$\delta_3 \uparrow \Rightarrow \begin{cases} g_1 \angle \phi \uparrow \\ g_2 \angle \phi \downarrow \\ \varepsilon \downarrow \end{cases}, \phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon], 0 < \varepsilon < 90^\circ \quad (5.115)$$

En el límite superior del intervalo para tipologías A de contornos, es decir cuando $\delta_3 \rightarrow +\infty$, tomando límites para g_{12} en (5.98) con $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$ y ε en (5.96), se calcula:

$$\begin{cases} \lim_{\delta_3 \rightarrow +\infty} g_{12} = 1/p \\ \lim_{\delta_3 \rightarrow +\infty} \varepsilon = 0^\circ \end{cases}, \phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon] \quad (5.116)$$

Según el resultado en (5.116) cuando el valor de especificación δ_3 se relaja infinitamente el contorno simple se reduce a al punto, $1/p \angle -180^\circ - \theta$. Considerando la incertidumbre en magnitud $\{p\}$ dicho contorno se transforma en una recta vertical, y debido a la incertidumbre en fase $\{\theta\}$ dicha recta se desplaza horizontalmente originando un paralelepípedo. Es decir cuando la especificación de estabilidad δ_3 se relaja mucho, los contornos a satisfacer, que garantizan unos mínimos márgenes de ganancia y fase muy permisivos (δ_3 muy grande), dependen de la propia incertidumbre del sistema. Si prescindimos de la incertidumbre, el margen de ganancia y fase requeridos se hacen cero cuando la especificación δ_3 crece infinitamente.

* * *

Comparando la Figura 5-43, la Figura 5-44 y la Figura 5-45 puede comprobarse cómo cuando la especificación que limita el efecto en la salida del proceso de perturbaciones en su entrada (δ_3) se relaja desde valores muy pequeños ($\delta_3 \approx 0^+$) hasta valores casi infinitos ($\delta_3 \approx +\infty$), la agresividad de los contornos que la representan en QFT también se relaja. Es decir, las necesidades de control para el sistema (G o L_θ) son menos exigentes. De esta manera, se comprueba el paso de una tipología B (más restrictiva al ocupar todo el intervalo de fases de diseño) a una tipología A de contornos. Y

también, dentro de cada tipología, cuando δ_3 se relaja el contorno B o A se relaja. De este modo, los contornos tipo B descienden en todas las fases, y los contornos tipo A se estrechan en fase y ganancia hasta reducirse a un punto. Todas estas conclusiones se expresan formalmente en la ecuaciones (5.111) a (5.116).

5.4 SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE CONTROL SOBRE LA SENSIBILIDAD

Tradicionalmente la sensibilidad de un sistema de realimentación, tal y como se definió en (2.7) $S=1/1+L$, representa la variación de su función de transferencia de lazo cerrado, ΔT , debido a la incertidumbre de la planta en lazo abierto, ΔP . Este concepto toma especial importancia en las técnicas robustas de control que consideran la incertidumbre en el proceso de diseño.

De acuerdo a (3.4) y (3.5) y supuesto $H=1$, la función de transferencia $S=1/1+L$ tan sólo representa la relación entre la salida, Y , y las perturbaciones que la afectan, D_2 , es decir, Y/D_2 . Sin embargo, debido a los compromisos de la realimentación (en especial, a la relación $S+T=1$) toda tolerancia impuesta sobre $S=1/1+L$ condiciona también otras funciones de transferencia: la sensibilidad considerando el proceso, $S'=P/1+L$, la sensibilidad complementaria, $T=L/1+L$, y el esfuerzo de control $G/1+L$. Nótese que en todos ellos aparece la función de transferencia de lazo abierto, $L=GP$, seleccionada por QFT como la más adecuada para establecer los compromisos de realimentación que interrelacionan las funciones de transferencia anteriores. Tales condiciones sobre L se resumieron en la Sección 2.3.1 y en las Secciones 5.2 y 5.3 se estudiaron sus contornos QFT a partir de las tolerancias de especificación sobre las funciones de sensibilidad: $S=1/1+L$ y $S'=P/1+L$. Éstas se definieron en (3.7) y (3.8) como:

$$|T_2(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+L(j\omega)} \right| = \left| \frac{Y(j\omega)}{D_2(j\omega)} \right| \leq \delta_2(\omega), \quad \omega \in \Omega_2$$

$$|T_3(j\omega)| = \left| \frac{P(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| = \left| \frac{Y(j\omega)}{D_1(j\omega)} \right| \leq \delta_3(\omega), \quad \omega \in \Omega_3$$

El rechazo de perturbaciones es, después de garantizar la estabilidad, el objetivo más habitual del control realimentado, necesario en la mayoría de los procesos y sistemas industriales.

Ante la necesidad de un rechazo dinámicamente adecuado de las perturbaciones, S y S' deben ser lo suficientemente pequeñas ($0 < |S| \ll 1$) en las frecuencias de interés de la realimentación, Ω_2 y Ω_3 . Sin embargo, en

todo sistema práctico (evitar amplificación de ruidos) esto implica que existirá un pico de $|S| > 1$, en otras frecuencias. Esto se deriva de la Integral de Sensibilidad de Bode (Bode, 1945), incluso aunque el sistema no sea de fase mínima y no tenga polos inestables. La razón es que $|S|$ no puede tender a 1 en un intervalo infinito de frecuencias para cumplir $\int_0^\infty |S| = 0$, ya que el excesivo ancho de banda amplificaría cualquier ruido, saturando los actuadores. Los compromisos frecuenciales para S y S' se traducirán en un modelado adecuado de las tolerancias de especificación δ_2 y δ_3 . Dichos compromisos se agravan cuanto mayores sean los beneficios de la realimentación (mejor rechazo de perturbaciones, menores δ_2 y δ_3 en un mayor rango de bajas y medias frecuencias). Y también cuanto mayor sea la incertidumbre $\{P\}$. Así lo demostraban los contornos analizados en las secciones anteriores, y resume la Sección 5.4.1. Todo esto finalmente derivará en una mayor dificultad o la imposibilidad de diseñar una $L_0 = GP_0$ que satisfaga las especificaciones considerada la incertidumbre. Las Secciones 5.4.2 y 5.4.3 analizan el modelado de L_0 .

5.4.1 ALGUNAS CONCLUSIONES SOBRE LOS CONTORNOS

En primer lugar debe recordarse que los contornos para el controlador, G , y para la función de transferencia nominal de lazo abierto, L_0 , expresan las mismas necesidades. Esto era debido a que la misma cantidad que se trasladan los contornos sobre los ejes grados-decibelios se traslada también el punto de referencia ($0\text{dB} \angle 0^\circ$ para G y la planta nominal $p_0 \angle \theta_0$ para L_0). Por ello, indistintamente hablaremos de contornos en términos de G o de L . (Véanse Figura 5-20, Figura 5-21).

Conforme disminuyen las tolerancias de especificación $\delta_{2,3}$, sobre las funciones sensibilidad, $|S| = |1/1+L|$ o $|S'| = |P/1+L|$, los contornos se hacen más agresivos. Esto significa que la limitación en la salida Y de perturbaciones D_2 o D_1 necesita de mayor control realimentado G . Así lo demuestra el paso de una tipología A de contornos para $\delta_2 > 1$ o $\delta_3 > p$ a una tipología B (más agresiva) para $\delta_2 < 1$ o $\delta_3 < p$; véanse la Sección 5.2.3 y la 5.3.3, la Figura 5-22 y la Figura 5-44. Y dentro de cada tipología también un decremento de δ_2 o δ_3 implicaba unos contornos más desfavorables. La Figura 5-25 para $\delta_2 > 1$ y la Figura 5-45 para $\delta_3 > p$, muestran cómo al disminuir δ_2 o δ_3 (limitación mayor del pico de sensibilidad en moderadamente altas frecuencias) los contornos de tipo A ocupan una mayor área de ganancias y fases en el plano de Nichols, en busca de unos márgenes de fase y ganancia más conservadores. La Figura 5-23 para $\delta_2 < 1$ y la Figura 5-43 para $\delta_3 < p$ ilustran cómo los contornos de tipo B (característicos de bajas y medias frecuencias)

se elevan al disminuir las tolerancias, ya que exigen una mayor ganancia $|L|$ en el rechazo de perturbaciones.

Cabe también destacar que para el problema $|S|=|T_2|=|1/1+L|\leq\delta_2$ es exclusivamente el valor de especificación δ_2 quien marca la transición de tipología de contornos. Mientras tanto, para $|S'|=|T_3|=|P/1+L|\leq\delta_3$ la tipología depende, además de δ_3 , de la incertidumbre en magnitud $\{p\}$.

En general, la incertidumbre aumenta las exigencias expresadas por los contornos. Para el problema $|S|=|T_2|=|1/1+L|\leq\delta_2$ se estudió cómo el incremento de la incertidumbre en fase ($\Delta\theta$) hacía que los contornos A ($\delta_2>1$) ocuparan un mayor intervalo de fases (Figura 5-8) y sus valores relativos $\{\theta\}$ desplazaban el contorno A sobre $[-360^\circ, 0^\circ]$ (Figura 5-9). Los contornos de tipo B ($\delta_2<1$) también se trasladaban en función de $\{\theta\}$ (Figura 5-6) y tomaban valores máximos en un mayor intervalo de fases en función de $\Delta\theta$ (Figura 5-5). Para la incertidumbre en ganancia, en el trazado de los contornos de tipo B sólo el perfil inferior de las plantillas era significativo, y los contornos ascendían (más agresivos o mayor necesidad de ganancia) cuanto menores fueran los valores mínimos de la incertidumbre en magnitud (Figura 5-12). Esto indicaba que el caso más desfavorable (el que necesita una mayor ganancia $|G|$) para conseguir una ganancia mínima $|L|$ (según exija δ_2), adecuada en el rechazo de perturbaciones, lo marcan precisamente las plantas de menor módulo en la incertidumbre $\{p\}$. En los contornos A, tanto el perfil superior como el inferior de las plantillas (módulos máximo y mínimos) eran significativos, puesto que ahora ($|S|=|1/1+L|\leq\delta_2$ con $\delta_2>1$) se trata de limitar la pendiente de caída de $|L|$ garantizando unos ciertos márgenes de estabilidad. A mayor Δp los contornos ocupaban mayor área verticalmente, y aumentaban su altura cuando disminuían los valores relativos de incertidumbre $\{p\}$ (Figura 5-14).

El problema $|S'|=|T_3|=|P/1+L|\leq\delta_3$ es algo más complejo respecto a la incertidumbre, puesto que $\{p(\omega)\}$ influye también en la tipología de los contornos. Cuando todas las plantas en ω_i tenían un módulo p mayor que la tolerancia δ_3 , $\{p(\omega_i)\}>\delta_3(\omega_i)$, aparecían contornos de tipo B. Esto es típico de las bajas frecuencias donde el módulo de la planta toma valores mayores que para alta frecuencia, e inversamente δ_3 crece con la frecuencia para un rechazo adecuado y factible de las perturbaciones. Entonces, en las fases donde el contorno para G toma su máximo (alrededores de $-180^\circ-\{\theta\}$), eran las plantas de módulo mínimo en $\{p<\theta\}$ las que advertían una mayor necesidad de ganancia $|G|$ para que $|L|$ aumente según exija $|P/1+L|\leq\delta_3$ con $\{p\}>\delta_3$. Paralelamente, las plantas de módulo máximo en $\{p<\theta\}$ también contribuían al contorno en las fases del extremo del intervalo. Véase la Figura 5-38 y la Figura 5-39. Esto es debido a que la reducción de

$|S|=|1/1+L|$ a conseguir a partir de $l=g \cdot p_{min}$ no es la misma que la reducción de $|S'|=|P/1+L|$, donde $\{p\}$ aparece tanto en el denominador como en el numerador, contribuyendo de forma contrapuesta. Entonces, el caso más desfavorable lo marca $|S'|=p_{max}/1+g \cdot p_{min} \leq \delta_3$. En definitiva, en el contorno B resultante intervenían las plantas de módulo máximo y mínimo. El contorno se hacía tanto más desfavorable (mayor altura en todas las fases) cuanto mayor sean las magnitudes $\{p\}$ máximas y menores las mínimas, y cuanto mayor sea la incertidumbre en $\{\theta\}$; Figura 5-32.

Conforme aumenta la frecuencia, los valores relativos de $\{p(\omega_i)\}$ disminuyen y $\delta_3(\omega_i)$ aumenta, por lo que ciertas plantas seguirán cumpliendo $p(\omega_i) > \delta_3(\omega_i)$, y otras $p(\omega_i) < \delta_3(\omega_i)$. La intersección de tipologías A y B de contornos simples resultaba en una tipología B de contornos intersección. Y por los mismos motivos argumentados anteriormente para $\{p\} > \delta_3$, en las fases cercanas a $-180^\circ - \{\theta\}$ son las plantas de módulo mínimo las más significativas y hacia los extremos, las plantas de módulo máximo determinan el contorno más desfavorable; véanse la Figura 5-40 y la Figura 5-41.

En las frecuencias más altas todos los módulos de las plantas $\{p(\omega_i)\}$ son suficientemente pequeños en sistemas estrictamente propios, y a su vez el pico de $|S|$ necesariamente tomará valores superiores a la unidad, lo que obliga a relajar $\delta_3(\omega_i)$ incrementándolo hacia valores moderadamente altos. Entonces, todas las plantas cumplen $\{p(\omega_i)\} < \delta_3(\omega_i)$, apareciendo exclusivamente una tipología A de contornos simples e intersección. Una mayor incertidumbre $\{p\}$ en estas frecuencias estirará verticalmente los contornos, expresando para la misma tolerancia δ_3 : unos márgenes de estabilidad más conservadores para ciertas plantas en $\{p\}$, mientras que para otras se cumplen estrictamente los mínimos márgenes fijados por δ_3 . Véanse Figura 5-36 y Figura 5-37. La incertidumbre creciente en $\{\theta\}$ ensanchaba horizontalmente los contornos A contribuyendo al mismo efecto anterior (márgenes más conservadores para ciertas plantas y los justos para otras).

5.4.2 RECHAZO DE PERTURBACIONES

Se considerarán, por ejemplo, perturbaciones D_2 que se suman a la salida Y del sistema (Figura 2-1). Se comprobarán las dificultades en el modelado de L_0 en presencia de una incertidumbre creciente y de una tolerancia de atenuación δ_2 más severa.

Se tomará la misma familia de plantas que en la Sección 4.5.2, $\{p = \{P(s) = k/(s/a+1)\}$ cuyo polo en a y su ganancia k presentan una cierta incertidumbre.

Para un correcto rechazo de perturbaciones, $|S| = |1/1+L| = |Y/D_2| \leq \delta_2$, la sensibilidad en lazo cerrado $|S(\omega_f)|$ en bajas frecuencias debe ser lo suficientemente pequeña. Por ello, se selecciona $\delta_2(\omega_f) \ll 1$. En términos de diseño en lazo abierto, $|L| = |GP|$ debe aumentarse convenientemente con G en ω_f . Si para una determinada baja frecuencia, $\omega_f = 1 \text{ rad/s}$, se exige una mayor atenuación de la perturbación D_2 en Y , la tolerancia δ_2 debe ser más pequeña. Se demostró que esto eleva el contorno de tipología B (Figura 5-23). El mismo efecto se produce si los valores de incertidumbre vertical $\{p(\omega_i)\}$ en la frecuencia de interés, $\omega_f = 1 \text{ rad/s}$, son menores, elevándose también el contorno de tipo B (Figura 5-12). Y si la incertidumbre horizontal $\{\theta(\omega_i)\}$ aumenta, los puntos donde el contorno se hace máximo aumentan (Figura 5-6). Como ejemplo ilustrativo se considerará tan sólo uno de los factores, la disminución en la tolerancia de atenuación de perturbaciones δ_2 , y se valorará el 'precio' pagado por esto en otras frecuencias al modelar $L_0 = GP_0$.

Los beneficios de la realimentación no pueden extenderse hasta muy altas frecuencias, donde los modelos no responden a las características reales. Y donde el efecto de las señales de ruido imposibilita obtener una atenuación de perturbaciones sin amplificar ruidos. Por ello, la especificación $|S| < \delta_2$ requiere $\delta_2(\omega_{hf}) \gg 1$. Los contornos de tipo A resultantes permitirán entonces disminuir la ganancia $|L|$ de alta frecuencia lo más rápidamente posible. Dichos contornos incluso prácticamente se extinguirían si $\delta_2(\omega_{hf})$ aumenta mucho (véase Sección 5.2.3.2 y Figura 5-25).

Entonces, en un correcto comportamiento del sistema realimentado se obtendría $|S(j\omega_f)| \ll 1$ y $|S(j\omega_{hf})| \approx 1$. Y por tanto, en virtud de la Integral de Sensibilidad de Bode, $\int_0^\infty |S(j\omega)| d\omega = 0$ para sistemas de fase mínima y estables, es inevitable un pico en $|S(j\omega)|$ en alguna frecuencia $\omega_{lf} < \omega < \omega_{hf}$. El pico será tanto mayor cuanto menor sea ω_{hf} y cuanto más exigente sea la especificación de baja frecuencia $\delta_2(\omega_f) \ll 1$. Para acotar el pico de sensibilidad basta limitar $\delta_2(\omega_{hf})$ a un valor mayor que 1 pero suficientemente pequeño. Esto da lugar a contornos de tipo A dominantes a partir de una cierta frecuencia, y que ocupan un área significativa alrededor de $0 \text{ dB} \angle -180^\circ$ (véase Figura 5-25). Entonces, para un diseño estable los contornos de tipo A limitan la pendiente de transición de la función $L(j\omega)$ entre una elevada $|L(\omega_f)|$, exigida por los contornos B en baja frecuencia a una $|L(\omega_{hf})|$ lo suficientemente pequeña, implícitamente considerada para no amplificar en exceso los ruidos del sensor. A continuación se muestra un ejemplo.

Un ejemplo sobre el diseño de controladores al variar la tolerancia de especificación δ_2 en el rechazo de perturbaciones Y/D_2

En función de lo argumentado anteriormente, supónganse dos condiciones de trabajo, \mathfrak{R}_1 y \mathfrak{R}_2 , en bajas-medias frecuencias, que representarán distintas especificaciones δ_2 y el mismo sistema con incertidumbre $\wp = \{P(s) = k/(s/a+1)\}$. Se selecciona la frecuencia $\omega_{mf} = 1 \text{ rad/s}$. Las condiciones $\mathfrak{R}_{1\omega mf}$ se resumen: $\mathfrak{R}_{1\omega mf} = \{\delta_2 = 0.3, k = [1, 5], a = [1, 5]\}$, y las condiciones $\mathfrak{R}_{2\omega mf}$, más severas que las anteriores, se establecen como: $\mathfrak{R}_{2\omega mf} = \{\delta_2 = 0.1, k = [1, 5], a = [1, 5]\}$. Nótese que al tratarse del mismo sistema en ambas condiciones se tiene la misma cantidad de incertidumbre. Mientras que una variación en la tolerancia de especificación δ_k afecta a los contornos representativos del problema de control k , una variación en la incertidumbre afectaría a todos los contornos, representativos de las distintas $\delta_{k=1, \dots, M}$. Un ejemplo de cómo la incertidumbre contribuye en el diseño del controlador y en el comportamiento final del sistema realimentado se estudió en la Sección 4.5.2. Ahora, se realiza un estudio paralelo pero variando la tolerancia de especificación, en particular, δ_2 .

En media-alta frecuencia se necesita una $|S| < \delta_2$ con $\delta_2 > 1$, pero de valor δ_2 moderadamente alto para garantizar una mínima estabilidad, como se argumentó anteriormente. Esto equivale a una especificación de estabilidad sobre la sensibilidad complementaria, $|T| = |L/(1+L)| \leq \delta_l$, con $\delta_l > 1$, como se estudiaba en el capítulo anterior. La Sección 5.4.3 analiza las equivalencias entre los márgenes de fase y ganancia obtenidos para $|T| = |L/(1+L)| \leq \delta_l$ y para $|S| = |1/(1+L)| \leq \delta_s$. De momento, utilizaremos la formulación en el capítulo anterior. En todas las frecuencias de trabajo, $\omega = [1, 100] \text{ rad/s}$ en el ejemplo, se tomará una especificación de estabilidad de $\delta_l \approx 1.3$, que garantice según (4.83) y (4.84) unos mínimos márgenes de 45° en fase y 5dB en ganancia, a pesar de la incertidumbre. Dicha especificación determina unos contornos sólo dominantes en alta frecuencia, $\omega_{hf} = 100 \text{ rad/s}$, donde no se pretende atenuar en Y ninguna perturbación D_2 . Las condiciones de alta frecuencia se definen entonces, $\mathfrak{R}_{\omega hf} = \{\delta_l = 1.3, k = [1, 5], a = [1, 5]\}$.

Las plantillas de incertidumbre frecuencial se muestran en la Figura 5-46. Para $k = [1, 5]$ y $a = [1, 5]$, la incertidumbre en magnitud en $\omega = 1 \text{ rad/s}$ se caracteriza por $p_{max} = 4.9(13.8 \text{ dB})$ y $p_{min} = 0.707(-3 \text{ dB})$. La planta nominal, P_0 para $k = 1, a = 1$, se evalúa en $\omega = 1 \text{ rad/s}$ resultando $p_0 = 0.707(-3 \text{ dB})$ y $\theta_0 = -45^\circ$.

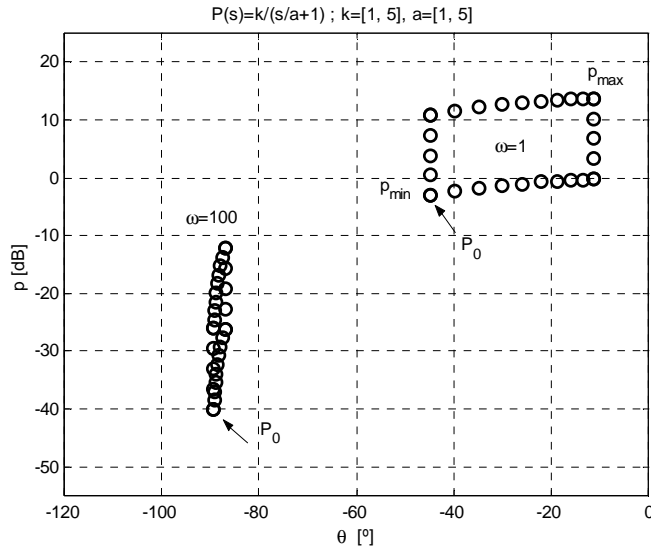


Figura 5-46: Plantilla de incertidumbre frecuencial en el ejemplo de diseño

Los contornos que representan las dos especificaciones robustas y distintos diseños de L_0 se muestran en la Figura 5-47. El gráfico(a) representa los requisitos de control $\mathfrak{R}_{1\omega mf}$ (contorno de tipo B) y $\mathfrak{R}_{\omega hf}$ (contorno de tipo A). En el gráfico(b) se mantienen las condiciones de alta frecuencia $\mathfrak{R}_{\omega hf}$ y varían las de baja frecuencia $\mathfrak{R}_{2\omega mf}$.

Comparando los contornos de baja frecuencia para $\mathfrak{R}_{1\omega mf}$ y $\mathfrak{R}_{2\omega mf}$, la reducción de δ_2 para un mayor nivel de atenuación de $|Y/D_2|$ siendo $\delta_2 < 1$, eleva el contorno de tipo B en $\omega=1$ rad/s. En dicha frecuencia sustituyendo en (5.45): $p_{min}=0.707$, con $\delta_2=0.3$, se obtiene que el punto máximo del contorno para G resulta 6.1 (15.7dB). Entonces, el máximo para el contorno en L_0 resulta 4.3 (12.7dB), con $L_0=GP_0$ y $P_0(\omega=1)=0.707(-3dB)\angle -45^\circ$. Haciendo los mismos cálculos para $\delta_2=0.1$ el contorno en $\omega=1$ rad/s para L_0 alcanza un máximo de 11(20.8dB). Es decir, el rechazo de perturbaciones exige 10dB ($\delta_2=0.3 \rightarrow 0.1$) más de atenuación (-10dB), y el contorno representativo se eleva 8 dB en su punto de máximo (-180°) y más en las restantes fases. Esto demandará que G aporte esta ganancia extra con las consiguientes penalizaciones.

Para las especificaciones menos agresivas, $\{\delta_2(\omega_f)=0.3, \delta_1(\omega_f)=1.3\}$ con $k=[1, 5], a=[1, 5]$, se modela $L_{0f}=G_1P_0$, resultando un diseño de control:

$$G_1(s) = \frac{4}{\frac{s}{62} + 1} \tag{5.117}$$

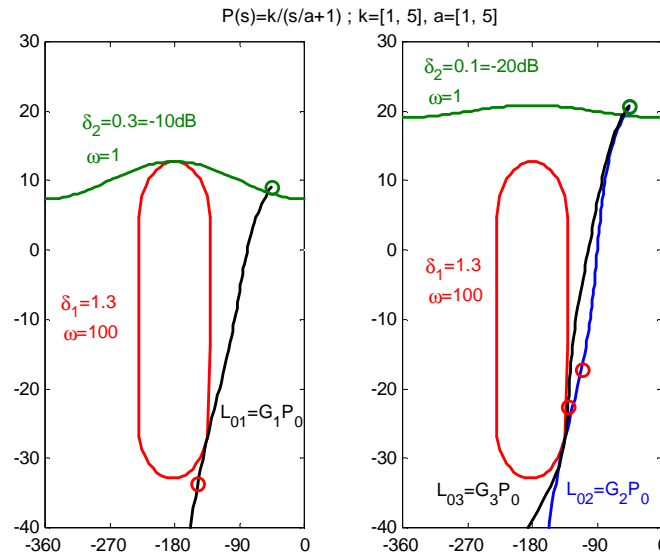


Figura 5-47: Compromisos de diseño al variar la especificación de rechazo de perturbaciones

Para las especificaciones más agresivas, $\{\delta_2(\omega_{pf})=0.1, \delta_1(\omega_{hf})=1.3\}$ con $k=[1, 5], a=[1, 5]$, se modelaron $L_{02}=G_2P_0$ y $L_{03}=G_3P_0$, cuyos controladores son:

$$G_2(s) = \frac{15}{\frac{s}{247} + 1} \quad (5.118)$$

$$G_3(s) = \frac{15 \left(\frac{s}{96} + 1 \right)}{\left(\frac{s}{36} + 1 \right) \left(\frac{s^2}{465^2} + \frac{2 \cdot 0.7}{465} + 1 \right)} \quad (5.119)$$

Se comprueba cómo el incremento en altura del contorno de baja frecuencia ($>8\text{dB}$), debe ser aportado por una mayor ganancia del controlador. El incremento en ganancia del controlador G_2 o G_3 respecto a G_1 resulta, $15/4$ o 11dB . En la Figura 5-22(a) se demostraba cómo al disminuir la tolerancia de especificación el máximo incremento en altura del contorno no se producía en -180° sino precisamente en 0° . Por ello los 8dB esperados de incremento en -180° se traducen en 11dB en -45° .

Las ventajas derivadas del incremento de ganancia de los controladores G_2 o G_3 respecto a G_1 se demuestra en el comportamiento temporal del sistema nominal¹⁴ realimentado sobre la Figura 5-48. Ante una perturbación $d_2(t)$ de tipo escalón unitario en el instante $t=1$ seg., en la salida del sistema $y(t)$, $G_{2,3}$ consiguen una rápida atenuación hasta de un 94% del valor inicial en aproximadamente 0.3seg. Mientras tanto, G_1 sólo logra atenuar la perturbación en un 78% y en un tiempo de 0.65seg.

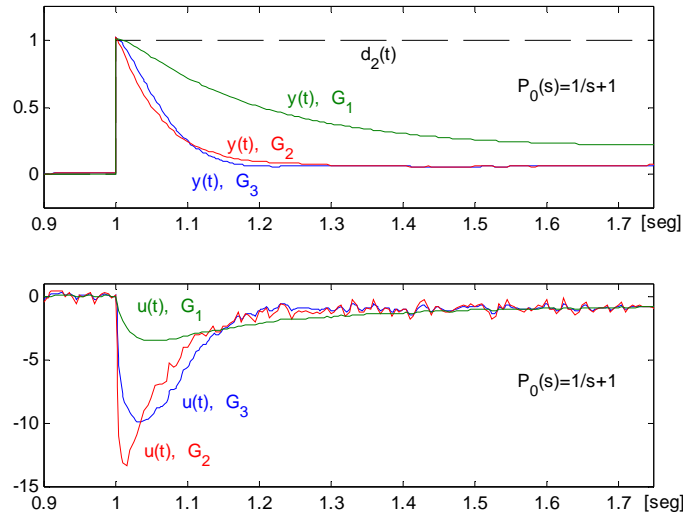


Figura 5-48: Comportamiento temporal realimentado con G_1, G_2 y G_3 .

Sin embargo, el mejor comportamiento dinámico y estático respecto a las perturbaciones se salda con una ganancia más alta de L_0 en alta frecuencia, con el efecto negativo que esto conlleva en la amplificación de ruidos. El diseño G_1 consigue $|L_{01}(\omega_{hf}=100)|=-33.6$ dB mientras que G_2 y G_3 necesitan $|L_{02}(\omega_{hf}=100)|=-17$ dB y $|L_{03}(\omega_{hf}=100)|=-22.3$ dB, ya que su asíntota de alta frecuencia se alcanza mucho más tarde. En el dominio temporal (véase Figura 5-48) puede observarse la mayor amplificación de ruidos introducidos por el sensor que provoca $G_{2,3}$ respecto G_1 , especialmente en la entrada de control $u(t)$. Dichos ruidos se han simulado con una fuente en la entrada $N(s)$ (Figura 2.1) que aproxima un ruido blanco¹⁵ de relativamente baja potencia.

¹⁴. Si los contornos se respetan la técnica QFT garantiza el cumplimiento de las especificaciones en todas las plantas no sólo en la nominal. Gráficamente sólo se ha representado el comportamiento temporal de esta última por resultar el caso más desfavorable.

¹⁵ Se ha utilizando el bloque Simulink 'ruido blanco de banda limitada'. Éste ha sido parametrizado con una altura de densidad espectral cruzada de $5e-6$ y un tiempo de correlación de $5e-3$. (Mathworks, Inc. 1990).

Si el nivel de ruido crece, pueden llegarse a obtener señales en $u(t)$ con grandes picos, muy lejanas al valor teórico medio esperado. Nótese que tal y como predice Horowitz y Sidi (1972) el efecto más peligroso en la amplificación de ruidos es en la entrada de control a los actuadores $u(t)$, más que en la salida del sistema $y(t)$.

El diseño G_3 respecto al G_2 reduce en mayor medida su ganancia de alta frecuencia a costa de una mayor complejidad. Principalmente, G_3 es algo más agresivo que G_2 al ajustar sus márgenes de ganancia y fase a los mínimos exigidos, evitando un sobrediseño. G_2 tiene un exceso de margen de fase de $\approx 23^\circ$ y de 17dB en margen de ganancia¹⁶.

El esfuerzo de control máximo solicitado a los actuadores en el instante en el que se produce la perturbación, $t=1\text{seg}$, también debe estar dentro de las tolerancias permitidas por los dispositivos físicos. Evidentemente, un comportamiento dinámico más agresivo, tal y como ofrece G_3 respecto a G_2 y este último frente a G_1 , conllevan una mayor inyección de tensión de control.

5.4.3 ESTABILIDAD

En las frecuencias moderadamente altas la limitación del pico de sensibilidad, siempre mayor que 1 en un sistema práctico, aconseja la utilización de $\delta_2 > 1$ y $\delta_3 > p$, con δ_2 y δ_3 tan pequeños como se pueda. Restricciones de éste último tipo, deben aparecer en todo sistema de control realimentado, incluso aunque no existan problemas de perturbaciones. Si no fuera así, y en el diseño de L se optara por una reducción demasiado rápida de $|L|$ con la frecuencia (evitar amplificación de ruidos), se producirían picos de S que desestabilizarían el sistema (limitación de la pendiente $|L|$). O por el contrario, si se optara por una reducción de $|L|$ demasiado lenta, el sistema, aunque muy estable, amplificaría enormemente los ruidos de alta frecuencia. Por ello, las tolerancias $\delta_2(\omega_i)$ y/o $\delta_3(\omega_i)$ deben ser modeladas convenientemente incluso en moderadamente altas frecuencias.

Cuando la tolerancia $\delta_2(\omega_i)$ trata de limitar el pico máximo en $|S|$, toma valores constantes δ_2 en todas las frecuencias:

$$\delta_2 = M_S = \max_{\omega} |S(j\omega)| \quad (5.119)$$

¹⁶ Aunque G_2 realmente presenta un margen de ganancia infinito se ha calculado su margen aproximado cuando la fase alcanza su asíntota de alta frecuencia en -180° .

También existe una estrecha relación entre M_S y los márgenes de estabilidad relativa, que por tanto, pueden calcularse como sigue (Skogestad y Postlethwaite, 1996):

$$MG \geq 20 \log \left(\frac{\delta_2}{\delta_2 - 1} \right) [dB] \quad (5.120)$$

$$MF \geq 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{2\delta_2} \right) \geq \frac{1}{\delta_2} [rad] \quad (5.121)$$

Condiciones de estabilidad relativa se conseguían también imponiendo una tolerancia máxima δ_l constante sobre la función de sensibilidad complementaria: $|T|=|T_l| \leq \delta_l$. Por tanto, tanto tolerancias δ_l sobre $|T|$ como tolerancias δ_2 sobre $|S|$ permiten considerar el coste de la realimentación pagado porque $|L|$ sea suficientemente grande en bajas y medias frecuencias. En la Sección 5.4.1 se repasó cómo la incertidumbre y la variación de δ_2 , (siendo ahora $\delta_2 > 1$) influían en la agresividad de los contornos. Un ejemplo de los compromisos de diseño de L_0 respecto a la estabilidad y la incertidumbre se presentaba en la Sección 4.5 para tolerancias $\delta_l > 1$ sobre $|T|$. Similares resultados se obtendrían para el problema de la limitación del pico de $|S|$ con δ_2 , siendo $\delta_2 > 1$.

5.5 ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 5-1: Contorno de tipología B sin la incertidumbre, $g_2 \angle \phi$, para $0 < \delta_2(\omega) < 1$	180
Figura 5-2: Contorno de tipología A sin la incertidumbre, $g_{12} \angle \phi$, para $\delta_2(\omega) > 1$	183
Figura 5-3: Influencia de la fase θ en contornos simples de (a) tipología B (b) tipología A	186
Figura 5-4: Contorno intersección tipo B ($\delta_2 < 1$) en plantillas con sólo incertidumbre en fase	187
Figura 5-5: Influencia del tamaño de incertidumbre en fase, $\Delta\theta$, en contornos B ($\delta_2 < 1$)	189
Figura 5-6: Influencia de la fase θ en la agresividad de los contornos B ($\delta_2 < 1$)	190
Figura 5-7: Contorno intersección tipo A ($\delta_2 > 1$) en plantillas con sólo incertidumbre en fase	191
Figura 5-8: Influencia del tamaño de incertidumbre en fase para contornos tipo A ($\delta_2 > 1$)	193
Figura 5-9: Influencia de las fases de incertidumbre, $\{\theta\}$, en contornos tipo A ($\delta_2 > 1$)	194
Figura 5-10: Influencia del módulo p en contornos simples de (a) tipología B, (b) tipología A.	195
Figura 5-11: Contorno intersección tipo B ($\delta_2 < 1$) para sólo incertidumbre en magnitud... ..	197
Figura 5-12: Influencia de la incertidumbre en magnitud, absoluta Δp y relativa $\{p\}$,	198
Figura 5-13: Contorno intersección tipo A ($\delta_2 > 1$) para sólo incertidumbre en magnitud... ..	199
Figura 5-14: Influencia del módulo y su incertidumbre ($\{p\}$ y Δp) en contornos tipo A ($\delta_2 > 1$)	202
Figura 5-15: (a) Plantilla genérica. Plantas significativas en (b) contornos A	204
Figura 5-16: Contorno intersección tipo B para plantilla genérica	206
Figura 5-17: Contorno intersección tipo B para plantilla genérica, cuando $\delta_2 > 1$ disminuye	209
Figura 5-18: Definición de variables sobre plantilla para contornos tipo A ($\delta_2 > 1$)	210
Figura 5-19: Contorno intersección tipo A ($\delta_2 > 1$) para plantilla genérica	211
Figura 5-20: Comparación de contornos para G y L_0 en tipologías B ($0 < \delta_2 < 1$)	216
Figura 5-21: Comparación de contornos para G y L_0 en tipologías A ($\delta_2 > 1$)	216
Figura 5-22: Influencia del valor de especificación δ_2 en contornos QFT	217
Figura 5-23: Influencia de $0 \leq \delta_2 \leq 1$ en contornos tipo B sin incertidumbre	220
Figura 5-24: Cambio de tipología de contornos: B para $\delta_2 \rightarrow I^-$ y A para $\delta_2 \rightarrow I^+$	221
Figura 5-25: Influencia de $\delta_2 > 1$ en contornos tipo D sin incertidumbre	224
Figura 5-26: Tipologías de contornos en especificaciones sobre la función de sensibilidad incluida la planta, $ T_3 = P/I + L \leq \delta_3$	228
Figura 5-27: Contorno de tipología B ($\delta_3/p < 1$) sin considerar la incertidumbre	230
Figura 5-28: Contorno de tipología A ($\delta_3/p > 1$) sin considerar la incertidumbre	232
Figura 5-29: Transición ($\delta_3/p = 1$) entre tipologías de contornos B y A sin considerar la incertidumbre	233
Figura 5-30: Tipologías de contornos según la variación de la magnitud de la planta p ...	235
Figura 5-31: Influencia de la magnitud p en contornos de tipología A ($p < \delta_3$)	236
Figura 5-32: Influencia de la magnitud p en contornos de tipología B ($p > \delta_3$)	238
Figura 5-33: Transición entre tipología A, $p \rightarrow \delta_3^-$, y tipología B, $p \rightarrow \delta_3^+$, de contornos	240
Figura 5-34: Influencia de $\{p\}$ en tipologías A y D simples	242
Figura 5-35: Plantilla genérica y perfil en $\omega_i = 2 \text{ rad/s}$ para $\{P(j\omega)\}$	245
Figura 5-36: Perfil de plantilla con tamaños de discretización apropiados en sus aristas..	246

Figura 5-37: Contorno intersección de tipologías A simples para plantilla genérica247

Figura 5-38: Perfil de plantilla con tamaños de discretización apropiados en sus aristas...248

Figura 5-39: Contorno intersección de tipologías B simples para plantilla genérica248

Figura 5-40: Perfil de plantilla con tamaños de discretización apropiados en sus aristas...249

Figura 5-41: Contorno intersección de con tipologías simples A y B para plantilla genérica250

Figura 5-42: Tipologías de contornos en función de la tolerancia de especificación, δ_3251

Figura 5-43: Influencia de la especificación δ_3 en contornos de tipología B ($\delta_3 < p$)251

Figura 5-44: Transición entre tipología B, $\delta_3 \rightarrow p^-$, y tipología A, $\delta_3 \rightarrow p^+$, de contornos en función de la especificación δ_3 253

Figura 5-45: Influencia de la especificación δ_3 en contornos de tipología A ($\delta_3 > p$)253

Figura 5-46: Plantilla de incertidumbre frecuencial en el ejemplo de diseño261

Figura 5-47: Compromisos de diseño al variar la especificación de rechazo de perturbaciones262

Figura 5-48: Comportamiento temporal realimentado con G_1 , G_2 y G_3263

CAPÍTULO 6

EL ESFUERZO DE CONTROL Y LOS SERVOSISTEMAS

Resumen

El esfuerzo de control solicitado a los actuadores no debe ser obviado en la consecución de los objetivos de la realimentación, si estos quieren ser alcanzados en la práctica. En el diseño de controladores habitualmente se vigilan los picos de control solicitados en el momento de producirse el evento a controlar: perturbación o cambio en la consigna. Sin embargo, la saturación de actuadores puede producirse en la práctica debido a un excesivo ancho de banda del nuevo sistema realimentado, que amplifica ruidos y perturbaciones que en el diseño teórico son despreciados. En este capítulo se estudiarán los contornos que representan las limitaciones del esfuerzo de control en sistemas con incertidumbre.

El seguimiento de señales de referencia se resuelve en QFT con el diseño de dos grados de libertad, controlador y prefiltro. Los objetivos del controlador se deben compatibilizar con el resto de especificaciones robustas, y persiguen reducir la incertidumbre en lazo cerrado respecto a la existente en lazo abierto. El estudio de los contornos para este problema es bastante complejo, siendo dichos contornos los más sensibles a un tamaño considerable de incertidumbre.

Contenidos

6 El Esfuerzo de Control y Los Servosistemas.....	269
6.1 El Esfuerzo de Control.....	271
6.1.1 Generalidades.....	271
6.1.2 Contornos Sin la Incertidumbre. Tipologías.....	272
6.1.2.1 Tipología y Formulación de Contornos para Especificaciones $p\delta_r < 1$	274
6.1.2.2 Tipología y Formulación de Contornos para Especificaciones $p\delta_r > 1$	276
6.1.2.3 Transición de Tipología de Contornos ($p\delta_r = 1$)	278
6.1.3 Influencia de la Incertidumbre del Modelo	279
6.1.3.1 La Incertidumbre en Ganancia, $\{p\}$	280
6.1.3.2 La Incertidumbre en Fase, $\{\theta\}$	288
6.1.3.3 Conclusiones sobre la Incertidumbre.....	289
6.1.4 Influencia de la Especificación, δ_r	295
6.1.5 Solución al Problema del Esfuerzo de Control.....	299
6.2 Los Servosistemas	305
6.2.1 Generalidades.....	305
6.2.2 Tipologías de Contornos. Incertidumbre Sólo en Magnitud.....	309
6.2.2.1 Tipologías A (A_1 y A_2).....	311
6.2.2.2 Tipología B_1	313
6.2.2.3 Tipología B_2	315
6.2.2.4 Conclusión sobre Tipologías de Contornos	318
6.2.3 Contribución de la Incertidumbre en Fase.....	323
6.2.3.1 Influencia del parámetro θ	323
6.2.3.2 Influencia de la incertidumbre $\{\theta\}$	325
6.2.3.3 Incertidumbre en fase y magnitud	329
6.2.4 Influencia de la Incertidumbre en Magnitud	332
6.2.5 Influencia de la Especificación, δ_s	335
6.2.6 Solución al Problema del Seguimiento de Señales.....	342
6.2.6.1 Algunas Conclusiones sobre los Contornos.....	342
6.2.6.2 Estrategias en el Diseño de Controladores.....	344
6.2.6.3 El Control Robusto-Adaptativo	348
Índice de figuras	355

6 EL ESFUERZO DE CONTROL Y LOS SERVOSISTEMAS

6.1 EL ESFUERZO DE CONTROL

6.1.1 GENERALIDADES

El problema del esfuerzo de control se define en QFT a través de la especificación robusta detallada en (3.9):

$$|T_4(j\omega)| = \left| \frac{U(j\omega)}{D_2(j\omega)} \right| = \left| \frac{U(j\omega)}{N(j\omega)} \right| = \left| \frac{U(j\omega)}{R(j\omega)F(j\omega)} \right| = \left| \frac{G(j\omega)}{1+P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_4(\omega), \quad \omega \in \Omega_4$$

La función de transferencia $|T_4|$ expresa el esfuerzo de control debido a: (i) la atenuación de perturbaciones en la salida, $|U/D_2|$; (ii) el rechazo de ruidos en el sensor, $|U/N|$; y/o (iii) el seguimiento de señales de referencia, $|U/RF|$. La señal de control requerida a los actuadores del sistema físico es el principal precio pagado en el control realimentado, fundamentalmente en términos de ancho de banda (‘coste de realimentación’; Bode, 1945; Horowitz, 1963).

Nótese que el problema $k=1$, tal y como se estudió en el Capítulo 4, al limitar la función de sensibilidad complementaria, $|T|=|T_1|=|L/(1+L)| < \delta_1$, también permite vigilar el esfuerzo de control debido a perturbaciones en la entrada, $|T|=|T_1|=|U/D_1| < \delta_1$.

Indirectamente la relajación en alta frecuencia de las tolerancias δ_1 o δ_2 (que buscaban los beneficios de la realimentación modelando la sensibilidad complementaria $|T|=|L/(1+L)|$ o la sensibilidad $|S|=|1/(1+L)|$) permite reducir tan rápido el ancho de banda del sistema como permitan las condiciones de estabilidad.

La especificación explícita por excelencia del ‘coste de la realimentación’ es el esfuerzo de control, expresado éste fundamentalmente a través de $|T_4|=|G/(1+PG)| \leq \delta_4$. Tolerancias explícitas del tipo δ_4 no fueron empleadas en los orígenes de QFT (Horowitz, 1963), aunque implícitamente constituían uno de los fundamentos del control realimentado. En palabras del propio I. Horowitz el objetivo en QFT es: “considerar los beneficios deseados de la realimentación (L -contornos) como inviolables y tratar de satisfacerlos con una $L(j\omega)$ cuya magnitud en función de la frecuencia decrezca tan rápido como sea posible” (Horowitz, 1973).

El no considerarse explícitamente las especificaciones δ_i permite garantizar, si la incertidumbre no es muy grande, la intersección no nula de contornos. Esto permitió desarrollar toda una teoría sobre la existencia de solución al problema de control planteado con QFT. Condiciones necesarias y suficientes fueron enunciadas para demostrar que siempre existía una L_0 que se ajustaba tanto como se quisiera a sus contornos. Sin embargo, cuando se consideran explícitamente tolerancias δ_i o $\delta_i < 1$, la existencia de solución L_0 no está garantizada, desde el momento en que puede ni siquiera existir solución en la intersección de los contornos (estos expresan todas las especificaciones considerando la incertidumbre). Esto no significa una carencia formal de QFT, sino que se basa en el propio fundamento del control realimentado. Junto a las especificaciones que exigen una ganancia mínima para un comportamiento dinámico adecuado, aparecerán otras especificaciones contrapuestas que limitan esta ganancia, agravándose el problema cuando existe incertidumbre. Afortunadamente, a priori se puede llegar a un compromiso entre unas y otras, ya que ambos conjuntos de especificaciones son compatibles en función del rango de frecuencias. No obstante, estas soluciones de compromiso no son siempre posibles, sobre todo en sistemas con incertidumbre elevada o cuando los beneficios pretendidos con la realimentación son muy ambiciosos.

6.1.2 CONTORNOS SIN LA INCERTIDUMBRE. TIPOLOGÍAS.

Se trata de definir las tipologías de los contornos sin incertidumbre $g_1 \angle \phi$ y/o $g_2 \angle \phi$ que el controlador $G(j\omega_i) = g \angle \phi$ ha de cumplir de manera que se satisfaga la desigualdad de especificación $|T_4| \leq \delta_4$ en (3.9). Para ello, se aplicarán los Pasos 8 y 9 del Algoritmo 3.1.

El Paso 8 resolvía una inecuación cuadrática que se particulariza en este caso como:

$$I_{\omega_i}^{k=4}(p, \theta, \delta_4, \phi) = p^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{p^2 \delta_4^2} \right) g^2 + 2 \cdot p \cdot \cos(\phi + \theta) \cdot g + 1 \geq 0 \quad (6.1)$$

donde, $p \angle \theta$ es una planta cualquiera de la plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$, $\delta_4 = \delta_4(\omega_i)$ es el valor de especificación constante a la frecuencia ω_i y $g \angle \phi$ la expresión polar del controlador en ω_i .

Resolviendo en g la ecuación cuadrática $I_{\omega_i}^{k=4} = 0$ asociada a (6.1), se obtienen dos soluciones: g_1 (valor negativo de la raíz cuadrada) en (6.2a) y g_2 (valor positivo de la raíz cuadrada) en (6.2b):

$$g_{1,2} = \frac{1}{p \cdot \left(1 - \frac{1}{p^2 \delta_4^2}\right)} \left(-\cos(\phi + \theta) \mp \sqrt{\cos^2(\phi + \theta) - \left(1 - \frac{1}{p^2 \delta_4^2}\right)} \right) \quad (6.2 a,b)$$

Ahora la inecuación (6.1) puede escribirse de nuevo como:

$$I_{\omega_i}^4(p, \theta, \delta_4, \phi) = p^2 \left(1 - \frac{1}{p^2 \delta_4^2}\right) \cdot (g - g_1) \cdot (g - g_2) \geq 0 \quad (6.3)$$

Por tanto, el parámetro genérico a de la inecuación (3.26), de cuyo signo dependía el intervalo de valores solución (véase la Figura 3.5), se particulariza en (6.3) como:

$$a = p^2 \left(1 - \frac{1}{p^2 \delta_4^2}\right) \quad (6.4)$$

Para simplificar la notación en las ecuaciones, se definen c y α como:

$$c = \cos(\phi + \theta) \quad (6.5)$$

$$\alpha = \left(1 - \frac{1}{p^2 \delta_4^2}\right) \quad (6.6)$$

Y expresando la ecuación (6.2) en los nuevos términos, se tiene:

$$g_{12} = \frac{1}{p} \left(\underbrace{\frac{-c}{\alpha}}_{t_1} \mp \underbrace{\frac{\sqrt{c^2 - \alpha}}{\alpha}}_{t_2} \right) \quad (6.7a,b)$$

Comparando (6.7) en el problema que nos ocupa, $|T_4|=|G/1+L|\leq\delta_i$, con (4.7) en el problema $|T_1|=|L/1+L|\leq\delta_i$, ambas ecuaciones presentan el mismo formato. Aún es más, tan sólo difieren en la definición de sus parámetros α , véase $\alpha_{k=4}$ en (6.6) y $\alpha_{k=1}=(1-1/\delta_1^2)$ en (6.5). De acuerdo a estos valores, paralelamente al caso $0<\delta_i<1$ y al caso $\delta_i>1$, estudiados para el problema de control $k=1$, ahora se plantearán el supuesto $0<p\delta_4<1$ y el supuesto $p\delta_4>1$. Según esto, el estudio de la tipología y formulación de los contornos para ambos supuestos en $k=4$, así como la influencia de los parámetros p , θ y δ_i , son similares a los desarrollados en el Capítulo 4. Sólomente, en lo que se refiere a la influencia del modulo de la planta p el problema $k=4$ adquiere entidad propia. Por ello, en las sucesivas secciones se enunciarán directamente las conclusiones y afirmaciones fundamentales, aconsejándose consultar el Capítulo 4 para $k=1$, si se quiere realizar un estudio del problema $k=4$ más riguroso formalmente.

A continuación, se demostrará que cuando $p\delta_4 < 1$ se tiene una tipología D de contornos, cuando $p\delta_4 > 1$ una tipología A, y cuando $p\delta_4 = 1$, existe una transición de tipología D a A, tal y como muestra la Figura 6-1.

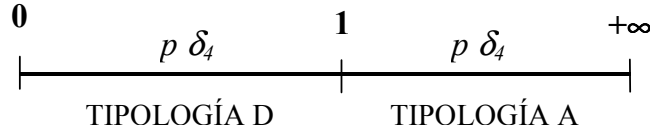


Figura 6-1: Resumen de tipologías de contornos

6.1.2.1 Tipología y Formulación de Contornos para Especificaciones $p\delta_4 < 1$

Este supuesto es paralelo al desarrollado para $|T_1| = |L/1+L| \leq \delta_l$ con $\delta_l < 1$. Por ello, se incluye directamente la formulación apropiada y las conclusiones, recomendándose consultar el Capítulo 4, Sección 4.2.1 para una información más exhaustiva. Según la Figura 6-1 se demostrará formalmente que para $0 < p\delta_4 < 1$ se presenta una tipología D de contornos.

Si $0 < p\delta_4 < 1$, se cumplen:

$$\alpha = \left(1 - \frac{1}{p^2 \delta_4^2} \right) < 0 \tag{6.8}$$

$$c^2 - \alpha > 0 \tag{6.9}$$

$$\sigma = \sqrt{c^2 - \alpha} \equiv \text{valor_real} \tag{6.10}$$

$$|\sqrt{c^2 - \alpha}| > |c| \tag{6.11}$$

Por tanto, t_1 y t_2 en (6.7) satisfacen:

- (i) t_2 será siempre real de acuerdo a (6.9) y (6.10), y negativo si $\alpha < 0$ de acuerdo a (6.8).
- (ii) $|t_2| > |t_1|$, según (6.11).
- (iii) t_1 es real y negativo cuando $c < 0$, es decir, en $\phi \in \Phi_1 = [-270^\circ - \theta, -90^\circ - \theta]$.
- (iv) t_1 es real y positivo cuando $c > 0$, ya que $\alpha < 0$ según (6.8). Y c en (6.5) cumple $c > 0$ en $\phi \in \bar{\Phi}_1 = \{[-360^\circ, -270^\circ] - \theta \cup [-90^\circ, 0^\circ] - \theta\}$.
- (v) En la solución g_1 en (6.7a) se restan $t_1 - t_2$. Al cumplirse (i) $t_2 < 0$, se tiene $g_1 \triangleq t_1 + |t_2|$. Y al satisfacerse (ii) $|t_2| > |t_1|$, independientemente del signo de t_1 (ver iii y iv), la magnitud g_1 resulta siempre positiva para todo $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$.

- (vi) En la solución g_2 en (6.7b) se suman t_1+t_2 . Al cumplirse (i) $t_2 < 0$, se tiene $g_2 \triangleq t_1 - |t_2|$. Y al satisfacerse (ii) $|t_2| > |t_1|$, independientemente del signo de t_1 , la magnitud g_2 resulta siempre negativa para todo $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$.
- (vii) Puesto que a en (6.4) cumple que $a < 0$, para satisfacer (6.3) se debe cumplir: $g \leq g_1, \forall \phi$, véase Figura 3.5 y Figura 3.6(d).

Conclusión sobre los contornos simples para limitar el esfuerzo de control $|T_4| = |G/1+L| \leq \delta_4$ cuando $0 < p\delta_4 < 1$

De entre las J plantas $p\angle\theta$ de la plantilla ω , para aquellas donde se cumpla $0 < p(\omega)\delta_4(\omega) < 1$, siempre existe un g_1 real y positivo para todo $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, lo que da lugar a un contorno simple mono-valuado inferior $g_1 \angle \phi$ (tipología D, Figura 3.6(d)) definido en (6.2a), que debe ser satisfecho por $G(j\omega)$ de modo que $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$ con el fin cumplir la especificación robusta $|T_4(j\omega)| \leq \delta_4(\omega)$. Para $p\angle\theta$ y δ_4 dados, la magnitud del contorno g_1 en (6.2a) es: (a) mínima en $\phi = -180^\circ - \theta$; (b) estrictamente creciente hacia el extremo, $\phi = 0^\circ - \theta$, y simétricamente creciente hacia $\phi = -360^\circ - \theta$; (c) de sensibilidad máxima a variaciones de ϕ en $-90^\circ - \theta$ y $-270^\circ - \theta$, y nula en $-360^\circ - \theta, -180^\circ - \theta, 0^\circ - \theta$. (Ver Figura 6-2)

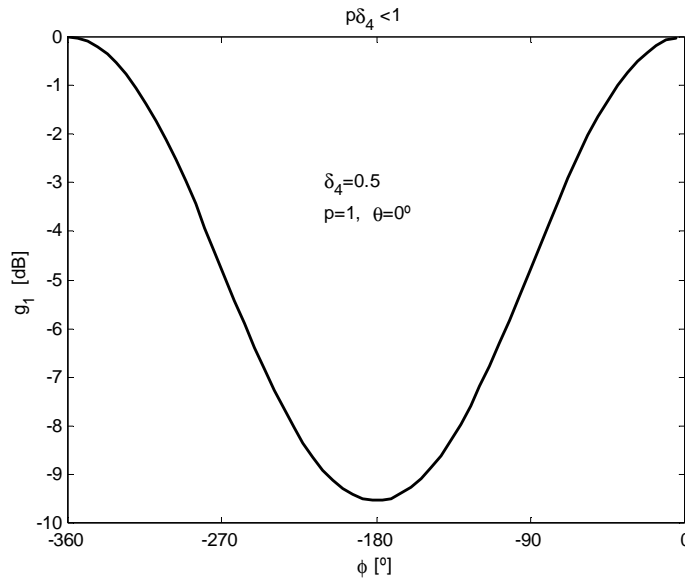


Figura 6-2: Contorno de tipología D ($p\delta_4 < 1$) sin considerar la incertidumbre

6.1.2.2 Tipología y Formulación de Contornos para Especificaciones $p\delta_i > 1$

Este supuesto es paralelo al desarrollado para $|T_1|=|L/1+L|\leq\delta_i$ con $\delta_i > 1$. Por ello, se incluye directamente la formulación apropiada y las conclusiones, recomendándose consultar el Capítulo 4, Sección 4.2.2 para una información más exhaustiva. Se demostrará que para el supuesto $p\delta_i > 1$ se tendrá una tipología A de contornos tal y como recogía la Figura 6-1.

Sobre la ecuación (6.7), ahora para $p\delta_i > 1$ se cumple:

$$0 < \alpha = \left(1 - \frac{1}{p^2\delta_4^2}\right) < 1 \tag{6.12}$$

$$\sigma = \sqrt{c^2 - \alpha} \tag{6.13}$$

y σ toma valores reales en las fases donde:

$$\alpha < c^2 < 1 \tag{6.14}$$

Además, $|c| > \sqrt{c^2 - \alpha}$ (6.15)

Por tanto, t_1 y t_2 en (6.7) cumplen:

(i) g_{12} son reales y positivas en $\phi \in \Phi_{12}$, $\Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$. En $\phi \in \bar{\Phi}_{12}$, g_{12} son ambas complejas si no se satisface (6.14), o negativas si cumpliéndose (6.14) resulta $c > 0$ (ó $t_i < 0$). El intervalo de soluciones reales positivas, $\mp \varepsilon$, se define resolviendo la igualdad $c^2 = \alpha$, siendo ε el primer valor positivo $\phi + \theta$ que satisface la igualdad.

$$\varepsilon = \frac{180^\circ}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{p^2\delta_4^2 - 1}}{p\delta_4} [^\circ], \quad 0 \leq \varepsilon \leq 90^\circ \tag{6.16}$$

Entonces, el intervalo angular de existencia de soluciones reales y positivas, es decir, donde existen limitaciones o contornos para el controlador, tiene una amplitud 2ε , con ε en (6.16) y se define:

$$\Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon] \tag{6.17}$$

Nótese según (6.16) que la amplitud del intervalo angular Φ_{12} donde existen contornos $g_{12} < \phi$, es decir 2ε , depende tanto del valor de especificación δ_i , siendo $\delta_i > 1$, como del módulo¹, p , y por tanto de la incertidumbre en magnitud, $\{p\}$.

¹ En esto el problema $k=4$ difiere del $k=1$ en el Capítulo 4, donde ε dependía solo de δ_i . Ahora, ε depende tanto de δ_i como de p .

- (ii) En $\phi \in \Phi_{12}$, t_1 es real y positivo.
- (iii) En $\phi \in \Phi_{12}$, t_2 es real y positivo
- (iv) En $\phi \in \Phi_{12}$, $|t_1| > |t_2|$, o simplemente $t_1 > t_2$, según (ii) y (iii).
- (v) En $\phi \in \Phi_{12}$, $g_1 \triangleq |t_1| - |t_2|$, o simplemente $g_1 \triangleq t_1 - t_2$
- (vi) En $\phi \in \Phi_{12}$, $g_2 \triangleq |t_1| + |t_2|$, o simplemente $g_2 \triangleq t_1 + t_2$
- (vii) En $\phi \in \Phi_{12}$, $g_2 > g_1$, según (v) y (vi).

Conclusión sobre los contornos simples para limitar el esfuerzo de control $|T_4| = |G/1+PG| \leq \delta_4$ cuando $p\delta_4 > 1$

De entre las J plantas $p \angle \theta$ de la plantilla ω , para aquellas que satisfagan $p(\omega)\delta_4(\omega) > 1$, siempre existe un g_1 y un g_2 (definidos en 6.2) reales, positivos, y $g_2 > g_1$, en todo $\phi \in \Phi_{12}$, $\Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, ε en (6.16). Esto da lugar a un contorno simple (sin la incertidumbre) doble-valuado $g_{12} \angle \phi$ de tipología A (véase Figura 3-6a) que debe ser satisfecho por $G(j\omega) = g \angle \phi$ tal que $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$ y $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$ con el fin de cumplir la especificación robusta $|T_4(j\omega)| \leq \delta_4(\omega)$. Además, dicho contorno presenta mínima g_1 y máxima g_2 , en $\phi = -180^\circ + \theta$, y es estrictamente creciente g_1 y estrictamente decreciente g_2 hacia ambos extremos del intervalo Φ_{12} . Ver Figura 6-3.

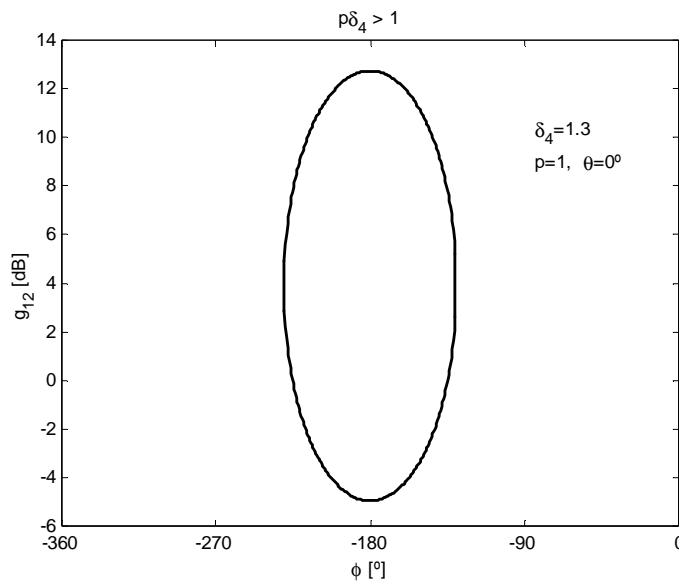


Figura 6-3: Contorno de tipología A ($p\delta_4 > 1$) sin considerar la incertidumbre

6.1.2.3 Transición de Tipología de Contornos ($p\delta_i=1$)

En $p\delta_i=1$ las soluciones g_{12} no toman valores finitos (esto mismo o la desaparición de los contornos, ocurre en $p\delta_i=0$ y $p\delta_i=+\infty$). Por ello, en los extremos de los intervalos en la Figura 6-1 el comportamiento de la especificación robusta se estudia a través de funciones límite para g_{12} . En particular para $p\delta_i=1$ tiene lugar una transición de tipología D a tipología A de contornos. La tipología D se analizará cuando $p\delta_i \rightarrow 1^-$ y la tipología A cuando $p\delta_i \rightarrow 1^+$. Reorganizando (6.2) o (6.7) se define:

$$g_{12} = \underbrace{\frac{-c p \delta_4^2}{p^2 \delta_4^2 - 1}}_{t'_1} \mp \underbrace{\frac{\delta_4 \sqrt{(c^2 - 1)p^2 \delta_4^2 + 1}}{p^2 \delta_4^2 - 1}}_{t'_2} \quad (6.18)$$

donde c representa según (6.5) la función $\cos(\phi + \theta)$, y los términos t'_1 y t'_2 , cumplen las mismas propiedades que los términos t_1 y t_2 , de las Secciones 6.1.2.1 para tipologías D y 6.1.2.2 para tipologías A.

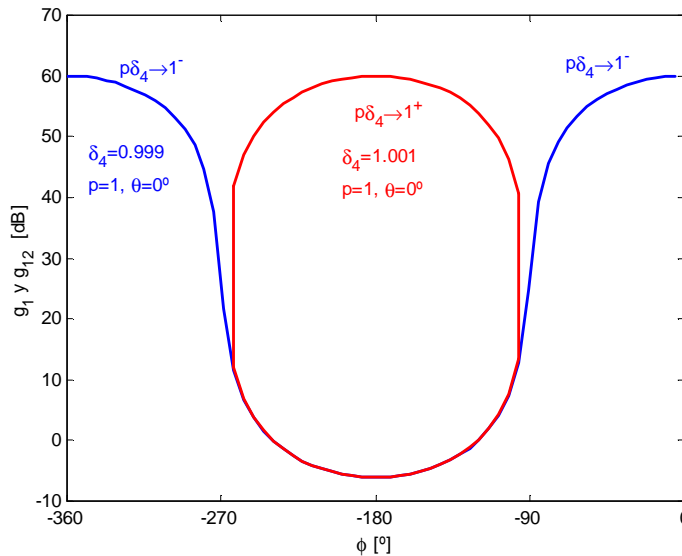


Figura 6-4: Transición ($p\delta_i=1$) entre tipologías D y A de contornos sin la incertidumbre

Analizando (6.18) el término $p\delta_i$, que marca la transición entre tipologías D y A, no siempre aparece como tal (solo en los factores $p^2 \delta_i^2$), sino que también se leen $p\delta_i$, o solamente δ_i . Por ello, la transición de tipología se estudiará por separado cuando varía el módulo, p , y cuando varía el valor de especificación, δ_i . El primer estudio, radica en la transición de tipología

debida a la incertidumbre del modelo (en concreto a la incertidumbre en magnitud), por lo que se estudiará en la Sección 6.1.3.1. La transición de tipología debida a la especificación se estudiará en la Sección 6.1.4. La Figura 6-4 muestra un ejemplo ilustrativo de transición de una tipología D de contornos a A sin entrar en detalles.

6.1.3 INFLUENCIA DE LA INCERTIDUMBRE DEL MODELO

Según se estudiaba en la sección anterior, los Pasos 8 y 9 del Algoritmo 3.1 resuelven la inecuación en (6.1):

$$I_{\omega_i}^{k=4}(p, \theta, \delta_4, \phi) = p^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{p^2 \delta_4^2}\right) g^2 + 2 \cdot p \cdot \cos(\phi + \theta) \cdot g + 1 \geq 0,$$

para un valor de especificación δ_4 y una única planta $p \angle \theta$, por tanto, para el sistema sin incertidumbre. De ella resultaron contornos para el controlador $G = g \angle \phi$: (i) monovaluados inferiores (tipología D), $g_1 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, cuando $p(\omega_i) \delta_4(\omega_i) < 1$; y (ii) contornos doblevaluados (tipología A), $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, para $p(\omega_i) \delta_4(\omega_i) > 1$; (véase Sección 6.1.2).

Considerando ahora la incertidumbre, es decir el conjunto de plantas $\{p \angle \theta\}$ en la plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$, el Paso 10 resuelve (6.1) para cada una de ellas. La tolerancia de especificación, $\delta_4(\omega_i)$, es la misma para toda la plantilla pues se trata de la misma frecuencia, luego $\delta_4(\omega_i) = \delta_4$. El resultado final puede clasificarse como:

- (i) Un conjunto de contornos simples de tipologías D, $\{g_1 \angle \phi\}$, si para toda $p \angle \theta \in \mathfrak{S}P = \{p \angle \theta\}_{r=1, \dots, J}$ se cumple $p \delta_4 < 1$. La intersección de estos contornos simples, dará también una tipología D, $g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. En la Sección 6.1.3.1 se incluyen las pautas para su cálculo.
- (ii) Un conjunto de contornos simples de tipología A, $\{g_{12} \angle \phi\}$, si para toda $p \angle \theta \in \mathfrak{S}P = \{p \angle \theta\}_{r=1, \dots, J}$ se cumple $p \delta_4 > 1$. La intersección de éstos contornos simples, dará también una tipología A, $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon_T]$. En la Sección 6.1.3.1 se incluyen las pautas para su cálculo.
- (iii) Si para ciertas plantas $p \angle \theta \in \mathfrak{S}P$ se cumple $p \delta_4 < 1$ y para otras $p \delta_4 > 1$, se tendrán soluciones simples de ambas tipologías, $\{g_1 \angle \phi\}_D$ y $\{g_{12} \angle \phi\}_A$. Como la tipología D es más restrictiva angularmente que la tipología A, el cumplimiento simultáneo de ambas tipologías simples se traduce finalmente en un contorno intersección de tipología D. Por tanto, se seleccionarán $\{g_1 \angle \phi\}_D$ y $\{g_1 \angle \phi\}_A$ y se calculará el contorno intersección de tipología D, $g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, según indica la Sección 6.1.3.1.

Para poder seleccionar en cada ϕ las magnitudes g_1 y/o g_2 más desfavorables en la determinación de g_{INF} y/o g_{SUP} según las pautas indicadas, es necesario analizar la influencia de los parámetros p y θ en dichas magnitudes. A continuación se resumen éstas.

6.1.3.1 La Incertidumbre en Ganancia, $\{p\}$

Dada una frecuencia ω_i , se tiene un único valor de especificación, $\delta_i(\omega_i)=\delta_i$, y una plantilla genérica de J plantas, $\mathfrak{P}(j\omega_i)=\{p\angle\theta\}$, que definen una incertidumbre en fase y ganancia. Ahora, para una fase constante θ , se pretende analizar cómo la incertidumbre en ganancia $\{p\}$ contribuye en los contornos resultantes. Por tanto, la plantilla genérica se reduce a una que tiene tan sólo incertidumbre en ganancia, $\mathfrak{P}(j\omega_i)=\{p\}\angle\theta$. Primeramente, se analizará la influencia de la variación del parámetro discreto p en las magnitudes g_1 y/o g_2 de (6.2), considerando δ_i y θ ambos constantes. Posteriormente, se concluirá cómo la incertidumbre en ganancia $\{p\}$ afecta a los contornos.

(i) Influencia del módulo p , con fase θ y especificación δ_i ambas constantes

De acuerdo al estudio de los contornos en la Sección 6.1.2, el módulo p junto con δ_i determinan la tipología de éstos según indica la Figura 6-1. Si ahora se considera δ_i constante, las tipologías de los contornos para las plantas de la plantilla $\mathfrak{P}(j\omega_i)=\{p\angle\theta\}$ se pueden resumir como ilustra la Figura 6-5.

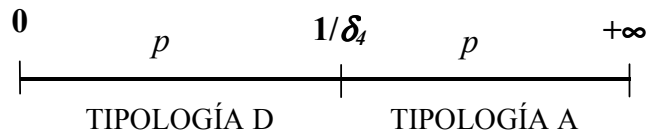


Figura 6-5: Tipologías de contornos según la variación de la magnitud p de la planta

Para analizar la influencia de p , se estudiarán g_1 y/o g_2 en (6.18):

$$g_{12} = \frac{-c p \delta_4^2}{\underbrace{p^2 \delta_4^2 - 1}_{t_1}} \mp \frac{\delta_4 \sqrt{(c^2 - 1)p^2 \delta_4^2 + 1}}{\underbrace{p^2 \delta_4^2 - 1}_{t_2}}$$

donde c representa según (6.5) a la función $\cos(\phi + \theta)$, y los términos t_1 y t_2 , cumplen las mismas propiedades que los términos t_1 y t_2 de las Secciones 6.1.2.1 para tipologías D y 6.1.2.2 para tipologías A de contornos. De acuerdo con las citadas secciones y según resume la Figura 6-5: (a) para aquellos módulos p tal que $0 < p < 1/\delta_i$, sólo existe el contorno inferior $g_1 \angle \phi$,

$\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ (en Φ , la magnitud g_1 toma valores reales, positivos y mayores que cero); (b) para aquellos módulos p tal que $1/\delta_4 < p < +\infty$, existe un contorno doblevaluado $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, ε en (6.16) (en Φ_{12} , las magnitudes g_1 y g_2 toman valores reales, positivos y mayores que cero).

Para una **tipología D** de contornos, $0 < p < 1/\delta_4$, la evolución de $g_1 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ al variar p se muestra en la Figura 6-6.

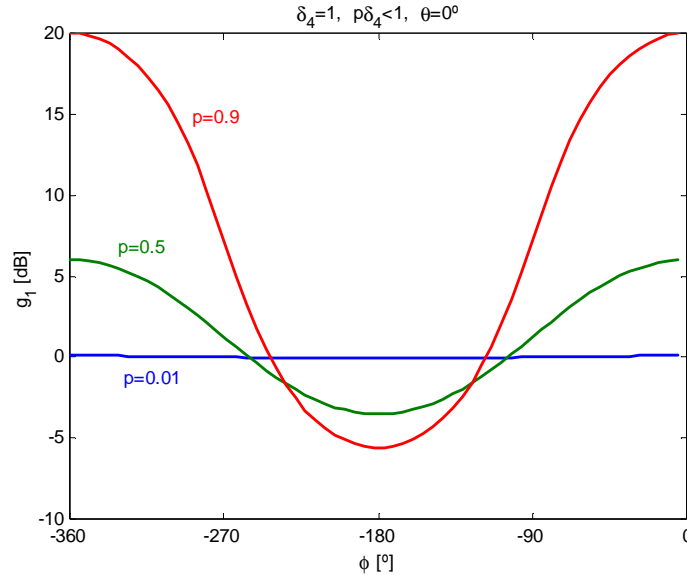


Figura 6-6: Influencia de la magnitud p de la planta en contornos de tipología D ($p < 1/\delta_4$)

Es decir, cuando p aumenta: (a) $g_1 \angle \phi$ descende (más agresivo²) en ciertas fases, $\phi \in \Phi_1$; y (b) $g_1 \angle \phi$ se eleva (menos agresivo) en las fases restantes, $\phi \in \bar{\Phi}_1$. Esto se resume en la siguiente ecuación:

$$p \uparrow \Rightarrow \begin{cases} g_1 \angle \phi \downarrow, & \phi \in \Phi_1 = [-180^\circ - \theta \mp \gamma] \\ g_1 \angle \phi \uparrow, & \phi \in \bar{\Phi}_1 \end{cases} \quad (6.19)$$

Para una **tipología A** de contornos, $1/\delta_4 < p < +\infty$, la evolución de $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, ε en (6.16), al variar p se muestra en la Figura 6-7.

Es decir, cuando p aumenta en $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$: (a) $g_1 \angle \phi$ descende (más agresivo), (b) $g_2 \angle \phi$ descende (menos agresivo) y (c) ε en (6.16)

² El contorno de tipo D ha de satisfacerse tal que: $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$, luego una disminución de altura de g_1 en ciertas fases ϕ implica que el controlador a diseñar ha de reducir más su ganancia g para que $l=gp$ cumpla la especificación.

disminuye (el intervalo Φ_{12} se estrecha, luego significa contornos menos agresivos). Esto se resume en la siguiente ecuación:

$$p \uparrow \Rightarrow \begin{cases} g_1 \angle \phi \downarrow \\ g_2 \angle \phi \downarrow \\ \varepsilon \downarrow \end{cases}, \phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon], 0 < \varepsilon < 90^\circ \quad (6.20)$$

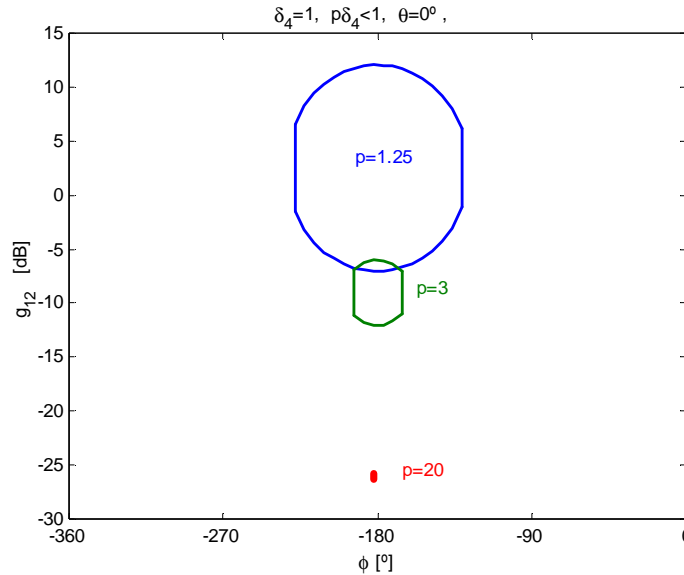


Figura 6-7: Influencia de la magnitud p de la planta en contornos de tipología A ($p > 1/\delta_4$)

En los **valores límite**, $p=0$ (módulos de la planta muy pequeños), $p=1/\delta_4$ (módulos de transición de tipología) y $p=+\infty$ (módulos muy grandes), las magnitudes g_{12} toman valores infinitos, negativos o cero. Esto marca, la desaparición del contorno o una transición entre tipologías. El comportamiento del sistema en dichos puntos se estudiará a partir de las funciones límite de g_{12} en (6.18) cuando p tiende a dichos valores: $p \rightarrow 0^+$, $p \rightarrow (1/\delta_4)^-$, $p \rightarrow (1/\delta_4)^+$, $p \rightarrow +\infty$.

Para $p \rightarrow 0^+$, se tiene una tipología D de contornos, y por tanto para g_1 en (6.18) se calcula:

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} g_1 = \delta_4, \forall \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ] \quad (6.21)$$

El resultado en (6.21) puede comprobarse en la Figura 6-6, donde para $\delta_4=1$, cuando $p \rightarrow 0^+$ se tiene $g_1 \rightarrow 1(0\text{dB})$. Parece lógico pensar que cuando el módulo de la planta disminuye mucho no hay riesgo de sobrepasar el esfuerzo de control debido a una excesiva ganancia de la planta. Por ello, los

contornos se reducen a un valor constante en todas las fases determinado exclusivamente por el valor de tolerancia, δ_i .

Para $p \rightarrow (1/\delta_i)^-$, se sigue teniendo una tipología D de contornos, por lo que para g_l en (6.18) con $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ se calcula:

$$\lim_{p \rightarrow 1/\delta_4^-} g_1 = \begin{cases} \frac{\delta_4}{2|\cos(\phi + \theta)|}, & \phi \in \Phi_1 = [-270^\circ - \theta, -90^\circ - \theta] \\ +\infty, & \phi \in \bar{\Phi}_1 \end{cases} \quad (6.22)$$

En $p \rightarrow (1/\delta_i)^+$, se ha producido ya la transición a una tipología A de contornos, por lo que para g_{l2} en (6.18) con $\phi \in \Phi_{l2} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$ y ε en (6.16) se calcula:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{p \rightarrow 1/\delta_4^+} g_1 = \frac{\delta_4}{2|\cos(\phi + \theta)|} \\ \lim_{p \rightarrow 1/\delta_4^+} g_2 = +\infty \\ \lim_{p \rightarrow 1/\delta_4^+} \varepsilon = 90^\circ \end{array} \right., \quad \phi \in [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon] \quad (6.23)$$

La Figura 6-8 ilustra la transición entre las tipologías D y A, comprobándose las ecuaciones (6.22) y (6.23). Por ejemplo, para $\phi + \theta = 180^\circ$, la magnitud g_l se acerca a $\delta_i/2 = 0.5$ (-6dB) cuando $p \rightarrow (1/\delta_i)$.

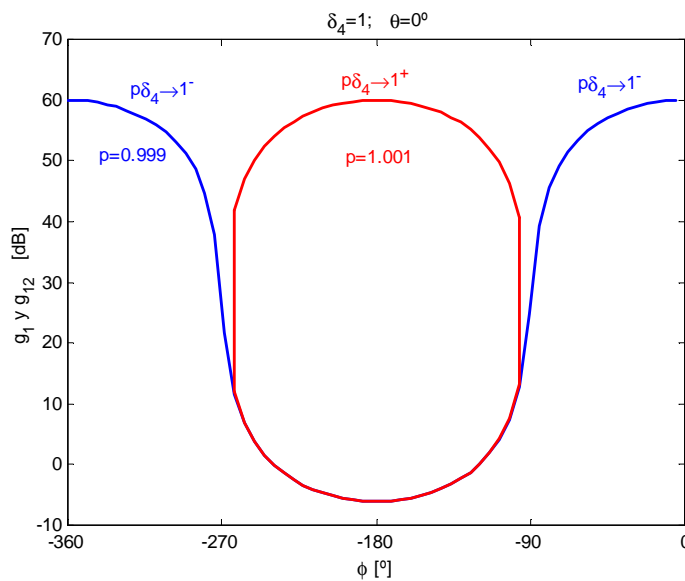


Figura 6-8: Transición entre tipologías D y A de contornos

En $p \rightarrow +\infty$, se tiene una tipología A de contornos, por lo que para g_{12} en (6.18) con $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$ y ε en (6.16), se calcula:

$$\begin{cases} \lim_{p \rightarrow +\infty} g_{12} = 0 \\ \lim_{p \rightarrow +\infty} \varepsilon = 0^\circ \end{cases}, \quad \phi \in [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon] \quad (6.24)$$

Según el resultado en (6.24) cuando el módulo p es muy grande el contorno se reduce a un punto hacia $-\infty$ dB, como muestra la Figura 6-7. Evidentemente, si el módulo de la planta es muy elevado, para no violar el esfuerzo de control, la ganancia $l=gp$ debe ser reducida infinitamente por el controlador g .

* * *

En resumen, las conclusiones sobre la influencia de p en los contornos de tipología D que originan (si $0 < p < 1/\delta_i$) se ilustran en la Figura 6-6, comprobándose los resultados en (6.19), (6.21) y (6.22). Y para una tipología A ($1/\delta_i < p < +\infty$) se muestran en la Figura 6-7 comprobándose los resultados en (6.20), (6.23) y (6.24). La Figura 6-8 representa la transición entre contornos D y A para $p=1/\delta_i$. De acuerdo con este estudio a continuación se puede inferir la influencia de la incertidumbre en magnitud $\{p(\omega_i)\}$ (considerando la fase $\theta(\omega_i)=\theta$ constante) de una plantilla ω_i con sólo incertidumbre en ganancia, $\Im P(\omega_i)=\{p\} \angle \theta$. Dado que ω_i es fija, la tolerancia $\delta_i(\omega_i)=\delta_i$ es constante. Los resultados se resumen en tres casos:

- El conjunto $\{p(\omega_i)\}$ origina exclusivamente contornos de tipologías simples D.
- La incertidumbre $\{p(\omega_i)\}$ origina exclusivamente tipologías simples A.
- El conjunto $\{p(\omega_i)\}$ origina contornos simples A y D.

(ii) Incertidumbre en magnitud, $\{p(\omega_i)\}$, que origina contornos exclusivamente de tipologías D simples

Este supuesto se presenta cuando todos los módulos de las plantas $p(\omega_i)$ en la plantilla $\Im P(\omega_i)$ cumplen que $p(\omega_i)\delta_i(\omega_i) < 1$, y por tanto, se dan exclusivamente tipologías D simples de contornos: $\{g_1 \angle \phi\}_D$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. El resultado final considerando la incertidumbre $\{p\}$ será también un contorno intersección de tipología D: $g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$.

De acuerdo con la Figura 6-9 todos los contornos $\{g_1 \angle \phi\}_D$, intervienen en la determinación del contorno intersección $g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, lo que se resume como:

$$g_{INF} \angle \phi, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]: \min_{\phi \in \Phi} \{g_1 \angle \phi\}_D, \{p\} \angle \theta \quad (6.25)$$

Es decir, **las plantas significativas en el cálculo del contorno intersección son, a fase θ constante, todas sin excepción, $\{p\}$** . La precisión en el trazado del contorno depende únicamente del tamaño de discretización del intervalo de incertidumbre que aporta la incertidumbre en ganancia.

Una aproximación sería considerar tan sólo las soluciones $\{g_1 \angle \phi\}_D$ de las plantas de máximo y mínimo módulo, $p_{max} \angle \theta$ y $p_{min} \angle \theta$. Aunque esto supondría un cierto error en los alrededores de las fases -270° y -90° .

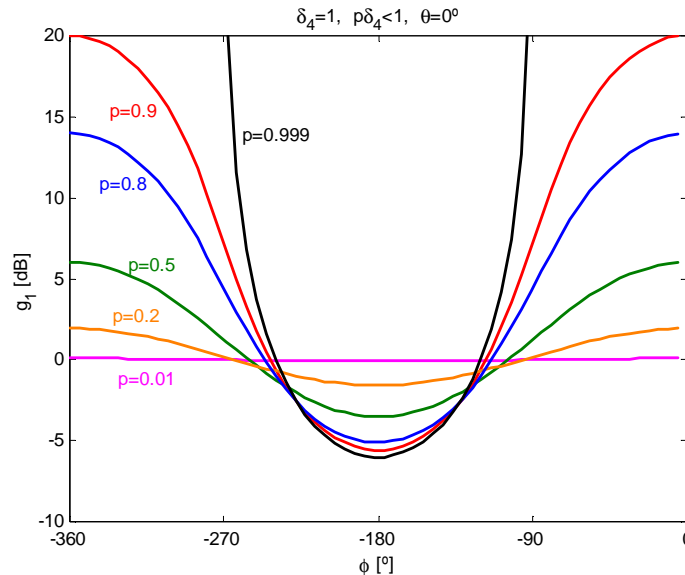


Figura 6-9: Influencia de la incertidumbre en magnitud $\{p\}$ en tipologías D simples

(iii) Incertidumbre en magnitud, $\{p(\omega_i)\}$, que origina contornos exclusivamente de tipologías A simples

Este caso se presenta cuando todos los módulos de las plantas $p(\omega_i)$ en la plantilla $\mathfrak{S}P(\omega_i)$ cumplen que $p(\omega_i)\delta_i(\omega_i) > 1$, y por tanto, se dan exclusivamente tipologías A simples de contornos, $\{g_{12} \angle \phi\}_A$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, g_{12} en (6.2) y ε en (6.16). El resultado final será un contorno intersección también de tipología A, $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon_T]$.

De acuerdo con la Figura 6-10 en la determinación del contorno intersección $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon_T]$, intervienen: (a) la curva superior del contorno simple originado por la planta de mínimo módulo,

$p_{min} \angle \theta$, es decir, $g_2 \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon_{pmin}]$; y (b) todas las curvas inferiores de los contornos simples del conjunto de plantas $\{p\} \angle \theta$, es decir, $\{g_1 \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]\}$. El intervalo de fases solución, $\Phi_{IS} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon_T]$, se corresponde con el de la planta de mínimo módulo, $\Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon_{pmin}]$. Luego, $\varepsilon_T = \varepsilon_{pmin}$, se calcula sustituyendo $p_{min} \angle \theta$ en (6.16). Esto se resume en la siguiente ecuación:

$$g_{INFSUP} \angle \phi, \phi \in \Phi_{IS} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon_T]: \begin{cases} g_{INF} \angle \phi = \min_{\phi \in \Phi_{IS}} \{g_1 \angle \phi\}_{A, \{p\} \angle \theta} \\ g_{SUP} \angle \phi = g_2 \angle \phi |_{A, p_{min} \angle \theta} \\ \varepsilon_T = \varepsilon |_{p_{min}} = \frac{180}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{p_{min}^2 \delta_4^2 - 1}}{p_{min} \delta_4} \end{cases} \quad (6.26)$$

Es decir, **las plantas significativas en el cálculo del contorno intersección son todas sin excepción, $\{p\} \angle \theta$** . No obstante, se puede reducir el coste computacional en el cálculo de la porción superior $g_{SUP} \angle \phi$ del contorno intersección según se indica en (6.26).

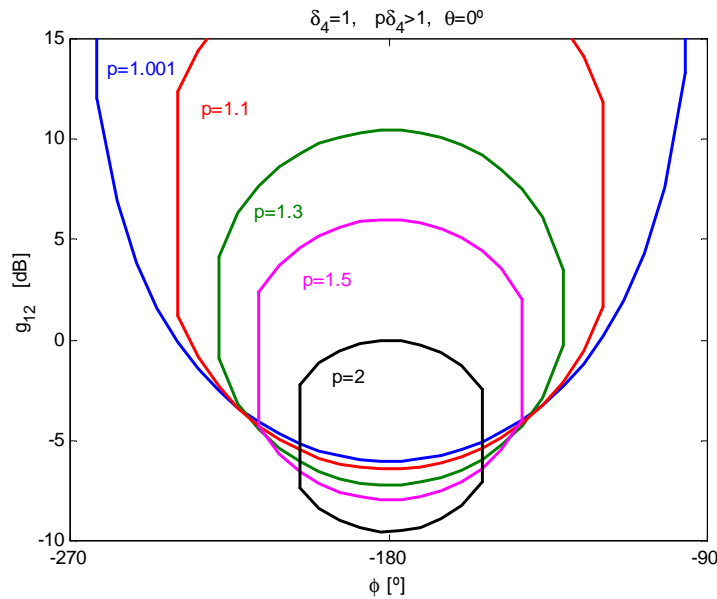


Figura 6-10: Influencia de la incertidumbre en magnitud $\{p\}$ en tipologías A simples

(iv) **Incertidumbre en magnitud, $\{p(\omega)\}$, que origina contornos de tipologías A y D simples**

Cuando algunos módulos $p(\omega)$ en la plantilla $\Im P(\omega)$ cumplen $p(\omega)\delta_i(\omega) < 1$, estos darán tipologías D simples de contornos: $\{g_i \angle \phi\}_D$, $\phi \in \Phi$. Y otros módulos $p(\omega)$ cumplen $p(\omega)\delta_i(\omega) > 1$, originarán tipologías A simples de contornos, $\{g_{i2} \angle \phi\}_A$, $\phi \in \Phi_{i2} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$. La intersección de $\{g_i \angle \phi\}_D$ y $\{g_{i2} \angle \phi\}_A$ dará un contorno final de tipología D, $g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. Para su cálculo bastarán las soluciones $\{g_i \angle \phi\}$, pero para todas las plantas $\{p\} \angle \theta$, es decir, se considerarán $\{g_i \angle \phi\}_D$ y $\{g_i \angle \phi\}_A$ tal y como demuestra la Figura 6-11.

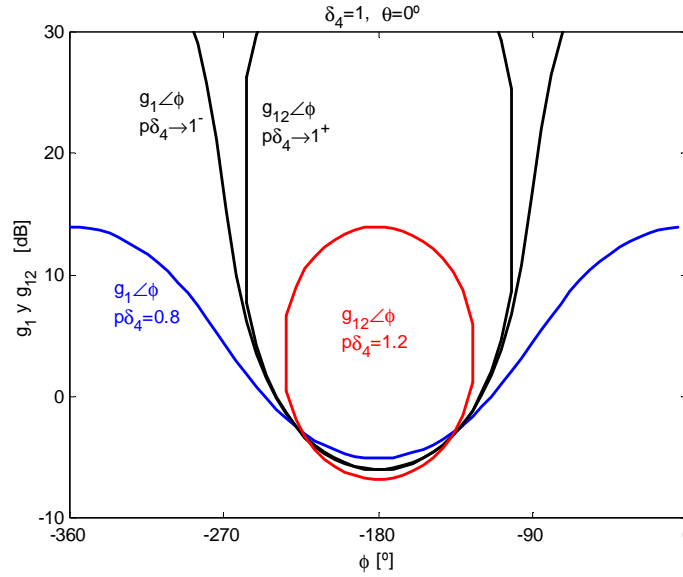


Figura 6-11: Influencia de la incertidumbre en magnitud $\{p\}$ en tipologías A y D simples

De acuerdo a la Figura 6-11, la Figura 6-10 y la Figura 6-9, el cálculo del contorno intersección de tipo D resultante se resume en la siguiente ecuación:

$$g_{INF} \angle \phi, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]: \min_{\phi \in \Phi} \{ \{g_i \angle \phi\}_D \text{ y } \{g_i \angle \phi\}_A \}_{\forall p} \quad (6.27)$$

* * *

Determinadas: en (i) la influencia del parámetro p en los contornos simples; en (ii), (iii) y (iv) la forma de cálculo de los contornos con incertidumbre para el conjunto $\{p\}$; ahora se incluyen algunas afirmaciones más referentes a plantillas con sólo incertidumbre en magnitud:

- (v) El tamaño de incertidumbre vertical, Δp , condiciona los contornos de tipología tanto A como D. Para demostrarlo basta tener en cuenta las consideraciones en (ii), (iii) y (iv), donde se demostraba que todas las plantas del intervalo de incertidumbre $\{p\}$ intervienen en la configuración de los contornos $g_{INF} \angle \phi$ y/o $g_{SUP} \angle \phi$.
- (vi) La posición relativa del intervalo de incertidumbre, es decir $\{p\}$, es especialmente importante en este problema de control. Ésta condiciona las tipologías de contornos resultantes, A o D, y su agresividad en altura y fase, como se ilustra con la Figura 6-6 a Figura 6-11.

6.1.3.2 La Incertidumbre en Fase, $\{\theta\}$

Según la Sección 6.1.2 la fase de las plantas θ no interviene ni modifica la tipología de los contornos que originan. Es decir al variar θ se mantiene la tipología de solución simple, o bien D o bien A, debidas a la relación $p \delta_4$. Por ello, el análisis de la influencia de la incertidumbre en fase, $\{\theta\}$, es totalmente paralelo al desarrollado en el Capítulo 4, Sección 4.3.1, para el problema $|T_1|=|L/I+L| \leq \delta_1$. Las conclusiones allí demostradas son también ahora válidas para $|T_4|=|G/I+L| \leq \delta_4$, únicamente deben ahora particularizarse los valores característicos de los parámetros de los contornos ($min-g_{INF}$, ϕ_{VI} , g_{HI} para la tipología D; y $min-g_{INF}$, $max-g_{SUP}$, ϕ_{VIS} , g_{HIS} , Φ_{IS} y ϵ_T para la tipología A). Dado que la metodología para su cálculo es la misma, aquí únicamente se resumirán las conclusiones:

- (i) La fase de la planta, θ , traslada horizontalmente las magnitudes g_1 o g_{12} en cada ϕ del intervalo de diseño $[-360^\circ, 0^\circ]$ un ángulo $-\theta$. Por tanto, los mínimos, máximos, puntos de inflexión, fases de existencia (sólo en tipologías A) y ejes de simetría quedan desplazados la misma cantidad, $-\theta$. Luego la fase de la planta θ , no modifica la forma de los contornos de tipología D o A sino sólo su posición angular (véase la Figura 4-3). Por consiguiente, varía la posición relativa entre el G-contorno y el punto de referencia $1 \angle 0^\circ$ ($0db \angle 0^\circ$), y por tanto, cambian la agresividad o las necesidades de control que éste expresa.
- (ii) De acuerdo con (i), en la determinación de los contornos de tipología D: $g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, intervendrán las soluciones $\{g_1 \angle \phi\}$ asociadas a todas y cada una de las fases en $\{\theta\}$. Igualmente para los contornos de tipología A: $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} = [-180^\circ - \theta \mp \epsilon_T]$, intervendrán todas las soluciones $\{g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \epsilon]\}$ para el conjunto $\{\theta\}$. El intervalo Φ_{IS} se definía en (4.35) como:

$$\Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \epsilon_T], \epsilon_T = \epsilon + \Delta\theta/2, \phi_{VIS} = -180^\circ - 1/2(\theta_{min} + \theta_{max})$$

- (iii) El tamaño de incertidumbre, $\Delta\theta=|\theta_{min}-\theta_{max}|$, agrava la agresividad de los contornos tipo D y A. Para la tipología D en el sentido de que el intervalo de fases donde el contorno $g_{INF}\angle\phi$ toma valores mínimos aumenta, pudiéndose alcanzar valores mínimos en todo el intervalo $\Phi=[-360^\circ, 0^\circ]$ para $\Delta\theta=-360^\circ$; véase la Figura 4.5. Y para tipologías A: aumenta el intervalo donde $g_{INF}\angle\phi$ toma valores mínimos y donde $g_{SUP}\angle\phi$ toma valores máximos, y aumenta Φ_{IS} (aumento de ε_T debido al incremento de $\Delta\theta$). En el caso, límite para $\Delta\theta=-360^\circ$ no existiría solución al problema de control $k=4$, tal y como ilustra la Figura 4.9 para $k=1$.
- (iv) La posición relativa de los valores $\{\theta\}$, incluso para $\Delta\theta=$ constante, modifica la agresividad de los contornos de tipología D y A, al modificarse su posición relativa al punto de referencia $0dB\angle 0^\circ$. Véanse la Figura 4.6 y la Figura 4.11.

6.1.3.3 Conclusiones sobre la Incertidumbre

Según lo descrito en las secciones anteriores referente a la influencia de la incertidumbre en fase $\{\theta\}$ y ganancia $\{p\}$, se puede deducir que ocurrirá con los contornos para el controlador en la frecuencia ω_i dada una plantilla genérica $\Im P(j\omega_i)=\{p\angle\theta\}$ con ambas incertidumbres. El valor de especificación en la frecuencia ω_i será constante, $\delta_i(\omega_i)=\delta_i$. La plantilla genérica utilizada en los ejemplos gráficos responde a una planta $P(s)=k/(s/a+1)$, $k\in[1, 10]$, $a\in[1, 10]$, evaluada en la frecuencia $\omega=2rad/s$.

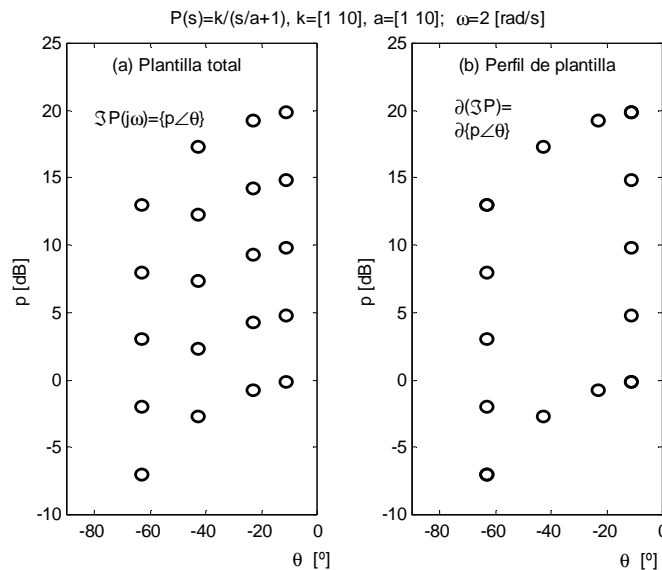


Figura 6-12: Plantilla genérica y perfil en $\omega=2rad/s$ para $\{P(s)\}$

La Figura 6-12(a) incluye la totalidad de las plantas para una discretización en el parámetro con incertidumbre k de 5 puntos logarítmicamente espaciados y para el polo en a de 4 puntos logarítmicamente espaciados. La Figura 6-12(b) muestra el perfil de dicha plantilla. El perfil de una plantilla se denominará³: $\partial(\mathfrak{S}P)=\partial\{p\angle\theta\}$.

(i) Cuando todos las plantas $\{p\angle\theta\}$ en la plantilla $\mathfrak{S}P(\omega_i)$ cumplen que $p < 1/\delta_4$, se darán exclusivamente tipologías D simples, $\{g_I\angle\phi\}_D$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. El contorno intersección resultante será también de tipología D: $g_{INF}\angle\phi$, $\phi \in \Phi$. En la determinación de éste intervienen el conjunto de soluciones simples $\{g_I\angle\phi\}_D$ para todas las plantas del perfil, $\partial\{p\angle\theta\}$, tal y como resume la siguiente ecuación:

$$g_{INF}\angle\phi, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]: \min_{\phi \in \Phi} \{g_I\angle\phi\}_{D, \partial\{p\angle\theta\}} \quad (6.28)$$

Para el ejemplo $P(s)=k/(s/a+1)$, $k \in [1, 10]$, $a \in [1, 10]$, supóngase una tolerancia de especificación, $\delta_4=0.09$, y por tanto, $1/\delta_4=11(21\text{dB})$, cumpliéndose que para todo $p(\omega=2)$ en $\mathfrak{S}P(\omega_i)$ se cumple $p < 1/\delta_4$. La Figura 6-13 muestra el perfil de plantilla utilizado.

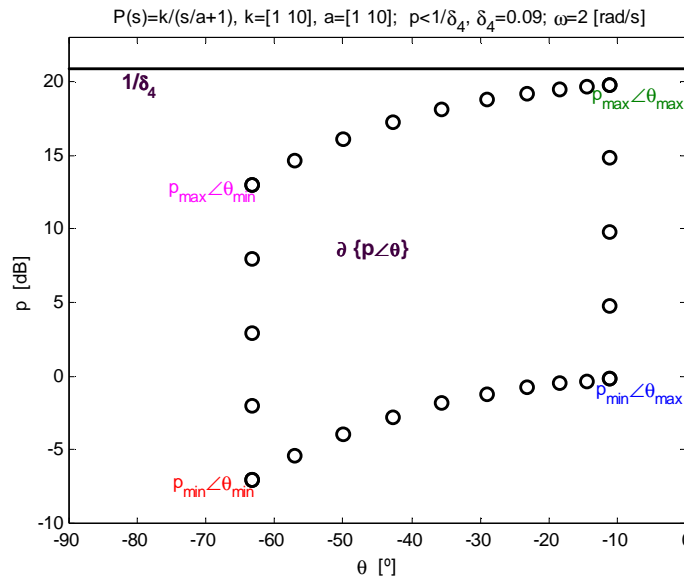


Figura 6-13: Perfil de plantilla para el cálculo de contornos intersección tipo D

³ El símbolo ∂ es ya utilizado en Rodrigues *et al.* (1997) para hacer referencia a los contornos de las plantillas.

Y la Figura 6-14 muestra el contorno intersección calculado según (6.28). Por motivos de claridad en la ilustración de resultados, sobre la figura sólo se añaden los contornos simples $g_1 \angle \phi$ para las plantas en los vértices de $\partial(\mathcal{SP})$.

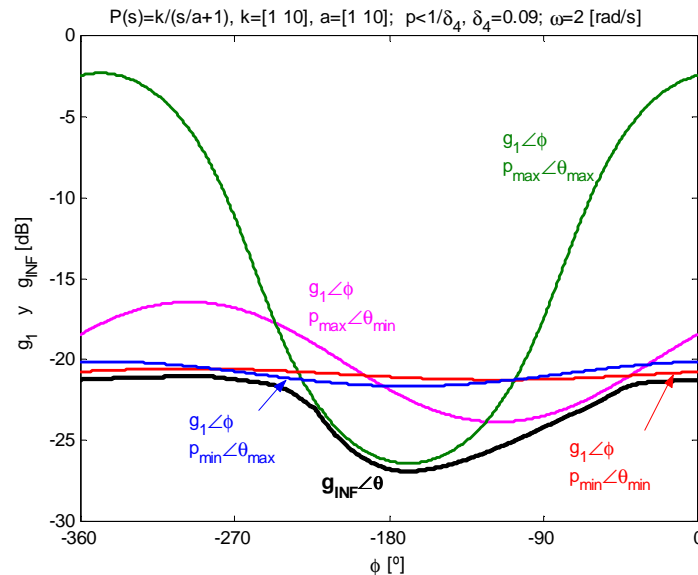


Figura 6-14: Contorno intersección de tipo D para plantilla genérica

(ii) Cuando todas las plantas $\{p \angle \theta\}$ en la plantilla $\mathcal{SP}(\omega)$ cumplen que $p > 1/\delta_4$, se darán exclusivamente tipologías A simples de contornos, $\{g_{12} \angle \phi\}_A$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$ g_{12} en (6.2) y ε en (6.16). El contorno intersección resultante será también de tipología A: $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T]$, y se determinará teniendo en cuenta (6.26). En el trazado de su curva superior, $g_{SUP} \angle \phi$, intervienen las soluciones simples $g_2 \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$ de las plantas de módulo mínimo p_{min} en cada θ , es decir, las plantas del perfil inferior de la plantilla. Este perfil se denominará como $\partial p_{min} \angle \{\theta\}$. La curva inferior, $g_{INF} \angle \phi$, se calculará teniendo en cuenta todas las soluciones simples $g_1 \angle \phi$ asociadas a todas las plantas $p \angle \theta$ que conforman el perfil de la plantilla, $\partial \{p \angle \theta\}$. El conjunto solución descrito, se resume en la siguiente ecuación:

$$g_{INFSUP} \angle \phi, \phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T]: \begin{cases} g_{INF} \angle \phi = \min_{\phi \in \Phi_{IS}} \{g_1 \angle \phi\}_{A, \partial\{p \angle \theta\}} \\ g_{SUP} \angle \phi = \max_{\phi \in \Phi_{IS}} \{g_2 \angle \phi\}_{A, \partial p_{min} \angle \theta} \\ 2\varepsilon_T = \varepsilon |_{p_{min} \angle \theta_{min}} + \varepsilon |_{p_{min} \angle \theta_{max}} + \Delta\theta \\ \phi_{VIS} = -180^\circ - 1/2(\theta_{min} + \theta_{max}) \end{cases} \quad (6.29)$$

Para el ejemplo $P(s)=k/(s/a+1)$, $k \in [1, 10]$, $a \in [1, 10]$, supóngase una tolerancia de especificación, $\delta_4=2.5$, y por tanto, $1/\delta_4=0.4(-8\text{dB})$, cumpliéndose que para todo $p(\omega=2)$ en $\mathcal{S}P(\omega)$ se cumple $p > 1/\delta_4$. La Figura 6-15 muestra el perfil de plantilla utilizado y la Figura 6-16 muestra el contorno intersección calculado según (6.29). Nótese como no todas las aristas del perfil de la plantilla tienen la misma densidad de puntos. El perfil superior (módulos máximos) exige una mayor densidad de puntos, ya que sus soluciones $g_{12} \angle \phi$ son reales en pequeños intervalos Φ_{12} (pequeños ε). Por el contrario las soluciones $g_{12} \angle \phi$ en el perfil inferior presentan los mayores Φ_{12} , por lo que se necesita menor densidad de puntos. Por motivos de claridad de resultados, sobre la figura sólo se añaden los contornos simples $g_{12} \angle \phi$ para las plantas en los vértices de $\partial(\mathcal{S}P)$, responsables del perfil de contorno intersección también en sus vértices.

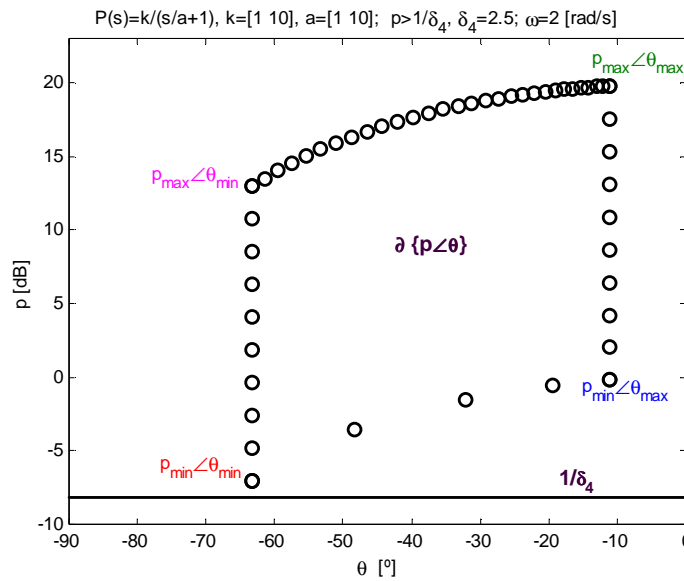


Figura 6-15: Perfil de plantilla para el cálculo de contornos intersección tipo A

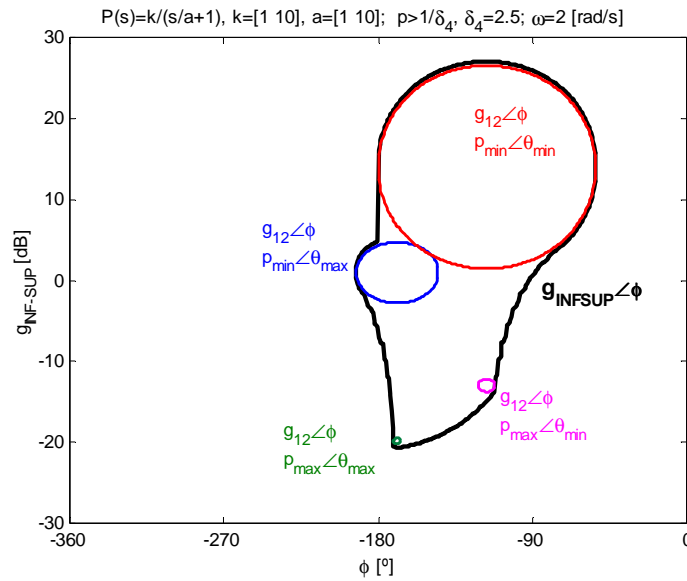


Figura 6-16: Contorno intersección de tipo A para plantilla genérica

(iii) Cuando algunas magnitudes de plantas $p(\omega_i)$ en la plantilla $\mathfrak{S}P(\omega)$ cumplen $p(\omega_i) < 1/\delta_4(\omega_i)$, éstas dan contornos simples de tipología D, $\{g_1 \angle \phi\}_D$, $\phi \in \Phi$. Y si otros $p(\omega_i)$ cumplen $p(\omega_i) > 1/\delta_4(\omega_i)$, originan tipologías A simples, $\{g_{12} \angle \phi\}_A$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \epsilon]$. La intersección de $\{g_1 \angle \phi\}_D$ y $\{g_{12} \angle \phi\}_A$ dará un contorno monovaluado inferior o de tipología D, $g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. Para su cálculo bastarán las soluciones $\{g_1 \angle \phi\}$ pero de todas las plantas en el perfil $\partial\{p \angle \theta\}$. Esto se resume en la siguiente ecuación:

$$g_{INF} \angle \phi, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]: \min_{\phi \in \Phi} \{ \{g_1 \angle \phi\}_D \text{ y } \{g_1 \angle \phi\}_A \}_{\partial\{p \angle \theta\}} \quad (6.30)$$

Para el ejemplo $P(s)=k/(s/a+1)$, $k \in [1, 10]$, $a \in [1, 10]$, supóngase una tolerancia de especificación, $\delta_i=0.25$, y por tanto, $1/\delta_i=4$ (12dB). Por tanto, para ciertas plantas $p < 1/\delta_4$ y para otras $p > 1/\delta_4$. La Figura 6-17 muestra el perfil de plantilla utilizado y la Figura 6-18 muestra el contorno intersección calculado según (6.30). Por motivos de claridad en la ilustración de resultados, sobre la figura sólo se añaden los contornos simples $g_1 \angle \phi$ de tipología D y A para las plantas en los vértices de $\partial(\mathfrak{S}P)$.

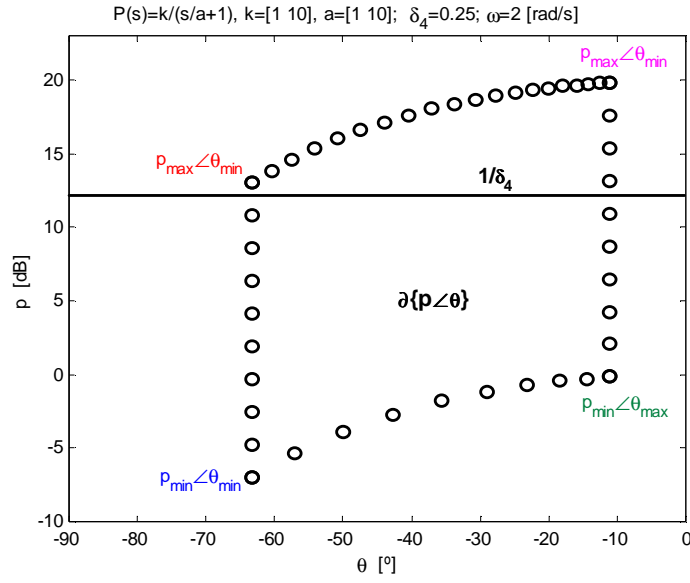


Figura 6-17: Perfil de plantilla para contorno intersección D a partir de tipologías A y D simples

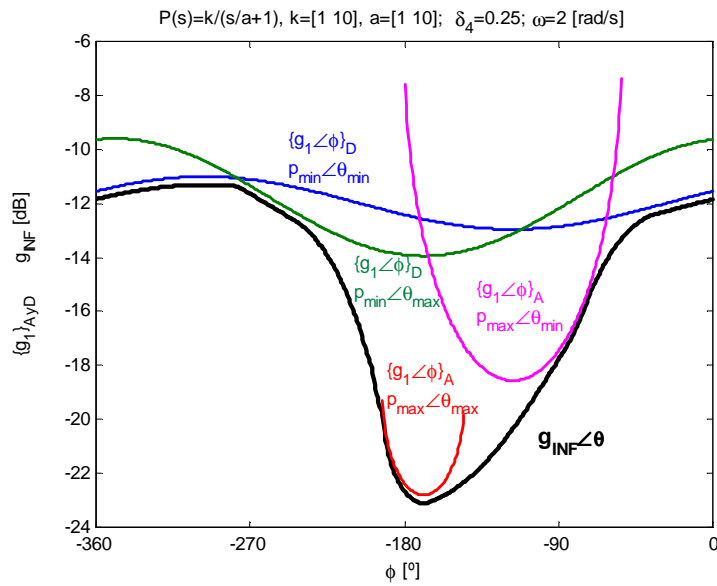


Figura 6-18: Contorno D intersección para tipologías simples A y D de plantilla genérica

6.1.4 INFLUENCIA DE LA ESPECIFICACIÓN, δ_4 .

Según el problema de control $k=4$ en (3.9), $|T_4(j\omega_i)|=|G/1+L|\leq\delta_4(\omega_i)$, en cada frecuencia ω_i se tiene un valor característico de especificación, $\delta_4(\omega_i)$. Y a esa misma frecuencia, un conjunto de plantas discretas (plantilla) con una cierta incertidumbre en fase y ganancia representa al sistema, $\mathfrak{P}(j\omega_i)=\{p\angle\theta\}$. En esta sección se pretende analizar cómo la variación de la tolerancia de especificación $\delta_4(\omega_i)$ afecta a los contornos resultantes. Esto puede resolver dos preguntas: (a) cómo evolucionan los contornos con la frecuencia ω_i , ya que se tendrá un valor específico de δ_4 para cada una de ellas; y (b) de qué manera, para una misma frecuencia ω_i , tolerancias δ_4 más o menos agresivas se traducen en contornos más o menos exigentes. Ambas cuestiones, (a) y (b), afectan a la resolución del problema de control con QFT.

De acuerdo al estudio en la Sección 6.1.2, el valor de especificación δ_4 , junto con el módulo p , afectan a la tipología de los contornos según resumía la Figura 6-1. Si ahora se considera p constante, las tipologías de contornos en función de δ_4 se pueden clasificar como indica la Figura 6-19.

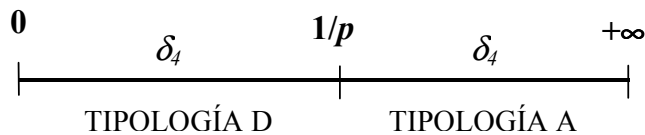


Figura 6-19: Tipologías de contornos en función de la tolerancia de especificación δ_4

Para estudiar la influencia de δ_4 , se analizarán g_1 y/o g_2 en (6.18):

$$g_{12} = \frac{-c p \delta_4^2}{\underbrace{p^2 \delta_4^2 - 1}_{t_1}} \mp \frac{\delta_4 \sqrt{(c^2 - 1)p^2 \delta_4^2 + 1}}{\underbrace{p^2 \delta_4^2 - 1}_{t_2}}$$

donde c representa según (6.5) la función $\cos(\phi+\theta)$, y los términos t_1 y t_2 , cumplen las mismas propiedades que los términos t_1 y t_2 , de la Sección 6.1.2.1 para tipologías D y de la Sección 6.1.2.2 para tipologías A. De acuerdo a la Sección 6.1.2 y según resume la Figura 6-19: (a) para aquellos valores de especificación δ_4 tal que $0 < \delta_4 < 1/p$, se da una tipología D de contornos donde sólo existe $g_1 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, g_1 en (6.2a) (en Φ , la magnitud g_1 toma valores reales, positivos y mayores que cero); (b) cuando la especificación es tal que $1/p < \delta_4 < +\infty$, produce una tipología A de contornos, $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, g_{12} en (6.2) y ε en (6.16) (en Φ_{12} , ambas magnitudes g_1 y g_2 toman valores reales, positivos y mayores que cero).

Para una **tipología D** de contornos, $0 < \delta_4 < 1/p$, la evolución de $g_1 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ al variar δ_4 se muestra en la Figura 6-20.

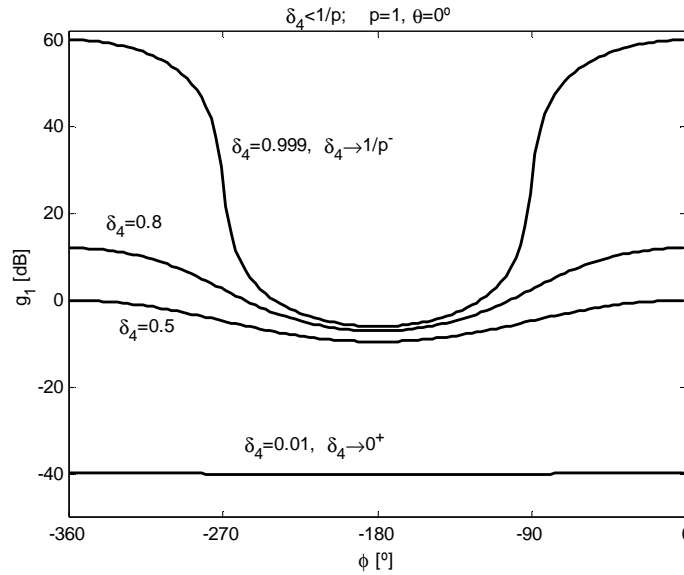


Figura 6-20: Influencia de la especificación δ_4 en contornos de tipología D ($\delta_4 < 1/p$)

Es decir, cuando la tolerancia de especificación δ_4 disminuye, el contorno simple $g_1 \angle \phi$ desciende (más agresivo⁴). Es lógico pensar que una limitación más restrictiva del esfuerzo de control (δ_4 menor) necesitará un mayor descenso de la ganancia de lazo abierto (g o l), y por tanto un contorno tipo D de menor altura. La siguiente ecuación resume el comportamiento ante una disminución de δ_4 en tipologías D de contornos ($0 < \delta_4 < 1/p$).

$$\delta_4 \downarrow \Rightarrow g_1 \angle \phi \downarrow, \phi \in [-360^\circ, 0^\circ] \quad (6.31)$$

También sobre la Figura 6-20 puede comprobarse la tendencia de los contornos D en los valores de especificación límite del intervalo donde aparece esta tipología, $\delta_4 \rightarrow 0^+$ y $\delta_4 \rightarrow (1/p)^-$. Los valores exactos se calculan tomando límites para g_1 en (6.18a):

$$\lim_{\delta_4 \rightarrow 0^+} g_1 = 0 = -\infty [dB], \forall \phi \in [-360^\circ, 0^\circ] \quad (6.32)$$

⁴ Los contornos D se satisfacen tal que $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$, luego cuanto menor es g_1 para todo ϕ , más se debe reducir la ganancia $l = gp$ con el controlador g .

$$\lim_{\delta_4 \rightarrow 1/p^-} g_1 = \begin{cases} \frac{1}{2p|\cos(\phi + \theta)|}, & \phi \in \Phi_1 = [-270^\circ - \theta, -90^\circ - \theta] \\ +\infty, & \phi \in \bar{\Phi}_1 \end{cases} \quad (6.33)$$

En (6.33) se comprueba como en $\delta_4 \rightarrow (1/p)^-$ existe un cambio de tipología de contornos, tal y como resumía la Figura 6-19. En dicho límite pero ahora para una tipología A de contornos, se deduce:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\delta_4 \rightarrow 1/p^+} g_1 = \frac{1}{2p|\cos(\phi + \theta)|} \\ \lim_{\delta_4 \rightarrow 1/p^+} g_2 = +\infty \\ \lim_{\delta_4 \rightarrow 1/p^+} \varepsilon = 90^\circ \end{array} \right. , \phi \in [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon] \quad (6.34)$$

La transición entre tipologías D y A se detalla en la Figura 6-21. Se comprueban las ecuaciones (6.33) y (6.34). Por ejemplo, para $\phi + \theta = 180^\circ$, la magnitud g_1 se acerca a $1/2p = 0.5$ (-6dB) cuando $\delta_4 \rightarrow 1/p$ tanto por la izquierda como por la derecha.

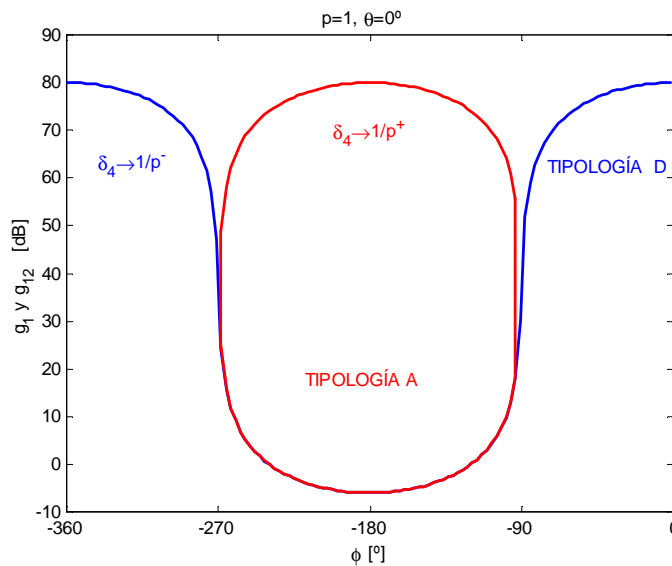


Figura 6-21: Transición de contornos de tipología D a A para especificación $\delta_4=1/p$

Para una **tipología A** de contornos, $1/p < \delta_4 < +\infty$, la evolución de $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, g_{12} en (6.2), ε en (6.16), al variar δ_4 se muestra en la Figura 6-22.

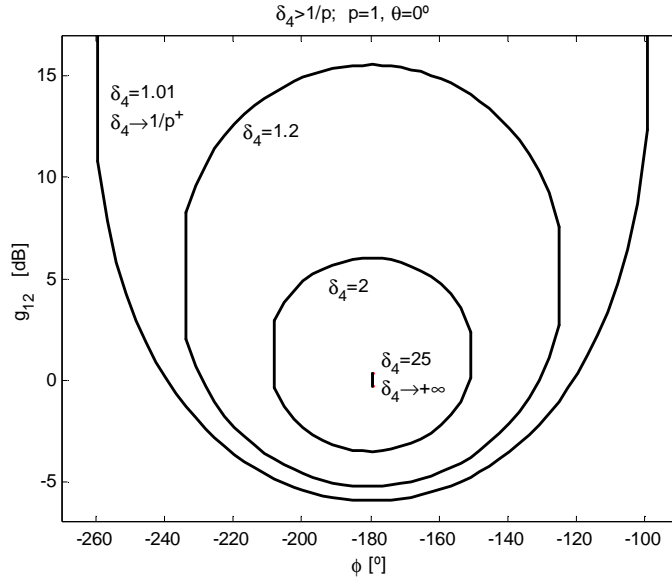


Figura 6-22: Influencia de la especificación δ_4 en contornos de tipología A ($\delta_4 > 1/p$)

Es decir, cuando δ_4 aumenta en $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$: (a) $g_1 \angle \phi$ se eleva (menos agresivo), (b) $g_2 \angle \phi$ descende (menos agresivo) y (c) ε en (6.16) disminuye (el intervalo Φ_{12} se estrecha, luego contornos menos agresivos)⁵. En definitiva esto implica que cuando la especificación que limita el esfuerzo de control se relaja (δ_4 aumenta su valor siendo menos restrictivo $|G/1+L| \leq \delta_4$), los contornos o limitaciones para el controlador también se relajan. El comportamiento descrito se resume en la siguiente ecuación:

$$\delta_4 \uparrow \Rightarrow \begin{cases} g_1 \angle \phi \uparrow \\ g_2 \angle \phi \downarrow \\ \varepsilon \downarrow \end{cases}, \phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon], 0 < \varepsilon < 90^\circ \quad (6.35)$$

En el límite superior del intervalo para tipologías A de contornos, es decir cuando $\delta_4 \rightarrow +\infty$, tomando límites para g_{12} en (6.18) con $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$ y ε en (6.16), se calcula:

$$\begin{cases} \lim_{\delta_4 \rightarrow +\infty} g_{12} = 1/p \\ \lim_{\delta_4 \rightarrow +\infty} \varepsilon = 0^\circ \end{cases}, \phi \in [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon] \quad (6.36)$$

⁵ La Figura 3-6a mostraba como debían ser satisfechos los contornos de tipo A y la Sección 3.3.6 resumía el concepto de ‘agresividad’ de un contorno. Un contorno A es menos agresivo cuanto menor es el área prohibida sobre el diagrama de Nichols para ubicar G o L_0 .

Según el resultado en (6.36) cuando el valor de especificación δ_i se relaja infinitamente, el contorno se reduce a un punto. Es decir, el contorno tiende a desaparecer hacia el punto $1/p \angle -180^\circ - \theta$. En este caso el esfuerzo de control máximo (que es muy permisivo al ser la tolerancia δ_i muy alta) sólo podría ser rebasado debido a plantas con módulos p infinitamente grandes (o incertidumbres en ganancia cuyos valores $\{p\}$ fueran infinitamente grandes). Al considerar la incertidumbre en fase y ganancia, el punto $1/p \angle -180^\circ - \theta$ se expande en una zona prohibida, $1/\{p\} \angle -180^\circ - \{\theta\}$.

* * *

Comparando la Figura 6-20, la Figura 6-21 y la Figura 6-22 puede comprobarse cómo cuando la especificación δ_i que limita el esfuerzo de control ($|G/1+L| \leq \delta_i$) se relaja desde valores muy pequeños ($\delta_i \approx 0^+$) hasta valores casi infinitos ($\delta_i \approx +\infty$), la agresividad de los contornos que la representan en QFT también se relaja. Es decir, las necesidades de control para el sistema (G o L_0) son menos exigentes. De esta manera, se comprueba el paso de una tipología D (más restrictiva al ocupar todo el intervalo de fases de diseño) a una tipología A de contornos. Y también, dentro de cada tipología, cuando δ_i se relaja el contorno D o A se relajan. De este modo, los contornos tipo D se elevan en todas las fases, y los contornos tipo A se estrechan en fase y ganancia hasta reducirse a un punto (sistema sin incertidumbre) o a una zona (función de la incertidumbre). Todas estas conclusiones se expresan formalmente en la ecuaciones (6.31) a (6.36).

6.1.5 SOLUCIÓN AL PROBLEMA DEL ESFUERZO DE CONTROL

El objetivo de la realimentación es conseguir $|L(j\omega)|$ bastante mayor que la unidad para un cierto rango de frecuencias. Cuanto mayor sea $|L|$ en bajas-medias frecuencias mayores serán los beneficios de la realimentación. Pero ello lleva también consigo un mayor gasto de control. Por ello, los beneficios están limitados al pico de tensión soportado por los actuadores. Este fenómeno es tenido en cuenta por todos los diseñadores de controles realimentados. Las Figura 4-31 y 5-48 mostraban algunos ejemplos. En ellos, conforme el controlador de realimentación G conseguía un mejor comportamiento temporal $y(t)$ frente a una perturbación escalón $d_2(t=1s)$, el pico de tensión $u(t=1)$ y en general el gasto total $\int u(t)dt$, se incrementaban. Sin embargo, existe un segundo efecto debido al incremento de $|L(j\omega)|$ en las frecuencias de interés, que puede ser mucho más peligroso y habitualmente no es tenido en cuenta. Este fenómeno conocido como el 'coste de la realimentación' fue introducido en Bode (1945) y ha sido ampliamente estudiado desde Horowitz (1963) a lo largo de la trayectoria de la teoría QFT.

Cuanto mayor es el rango de frecuencias donde $|L(j\omega)| > 1$, también es mayor el intervalo de frecuencias en el que $|L(j\omega)| > |P(j\omega)|$. Además, cualquier diseño práctico en control exige que $|L| \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$, como consideran todas las teorías robustas de control, para evitar la amplificación de ruidos en la salida (reducción de $|Y/N|$). Sin embargo, como QFT sostiene, un problema mucho mayor surge en las frecuencias intermedias, donde $|L| \ll 1$ pero $|L/P| > 1$, ya que los criterios de estabilidad imponen que $|L(j\omega)|$ decaiga con pequeña pendiente en las frecuencias cercanas a la frecuencia de cruce de ganancia (Bode, 1945). Por tanto, en dicho intervalo, $|U/N| = |U/D_2| = |U/RF| \approx |L/P| > 1$ (todas función de $j\omega$), y el pico de esfuerzo de control es tanto mayor cuanto mayor sea $|L|$. Esto puede significar una gran amplificación del ruido introducido en la medida o de perturbaciones que se habían considerado insignificantes (Horowitz y Sidi, 1972). Entonces, la saturación de los actuadores por el pico en $U(j\omega)$ impedirá el correcto seguimiento de R o el rechazo, si fue previsto, de D_2 o D_1 . Como ilustran las Figuras 4-30, 4-31, 4-32 y 5-48, la amplificación de ruidos de alta frecuencia debida a una $|L(\omega_i)|$ elevada, se manifiesta en mucha mayor medida en la variable $u(t)$ que en $y(t)$. Por ejemplo, en la Figura 4.30(c) y 4.30(d), prescindiendo del pico de $u(t)$ en el instante de perturbación $d_2(t)$, en $t=1$ seg., puede observarse como el ruido perturba $u(t \rightarrow \infty)$ entre $[-1, +1]$, mientras que en $y(t \rightarrow \infty)$ se amplifica entre $[-0.2, +0.2]$. Si la fuente de ruido fuera de mayor amplitud, los picos en $u(t)$ podrían superar los previstos en el instante de perturbación ($t=1$ s), saturándose los actuadores, y deteriorándose el comportamiento teórico de $y(t)$ frente a $d_2(t)$.

En resumen, la ganancia $|L|$ debe reducirse con la frecuencia tan rápido como sea posible pero sin violar las restricciones de estabilidad (Horowitz, 1963). Como una primera opción, este criterio puede tenerse en cuenta en la etapa de síntesis de G tan sólo ‘implícitamente’, es decir, sin definir una tolerancia δ_4 explícitamente. En este caso no existirán contornos representativos de esta especificación, y los contornos representativos de los beneficios de la realimentación ($\delta_2, \delta_3, \delta_5$) y estabilidad (δ_1 o δ_2) deberán permitir la disminución de ganancia con la frecuencia lo más rápidamente posible (véanse los ejemplos en las Secciones 4.5.2 y 5.4.1). O por el contrario, se puede optar por incluir el ‘coste de la realimentación’ explícitamente con δ_4 entre las especificaciones. Cuando se incluye una limitación δ_4 ésta puede resultar incompatible con el resto de tolerancias, en concreto con $\delta_{2,3,5}$. El problema de limitación del esfuerzo de control $|G/(1+L)| \leq \delta_4$, tal como se estudiaba en las Secciones 6.1.2, 6.1.3 y 6.1.4 daba lugar a tipologías de contornos D cuando para **algún** $p(\omega_i)$ en la plantilla de dicha frecuencia y para una tolerancia de especificación $\delta_4(\omega)$ se cumplía

$\delta_4 < 1/p$ (véanse Figura 6-13, Figura 6-14, Figura 6-17 y Figura 6-18). Por el contrario, si para **todo** $p(\omega)$ se satisfacía en ω que $\delta_4 > 1/p$ la tipología del contorno resultante era A (Figura 6-15 y Figura 6-16). Como los contornos de tipología A ocupan tan sólo un cierto área del plano de diseño de Nichols, son compatibles con cualquier tipología B o D de contornos. Es decir, existe intersección no nula de contornos y ‘teóricamente’⁶ se puede modelar L_0 . Por el contrario, las tipologías B y D al ocupar todo el intervalo angular de diseño, $[-360^\circ, 0^\circ]$, y deberse satisfacer los contornos B por encima y los D por debajo, las especificaciones robustas que representan pueden ser incompatibles entre sí. Entonces, se deberá tener sumo cuidado cuando los problemas $|G/1+L| \leq \delta_4$ o $|L/1+L| \leq \delta_4$ den lugar a tipologías D de contornos. Nótese que hasta medias frecuencias siempre habrá una tipología B, ya que el rechazo de perturbaciones o el seguimiento de señales en estas frecuencias exigen una mínima $|L|$ (a través de $\delta_{2,3,5}$) que dará lugar a este tipo de contornos (véase el Capítulo 5 y la Sección 6.2).

Los conflictos de δ_4 (o δ_1) con $\delta_{2,3,5}$ surgen en medias y moderadamente altas frecuencias. En bajas frecuencias al resultar siempre $p(\omega) > 1/\delta_4(\omega)$, los contornos de tipología A resultantes para δ_4 no son dominantes respecto a los de tipología B debidos a $\delta_{2,3,5}$. Sin embargo, conforme aumenta la frecuencia $p(\omega)$ disminuye y al mismo tiempo la tolerancia $\delta_4(\omega)$ debe cobrar importancia (incremento del coste de la realimentación que hay que limitar). Esto hace que los contornos para δ_4 sean de tipología D y con altura decreciente (más agresivos; véase Figura 6-20), obligando a adoptarse soluciones de compromiso entre los valores δ_4 y $\delta_{2,3,5}$. En muy altas frecuencias, no tiene sentido ni considerar δ_4 , ni el resto de especificaciones. En estos casos, el modelo lineal utilizado no es representativo del comportamiento real del proceso y las propias limitaciones físicas impiden cualquier clase de control.

El problema de la limitación del esfuerzo de control no sólo es un problema requerido por el concepto que Horowitz calificó en 1963 como el ‘coste de la realimentación’. Simplemente, las condiciones del sistema pueden requerir la limitación de posibles señales de control elevadas para las que los actuadores no están preparados. En este sentido, como describía (3.9) las tolerancias δ_4 limitaban $|U/D_2|$ y $|U/RF|$. Y según (3.6) las tolerancias δ_1 sobre la sensibilidad complementaria condicionaban el pico de $|U/D_1|$. Las reflexiones anteriores sobre la incompatibilidad de contornos son ahora igualmente aplicables.

⁶ No debe olvidarse que si las tolerancias de especificación son muy agresivas o existe mucha incertidumbre, aunque los contornos sean compatibles los compromisos de control en la síntesis de L_0 son muy elevados. Y esto puede dar lugar a controladores G impracticables.

A continuación se incluye un ejemplo ilustrativo de todas estas conclusiones sobre la Figura 6-23. Se considera el proceso con incertidumbre $\varphi = \{P(j\omega) = k/j\omega\}$, tal que $k \in [1, 3]$, y la planta nominal se corresponde con $k=1$.

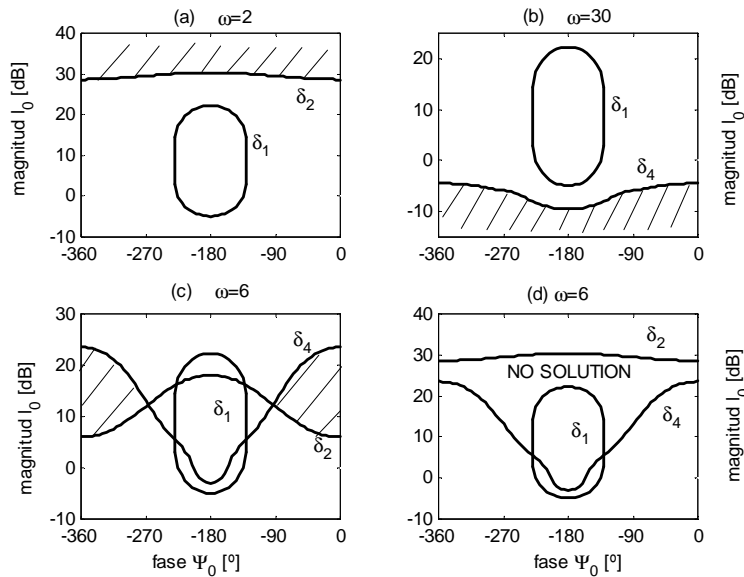


Figura 6-23: Contornos para el ejemplo con especificaciones δ_1 , δ_2 y δ_4

En baja frecuencia, $\omega=2$ [rad/s], coexisten especificaciones de estabilidad $\delta_1=1.3$ y de rechazo de perturbaciones $\delta_2=0.1$, que originan contornos compatibles A y B (zona rayada); véase Figura 6-23(a). La Figura 6-23(b) muestra también compatibilidad de contornos en moderadamente alta frecuencia, $\omega=30$, para especificaciones de estabilidad, $\delta_1=1.3$ (tipología A), y especificaciones que limitan el coste de realimentación máximo, $\delta_4=5$, (tipología D). Sin embargo, en la frecuencia intermedia $\omega=6$, puede darse la inexistencia de solución en función de los valores $\delta_{1,2,4}$. En la Figura 6-23(c), $\delta_1=1.3$, $\delta_2=0.6$ y $\delta_4=5$; aunque coexisten contornos tipo B y D, los valores de especificación permiten que exista solución. Sin embargo, en la Figura 6-23(d), cuando $\delta_2=0.1$ y, por tanto, más agresiva, no existe solución.

La formulación de contornos estudiada en este documento puede ser relevante a la hora de establecer ciertas pautas en la selección de tolerancias, de forma que las especificaciones sean compatibles dada una cierta incertidumbre. Aprovechando la formulación mencionada y para el ejemplo de control anterior, la Figura 6-24 muestra algunas reflexiones.

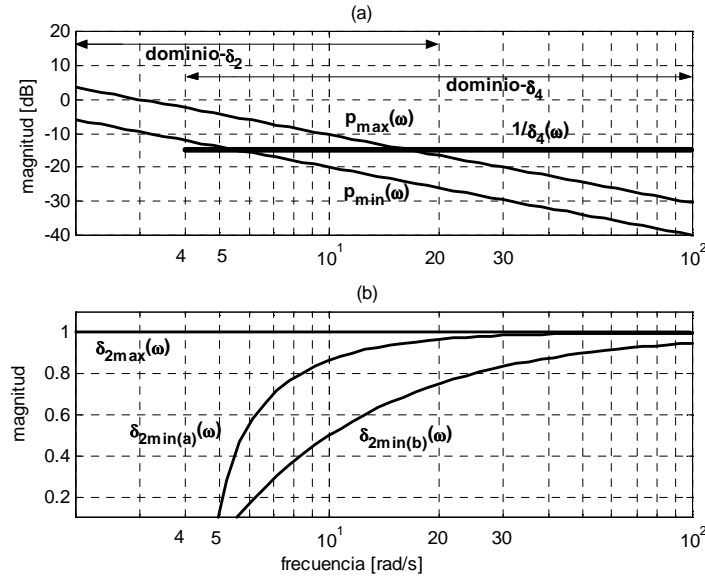


Figura 6-24: (a) Incertidumbre en magnitud y especificación.
 (b) Limitaciones para la existencia de solución

La Figura 6-24(a) compara la incertidumbre en magnitud, $\{p(\omega)\}$, con la tolerancia frecuencial de especificación, $\delta_4(\omega)$. Para $\omega > \omega^* = 5 \text{ rad/s}$ existe algún $p(\omega) < 1/\delta_4(\omega)$ dando lugar δ_4 a contornos de tipo D. Por tanto, en $\omega \in [5, 18]$ coexisten contornos de tipo B (debidos a $\delta_2 < 1$) y D que pueden originar problemas de existencia de solución. Suponiendo $\delta_4(\omega)$ un valor fijo δ_4 , $\delta_2(\omega)$ debe ser modelada para garantizarse la intersección no nula de contornos en aquellas frecuencias donde coexistan ambas especificaciones. Como $\delta_2(\omega)$ en las bajas frecuencias debe tomar valores de atenuación se tiene que $\delta_2 < 1$. Las limitaciones para $\delta_2(\omega)$ en su rango de definición $\omega \in \Omega_2 = [0, \omega_2]$ se resumen como:

$$\begin{cases} 0 < \delta_2(\omega) < 1, \omega < \omega^* \\ \delta_{2_min}(\omega) < \delta_2(\omega) < 1, \omega^* < \omega < \omega_2 \end{cases} \quad (6.37)$$

Para el cálculo de δ_{2min} se aprovechará la formulación desarrollada en el documento. El contorno tipo de D que representa a δ_4 en ω , $g_1 \angle \phi$ definido en (6.2a), debe estar por encima del contorno de tipo B que representa a δ_2 en ω , $g_2 \angle \phi$ definido en (4.2b), al menos en un cierto rango de fases ϕ (véase Figura 6-23c,d). Operando adecuadamente con (6.2a) y (4.2b) se obtiene:

$$\delta_{2_min(a)} = \sqrt{1 - p_{min}^2(\omega) \cdot \delta_4^2(\omega)} \quad (6.38)$$

$$\delta_{2_min(b)} = 1 - p_{min}(\omega) \cdot \delta_4(\omega) \quad (6.39)$$

Para valores de δ_2 por encima de $\delta_{2min(b)}$ se garantiza la intersección no nula en un intervalo superior a 0° . Para valores de δ_2 por encima de $\delta_{2min(a)}$ la solución existiría en un intervalo de al menos 90° (véase Figura 6-23c). En general los valores δ_{2min} crecen (especificación δ_2 menos exigente) cuando se requiere un mayor intervalo de intersección no nula de contornos B y D, cuando la tolerancia δ_4 es más agresiva o cuando la incertidumbre aumenta.

6.2 LOS SERVOSISTEMAS

6.2.1 GENERALIDADES

El problema del seguimiento de señales no es el más habitual en el ambiente industrial. Los problemas de control reales, habitualmente se reducen a mantener las variables del proceso en un punto estático (o poco cambiante) de operación. Por ello la estructura clásica 1-DOF es la más extendida en la bibliografía de control. No obstante, esta estructura es muchas veces mal interpretada cuando se prescinde de la incertidumbre, inherente en todo modelo matemático de un sistema físico real (véase Sección 2.2.3). Por ello, el problema del ‘servomecanismo’ es tratado en el presente trabajo de forma más resumida que el problema de ‘regulación’ (Capítulos 4 y 5).

El problema del seguimiento de señales de referencia en sistemas con incertidumbre necesita una estructura de control realimentada para cumplir sus objetivos. Además, dicha configuración debe contener necesariamente dos elementos de diseño (o grados de libertad): el controlador G , inmerso en el lazo de realimentación (bien en la cadena directa o la de realimentación) y el pre-filtro F , en serie con el lazo de realimentación; véase la Figura 2-1. Este tipo de estructura es habitualmente denominada en la literatura de control como esquema de control de dos grados de libertad o 2-DOF del inglés ‘*two degrees of freedom*’ y, aunque típicamente se emplea en el seguimiento de señales de referencia, puede utilizarse en la resolución de cualquier otro objetivo de control con entrada medible, p.e. el rechazo de perturbaciones si estas fueran medibles.

Los ‘servo-sistemas’ o sistemas de seguimiento se resuelven con QFT planteando como especificaciones de diseño un modelo superior y otro inferior (D’Azzo y Houpis, 1995), tal y como mostraban las Figuras 2.3 (dominio temporal) y 2.4 (dominio frecuencial). Ambos modelos frecuenciales, $\delta_{\text{inf}}(\omega)$ y $\delta_{\text{sup}}(\omega)$, han de satisfacerse de acuerdo a la especificación robusta en (3.10) tal que:

$$\delta_{\text{inf}}(\omega) < |T_5(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} \right| = \left| F(j\omega) \frac{P(j\omega)G(j\omega)}{1 + P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_{\text{sup}}(\omega), \omega \in \Omega_5 \quad (6.41)$$

Nótese la diferencia con las especificaciones robustas alcanzables con un único grado de libertad o 1-DOF. En estas últimas se imponía una única

tolerancia superior de comportamiento, $|T_k| < \delta_k$, $k=1, \dots, 4$, que pueden resolverse con un solo diseño, el del controlador G .

Los dos grados de libertad (2-DOF), G y F , dan lugar a dos pasos consecutivos de diseño. En primer lugar, se sintoniza el controlador G con el objetivo de reducir la sensibilidad del comportamiento del sistema en lazo cerrado. Dicha sensibilidad viene representada por la función sensibilidad complementaria $T=PG/(1+PG)$. Debido a la incertidumbre del proceso o incertidumbre en lazo abierto de P , con la ayuda de G se debe reducir la variación en lazo cerrado de T . Y un segundo paso de diseño calcula el prefiltro F que ubica la señal $T_s=FT$ dentro de los límites superior e inferior de especificación para cada frecuencia, $\delta_{sup}(\omega)$ y $\delta_{inf}(\omega)$, según indica (3.10).

Con el fin de independizar el diseño de G y F , la ecuación (6.41) o (3.10) puede expresarse como:

$$\frac{\delta_{inf}(\omega)}{|F(j\omega)|} \leq |T(j\omega)| \leq \frac{\delta_{sup}(\omega)}{|F(j\omega)|} \quad (6.42)$$

Según el Algoritmo 3.1 para el cálculo de contornos con inecuaciones cuadráticas (véase Capítulo 3), en el Paso 6 seleccionada ya una frecuencia ω_i y para los problemas 2-DOF⁷, se seleccionarán **dos** plantas en lazo abierto cualesquiera, $P_d=p_d \angle \theta_d$ y $P_e=p_e \angle \theta_e$, en el espacio frecuencial de incertidumbre (plantilla ω_i). Nótese que en los problemas 1-DOF anteriormente tratados se seleccionaba una única planta $p \angle \theta$. Ahora (2-DOF), la incertidumbre en módulo de lazo abierto de la planta $|P|$, que se representa a través de dos plantas arbitrarias $|P_d|=p_d$ y $|P_e|=p_e$, se transforma en una cierta incertidumbre de lazo cerrado de $|T|$, que será función de las correspondientes $|T_d|$ y $|T_e|$. Y esta incertidumbre de lazo cerrado debe satisfacer la especificación impuesta en (6.42). De este modo en el diseño de G , el problema se reduce a una única inecuación dada por:

$$|T_d(j\omega)| - |T_e(j\omega)| \leq \frac{\delta_{sup}(\omega)}{|F(j\omega)|} - \frac{\delta_{inf}(\omega)}{|F(j\omega)|} \quad (6.43)$$

La técnica QFT trabaja con módulos en decibelios⁸, $|T|_{dB}=Lm|T|$, y por tanto, la diferencia de módulos se transforma en un cociente de éstos. Finalmente simplificando la inecuación (6.43) se obtiene:

⁷ El Algoritmo 3.1 propuesto en este trabajo es una generalización del propuesto por Chait y Yaniv (1993). El nuevo algoritmo es particularizado para problemas 2-DOF, entre otras novedades que incluye.

⁸ Lm representa $20 \cdot \log_{10}$, siendo \log_{10} la función logaritmo decimal.

$$\frac{|T_d(j\omega_i)|}{|T_e(j\omega_i)|} \leq \frac{\delta_{5\text{sup}}(\omega_i)}{\delta_{5\text{inf}}(\omega_i)} \quad (6.44)$$

La relación entre el modelo modular superior e inferior de especificación responde en cada frecuencia a un único valor, y puesto que expresa un cociente entre un módulo máximo y otro mínimo que cumplen $\delta_{5\text{sup}} > \delta_{5\text{inf}}$, también se satisface:

$$\delta_5(\omega_i) = \frac{\delta_{5\text{sup}}(\omega_i)}{\delta_{5\text{inf}}(\omega_i)} > 1 \quad (6.45)$$

Luego en el seguimiento de referencias el valor de especificación puede variar tal que, $1 < \delta_5 < +\infty$ o en decibelios, $0\text{dB} < \delta_5 < +\infty\text{dB}$, siendo ésta una propiedad muy importante y exclusiva del problema que nos ocupa. Nótese que en los problemas de control tratados anteriormente, $\delta_{k=1,\dots,4}$, la tolerancia de especificación robusta podía variar en $0 < \delta_{k=1,\dots,4} < +\infty$, o en decibelios, $-\infty\text{dB} < \delta_{k=1,\dots,4} < +\infty$. De acuerdo a (6.45) los módulos de las plantas en lazo cerrado cumplen:

$$|T_d(j\omega_i)| > |T_e(j\omega_i)| \quad (6.46)$$

Expresando en (6.44) la relación de funciones de transferencia de lazo cerrado en términos de lazo abierto se tiene:

$$\frac{|P_d(j\omega_i)|/|1 + G(j\omega_i) \cdot P_d(j\omega_i)|}{|P_e(j\omega_i)|/|1 + G(j\omega_i) \cdot P_e(j\omega_i)|} \leq \delta_5(\omega_i) \quad (6.47)$$

Y considerando para la frecuencia ω_i : (a) dos plantas discretas $P_d = p_d \angle \theta_d$ y $P_e = p_e \angle \theta_e$ cualesquiera en la plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega)$; (b) el valor de especificación robusta $\delta_5(\omega_i)$ según (6.45), que será constante en ω_i , $\delta_5 = \delta_5(\omega_i)$; y (c) la expresión polar del controlador en ω_i , $G(j\omega_i) = g \angle \phi$, finalmente se obtiene la inecuación para el ‘seguimiento de señales’ incluida en Chait y Yaniv (1993):

$$I_{\omega_i}^{k=5}(p, \theta, \delta_5, \phi) = p_e^2 p_d^2 \left(1 - \frac{1}{\delta_5^2}\right) g^2 + 2 p_e p_d \left(p_e \cos(\phi + \theta_d) - \frac{p_d}{\delta_5^2} \cos(\phi + \theta_e) \right) g + \left(p_e^2 - \frac{p_d^2}{\delta_5^2} \right) \geq 0 \quad (6.48)$$

De acuerdo al Paso 8 del Algoritmo 3.1, resolviendo en g la ecuación cuadrática $I_{\omega_i}^{k=5} = 0$ asociada a (6.48), se obtienen dos soluciones: g_1 (valor negativo de la raíz cuadrada) en (6.49a) y g_2 (valor positivo de la raíz cuadrada) en (6.49b):

$$g_{1,2} = \frac{1}{p_e p_d \left(1 - \frac{1}{\delta_5^2}\right)} \cdot \left\{ - \left(p_e \cos(\phi + \theta_d) - \frac{p_d}{\delta_5^2} \cos(\phi + \theta_e) \right) \mp \sqrt{\left(p_e \cos(\phi + \theta_d) - \frac{p_d}{\delta_5^2} \cos(\phi + \theta_e) \right)^2 - \left(1 - \frac{1}{\delta_5^2}\right) \left(p_e^2 - \frac{p_d^2}{\delta_5^2} \right)} \right\} \quad (6.49a,b)$$

Teniendo en cuenta que $|T|=|GP/(I+GP)|$, aunque $|T_d|>|T_e|$ según (6.46), esto no implica que $|P_d|>|P_e|$. Por tanto, en el Paso 8 del Algoritmo iterativo 3.1 de cálculo de contornos, seleccionadas dos plantas arbitrarias, P_1 y P_2 en $\mathfrak{S}P(j\omega)$, en una iteración se asignará $P_d=P_1$ y $P_e=P_2$, y en una iteración diferente para el mismo par de plantas P_1 y P_2 se deberá considerar $P_d=P_2$ y $P_e=P_1$. Supuesto por ejemplo $p_1>p_2$, en la primera iteración se cumplirá la relación $p_d/p_e>1$ (o $p_d>p_e$), mientras que en la segunda iteración resultará $p_d/p_e<1$ (o $p_d<p_e$).

Cumplíendose (6.45) $\delta_5>1$, cuando la relación que es superior a la unidad en una pareja de plantas, $p_d/p_e>1$, es además superior a δ_5 , esto implica una especificación robusta $\delta_5(\omega)$ de atenuación. Es decir, la incertidumbre en lazo cerrado $|T_d|/|T_e|$, que siempre es mayor que 1 según (6.46), debe reducirse respecto a la de lazo abierto. Matemáticamente la reducción en LC de la sensibilidad a la incertidumbre en LA podría expresarse como:

$$\frac{|T_d|}{|T_e|} < \delta_5 < 1 < \frac{p_d}{p_e} \quad (6.50)$$

Paralelamente, cuando la especificación robusta $\delta_5(\omega)$ permite que en el lazo cerrado la incertidumbre sea mayor que la de lazo abierto el objetivo es de amplificación de sensibilidad. La permisividad en el aumento de la sensibilidad en LC respecto a la incertidumbre en LA se expresa:

$$\frac{p_d}{p_e} < \frac{|T_d|}{|T_e|} < \delta_5 < 1 \quad (6.51)$$

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente de que dadas dos plantas, p_1 y p_2 , con $p_1>p_2$, constituyen iteraciones diferentes el supuesto $p_d=p_1$, $p_e=p_2$ ($p_d>p_e$) y el supuesto $p_d=p_2$, $p_e=p_1$ ($p_d<p_e$), se puede concluir:

- (i) Si la expresión (6.50) se cumple para *algún* par de plantas p_1 , p_2 , en la plantilla ω , **el control de seguimiento de señal pretende en la frecuencia ω reducir la sensibilidad en LC a la incertidumbre en LA.** Éste es el objetivo habitual en las frecuencias donde se quiere gobernar el seguimiento de señales a pesar de la incertidumbre, es decir, en las bajas y medias frecuencias.

(ii) Si por el contrario, la desigualdad (6.51) se cumple para *todo* par de plantas p_1, p_2 (tanto en el supuesto $p_d=p_1, p_e=p_2$ como en el $p_d=p_2, p_e=p_1$) en la plantilla ω_i , **el objetivo de control permite en la frecuencia ω_i aumentar la sensibilidad en LC a la incertidumbre en LA**. Esto último es habitual en altas frecuencias donde el coste de la realimentación y la estabilidad sacrifican un seguimiento de señales agresivo. Así mismo, no tendría sentido pretender gobernar un sistema físico más allá de las frecuencias donde el propio modelo empleado en el diseño no se corresponde con el sistema físico real.

El problema de seguimiento 2-DOF, debe resolver $g_1 \angle \theta$ y/o $g_2 \angle \theta$ en (6.49) donde las magnitudes g_1 y g_2 dependen de hasta cinco parámetros: $p_d, p_e, \theta_d, \theta_e$ y δ_5 . Dada la complejidad del estudio éste se abordará en dos pasos. Primeramente se considera la incertidumbre horizontal nula, es decir, $\Delta\theta=0, \theta_d=\theta_e=\theta$, y suponiendo para mayor simplicidad $\theta=0^\circ$ la ecuación $g_{12} \angle \theta$ en (6.49) depende solo de tres variables, los módulos p_d, p_e (incertidumbre en ganancia, Δp) y la tolerancia de especificación δ_5 . En un segundo paso, se considerará nula la incertidumbre vertical, es decir, $\Delta p=0, p_d=p_e=p$, y para mayor simplicidad $p=1$. Con ello, $g_{12} \angle \theta$ en (6.49) depende de nuevo de tan sólo tres variables, las fases θ_d, θ_e (incertidumbre en fase, $\Delta\theta$) y la tolerancia de especificación δ_5 . Dada la importancia relativa de este problema de control, se incluirán tan sólo las principales conclusiones de ambos estudios.

6.2.2 TIPOLOGÍAS DE CONTORNOS. INCERTIDUMBRE SÓLO EN MAGNITUD

Para simplificar el análisis del problema del servo, en la frecuencia ω_i se considerará nula la incertidumbre en fase, $\Delta\theta$, definida en (3.19) para la plantilla $\Im P(j\omega_i)=\{p \angle \theta\}$. Esto equivale a decir que todas las plantas en $\Im P(j\omega_i)$ tienen la misma fase, es decir, $\theta_d=\theta_e=\theta$, y por tanto, $\Delta\theta=0$. Para mayor simplicidad⁹ se supone $\theta=0^\circ$ con lo que la ecuación $g_{12} \angle \phi$ en (6.49) se reduce a:

$$g_{1,2} = \frac{1}{p_e p_d \left(1 - \frac{1}{\delta_5^2}\right)} \cdot \left\{ - \left(p_e \cos \phi - \frac{p_d}{\delta_5^2} \cos \phi \right) \mp \sqrt{\left(p_e \cos \phi - \frac{p_d}{\delta_5^2} \cos \phi \right)^2 - \left(1 - \frac{1}{\delta_5^2}\right) \left(p_e^2 - \frac{p_d^2}{\delta_5^2} \right)} \right\} \quad (6.52)$$

⁹ En adelante, las conclusiones que hagan referencia a ϕ , y dado un θ genérico distinto de 0° , serán igualmente válidas para las fases $\phi+\theta$ en lugar de únicamente para los ángulos ϕ .

Las conclusiones sobre $g_{12} \angle \phi$ según se especifica posteriormente, serán igualmente válidas para el caso donde siendo $\Delta\theta=0$, la fase constante es cualquiera, $\theta_d=\theta_e=\theta$, es decir, $\theta \neq 0^\circ$. La ecuación (6.52) se reorganiza como sigue para el estudio de las tipologías de contornos en función de la especificación robusta δ_5 y de la incertidumbre en ganancia a través de los módulos p_d y p_e :

$$g_{1,2} = - \underbrace{\frac{\delta_5^2 p_e - p_d}{p_d p_e (\delta_5^2 - 1)}}_{t_1} \cos \phi \mp \sqrt{\underbrace{\frac{(\delta_5^2 p_e - p_d)^2}{p_d^2 p_e^2 (\delta_5^2 - 1)^2}}_{t_{21}} \cos^2 \phi - \underbrace{\frac{\delta_5^2 p_e^2 - p_d^2}{p_d^2 p_e^2 (\delta_5^2 - 1)}}_{t_{22}}}$$

(6.53)

En el seguimiento de señales se demostró que $\delta_5(\omega) \geq 1$ según (6.45), por lo que su intervalo de variación se establece como $1 \leq \delta_5(\omega) < +\infty$. A una frecuencia dada se tiene un valor de especificación robusta constante, $\delta_5(\omega) = \delta_5$. Entonces en (6.53) el parámetro variable será la incertidumbre en magnitud. Dado que QFT trabaja con magnitudes en decibelios (dB), la incertidumbre en ganancia expresada como diferencia de módulos $|p_d - p_e|$ (magnitudes lineales) se transforma en un cociente de éstos p_d/p_e , que se representará como $Lm(p_d/p_e)$ [dB] sobre el diagrama de Nichols. Los módulos toman valores positivos $p_d > 0$ y $p_e > 0$. Y para todo par de plantas de módulos p_{max} y p_{min} , tal que $p_{max} > p_{min}$, se obtendrán soluciones diferentes en (6.53) para $p_d = p_{max}$ y $p_e = p_{min}$ ($p_d/p_e > 1$) y para $p_d = p_{min}$ y $p_e = p_{max}$ ($p_d/p_e < 1$). Teniendo esto en cuenta, en función de los valores alcanzados por la incertidumbre en magnitud definida por un par de plantas, p_d/p_e , con relación a la tolerancia de especificación, δ_5 , se presentarán contornos g_{12} en (6.53) de distinta naturaleza. Se resumen en la Figura 6-25 y se estudian a continuación.

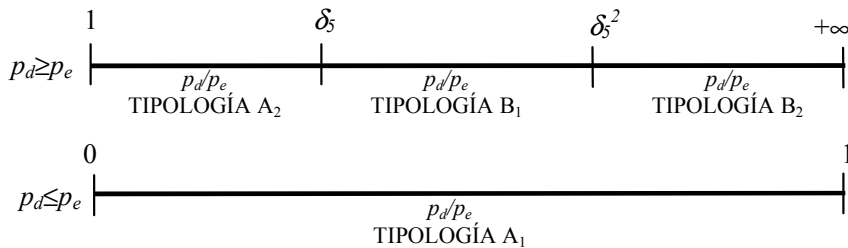


Figura 6-25: Tipologías de contornos para la incertidumbre en magnitud p_d/p_e y la especificación δ_5 , con fase θ constante.

6.2.2.1 Tipologías A (A₁ y A₂)

Como, los módulos siempre representan números positivos, $p_d > 0$ y $p_e > 0$, y según (6.45) el valor de especificación siempre es mayor que la unidad, $\delta_5 > 1$, en el caso bajo estudio donde $0 < p_d/p_e \leq \delta_5$ (véase Figura 6-25) se cumplirá:

$$p_d \leq p_e \delta_5 \Rightarrow p_d^2 \leq p_e^2 \delta_5^2 \quad (6.54)$$

$$p_d \leq p_e \delta_5^2 \quad (6.55)$$

Nótese que $0 < p_d/p_e \leq \delta_5$ se satisface: para cualquier pareja p_d, p_e siempre que $p_d \leq p_e$ ya que $\delta_5 > 1$, y tan sólo para algunos $p_d \geq p_e$ (los que satisfacen $1 < p_d/p_e \leq \delta_5$).

Analizando (6.53) junto con las desigualdades (6.54) y (6.55) se satisfacen las siguientes afirmaciones (i) a (vii) para todo p_d, p_e y δ_5 que identifiquen un caso $0 < p_d/p_e \leq \delta_5$.

- (i) Según (6.55), resulta $t'_1 \leq 0$ y real. El término t_1 es función del ángulo ϕ , $t_1 = t'_1 \cos \phi$, siendo real y positivo, $t_1 \geq 0$, en $\phi \in [-270^\circ, -90^\circ]$; y real y negativo, $t_1 < 0$, en $\phi \in \{[-360^\circ, -270^\circ) \cup (-90^\circ, 0^\circ]\}$.
- (ii) Por contener términos cuadráticos, siempre $t'_{21} \geq 0$. Paralelamente, el término t_{21} que es función de la fase ϕ siempre es positivo: $t_{21} = t'_{21} \cos^2 \phi \geq 0$ para todo ϕ , $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$. Además $t_{21} = t_1^2$, luego también $t'_{21} = t_1^2$.
- (iii) Teniendo en cuenta (6.54), resulta $t_{22} \leq 0$. No dependiendo t_{22} de la fase ϕ , este término significa un desplazamiento negativo (hacia abajo) de la función cosenoidal cuadrática t_{21} .
- (iv) Por tanto, de acuerdo a (ii) y (iii), $t_2 = \sqrt{(t_{21} + t_{22})}$ resultará ser real cuando, $t_{21} \geq |t_{22}|$. Ambos términos se igualan, es decir $t_{21} = -t_{22}$, en las fases ϕ_s donde:

$$\cos^2 \phi_s = \frac{(\delta_5^2 - 1)(\delta_5^2 p_e^2 - p_d^2)}{(\delta_5^2 p_e - p_d)^2} \quad (6.56)$$

Al ser la función coseno cuadrado periódica de periodo π , en la ecuación (6.56) existirán infinitas soluciones ϕ_s de entre las que se seleccionarán las pertenecientes al intervalo angular de diseño en QFT: $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$. Tomando ε el valor angular positivo mínimo de ϕ_s que cumple (6.56), es decir, el comprendido entre $[0, 90^\circ]$, el conjunto de soluciones válidas, $\phi_s \in [-360^\circ, 0^\circ]$, en (6.56) serán:

$$\Phi_s = \{-360^\circ + \varepsilon, -180^\circ - \varepsilon, -180^\circ + \varepsilon, -\varepsilon\} \quad (6.57)$$

Y finalmente se cumplirá que $t_{21} \geq |t_{22}|$ y, por tanto, t_2 es real en las fases:

$$\phi \in \{[-360^\circ, -360^\circ + \varepsilon] \cup [-180^\circ - \varepsilon, -180^\circ + \varepsilon] \cup [-\varepsilon, 0^\circ]\} \quad (6.58)$$

(v) Como $t_{21} = t_1^2$, y $t_{22} \leq 0$, en las fases donde t_2 sea real, se cumplirá: $|t_1| > t_2$.

(vi) De acuerdo a (v), en el conjunto intersección de fases, donde $t_1 \geq 0$ según (i) y t_2 sea real según (6.58) en (iv), las dos soluciones $g_1 = t_1 - t_2$ y $g_2 = t_1 + t_2$ resultarán reales y positivas. Dichas fases intersección responden a: $\phi \in [-180^\circ - \varepsilon, -180^\circ + \varepsilon]$, siendo ε el valor angular positivo, mínimo, y menor de 90° de ϕ_s en (6.56). Por tanto, $0^\circ \leq \varepsilon \leq 90^\circ$. Cuando $\varepsilon = \phi_s = 0^\circ$, existe un único valor real positivo $g_1 \angle \phi = g_2 \angle \phi$, $\phi = -180^\circ$. Y cuando $\varepsilon = \phi_s = 90^\circ$, g_1 y g_2 toman valores reales y positivos en todo $\phi \in [-270^\circ, -90^\circ]$, siendo $g_1 < g_2$. Para el caso genérico con $\theta_d = \theta_e = \theta$ con $\theta \neq 0^\circ$ las conclusiones sobre ϕ son directamente aplicables a $\phi + \theta$. En resumen, el intervalo de fases solución, de manera similar a otros problemas de control con estas particularidades, se define:

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon], \\ \varepsilon &= \frac{180^\circ}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{(\delta_5^2 - 1)(\delta_5^2 p_e^2 - p_d^2)}}{\delta_5^2 p_e - p_d} \text{ [}^\circ\text{]}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 90^\circ \end{aligned} \quad (6.59)$$

Otra propiedad de dichos contornos $g_1 \angle \phi$ y $g_2 \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$, $\varepsilon \leq 90^\circ$, es que son simétricos respecto a un eje horizontal de altura g_{h12} :

$$g_{h12} = \sqrt{|t_{22}|} = \sqrt{\frac{\delta_5^2 p_e^2 - p_d^2}{p_d^2 p_e^2 (\delta_5^2 - 1)}} \quad (6.60)$$

(vii) Por el contrario, en el conjunto intersección de fases donde $t_1 < 0$ según (i), y t_2 sea real según (iv), las dos soluciones g_{12} serán reales negativas, es decir en $\phi \in \{[-360^\circ, -360^\circ + \varepsilon] \cup [-\varepsilon, 0^\circ]\}$. En el resto de fases, donde $t_1 < 0$ y t_2 sea complejo, las soluciones g_{12} serán complejas, es decir, en $\phi \in \{(-360^\circ + \varepsilon, -180^\circ - \varepsilon) \cup (-180^\circ + \varepsilon, -\varepsilon)\}$. Todas estas soluciones en (vii) al no ser reales y positivas, no darán lugar a contornos que expresen necesidades de control $g \angle \phi$.

Todos los resultados en (i) a (vii) para $\theta_d = \theta_e = \theta = 0^\circ$ son directamente aplicables al caso genérico con $\theta_d = \theta_e = \theta$ y $\theta \neq 0^\circ$, sin más que sustituir la fase ϕ por $\phi + \theta$.

Conclusión Contornos Tipología A: $p_d/p_e \leq \delta_5$, $\theta_d = \theta_e = \theta$, con $p_d \leq p_e$ (Tipología A₁) y con $p_d \geq p_e$ (Tipología A₂)

Se ha demostrado que para todo par de plantas, $p_d \angle \theta_d$ y $p_e \angle \theta_e$ que satisfagan $0 < p_d/p_e \leq \delta_5$ y $\theta_d = \theta_e = \theta$, se dará un contorno simple

doblevaluado o de tipología A: $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta, \theta]$. Las magnitudes g_1 y g_2 se definen en (6.49) y el intervalo de fases donde existen contornos, Φ_{12} , en (6.59). El contorno doblevaluado ha de ser satisfecho por el controlador $G(j\omega) = g \angle \phi$ tal que $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$ y $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$ con el fin de cumplir la especificación robusta $|T_5(j\omega)/F(j\omega)| = |L/(1+L)| \leq \delta_5(\omega)$. Este supuesto, $0 < p_d/p_e \leq \delta_5$, se satisface: (a) para todas las plantas cuyos módulos cumplen $p_d \leq p_e$ (intervalo $0 < p_d/p_e \leq 1$), denominándose sus contornos de tipología A_1 ; (b) para ciertas plantas con $p_d \geq p_e$ (las del intervalo $1 < p_d/p_e \leq \delta_5$), a cuyos contornos denominaremos de tipología A_2 . La Figura 6-26 ilustra estas conclusiones.

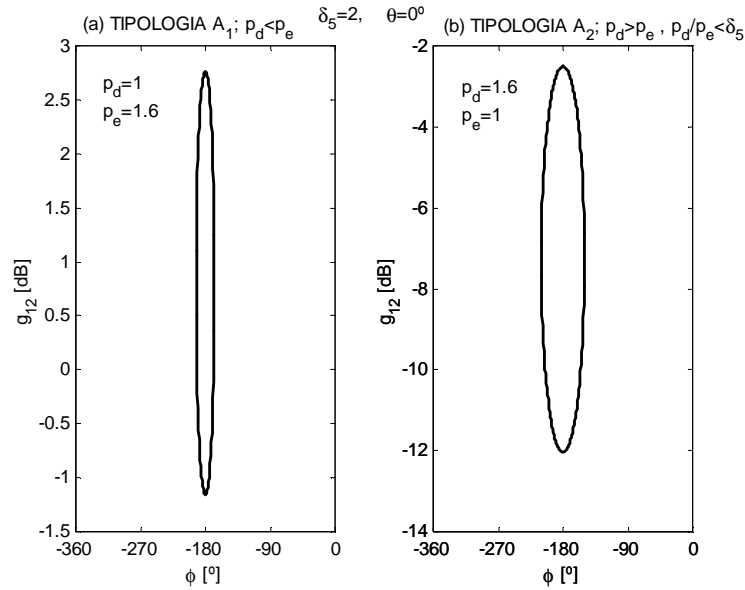


Figura 6-26: Contornos simples de tipología A: (a) tipología A_1 (b) tipología A_2

6.2.2.2 Tipología B_1

Como $\delta_5 > 1$ según (6.45), este supuesto $\delta_5 \leq p_d/p_e \leq \delta_5^2$ (véase Figura 6-25) sólo es posible para algunas de las plantas que satisfacen $p_d \geq p_e$. En este caso se cumple:

$$p_d \geq p_e \delta_5 \Rightarrow p_d^2 \geq p_e^2 \delta_5^2 \tag{6.61}$$

$$p_d \leq p_e \delta_5^2 \tag{6.62}$$

Nótese que la desigualdad (6.61) se cumplía en sentido contrario en las tipologías A. De acuerdo a (6.61) y (6.62), se satisfacen las siguientes

afirmaciones (i) a (vii) para todo p_d , p_e y δ_5 que identifiquen un caso $\delta_5 \leq p_d/p_e \leq \delta_5^2$ en (6.53). Véase la Figura 6-27.

- (i) Según (6.62), resulta $t_1 \leq 0$ y real. El término t_1 es función del ángulo ϕ , $t_1 = t_1' \cos \phi$, siendo real y positivo, $t_1 \geq 0$, en $\phi \in [-270^\circ, -90^\circ]$; y real y negativo, $t_1 < 0$, en $\phi \in \{[-360^\circ, -270^\circ] \cup (-90^\circ, 0^\circ]\}$.
- (ii) Por contener términos cuadráticos, siempre $t_2 \geq 0$. Paralelamente, el término t_{21} que es función de la fase ϕ siempre es positivo: $t_{21} = t_2' \cos^2 \phi \geq 0$ para todo ϕ , $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$. Además $t_{21} = t_1'^2$, luego también $t_2' = t_1'^2$.
- (iii) Teniendo en cuenta (6.61), siempre resulta $t_{22} \geq 0$. No dependiendo t_{22} de la fase ϕ , este término significa un desplazamiento vertical positivo de la función cosenoidal cuadrática t_{21} .
- (iv) Por tanto, de acuerdo a (ii) y (iii), se tiene $t_{21} + t_{22} \geq 0$, y esto implica que $t_2 = \sqrt{t_{21} + t_{22}}$ resultará siempre real, es decir, para todo $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$. Y también $t_2 \geq 0$, incluyendo el signo $-/+$ de la raíz cuadrada al obtenerse dos soluciones $g_1 = t_1 - t_2$ y $g_2 = t_1 + t_2$.
- (v) Como $\sqrt{t_{21}} = t_1$, y $t_{22} \geq 0$, se cumplirá: $t_2 > |t_1|$.
- (vi) De acuerdo a (v), la solución $g_1 = t_1 - t_2$ será negativa y real para todo $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$, independientemente del signo de t_1 . Luego no dará lugar a contornos para el controlador $g < \phi$.
- (vii) Por el contrario, siguiendo (iv) y (v), $g_2 = t_1 + t_2$ resultará real positiva para todo $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$. Como $t_2 \geq 0$, en las fases donde $t_1 \geq 0$ según (i), resultará $g_2 = |t_1| + t_2 \geq 0$, sumándose los efectos de ambos términos, y por tanto, alcanzando g_2 sus valores máximos; ver $\phi \in [-270^\circ, -90^\circ]$ en la Figura 6-27. Sin embargo, en las fases donde $t_1 < 0$, se tendrá $g_2 = -|t_1| + t_2 \geq 0$, siendo contrapuestos ambos términos, y por tanto, g_2 tomará sus valores mínimos; ver fases $\phi \in \{[-360^\circ, -270^\circ] \cup [-90^\circ, 0^\circ]\}$ en la Figura 6-27. El eje horizontal de altura g_{h2} donde el término t_1 cambia de signo (en g_2 se suma o resta a t_2) resulta ser g_{h2} :

$$g_{h2} = \sqrt{t_{22}} = \sqrt{\frac{p_d^2 - \delta_5^2 p_e^2}{p_d^2 p_e^2 (\delta_5^2 - 1)}} \quad (6.63)$$

Todos los resultados en (i) a (vii) para $\theta_d = \theta_e = \theta = 0^\circ$ son directamente aplicables al caso genérico con $\theta_d = \theta_e = \theta$ y $\theta \neq 0^\circ$, sin más que sustituir la fase ϕ por $\phi + \theta$.

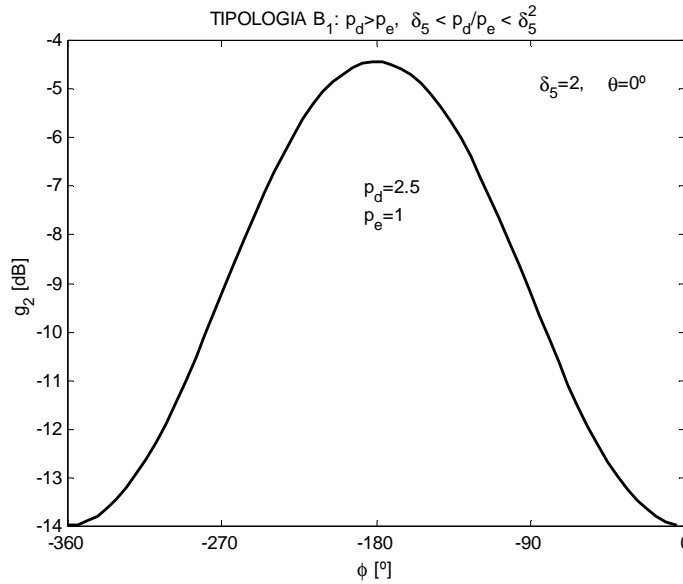


Figura 6-27: Contornos simples de tipología B₁

Conclusión Contornos Tipología B₁: $\delta_5 \leq p_d/p_e \leq \delta_5^2$, $\theta_d = \theta_e = \theta$

Para todo par de plantas, $p_d \angle \theta_d$ y $p_e \angle \theta_e$ que satisfagan $\delta_5 \leq p_d/p_e \leq \delta_5^2$, $\theta_d = \theta_e = \theta$, se dará un contorno simple monovaluado superior o de tipología B₁: $g_2 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. Sólo la magnitud g_2 , definida en (6.49b) con $\theta_d = \theta_e = \theta$, toma valores reales y positivos en todas las fases de diseño $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, siendo máxima en $\phi = -180^\circ - \theta$ y monótona decreciente hacia los extremos de intervalo, $-360^\circ - \theta$ y $0^\circ - \theta$. El contorno simple monovaluado superior ha de ser satisfecho por el controlador $G(j\omega) = g \angle \phi$ tal que $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$ con el fin de cumplir la especificación robusta $|T_s(j\omega)/F(j\omega)| = |L/1+L| \leq \delta_5(\omega)$.

6.2.2.3 Tipología B₂

Como $\delta_5 > 1$ según (6.45), este supuesto $\delta_5^2 \leq p_d/p_e < +\infty$ (véase Figura 6-25) sólo es posible para algunas de las plantas que satisfacen $p_d \geq p_e$. En este caso se cumple:

$$p_d \geq p_e \delta_5 \Rightarrow p_d^2 \geq p_e^2 \delta_5^2 \tag{6.64}$$

$$p_d \geq p_e \delta_5^2 \tag{6.65}$$

Nótese que la desigualdad (6.64) es contraria al caso de tipologías A en (6.54) e igual al supuesto de tipología B₁ en (6.61). Y también, que la desigualdad (6.65) se cumple en sentido contrario que para los dos casos en

(6.55) y (6.62). De acuerdo a (6.64) y (6.65), se satisfacen las siguientes afirmaciones (i) a (vii) para todo p_d , p_e y δ_5 que identifiquen un caso $\delta_5^2 \leq p_d p_e < +\infty$ en (6.53). La Figura 6-28 ilustra estas conclusiones.

- (i) Según (6.65), resulta $t'_1 \geq 0$ y real. El término t_1 es función del ángulo ϕ , $t_1 = t'_1 \cos \phi$, siendo real y positivo, $t_1 \geq 0$, en $\phi \in \{-360^\circ, -270^\circ\} \cup \{-90^\circ, 0^\circ\}$; y real y negativo, $t_1 < 0$, en $\phi \in (-270^\circ, -90^\circ)$.
- (ii) Por contener términos cuadráticos, siempre $t'_{21} \geq 0$. Paralelamente, el término t_{21} que es función de la fase ϕ siempre es positivo: $t_{21} = t'_{21} \cos^2 \phi \geq 0$ para todo ϕ , $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$. Además $t_{21} = t_1^2$, luego también $t'_{21} = t_1^2$.
- (iii) Teniendo en cuenta (6.64), siempre resulta $t_{22} \geq 0$. No dependiendo t_{22} de la fase ϕ , este término significa un desplazamiento vertical positivo de la función cosenoidal cuadrática t_{21} .
- (iv) Por tanto, de acuerdo a (ii) y (iii), se tiene $t_{21} + t_{22} \geq 0$, y esto implica que $t_2 = \sqrt{(t_{21} + t_{22})}$ resultará siempre real, es decir, para todo $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$. Y también $t_2 \geq 0$, incluyendo el signo $-/+$ de la raíz cuadrada al obtenerse dos soluciones $g_1 = t_1 - t_2$ y $g_2 = t_1 + t_2$.
- (v) Como $+\sqrt{t_{21}} = |t_1|$ y $t_{22} \geq 0$, se cumplirá: $t_2 > |t_1|$.
- (vi) De acuerdo a (v), la solución $g_1 = t_1 - t_2$ será negativa y real para todo $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$, independientemente del signo de t_1 . Luego, no dará lugar a contornos para el controlador $g < \phi$.
- (vii) Por el contrario, siguiendo (iv) y (v), $g_2 = t_1 + t_2$ resultará real positiva para todo $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$. Siendo $t_2 \geq 0$, en las fases donde $t_1 \geq 0$ según (i), resultará $g_2 = |t_1| + t_2 \geq 0$, sumándose los efectos de ambos términos, y por tanto, alcanzando g_2 sus valores máximos; ver Figura 6-28 para las fases $\phi \in \{-360^\circ, -270^\circ\} \cup \{-90^\circ, 0^\circ\}$. Sin embargo, en las fases donde $t_1 < 0$, se tendrá $g_2 = -|t_1| + t_2 \geq 0$, siendo contrapuestos ambos términos, y por tanto, g_2 tomará sus valores mínimos; ver Figura 6-28 en fases $\phi \in (-270^\circ, -90^\circ)$. El eje horizontal de altura $g_{h,2}$ donde el término t_1 cambia de signo (en g_2 se suma o resta a t_2) resulta ser:

$$g_{h,2} = \sqrt{t_{22}} = \sqrt{\frac{p_d^2 - \delta_5^2 p_e^2}{p_d^2 p_e^2 (\delta_5^2 - 1)}} \quad (6.66)$$

Para el ejemplo de la Figura 6-28 aplicando (6.66), resulta $g_{h,2} = 0.56$ (-5dB).

Todos los resultados en (i) a (vii) para $\theta_d = \theta_e = \theta = 0^\circ$ son directamente aplicables al caso genérico con $\theta_d = \theta_e = \theta$ y $\theta \neq 0^\circ$, sin más que sustituir la fase ϕ por $\phi + \theta$.

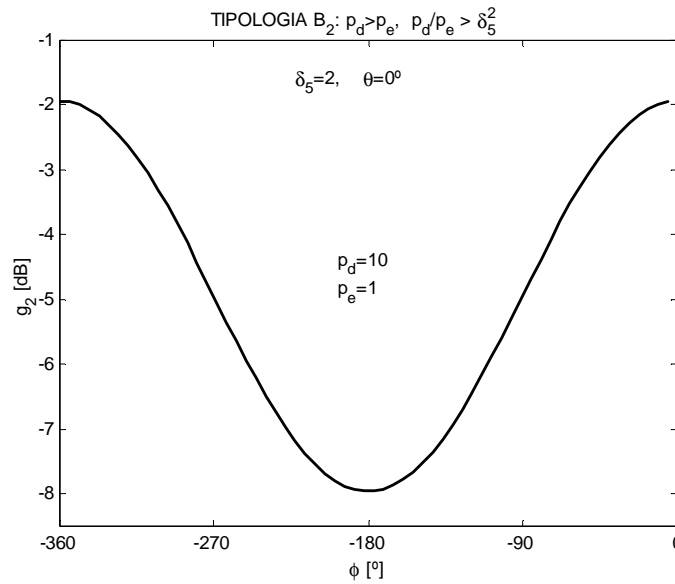


Figura 6-28: Contornos simples de tipología B₂

Conclusión Tipología B₂: δ₅ ≤ δ₅² ≤ p_d/p_e, θ_d=θ_e=0°

Para todo par de plantas, p_d∠θ_d y p_e∠θ_e, que satisfagan δ₅² ≤ p_d/p_e, θ_d=θ_e=0°, se dará un contorno simple monovaluado superior de tipología B₂: g₂∠φ, φ ∈ Φ=[-360°, 0°]. Sólo la magnitud g₂, definida en (6.49b) con θ_d=θ_e=θ, toma valores reales y positivos en toda las fases de diseño, siendo máxima en los extremos de intervalo, -360°-θ y 0°-θ, y monótona decreciente hacia -180°-θ, donde toma el valor mínimo. El contorno simple monovaluado superior ha de ser satisfecho por el controlador G(jω)=g∠φ tal que g∠φ ≥ g₂∠φ con el fin de cumplir la especificación robusta |T_s(jω)/F(jω)|=|L/1+L| ≤ δ₅(ω).

* * *

La curva g₂∠φ, φ ∈ Φ=[-360°, 0°], en las tipologías B₁ y B₂ representa un contorno simple monovaluado superior (g∠φ ≥ g₂∠φ), pero su forma varía en Φ. De acuerdo a las conclusiones en (vii) se dividirá en dos tramos: g₂∠φ, φ ∈ Φ₂=(-270°-θ, -90°-θ) y g₂∠φ, φ ∈ Φ̄₂={[-360°-θ, -270°-θ] ∪ [-90°-θ, 0°-θ]}. Mientras que en la tipología B₁ la curva g₂∠φ alcanzaba sus máximos en Φ₂, en la tipología B₂ lo hace en Φ̄₂. Esto depende del intervalo donde se restan o suman, respectivamente, los términos t₂ y |t_l|.

6.2.2.4 Conclusión sobre Tipologías de Contornos

A frecuencia constante la especificación robusta era constante, $\delta_s(\omega) = \delta_s$, y mayor que la unidad, $\delta_s > 1$, según (6.45). Se tiene también una plantilla con sólo incertidumbre en ganancia, $\mathcal{S}P(j\omega) = \{p\} \angle \theta$. Supuestas $p_{max} \angle \theta$ y $p_{min} \angle \theta$ dos plantas en $\mathcal{S}P$ que satisfacen $p_{max} > p_{min}$ el contorno que representa la especificación robusta $|T_S/F| < \delta_s$, se calcula en al menos dos iteraciones, que resuelven (6.48) como sigue:

(i) Tomar $p_d = p_{max}$ y $p_e = p_{min}$. Como $p_d > p_e$, en función del valor relativo entre $p_d/p_e > 1$ y δ_s se calcula el contorno. Este resultará según la Figura 6-25 en uno de los siguientes formatos:

- Contorno simple doblevaluado de tipología A₂: $g_{12} \angle \phi_{A_2}$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$.
- Contorno simple monovaluado superior de tipología B₁: $g_2 \angle \phi_{B_1}$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$.
- Contorno simple monovaluado superior de tipología B₂: $g_2 \angle \phi_{B_2}$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$.

(ii) Tomar $p_d = p_{min}$ y $p_e = p_{max}$. Como ahora $p_d < p_e$, de acuerdo a la Figura 6-25 se calcula el contorno doblevaluado de tipología A₁: $g_{12} \angle \phi_{A_1}$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$.

Las magnitudes g_1 y/o g_2 se calculan tanto en (i) como en (ii) según (6.49) y ε según (6.59).

Intersectando el contorno en (i) con el contorno en (ii), la curva superior del contorno doblevaluado de tipología A₁ en (ii), $g_2 \angle \phi_{A_1}$, será la más desfavorable en un cierto intervalo angular $\mp \varepsilon_{|A_1}$ alrededor de $-180^\circ - \theta$. $\phi \in \Phi_2 = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon_{|A_1}]$. Para el resto de fases $\phi \in \overline{\Phi}_2$, los contornos más desfavorables (mayor altura) siguen este orden: (a) $g_2 \angle \phi_{B_2}$, (b) $g_2 \angle \phi_{B_1}$, (c) $g_2 \angle \phi_{A_2}$. Si se presentase un caso (c), como $g_2 \angle \phi_{A_2}$ y $g_2 \angle \phi_{A_1}$ no ocupan todo el intervalo angular (tipologías A) habrá que tener en cuenta también un contorno inferior. El más desfavorable lo aporta la tipología A₂, luego se tendrá también $g_1 \angle \phi_{A_2}$. En resumen, en los casos (a) y (b) el resultado final es una tipología B de contornos, $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, y en el caso (c) una tipología A de contornos $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon_T]$. Estos resultados se ilustran en la Figura 6-29, la Figura 6-30 y la Figura 6-31) y se resumen en la siguiente conclusión y ecuaciones.

Conclusión sobre los contornos en el problema del servo (supuesta fase constante)

Dadas en ω_i una especificación robusta $\delta_s(\omega_i)=\delta_s>1$ y una plantilla sin incertidumbre en fase $\Im P(j\omega_i)=\{p\}\angle\theta$, los contornos más desfavorables los configuran las plantas de los extremos: $p_{max}\angle\theta$ y $p_{min}\angle\theta$. Resultarán tres posibilidades diferentes de contornos:

- Si $\delta_s^2 \leq p_{max}/p_{min}$, resultará una tipología B de contornos calculada como sigue:

$$g_{SUP}\angle\phi, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]: \begin{cases} g_2\angle\phi|_{A_1}, \phi \in \Phi_2 = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon] \\ g_2\angle\phi|_{B_2}, \phi \in \bar{\Phi}_2 \end{cases} \quad (6.67)$$

Calculando con $\theta_d=\theta_e=\theta$: (i) $g_2\angle\phi|_{B_2}$ en (6.49b) para $p_d=p_{max}$ y $p_e=p_{min}$; (ii) $g_2\angle\phi|_{A_1}$ en (6.49b) y ε en (6.59) para $p_d=p_{min}$ y $p_e=p_{max}$. Véase Figura 6-29.

- Si $\delta_s \leq p_{max}/p_{min} \leq \delta_s^2$ resultará una tipología B de contornos que se calcula como:

$$g_{SUP}\angle\phi, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]: \begin{cases} g_2\angle\phi|_{A_1}, \phi \in \Phi_2 = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon] \\ g_2\angle\phi|_{B_1}, \phi \in \bar{\Phi}_2 \end{cases} \quad (6.68)$$

Calculando con $\theta_d=\theta_e=\theta$: (i) $g_2\angle\phi|_{B_1}$ en (6.49b) para $p_d=p_{max}$ y $p_e=p_{min}$; (ii) $g_2\angle\phi|_{A_1}$ en (6.49b) y ε en (6.59) para $p_d=p_{min}$ y $p_e=p_{max}$. Véase Figura 6-30.

- Si $p_{max}/p_{min} \leq \delta_s$, resultará una tipología A de contornos:

$$g_{INFSUP}\angle\phi, \phi \in \Phi_{IS} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon_T]: \begin{cases} g_{INF}\angle\phi = g_1\angle\phi|_{A_2}, \phi \in \Phi_{A_2} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon|_{A_2}] \\ g_{SUP}\angle\phi = \begin{cases} g_2\angle\phi|_{A_1}, \phi \in \Phi_{A_1} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon|_{A_1}] \\ g_2\angle\phi|_{A_2}, \phi \in \bar{\Phi}_{A_1} \\ \varepsilon_T = \varepsilon|_{A_2} \end{cases} \end{cases} \quad (6.69)$$

Calculando con $\theta_d=\theta_e=\theta$: (i) $g_{12}\angle\phi|_{A_2}$ y $\varepsilon|_{A_2}$, para $p_d=p_{max}$ y $p_e=p_{min}$ en (6.49) y (6.59); (ii) $g_2\angle\phi|_{A_1}$ y $\varepsilon|_{A_1}$, para $p_d=p_{min}$ y $p_e=p_{max}$ en (6.49) y (6.59). Véase Figura 6-31.

Cada uno de estos supuestos se ilustra seguidamente con un ejemplo. Supóngase la familia de plantas $\wp=\{P(s)=k/(s/a+1)\}$ que contiene un polo en $a=10$ y presenta tan sólo incertidumbre en su parámetro ganancia $k \in [1, 10]$. Se tomará un tamaño de discretización de 6 puntos logarítmicamente espaciados para k , resultando: $k^*=[1, 1.6, 2.5, 4, 6.3, 10]$. $P(s)$ es evaluada en la frecuencia $\omega_i=0.1\text{rad/s}$. La plantilla, $\Im P(j\omega_i)=\{p\}\angle\theta$, presentará fase

constante $\theta \approx 0^\circ$ y sólo incertidumbre en magnitud equivalente a $Lm k^*$. Prescindiendo de la fase, igual a 0° en todas las plantas, se toman las siguientes parejas de puntos, $p_{1,2}=\{1, 1.6\}$, $p_{1,3}=\{1, 2.5\}$, y $p_{1,6}=\{1, 10\}$. Tomando $\delta_5=2$, cada una de las combinaciones anteriores representa un supuesto diferente de los tres estudiados anteriormente: $p_{max}/p_{min} \leq \delta_5$ para la combinación $p_{1,2}$ que originará contornos A según (6.69) (véase la Figura 6-31); $\delta_5 \leq p_{max}/p_{min} \leq \delta_5^2$ para la combinación $p_{1,3}$ que originará contornos B según (6.68) (véase la Figura 6-30); y $\delta_5^2 \leq p_{max}/p_{min}$ para la combinación $p_{1,6}$ que originará contornos B según (6.67), véase la Figura 6-29. En las figuras anteriores además de verificarse la conformación de los contornos de acuerdo a (6.67), (6.68) y (6.69), puede comprobarse el incremento en agresividad (en magnitud y fase) de los contornos, cuando aumenta la incertidumbre, para especificación constante. Por ello, en el cálculo de los contornos y en una primera aproximación puede decirse que en un intervalo de incertidumbre $\{p\}$ bastaría considerar las plantas extremas, $p_{max} \angle \theta$ y $p_{min} \angle \theta$ para el cálculo de los contornos. A esta afirmación se le añadirán algunos matices tras un estudio riguroso de la influencia de la fase en la sección siguiente.

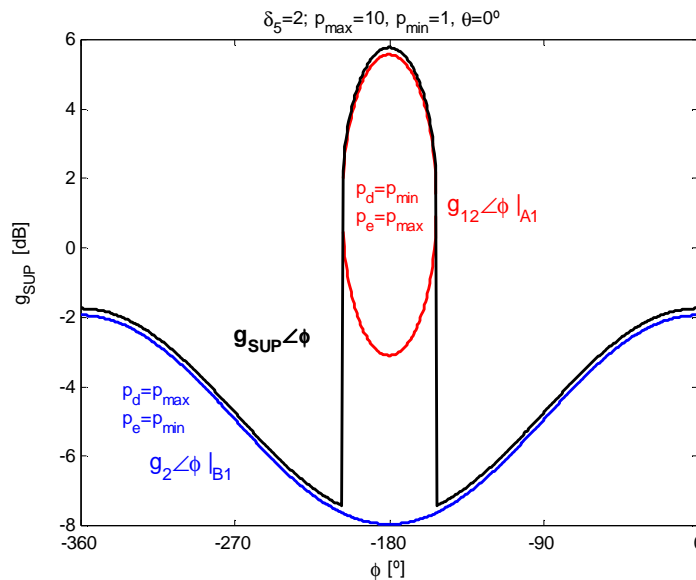


Figura 6-29: Contorno intersección tipo B, para tipologías simples A_1 y B_2 ($\delta_5^2 \leq p_{max}/p_{min}$)

Nótese que las tipologías B de contornos, $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi$, en el problema del servo tienen una forma diferente a las obtenidas en el rechazo de perturbaciones (véase Capítulo 5). No obstante, al ser igualmente contornos monovaluados superiores, en ambos problemas éstos ocupan toda la franja

angular, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, y deben satisfacerse de la misma forma: $g \angle \phi \geq g_{SUP} \angle \phi$.

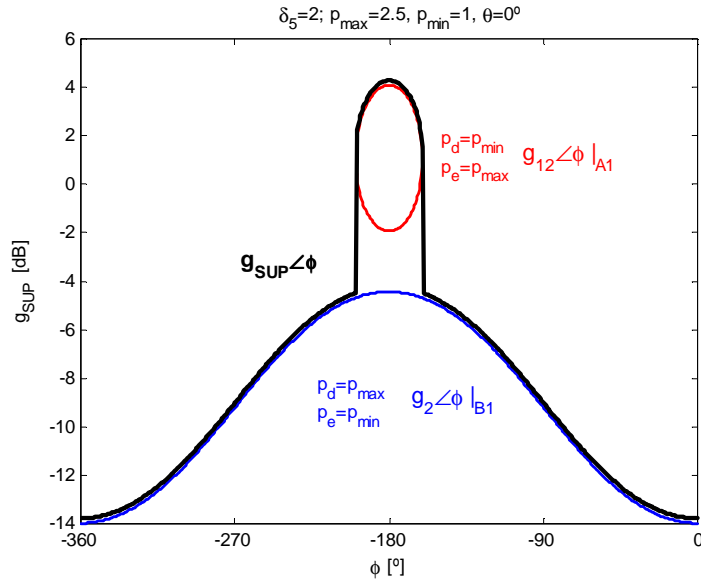


Figura 6-30: Contorno intersección tipo B, para tipologías simples A_1 y B_1 ($\delta_s^2 \leq p_{max}/p_{min}$)

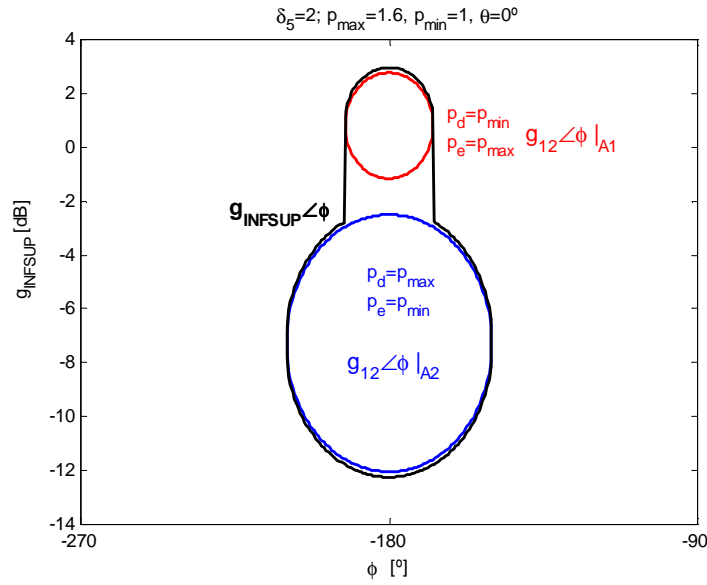


Figura 6-31: Contornos intersección tipo A, para tipologías simples A_1 y A_2 ($p_{max}/p_{min} \leq \delta_s$)

De la conclusión anterior sobre la tipología de contornos intersección en el problema del servo pueden extraerse las siguientes afirmaciones, que se describirán de forma más exhaustiva en las siguientes secciones:

- La incertidumbre en magnitud creciente con especificación constante (incremento en la relación p_{max}/p_{min} para $\delta_5(\omega_i)=\delta_5$) implica unos contornos más agresivos, en magnitud y en fase. De esta forma tenemos los contornos de tipología B en (6.67) que son más elevados que los de (6.68). Si la incertidumbre p_{max}/p_{min} disminuye mucho se tienen exclusivamente contornos de tipo A, que sólo ocupan parte del intervalo de diseño. Dentro de cada tipología, B o A, el incremento de incertidumbre p_{max}/p_{min} lógicamente hace más agresivo el contorno correspondiente.
- Una disminución de la especificación robusta $\delta_5(\omega_i)=\delta_5$ siendo $\delta_5>1$, con incertidumbre en magnitud p_{max}/p_{min} constante, implica contornos más agresivos en magnitud y fase. Nótese que si p_{max}/p_{min} es constante, al disminuir δ_5 desde $+\infty$ hasta 1, se darían primero contornos de tipología A en (6.69), luego de tipología B en (6.68) y finalmente, para los valores más pequeños de especificación, los contornos más agresivos de tipología B en (6.67). Dentro de cada tipología, la disminución de δ_5 agrava también los contornos.
- En bajas y medias frecuencias el máximo aprovechamiento de los beneficios de la realimentación (máxima reducción de sensibilidad, $\{L=GP\} \ll p_{max}/p_{min}$) exige tolerancias $\delta_5(\omega_f)$ muy cercanas a la unidad. Por ello, el caso más desfavorable y más importante es el primero, $\delta_5 \leq \delta_5^2 \leq p_{max}/p_{min}$, que originaba contornos de tipología B en (6.67). El aumento de $\delta_5(\omega_i)$ con la frecuencia es recomendable, e incluso imprescindible en las altas frecuencias (Horowitz y Sidi, 1972). Por ello, la tipología B en (6.68) suele aparecer en medias hacia altas frecuencias debido al aumento de $\delta_5(\omega_i)$, que deja un mayor margen entre éste valor y su cuadrado. En las altas frecuencias, donde los compromisos de la realimentación (fundamentalmente ancho de banda) exigen $\delta_5(\omega_{hf}) \geq p_{max}/p_{min}$, la tipología A resultante de contornos nunca es dominante respecto a los contornos A que procuran por la estabilidad y la limitación de ancho de banda del sistema. Por ello, aunque se defina $\delta_5(\omega_{hf})$ sus contornos no tienen ninguna trascendencia, obviándose los contornos de tipología A en (6.69) en muchos de los análisis a continuación expuestos.

En los siguientes apartados se describen de una forma más exhaustiva las conclusiones anteriores, centrándonos según las razones argumentadas en los contornos tipo B de (6.67). El primer paso será analizar la contribución de la incertidumbre en fase.

6.2.3 CONTRIBUCIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EN FASE

6.2.3.1 Influencia del parámetro θ

Considerándose los contornos de tipo B en (6.67), típicos de bajas y medias frecuencias en el problema del servo, los ejemplos ilustrativos sobre la contribución de la fase completarán las conclusiones hasta el momento sobre estos contornos.

En el apartado anterior se supuso una fase constante igual a $\theta \approx 0^\circ$. Se analizarán ahora otras fases de diseño. Como ya se ha demostrado en otros problemas anteriores la fase $\theta \neq 0^\circ$ desplaza los contornos sobre el intervalo de fases $\Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ un ángulo $-\theta$. Para la familia de plantas ejemplo de la sección anterior, $\wp = \{P(s) = k/(s/a+1)\}$ con $k \in [1, 10]$, supóngase ahora que también existe incertidumbre en el polo: $a \in [1, 10]$. Evaluada dicha planta en la frecuencia $\omega_f = 0.2$ rad/s la incertidumbre frecuencial viene representada por la plantilla de la Figura 6-32. El gráfico (a) utiliza magnitudes lineales y el gráfico (b) magnitudes logarítmicas.

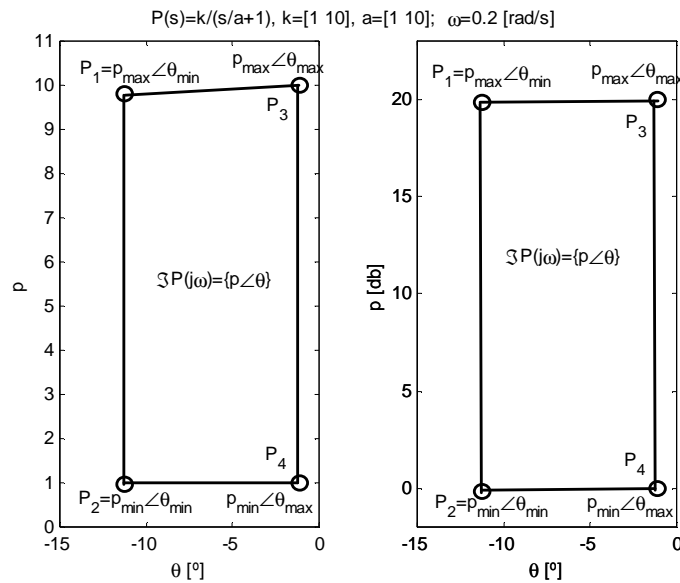


Figura 6-32: Plantilla ejemplo con incertidumbre en magnitud y ganancia

Dividiremos dicha plantilla en dos, su perfil derecho y el izquierdo, tratándose ambos de plantillas con sólo incertidumbre en magnitud, como las de la sección anterior. El perfil izquierdo lo forman las dos plantas discretas de los extremos: $k^* = \{1, 10\}$ para $a^* = 10$, dando la plantilla $\Im P_{12}$. Y el perfil derecho $\Im P_{34}$ lo constituyen las otras dos plantas de los vértices, $k^* = \{1, 10\}$,

para $a^*=1$. Los valores discretos de dichas plantilla según la Figura 6-32 resultan: $\mathfrak{S}P_{12}=\{p\}\angle\theta=\{p_{max}\angle\theta_{min}, p_{min}\angle\theta_{min}\}$, con $p_{max}=10$, $p_{min}=1$, $\theta_{min}\approx-11^\circ$. Y $\mathfrak{S}P_{34}=\{p\}\angle\theta=\{p_{max}\angle\theta_{max}, p_{min}\angle\theta_{max}\}$, con $p_{max}=10$, $p_{min}=1$, $\theta_{max}\approx-1^\circ$. La especificación robusta de reducción de sensibilidad utilizada será $\delta_5(\omega_f)=1.1$. Siguiendo el procedimiento de conformación de contornos para plantillas con sólo incertidumbre en magnitud (véase sección anterior), se tendrán unos contornos de tipología B de acuerdo a (6.67) como los de la Figura 6-33.

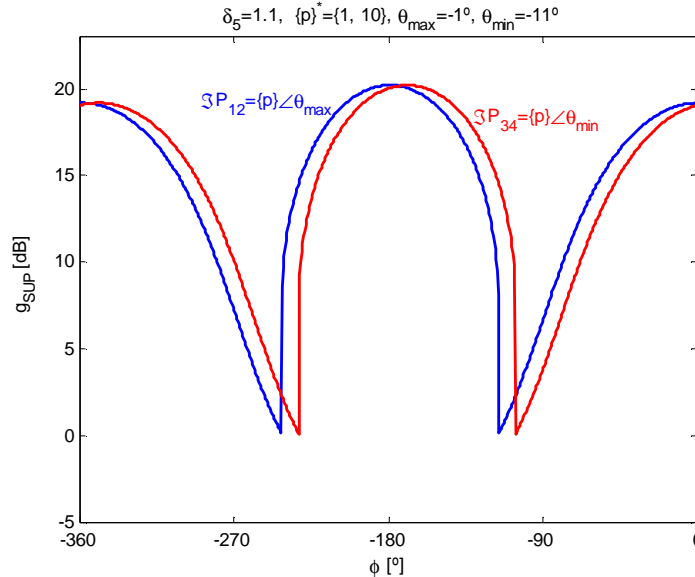


Figura 6-33: Contornos considerando perfil izquierdo y derecho de plantilla ejemplo

Como era de esperar los contornos para el perfil derecho de la plantilla, $\mathfrak{S}P_{12}=\{p\}\angle\theta\approx-1^\circ$, aparecen desplazados -10° (línea de trazo azul) con respecto a los que corresponden (línea de trazo rojo) al perfil izquierdo de la plantilla, $\mathfrak{S}P_{34}=\{p\}\angle\theta\approx-11^\circ$. La intersección de ambos contornos, $g_{SUP}\angle\phi$, $\phi\in\Phi=[-360^\circ, 0^\circ]$ definidos cada uno según (6.67), no siempre es suficiente en la zona donde el contorno se hace mínimo (extremos del intervalo Φ_2 en (6.67)). La falta de precisión en esta zona no reside en el tamaño de discretización escogidos en el perfil superior e inferior, que en el ejemplo ha sido de tan sólo dos plantas. Como el problema del servo es un problema doblevaluado, existen combinaciones entre plantas extremas aún no consideradas. En la Figura 6-33 se combinaron P_{12} y P_{34} . A continuación demostraremos cómo la incertidumbre horizontal en sí misma, en concreto la combinación de plantas P_{24} que constituyen el perfil inferior, es también significativa en el contorno final intersección.

6.2.3.2 Influencia de la incertidumbre $\{\theta\}$

La incertidumbre en fase de una plantilla fue definida en (3.19) como la diferencia de fases entre las plantas extremas angularmente, $\Delta\theta=|\theta_{min}-\theta_{max}|$. El perfil superior e inferior de la plantilla en la Figura 6-32 pueden considerarse como plantillas con sólo incertidumbre en fase, $\mathfrak{S}P=p\angle\{\theta\}$. Para el perfil inferior, $\mathfrak{S}P_{24}=p_{min}\angle\{\theta\}$, $p_{min}=k_{min}^*=1$, tomando un tamaño de discretización en $\{\theta\}^*=\{-11^\circ:1^\circ:-1^\circ\}$ y el mismo valor de especificación $\delta_s(\omega_f)=1.1$ resultan los contornos de la Figura 6-34.

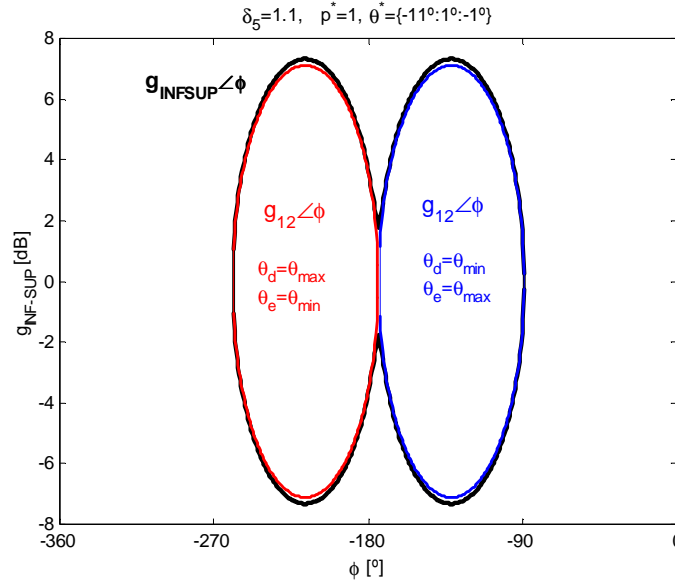


Figura 6-34: Contornos de tipología A para incertidumbre sólo en fase

En el problema del servo y para plantillas con sólo incertidumbre en fase resultarán siempre contornos de tipología A, $g_{INFSUP}\angle\phi_{\{\theta\}}$, $\phi \in \Phi_{IS}=[-180^\circ - \theta_T \varepsilon_T]_{\{\theta\}}$, independientemente del valor de la especificación, δ_s , o del tamaño de la incertidumbre en fase, $\Delta\theta=|\theta_{min}-\theta_{max}|$. Si la incertidumbre en fase es muy elevada, las curvas superior e inferior del contorno A pueden ocupar el intervalo total de diseño $\Phi=[-360^\circ, 0^\circ]$, resultando en un problema sin solución, tal y como ocurría para otras especificaciones robustas de control (Figura 4-9 y Figura 5-8).

En los contornos de tipología A resultantes, dadas un par de plantas, por ejemplo las extremas $p\angle\theta_{min}$ y $p\angle\theta_{max}$, se obtendrán soluciones g_{12} en (6.49) de tipología A **diferentes para $\theta_d=\theta_{min}$, $\theta_e=\theta_{max}$, que para $\theta_d=\theta_{max}$, $\theta_e=\theta_{min}$** , como demuestra la Figura 6-34. Algo similar ocurría en el caso de los módulos, analizado en la sección anterior. Pero en el caso de la fase además

habrá que tener en cuenta todas las combinaciones posibles de pares de plantas en el intervalo de incertidumbre, $\{\theta\}$, no sólo las extremas como ocurría con la incertidumbre en magnitud. Esto no resulta trascendente en plantillas con pequeña incertidumbre horizontal como la del ejemplo (bastan las plantas extremas), pero sí cuando la incertidumbre en fase aumenta. Compárense los contornos en la Figura 6-35 para una incertidumbre $\Delta\theta=|\theta_{min}-\theta_{max}|=15^\circ$, tan sólo 5° superior a la incertidumbre $\Delta\theta=10^\circ$ de la Figura 6-34; en un caso bastan las plantas extremas y en el otro es necesario un menor tamaño de discretización de la incertidumbre en fase. No obstante, las plantas **dominantes** en un gran número de fases siguen siendo las de los extremos del intervalo de incertidumbre, $p\angle\theta_{min}$ y $p\angle\theta_{max}$. Esta aproximación (plantas de los extremos en fase) será suficiente para los objetivos del documento.

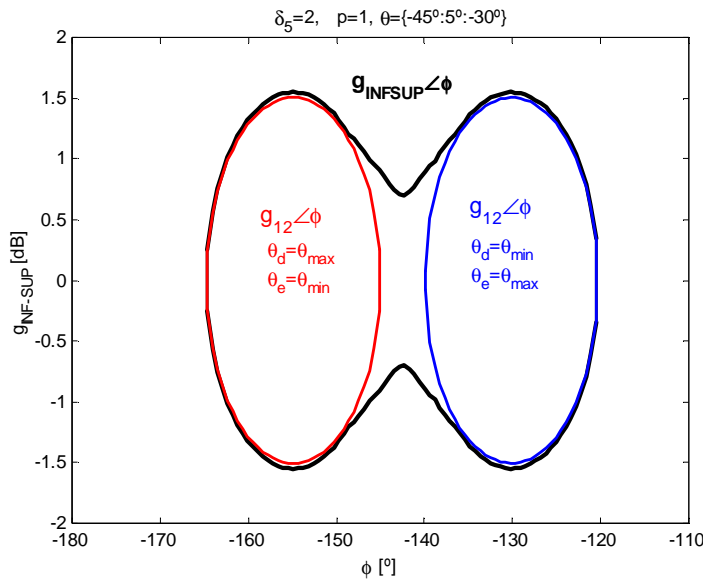


Figura 6-35: Contornos de tipología A para incertidumbre en fase grande

Del contorno A resultante de la incertidumbre en fase se escoge la curva superior, que se combinará con el contorno B de la incertidumbre en magnitud. El contorno A se resume como:

$$g_{INFSUP} \angle \phi, \phi \in \Phi_{IS} : g_{12} \angle \phi \Big|_{\substack{\theta_d = \theta_{max} \\ \theta_e = \theta_{min}}} \cup g_{12} \angle \phi \Big|_{\substack{\theta_d = \theta_{min} \\ \theta_e = \theta_{max}}} \quad (6.70)$$

donde g_{12} se definen en (6.49).

Analicemos ahora como influye el módulo constante en las plantillas de sólo incertidumbre horizontal. Trazados los contornos para el perfil inferior, $\mathfrak{S}P=p_{min} \angle \{\theta\}$, de la plantilla en la Figura 6-32, se comparan éstos en la

Figura 6-36 con los contornos para el perfil superior, $\mathfrak{S}P=p_{max}\angle\{\theta\}$, $p_{max}=k_{min}^*=10$, $\{\theta\}^*=\{-11^\circ:1^\circ:-1^\circ\}$, para el mismo valor de especificación $\delta_5(\omega_f)=1.1$.

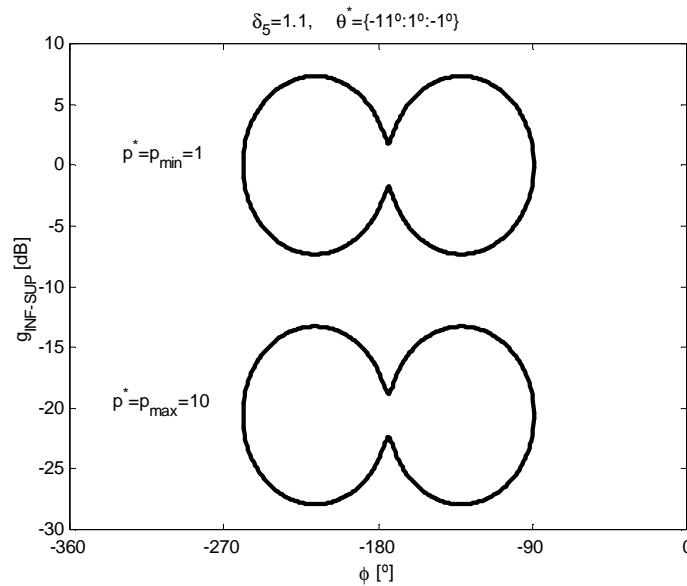


Figura 6-36: Influencia del módulo en los contornos debidos a la incertidumbre en fase

Por tanto, cuando el módulo p se reduce, los contornos de tipo A debidos a la incertidumbre en fase, $g_{INFSUP}\angle\phi|_{\{\theta\}}$, se elevan por igual en todo su intervalo angular de existencia, $\phi \in \Phi_{IS}=[-180^\circ-\theta_{\mathcal{E}T}]_{\{\theta\}}$. Esto es más que lógico considerando los objetivos del control realimentado en el caso del servo. La reducción de sensibilidad en $\{L\}$ será tanto mayor cuanto más se eleve su ganancia, $|L|=|GP|$. Por tanto, considerada la incertidumbre en $|P|$, las necesidades de control máximas las marca el perfil de ganancias mínimas p_{min} en cada fase θ .

Al disminuir la especificación $\delta_5(\omega)$ el contorno debido a la fase $g_{INFSUP}\angle\phi|_{\{\theta\}}$, $\phi \in \Phi_{IS}|_{\{\theta\}}$ en (6.70) se hace más agresivo: elevándose la curva superior, descendiendo la inferior y ensanchándose el intervalo Φ_{IS} , tal y como ilustra la Figura 6-37 para $\delta_5=2$ y $\delta_5=1.1$. Lo mismo ocurre cuando aumenta la incertidumbre en fase, $\Delta\theta=|\theta_{min}-\theta_{max}|$; véase la Figura 6-38 para $\Delta\theta=10^\circ$ e $\Delta\theta=30^\circ$.

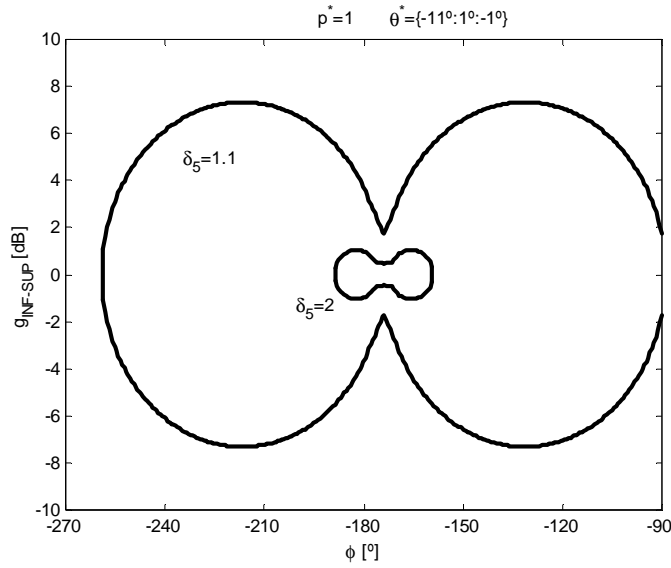


Figura 6-37: Influencia de la especificación sobre el contorno de incertidumbre en fase

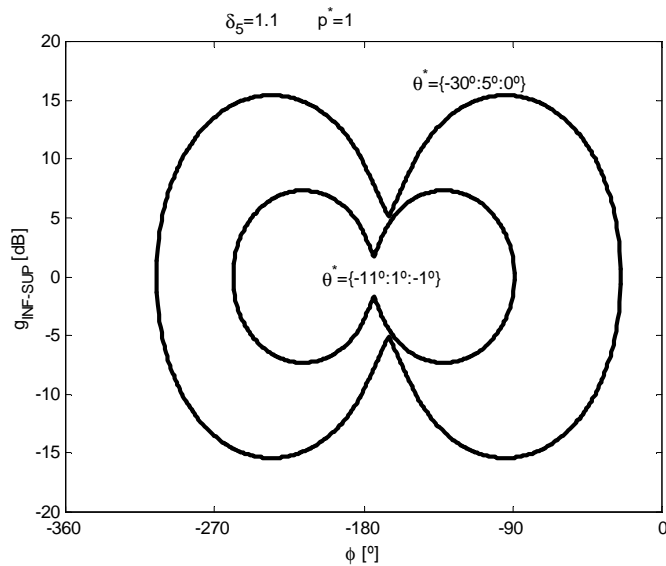


Figura 6-38: Contribución del tamaño de incertidumbre en fase sobre los contornos

Cuando la especificación disminuye, también los contornos debido a la incertidumbre en magnitud se hacen más agresivos, por lo que en la conformación de los contornos intersección la contribución de ambas incertidumbres es el mismo sentido. Sin embargo, si para una especificación constante la incertidumbre en fase aumenta mucho respecto a la de

magnitud, los contornos debidos a la primera (incertidumbre en fase) cobran especial importancia. Compárense estos resultados en la Figura 6-39, la Figura 6-40 y Figura 6-41, donde a mayor incertidumbre en fase los contornos debidos a ésta, $g_{INFSUP} \angle \phi_{\{\theta\}}$, dominan en un mayor número de fases a los contornos debidos a la incertidumbre en magnitud $g_{SUP} \angle \phi_{\{p\}}$.

Conforme aumenta la frecuencia, al disminuir la especificación $\delta_5(\omega)$, los contornos de fase se hacen significativos en un mayor número de fases alrededor de Φ_2 en (6.67) y (6.68). Esto es debido a que la sensibilidad de los contornos $g_{SUP} \angle \phi_{\{p\}}$ es mayor que la de los contornos $g_{INFSUP} \angle \phi_{\{\theta\}}$ a variaciones en la tolerancia de especificación. Compárense la Figura 6-40 y la Figura 6-41 que se argumentan a continuación.

6.2.3.3 Incertidumbre en fase y magnitud

Según la Sección 6.2.3.1 sobre la contribución de la incertidumbre en magnitud en la Figura 6-33, se considerarán los contornos debidos a las cuatro combinaciones de parejas de plantas, dos para los extremos del perfil derecho y dos para el izquierdo de la plantilla. Y según la Figura 6-36 se considerarán las dos combinaciones de plantas extremas del perfil inferior (módulo mínimo). Superpongamos entonces los contornos B de los perfiles izquierdo y derecho de la Figura 6-33, con los de tipología A debidos a la incertidumbre horizontal del perfil inferior en la Figura 6-34. El resultado lo muestra la Figura 6-39.

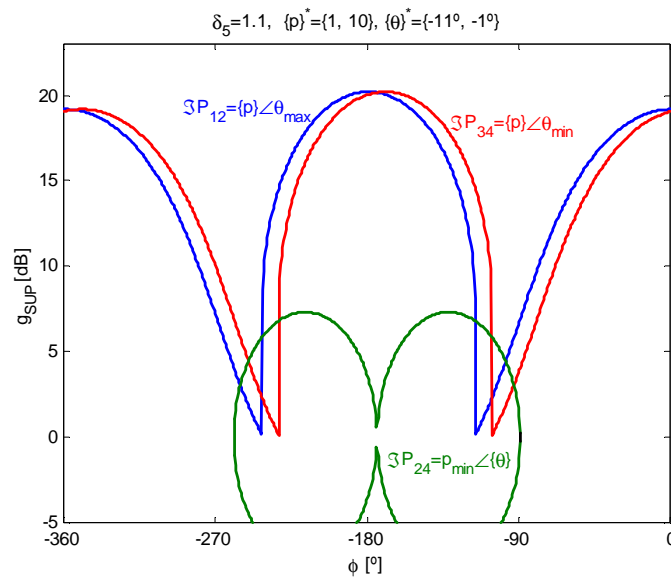


Figura 6-39: Contornos finales considerando incertidumbre en fase y ganancia

De acuerdo a esta figura, para una incertidumbre en fase moderada, considerando los contornos A debidos a ésta junto a los de tipo B debidos a la incertidumbre en magnitud en (6.67) y (6.68), sólo la **curva superior de los contornos A de fase**, $g_{SUP} \angle \phi_{\{\theta\}}$, definidos en (6.70) **será significativa**. Y además **sólo lo será** en los alrededores de los extremos del intervalo Φ_2 . Es decir, donde se cortaban las soluciones $g_2 \angle \phi_{|A1}$ y $g_2 \angle \phi_{|B2}$ en (6.67), que es **donde $g_{SUP} \angle \phi_{\{p\}}$ alcanzaba sus valores mínimos**. De manera paralela ocurriría para la tipología B en (6.68).

En resumen, considerada una plantilla genérica, $\mathfrak{S}P(\omega) = \{p \angle \theta\}$, con **incertidumbre en fase y ganancia**, en aquellas frecuencias donde se obtienen beneficios de la realimentación con la reducción de sensibilidad de LC respecto a la de LA, $\delta_5(\omega) \leq p_{max}/p_{min}$, **los contornos de tipología B se conforman como sigue:**

$$g_{SUP} \angle \phi_{\{p \angle \theta\}}, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ] : \{g_{SUP} \angle \phi\}_{\partial(p_{max}, p_{min}) \angle \{\theta\}} \cap g_{SUP} \angle \phi_{\partial p_{min} \angle (\theta_{max}, \theta_{min})} \quad (6.71)$$

Donde $\{g_{SUP} \angle \phi\}_{\partial(p_{max}, p_{min}) \angle \{\theta\}}$ es el conjunto intersección de contornos para cada pareja de plantas en cada fase θ , una en el perfil superior, $\partial p_{max} \angle \{\theta\}$ y otra en el inferior, $\partial p_{min} \angle \{\theta\}$. Los contornos $g_{SUP} \angle \phi$ para cada par de plantas se calculan aplicando (6.67) si $\delta_5^2 \leq p_{max}/p_{min}$ o (6.68) si $\delta_5 \leq p_{max}/p_{min} \leq \delta_5^2$. Y $g_{SUP} \angle \phi_{\partial p_{min} \angle (\theta_{max}, \theta_{min})}$ se calcula según (6.70) y responde a la curva superior del contorno de tipo A para las plantas extremas en el perfil inferior, $p_{min} \angle \theta_{max}$ y $p_{min} \angle \theta_{min}$.

Si la incertidumbre en fase es muy pequeña, la iteración correspondiente a las plantas extremas del perfil inferior según (6.70) puede obviarse. La Figura 6-40 muestra un ejemplo.

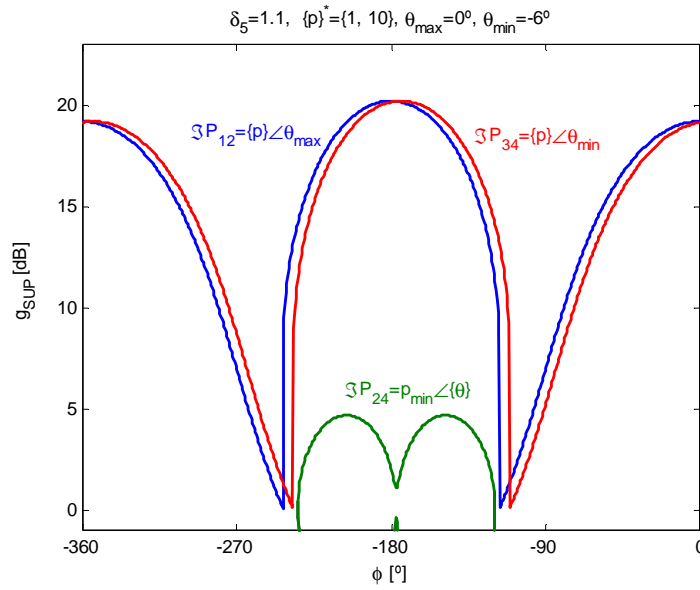


Figura 6-40: Contorno con plantas en perfil inferior prescindible

Y sin embargo cuando la incertidumbre en fase se incrementa la aportación a los contornos de las plantas en el extremo del perfil inferior se hace muy significativa, como muestra la Figura 6-41.

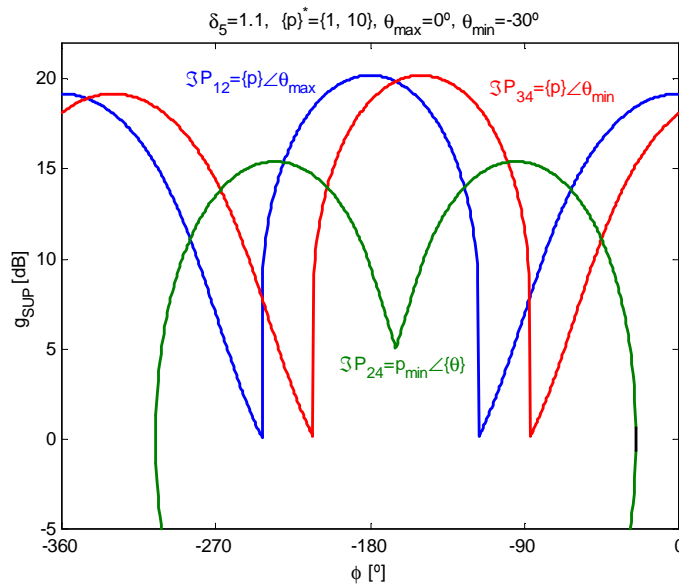


Figura 6-41: Contorno con plantas en perfil inferior imprescindible

6.2.4 INFLUENCIA DE LA INCERTIDUMBRE EN MAGNITUD

En la sección anterior se estudió la contribución sobre los contornos de la incertidumbre en fase de la plantilla frecuencial. Primeramente se trazaron los contornos considerando sólo la incertidumbre en magnitud, que intervenía de forma decisiva, junto con el valor de especificación, en la tipología de las curvas. Este primer estudio sobre la importancia de la incertidumbre en magnitud trata ahora de ser completado, incluyéndose algunas gráficas ilustrativas.

La incertidumbre en magnitud de una plantilla fue definida en (3.18) como la diferencia de módulos entre las plantas extremas verticalmente, y como QFT trabaja con magnitudes en decibelios, se tiene $\Delta p = Lm \ p_{max}/p_{min}$. Indistintamente, se hará referencia a la incertidumbre en magnitud también como la relación p_{max}/p_{min} entre las magnitudes lineales.

La incertidumbre en magnitud creciente con especificación constante (incremento en la relación p_{max}/p_{min} para $\delta_5(\omega_i) = \delta_5$ **implica unos contornos más agresivos, en magnitud y en fase.** De esta forma tenemos los contornos de tipología B en (6.67) que son más elevados que los de (6.68); compárense la Figura 6-29 y la Figura 6-30. Si p_{max}/p_{min} disminuye aún más, se tiene exclusivamente contornos tipo A, que sólo ocupan parte del intervalo de diseño; véase Figura 6-31. Dentro de cada tipología el incremento de incertidumbre p_{max}/p_{min} lógicamente hace más agresivo el contorno. A continuación se incluyen figuras ilustrativas y algunas fórmulas interesantes a este respecto.

La influencia de la incertidumbre en magnitud será analizada en sentido creciente en el intervalo, $1 \leq p_{max}/p_{min} < +\infty$. De acuerdo a las conclusiones en la Sección 6.2.2, se presentan tres comportamientos diferentes que se resumen en la Figura 6-42¹⁰.

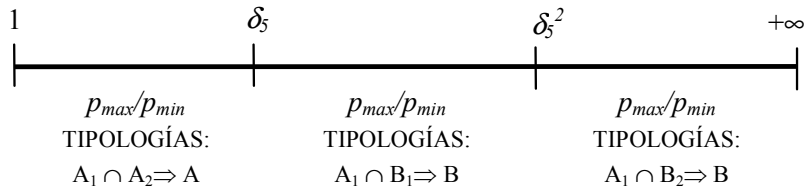


Figura 6-42: Tipologías de contornos en función de la incertidumbre en magnitud (p_{max}/p_{min})

El estudio sobre el incremento de incertidumbre en magnitud se realiza tomando como referencia p_{min} constante, y aumentando p_{max} .

¹⁰ Nótese que esta figura puede deducirse de la Figura 6-25 tras los resultados expuestos en la "Conclusión sobre Tipologías de Contornos" (Sección 6.2.2.4).

Intervalo: $1 \leq p_{max}/p_{min} \leq \delta_5$

La Figura 6-43 muestra los contornos de tipología A resultantes del incremento de la incertidumbre en magnitud para el intervalo, $1 \leq p_{max}/p_{min} \leq \delta_5$. Se comprueba el aumento de agresividad del contorno intersección definido en (6.69) como $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS}$. En general puede aproximarse que: $g_{INF} \angle \phi$ descende, $g_{SUP} \angle \phi$ se eleva y Φ_{IS} se ensancha. Esto no se cumple para un pequeño número de ángulos, pero puede ser válido en una primera aproximación. Esto se resume en la siguiente ecuación:

$$\frac{p_{max}}{p_{min}} \uparrow \Rightarrow \begin{cases} g_{INF} \angle \phi \downarrow \\ g_{SUP} \angle \phi \uparrow \\ \epsilon_T \uparrow \end{cases}, \phi \in \Phi_{IS} = [-180^\circ - \theta \mp \epsilon_T] \quad (6.72)$$

Cuando la incertidumbre de lazo abierto es muy pequeña respecto a la especificación (incertidumbre deseada en lazo cerrado), los contornos desaparecen en un punto. La agresividad es máxima por tanto en el extremo superior del intervalo, cuando la incertidumbre y la tolerancia de especificación se igualan. Cuando la incertidumbre aumenta más allá de la especificación, implica que ésta última pretende reducir la sensibilidad de lazo cerrado por debajo de la de lazo abierto. Y ello implica siempre una ganancia mínima en cada fase, pasándose a contornos de tipología B (ver siguiente intervalo). Los contornos A para el servo no tendrán importancia de cara a otras especificaciones robustas de control en altas frecuencias, mientras que los contornos B serán relevantes en bajas-medias frecuencias.

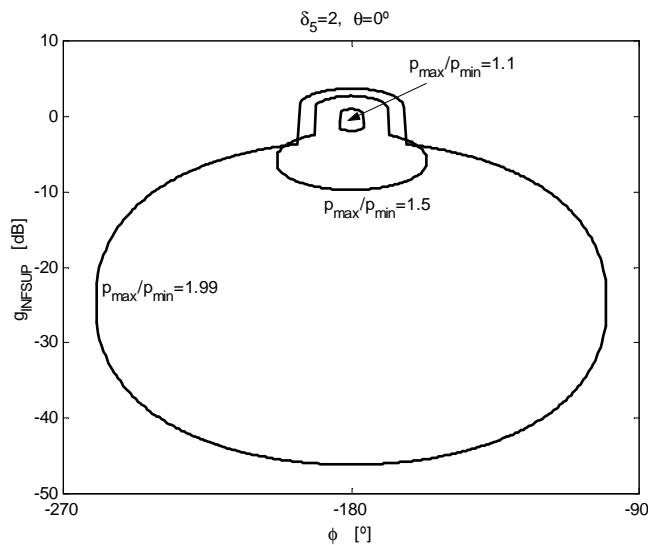


Figura 6-43: Contorno A tras incremento de incertidumbre en magnitud en $1 \leq p_{max}/p_{min} \leq \delta_5$

Intervalo: $\delta_5 \leq p_{max}/p_{min} \leq \delta_5^2$

La Figura 6-44 muestra la evolución de los contornos de tipología B, $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ en (6.68) debido al incremento de p_{max}/p_{min} . El incremento de agresividad del contorno se resume en la siguiente ecuación:

$$\frac{p_{max}}{p_{min}} \uparrow \Rightarrow g_{SUP} \angle \phi \uparrow, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ] \quad (6.73)$$

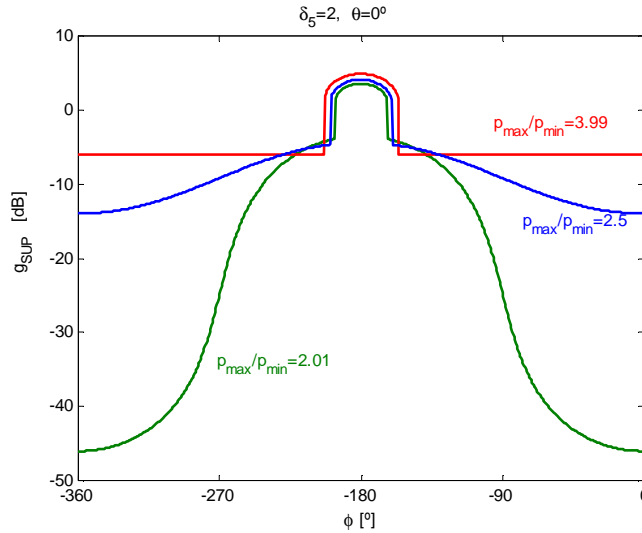


Figura 6-44: Contorno B tras incremento de incertidumbre en magnitud en $\delta_5 \leq p_{max}/p_{min} \leq \delta_5^2$

Aunque rigurosamente no es cierto que el contorno se eleve en *todos* los ángulos, la aproximación en (6.73) puede considerarse válida. Justamente en las fases donde se incumple dominan los contornos aportados por la incertidumbre en fase, que debieran superponerse según indicaba la Sección 6.2.3.3.

Estos contornos de tipo B suelen ser los representativos del problema del servo en frecuencias intermedias.

Intervalo: $\delta_5^2 \leq p_{max}/p_{min}$

La Figura 6-45 muestra la evolución de los contornos de tipología B, $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ en (6.67) debida al incremento de p_{max}/p_{min} . El incremento de agresividad del contorno se resume en la siguiente ecuación:

$$\frac{p_{max}}{p_{min}} \uparrow \Rightarrow g_{SUP} \angle \phi \uparrow, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ] \quad (6.74)$$

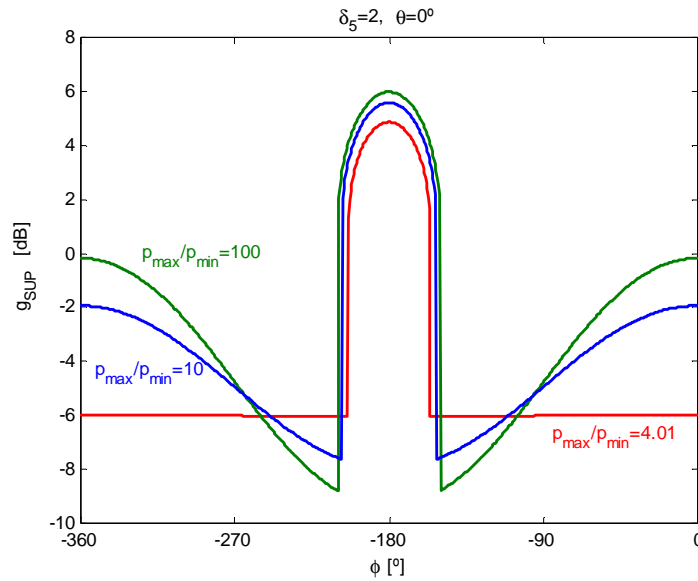


Figura 6-45: Incremento de incertidumbre en magnitud en $\delta_s^2 \leq p_{max}/p_{min} < +\infty$

Aunque la afirmación en (6.74) no es cierta para todas las fases, en una primera aproximación puede tomarse como válida. Nótese que (6.74) no se cumple precisamente en los ángulos donde el contorno se hace mínimo. Y en estas fases es donde los contornos debidos a la incertidumbre en fase de la plantilla dominaban a los de la incertidumbre en magnitud, debiéndose intersectar ambos. Y en los contornos de fase un incremento de la incertidumbre en ésta siempre elevaba sus contornos. Véase la discusión en la Sección 6.2.3.3.

6.2.5 INFLUENCIA DE LA ESPECIFICACIÓN, δ_s

Una disminución de la especificación robusta, $\delta_s(\omega_i) = \delta_s$ con $\delta_s > 1$, e incertidumbre en magnitud p_{max}/p_{min} constante, implica contornos más agresivos en magnitud y fase. Nótese que si p_{max}/p_{min} es constante, al disminuir δ_s desde $+\infty$ hasta 1, se darían primero contornos de tipología A en (6.69), luego de tipología B en (6.68) y finalmente, para los valores más pequeños de especificación, los contornos más agresivos de tipología B en (6.67); véase la Figura 6-42. Dentro de cada tipología, la disminución de δ_s agrava también los contornos. A continuación se incluirán figuras ilustrativas y algunas fórmulas, pero antes se razonará cómo este comportamiento de los contornos del servo frente a la tolerancia de especificación es perfectamente lógico en términos de control.

Nótese que en ambas tipologías B en (6.67) y (6.68) se cumple que $p_{max}/p_{min}(\omega_i) > \delta_s(\omega_i)$. Es decir, la especificación robusta $|T_s/F| = |T| = |L/1+L| \leq \delta_s$ pretende con la realimentación reducir la sensibilidad en $\{L=GP\}$ debida a la incertidumbre inherente al proceso en lazo abierto $\{P\}$. Dicha reducción de sensibilidad es uno de los beneficios de la realimentación, conseguido si dichos contornos B son respetados por G o L en las frecuencias de interés (normalmente bajas y medias). Cuando δ_s disminuye para tipologías B el contorno $g_{SUP} < \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ se elevará, indicando que para reducir aún más la sensibilidad en $\{L\}$ se debe elevar aún más la ganancia de G .

En QFT siempre se ha recomendado (D'azzo y Houpis, 1996) que incluso en las frecuencias donde se obtienen beneficios de la realimentación, es decir, donde $p_{max}/p_{min}(\omega_i) > \delta_s(\omega_i)$, conviene que la especificación $\delta_s(\omega_i)$ aumente con la frecuencia¹¹. La explicación es clara con las aportaciones del presente documento. Al aumentar δ_s en contornos de tipo B, se demuestra que éstos reducen su altura en todas las fases y esto facilita la etapa de síntesis, en la que $L_0=GP$ se ajusta a sus contornos normalmente disminuyendo su ganancia, $|L_0|$, con la frecuencia. Si los contornos aumentasen su altura con la frecuencia, el diseño no sería imposible, pero se complicaría, más aún teniendo en mente que L_0 debe alcanzar su asíntota de alta frecuencia lo antes posible (Horowitz y Sidi, 1972). La altura de los contornos no sólo depende de $\delta_s(\omega_i)$, valor que puede elegirse según convenga, sino que también depende de la incertidumbre inherente al sistema. Supongamos que en ciertas frecuencias la incertidumbre $\{P\}$ se incrementa mucho, lo que elevaría los contornos indefinidamente (véase Figura 6-45). Para contrarrestar este efecto, aumentando convenientemente $\delta_s(\omega_i)$ los contornos alcanzarán alturas moderadas, susceptibles de conseguirse con un control G que además satisfaga otros requisitos de control. En esta manera de proceder no debe olvidarse que el aumento de $\delta_s(\omega_i)$ reduce los beneficios de la realimentación en términos de reducción de sensibilidad ante la incertidumbre. Es decir, se debe llegar a un compromiso entre conseguir un comportamiento suficientemente agresivo (suficiente reducción de incertidumbre en lazo cerrado) y que éste sea factible (contornos que puedan satisfacerse).

Los contornos de tipología A en el problema del servo, se presentan cuando se cumple $p_{max}/p_{min}(\omega_i) < \delta_s(\omega_i)$. Es decir, la especificación robusta de realimentación permite aumentar la sensibilidad en $\{L=GP\}$ más allá de la propia incertidumbre inherente al proceso en lazo abierto $\{P\}$. Este requisito, abogado ya en Horowitz y Sidi (1972), es imprescindible para reducir la

¹¹ Como se comenta en el siguiente párrafo, éste es un requisito imprescindible en alta frecuencia, donde aparecen las 'desventajas' (compromisos) del control realimentado.

ganancia de alta frecuencia (los contornos A solo ocupan ciertas fases), minorando el principal coste de la realimentación: el ancho de banda. Así mismo, tampoco tendría sentido intentar obtener beneficios de la realimentación en frecuencias donde el comportamiento no fue modelado (altas frecuencias), o lo que es lo mismo, cuando la incertidumbre del modelo se hace infinita.

A continuación se incluyen figuras ilustrativas y algunas fórmulas que demuestran el incremento de agresividad en los contornos cuando la tolerancia δ_5 se reduce, siendo la incertidumbre, p_{max}/p_{min} , constante. Teniendo en cuenta (6.45) en la introducción del problema del servo se demostró que siempre se cumple $\delta_5 \geq 1$. El razonamiento es simple, $\delta_5 = \delta_{5_sup} / \delta_{5_inf}$ expresa la relación entre un modelo superior, δ_{5_sup} , y otro inferior, δ_{5_inf} , de comportamiento en el seguimiento de señales según (6.41). Por tanto, como $\delta_{5_sup} \geq \delta_{5_inf}$, resulta siempre $\delta_5 \geq 1$. El caso de $\delta_5 = 1$ expresa un objetivo de reducción infinita de la incertidumbre en $\{P\}$. Esto es inviable en la práctica pues exigiría una ganancia en L_0 infinita. No obstante, cuando la tolerancia de especificación δ_5 se aproxima a 1, representa objetivos más agresivos y más difíciles de satisfacer debido a los compromisos de la realimentación. Paralelamente, el valor de especificación menos agresivo es aquel que tolera una variación infinita de incertidumbre, $\delta_5 = +\infty$, que también representa un caso hipotético. Por tanto, el intervalo de análisis se reduce a $\delta_5 \in (1, +\infty)$. Según se describió en las Sección 6.2.2, en función de los valores de la especificación δ_5 y de la incertidumbre p_{max}/p_{min} para la frecuencia ω , las restricciones en QFT se expresaban con diferentes tipologías de contornos. La Figura 6-46 resume la evolución de éstas dentro del intervalo $\delta_5 \in (1, +\infty)$.

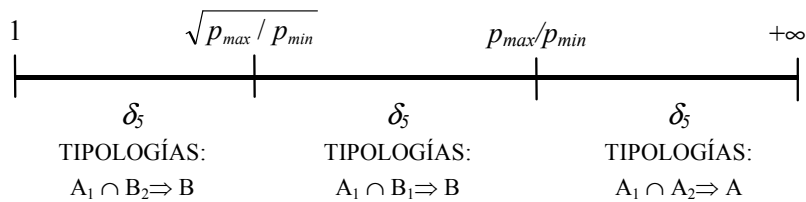


Figura 6-46: Evolución de tipologías de contornos en función de la especificación

A continuación se analiza la evolución de los contornos en cada intervalo en la Figura 6-46, y la transición entre éstos. En las gráficas se empleará $p_{max}=10$, $p_{min}=1$, por tanto, $p_{max}/p_{min}=10$ (20dB).

Intervalo: $1 \leq \delta_5 \leq \sqrt{(p_{max}/p_{min})}$

La Figura 6-47 muestra la evolución de los contornos de tipología B, $g_{SUP} < \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ en (6.67) en función de la variación de δ_5 con

p_{max}/p_{min} constante. La agresividad del contorno se resume en la siguiente ecuación:

$$\delta_5 \uparrow \Rightarrow g_{SUP} \angle \phi \downarrow, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ] \quad (6.80)$$

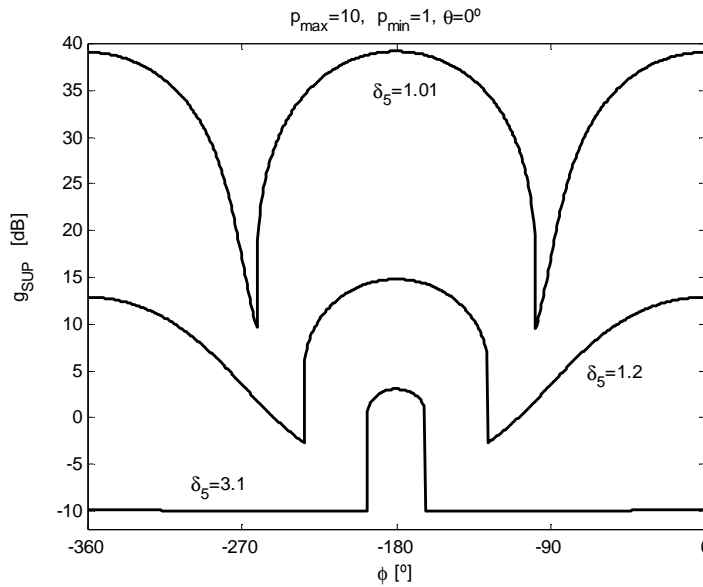


Figura 6-47: Contornos para variación de la especificación en $1 \leq \delta_5 \leq \sqrt{p_{max}/p_{min}}$

El límite inferior, $\delta_5 \rightarrow 1^+$, implica un requisito de control que busca la anulación total de la incertidumbre en lazo cerrado existiendo una cierta incertidumbre de lazo abierto $p_{max}/p_{min}=10$, y por tanto, expresa la especificación más agresiva posible. Como muestra Figura 6-47, las necesidades de ganancia en L para anular totalmente la incertidumbre crecen indefinidamente (el contorno se eleva indefinidamente). Esto también se demuestra formalmente aplicando límites cuando $\delta_5 \rightarrow 1^+$ sobre la función $g_{SUP} \angle \phi$ definida en (6.67). Siguiendo el patrón definido en esta ecuación, esto requiere aplicar límites en la solución simple $g_2 \angle \phi$ en (6.49b) y en ε en (6.59).

$$\begin{cases} \lim_{\delta_5 \rightarrow 1^+} g_2 |_{A_1} = +\infty, \phi \in \Phi_2 = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon] \\ \lim_{\delta_5 \rightarrow 1^+} g_2 |_{B_2} = +\infty, \phi \in \bar{\Phi}_2 \\ \lim_{\delta_5 \rightarrow 1^+} \varepsilon = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \lim_{\delta_5 \rightarrow 1^+} g_{SUP} \angle \phi = +\infty, \phi \in [-360^\circ, 0^\circ] \quad (6.81)$$

En el límite superior del intervalo, $\delta_5 \rightarrow \sqrt{(p_{max}/p_{min})^-}$ se tiene una transición a otra tipología B definida en (6.68), menos agresiva (menor altura) que la definida en (6.67), como así lo demuestran los contornos en la Figura 6-47y la Figura 6-48 para $\delta_5 \rightarrow \sqrt{(p_{max}/p_{min})}=3.16$. El valor de transición del contorno se calcula formalmente tomando límites sobre la función $g_{SUP} \angle \phi$ definida en (6.67) cuando $\delta_5 \rightarrow \sqrt{(p_{max}/p_{min})^-}$. El valor obtenido coincidirá con el límite inferior del intervalo siguiente.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\delta_5 \rightarrow \sqrt{p_{max}/p_{min}^-}} g_{SUP} \angle \phi = \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \lim_{\delta_5 \rightarrow \sqrt{p_e/p_d}} g_2 |_{A_1} = \frac{-(p_{max} + p_{min})c + \sqrt{(p_{max} + p_{min})^2 c^2 - (p_{max}^2 + p_{max} p_{min} + p_{min}^2)}}{p_{min} p_{max}}, \\
 & \lim_{\delta_5 \rightarrow \sqrt{p_d/p_e}} g_2 |_{B_2} = \frac{1}{\sqrt{p_{max} p_{min}}}, \quad \phi \in \overline{\Phi}_2 \\
 & \lim_{\delta_5 \rightarrow \sqrt{p_e/p_d}} \varepsilon = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{\sqrt{p_{max}^2 + p_{max} p_{min} + p_{min}^2}}{p_{max} + p_{min}}
 \end{aligned} \right. \quad \phi \in \Phi_2 = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]
 \end{aligned}
 \tag{6.82}$$

Intervalo: $\sqrt{(p_{max}/p_{min})} \leq \delta_5 \leq p_{max}/p_{min}$

La Figura 6-48 muestra la evolución de los contornos de tipología B, $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ en (6.68) en función de la variación de δ_5 con p_{max}/p_{min} constante. La agresividad del contorno se resume en la siguiente ecuación:

$$\delta_5 \uparrow \Rightarrow g_{SUP} \angle \phi \downarrow, \phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]
 \tag{6.83}$$

En el límite inferior del intervalo, $\delta_5 \rightarrow \sqrt{(p_{max}/p_{min})^+}$, se tiene una transición entre la tipología B de (6.67) (más agresiva) y la tipología B de (6.68) (menos agresiva). Compárense la Figura 6-47y la Figura 6-48 con $\delta_5 \rightarrow \sqrt{(p_{max}/p_{min})}=3.16$. El valor de transición del contorno se calcula formalmente tomando límites sobre la función $g_{SUP} \angle \phi$ definida en (6.68) cuando $\delta_5 \rightarrow \sqrt{(p_{max}/p_{min})^+}$. El valor obtenido coincidirá con el límite superior del intervalo anterior:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\delta_5 \rightarrow \sqrt{p_{\max}/p_{\min}}^+} g_{SUP} \angle \phi = \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \lim_{\delta_5 \rightarrow \sqrt{p_e/p_d}^+} g_2 |_{A_1} = \frac{-(p_{\max} + p_{\min})c + \sqrt{(p_{\max} + p_{\min})^2 c^2 - (p_{\max}^2 + p_{\max} p_{\min} + p_{\min}^2)}}{p_{\min} p_{\max}}, \\
 & \lim_{\delta_5 \rightarrow \sqrt{p_d/p_e}^+} g_2 |_{B_1} = \frac{1}{\sqrt{p_{\max} p_{\min}}}, \quad \phi \in \bar{\Phi}_2 \\
 & \lim_{\delta_5 \rightarrow \sqrt{p_e/p_d}^+} \varepsilon = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{\sqrt{p_{\max}^2 + p_{\max} p_{\min} + p_{\min}^2}}{p_{\max} + p_{\min}}
 \end{aligned} \right. \quad \phi \in \Phi_2 = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]
 \end{aligned}$$

(6.84)

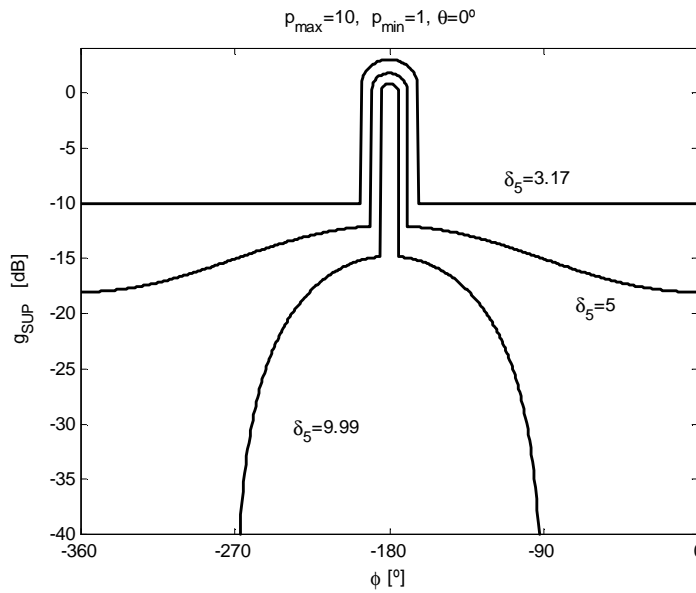


Figura 6-48: Contornos para variación de la especificación en $\sqrt{(p_{\max}/p_{\min})} \leq \delta_5 \leq p_{\max}/p_{\min}$

Y en el límite superior de éste intervalo, $\delta_5 \rightarrow (p_{\max}/p_{\min})^-$, se tiene una transición hacia la tipología A definida en (6.69). Compárense la Figura 6-48 y la Figura 6-49 con $\delta_5 \rightarrow (p_{\max}/p_{\min}) = 10$. El valor de transición del contorno se calcula formalmente tomando límites sobre la función $g_{SUP} \angle \phi$ definida en (6.68) cuando $\delta_5 \rightarrow (p_{\max}/p_{\min})^-$. El valor obtenido coincidirá con el límite inferior del intervalo siguiente.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\delta_5 \rightarrow p_{max}/p_{min}^-} g_{SUP} \angle \phi = \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \lim_{\delta_5 \rightarrow p_e/p_d^-} g_2 |_{A_1} = \frac{-(p_{max}^3 - p_{min}^3)c + \sqrt{(p_{max}^3 - p_{min}^3)^2 c^2 - (p_{max}^4 - p_{min}^4)(p_{max}^2 - p_{min}^2)}}{p_{min} p_{max}}, \\
 & \lim_{\delta_5 \rightarrow p_d/p_e^-} g_2 |_{B_1} = \frac{2}{p_{max} + p_{min}}, \quad \phi \in \bar{\Phi}_2 \\
 & \lim_{\delta_5 \rightarrow p_e/p_d^-} \varepsilon = \frac{180^\circ \sqrt{(p_{max}^2 - p_{min}^2)(p_{max}^4 - p_{min}^4)}}{\pi (p_{max}^3 - p_{min}^3)}
 \end{aligned} \right. \quad \phi \in \Phi_2 = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]
 \end{aligned}
 \tag{6.85}$$

Intervalo: $p_{max}/p_{min} \leq \delta_5 < +\infty$

La Figura 6-49 muestra la evolución de los contornos de tipología B, $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ en (6.68) en función de la variación de δ_5 con p_{max}/p_{min} constante. La agresividad del contorno se resume:

$$\delta_5 \uparrow \Rightarrow \begin{cases} g_{SUP} \angle \phi \downarrow \\ g_{INF} \angle \phi \uparrow, \quad \phi \in \Phi_{IS} \subset [-360^\circ, 0^\circ] \\ \varepsilon_T \downarrow \end{cases}
 \tag{6.86}$$

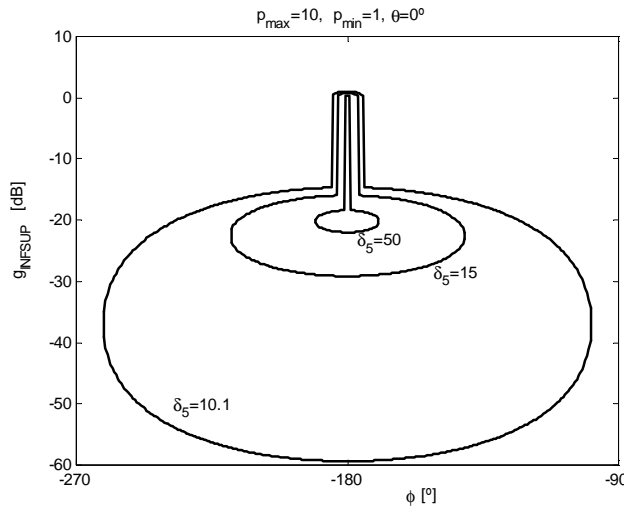


Figura 6-49: Contornos para variación de la especificación en $(p_{max}/p_{min}) \leq \delta_5 < +\infty$

En el límite inferior del intervalo, $\delta_5 \rightarrow (p_{max}/p_{min})^+$, se tiene una transición entre la tipología B de (6.68) (mas agresiva) y la tipología A de (6.69)

(menos agresiva). Compárense la Figura 6-48 y la Figura 6-49 con $\delta_5 \rightarrow (p_{max}/p_{min})=10$. El valor de transición del contorno se calcula formalmente tomando límites sobre la función $g_{SUP} \angle \phi$ definida en (6.69) cuando $\delta_5 \rightarrow (p_{max}/p_{min})^+$. El valor obtenido coincidirá con el límite superior del intervalo anterior:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\delta_5 \rightarrow p_{max}/p_{min}^+} g_{SUP} \angle \phi = \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \lim_{\delta_5 \rightarrow p_e/p_d^+} g_2 |_{A_1} = \frac{-(p_{max}^3 - p_{min}^3)c + \sqrt{(p_{max}^3 - p_{min}^3)^2 c^2 - (p_{max}^4 - p_{min}^4)(p_{max}^2 - p_{min}^2)}}{p_{min} p_{max}}, \\
 & \lim_{\delta_5 \rightarrow p_d/p_e^+} g_2 |_{A_2} = \frac{2}{p_{max} + p_{min}}, \quad \phi \in \Phi_2 = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon] \\
 & \lim_{\delta_5 \rightarrow p_d/p_e^+} g_1 |_{A_2} \\
 & \lim_{\delta_5 \rightarrow p_e/p_d^-} \varepsilon = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{\sqrt{(p_{max}^2 - p_{min}^2)(p_{max}^4 - p_{min}^4)}}{(p_{max}^3 - p_{min}^3)}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}
 \tag{6.87}$$

En el límite superior del intervalo, $\delta_5 \rightarrow +\infty$, los contornos se extinguen al ser la especificación de reducción de incertidumbre infinitamente permisiva.

6.2.6 SOLUCIÓN AL PROBLEMA DEL SEGUIMIENTO DE SEÑALES

6.2.6.1 Algunas Conclusiones sobre los Contornos

La doble desigualdad para el seguimiento de señales en (3.10) o (6.41):

$$\delta_{5inf}(\omega) < |T_5(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} \right| = \left| F(j\omega) \frac{P(j\omega)G(j\omega)}{1 + P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_{5sup}(\omega), \quad \omega \in \Omega_5$$

se resuelve en dos pasos. Primeramente, el controlador G pretende reducir la sensibilidad $|S|$ o variación de la sensibilidad complementaria $|T|=|T_5/F|=|L/(1+L)|$ debida a la incertidumbre en P . Para ello, la doble desigualdad se reduce a una simple en (3.11):

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{T_5(j\omega)}{F(j\omega)} \right| = \left| \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)F(j\omega)} \right| = \left| \frac{P(j\omega)G(j\omega)}{1 + P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \frac{\delta_{5sup}(\omega)}{\delta_{5inf}(\omega)}, \quad \omega \in \Omega_5$$

En la síntesis de G , el cumplimiento de esta desigualdad habrá de compatibilizarse con el resto de desigualdades simples (3.6) a (3.9). El

diseño del segundo grado de libertad F es una tarea sencilla que permite en cada ω cumplir la doble especificación en (3.10). F independiza el gobierno de la dinámica de seguimiento de señales del resto de problemas de control (a satisfacer únicamente con G); véase Sección 2.2.3. Por ello, F no coarta la existencia de solución G (si acaso puede favorecerla, Boje 2001) y queda fuera de los objetivos de este trabajo. Un ejemplo de síntesis de controlador y prefiltro con especificaciones sobre el seguimiento de señales y especificaciones de estabilidad puede encontrarse en la Sección 2.3.

Centrándonos en la solución del problema del servo, desde el punto de vista de G también se demostró en la Sección 6.2.1 que las tolerancias de especificación satisfacen (6.45):

$$\delta_5(\omega_i) = \frac{\delta_{5\text{sup}}(\omega_i)}{\delta_{5\text{inf}}(\omega_i)} > 1$$

Según (3.11) $\delta_5(\omega)$ expresa en cada frecuencia la variación máxima permitida en $|T(j\omega)|$ en términos absolutos, es decir, $\{|T|\}$. En términos de la función de transferencia $L(j\omega)$ con la que trabaja QFT, los contornos representativos de $\delta_5(\omega)$ expresan la variación permitida en $\{L\}$. Por ello, siempre que el requisito δ_5 sea inferior a la incertidumbre de partida o de la planta $\{|P|\}$, los contornos serán más restrictivos que cuando la variación permitida en $\{|T|\}$ sea mayor que la existente $\{|P|\}$ (efecto realimentado nulo). Esto lo demuestran una tipología de contornos B cuando $\Delta|T| < \Delta|P|$, más restrictiva que la tipología A para $\Delta|T| > \Delta|P|$, según estudiaba la Sección 6.2.2. Una especificación $\delta_5(\omega)$ más exigente (valor menor de tolerancia) exigirá tipologías de contornos más agresivas. Y dentro de cada tipología A o B, un valor de $\delta_5(\omega)$ menor significaba contornos más exigentes. Esto se resume en la Figura 6-50. Véanse también: Figura 6-47, Figura 6-48 y Figura 6-49.

En la Sección 6.2.4 también se demostraba que dentro de cada tipología (A o B) el incremento de la incertidumbre en ganancia, $p_{\text{max}}/p_{\text{min}}$, siendo constante el requisito de control δ_5 , significaba contornos más agresivos; véanse la Figura 6-43, la Figura 6-44, la Figura 6-45. Nótese en éstas figuras que la regla parece incumplirse en ciertas fases, precisamente donde se interceptan las tipologías simples A_1 y A_2 , A_1 y B_2 , A_1 y B_2 , respectivamente (véase Sección 6.2.2.4). Sin embargo, en estas fases es donde predominan los contornos simples de tipo A aportados por la incertidumbre en fase, que debían intersectarse con los de tipo B aportados por la incertidumbre en magnitud (véase Sección 6.2.3). Y, además, a mayor incertidumbre en fase la contribución al contorno intersección junto a la incertidumbre en ganancia se incrementaba (véanse Figura 6-39 a Figura 6-41).

En resumen, una incertidumbre en fase mayor sobre todo agrava la altura de los contornos del servo en sus fases de mínimo; y una incertidumbre en magnitud mayor hace los contornos del servo más agresivos en sus fases de máximo. Y además, la incertidumbre en magnitud es la responsable del cambio de tipología de contornos, B cuando $p_{max}(\omega)/p_{min}(\omega) > \delta_5(\omega)$, y A cuando $p_{max}(\omega)/p_{min}(\omega) < \delta_5(\omega)$. Y también, un decremento de la tolerancia de especificación para incertidumbre en fase y ganancia fijas impone contornos más restrictivos: se pasa de tipología A a B y, dentro de cada tipología, los contornos también son más exigentes.

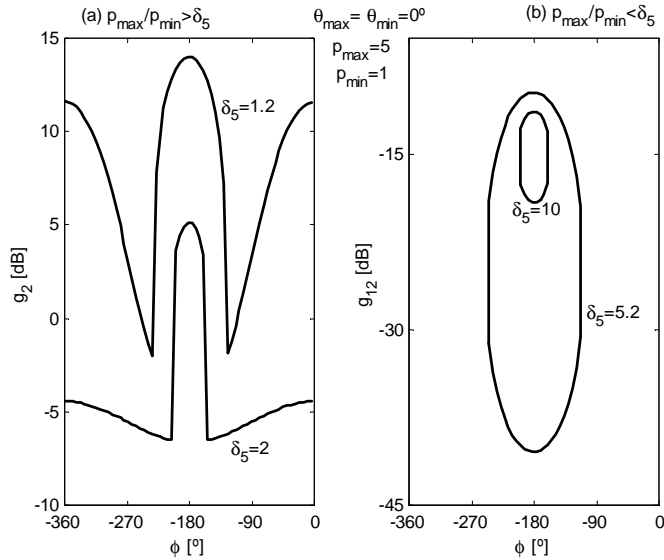


Figura 6-50: Influencia de δ_5 en contornos QFT

6.2.6.2 Estrategias en el Diseño de Controladores

Ahora se estudiará el problema frecuencialmente. En las frecuencias de interés para la realimentación desde el punto de vista del seguimiento de señales, $\omega < \omega_s$, se desea reducir la variación de $|T|$ por debajo de la variación de $|P|$. Ello exige valores δ_5 tan próximos a la unidad como se pretenda reducir la sensibilidad, $|S| = [\partial T(j\omega)/T(j\omega)] / [\partial P(j\omega)/P(j\omega)]$. Por otro lado, a efectos prácticos $|S| < 1$ en un rango de frecuencias, exige que $|S| > 1$ en otro (Bode, 1945). Luego en $\omega > \omega_s$, δ_5 debe tomar valores mucho mayores a la unidad, y la realimentación no tiene ningún efecto en estas frecuencias. En altas frecuencias se justificará que esto no supone una gran desventaja. Cualquier función L es estrictamente propia y, por tanto, $|L| \rightarrow 0$ cuando

$\omega \rightarrow \infty$. Esto es debido a que cualquier planta física P cumple estas propiedades y, además, la reducción del coste de la realimentación exige $|L| \ll 1$ en alta frecuencia (Horowitz y Sidi, 1972). Luego también $|T| \ll 1$. Entonces donde $|T|$ es muy pequeña, aunque el $\Delta|T|$ sea grande, su efecto es despreciable (Horowitz, 1973).

Teniendo en cuenta todo ello, los contornos representativos del comportamiento frente a señales de referencia son como sigue. Para $\omega < \omega_s$ responden a una tipología B, mientras que para $\omega > \omega_s$ son de tipo A. Esto hace dominantes en bajas-medias frecuencias a los contornos de reducción de incertidumbre $|T|=|L/1+L| \leq \delta_s$, $p_{max}/p_{min}(\omega) > \delta_s(\omega)$, junto con los de rechazo de perturbaciones $|S|=|1/1+L| \leq \delta_2$, $\delta_2 < 1$, y $|S'|=|P/1+L| \leq \delta_3$, $\delta_3 < \{p\}$. Por otro lado, en altas frecuencias dominarán los contornos de las especificaciones que limitan el ancho de banda: $|T|=|L/1+L| \leq \delta_1$, $\delta_1 < 1$ y/o $|G/1+L| \leq \delta_4$, o que procuran por la estabilidad: $|T|=|L/1+L| \leq \delta_1$, $\delta_1 \approx 1.3 > 1$ o $|S|=|1/1+L| \leq \delta_2$, $\delta_2 \approx 1.3 > 1$. La Figura 6-51 ilustra estas afirmaciones. En baja frecuencia, $\omega_f = 1$ rad/s, se tienen en cuenta especificaciones de reducción de incertidumbre para el seguimiento de señales $\delta_s(\omega_f) = 1.03$ y especificaciones de atenuación de perturbaciones en la salida $\delta_2(\omega_f) = 0.2$. En alta frecuencia, $\omega_f = 90$ rad/s, se relajan los beneficios buscados con el control realimentado, $\delta_s(\omega_f) = 50$ y $\delta_2(\omega_f) = 9$, y se imponen los de estabilidad $\delta_1(\omega_f) = 1.3$.

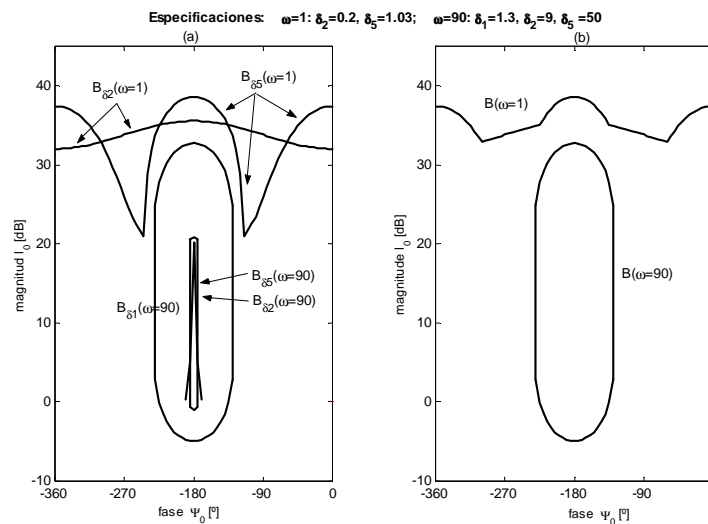


Figura 6-51: Solución frecuencial de contornos para diversos problemas de control

El problema de incompatibilidad de contornos entre diferentes especificaciones para la misma frecuencia, puede surgir en medias a

moderadamente altas frecuencias si se emplean tolerancias que limitan el ancho de banda del sistema, $\delta_1 < 1$ y/o $\delta_4 < 1/p$. Un ejemplo ilustrativo de este hecho se incluía en la Sección 6.1.5. Sin embargo, habitualmente en las estrategias de control, la reducción de la ganancia de alta frecuencia suele utilizarse como una especificación implícita más que explícita, p.e. como muestra el ejemplo de la Figura 6-51. Los contornos de alta frecuencia son de tipo A, y los dominantes representan al requisito de estabilidad. Esto permite una reducción de la ganancia $|L_0|$ tan rápido en la frecuencia como permita la estabilidad. Aun existiendo compatibilidad de contornos en todas las frecuencias, un incremento de la incertidumbre o especificaciones más agresivas en bajas frecuencias, pueden complicar mucho la síntesis de L_0 . Para el caso de un sistema con mayor incertidumbre se estudiaba un ejemplo en la Sección 4.5.2. Para especificaciones más exigentes, un ejemplo se estudiaba en la Sección 5.4.2. En este último caso, se consideraba un problema de rechazo de perturbaciones, donde una tolerancia $\delta_2(\omega=1)$ más agresiva sobre la función sensibilidad $|S(\omega=1)|$, tal que $|S|=|1/1+L|=|Y/D_2| < \delta_2$, elevaba el contorno de baja frecuencia mejorando el comportamiento dinámico y estático en el rechazo de perturbaciones. El precio pagado era una mayor ganancia de alta frecuencia con la consiguiente mayor amplificación de ruidos de medida, o ante un compromiso de limitar dicha ganancia, una mayor complejidad del controlador. Estas consecuencias serían las mismas para el problema del seguimiento de señales, ya que éste presenta la misma tipología de contornos, y éstos evolucionan de la misma forma cuando disminuye la especificación o aumenta la incertidumbre. Compárense la Sección 4.3 y la Sección 6.2.4 para la contribución de la incertidumbre; y la Sección 4.4 y la Sección 6.2.5 para la influencia de la tolerancia de especificación.

Como ejemplo ilustrativo del problema que nos ocupa, se estudia una familia de plantas $\{P_1(s)=k/(s/a+1)\}$ con incertidumbre en $k=[1, 10]$ y polo fijo en $a=5$; y otra familia $\{P_2(s)=k/(s/a+1)\}$ con incertidumbre en $a=[1, 10]$ y ganancia fija $k=10$. En baja frecuencia, por ejemplo $\omega_f=0.1$ rad/s, la plantilla $P_1(j\omega_f)$ contiene tan sólo una cierta incertidumbre en magnitud, debida a la incertidumbre en k ; y la plantilla $P_2(j\omega_f)$ contiene sólo incertidumbre en fase debida al parámetro polo a con incertidumbre.

La Figura 6-52 muestra los contornos¹² de baja frecuencia para la familia $\{P_1(j\omega_f)\}$ para distintos intervalos de incertidumbre en $k=[1, 10]$. Estos se corresponden con tres divisiones d_1 , d_2 y d_3 , correspondientes con k_1 en $[1, 1.4]$, k_2 en $[1.4, 2.5]$ y k_3 en $[2.5, 10]$, respectivamente. Como era de esperar

¹² Nótese que se expresan los contornos para L_0 y no para G como venía siendo habitual en las anteriores secciones y capítulos.

la reducción de incertidumbre paramétrica, $\{k\} > \{k_3\} > \{k_2\} > \{k_1\}$, implica una reducción de la incertidumbre frecuencial en magnitud p_{max}/p_{min} de la plantilla $P_{1ki}(j\omega_f)$. Como el polo es fijo en $a=5$, en todas las frecuencias (entre ellas ω_f) las plantillas $\Im P_{1ki}(j\omega)$ resultan de incertidumbre horizontal nula, $\Delta\theta=0$, y con incertidumbre en ganancia: $\Delta p = p_{max}/p_{min} = k_{max}/k_{min}$ o $\Delta p = Lm(k_{max}/k_{min})$ [dB]. Por tanto, en el ejemplo, resultan $\Delta p_{\{k\}}=10$ (o 20dB), $\Delta p_{\{k_3\}}=4$ (o 12dB), $\Delta p_{\{k_2\}}=1.8$ (o 5dB), y $\Delta p_{\{k_1\}}=1.4$ (o 2.9dB). Y en la frecuencia $\omega_f=0.1$, se tiene $\Delta\theta=0^\circ$, $\theta(\omega_f)=-1^\circ$. Según se demostraba en la Sección 6.2.4 la reducción de la incertidumbre en ganancia en una frecuencia $\Delta p(\omega) = p_{max}/p_{min}$, para una especificación de comportamiento constante, $\mathcal{S}_s(\omega)=1.001$ en el ejemplo, se traducían en unos contornos menos agresivos. Así lo demuestran los contornos en la Figura 6-52 para el ejemplo donde $\Delta p_{\{k_1\}} < \Delta p_{\{k_2\}} < \Delta p_{\{k_3\}} < \Delta p_{\{k\}}$. Teniendo en cuenta que los intervalos de incertidumbre $\{k_1\}$, $\{k_2\}$ y $\{k_3\}$ son divisiones del total $\{k\}$, obsérvese la mejora (descenso) del contorno de baja frecuencia en la Figura 6-52 para las fases 0° , -180° y -360° , de las divisiones. Nótese que los contornos representados son para L_0 , mientras que habitualmente en el documento se venían trazando los contornos para G . De cualquier modo, y como se ha demostrado en otras secciones, ambos tipos de contornos expresan las mismas necesidades. Los contornos para L_0 muestran la necesidad de control G respecto a la planta nominal P_0 . En el ejemplo, se utilizó como planta nominal la de módulo mínimo en la plantilla, es decir, $P_0(j\omega) = k_{min}/(\omega/5+1)$, con $k_{min}=1$ para $\{k\}$ y $\{k_1\}$, $k_{min}=1.4$ para $\{k_2\}$ y $k_{min}=2.5$ para $\{k_3\}$.

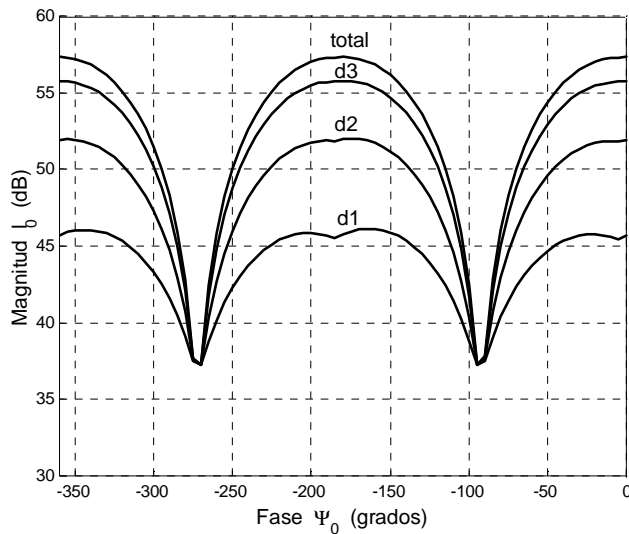


Figura 6-52: Variación de los contornos de baja frecuencia del servo al variar la incertidumbre en magnitud

Paralelamente, la Figura 6-53 muestra los contornos de baja frecuencia para $\{P_2(s)=k/(s/a+1)\}$ con $k=10$ y para distintos intervalos de incertidumbre en $a=[1, 10]$. Estos se corresponden con tres divisiones d_1, d_2 y d_3 , con a_1 en $[1, 2.2]$, a_2 en $[2.2, 4.6]$ y a_3 en $[4.6, 10]$, respectivamente. Tal y como se demostraba en la Sección 6.2.3, la reducción de incertidumbre frecuencial en fase $\Delta\theta=\theta_{max}-\theta_{min}$ en una plantilla (debida en este caso a la reducción de la incertidumbre paramétrica del polo a_i en $\Im P_{2ai}(j\omega_f)$) implica unos contornos menos agresivos. En concreto al reducirse la incertidumbre en fase los contornos intersección se relajaban en las proximidades de -90° y -270° . En el caso del ejemplo para $\omega_f=0.1$ rad/s la incertidumbre en ganancia es nula, $\Delta p(\omega_f)=0$, y el módulo constane, $p(\omega_f)=1$ (20dB). La especificación $\delta_5(\omega_f)=1.001$ toma siempre un valor constante para una frecuencia fija. Para ω_f las plantillas $\Im P_{2ai}(j\omega_f)$ se caracterizan por incertidumbres en fase de $\Delta\theta_{\{a_1\}}=5.15^\circ$, $\Delta\theta_{\{a_2\}}=3.14^\circ$, $\Delta\theta_{\{a_3\}}=1.35^\circ$, $\Delta\theta_{\{a_3\}}=0.66^\circ$, cumpliéndose que $\Delta\theta_{\{a_3\}}<\Delta\theta_{\{a_2\}}<\Delta\theta_{\{a_1\}}<\Delta\theta_{\{a_1\}}$, y por tanto, una relajación de los contornos representativos.

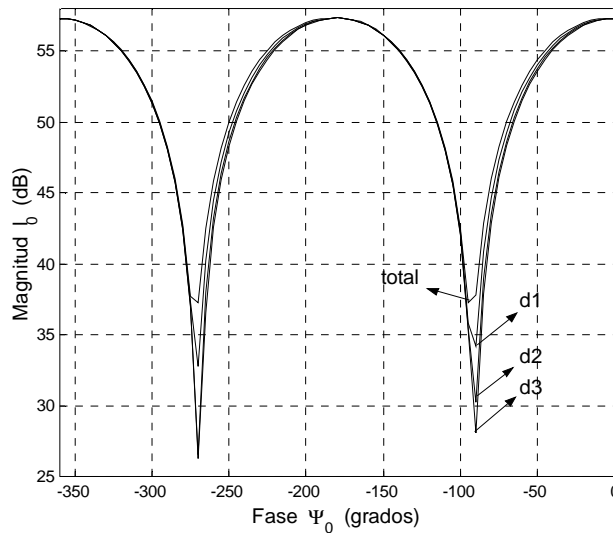


Figura 6-53: Variación de los contornos de baja frecuencia del servo al variar la incertidumbre en fase

6.2.6.3 El Control Robusto-Adaptativo

Ante una mayor incertidumbre (ejemplo en la Sección 4.5.2) o unos beneficios de realimentación mayores (ejemplo en la Sección 5.4.2), el precio pagado era una mayor ganancia de L_0 en alta frecuencia o una mayor complejidad del controlador G . Además, inevitablemente en presencia de

incertidumbre, la necesidad de satisfacer unos mínimos para todas las plantas implica un sobrediseño para algunas de ellas. Luego, un único diseño para una planta perfectamente definida no puede resultar igual de ‘óptimo’ que si la planta se desconoce en un cierto rango. Supónganse parámetros variables con una cierta lentitud. Para garantizar la misma agresividad en el seguimiento de señales, una supuesta $L=GP$ fija (sin incertidumbre en P), podría tener una mayor ganancia de baja frecuencia y al mismo tiempo una menor ganancia de alta frecuencia que si P contiene incertidumbre. Esta idea sugiere el empleo de los principios del control adaptativo, un controlador ‘óptimo’ para cada punto de operación. Sin embargo, en la práctica ninguna planta se conoce de manera exacta y en muchos casos suele tener consecuencias desastrosas el no considerar la incertidumbre en el propio diseño *off-line* de G sino en vez de en la identificación y cálculo *on-line*. Por ello, el control adaptativo suele ser inviable. No obstante, si la variación en los puntos de operación físicos pudiera entenderse como la variación entre zonas de operación, por ejemplo por envejecimiento o cambios graduales de condiciones del proceso, entonces tiene sus ventajas el empleo de un control robusto-adaptativo. Esta misma idea puede utilizarse en presencia de incertidumbre ante otros objetivos de control distintos al seguimiento de señales, como por ejemplo en el rechazo de perturbaciones.

El nuevo esquema de control podría determinarse como indica la Figura 6-54.

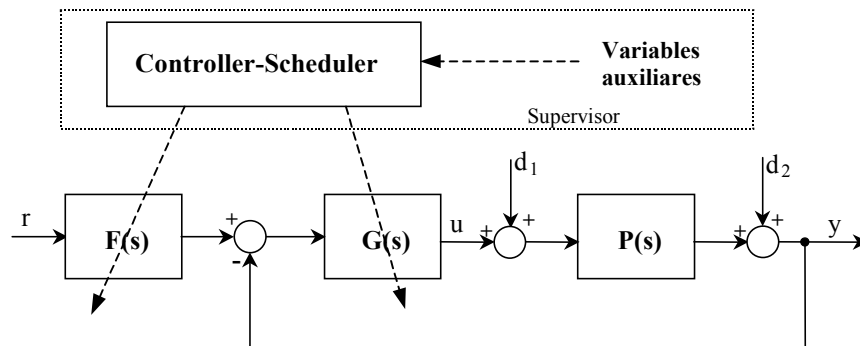


Figura 6-54: Esquema de control robusto-adaptativo

La solución propuesta es la división de la incertidumbre paramétrica, diseñando un controlador QFT para cada subdivisión. Las nuevas zonas, al presentar menor incertidumbre, necesitarán controladores con menor ganancia estática de lazo abierto y por tanto: (a) exigirán esfuerzos de control más asequibles para conseguir las especificaciones deseadas, (b) permitirán controladores más sencillos, (c) se reducirá la ganancia de alta frecuencia (coste de realimentación), (d) el comportamiento de cada controlador puede ser más agresivo (menor sobrediseño para ciertas plantas),

aunque esto elevaría de nuevo el coste de realimentación de cada controlador.

Sin embargo, no se debe olvidar que el objetivo fundamental de todo control, es la robustez. Por ello, si la variación física del sistema se traduce en el dominio frecuencial de cada plantilla ω_i en un salto entre subdivisiones no contiguas sobre el plano de Nichols, se recomienda la subdivisión de la incertidumbre sólo para el trazado de los contornos de comportamiento en baja frecuencia (contornos de seguimiento de señales o rechazo de perturbaciones). Sin embargo, para el trazado de los contornos correspondientes a las especificaciones de estabilidad, dominantes en alta frecuencia, se considerará la incertidumbre global. Entonces, los controladores QFT diseñados para cada zona serán más óptimos (según los criterios (a) a (d) anteriores) en su área particular de operación pero estables en la zona global de incertidumbre.

Llevada a cabo la división y los diseños de los diferentes controladores G , se construiría una estructura *controller-scheduler* como la de la Figura 6-54, de acuerdo con los principios del control adaptativo (Aström y Wittenmark, 1995). De este modo, medido *on-line* el punto de operación mediante variables auxiliares, se determinaría la zona de incertidumbre previamente acotada en la que se encuentra el sistema, y se habilitará el controlador correspondiente. Se sugiere considerar técnicas anti-choque que permitan un cambio suave de la ley de control entre zonas, lo cual puede conseguirse simplemente con subdivisiones paramétricas que originen plantillas solapadas frecuencialmente.

Teniendo en cuenta las hipótesis anteriores de diseño de los controladores, un fallo en el sistema de identificación y selección del controlador, sólo supondrá un deterioro del comportamiento óptimo pero nunca la pérdida de estabilidad ni de robustez. El desarrollo de este tipo de estructuras, es una posible vía de continuación del presente trabajo. Aquí únicamente se describe una posible metodología de división de la incertidumbre, tras el estudio previo realizado sobre los contornos en las secciones anteriores. No obstante, las necesidades prácticas pueden condicionar las suposiciones estrictamente teóricas aquí consideradas.

La **metodología de división** de la incertidumbre se estudia a continuación. Es conveniente seleccionar un sólo parámetro a dividir para simplificar el proceso de fragmentación y reducir el número final de diseños a realizar, factores importantes para ahorrar esfuerzo de diseño. Otro hecho a tener en cuenta es, que la división de un parámetro no sólo afecta a la incertidumbre de la plantilla ω_f , sino que también modifica la posición de la planta nominal P_0 y, por tanto, el punto de partida en el modelado de L_0 . Esto ha de

considerarse para que los controladores finales tengan similar ganancia estática, evitando excesivas divisiones y homogeneizando el comportamiento final del sistema. El punto de inicio de diseño, $P_0(\omega_f)$, está siempre ubicado sobre las líneas de fase: 0° , -90° , -180° ó -270° , si no existen retardos puros. Por tanto, y dado que en $P_0(\omega_f)$ es donde se añade la ganancia estática hasta alcanzar el contorno ω_f (véase Sección 2.3), será en la fase de $P_0(\omega_f)$ donde el contorno deberá descender en términos de log-magnitud. Relacionando esto con anteriores conclusiones, ilustradas en la Figura 6-52 y la Figura 6-53, el objetivo final será:

- Fragmentar la incertidumbre vertical de la plantilla ω_f cuando el ‘tipo’¹³ deseado del sistema sea 0 ó 2; ya que la ganancia estática se añade en 0 o -180° y en esta fase es donde la mejora del contorno ω_f es mayor (Figura 6-52)
- Dividir la incertidumbre horizontal de la plantilla ω_f cuando el tipo deseado del sistema sea 1 ó 3; ya que la ganancia estática se añade en -90° o -270° y en esta fase es donde la mejora del contorno ω_f es mayor.

La contribución de los parámetros ganancia, polo y/o cero a la incertidumbre en magnitud y fase de la plantilla de baja frecuencia se estudiaron en la Sección 3.2.3.

Englobando los conceptos expuestos anteriormente, el proceso de división paramétrica podría resumirse como sigue:

- Cuantificar el esfuerzo de control máximo permitido por los actuadores físicos o la reducción deseada de ganancia en alta frecuencia.
- Analizar si la incertidumbre del sistema y las especificaciones de baja frecuencia implican sobrepasar dicho límite, en cuyo caso será necesaria la fragmentación.
- En función del tipo deseado del sistema (polos en el origen), determinar la fase en qué el contorno de baja frecuencia debe disminuir su altura en decibelios.
- Si dicha fase es 0° o -180° , interesará dividir la incertidumbre vertical de la plantilla ω_f . Si la fase es -90° o -270° , se fragmentará la incertidumbre horizontal.
- Identificar los parámetros que aportan la incertidumbre a dividir: la incertidumbre vertical en baja frecuencia es aportada por parámetros ganancia en formatos φ_1 en (3.12), y por ganancia, ceros y/o polos en formatos φ_2 en (3.13); la incertidumbre horizontal de baja frecuencia la

¹³ El ‘tipo’ del sistema hace referencia en términos de control al número de polos en el origen. En este caso, se consideran los aportados por la planta P más aquellos que debe incluir el controlador G .

aportan parámetros cero y/o polo. Tras cuantificar la contribución de cada parámetro a la incertidumbre a dividir, se aconseja seleccionar un sólo parámetro para la división, con el fin de simplificar el proceso y reducir el número de diseños a realizar.

- Calcular la posición del contorno ω_f en la fase de $P_o(\omega_f)$, que será función de la especificación y de la incertidumbre vertical u horizontal de la plantilla ω_f .
- Ir dividiendo el parámetro seleccionado en función de la incertidumbre que aporta a la plantilla ω_f , la distancia al contorno ω_f , la máxima ganancia permitida, y la consideración de que $P_o(\omega_f)$ también se desplaza al realizar las subdivisiones. Las divisiones efectuadas darán lugar a controladores con similar ganancia estática por debajo del máximo permitido.

El proceso de subdivisión no es trivial. Entre otras dificultades destaca que en términos de incertidumbre vertical, la ganancia sobre el diagrama de Nichols varía en decibelios, por lo que la división de la incertidumbre no debe seguir patrones lineales sino logarítmicos. En términos de incertidumbre horizontal, la raíz dominante es la situada más cerca del origen, pero su incertidumbre no contribuye en fase de forma linealmente distribuida.

A continuación se muestran unos **ejemplos** de división de incertidumbre y los beneficios obtenidos.

Ejemplo 1

Se parte de un sistema $\{P_f(s)=k/(s/a+1)\}$, con incertidumbre en $k=[1, 10]$ y $a=[1, 10]$. Dicha planta responde a un formato φ_1 en (3.12) y no posee ningún polo en el origen ($r=0$). Las especificaciones estáticas se suponen tales que un sistema de tipo 0 ($r+t=0$) es suficiente. Por tanto, habrá que dividir la incertidumbre vertical de la plantilla ω_f . Siendo el parámetro k el único que contribuye a la incertidumbre vertical (formatos φ_1), se generarán tres divisiones $k_1=[1, 1.4]$, $k_2=[1.4, 2.5]$ y $k_3=[2.5, 10]$. Éstas producen incertidumbres en magnitud logarítmica $\{p(\omega)=p_{max}/p_{min}\}$ de 2.92 dB, 5.04 dB y 12.04 dB, respectivamente. La incertidumbre vertical total es de 20dB. Las especificaciones de estabilidad serían $\delta_1(\omega)=1.3$ y de comportamiento robusto ante referencias tal que $\delta_2(\omega_f=0.1)=1.0012$. En la Figura 6-55 pueden observarse las mejoras del contorno ω_f y cómo $P_o(\omega_f)$ varía para cada división. Las ganancias estáticas finales de cada uno de los nuevos controladores son, 47.5 dB para la división 1, 48.3 dB para la división 2 y 49.3 para la división 3. Si no se fragmentara k se necesitaría una ganancia de

57.3 dB. Por tanto, la mejora es de 10dB, lo que significa una reducción de 3.16 veces el esfuerzo de control, y de la ganancia de alta frecuencia $|L_o(\omega_f)|$.

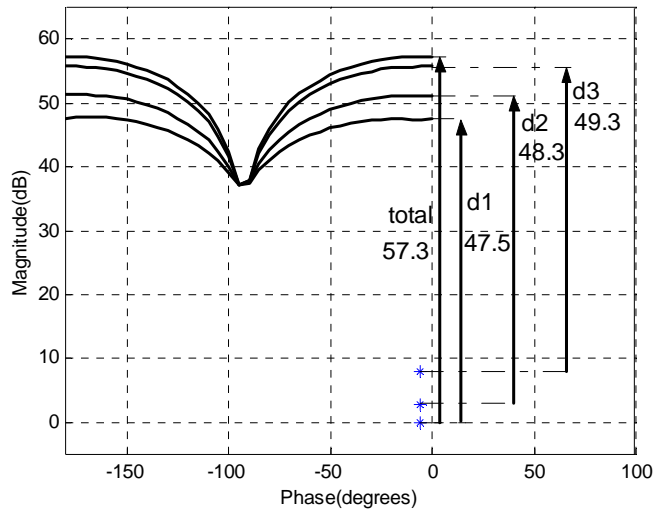


Figura 6-55: Reducción de ganancia estática con división de incertidumbre vertical.

Ejemplo 2

Se parte ahora de un sistema $\{P_2(s)=k/(s/a+1)\}$, con incertidumbre en k en $[1, 1.75]$ y a en $[1, 100]$. Dicha planta responde a un formato $\{\varphi_1$ en (3.12). En este caso las especificaciones estáticas se supone que hacen necesario un polo en el origen. Por tanto, el punto de inicio de diseño se sitúa en -90° y será la incertidumbre horizontal de la plantilla ω_f la que sea necesaria dividir. Esta incertidumbre en fase es aportada por el polo real, que dividimos en d_1 y d_2 , con $a_1=[1, 2]$ y $a_2=[2, 100]$, respectivamente. Las especificaciones de estabilidad y reducción de incertidumbre fueron descritas anteriormente. La Figura 6-56 muestra la mejora del contorno ω_f en cada diseño y la poca relevancia de la variación de $P_o(\omega_f)$ para cada división. Mientras que la ganancia estática necesaria sin subdivisión es de 38.4 dB, una vez llevadas a cabo las fragmentaciones ganancias de 34.2 y 33.4 dB cumplen especificaciones. Por tanto, la mejora es de 4 dB, lo que reduce el esfuerzo de control 1.6 veces.

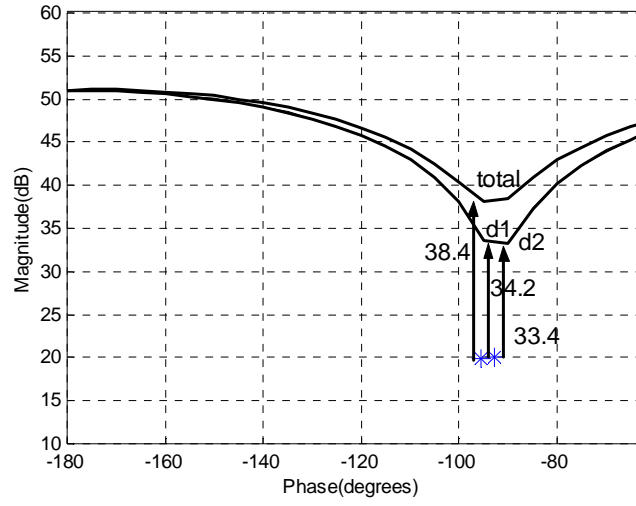


Figura 6-56: Reducción de ganancia estática con división de incertidumbre horizontal.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 6-1: Resumen de tipologías de contornos.....	274
Figura 6-2: Contorno de tipología D ($p\delta_i < 1$) sin considerar la incertidumbre	275
Figura 6-3: Contorno de tipología A ($p\delta_i > 1$) sin considerar la incertidumbre.....	277
Figura 6-4: Transición ($p\delta_i = 1$) entre tipologías D y A de contornos sin la incertidumbre.....	278
Figura 6-5: Tipologías de contornos según la variación de la magnitud p de la planta.....	280
Figura 6-6: Influencia de la magnitud p de la planta en contornos de tipología D ($p < 1/\delta_i$)	281
Figura 6-7: Influencia de la magnitud p de la planta en contornos de tipología A ($p > 1/\delta_i$).....	282
Figura 6-8: Transición entre tipologías D y A de contornos.....	283
Figura 6-9: Influencia de la incertidumbre en magnitud $\{p\}$ en tipologías D simples	285
Figura 6-10: Influencia de la incertidumbre en magnitud $\{p\}$ en tipologías A simples	286
Figura 6-11: Influencia de la incertidumbre en magnitud $\{p\}$ en tipologías A y D simples	287
Figura 6-12: Plantilla genérica y perfil en $\omega = 2\text{rad/s}$ para $\{P(s)\}$	289
Figura 6-13: Perfil de plantilla para el cálculo de contornos intersección tipo D.....	290
Figura 6-14: Contorno intersección de tipo D para plantilla genérica	291
Figura 6-15: Perfil de plantilla para el cálculo de contornos intersección tipo A.....	292
Figura 6-16: Contorno intersección de tipo A para plantilla genérica.....	293
Figura 6-17: Perfil de plantilla para contorno intersección D.....	294
Figura 6-18: Contorno D intersección para tipologías simples A y D de plantilla genérica.....	294
Figura 6-19: Tipologías de contornos en función de la tolerancia de especificación δ_4	295
Figura 6-20: Influencia de la especificación δ_4 en contornos de tipología D ($\delta_4 < 1/p$)	296
Figura 6-21: Transición de contornos de tipología D a A para especificación $\delta_4 = 1/p$	297
Figura 6-22: Influencia de la especificación δ_4 en contornos de tipología A ($\delta_4 > 1/p$).....	298
Figura 6-23: Contornos para el ejemplo con especificaciones δ_1, δ_2 y δ_4	302
Figura 6-24: (a) Incertidumbre en magnitud y especificación. (b) Limitaciones para la existencia de solución	303
Figura 6-25: Tipologías de contornos para la incertidumbre en magnitud p_d/p_e y la especificación δ_5 , con fase θ constante.....	310
Figura 6-26: Contornos simples de tipología A: (a) tipología A_1 (b) tipología A_2	313
Figura 6-27: Contornos simples de tipología B_1	315
Figura 6-28: Contornos simples de tipología B_2	317
Figura 6-29: Contorno intersección tipo B, para tipologías simples A_1 y B_2 ($\delta_5^2 \leq p_{\max}/p_{\min}$).....	320
Figura 6-30: Contorno intersección tipo B, para tipologías simples A_1 y B_1 ($\delta_5^2 \leq p_{\max}/p_{\min}$).....	321
Figura 6-31: Contornos intersección tipo A, para tipologías simples A_1 y A_2 ($p_{\max}/p_{\min} \leq \delta_5$)	321
Figura 6-32: Plantilla ejemplo con incertidumbre en magnitud y ganancia.....	323
Figura 6-33: Contornos considerando perfil izquierdo y derecho de plantilla ejemplo	324
Figura 6-34: Contornos de tipología A para incertidumbre sólo en fase.....	325
Figura 6-35: Contornos de tipología A para incertidumbre en fase grande.....	326
Figura 6-36: Influencia del módulo en los contornos debidos a la incertidumbre en fase....	327
Figura 6-37: Influencia de la especificación sobre el contorno de incertidumbre en fase....	328

Figura 6-38: Contribución del tamaño de incertidumbre en fase sobre los contornos 328

Figura 6-39: Contornos finales considerando incertidumbre en fase y ganancia..... 329

Figura 6-40: Contorno con plantas en perfil inferior prescindible..... 331

Figura 6-41: Contorno con plantas en perfil inferior imprescindible..... 331

Figura 6-42: Tipologías de contornos en función de la incertidumbre
en magnitud (p_{max}/p_{min}) 332

Figura 6-43: Contorno A tras incremento de incertidumbre
en magnitud en $1 \leq p_{max}/p_{min} \leq \delta_5$ 333

Figura 6-44: Contorno B tras incremento de incertidumbre
en magnitud en $\delta_5 \leq p_{max}/p_{min} \leq \delta_5^2$ 334

Figura 6-45: Incremento de incertidumbre en magnitud en $\delta_5^2 \leq p_{max}/p_{min} < +\infty$ 335

Figura 6-46: Evolución de tipologías de contornos en función de la especificación 337

Figura 6-47: Contornos para variación de la especificación en $1 \leq \delta_5 \leq \sqrt{p_{max}/p_{min}}$ 338

Figura 6-48: Contornos para variación de la especificación en $\sqrt{p_{max}/p_{min}} \leq \delta_5 \leq p_{max}/p_{min}$.. 340

Figura 6-49: Contornos para variación de la especificación en $(p_{max}/p_{min}) \leq \delta_5 \leq +\infty$ 341

Figura 6-50: Influencia de δ_5 en contornos QFT 344

Figura 6-51: Solución frecuencial de contornos para diversos problemas de control..... 345

Figura 6-52: Variación de los contornos de baja frecuencia del servo
al variar la incertidumbre en magnitud..... 347

Figura 6-53: Variación de los contornos de baja frecuencia del servo
al variar la incertidumbre en fase..... 348

Figura 6-54: Esquema de control robusto-adaptativo 349

Figura 6-55: Reducción de ganancia estática con división de incertidumbre vertical..... 353

Figura 6-56: Reducción de ganancia estática con división de incertidumbre horizontal. ... 354

CAPÍTULO 7

CONTROL ROBUSTO MULTI-OBJETIVO Y UN EJEMPLO

Resumen

Este capítulo resume los principales resultados de la presente tesis, ilustrándolos a través de un ejemplo. En los Capítulos 4 al 6 fueron analizados en detalle los diversos objetivos de control realimentado, recogidos en cinco grandes áreas: la sensibilidad complementaria, la sensibilidad y la sensibilidad incluida la planta, los servosistemas y el esfuerzo de control. Ahora, se considera el problema de control en su conjunto, donde existen diversos objetivos de control a satisfacer simultáneamente. Analizadas la contribución de la incertidumbre del modelo y de la especificación de comportamiento deseada, es posible cuantificar la dificultad o imposibilidad de síntesis de un controlador robusto, así como los compromisos finales de diseño.

Contenidos

7 Control Robusto Multi-Objetivo y un Ejemplo	357
7.1 Proceso con Incertidumbre a Controlar	359
7.2 Múltiples Objetivos de Control Realimentado	361
7.3 Contornos Representativos de las Especificaciones Robustas	363
7.4 Interpretación de los Contornos	370
7.4.1 Sensibilidad Complementaria	371
7.4.2 Sensibilidad	373
7.4.3 Sensibilidad incluida la Planta	374
7.4.4 Servosistemas	375
7.4.5 Esfuerzo de Control	377
7.5 Agresividad de los Contornos	379
7.5.1 Influencia de la Incertidumbre	379
7.5.2 Influencia del Valor de Especificación	394
7.6 Estrategias de Diseño de Controladores	397
7.6.1 Requisitos para un Control Adecuado	397
7.6.2 Compatibilidad de Especificaciones Robustas en Cada Frecuencia	399
7.6.3 Compatibilidad de Especificaciones Robustas Entre Frecuencias. Modelado de L_0	410
Índice de Figuras	424
Índice de Tablas	425

7 CONTROL ROBUSTO MULTI-OBJETIVO Y UN EJEMPLO

7.1 PROCESO CON INCERTIDUMBRE A CONTROLAR

El control realimentado se justifica sólo ante procesos con algún tipo de incertidumbre, tal como la incertidumbre en el modelo, $\{P\}$, y/o las perturbaciones no medibles, D_1 o D_2 . Un esquema clásico de control realimentado se incluía en la Figura 2-1, reproducida a continuación.

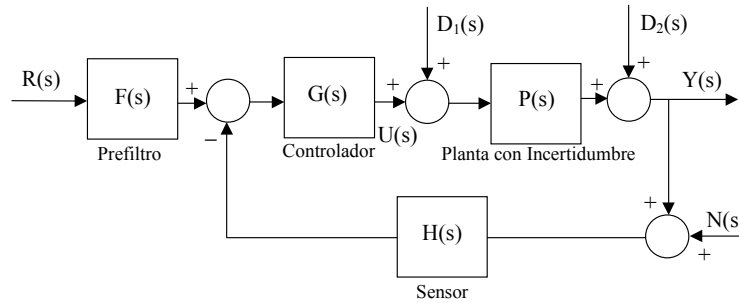


Figura 7-1: Estructura genérica de control realimentado (Igual a Figura 2-1)

Los beneficios de la realimentación conllevan un precio, tanto más alto cuanto mayores sean los beneficios obtenidos o mayor sea la incertidumbre. La técnica ‘cuantitativa’ QFT permite valorar los diferentes factores, para adoptar una solución de compromiso. Esta tesis ofrece algunas conclusiones en este sentido, es decir, sobre la síntesis del controlador analizando la compatibilidad de las distintas especificaciones en presencia de incertidumbre.

Ejemplo

Se pretende controlar la velocidad de un motor de corriente continua, a pesar de las posibles perturbaciones en su eje. El circuito eléctrico de armadura y el sistema mecánico se ilustran en la Figura 7-2.

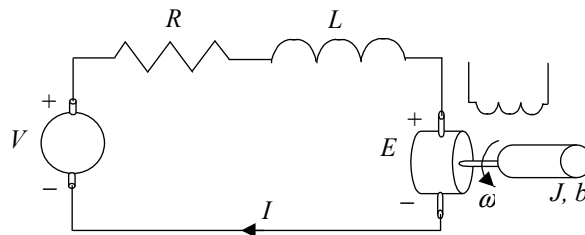


Figura 7-2: Ejemplo. Esquema de motor DC, controlado por tensión de armadura

Las características nominales del motor ofrecidas por el fabricante se presentan en la Tabla 7-1.

Denominación de Variable	Símbolo	Valor	Unidades
Inercia el rotor	J	0.01	kg m ²
Coefficiente de fricción del sistema mecánico	b	0.1	N m s
Constante de fuerza electromotriz y par motor	$K=K_e=K_t$	0.01	N m/A
Resistencia eléctrica	R	1	Ω
Inductancia electromagnética	L	0.5	H
Entrada. Fuente de tensión (circuito armadura)	V	$v(t)$	V
Salida. Velocidad del eje.	ω	$\omega(t)$	rad/s

Tabla 7-1: Ejemplo. Características nominales del motor

El modelo en función de transferencia del sistema nominal a controlar responde a:

$$\frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js + b)(Ls + R) + K^2} \quad (7.1)$$

En términos genéricos de control, ganancia y dos polos reales en este caso, el sistema (7.1) puede expresarse como sigue para los valores nominales K , J , b , L y R de la Tabla 7-1:

$$P_N(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_N}{(s + a_N)(s + b_N)}; \quad k_N = 2, a_N = 2, b_N = 10 \quad (7.2)$$

Sin embargo, las tolerancias de fabricación de los elementos, el envejecimiento del sistema, las condiciones ambientales, e incluso los errores de identificación de parámetros, alejan a la planta real de su modelo nominal de comportamiento. Es decir, en el modelo en (7.1) y la Tabla 7-1 existe una cierta incertidumbre en los parámetros K , J , b , L y R del motor. Considérese entonces una familia paramétrica de plantas tal que:

$$\wp = \left\{ P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{(s + a)(s + b)}; \quad k \in [1, 5], a \in [1, 5], b = 10 \right\} \quad (7.3)$$

Debido a la incertidumbre en el modelo y a la presencia de perturbaciones que de distinta naturaleza, se justifica el empleo de una estructura de control realimentada como la de la Figura 7-1. Los objetivos de control se describen en la siguiente sección.

Por motivos de simplicidad en la exposición de resultados, se ha tomado el parámetro b sin incertidumbre en (7.3). Nótese que el polo dominante es a , mientras que b es responsable de los fenómenos de mayor frecuencia. La realimentación es efectiva hasta cierta frecuencia, por lo que la incertidumbre en b es menos significativa que la de a .

7.2 MÚLTIPLES OBJETIVOS DE CONTROL REALIMENTADO

En QFT los objetivos de control realimentado se expresan imponiendo una tolerancia en la función de transferencia (relación salida/entrada) a controlar. Los principales objetivos de control a partir del esquema en la Figura 7-1 se pueden resumir en cinco, estudiados en los Capítulos 4 al 6 y que resume la Tabla 7-2. Por motivos de simplicidad se asume realimentación unitaria, $H(s)=1$.

Sobre la Tabla 7-2, $\delta_k(\omega)$ es el límite máximo sobre la relación salida/entrada expresada con $|T_k(j\omega)|$, función de transferencia que presenta una cierta incertidumbre debido a la incertidumbre de la planta $\{P\}$. El controlador de realimentación G paliará el efecto de la incertidumbre y solicitará la tensión necesaria para que se satisfaga $|T_k| \leq \delta_k, k=1, \dots, 5$.

Función de Transferencia y Tolerancia de Especificación	NºEc.
$ T_1(j\omega) = T(j\omega) = \left \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right = \left \frac{U(j\omega)}{D_1(j\omega)} \right = \left \frac{Y(j\omega)}{N(j\omega)} \right \leq \delta_1(\omega), \omega \in \Omega_1$	(3.6)
$ T_2(j\omega) = S(j\omega) = \left \frac{1}{1+L(j\omega)} \right = \left \frac{Y(j\omega)}{D_2(j\omega)} \right \leq \delta_2(\omega), \omega \in \Omega_2$	(3.7)
$ T_3(j\omega) = S'(j\omega) = \left \frac{P(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right = \left \frac{Y(j\omega)}{D_1(j\omega)} \right \leq \delta_3(\omega), \omega \in \Omega_3$	(3.8)
$ T_4(j\omega) = \left \frac{G(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right = \left \frac{U(j\omega)}{D_2(j\omega)} \right = \left \frac{U(j\omega)}{N(j\omega)} \right = \left \frac{U(j\omega)}{R(j\omega)F(j\omega)} \right \leq \delta_4(\omega), \omega \in \Omega_4$	(3.9)
$\delta_{5\text{inf}}(\omega) \leq T_5(j\omega) = F(j\omega)T(j\omega) = \left F(j\omega) \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right = \left \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} \right \leq \delta_{5\text{sup}}(\omega), \omega \in \Omega_5$	(3.10)
$ T_5(j\omega)/F(j\omega) = T(j\omega) = \left \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right = \left \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)F(j\omega)} \right \leq \delta_5(\omega) = \frac{\delta_{5\text{sup}}(\omega)}{\delta_{5\text{sup}}(\omega)}, \omega \in \Omega_5$	(3.11)

Tabla 7-2: Objetivos de Control Realimentado

La tolerancia $\delta_1(\omega)$ modela frecuencialmente la sensibilidad complementaria $|T|=|L/1+L|$ según (3.6) con diferentes objetivos posibles: (a) garantizar la estabilidad robusta con unos mínimos márgenes de ganancia y fase definidos en (4.83) y (4.84); (b) limitar el esfuerzo de control ante perturbaciones en la entrada del proceso, $|U/D_1|$; (c) atenuar la amplificación en la salida de ruidos introducidos por el sensor, $|Y/N|$. La especificación sobre la sensibilidad complementaria se estudió exhaustivamente en el Capítulo 4.

La tolerancia $\delta_2(\omega)$ modela frecuencialmente la función de sensibilidad $|S|=|1/1+L|$ según (3.7) con diferentes objetivos posibles: (a) una dinámica

adecuada de rechazo de perturbaciones en la salida, $|Y/D_2|$; (b) garantizar la estabilidad robusta con unos mínimos márgenes de ganancia y fase definidos en (5.120) y (5.121). Paralelamente, la tolerancia $\delta_3(\omega)$ modela según (3.8) la sensibilidad del sistema incluida la planta, $|S'|=|P/1+L|$, con el objetivo de conseguir una adecuada atenuación en la salida del sistema de perturbaciones que se producen en su entrada $|Y/D_1|$. Las especificaciones robustas en (3.7) y (3.8) se analizaron en el Capítulo 5.

La tolerancia $\delta_4(\omega)$ limita frecuentemente según (3.9) el esfuerzo de control $|G/1+L|$. El ‘coste’ del control es tanto mayor cuanto mayores sean los beneficios, incrementándose: (a) $|U/D_2|$ en el rechazo de perturbaciones¹; (b) $|U/RF|$ en el seguimiento de señales, (c) la amplificación de ruidos de alta frecuencia introducidos por el sensor, $|U/N|$. Este problema se ha estudiado en la Sección 6.1.

El problema del seguimiento de referencias se afronta con una doble desigualdad, que necesita del diseño de dos grados de libertad, G y F (véase Sección 2.2.3. El diseño de F es una tarea sencilla. Sin embargo, G debe cumplir simultáneamente el resto de objetivos $k=1, \dots, 4$. Para su síntesis la desigualdad doble en (3.10) para el problema del servo se reduce a una desigualdad simple en (3.11). Entonces, el objetivo es reducir la sensibilidad de lazo cerrado ΔT , con $T=L/1+L$, debida a la incertidumbre del proceso ΔP . La cantidad de reducción es dictaminada por $\delta_5(\omega)=\delta_{5sup}(\omega)/\delta_{5inf}(\omega)$. Este problema se estudia en detalle en la Sección 6.2.

Para conseguir un ‘adecuado’ control realimentado es preciso modelar convenientemente las tolerancias $\delta_k(\omega)$ de la Tabla 7-2 (véase Sección 7.6). Para ello, hay que tener en cuenta que las distintas especificaciones robustas habrán de ser compatibles en cada frecuencia y, también, entre las distintas frecuencias para poder sintonizar un controlador G . El análisis de los contornos QFT permite resolver este problema multiobjetivo.

Ejemplo

Se plantearán diversos problemas de control realimentado multiobjetivo:

- (i) Primeramente, se pretende regular la velocidad del rotor a un valor nominal constante, a pesar de las posibles perturbaciones que modifican ésta y a pesar de la incertidumbre. Todo ello, con una estabilidad robusta adecuada, y con el menor coste de realimentación posible. Para cumplir simultáneamente éstos objetivos se estudiarán las siguientes especificaciones robustas sobre la Tabla 7-2: $|T_k(j\omega)| \leq \delta_k(\omega)$, $k=1$ en (3.6) para la estabilidad, y $k=2,3$ en (3.7) y (3.8) para el rechazo de

¹ La tolerancia $\delta_4(\omega)$ sirve para limitar el esfuerzo de control ante perturbaciones en la entrada: $|U/D_1|$.

perturbaciones, traducidas sobre la velocidad y/o la tensión aplicada a los actuadores. El mínimo ‘coste de realimentación’ y un controlador lo más sencillo posible serán objetivos *implícitos* de diseño.

- (ii) Sobre el problema anterior, se añaden especificaciones robustas *explícitas* sobre el esfuerzo de control, fundamentalmente para limitar el principal coste de la realimentación pagado en forma de un ancho de banda excesivo (Bode, 1945; Horowitz, 1991). Además de $|T_k(j\omega)| \leq \delta_k(\omega)$, $k=1$ y $k=2,3$ se considera $k=4$ en (3.9) (véase Tabla 7-2).
- (iii) En el problema de regulación inicial (i) se pretende también dar una respuesta adecuada a diferentes consignas de velocidad. Sobre $|T_k(j\omega)| \leq \delta_k(\omega)$, $k=1$ en (3.6) para la estabilidad, y $k=2$ en (3.7) para el rechazo de perturbaciones; se añade ahora $k=5$ en (3.10) para el seguimiento de referencias o control del servosistema. Unos mínimos ‘coste de realimentación’ y complejidad del controlador, serán criterios *implícitos* de diseño.

Se escoge como intervalo discreto de frecuencias de interés:

$$\omega_i \in \Omega = [0.1, 1, 10, 100] \text{ rad/s} \tag{7.4}$$

Los valores de especificación δ_k en cada frecuencia ω_i se resumen en la Tabla 7-3. Las tolerancias escogidas se justifican posteriormente (Secciones 7.5.2 y 7.6). En ‘negrita’ se destacan las especificaciones robustas en las frecuencias de interés o dominantes para cada objetivo de control.

	$\omega_1=0.1$	$\omega_2=1$	$\omega_3=10$	$\omega_4=100$
$\delta_1(\omega)$	1.3	1.3	1.3	1.3
$\delta_2(\omega)$	0.1	0.3	0.5	2.5
$\delta_3(\omega)$	0.01	0.03	0.05	2.5
$\delta_4(\omega)$	100	100	100	100
$\delta_5(\omega)$	1.001	1.123	3.077	57.708

Tabla 7-3: Ejemplo. Tolerancias de especificación robusta

7.3 CONTORNOS REPRESENTATIVOS DE LAS ESPECIFICACIONES ROBUSTAS

Establecidas las especificaciones robustas de comportamiento en el dominio de la frecuencia (Tabla 7-2), QFT las transforma junto con la incertidumbre $\{P\}$ en contornos o curvas de restricción para la función de transferencia de lazo abierto nominal L_0 . Y se representan sobre el diagrama de Nichols.

Inicialmente el cálculo de los contornos era manual. Posteriormente han surgido diversas formulaciones para su representación (Sección 2.3.3). La presente tesis ha estudiado con detalle la formulación de los contornos QFT como inecuaciones cuadráticas, inicialmente desarrolladas por Chait y Yaniv (1993). El objetivo no es la pura automatización del cálculo de los contornos, base del diseño con QFT, sino el análisis formal de cómo las especificaciones y la incertidumbre contribuyen en la síntesis del controlador final; (véase Sección 2.7). El Algoritmo 3.1 en la Sección 3.3.2 muestra el procedimiento automático de cálculo de contornos. En resumen se puede expresar como sigue.

Tras discretizar los dominios de incertidumbre en el modelo, éstos se traducen en unas nubes de puntos o plantillas en el dominio frecuencial sobre el diagrama de Nichols. Existe una plantilla para cada frecuencia, $\mathfrak{S}P(j\omega_i)=\{p\angle\theta\}$, $i=1,\dots,N$. La incertidumbre frecuencial de la plantilla ω_i se ha caracterizado por una incertidumbre en fase $\{\theta(\omega_i)\}$ y por una incertidumbre en ganancia $\{p(\omega_i)\}$, y en términos absolutos de incertidumbre por $\Delta\theta(\omega_i)$ e $\Delta p(\omega_i)$, definidos en (3.19) y (3.18). La topología de la incertidumbre frecuencial (plantillas) basándose en los elementos habituales de control: ganancia, polos y ceros de primer y segundo orden, retardos, ..., se estudió en la Sección 3.2.3.

k	Inecuación cuadrática	NºEc.
1	$p^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\delta_1^2}\right) \cdot g^2 + 2 \cdot p \cdot \cos(\phi + \theta) \cdot g + 1 \geq 0$	(4.1)
2	$p^2 \cdot g^2 + 2 \cdot p \cdot \cos(\phi + \theta) \cdot g + \left(1 - \frac{1}{\delta_2^2}\right) \geq 0$	(5.1)
3	$p^2 \cdot g^2 + 2 \cdot p \cdot \cos(\phi + \theta) \cdot g + \left(1 - \frac{p^2}{\delta_3^2}\right) \geq 0$	(5.81)
4	$\left(p^2 - \frac{1}{\delta_4^2}\right) \cdot g^2 + 2 \cdot p \cdot \cos(\phi + \theta) \cdot g + 1 \geq 0$	(6.1)
5	$p_c^2 p_d^2 \left(1 - \frac{1}{\delta_5^2}\right) g^2 + 2 p_c p_d \left(p_c \cos(\phi + \theta_d) - \frac{p_d}{\delta_5^2} \cos(\phi + \theta_c)\right) g + \left(p_c^2 - \frac{p_d^2}{\delta_5^2}\right) \geq 0$	(6.48)

Tabla 7-4: Inecuaciones cuadráticas sin la incertidumbre para las especificaciones

En la frecuencia ω_i se tiene un valor constante de especificación $\delta_k(\omega_i)=\delta_k$, para cada una de las especificaciones planteadas en la Tabla 7-2, $|T_k| \leq \delta_k$, $k=1,\dots,5$. Se selecciona entonces una especificación $|T_k| \leq \delta_k$, y una de sus frecuencias de interés $\omega_i \in \Omega_k$. Y también, se selecciona una planta discreta en la plantilla ω_i , es decir, $p\angle\theta \in \mathfrak{S}P(j\omega_i)$. Junto con la forma polar del controlador, $G(j\omega_i)=g\angle\phi$, se sustituyen todos los parámetros fijos anteriores

en la inecuación k , $|T_k| \leq \delta_k$. Resulta entonces una nueva inecuación cuadrática, ahora sin incertidumbre, para cada problema de control, una frecuencia, y una planta, tal y como resume la Tabla 7-4. Para el problema $|T_5| \leq \delta_5$ en (3.11), como el primer objetivo es reducir la sensibilidad en lazo cerrado debida a la incertidumbre de la planta, se escogen dos plantas $p_d \angle \theta_d$ y $p_e \angle \theta_e$ en $\mathcal{S}P(j\omega)$. Y se pretende con la realimentación: $|T_d|/|T_e| \leq \delta_{5max}/\delta_{5min} \ll p_{max}/p_{min}$, con $p_{max} = \max(p_d, p_e)$ y $p_{min} = \min(p_d, p_e)$.

Calculados los valores $g_1 \angle \phi$ y/o $g_2 \angle \phi$, para el conjunto $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$, se seleccionan aquellos puntos de dichas curvas que sean reales y positivos, los cuales constituyen el contorno simple (sin considerar todavía la incertidumbre $\{p \angle \theta\}$). Si además, se debe satisfacer la inecuación k en la Tabla 7-4, se establece una zona permitida para ubicar el controlador $G = g \angle \phi$, área cuyo límite es el contorno $g_1 \angle \phi$ y/o $g_2 \angle \phi$. Surgen las tipologías de contornos como resume la Figura 7-3.

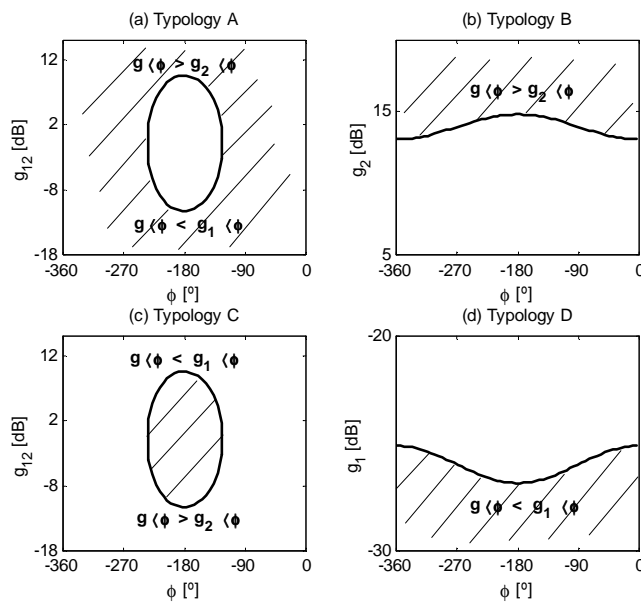


Figura 7-3: Tipologías de contornos. (Igual a Figura 3-6)

Entonces, en la frecuencia ω , para la planta $p \angle \theta$ (o plantas $p_d \angle \theta_d$ y $p_e \angle \theta_e$), la tolerancia δ_k y una fase discreta $\phi \in [-360^\circ, 0^\circ]$, se resuelve en g la ecuación cuadrática asociada a la inecuación cuadrática k de la Tabla 7-4. El resultado es la fórmula del contorno simple g_1 y/o g_2 que el módulo del controlador g debe satisfacer en la fase ϕ . Dichas fórmulas se resumen en la Tabla 7-5, y constituyen la base del estudio abordado en la presente tesis. De acuerdo a las fórmulas de los contornos en la Tabla 7-5 y a la forma de

satisfacerlos según la Figura 7-3, las inecuaciones de especificación para cada objetivo de control en la Tabla 7-4 se transforman en unos contornos para G de formulación y tipología resumidos en la Tabla 7-6. Las demostraciones formales se incluyen en la Sección 4.2 para $k=1$, Secciones 5.2.1 y 5.3.1 para $k=2$ y 3, Sección 6.1.2 para $k=4$ y Sección 6.2.2 para $k=5$.

k	Fórmulas de los contornos para el controlador: $g_{1,2}$	NºEc.
1	$g_{1,2} = \frac{1}{p \cdot \left(1 - \frac{1}{\delta_1^2}\right)} \left(-\cos(\phi + \theta) \mp \sqrt{\cos^2(\phi + \theta) - \left(1 - \frac{1}{\delta_1^2}\right)} \right)$	(4.2)
2	$g_{1,2} = \frac{1}{p} \cdot \left(-\cos(\phi + \theta) \mp \sqrt{\cos^2(\phi + \theta) - \left(1 - \frac{1}{\delta_2^2}\right)} \right)$	(5.2)
3	$g_{1,2} = \frac{1}{p} \cdot \left(-\cos(\phi + \theta) \mp \sqrt{\cos^2(\phi + \theta) - \left(1 - \frac{p^2}{\delta_3^2}\right)} \right)$	(5.82)
4	$g_{1,2} = \frac{1}{p \cdot \left(1 - \frac{1}{p^2 \delta_4^2}\right)} \cdot \left(-\cos(\phi + \theta) \mp \sqrt{\cos^2(\phi + \theta) - \left(1 - \frac{1}{p^2 \delta_4^2}\right)} \right)$	(6.2)
5	$g_{1,2} = \frac{1}{p_e p_d \left(1 - \frac{1}{\delta_5^2}\right)} \cdot \left\{ -\left(p_e \cos(\phi + \theta_d) - \frac{p_d}{\delta_5^2} \cos(\phi + \theta_e) \right) \right.$ $\mp \left. \sqrt{\left(p_e \cos(\phi + \theta_d) - \frac{p_d}{\delta_5^2} \cos(\phi + \theta_e) \right)^2 - \left(1 - \frac{1}{\delta_5^2}\right) \left(p_e^2 - \frac{p_d^2}{\delta_5^2} \right)} \right\}$	(6.49)

Tabla 7-5: Fórmulas de los contornos simples para las distintas especificaciones robustas

k	$\delta_k(\omega)$ y $p(\omega)$	Tip	Contornos simples (para $p \angle \theta$ o $p_d \angle \theta_d$ y $p_e \angle \theta_e$) en ω
1	$0 < \delta_1 < 1$	D	$g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$; $\phi \in \Phi_1 = [-360^\circ, 0^\circ]$, g_1 in (4.2)
	$\delta_1 > 1$	A	$g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$, $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$; $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ \mp \varepsilon]$, g_{12} (4.2)
2	$0 < \delta_2 < 1$	B	$g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$; $\phi \in \Phi_2 = [-360^\circ, 0^\circ]$, g_2 in (5.2)
	$\delta_2 > 1$	A	$g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$, $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$; $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ \mp \varepsilon]$, g_{12} (5.2)
3	$p > \delta_3$	B	$g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$; $\phi \in \Phi_2 = [-360^\circ, 0^\circ]$, g_2 in (5.82)
	$p < \delta_3$	A	$g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$, $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$; $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ \mp \varepsilon]$, g_{12} (5.82)
4	$p < 1/\delta_4$	D	$g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$; $\phi \in \Phi_1 = [-360^\circ, 0^\circ]$, g_1 in (6.2)
	$p > 1/\delta_4$	A	$g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$, $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$; $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ \mp \varepsilon]$, g_{12} (6.2)
	$p_{\max}/p_{\min} > \delta_5$	B	$g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$; $\phi \in \Phi_2 = [-360^\circ, 0^\circ]$, g_2 (6.49)
5	$p_{\max}/p_{\min} < \delta_5$	A	$g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$, $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$; $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ \mp \varepsilon]$, g_{12} (6.49)

Tabla 7-6: Formulaci3n y tipolog3a de contornos simples para las especificaciones robustas

Considerando el conjunto de plantas $\mathfrak{SP}(j\omega_i)=\{p\angle\theta\}$, se obtiene un conjunto de contornos simples $\{g_1\angle\phi\}$ y/o $\{g_2\angle\phi\}$. De acuerdo a las pautas de cumplimiento de los contornos: $g\angle\phi \leq g_1\angle\phi$ y/o $g\angle\phi \geq g_2\angle\phi$ en la Figura 7-3, se conforma el contorno intersección más desfavorable. Es decir, en cada $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ o $\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T]$, se escoge $g_{INF}\angle\phi = \min\{g_1\angle\phi\}$ y/o $g_{SUP}\angle\phi = \max\{g_2\angle\phi\}$, y éstos constituyen el contorno para G en la frecuencia ω_i y la especificación k , denominado $B_k(j\omega_i)$. Φ_{IS} se define en (4.55) y g_{12} la Tabla 7-5. El mismo procedimiento se sigue para el resto de frecuencias de interés y el conjunto de especificaciones. Los contornos para G , $\{B_k(j\omega_i), i=1, \dots, n, k=1, \dots, M\}$, muestran las necesidades de control en cada frecuencia ω_i y para cada especificación robusta $|T_k| \leq \delta_k$. Los contornos de especificación considerada la incertidumbre se resumen en la Tabla 7-7.

k	$\delta_k(\omega)$ y $\{p(\omega)\}$	Tip	Contornos intersección para $\mathfrak{SP}(j\omega)=\{p\angle\theta\}$ y $ T_k(j\omega) \leq \delta_k(\omega)$
1	$0 < \delta_1 < 1$	D	$g\angle\phi \leq g_{INF}\angle\phi$; $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$
	$\delta_1 > 1$	A	$g\angle\phi \geq g_{SUP}\angle\phi$, $g\angle\phi \leq g_{INF}\angle\phi$; $\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T]$
2	$0 < \delta_2 < 1$	B	$g\angle\phi \geq g_{SUP}\angle\phi$; $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$
	$\delta_2 > 1$	A	$g\angle\phi \geq g_{SUP}\angle\phi$, $g\angle\phi \leq g_{INF}\angle\phi$; $\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T]$
3	$p > \delta_3$	B	$g\angle\phi \geq g_{SUP}\angle\phi$; $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$
	$\{p\} < \delta_3$	A	$g\angle\phi \geq g_{SUP}\angle\phi$, $g\angle\phi \leq g_{INF}\angle\phi$; $\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T]$
4	$p < 1/\delta_4$	D	$g\angle\phi \leq g_{INF}\angle\phi$; $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$
	$\{p\} > 1/\delta_4$	A	$g\angle\phi \geq g_{SUP}\angle\phi$, $g\angle\phi \leq g_{INF}\angle\phi$; $\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T]$
	$p_{max}/p_{min} > \delta_5$	B	$g\angle\phi \geq g_{SUP}\angle\phi$; $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$
5	$p_{max}/p_{min} < \delta_5$	A	$g\angle\phi \geq g_{SUP}\angle\phi$, $g\angle\phi \leq g_{INF}\angle\phi$; $\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T]$

Tabla 7-7: Formulación y tipología de contornos intersección para las especificaciones

Conocidos los contornos, puede advertirse en primer lugar, la existencia de compatibilidad entre el conjunto de especificaciones, es decir, si existe intersección no nula en cada ω_i de los contornos representativos de cada objetivo: $B(j\omega_i) = \{\cap B_k(j\omega_i), k=1, \dots, M\}$. Y en segundo lugar, aun existiendo solución en los contornos, el análisis de éstos permite establecer ciertas pautas sobre la dificultad en la síntesis de un controlador. En este caso, se trata de que el controlador cumpla en el conjunto de frecuencias $\{\omega_i\}$ los contornos $\{B(j\omega_i), i=1, \dots, n\}$. Las fórmulas y las tipologías de los contornos simples $g_{12}\angle\phi$ resumidos en la Tabla 7-6 han sido la base de estos objetivos. Los estudios se han llevado a cabo en los Capítulos 4 al 6 y las conclusiones principales se resumen en posteriores secciones de este capítulo.

En el proceso habitual de diseño con QFT los contornos se expresan en términos de $L_0(j\omega)$. Entonces los contornos para G , $\{B_k(j\omega), k=1, \dots, M, i=1, \dots, n\}$ se trasladan una magnitud y una fase dictaminadas por la planta nominal $P_0(j\omega) = p_0(\omega) \angle \theta_0(\omega)$. Dichos contornos para L_0 expresan las necesidades de control G a aportar a la planta nominal P_0 para cumplir las especificaciones robustas en cada frecuencia.

Se demostró en la Sección 3.3.5 como tanto los contornos para G como para L_0 ofrecen la misma información: cantidad necesaria de control realimentado, los primeros respecto al punto $0\text{dB} \angle 0^\circ$ (control unitario, $G(j\omega)=1$) y los segundos respecto a la planta nominal $P_0(j\omega)$ (situación de partida). Los estudios sobre la influencia de la incertidumbre y la tolerancia de especificación en la compatibilidad de especificaciones robustas, se han realizado sobre los contornos para G . La síntesis de los controladores y sus dificultades se muestra sobre los contornos para L_0 .

Ejemplo

La Figura 7-4 representa mediante plantillas la incertidumbre frecuencial del sistema, definido en (7.3) en el dominio de Laplace. Se calcula una plantilla $\Im P(j\omega)$ en cada frecuencia de interés ω_i en (7.4). Sobre ellas se destaca la planta nominal $P_0(j\omega) = 1/(j\omega + 5)(j\omega + 10)$.

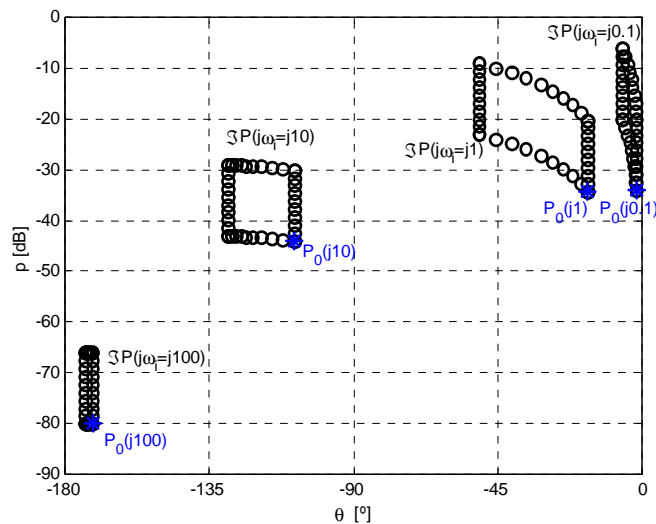


Figura 7-4: Ejemplo. Incertidumbre frecuencial: plantillas.

Según concluye la Tabla 7-7 aparecen diversas tipologías de contornos, representando en ω_i a $|T_k| \leq \delta_k$ (Tabla 7-2), en función de la relación entre la tolerancia de especificación escogida, $\delta_k(\omega)$ en la Tabla 7-3, y: (a) la

constante 1 (0dB) para $k=1,2$; (b) la incertidumbre relativa en ganancia $\{p(\omega_k)\}$ para $k=3,4$; (c) la incertidumbre absoluta en ganancia $\Delta p(\omega_k)=p_{max}/p_{min}(\omega_k)$ para $k=5$. Entonces, para los valores $\delta_k(\omega_k)$ del ejemplo en la Tabla 7-3 y la incertidumbre frecuencial en la Figura 7-4, se demuestran sobre un diagrama de Bode de magnitud las tipologías de contornos resultantes para $k=1,2,3$ y 4 (Figura 7-5) y para $k=5$ (Figura 7-6). Estos contornos se trazan en la siguiente Sección 7.4.

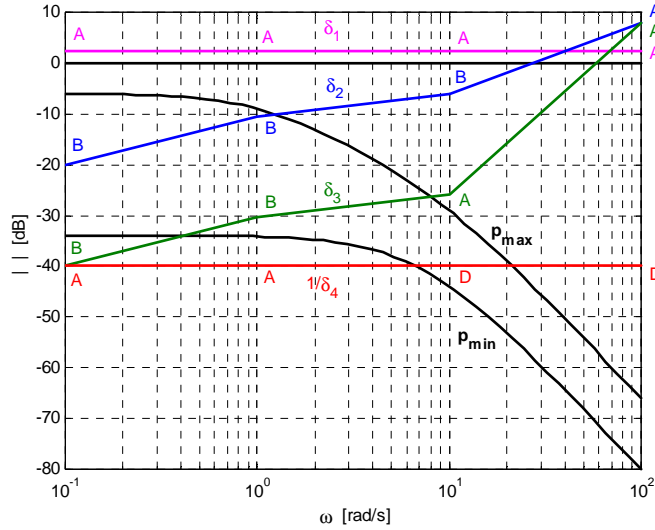


Figura 7-5: Ejemplo. Tipologías de contornos para $|T_k| \leq \delta_k$, $k=1,2,3,4$ en $\omega_i = \{0.1, 1, 10, 100\}$

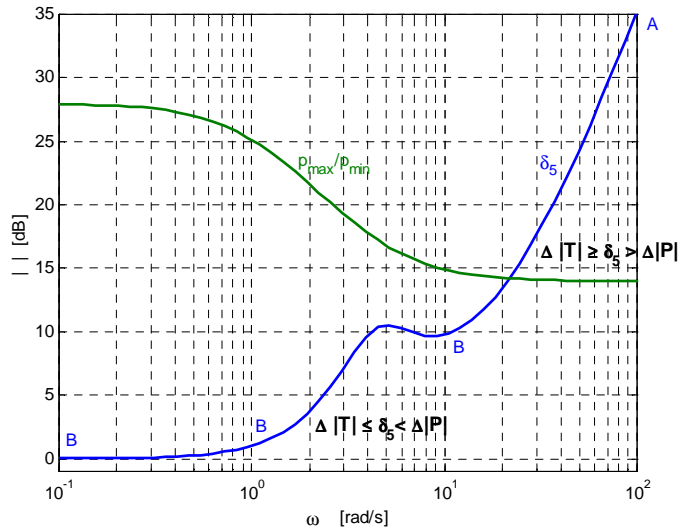


Figura 7-6: Ejemplo. Tipologías de contornos para $|T_k| \leq \delta_k$, $k=5$ en $\omega_i = \{0.1, 1, 10, 100\}$

7.4 INTERPRETACIÓN DE LOS CONTORNOS

En la Tabla 7-6 y la Tabla 7-7 se distingue entre los contornos para el controlador simples, $g_1 \angle \phi$ y/o $g_2 \angle \phi$, y los contornos intersección, $g_{INF} \angle \phi$ y/o $g_{SUP} \angle \phi$. Ambos expresan las necesidades de control, estableciendo la zona donde $G(j\omega)$ debe ubicarse con el fin de satisfacer la especificación $|T_k(j\omega)| \leq \delta_k(\omega)$. Los primeros (contornos simples) consideran que el sistema no tiene incertidumbre $\mathfrak{S}P(j\omega) = p \angle \theta$. Y los segundos surgen interceptando un conjunto de contornos simples, supuesto un sistema con incertidumbre: $\mathfrak{S}P(j\omega) = \{p \angle \theta\}$. La Figura 7-3 muestra las tipologías o forma de satisfacer los contornos simples, extensible a las tipologías de los contornos intersección (véanse Figuras 3-13, 3-14 y 3-15). El estudio de los contornos intersección (sistema con incertidumbre) se ha basado en el estudio de las fórmulas g_1 y g_2 de los contornos simples, resumidas en la Tabla 7-5. A partir de ellas y para cada objetivo k de control se ha analizado como influye la incertidumbre $\{P(j\omega)\}$, inherente al sistema de partida, y la tolerancia de especificación $\delta_k(\omega)$, que expresa el comportamiento $\{T_k(j\omega)\}$ deseado. Esto se resume en la Sección 7.5 de éste capítulo.

Sobre la Figura 7-3 un contorno representado con línea discontinua debe satisfacerse por debajo, es decir, $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$ (o $g \angle \phi \leq g_{INF} \angle \phi$). Paralelamente, un contorno representado con línea continua debe satisfacerse por encima tal que: $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$ (o $g \angle \phi \geq g_{SUP} \angle \phi$).

En una tipología A de contornos o contornos doblevaluados (gráfico (a) de la Figura 7-3) debe satisfacerse simultáneamente que $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$ y también que $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$, ambos para $\phi \in \Phi_{I2} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon] \subset [-360^\circ, 0^\circ]$. Es decir, existe un área prohibida, finita, y delimitada por dos curvas que *no* ocupan todo el intervalo angular $[-360^\circ, 0^\circ]$ de diseño. Considerada la incertidumbre se transforman en: $g \angle \phi \leq g_{INF} \angle \phi$ y $g \angle \phi \geq g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T]$. Por tanto, los contornos de tipo A no son tan restrictivos como los contornos B o D, que se extienden en todas las fases de diseño $\Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. Los contornos B (gráfico (b) de la Figura 7-3) deben cumplirse tal que: $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ (o $g \angle \phi \geq g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi$). Y para los contornos D (gráfico (c) de la Figura 7-3): $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ (o $g \angle \phi \leq g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in \Phi$). Entonces, ambas tipologías B y D delimitan un área prohibida infinita. Los contornos doblevaluados de tipo C (gráfico (d) de la Figura 7-3) son otra posibilidad en la resolución de una inecuación cuadrática. Sin embargo, esta tipología no se da en la solución de las inecuaciones en la Tabla 7-4. En resumen los contornos B y D son más exigentes o agresivos que los contornos de tipo A.

El contorno de tipo B o simplevaluado superior exige una ganancia mínima en cada fase en $[-360^\circ, 0^\circ]$, a través de G o $L_0 = GP_0$, con el fin de

cumplir el objetivo de control $|T_k| \leq \delta_k$. El contorno de tipo D o simplevaluado inferior buscan una reducción mínima de la ganancia (o establece una ganancia máxima) en cada fase en $[-360^\circ, 0^\circ]$ para G o $L_0 = GP_0$, con el fin de cumplir el objetivo de control $|T_k| \leq \delta_k$. El contorno de tipo A permite modelar G o $L_0 = GP_0$ en ganancia y fase, manteniendo $\{L\}$ suficientemente alejado del punto crítico de estabilidad $0\text{dB} \angle -180^\circ$ (establece un área prohibida finita alrededor de este punto). Esta interpretación de las tipologías es fundamental (véanse comentarios sobre los distintos objetivos de control a continuación) y explica los tipos de contornos que matemáticamente² aparecen para las diferentes especificaciones de control, según resumen la Tabla 7-6 y la Tabla 7-7.

Nótese como la tipología de los contornos en los objetivos $k=1$ y 2 depende exclusivamente de la tolerancia de especificación δ_k en ω_i . Mientras tanto, para $k=3, 4$ y 5 , la tipología del contorno depende del valor relativo entre la especificación δ_k y la incertidumbre en magnitud $\{p\}$, ambas en ω_i .

Las mismas normas e interpretaciones se establecen para los contornos sobre L_0 , contornos sobre los que en QFT se realiza realmente el diseño final de G partiendo de P_0 . De este modo, calculados los contornos intersección para $L_0 = l_0 \angle \psi_0$ se ha de satisfacer: $l_0 \angle \psi_0 \leq l_{0\text{INF}} \angle \psi_0$ y/o $l_0 \angle \psi_0 \geq l_{0\text{SUP}} \angle \psi_0$.

7.4.1 SENSIBILIDAD COMPLEMENTARIA

Para la especificación robusta sobre la sensibilidad complementaria en (3.6) (véase Tabla 7-2), $|T(j\omega)| = |L/(1+L)| \leq \delta_i(\omega)$, resulta una tipología D si $\delta_i(\omega) < 1$ y una tipología A si $\delta_i(\omega) > 1$ (véanse Tabla 7-6 y Tabla 7-7). Cuando el objetivo es garantizar una estabilidad robusta aceptable se toma $\delta_i(\omega) \approx 1.3 > 1$ (véase Sección 4.5.2). Entonces, el contorno de tipo A en ω_i garantiza que $\{L(j\omega)\}$ se aleje lo suficiente de $0\text{dB} \angle -180^\circ$. Si el objetivo es la limitación de la influencia de ruidos en la salida, $|T(j\omega)| = |Y/N| \leq \delta_i(\omega)$, entonces $\delta_i(\omega)$ debe ser lo suficientemente pequeño en las frecuencias de interés (normalmente altas frecuencias). Si estrictamente se requiere la atenuación de los ruidos se debe escoger $\delta_i(\omega) < 1$, y entonces, los contornos D fijan el nivel mínimo de reducción de $|L_0(j\omega)|$ en las frecuencias de interés (medias-altas frecuencias); véase Sección 4.5.3. Si se pretende limitar el esfuerzo de control en el rechazo de perturbaciones en la entrada, $|U/D_1| \leq \delta_i(\omega)$, un valor $\delta_i(\omega) < 1$ (contorno D) es mucho más restrictivo que $\delta_i(\omega) > 1$ (contorno A); véase Sección 4.5.4.

² Los Capítulos 4 al 6 contienen las demostraciones formales de las tipologías resultantes del estudio de las fórmulas en la Tabla 7-5.

Ejemplo

En los objetivos del Ejemplo de la Sección 7.2 se limita la sensibilidad complementaria a un valor constante en cada frecuencia, $\delta_l(\omega_i)=1.3$, con el fin de garantizar unos mínimos márgenes de ganancia y fase. Como $\delta_l(\omega_i)=1.3>1$ en $\omega_i=\{0.1, 1, 10, 100\}$ rad/s, se originarán contornos de tipo A en todas las frecuencias como demostraba la Figura 7-5³. Dichos contornos, en términos⁴ de L_θ , se reflejan sobre la Figura 7-7. De acuerdo a la interpretación anterior, al establecer una zona prohibida en torno a $0\text{dB}\angle-180^\circ$, si $L_\theta=GP_\theta$ satisface estos contornos se garantizan unos $MG\geq 45^\circ$ y $MF\geq 5\text{dB}$, según las fórmulas (4.83) y (4.84), para todas las plantas en el dominio de incertidumbre, $\{L\}$.

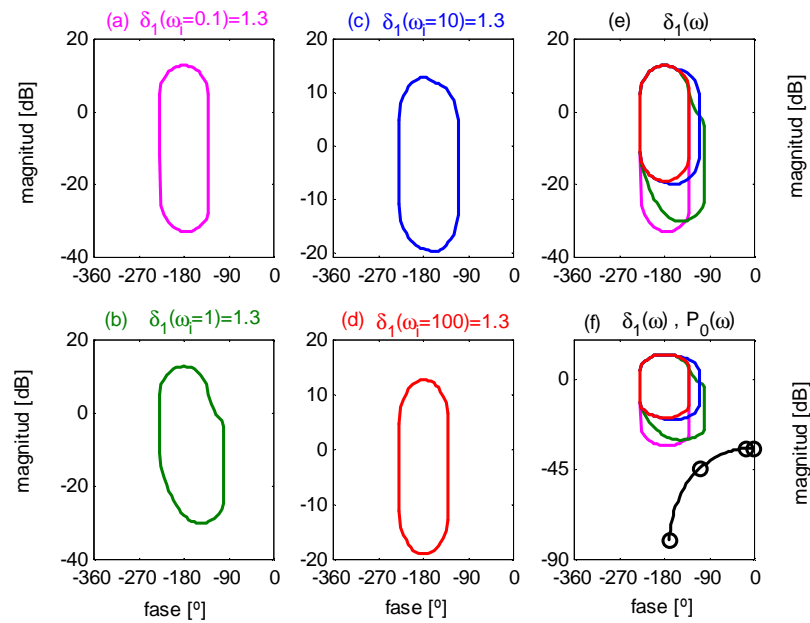


Figura 7-7: Ejemplo. Contornos de L_θ para $|T_l(\omega_i)|\leq\delta_l(\omega_i)=1.3$

³ Nótese que sobre la figura las magnitudes se expresan en decibelios, como es habitual en los diagramas de Bode y Nichols, y no en magnitudes lineales, como a menudo se refieren en el texto.

⁴ Los diseños finales de G se ejecutan sobre los contornos para L_θ , ya que se parte de una situación nominal P_θ . Dichos contornos para L_θ surgen del cálculo de los contornos para G . Por ello, los estudios de esta tesis se centran en el estudio de los contornos para G , extensibles a los de L_θ (véase Sección 3.3.5).

Los gráficos (a), (b), (c) y (d) sobre la Figura 7-7 muestran el contorno A que L_0 debe respetar en cada frecuencia $\omega_i = \{0.1, 1, 10, 100\}$. Dichos contornos consideran la tolerancia de especificación de comportamiento deseada (Tabla 7-3) y la incertidumbre de la planta de partida (Figura 7-4). El conjunto de contornos se muestra en el gráfico (e), y el gráfico (f) añade, además, la situación nominal de partida P_0 .

7.4.2 SENSIBILIDAD

Para la especificación robusta sobre la sensibilidad en (3.7), $|S(j\omega)| = |1/1+L| \leq \delta_2(\omega)$, resulta una tipología B si $\delta_2(\omega) < 1$ y una tipología A si $\delta_2(\omega) > 1$ (véanse Tabla 7-6 y Tabla 7-7). Ante un problema de rechazo de perturbaciones, $|Y/D_2(j\omega)| \leq \delta_2(\omega)$, se debe escoger $\delta_2(\omega) \ll 1$ en bajas frecuencias; véase Sección 5.4.2. Entonces, los contornos de tipo B resultantes en dichas frecuencias exhiben la ganancia $|L_0(j\omega_f)|$ necesaria, que debe añadir $G(j\omega_f)$ sobre $P_0(j\omega_f)$. En medias-altas frecuencias se debe relajar la especificación $\delta_2(\omega)$ sobre el rechazo de perturbaciones $|Y/D_2(j\omega)|$, con el fin de permitir reducir la ganancia de alta frecuencia $|L_0(j\omega_f)|$. Entonces, los contornos de tipo A, si $\delta_2(\omega_f) \gg 1$, lo permiten. Si se quiere limitar el pico de $|S|$ por motivos de estabilidad, en las frecuencias intermedias $\delta_2(\omega_{mf}) > 1$ pero $\delta_2(\omega_{mf})$ suficientemente pequeño para que el contorno A aleje al conjunto $\{L(\omega_{mf})\}$ del punto crítico $0\text{dB} \angle -180^\circ$; véase Sección 5.4.3.

Ejemplo

De acuerdo con estos criterios, se eligieron las tolerancias $\delta_2(\omega_i)$, $\omega_i = \{0.1, 1, 10, 100\}$ rad/s expresadas en la Tabla 7-3 para un adecuado rechazo de perturbaciones (el objetivo de estabilidad queda reservado a $\delta_1(\omega)$). La tolerancia $\delta_2(\omega)$ expresada en dB se representaba frecuencialmente en la Figura 7-5. Referida a la constante 1(0dB) y según las conclusiones de la Tabla 7-7, resultaban una tipología A o B, que ya se reflejaban sobre la Figura 7-5. A continuación, la Figura 7-8 representa dichos contornos. Contrástense sobre ellos la interpretación del párrafo anterior.

Los gráficos (a), (b), (c) y (d) de la Figura 7-8 muestran los contornos para L_0 en cada frecuencia. El gráfico (e) superpone todos ellos, y el gráfico (f) añade la situación nominal de partida P_0 .

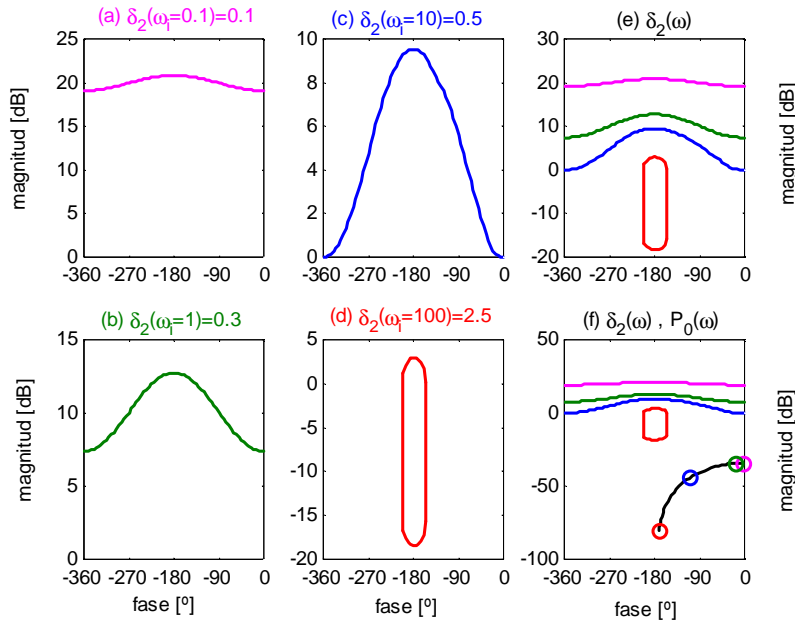


Figura 7-8: Ejemplo. Contornos de L_0 para $|T_2(\omega)| \leq \delta_2(\omega)$

7.4.3 SENSIBILIDAD INCLUIDA LA PLANTA

La especificación de sensibilidad robusta incluida la planta en (3.8) se expresa: $|S'(j\omega)| = |P/1+L| \leq \delta_3(\omega)$, y pretende un adecuado rechazo, en la salida del proceso, de perturbaciones en su entrada, $|Y/D_I(j\omega)|$. Según la Tabla 7-7 resulta una tipología B de contornos en ω_i si existe alguna planta $p \in \mathcal{S}P(j\omega_i)$ que satisface $p > \delta_3$. Las plantas que cumplen $p > \delta_3$ necesitan un incremento de ganancia g para un adecuado rechazo de la perturbación. Este supuesto se presenta habitualmente en bajas-medias frecuencias donde es necesaria una importante atenuación $|Y/D_I(j\omega_f)|$, eligiéndose para ello pequeños $\delta_3(\omega_f)$. Al mismo tiempo, en estas frecuencias es donde el módulo de las plantas $\{p(\omega_f)\}$ toma valores mayores (aunque insuficientes para el comportamiento adecuado), por lo que fácilmente se cumple $p > \delta_3$ (contornos B). Conforme aumenta la frecuencia el módulo de la planta decrece en los sistemas físicos, que son estrictamente propios: $p(\omega_f) \gg p(\omega_{hf})$. Y a su vez, los beneficios de la realimentación no pueden pretenderse más allá de cierta frecuencia (amplificación de ruidos y dinámicas no modeladas), por lo que la especificación debe relajarse, $\delta_3(\omega_f) \ll \delta_3(\omega_{hf})$. Esto conlleva que en ω_{hf} el conjunto de plantas $\mathcal{S}P(j\omega_{hf}) = \{p \in \theta\}$ satisfacen $\{p\} < \delta_3$. Los contornos de tipo A resultantes (véase la Tabla 7-7) permitirán reducir la ganancia de alta

frecuencia. Comparando $|P/1+L| \leq \delta_3(\omega)$ con $|1/1+L| \leq \delta_2(\omega)$, nótese como en el primer caso la tipología depende de la relación $p(\omega)$ y $\delta_3(\omega)$, mientras que en el segundo sólo es función de la especificación impuesta $\delta_2(\omega)$. La explicación es debida a que en $|P/1+L|$, la situación de partida $\{P\}$ contribuye de forma contrapuesta en el numerador y en denominador para reducir $|Y/D_1|$. Por el contrario, en $|1/1+L| \leq \delta_2(\omega)$, $\{P\}$ contribuye de forma unilateral a reducir $|Y/D_2|$.

Ejemplo

La Figura 7-9 refleja los contornos para L_0 que representan la especificación robusta $|T_3(\omega_i)| \leq \delta_3(\omega_i)$, caracterizada por las tolerancias $\delta_3(\omega_i)$, en la Tabla 7-3, y la incertidumbre del sistema de partida $\mathcal{S}P(j\omega_i)$, en la Figura 7-4, para $\omega_i = \{0.1, 1, 10, 100\}$ rad/s. Nótese la presencia de una tipología B o A según predecía la Figura 7-5 e interpreta el párrafo anterior.

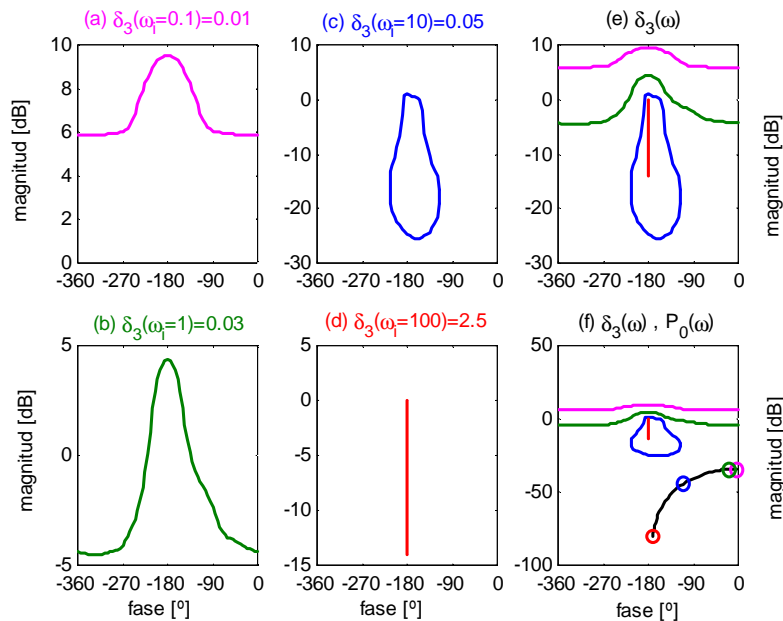


Figura 7-9: Ejemplo. Contornos de L_0 para $|T_3(\omega_i)| \leq \delta_3(\omega_i)$

7.4.4 SERVOSISTEMAS

La especificación $\delta_3(\omega)$ en (3.11) comanda el seguimiento de señales de referencia $|Y/RF|=|T|=|L/1+L|$ desde el punto de vista de G . En las frecuencias de interés, $\omega < \omega_s$, se desea reducir la variación de $|T(j\omega)|$, $\Delta|T(j\omega)|$, por debajo de la variación de $|P(j\omega)|$, $\Delta p(\omega) = p_{max}/p_{min}(\omega)$. Es decir,

$p_{max}/p_{min} > \delta_5(\omega) \geq \Delta|T(j\omega)|$. Esto necesita un aumento de la ganancia de lazo abierto $\{L\}$, expresado a través de un contorno tipo B (véase Tabla 7-7). Dicho de otro modo, el objetivo en bajas-medias frecuencias para un correcto seguimiento de señales en presencia de incertidumbre es reducir la sensibilidad $|S| = [\partial T(j\omega)/T(j\omega)]/[\partial P(j\omega)/P(j\omega)]$. Por otro lado, a efectos prácticos si $|S| < 1$ en un rango de frecuencias, exige que $|S| > 1$ en otro (Bode, 1945). Luego en $\omega > \omega_5$, los beneficios de la realimentación deben relajarse, δ_5 aumenta y la realimentación no tiene ningún efecto en estas frecuencias. En altas frecuencias se justificará que esto no supone una gran desventaja. Cualquier función L es estrictamente propia y, por tanto, $|L| \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$. Esto es debido a que cualquier planta física P cumple estas propiedades y, además, la reducción del coste de la realimentación (véase problema $k=4$) exige $|L| \ll 1$ en alta frecuencia (Horowitz y Sidi, 1972). Luego también $|T| \ll 1$. Entonces donde $|T|$ es muy pequeña, aunque el $\Delta|T|$ sea grande, su efecto es despreciable (Horowitz, 1973). En alta frecuencia por tanto, $p_{max}/p_{min}(\omega) < \Delta|T(j\omega)| \leq \delta_5(\omega)$, apareciendo contornos de tipo A (véase Tabla 7-7), que no van a ser dominantes frente a los de estabilidad, $\delta_{102} \approx 1.3 > 1$. No obstante, predominen unos u otros contornos A, esta tipología permite que $|L| \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$.

Ejemplo

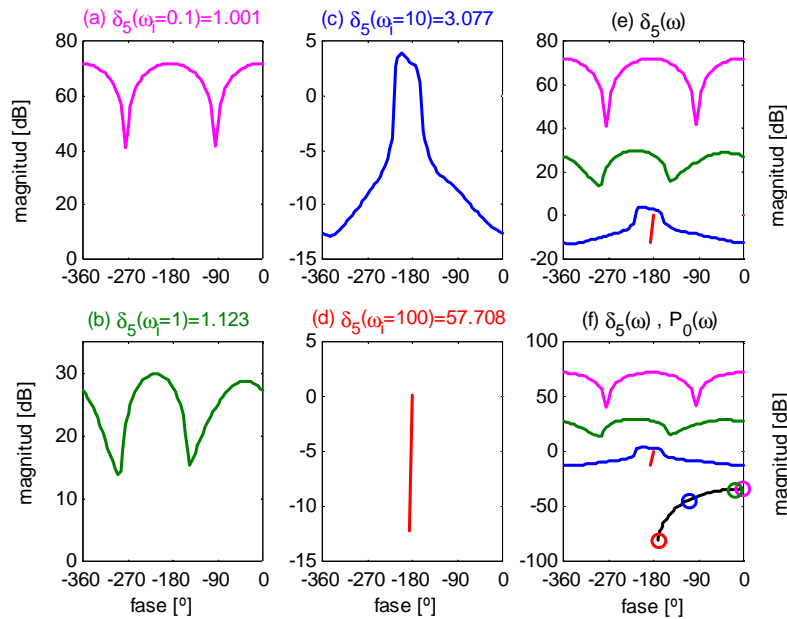


Figura 7-10: Ejemplo. Contornos de L_0 para $|T_5(\omega)| \leq \delta_5(\omega)$

La Figura 7-10 refleja los contornos para L_0 que representan la especificación robusta $|T_s(\omega_i)| \leq \delta_s(\omega_i)$ en (3.11), caracterizada por las tolerancias $\delta_s(\omega_i)$, en la Tabla 7-3, y la incertidumbre del sistema de partida $\mathfrak{SP}(j\omega_i)$, en la Figura 7-4, para $\omega_i = \{0.1, 1, 10, 100\}$ rad/s. Nótese la presencia de una tipología B o A según predecía la Figura 7-6 e interpreta el párrafo anterior. El predominio o no de éstos contornos respecto a los de otras especificaciones robustas se ilustra en figuras posteriores.

7.4.5 ESFUERZO DE CONTROL

Para la especificación robusta sobre el esfuerzo de control en (3.9), $|G/1+L| \leq \delta_f(\omega)$, resulta: (a) una tipología D si existe alguna planta $p \in \mathfrak{SP}(j\omega)$ que satisface $p(\omega) < 1/\delta_f(\omega)$; (b) y una tipología A si el conjunto de plantas $\{p \in \mathfrak{SP}(j\omega)\}$ en ω satisfacen $\{p(\omega)\} > 1/\delta_f(\omega)$; véase Tabla 7-7. El contorno D busca la reducción de la ganancia $|L_0|$ de forma más agresiva (impone una ganancia máxima en cada fase) que el contorno A (no trata de limitar $|L_0|$ en cada fase, sino más bien establece un ratio de decrecimiento de esta función). En bajas-medias frecuencias se tolera cierto esfuerzo de control que permita obtener los beneficios de la realimentación (buscados con $\delta_2(\omega_f) < 1$, $\delta_3(\omega_f) < p(\omega_f)$, $\delta_5(\omega_f) < p_{max}/p_{min}(\omega_f)$), por lo que $\delta_f(\omega_f)$ puede ser moderadamente grande. Sin embargo en altas frecuencias la ganancia $|L_0|$ debe reducirse rápidamente porque, lejos de obtener ventajas de realimentación, se amplifican desmesuradamente los ruidos introducidos por el sensor N (Horowitz, 1973). Y esto puede provocar la saturación de los actuadores. Entonces, si se incluye una especificación $\delta_f(\omega_{hf})$, este valor ha de ser suficientemente⁵ pequeño. En resumen, $\delta_f(\omega_{hf}) < \delta_f(\omega_f)$, e inversamente $1/\delta_f(\omega_{hf}) > 1/\delta_f(\omega_f)$. Por otro lado, las plantas reales son estrictamente propias con lo que $p(\omega_{hf}) \ll p(\omega_f)$. Entonces, habitualmente $1/\delta_f(\omega_{hf}) > p(\omega_{hf})$ y da contornos D, mientras que $1/\delta_f(\omega_f) < p(\omega_f)$ origina contornos A. Los contornos A de baja frecuencia no van a ser dominantes respecto al resto de especificaciones $\delta_2(\omega_f) < 1$, $\delta_3(\omega_f) < p(\omega_f)$ o $\delta_5(\omega_f) < p_{max}/p_{min}(\omega_f)$, que dan contornos B. Sin embargo, en alta frecuencia los contornos D van a ser más restrictivos que los contornos A de estabilidad $\delta_{1.02}(\omega) \approx 1.3 > 1$, también significativos en alta frecuencia. Habitualmente no se consideran implícitamente especificaciones δ_f , sino que la relajación en alta frecuencia de las especificaciones dominantes en baja frecuencia $\delta_{2,3,5}$, deja como contornos dominantes en alta frecuencia a los contornos A de estabilidad $\delta_{1.02}$. Y éstos permiten reducir la ganancia $|L_0(j\omega_{hf})|$, respetando las Integrales

⁵ Cómo de pequeño, viene impuesto por las características del sistema físico: valores tomados por las variables, función de las características nominales del sistema, y valores soportados por los actuadores.

de Sensibilidad de Bode. Sin embargo, si se consideran explícitamente especificaciones δ_4 en media-alta frecuencia, pueden ocurrir dos supuestos. Que den lugar a un contorno A, que interceptado con el de estabilidad, también de tipo A e importante en alta frecuencia, nos fijen el ratio de caída de $|L_0|$. O que δ_4 origine un contorno de tipo D, el cual puede ser incompatible si existe algún contorno B en la misma frecuencia para $\delta_2 < 1$, $\delta_3 < p$ o $\delta_5 < p_{max}/p_{min}$, (más probable hacia medias frecuencias). Un ejemplo ilustrativo de este hecho se discutió en la Sección 6.1.5 y otro se incluye en la Sección 7.6.2.

Ejemplo

La Figura 7-11 refleja los contornos para L_0 que representan la especificación robusta $|T_4(\omega)| \leq \delta_4(\omega)$ en (3.9), caracterizada por las tolerancias $\delta_i(\omega)$, en la Tabla 7-3, y la incertidumbre del sistema de partida $\mathcal{S}P(j\omega)$, en la Figura 7-4, para $\omega_i = \{0.1, 1, 10, 100\}$ rad/s. Nótese la presencia de una tipología D o A según precedía la Figura 7-5 e interpreta el párrafo anterior. La compatibilidad con los contornos representativos de otras especificaciones robustas se ilustra en figuras posteriores.

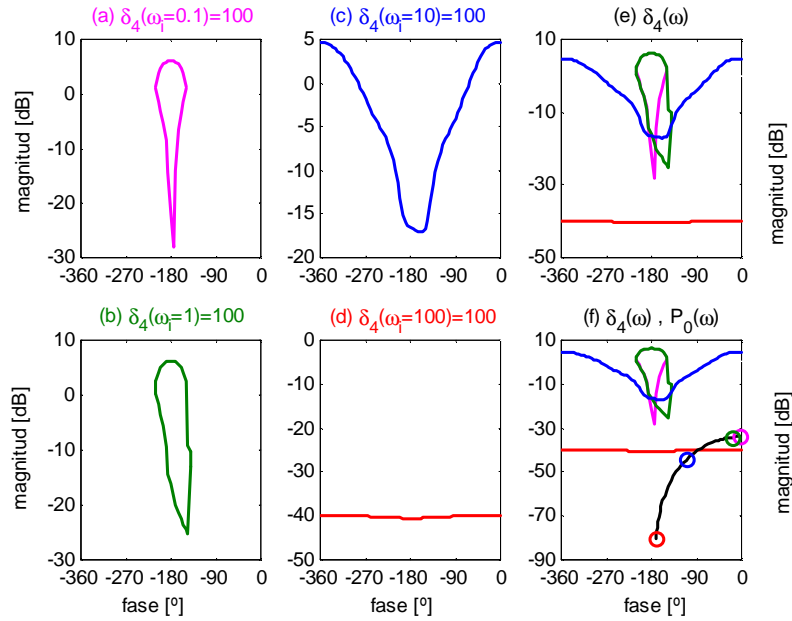


Figura 7-11: Ejemplo. Contornos de L_0 para $|T_4(\omega_i)| \leq \delta_4(\omega_i)$

7.5 AGRESIVIDAD DE LOS CONTORNOS

La 'agresividad' de un contorno hace referencia a la fuerza de la limitación que se impone sobre G (o equivalentemente sobre L_0) para cumplir la especificación robusta. Un contorno es tanto más agresivo cuando la limitación o la dificultad para satisfacerlo se incrementa. Y en tanto en cuanto los contornos reflejan en el dominio log-magnitud/fase de QFT las especificaciones robustas de comportamiento y estabilidad del sistema, contornos más agresivos implican especificaciones más ambiciosas o un sistema con mayor incertidumbre.

De acuerdo a la forma de satisfacer las diferentes tipologías de contornos (Figura 7-3) y a su interpretación según la Sección 7.4:

- Un contorno de tipo B, $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ (o $g \angle \phi \geq g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi$), es tanto más agresivo cuanto mayor altura presenta g_2 (o g_{SUP} o l_{0SUP}) en todo Φ . Dicho de otro modo, se demanda una mayor ganancia de lazo abierto $l_0 = gp_0$ en todas las fases de diseño $\Psi_0 = [-360^\circ, 0^\circ]$. ($L_0 = l_0 \angle \Psi_0$)
- Un contorno de tipo D, $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ (o $g \angle \phi \leq g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in \Phi$), es tanto más agresivo cuanto menor altura presenta g_1 (o g_{INF} o l_{0INF}) en todo Φ . Dicho de otro modo, se exige una menor ganancia de lazo abierto $l_0 = gp_0$ en todas las fases de diseño $\Psi_0 = [-360^\circ, 0^\circ]$.
- Un contorno de tipo A, $g \angle \phi \leq g_1 \angle \phi$ y $g \angle \phi \geq g_2 \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [-180^\circ - \theta \mp \varepsilon]$ (o $g \angle \phi \leq g_{INF} \angle \phi$ y $g \angle \phi \geq g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T]$), es tanto más agresivo cuanto mayor es la altura de su curva superior g_2 (o g_{SUP}), menor es la altura de su curva inferior g_1 (o g_{INF}), y mayor es el intervalo de fases ε (o ε_T) que conforman el área cerrada restringida. En definitiva, a mayor área prohibida alrededor de $0\text{db} \angle -180^\circ$ menor libertad existe en el diseño de $L_0 = GP_0$.

La presente tesis ha demostrado formalmente desde QFT y ha interpretado en términos de control, la influencia de la tolerancia de la especificación $\delta_k(\omega)$ y de la incertidumbre en fase $\{\theta(\omega_i)\}$ y ganancia $\{p(\omega_i)\}$, sobre la agresividad de los contornos para cada problema de control en la Tabla 7-2. A continuación se incluye un resumen.

7.5.1 INFLUENCIA DE LA INCERTIDUMBRE

El estudio de la influencia de la incertidumbre es decisivo en primer lugar para obtener la formulación de los contornos intersección $g_{INF} \angle \phi$ y/o $g_{SUP} \angle \phi$ a partir de los contornos simples $g_1 \angle \phi$ y/o $g_2 \angle \phi$, definidos en la Tabla 7-5. Y en segundo lugar, su análisis permite concluir su contribución en la

‘agresividad’ de los contornos resultantes, lo que finalmente condicionará la dificultad en la síntesis del controlador de realimentación.

Se ha estudiado la influencia en las fórmulas de los contornos (Tabla 7-5) de los parámetros discretos p y θ , es decir, de los valores relativos tomados por la planta sin incertidumbre. Después, se ha concluido cómo el conjunto $\mathfrak{S}P(j\omega)=\{p\angle\theta\}$ conforma el contorno final intersección, analizando por separado y conjuntamente la influencia de $\{p(\omega_i)\}$ y $\{\theta(\omega_i)\}$.

La incertidumbre en fase $\{\theta(\omega_i)\}$ desplaza los contornos $\{g_1\angle\phi\}$ y/o $\{g_2\angle\phi\}$ sobre el intervalo $\Phi=[-360^\circ, 0^\circ]$. Al variar los contornos para G su posición respecto a $0\text{dB}\angle-180^\circ$, las necesidades de control para G se modifican. En referencia a los contornos para L_0 , ocurre lo mismo respecto al punto de partida en el diseño P_0 . Considerando la incertidumbre absoluta en fase, $\Delta\theta(\omega_i)=|\theta_{max}-\theta_{min}|$ según se definía en la Sección 3.2.3, si $\Delta\theta$ aumenta los contornos de tipo B alcanzan sus valores máximos en un intervalo igual a $\Delta\theta$. Y lo mismo ocurre con los mínimos de los contornos de tipo D. Los contornos de tipo A aumentaban su intervalo de existencia $\mp\epsilon_T$ proporcionalmente a $\Delta\theta$. Luego, en definitiva una incertidumbre en fase creciente en la frecuencia ω_i implica unos contornos más difíciles de satisfacer para dicha frecuencia.

La incertidumbre en ganancia $\{p(\omega_i)\}$ desplaza los contornos $\{g_1\angle\phi\}$ y/o $\{g_2\angle\phi\}$ verticalmente sobre el eje de magnitud en dB del diagrama de Nichols. El desplazamiento vertical relativo hacia arriba o hacia abajo implica mayor o menor agresividad en el contorno en función de su interpretación (tipología). Dicho desplazamiento no es siempre en el mismo sentido en todas las fases al variar $p(\omega_i)$. Obsérvese la contribución unilateral de p en (4.2) o (5.2) sobre la Tabla 7-5, hecho que no ocurre en las fórmulas (5.82) y (6.2). Nótese también como en (6.49) la contribución de la incertidumbre en fase y ganancia es mucho más complicada de analizar.

En general, cada problema de control en la Tabla 7-2 presenta unas particularidades distintas respecto a la contribución en los contornos de la incertidumbre relativa, valores $\{p(\omega_i)\}$ y $\{\theta(\omega_i)\}$, y de la incertidumbre absoluta, $\Delta p(\omega_i)=p_{max}/p_{min}$ e $\Delta\theta(\omega_i)=|\theta_{max}-\theta_{min}|$. A continuación, se resumen las conclusiones más importantes para plantillas $\mathfrak{S}P(j\omega)$ convexas y conectadas, en los distintos objetivos de realimentación estudiados.

7.5.1.1 Incertidumbre y la Sensibilidad Complementaria

La influencia de la incertidumbre sobre la especificación de sensibilidad complementaria, $|T_i(j\omega)|=|L/1+L(j\omega)|\leq\delta_i(\omega)$, se ha analizado en la Sección 4.3. Unos valores relativos crecientes de $\{p(\omega_i)\}$ siempre reducen la altura de

los contornos $g_1 \angle \phi$ y/o $g_2 \angle \phi$ (Figura 4-13). Y $\{\theta(\omega)\}$ los desplaza horizontalmente (Figura 4-3).

Entonces, para contornos de tipo D, $\delta_i(\omega) < 1$, resulta que son los módulos máximos de cada fase o el perfil superior de la plantilla, $\partial\{p_{max} \angle \theta\}$, el que determina el contorno intersección, $g_{INF} \angle \phi = \min\{g_1 \angle \phi\}_{\partial\{p_{max} \angle \theta\}}$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$, y la agresividad o altura de éste. Es lógico que en la limitación de la ganancia para $l_0 = gp_0$, representada por el contorno D para $\delta_i(\omega) < 1$, sean las plantas de máximo módulo en cada fase las de mayor relevancia; véase la Figura 4-20. Un incremento de la incertidumbre absoluta en fase $\Delta\theta(\omega)$ ensancha la zona donde el contorno D toma valores mínimos (más agresivo); véase la Figura 4-5.

Para los contornos de tipo A, con $\delta_i(\omega) > 1$, tanto el perfil superior $\partial\{p_{max} \angle \theta\}$ como el inferior $\partial\{p_{min} \angle \theta\}$ de la plantilla son responsables del contorno intersección (véanse Figuras 4-21 y 4-22). Un $\Delta p(\omega)$ creciente hace al contorno A más agresivo, en cuanto a que la zona de ganancias prohibidas aumenta (véanse Figuras 4-18 y 4-22). Y un aumento de los valores $\{p(\omega)\}$ rebaja la altura de las dos curvas que constituyen el contorno A, $g_{SUP} \angle \phi$ y $g_{INF} \angle \phi$ (esta última es la más relevante en el margen de ganancia) (véase Figura 4-18). Un $\Delta\theta(\omega)$ mayor ensancha la zona prohibida en fase (ver Figura 4-9). Luego en resumen, una incertidumbre absoluta creciente en fase y ganancia, y una incertidumbre relativa en magnitud creciente hacen más agresivos los contornos de tipo A. Considerando que éstos suelen representar los objetivos de estabilidad robusta, es lógico que un incremento de la incertidumbre y también unos valores modulares mayores ensanchen el área prohibida, con el fin de alejar a todos los puntos de incertidumbre un mínimo margen de fase (4.84) y ganancia (4.85) respecto del punto crítico de estabilidad $0dB \angle -180^\circ$.

En la Sección 4.3 también se formularon los valores característicos de los contornos intersección, tales como sus puntos de máximo y mínimo, ubicación, amplitudes, ejes de simetría, etc. Igualmente se incluyeron algunas simplificaciones en la computación del contorno intersección.

Ejemplo

En el problema multiobjetivo del ejemplo (Sección 7.2), la limitación de la sensibilidad complementaria $|T| = |L+1/L| \leq \delta_i$ respondía a objetivos sobre la estabilidad robusta. Entonces, para $\delta_i(\omega_i) = 1.3 > 1$, $\omega_i = \{0.1, 1, 10, 100\}$, se demostró e interpretó la presencia de contornos de tipo A para todas las frecuencias (Secciones 7.3 y 7.4). Ahora se analiza la contribución de la incertidumbre sobre los contornos para G . Nótese que las conclusiones son extensibles a los contornos para L_0 en la Figura 7-7. La Figura 7-12 y la

Figura 7-13 confirman la influencia de la incertumbre, justificada en los anteriores párrafos, y se comentan a continuación.

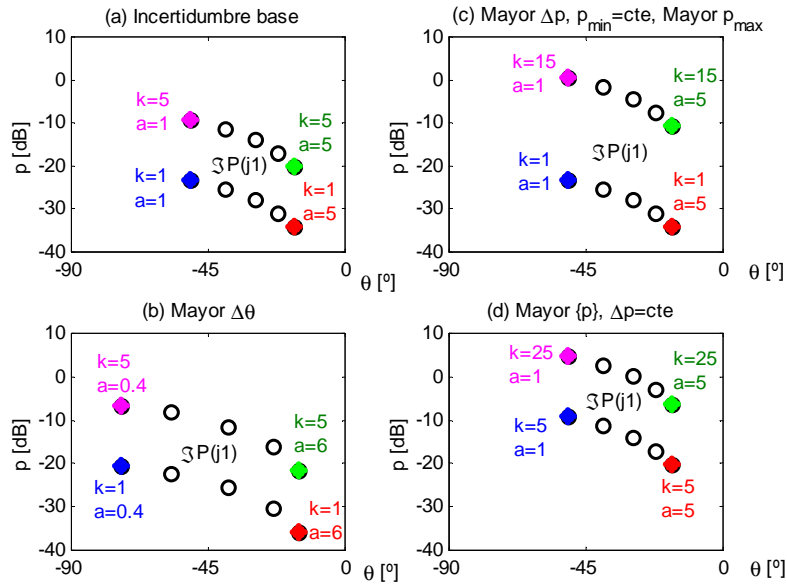


Figura 7-12: Ejemplo. Plantillas con distinta incertumbre para $\omega_i = 1 \text{ rad/s}$

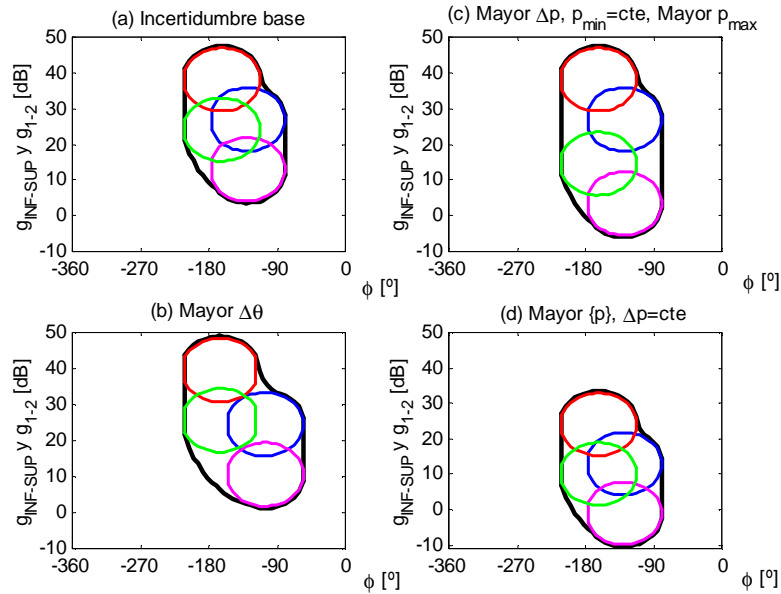


Figura 7-13: Ejemplo. Contornos A simples e intersección para G en $\omega_i = 1$ para plantillas con distinta incertumbre, y especificación $\delta_1(\omega) = 1.3 > 1$

El gráfico (a) de la Figura 7-12 muestra las plantas significativas en $\omega_t=1\text{rad/s}$ para el cálculo del contorno que representa a $|T_l(j\omega_t)|=|L/1+L(j\omega_t)|\leq\delta_l(\omega_t)$, con $\delta_l(\omega_t)=1.3$. La planta se corresponde con la definida en (7.3): $\{P_{(a)}(s)=k/(s+a)(s+b); k\in[1, 5], a\in[1, 5]$ y $b=10\}$. Al tratarse $\mathfrak{S}P(j1)=\{p\angle\theta\}$ de una plantilla convexa y conectada, se han utilizado solamente los perfiles superior e inferior de dicha plantilla, como demostró la Sección 4.3.3.2. Esto supone un importante ahorro computacional en el cálculo de los contornos, innovación de la presente tesis, ya que se evitan los cálculos correspondientes a las plantas discretas de los perfiles derecho e izquierdo, que no son significativas. Las plantas interiores tampoco aportan información, como ya demuestra Chait *et al.* (1995). El contorno de tipo A para G se especifica formalmente:

$$\begin{aligned} g_{INFSUP}\angle\phi, \phi\in\Phi_{IS}=[\phi_{VIS}\mp\varepsilon_T], \phi_{VIS}\text{ en (4.52), } \varepsilon_T\text{ en (4.54),} \\ g_{INF}=\min\{g_1\}_{\partial\{p_{max}\angle\theta\}}, g_{SUP}=\max\{g_2\}_{\partial\{p_{max}\angle\theta\}}, g_{12}\text{ en (4.2).} \end{aligned} \tag{7.5}$$

Y éste se muestra en el gráfico (a) de la Figura 7-13. Como ya se discutió anteriormente (Tabla 7-7 y Figura 7-5) se trata de un contorno de tipo A por ser $\delta_l(\omega_t)=1.3>1$. Junto al contorno intersección (trazo negro), se han representado también los contornos simples (líneas de trazo rojo, verde, azul y rosa) sólo de las plantas en los vértices de la plantilla, destacadas en la Figura 7-12. Nótese que estas cuatro plantas no son suficientes, sino que es necesaria una discretización suficientemente fina de plantas en los perfiles superior e inferior. La plantilla $\mathfrak{S}P_{(a)}(j1)$ para $\{P_{(a)}(s)=k/(s+a)(s+b); k\in[1, 5], a\in[1, 5]$ y $b=10\}$, se caracteriza por: una incertidumbre absoluta en fase, $\Delta\theta(\omega_t=1)=|\theta_{max}-\theta_{min}|=34.4^\circ$, una incertidumbre absoluta en ganancia, $\Delta p(\omega_t=1)=p_{max}/p_{min}=17.2$ (o en decibelios $\Delta p(\omega_t=1)=Lm(p_{max}/p_{min})=24.7\text{dB}$), y una incertidumbre en magnitud relativa de $\{p(\omega_t)\}\subseteq[p_{min}, p_{max}]$, $p_{min}=0.02(-34\text{dB})$, $p_{max}=0.34(-9.4\text{dB})$.

La influencia de la incertidumbre se muestra comparando los gráficos (a) con los gráficos (b), (c) y (d) de la Figura 7-12 y la Figura 7-13.

Los gráficos (b) ilustran la influencia del tamaño de la incertidumbre vertical absoluta. Se estudia una nueva familia de plantas: $\mathfrak{S}P_{(b)}(j1)$ para $\{P_{(b)}(s)=k/(s+a)(s+b); k\in[1, 5], a_{(b)}\in[0.4, 6]$ y $b=10\}$. Al variar la incertidumbre del parámetro polo $a_{(b)}\in[0.4, 6]$ respecto al caso anterior $a_{(a)}\in[1, 5]$, fundamentalmente se incrementa la incertidumbre en fase, $\Delta\theta(\omega_t)=|\theta_{max}-\theta_{min}|$, de la plantilla $\mathfrak{S}P_{(b)}(j1)$ respecto a $\mathfrak{S}P_{(a)}(j1)$. Se tiene que $\Delta\theta_{(a)}=34.4^\circ$ e $\Delta\theta_{(b)}=58^\circ$. Entonces, el resultado es un ensanchamiento del contorno representativo, para garantizar que *todas* las plantas del sistema, con mayor incertidumbre, cumplan una mínima distancia en fase al punto

crítico. Entonces, para alguna planta se cumplirá el mínimo margen de fase y para otras existe un sobrediseño en margen de fase, tanto mayor cuanto mayor sea la incertidumbre absoluta en fase. Formalmente según (7.5), la anchura del contorno responde a $\Phi_{IS}=[\phi_{VIS}\mp\epsilon_T]$. ϕ_{VIS} es el eje vertical sobre el que se centra el contorno, y por tanto, la anchura total es $2\epsilon_T$. Este parámetro se definía en (4.54) como: $2\epsilon_T=\Delta\theta/2+2\epsilon$, con ϵ en (4.22). ϵ no depende de la incertidumbre, tan sólo de la tolerancia de especificación, $\delta_i(\omega_i)=1.3$, que permanece constante. Luego la amplitud del contorno de tipo A depende exclusivamente de $\Delta\theta$. Si este parámetro aumenta los contornos se ensanchan.

Nótese que los contornos para G en la Figura 7-13 no aparecen centrados sobre el punto crítico de estabilidad $0\text{dB}\angle-180^\circ$, debido a que todavía no se les ha referido a la planta nominal. Al sumarles la ganancia y fase correspondientes a ésta, $P_0(j\omega_i=j1)=p_0\angle\theta_0$, los contornos para L_0 si que centran sobre el punto $0\text{dB}\angle-180^\circ$. En este sentido, compruébense los contornos para G del gráfico (a) de la Figura 7-13 con los contornos para L_0 del gráfico (b) de la Figura 7-7. Se trata de la misma forma del contorno tipo A desplazada $P_0(j\omega_i=j1)=1/(j\omega+5)(j\omega+10)$. La planta nominal P_0 responde a los parámetros discretos $k=1$, $a=5$. Elegida cualquier otra planta, el contorno resultante para L_0 tiene la misma forma (proviene del mismo contorno para G), se sitúa también alrededor de $0\text{dB}\angle-180^\circ$, pero varían las distancias en magnitud y fase respecto de la nueva planta nominal P_0 , punto de partida para efectuar el diseño (gráfico (f) de la Figura 7-7). El controlador final calculado es el mismo.

Los gráficos (c) de la Figura 7-12 y la Figura 7-13, estudian la influencia de una mayor incertidumbre absoluta en ganancia, $\Delta p(\omega_i=1)$. El nuevo sistema es: $\{P_{(c)}(s)=k/(s+a)(s+b); k\in[1, 15], a\in[1, 5]$ y $b=10\}$. Al incrementarse la incertidumbre en el parámetro k desde $k_{(a)}\in[1, 5]$ a $k_{(c)}\in[1, 15]$, se produce un incremento de la incertidumbre vertical absoluta desde $\Delta p_{(a)}=17.2(24.7\text{dB})$ hasta $\Delta p_{(c)}=52.5(34.4\text{dB})$. Esto provoca un alargamiento de los contornos (compárense gráficos (a) y (c) de la Figura 7-13). Es decir, en (7.5) se separan verticalmente las curvas $g_{SUP}\angle\phi$ y $g_{INF}\angle\phi$, para todo ϕ . En este caso, además, los perfiles inferiores de las plantillas son iguales $\partial\{p_{min(a)}\angle\theta\}=\partial\{p_{min(c)}\angle\theta\}$, por lo que el aumento en Δp es debido al incremento del perfil superior, ya que $\partial\{p_{max(a)}\angle\theta\}<\partial\{p_{max(c)}\angle\theta\}$. Entonces, la separación de las curvas $g_{SUP}\angle\phi$ y $g_{INF}\angle\phi$, en términos relativos, se traduce en un descenso de $g_{INF}\angle\phi$.

Si aumentan los valores relativos de $\{p\}$, es decir se elevan tanto el perfil superior como el inferior de la plantilla, ambas curvas $g_{SUP}\angle\phi$ y $g_{INF}\angle\phi$ se desplazan hacia abajo. Y si Δp es constante, la separación absoluta entre

$g_{SUP} \angle \phi$ y $g_{INF} \angle \phi$ se mantiene constante. Este es el caso de los gráficos (d), para $\{P_{(a)}(s)=k/(s+a)(s+b); k \in [5, 25], a \in [1, 5] \text{ y } b=10\}$.

La incertidumbre de las plantas $P_{(a)}(j1)$ y $P_{(c)}(j1)$ respecto a $P_{(a)}(j1)$, finalmente se traduce en una mayor distancia en vertical desde la curva inferior del contorno A hasta al punto crítico de estabilidad. Esto pretende garantizar un mínimo margen de ganancia: también para las nuevas plantas $k_{(a)} \in [1, 5] \subset k_{(c)} \in [1, 15]$, o debido al incremento de la ganancia $k_{(a)} \in [1, 5] \leq k_{(a)} \in [5, 25]$. Inevitablemente, esto implica un mayor sobrediseño en cuanto al margen de ganancia para ciertas plantas.

Para el ejemplo, la influencia de la incertidumbre sobre los contornos de estabilidad se ha estudiado para la plantilla $\omega_f=1$ rad/s, con el fin de revisar también la influencia de la incertidumbre en fase. No obstante, las plantillas más significativas en cuanto al objetivo de estabilidad robusta son las de media-alta frecuencia. Se demostrará en la Sección 7.6.2 cómo, sus contornos A suelen ser los dominantes en dichas frecuencias respecto al resto de objetivos. Por tanto, en el ejemplo es la incertidumbre en ganancia la que jugaría un papel decisivo, ya que como muestra la Figura 7-4, en alta frecuencia apenas existe incertidumbre en fase. Sin embargo, si se tratara de otra aplicación, por ejemplo, un sistema con retardos o con incertidumbre no estructurada (típica de alta frecuencia), la incertidumbre en fase de alta frecuencia cobra gran importancia.

La máxima distancia al punto crítico de estabilidad se puede calcular como sigue. El punto mínimo de $g_{INF} \angle \phi$ se define en (4.57), denominándose $\min g_{INF \text{ SUP}} \angle \phi_{\min}$, siendo función de $p_{\max} \angle \theta$ y δ_f . Multiplicándole $p_0 \angle \theta_0 = p_{\min} \angle \theta$ se calcula el punto de mínimo de $l_{0INF} \angle \psi_0$, es decir, $\min l_{0INF \text{ SUP}} \angle \psi_{0\min}$. La distancia entre este punto y $1 \angle -180^\circ$, representa la máxima distancia prohibida hasta el punto crítico de estabilidad. En el ejemplo, para $P_{(a)}(j100)$ según (4.57) el punto mínimo del contorno G resulta $1130.4(61.1\text{dB}) \angle -6^\circ$, para $p_{\max} \angle \theta = 5e-4 \angle -174$ y $\delta_f = 1.3$. Y para el contorno L_0 , $0.11(-18.9\text{dB}) \angle -177^\circ$, siendo $p_0 \angle \theta_0 = 1e-4(-80\text{dB}) \angle -171^\circ$. Entonces, la máxima distancia a $1(0\text{dB}) \angle -180^\circ$ resulta $\approx -19\text{dB}$ como se comprueba sobre el gráfico (d) de la Figura 7-7.

7.5.1.2 Incertidumbre y la Sensibilidad

La influencia de la incertidumbre de la planta en la especificación sobre la sensibilidad, $|T_2(j\omega)|=|S|=|1/1+L(j\omega)| \leq \delta_2(\omega)$, se ha analizado en la Sección 5.2.2. Unos valores relativos decrecientes de $\{p(\omega_k)\}$ siempre aumentan la altura de los contornos $g_1 \angle \phi$ y/o $g_2 \angle \phi$ (Figura 5-10). Y $\{\theta(\omega_k)\}$ los desplaza horizontalmente (Figura 5-3).

Entonces, para un contorno de tipo B, $\delta_2(\omega) < 1$, que persigue una ganancia mínima para g o $l_{\sigma} = gp_0$, son los módulos mínimos de $\{p\}$ de cada fase $\{\theta\}$ los más relevantes. Dicho de otro modo, el perfil inferior de la plantilla, $\partial\{p_{min} \angle \theta\}$, determina el contorno intersección más desfavorable (Figura 5-16). Y cuanto menor altura tenga este perfil de plantas (o menores valores relativos de $\{p(\omega_i)\}$), habrá una mayor necesidad de ganancia y, por tanto, el contorno se eleva (Figuras 5-11 y 5-12). El aumento de $\Delta\theta(\omega_i)$ ensancha en fase la zona donde el contorno B es más agresivo o toma valores máximos (Figura 5-5).

Para un contorno de tipo A, con $\delta_2(\omega) > 1$, tanto el perfil superior $\partial\{p_{max} \angle \theta\}$, como el inferior $\partial\{p_{min} \angle \theta\}$ de la plantilla son responsables del contorno intersección (véanse Figuras 5-18 y 5-19). Un $\Delta p(\omega_i)$ creciente hace al contorno A más agresivo, en cuanto a que la zona de ganancias prohibidas aumenta (Figura 5-14 y 5-19). Una aumento de los valores relativos $\{p(\omega_i)\}$, rebaja la altura de ambas curvas superior, $g_{SUP} \angle \phi$, e inferior, $g_{INF} \angle \phi$ del contorno A (Figura 5-14; nótese que la curva inferior es la más relevante en cuanto al margen de ganancia). Un $\Delta\theta(\omega_i)$ mayor, ensancha la zona prohibida en fase, afectando al margen de fase (ver Figura 5-8). Luego, en resumen una incertidumbre absoluta creciente en fase y ganancia, y una incertidumbre relativa en magnitud creciente hacen más agresivos los contornos de tipo A. Considerando que la misión fundamental de éstos contornos es garantizar cierta estabilidad robusta, es lógico que un incremento de la incertidumbre ensanche y alargue el área prohibida. Se pretende alejar a todos los puntos de incertidumbre un mínimo margen de fase (5.121) y ganancia (5.120) respecto del punto crítico $0dB \angle -180^\circ$. Cuando $\delta_2(\omega) > 1$ no persigue objetivos de estabilidad, sino que significa una relajación de la especificación de rechazo de perturbaciones, los contornos A que origina no son dominantes (véase Sección 7.6.2).

En la Sección 5.2.2 también se formularon los valores característicos de los contornos intersección, tales como sus puntos de máximo y mínimo, ubicación, amplitudes, ejes de simetría, etc. También se incluyeron algunas simplificaciones en la computación del contorno intersección.

Ejemplo

El objetivo de la especificación $|T_2(j\omega)| = |1/1 + L(j\omega)| = |Y/D_2| \leq \delta_2(\omega)$, es la atenuación de perturbaciones (véase Sección 7.2 y Tabla 7-3). Por ello, los contornos B ($\delta_2(\omega_i) < 1$) para $\omega_i = [0.1, 1, 10]$ son los contornos significativos dentro del problema multi-objetivo. Mientras que el contorno A ($\delta_2(\omega_i) > 1$) para $\omega_i = 100$ no va a ser dominante frente al contorno A que persiga la estabilidad ($\delta_1(\omega_i = 100) = 1.3 > 1$). Véase Sección 7.6.2. A continuación se

analiza la influencia de la incertidumbre en los contornos para baja frecuencia, $\omega_i=0.1$ (Figura 7-14 y Figura 7-15) y media frecuencia, $\omega_i=10$ (Figura 7-16 y Figura 7-17).

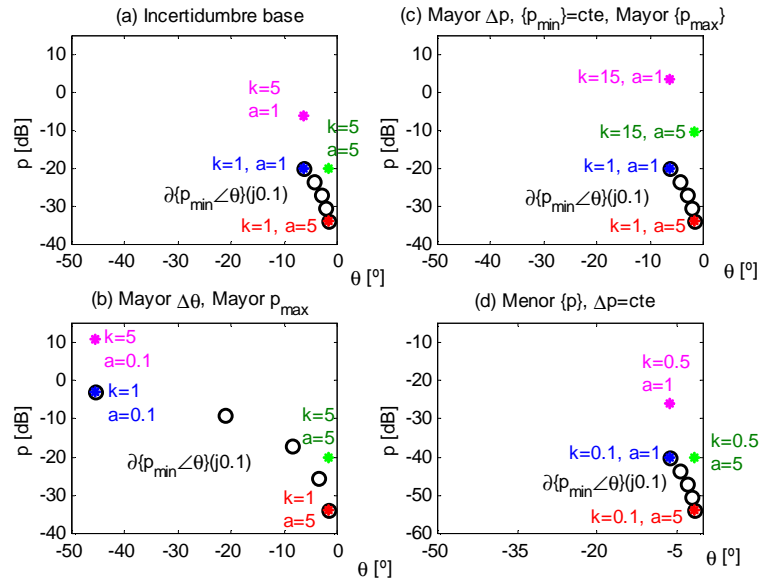


Figura 7-14: Ejemplo. Plantillas con distinta incertidumbre para $\omega_i=0.1$ rad/s

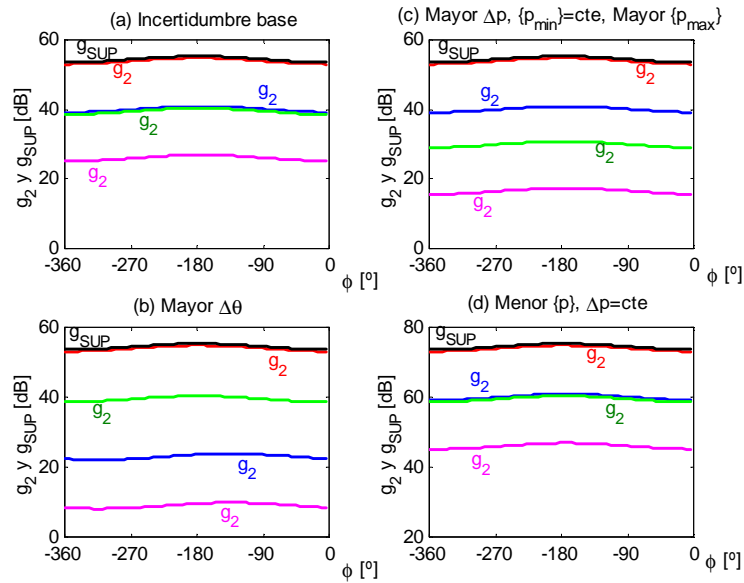


Figura 7-15: Ejemplo. Contornos B simples e intersección para G en $\omega_i=0.1$ para plantillas con distinta incertidumbre, y especificación $\delta_2(\omega_i)=0.1 > 1$

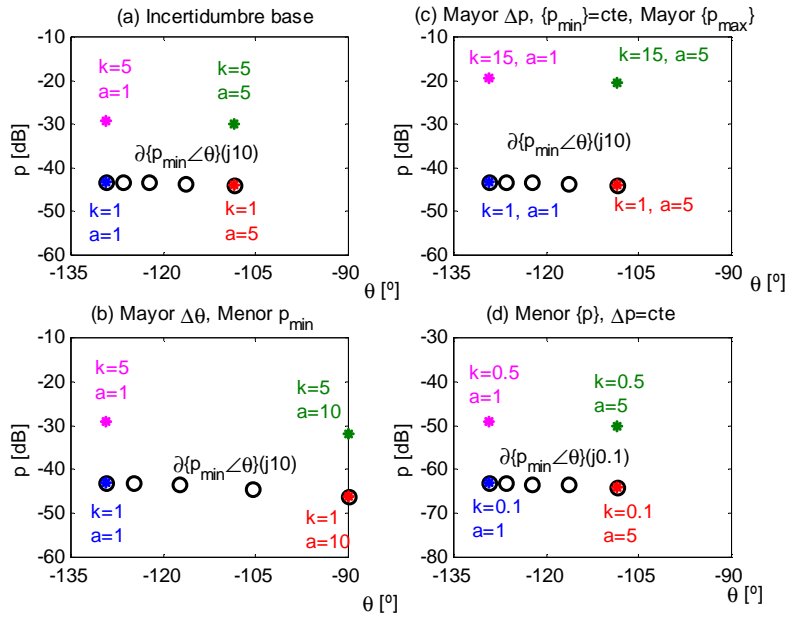


Figura 7-16: Ejemplo. Plantillas con distinta incertidumbre para $\omega_i=10\text{rad/s}$

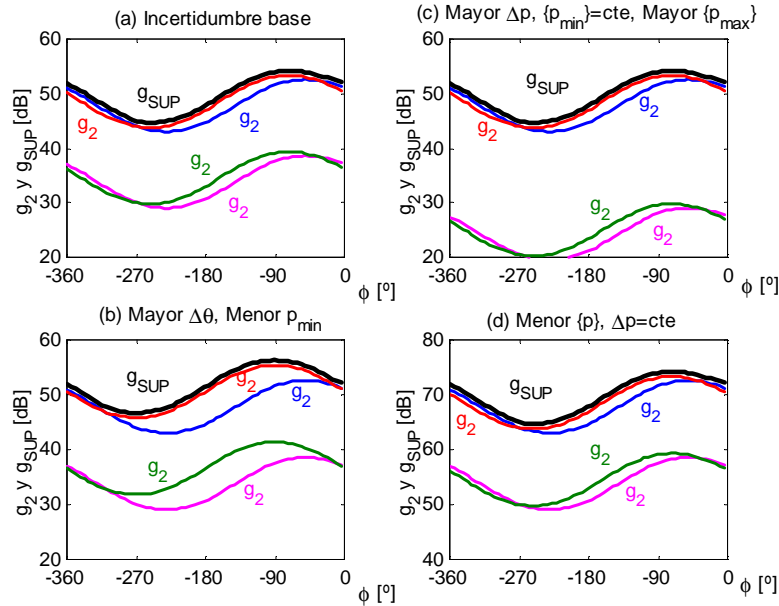


Figura 7-17: Ejemplo. Contornos B simples e intersección para G en $\omega_i=10$ para plantillas con distinta incertidumbre, y especificación $\delta_2(\omega_i)=0.5 > 1$

Para el trazado de los contornos B, que representan el rechazo de perturbaciones en media y baja frecuencia, según demostraba la Sección 5.2.2.3 basta considerar el perfil inferior de la plantilla, $\partial\{p_{min}\angle\theta\}(\omega_i)$. Efectivamente, son los módulos menores $\{p_{min}\}$ en todas las fases $\{\theta\}$ los que van a determinar cuanto, como mínimo, debe incrementarse la ganancia p_0 mediante g . Así lo demuestran los contornos para el ejemplo en la Figura 7-15 y la Figura 7-17. En ellas, los contornos intersección (trazo negro), $g_{SUP}\angle\phi$, $\phi\in\Phi=[-360^\circ, 0]$, se han calculado utilizando sólo las plantas en el perfil inferior, que se representa con puntos negros ‘o’ en la Figura 7-14 y la Figura 7-16). Formalmente:

$$g_{SUP}\angle\phi, \phi\in\Phi=[-360^\circ, 0^\circ], g_{SUP}=\max\{g_2\}_{\partial\{p_{min}\angle\theta\}}, g_2 \text{ en (5.2b)} \quad (7.6)$$

Sobre las figuras se representan las cuatro plantas de los extremos en la plantilla ω_i , así como sus contornos simples (colores rosa, verde, azul y rojo). No obstante, los contornos intersección se han calculado empleando todas las plantas pero exclusivamente del perfil inferior.

En plantillas convexas conectadas, esto supone un importante ahorro computacional en el cálculo de los contornos, al reducirse el número de iteraciones. El ahorro puede ser incluso mayor. La Figura 7-14 y la Figura 7-15 demuestran que el contorno intersección coincide con el contorno simple para la planta de módulo mínimo, $p_{min}\angle\theta$, en la plantilla. Es decir, en una única iteración se calcula el contorno. De acuerdo a la Simplificación 2 en la Sección 5.2.2.3, su validez depende del desnivel del contorno, Δg_2 en (5.51) que depende del valor de especificación, y también depende de la variación de la incertidumbre vertical del perfil inferior $\Delta p_{\partial p_{min}}$. Aplicando (5.51) para $\delta_2(\omega_i=0.1)=0.1$, se tiene $\Delta g_2=1.74\text{dB}$; compruébese el mismo desnivel en todos los contornos de los gráficos de Figura 7-15, ya que presentan el mismo $\delta_2=0.1$. Y entre las dos plantas adyacentes de módulo mínimo en el perfil inferior, por ejemplo para el gráfico (a) de la Figura 7-14, existe un salto $min-\Delta p=3\text{dB}$. Como se cumple $\Delta g_2 < min-\Delta p$, ha bastado el empleo de una única planta. Y lo mismo ocurre para las plantillas en las gráficas (b), (c) y (d) de la Figura 7-14.

Sin embargo, la Simplificación 2 de la Sección 5.2.2.3 no es válida en la frecuencia $\omega_i=10$, necesiándose todo el perfil inferior (Simplificación 1); véanse Figura 7-16 y Figura 7-17. Ahora, $\delta_2(\omega_i=10)=0.5$, y el desnivel en el contorno se incrementa según (5.51) tal que $\Delta g_2=9.5\text{dB}$; compruébese el mismo desnivel para todos los contornos de la Figura 7-17, que presentan el mismo $\delta_2=0.5$. Y entre las dos plantas extremas del perfil inferior, por ejemplo para el gráfico (a) de la Figura 7-16, existe un salto $max-\Delta p=1\text{dB}$. Por tanto, no es viable la Simplificación 2. Al ser la plantilla $\omega_i=10$ convexa y conectada se aplica la Simplificación 1, que necesita del perfil inferior en

lugar de todo el perfil de la plantilla. Y lo mismo ocurre para las plantillas en las gráficas (b), (c) y (d) de la Figura 7-16.

A continuación se revisan los gráficos (b) de las figuras anteriores. Tratan de reflejar respecto a la incertidumbre de la plantilla en (a), $\{P_{(a)}(s)=k/(s+a)(s+b); k \in [1, 5], a \in [1, 5] \text{ y } b=10\}$, como afecta un incremento de la incertidumbre horizontal $\Delta\theta$. La plantilla básica se representa en el gráfico (a) de la Figura 7-14 para $\omega_i=0.1$ y en el gráfico (a) de la Figura 7-16 para $\omega_i=10$ rad/s. Los gráficos (c) de las mismas figuras, corresponden a un sistema con los mismos parámetros, k , a y b , pero que presentan distinta incertidumbre. En particular se modifica el parámetro polo a , tal que $a \in [0.1, 5]$ para el gráfico (c) de la Figura 7-14 y $a \in [1, 10]$ para la Figura 7-16. Ambos gráficos suponen un aumento de la incertidumbre en fase: $\Delta\theta_{(c)}(\omega_i=0.1) > \Delta\theta_{(a)}(\omega_i=0.1)$ e $\Delta\theta_{(c)}(\omega_i=10) > \Delta\theta_{(a)}(\omega_i=10)$. Sin embargo, obsérvese que esto no afecta a los contornos B resultantes $g_{SUP} \angle \phi$ de los gráficos (a) y (c) de la Figura 7-15, y influye ligeramente en los de la Figura 7-17. En el caso de la frecuencia $\omega_i=0.1$ (Figura 7-14) esto es debido a que según la Simplificación 2, antes comentada, la única planta significativa es la de módulo mínimo, $p_{min} \angle \theta$. Y ésta es la misma para $a_{(c)} \in [0.1, 5]$ y para $a_{(a)} \in [1, 5]$. Sin embargo, en el caso de la frecuencia $\omega_i=10$ (Figura 7-16) influyen todas la plantas en el perfil inferior que si que se modifica al variar el parámetro polo desde $a_{(a)} \in [1, 5]$ hasta $a_{(c)} \in [1, 10]$. Nótese que si existiera un aumento puro de $\Delta\theta$, el contorno intersección si que sería más agresivo (véase Figura 5.5 en la Sección 5.2.2.1). Pero en el caso que nos ocupa, al variar a también existe un pequeño aumento de $\Delta p(\omega_i=10)$ en el perfil inferior. Como en éste todas las plantas tienen aproximadamente el mismo módulo, el pequeño Δp hacia módulos menores contrarresta el aumento en el $\Delta\theta$, por lo que finalmente el contorno intersección no se ve afectado. Si el problema hubiera presentado un parámetro retardo, una incertidumbre creciente de éste hubiera afectado claramente en la altura del contorno intersección, ya que los retardos no introducen ganancia.

Comparando los gráficos (a) y (c) en la Figura 7-14, la Figura 7-15, la Figura 7-16 y la Figura 7-17, se muestra como un aumento de $\Delta p(\omega_i)$ no tiene porqué afectar a la agresividad del contornos de tipología B. Lo que condiciona realmente dicha agresividad son los valores $\{p_{min} \angle \theta\}$, como ilustra la comparación entre los gráficos (a) y (d). Si estos disminuyen, los contornos se elevan demandando una mayor ganancia g , para que las plantas con módulos menores sean capaces de alcanzar el mismo comportamiento ante perturbaciones que las planta con módulos mayores. En el contorno de baja frecuencia, $\omega_i=0.1$ rad/s, es interesante calcular el incremento de altura que experimentan los contornos, pues ésta se traduce directamente en un

aumento de la ganancia estática del controlador, e indirectamente afectará a la ganancia de alta frecuencia. A continuación se emplea la formulación desarrollada en el Capítulo 5 para estos cálculos.

Δg_2 en (5.51) expresaba el desnivel existente en un contorno de tipo B para $\delta_2 < 1$. Éste depende tan sólo del valor de especificación, tal que cuando ésta es más exigente (menor δ_2), el contorno pierde desnivel. Este comportamiento es habitual en los contornos para el rechazo de perturbaciones en baja frecuencia respecto a los de mayor frecuencia; véanse las tolerancias $\delta_2(\omega=0.1, 1, 10)=\{0.1, 0.3, 0.5\}$ en la Tabla 7-3 y sus contornos en la Figura 7-8. Y así lo demuestran también los gráficos en la Figura 7-15 y en la Figura 7-17.

En el ejemplo el contorno intersección para G de baja frecuencia (Figura 7-15) apenas presentan desnivel. Entonces, el valor en su punto de máximo es similar al resto. En el caso genérico de que en la configuración del contorno intersección todas las plantas del perfil inferior intervinieran, el punto de máximo lo define siempre la planta de módulo mínimo sea cual sea su fase, $p_{min} \angle \theta$, tal como define (5.48). En el resto de fases otras plantas del perfil inferior, $\partial \{p_{min} \angle \theta\}$, pueden ser significativas. El caso del ejemplo, es el más simple ya que gracias a la Simplificación 2 de la Sección 5.2.2.3, en todas las fases $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ se tiene que $g_{SUP} \angle \phi = g_2 \angle \phi (p_{min} \angle \theta)$. Aplicando (5.48), o (5.12) cuando la Simplificación 2 es válida, resulta $\max g_{SUP} = 5500 (75 \text{dB})$ para la familia de plantas $\{P_{(a)}(j0.1)\}$ y $\max g_{SUP} = 550 (55 \text{dB})$ para la familia $\{P_{(a)}(j0.1)\}$. La variación en $p_{min} \angle \theta$ entre ambas familias es debida a la variación en la incertidumbre de sus parámetros ganancia: $k_{(a)} \in [0.1, 0.5]$ y $k_{(a)} \in [1, 5]$. Resultando $p_{min(a)} = 2e-3 (-54 \text{dB})$ y $p_{min(a)} = 2e-2 (-34 \text{dB})$. En definitiva, la variación de módulos mínimos $p_{min(a)}/p_{min(d)} = 0.1 (-20 \text{dB})$ se traduce directamente en la variación de alturas de los contornos $\max g_{SUP_{(a)}}/\max g_{SUP_{(d)}} = 0.1 (-20 \text{dB})$, como ya se argumentaba en la Sección 5.2.2.3.

Estas conclusiones, nos obligan a vigilar seriamente el proceso de identificación del modelo, especialmente en lo que se refiere a los parámetros polos y ganancia. Ambos en familias de tipo \wp_2 (3.13) aportan incertidumbre vertical de baja frecuencia (Sección 3.2.3). Una incertidumbre excesiva que reduzca mucho los módulos de baja frecuencia, aumenta proporcionalmente el coste de la realimentación, no sólo en baja sino fundamentalmente en alta frecuencia. Nótese que al elevarse el contorno de baja frecuencia, es necesaria una mayor ganancia. Y ésta a su vez solicita un mayor esfuerzo de control en los actuadores, no sólo para rechazar las perturbaciones de baja y media frecuencia, sino también en la amplificación de ruidos de alta frecuencia (véase Sección 7.6.3).

Los puntos de máximo de los contornos para G en las Figura 7-15 y en Figura 7-17, corresponden según (5.48) a una fase $\phi_{maxSUP} = -180^\circ - \theta$, siendo θ la fase de la planta de módulo mínimo, $p_{min} \angle \theta$. Si se toma esta planta como nominal, $p_0 \angle \theta_0 = p_{min} \angle \theta$, el contorno para L_0 presenta su máximo en $\psi_0 = -180^\circ$, y se desplaza en sentido vertical una magnitud p_0 dB. Contrástense el gráfico (a) de la Figura 7-15 (contorno intersección para G en $\omega_i = 0.1$) con el gráfico (a) de la Figura 7-8 (contorno intersección para L_0 en $\omega_i = 0.1$), siendo $p_0 \angle \theta_0 = p_{min} \angle \theta = 2e-2(-34\text{dB}) \angle -2^\circ$. Y también compárense, el gráfico (a) de la Figura 7-17 (contorno intersección para G en $\omega_i = 10$) con el gráfico (c) de la Figura 7-8 (contorno intersección para L_0 en $\omega_i = 0.1$), siendo $p_0 \angle \theta_0 = p_{min} \angle \theta = 6e-3(-44\text{dB}) \angle -109^\circ$. Si se toma cualquier otra planta nominal en la plantilla $\{p_{min} \angle \theta\}$, el punto de máximo de L_0 aparece desplazado como máximo $\Delta\theta$ respecto de la fase -180° .

7.5.1.3 Incertidumbre y la Sensibilidad incluida la Planta

La influencia de la incertidumbre de la planta en la especificación sobre la sensibilidad, $|T_3(j\omega)| = |P/1+L(j\omega)| \leq \delta_3(\omega)$, se ha analizado en la Sección 5.3.2. En esta especificación robusta, los valores de $\{p(\omega_i)\}$ respecto a $\delta_3(\omega_i)$ condicionan la tipología del contorno.

Cuando el conjunto $\{p(\omega_i)\}$ es inferior a $\delta_3(\omega_i)$ (ver Tabla 7-7) aparece una tipología A de contornos. Éstos al aumentar los valores $\{p(\omega_i)\}$ reducen su altura y aumentan la anchura en fase (ver Figura 5-31), al aumentar $\Delta p(\omega_i)$ ocupan una mayor amplitud en ganancia, y al aumentar $\Delta\theta(\omega_i)$ aumentan su intervalo angular de existencia (ver Figuras 5-36 y 5-37). La interpretación es lógica en términos de estabilidad. Cuando se tiene la especificación $\{p(\omega_i)\} < \delta_3(\omega_i)$, cierta en medias-altas frecuencias, el objetivo no era estrictamente atenuar la perturbación, sino simplemente limitar el pico de $|S^*| = |P/1+L|$. Entonces, es lógico que una incertidumbre creciente en magnitud y fase, y unos valores modulares mayores, aumenten el área prohibida alrededor del punto crítico de estabilidad, $0\text{dB} \angle -180^\circ$. Para la definición de los contornos A intersección a partir de los contornos A simples, es necesario el empleo de todo el perfil de la plantilla $\Im P(j\omega)$, denominado $\partial\{p \angle \theta\}$ (véanse Figuras 5-36 y 5.37).

Los contornos intersección de tipo B (Tabla 7-7) se originan cuando algún $p(\omega)$ en $\Im P(j\omega)$ satisface que $p(\omega_i) > \delta_3(\omega_i)$, como ilustran las Figuras 5-38 hasta 5-41. Esto se da fundamentalmente en las frecuencias bajas y medias, en las que el objetivo es el rechazo de perturbaciones $|Y/D_l(j\omega)|$. En general una disminución de los valores $\{p(\omega_i)\}$ elevan el contorn B, aunque no en todas las fases. Aunque un apropiado rechazo de perturbaciones, a priori,

requiere un aumento de la ganancia de $\{P\}$, nótese que para las perturbaciones en la entrada se tiene $|S'(j\omega)|=|Y/D_I(j\omega)|=|P/1+L|\leq\delta_3(\omega)$. Y el término $|P|$ contribuye de forma contrapuesta en el numerador y en el denominador ($L=GP$). Por ello, una disminución de $p(\omega_i)$ estrictamente no implica una mayor altura del contorno B (o necesidades de $l=gp$) para todas las fases. Una incertidumbre creciente en fase $\Delta\theta(\omega_i)$ ensancha en fase la zona donde el contorno B es más agresivo. Y la incertidumbre relativa $\{\theta(\omega_i)\}$ desplaza horizontalmente los contornos. Para la conformación de los contornos intersección son relevantes todas las plantas del perfil de la plantilla, $\partial\{p\angle\theta\}$, como ilustran las Figuras 5-38 hasta 5-41.

7.5.1.4 Incertidumbre y el Esfuerzo de Control

La influencia de la incertidumbre de la planta en la especificación sobre el esfuerzo de control, $|T_r(j\omega)|=|G/1+L(j\omega)|\leq\delta_4(\omega)$, se ha analizado en la Sección 6.1.3. En esta especificación robusta, los valores de $\{p(\omega_i)\}$ respecto a $\delta_4(\omega_i)$ condicionan la tipología del contorno, como resume la Figura 6-5 e interpreta la Sección 7.4.5.

Los contornos intersección de tipo B (Tabla 7-7) se originan cuando algún $p(\omega_i)$ en $\Im P(j\omega)$ satisface que $p(\omega_i)<1/\delta_4(\omega_i)$, como ilustran las Figuras 6-13, 6-14, 6-17 y 6-18. Esto se da fundamentalmente en las frecuencias medias y altas (véase discusión en Sección 7.4.5). En general un aumento de los valores $p(\omega_i)$ reduce la altura del contorno D en ciertas fases alrededor de $-180^\circ-\theta$ y aumenta su altura hacia los extremos del intervalo, $0^\circ-\theta$ y $-360^\circ-\theta$ (Figura 6-6). Esto hace relevantes en el cálculo del contorno intersección a todas las plantas en el perfil de la plantilla, $\partial\{p\angle\theta\}$; véanse Figuras 6-13, 6-14, 6-17 y 6-18. Unas incertidumbres absolutas mayores en ganancia, $\Delta p(\omega_i)$, y fase, $\Delta\theta(\omega_i)$, implican un contorno D más restrictivo (menor altura en cada fase). Necesariamente un aumento de la incertidumbre hace que la limitación del esfuerzo de control sea más compleja.

Cuando el conjunto de módulos $\{p(\omega_i)\}$ es superior a $1/\delta_4(\omega_i)$ aparece una tipología A de contornos intersección (Tabla 7-7). Los contornos simples A reducen su altura y anchura al aumentar los valores $\{p(\omega_i)\}$. Es decir, exigen limitar la ganancia en mayor medida (curva inferior) en las proximidades de -180° al aumentar el módulo de las plantas. Todas las plantas del perfil, $\partial\{p\angle\theta\}$, intervienen en el cálculo del contorno intersección (Figuras 6.15 y 6.16). Por ello, al aumentar $\Delta p(\omega_i)$ o $\Delta\theta(\omega_i)$ los contornos A limitan una mayor área y son más restrictivos. En resumen, al igual que en los contornos D, un incremento de la incertidumbre hace más compleja la limitación del esfuerzo de control.

7.5.1.5 Incertidumbre y los Servosistemas

La influencia de la incertidumbre de la planta en la especificación sobre la reducción de sensibilidad respecto a la incertidumbre en el proceso, $|T_3(j\omega)|=|L/1+L(j\omega)|\leq\delta_3(\omega)$, se ha analizado en las Secciones 6.2.3 y 6.2.4.

El objetivo de G en el problema del servo es reducir la incertidumbre absoluta en lazo cerrado, ΔT , respecto a la incertidumbre absoluta de lazo abierto, ΔP , tanto como exija (3.11). Por ello, necesariamente una incertidumbre mayor en lazo abierto, $\Delta p(\omega_i)$ o $\Delta\theta(\omega_i)$ mayores, implica unos contornos más agresivos que representan esta especificación; véanse Figuras 6-43, 6-44 y 6-45 para la contribución de Δp y la Figura 6-38 para la contribución de $\Delta\theta$. En la etapa de diseño del prefiltro F son fundamentales los valores relativos de $\{p(\omega_i)\}$ para ubicar $\{|T(j\omega_i)|\}$ según (3.10).

Además, el valor de $\Delta p(\omega_i)=p_{max}/p_{min}$ respecto a $\delta_3(\omega_i)$ condiciona la tipología de los contornos. Los más interesantes son los de tipo B, cuando $p_{max}/p_{min}(\omega_i)>\delta_3(\omega_i)$, que buscan los beneficios de la realimentación, dominando en bajas y medias frecuencias. Los contornos A de alta frecuencia para el servo no deben ser dominantes.

Se estudiaron las ventajas de una división de la incertidumbre vertical y horizontal, que evidentemente mejoran los contornos y necesitan de controladores con menor ganancia. Esto da pie al empleo de sistemas de control robusto-adaptativos (véase Sección 6.2.6).

7.5.2 INFLUENCIA DEL VALOR DE ESPECIFICACIÓN

Mientras que la contribución de la incertidumbre presenta sus peculiaridades para cada objetivo de control, la tolerancia de especificación siempre es interpretable unívocamente. Una tolerancia de especificación más exigente, necesariamente conlleva contornos más agresivos para todos los objetivos $|T_k(j\omega)|\leq\delta_k(\omega)$ en la Tabla 7-2. El tipo de contornos para dichas especificaciones robustas se recogió en la Tabla 7-6 y la Tabla 7-7. La agresividad de un contorno en función de su tipología se resume como:

- Un contorno de tipo B, $g\angle\phi\geq g_2\angle\phi$, $\phi\in\Phi=[-360^\circ, 0^\circ]$ (o $g\angle\phi\geq g_{SUP}\angle\phi$, $\phi\in\Phi$), es tanto más agresivo cuanto mayor altura presenta g_2 (o g_{SUP}) en todo Φ . En el contorno final para L_0 se demanda una mayor ganancia de lazo abierto $l_0=gp_0$ en todas las fases de diseño $\Psi_0=[-360^\circ, 0^\circ]$.
- Un contorno de tipo D, $g\angle\phi\leq g_1\angle\phi$, $\phi\in\Phi=[-360^\circ, 0^\circ]$ (o $g\angle\phi\leq g_{INF}\angle\phi$, $\phi\in\Phi$), es tanto más agresivo cuanto menor altura presenta g_1 (o g_{INF}) en

todo Φ . O también, el contorno para L_0 exige una menor ganancia de lazo abierto $l_0=gp_0$ en todas las fases de diseño $\Psi_0=[-360^\circ, 0^\circ]$.

- Un contorno de tipo A, $g\angle\phi\leq g_1\angle\phi$ y $g\angle\phi\geq g_2\angle\phi$, $\phi\in\Phi_{I2}=[-180^\circ-\theta\mp\epsilon]$ (o $g\angle\phi\leq g_{INF}\angle\phi$ y $g\angle\phi\geq g_{SUP}\angle\phi$, $\phi\in\Phi_{IS}=[\phi_{VIS}\mp\epsilon_T]$) es tanto más agresivo cuanto mayor es la altura de su curva superior g_2 (o g_{SUP}), menor es la altura de su curva inferior g_1 (o g_{INF}), y mayor es el intervalo de fases ϵ (o ϵ_T) que conforman el área cerrada prohibida. En definitiva, a mayor superficie limitada por el contorno para L_0 alrededor de $0\text{db}\angle-180^\circ$, menor libertad existe en el modelado de $L_0=GP_0$.

Las especificaciones robustas $|T_k(j\omega)|\leq\delta_k(\omega)$ son más exigentes cuanto menor es $\delta_k(\omega)$, ya que entonces, esta tolerancia limita en mayor medida la relación salida/entrada expresada con $|T_k(j\omega)|$. Para $k=1,..,4$ la evolución de $\delta_k(\omega)$ se recoge en el intervalo $(0, +\infty)$, mientras que para $k=5$ evoluciona en $(1, +\infty)$. La variación de los contornos en estos intervalos se estudió formalmente a través de funciones límite en los Capítulos 4 al 6.

Nótese sobre la Tabla 7-7 que para cada objetivo k existen dos posibles tipologías. Y precisamente cuando $\delta_k(\omega)$ se hace más exigente, se produce la transición hacia la tipología más agresiva, bien de A a B, o bien de A a D. Y dentro de cada tipología, A, D o B, la disminución de $\delta_k(\omega)$ también hace más agresivo el contorno en el sentido antes indicado.

Para el objetivo $|T_1(j\omega)|\leq\delta_1(\omega)$ en (3.6), consúltese la Sección 4.4, donde las Figuras 4-23 y 4.25 son un buen resumen sobre la influencia de $\delta_1(\omega)$. Para $|T_2(j\omega)|\leq\delta_2(\omega)$ en (3.7) véase la Sección 5.2.3 y en especial las Figuras 5-22 y 5-24. La Sección 5.3.3 analiza el objetivo $|T_3(j\omega)|\leq\delta_3(\omega)$ en (3.8) respecto a su valor de especificación, y las Figuras 5-43 hasta 5-45 son un buen resumen de su influencia. Véase la Sección 6.1.4 para $|T_4(j\omega)|\leq\delta_4(\omega)$ en (3.9) y en especial las Figuras 6-20 hasta 6-22. El problema del servo en su apartado de síntesis de G , $|T_5(j\omega)|\leq\delta_5(\omega)$ en (3.11), estudia la influencia de $\delta_5(\omega)$ en la Sección 6.2.5, destacándose las Figuras 6-47 hasta 6-50.

La selección de una tolerancia $\delta_k(\omega_i)$ adecuada para cada frecuencia y conforme evoluciona la frecuencia ω_i es fundamental en la resolución conjunta del problema multiobjetivo, tal como se discute en la Sección 7.6 próximamente.

Ejemplo

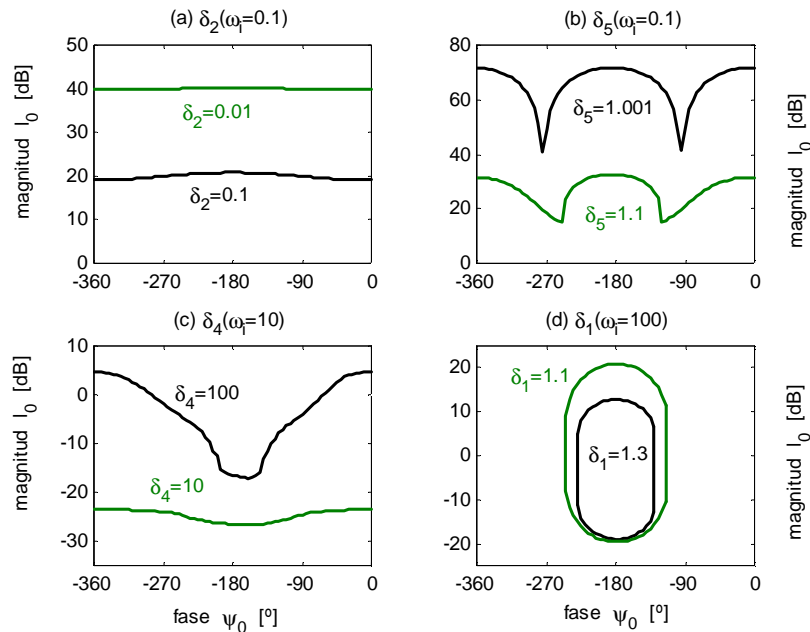
Entre las especificaciones $\delta_k(\omega)$, $k=1,..,5$, $\omega_i=\{0.1, 1, 10, 100\}$ de la Tabla 7-3, se seleccionan las más significativas y se modificará su valor $\delta_k(\omega_i)$ para comprobar la evolución de sus contornos, tal y como resume la Tabla 7-8.

	Tolerancias (a)	Tolerancias (b)
$\delta_2(\omega_i=0.1)$	0.1	0.01
$\delta_5(\omega_i=0.1)$	1.001	1.1
$\delta_4(\omega_i=10)$	100	10
$\delta_1(\omega_i=100)$	1.3	1.1

Tabla 7-8: Ejemplo. Variación de las tolerancias de especificación robusta

Los contornos para L_0 representativos de las especificaciones robustas en la primera columna de la Tabla 7-8 se incluyeron entre los contornos para las distintas especificaciones en la Sección 7.4 (Figura 7-7, Figura 7-8, Figura 7-10 y Figura 7-11).

La Figura 7-18 compara los contornos de L_0 para la variación de las tolerancias expresada en la Tabla 7-8. La familia de plantas con incertidumbre se definía en (7.3), $\{P(s)=k/(s+a)(s+b); k \in [1, 5], a \in [1, 5] \text{ y } b=10\}$, seleccionándose como planta nominal $k_0=1, a_0=5$. En las frecuencias de interés $\omega_i=\{0.1, 1, 10, 100\}$, la familia $\{P(j\omega)\}$ se representaba en la Figura 7-4.

Figura 7-18: Ejemplo. Variación de los L_0 -contornos con la tolerancia de especificación δ_k

Nótese como una disminución en la tolerancia $\delta_k(\omega_i)$ siempre implica un contorno más agresivo en los términos descritos anteriormente. Para cada objetivo de control esto significa:

- $|T_2(j\omega)| \leq \delta_2(\omega)$ en $\omega=0.1$ rad/s. Al reducirse $\delta_2(\omega)=0.1$ a 0.01 , se eleva el contorno B buscando una mayor ganancia estática $l_0(\omega_f)=g(\omega_f)p_0(\omega_f)$ que consiga un mejor comportamiento en el rechazo de perturbaciones. Aplicando (5.48) se obtiene un incremento de altura en el punto máximo del contorno⁶ de 20dB. El inconveniente de una mayor ganancia en baja frecuencia es que en alta frecuencia se eleva también la ganancia, efecto que se puede paliar parcialmente con un controlador más complejo (mayores retardos).
- $|T_3(j\omega)| \leq \delta_3(\omega)$ en $\omega=0.1$ rad/s. Al disminuir $\delta_3(\omega)=1.1$ a 1.03 , se eleva el contorno B buscando una mayor ganancia estática $l_0(\omega_f)=g(\omega_f)p_0(\omega_f)$ que consiga un mejor comportamiento en el seguimiento de referencias, al reducir en mayor medida la influencia en lazo cerrado de la incertidumbre de la planta. El inconveniente es que en alta frecuencia se eleva también la ganancia, efecto que se puede paliar parcialmente con un controlador más complejo (mayor retardo digital).
- $|T_4(j\omega)| \leq \delta_4(\omega)$ en $\omega=10$ rad/s. Al disminuir $\delta_4(\omega)=100$ a 10 , desciende el contorno D exigiendo una mayor reducción de la ganancia en media frecuencia. Como desventaja, esto implica que se reducirá el esfuerzo de control permitido en el rechazo de perturbaciones en baja y media frecuencia. Una ventaja es la reducción del coste de la realimentación, al disminuir la amplificación de ruidos y perturbaciones de alta frecuencia en la entrada de los actuadores.
- $|T_7(j\omega)| \leq \delta_7(\omega)$ en $\omega=100$ rad/s. El contorno de tipo A para $\delta_7(\omega)=1.3$ garantiza unos márgenes mínimos de estabilidad: $MG > 5\text{dB}$ y $MF > 45^\circ$, según (4.83) y (4.84). Y para $\delta_7(\omega)=1.1$ se ensancha y estira el contorno de tipo A tal que $MG > 5.6\text{dB}$ y $MF > 54^\circ$. Unos márgenes más conservadores conllevan una mayor ganancia en alta frecuencia (mayor coste de realimentación) o una menor ganancia en baja frecuencia (menores ventajas de realimentación en cuanto al rechazo de perturbaciones o seguimiento de señales).

7.6 ESTRATEGIAS DE DISEÑO DE CONTROLADORES

7.6.1 REQUISITOS PARA UN CONTROL ADECUADO

Para conseguir un ‘adecuado’ control realimentado es preciso modelar convenientemente las tolerancias $\delta_k(\omega)$ de la Tabla 7-2, que vigilan el comportamiento de las relaciones salida/entrada $|T_k(j\omega)|$ en lazo cerrado

⁶ El desplazamiento es el mismo en el contorno para G que para L_0

(Figura 7-1). En términos de la función de transferencia de lazo abierto, $L(j\omega)=GP$, sobre la que trabaja QFT según justifica Horowitz (1991), un control ‘adecuado’ requiere (véase Sección 2.3.1):

- En presencia de incertidumbre en el modelo, cuando $|L|$ aumenta se reduce la sensibilidad S del sistema en lazo cerrado, ΔT , a variaciones en los parámetros en lazo abierto, ΔP , permitiendo mejorar el comportamiento.
- Un desconocimiento mayor de las perturbaciones exige también mayor $|L|$ para su rechazo.
- La sensibilidad $S=1/1+L$ de la salida de la planta a señales de referencia y a entradas de perturbación disminuye cuando $|L|$ aumenta, y la sensibilidad complementaria T se aproxima a la unidad. Es decir, mejora el comportamiento en el seguimiento de señales y en el rechazo de perturbaciones.
- Cuando $|L|$ aumenta, se incrementa también la respuesta de la entrada de la planta U , ante ruidos introducidos por el sensor N , ante entradas de perturbación $D_{1,2}$ y ante entradas de referencia R . Un elevado esfuerzo de control U puede desestabilizar el sistema y/o saturar los actuadores de la planta, de modo que las especificaciones de comportamiento dinámico ante referencias o perturbaciones no pueden obtenerse. Este es el principal ‘coste de la realimentación’, sobre todo en alta frecuencia.
- El efecto del ruido en la medida N sobre la salida Y se incrementa cuando $|L|$ aumenta.
- Si la planta tiene un retardo puro y/o es de fase no mínima y/o el controlador es digital, la amplitud del controlador $|G|=|L/P|$ tampoco puede aumentarse demasiado. Esto hace referencia al concepto de ‘estabilidad nominal’ en plantas estables, que requiere $|L|$ pequeña.
- En términos de estabilidad robusta, esto es, cuando se considera la incertidumbre, el controlador debe ser lo bastante pequeño a partir de ciertas frecuencias, supuesta P estable.
- Debido al desconocimiento del comportamiento dinámico de la planta en altas frecuencias, la incertidumbre en el modelado en bajas y medias frecuencias, y/o las dinámicas complejas propias de altas frecuencias (por ejemplo, resonancias altamente subamortiguadas), $|L|$ debe ser lo bastante pequeña.
- La estabilización de plantas P inestables, requiere $|L|$ grandes.
- Los controladores físicos han de ser estrictamente propios, de modo que $G \rightarrow 0$ ó $L \rightarrow 0$ en altas frecuencias.

- Controladores agresivos se traducen en respuestas rápidas y de gran amplitud por parte de los actuadores, lo que reduce el tiempo de vida de éstos y puede provocar importantes efectos en los alrededores.

* * *

Todos estos objetivos de control robusto enumerados pueden plantearse explícitamente mediante alguna de las desigualdades $|T_k(j\omega)| \leq \delta_k(\omega)$ de la Tabla 7-2, o tenerse en cuenta implícitamente en el modelado de $L_o(j\omega) = G(j\omega)P_o(j\omega)$. Para los objetivos explícitos, existirá un contorno para G o L_o que los representa sobre el diagrama de Nichols. La solución al problema multi-objetivo, es decir, la existencia de una función⁷ $L_o = GP$ que cumpla todos los objetivos planteados reside entonces en dos frentes:

- La **compatibilidad** de especificaciones robustas⁸ y, por tanto, de contornos **en cada frecuencia**.
- La **compatibilidad** de especificaciones robustas **entre las distintas frecuencias**, o también, un modelado final asequible de $L_o(j\omega)$ ajustándose a los contornos de cada frecuencia. Abreviadamente se denomina síntesis del controlador G o existencia de G .

A continuación se discuten ambos aspectos.

7.6.2 COMPATIBILIDAD DE ESPECIFICACIONES ROBUSTAS EN CADA FRECUENCIA

La compatibilidad entre los contornos que representan a cada especificación robusta en ω_i , $B_{oik}(j\omega_i)$ para los L_o -contornos, hace referencia a que exista intersección no nula entre ellos, según definía (3.30), es decir, a que puedan satisfacerse simultáneamente por $L_o(j\omega_i)$.

De acuerdo con los distintos objetivos de control realimentado, enumerados en términos de $|L|$ en la Sección 7.6.1:

- Algunos precisan de una ganancia $|L|$ suficientemente grande, lo que según la Sección 7.4 se representa mediante contornos de tipología B. La Sección 7.5.1 revisaba como la incertidumbre influía en la agresividad de estos contornos, es decir, para que incertidumbres el contorno B demanda mayor ganancia $|L|$. Y la Sección 7.5.2 resume la influencia del valor de especificación en la ganancia exigida por el contorno B. Cuando la

⁷ Nótese que el problema multiobjetivo es responsabilidad de G , mientras que F sólo termina de resolver el objetivo de un adecuado seguimiento de señales. Luego, el verdadero problema en cuanto a la existencia o dificultad de solución reside en la síntesis de G , siendo la síntesis de F una tarea sencilla.

⁸ El término *especificación robusta* equivale a *especificación en presencia de incertidumbre*, incluido en el título de la presente tesis.

ganancia solicitada es menos exigente aparecen contornos A, habitualmente no dominantes.

- Otros pretenden limitar la ganancia máxima $|L|$, lo que se representa mediante contornos de tipología D. La Sección 7.5.1 discute como la incertidumbre influye en la ganancia limitada con el contorno D. Y la Sección 7.5.2 la agresividad del contorno D respecto de la tolerancia de especificación. Cuando la limitación de ganancia $|L|$ es muy tolerante, aparecen contornos A, habitualmente no dominantes.
- Los objetivos de estabilidad limitan la pendiente de evolución frecuencial de L con contornos de tipo A. La influencia de la incertidumbre y del valor de especificación sobre el área que limita el contorno se han discutido en la Sección 7.5.

* * *

En una determinada frecuencia ω_i , una demanda de ganancia mínima $|L(j\omega)|$ y una limitación de la pendiente de caída de $L(j\omega)$ son *a priori* compatibles. Gráficamente un contorno de tipo B y uno de tipo A presentan intersección no nula, y $L_o(j\omega)$ puede satisfacer ambos simultáneamente. Lo mismo ocurre con un contorno de tipo D que limita la ganancia $|L(j\omega)|$ y un contorno de tipo A. Véanse tipologías A, B y D en la Figura 7-3.

A esta primera regla genérica existe una excepción. Se demostraba en los contornos de tipo A, que habitualmente representan la estabilidad, cómo una excesiva incertidumbre en fase de la planta ensanchaba dichos contornos. Hipotéticamente se puede llegar hasta un contorno A incompatible en sí mismo, ya que sus curvas superior e inferior ocupan toda la banda angular. Véanse las Figuras 4.9 y 5.8. Nótese que esto no ocurre para los contornos B (Figura 5.5) o D (Figura 4.5).

En una determinada frecuencia ω_i , una demanda de ganancia mínima y una limitación de ganancia máxima pueden ser incompatibles. Gráficamente, un contorno B, que debe ubicar $L_o(j\omega)$ por encima en todo $\Psi_\theta = [-360^\circ 0]$, puede ser incompatible con un contorno de tipo D, que debe ubicar $L_o(j\omega)$ por debajo en todo el intervalo $\Psi_\theta = [-360^\circ 0]$. Entonces, para que ambos contornos sean compatibles en ω_i la altura del contorno D, $|B_{oD}(j\omega)|$, debe ser mayor que la del contorno B, $|B_{oB}(j\omega)|$, al menos en algún $\psi_\theta \in \Psi_\theta$.

La incertidumbre en la frecuencia ω_i , representada por la plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega)$, y la especificación $\delta_k(\omega_i)$, modifican la forma y, por tanto, la altura de los contornos B y D. Entonces, condicionan también la compatibilidad de las especificaciones robustas expresadas con ellos, y la existencia de solución simultánea de ambos objetivos. Su influencia se estudió para los distintos

requisitos posibles de control en los Capítulos 4 al 6 y se resume en la Sección 7.5.

Con la ayuda de la formulación desarrollada en la presente tesis es posible predecir si los contornos B y D en la misma frecuencia serán o no compatibles. Si no lo fueran, también es posible inferir en cuanto debe ser relajada alguna de las especificaciones $\delta_i(\omega)$ hasta conseguir su compatibilidad. Otra posible solución, si se desean mantener constantes las tolerancias de especificación $\delta_i(\omega)$, es la división de la incertidumbre, para lo que resulta imprescindible el estudio presentado.

En tanto en cuanto la limitación de la ganancia $|L(j\omega)|$ es crucial en alta frecuencia, otra posibilidad es adoptar este objetivo como implícito al modelar $L_o(j\omega)$, con lo que no existirá ningún contorno de tipo B. Entonces, las especificaciones explícitas $\delta_i(\omega)$, que dan lugar a contornos B y A, se deberán modelar adecuadamente con la frecuencia ω , $i=1,\dots,N$, tal que permitan reducir $|L_o(j\omega)|$ convenientemente a partir de cierta frecuencia. Esto elimina por completo el problema planteado de posible ‘incompatibilidad de especificaciones en cada frecuencia’. Y esto permitió, a partir de Horowitz y Sidi (1978) y Horowitz (1979), desarrollar una serie de teoremas sobre la existencia de solución óptima al control realimentado desde QFT. Sin embargo, la ausencia de una tolerancia que limite el esfuerzo de control (que puede dar contornos D incompatibles) conlleva sus riesgos. En estos casos, la experiencia del ingeniero de control es fundamental, y debe garantizar que no se violen los márgenes de amplificación de ruidos, ni tampoco el esfuerzo de control máximo permitido por los actuadores en las acciones previstas de control. Para ello, la formulación y análisis presentados pueden servir de gran ayuda.

* * *

Supuestas compatibles las distintas especificaciones en cada frecuencia ω , es decir, que exista intersección no nula de contornos, el **sobrediseño** es otra cuestión a considerar. El sobrediseño es un concepto insalvable en un problema multiobjetivo, que es independiente de la técnica empleada. Evidente si todos los objetivos son alcanzables con un único controlador, para cada frecuencia éste cumplirá estrictamente cierto objetivo pero se excederá en el resto. El conocimiento de los contornos que representan cada especificación robusta, permite así mismo cuantificar sobre el diseño final $L_o(s)=G(s)P_o(s)$ el sobredimensionamiento respecto a cualquier especificación y cualquier frecuencia.

El sobrediseño también existe por el mero hecho de haber incertidumbre, ya que un único controlador debe satisfacer las especificaciones para todas las plantas. Por ello, en general, cuando aumenta la incertidumbre, los

contornos son más agresivos. En este sentido una combinación del control robusto QFT y el control adaptativo, puede ofrecer soluciones interesantes y más óptimas, siempre que se preserve la estabilidad robusta. Un ejemplo se describe en la Sección 6.2.6.

Ejemplo. Problema de regulación (i)

El ejercicio de control (i) planteado en la Sección 7.2 pretende: regular la velocidad del motor (Figura 7-2 y Tabla 7-1) a un valor nominal constante, a pesar de las posibles perturbaciones que modifican ésta y a pesar de la incertidumbre. Todo ello, con una estabilidad robusta adecuada, y con el menor coste de realimentación posible. Para cumplir simultáneamente éstos objetivos se tienen en cuenta las siguientes especificaciones robustas sobre la Tabla 7-3: $|T_k(j\omega)| \leq \delta_k(\omega)$, $k=1$ para la estabilidad, y $k=2,3$ para el rechazo de perturbaciones, traducidas sobre la velocidad y/o la tensión aplicada a los actuadores. El mínimo ‘coste de realimentación’ y un controlador lo más sencillo posible serán objetivos *implícitos* de diseño.

Los contornos representativos de las especificaciones $k=1, 2$ y 3 , ya comentados en secciones anteriores, se agrupan ahora en la Figura 7-19 por frecuencias $\omega_l = \{0.1, 1, 10, 100\}$.

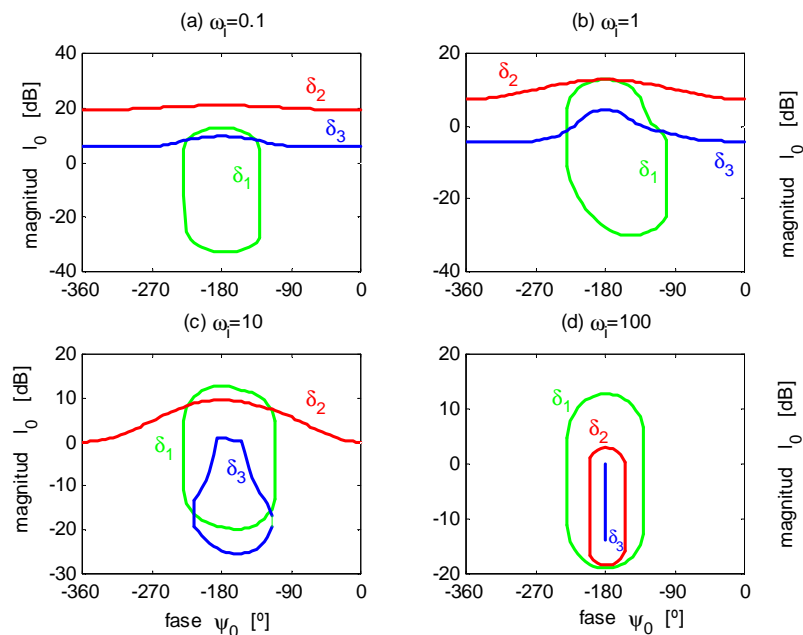


Figura 7-19: Ejemplo. L_0 -contornos para el problema de regulación (i)

En función del valor relativo de especificación, $\delta_i(\omega_i)$, y el valor 1 o los valores $\{p(\omega_i)\}$, era posible predecir la tipología de los contornos resultantes (Tabla 7-7). Esto se ilustraba para el ejemplo en la Figura 7-5. Por tanto, antes del trazado de los contornos es posible predecir las tipologías y, por tanto, su compatibilidad. Como sólo se tienen contornos A y B, esta última se comprueba sobre la Figura 7-19.

En baja frecuencia, $\omega_i=0.1$ rad/s, dominan los contornos B de rechazo de perturbaciones $|T_{2,3}(j\omega_i)|=|Y/D_{2,1}(j\omega_i)|\leq\delta_{2,3}(\omega_i)$, frente a los de tipo A de estabilidad $|T_1(j\omega_i)|=|L/1+L(j\omega_i)|\leq\delta_1(\omega_i)$, $\delta_1(\omega_i)=1.3$. En particular, dominan los contornos B para el rechazo de perturbaciones en la salida, $|Y/D_2(j\omega_i)|\leq\delta_2(\omega_i)$. Véase el gráfico (a) de la Figura 7-19.

Conforme aumenta la frecuencia la tipología B que busca una mínima ganancia de L_0 sigue dominando hasta $\omega_i=10$, frecuencia hasta la que interesa un correcto rechazo de perturbaciones. No obstante, ahora la altura del contorno B intersección más desfavorable no sólo viene determinada por el contorno B de $|T_2(j\omega_i)|\leq\delta_2(\omega_i)$, sino también por el contorno A de $|T_1(j\omega_i)|\leq\delta_1(\omega_i)$.

En alta frecuencia, las especificaciones de rechazo de perturbaciones, $\delta_{2,3}(\omega_i=100)$ en la Tabla 7-3, deben relajarse para que resulten contornos A. Si éstos fueran predominantes, al ser de tipo A permitirían la reducción de la ganancia de alta frecuencia, $|L_0(\omega_{hi})|$. Como la pendiente de decremento de $|L_0(\omega_{hi})|$ debe ser menor que la dictada por los contornos A de $\delta_{2,3}(\omega_i=100)$ para mantener unos mínimos márgenes de ganancia y fase, en $\omega_i=100$ dominan los contornos A de $\delta_1(\omega_i=100)$. Al ser también de tipo A, el modelado de L_0 permite alcanzar su asíntota de alta frecuencia a partir de $\omega_i=100$. Una tolerancia $\delta_2(\omega_i=100)\approx\delta_1(\omega_i=100)$, también hubiera servido para garantizar una estabilidad aceptable; véanse (4.83), (4.84), (5.120) y (5.121).

* * *

El tratamiento simultáneo de perturbaciones que afectan a los actuadores, D_1 , y a la velocidad del motor, D_2 , requiere mención especial. Para el ejemplo, el objetivo de rechazo de perturbaciones producidas en la salida, $|Y/D_2(j\omega_i)|\leq\delta_2(\omega_i)$, presenta contornos más exigentes que el rechazo de perturbaciones producidas en la entrada, $|Y/D_1(j\omega_i)|\leq\delta_3(\omega_i)$, en las frecuencias de interés (bajas y medias) para el rechazo de perturbaciones, $\omega_i=\{0.1, 1, 10\}$. Pero, sin embargo, la tolerancia de especificación para las perturbaciones en la entrada es más exigente que para las de la salida, $\delta_3(\omega_i)<\delta_2(\omega_i)$. En concreto, el factor de atenuación exigido para D_1 en Y es 10% mayor que el de D_2 en Y , y sin embargo, se requiere menos ganancia de

lazo abierto $|L_0|$ (menor altura del contorno B), e incluso $\delta_3(\omega_i=10)=0.05$ origina un contorno de tipo A. Esto es debido, a que la contribución de la ganancia de la planta, $|P|=p$, en ambos objetivos es diferente. En el rechazo de las perturbaciones en la salida, $|Y/D_2|=|1/1+L|<\delta_2$, el controlador añadido $|G|=g$ debe aumentar $|P|=p$. Como P presenta incertidumbre, $\{P\}$, el caso más desfavorable (necesita una mayor aportación de ganancia), es $|P|_{min}=p_{min}$, tal y como demostraba la Sección 7.5.1. Luego, $|Y/D_2|=|1/1+gp_{min}|<\delta_2$. Para interpretar en los mismos términos $|Y/D_1|=|P/1+L|<\delta_3$, se pueden reducir las perturbaciones en la entrada a la salida, tal que: $|Y/D_1|=|1/1+L|<\delta_3/|P|$. Y considerando la planta de módulo mínimo, $|Y/D_1|=|1/1+gp_{min}|<\delta_3/p_{min}$. Luego para que ambas especificaciones requieran la misma aportación de g (o l_0), es decir, se representen por un contorno de ‘aproximadamente’ la misma altura, se debe satisfacer:

$$\delta_2(\omega_i) = \delta_3(\omega_i) / p_{min} \quad (7.7)$$

Por ejemplo, para $\omega_i=0.1$ (véase Figura 7-5), se tiene: $\delta_2(\omega_i=0.1)=0.1$ (o -20 dB), $\delta_3(\omega_i=0.1)=0.01$ (o -40 dB) y $p_{min}(\omega_i=0.1)=0.02$ (o -34 dB). Por tanto, aplicando (7.7), $\delta_2=0.1 < \delta_3/p_{min}=0.5$, y consecuentemente, el contorno B que representa a δ_2 es más exigente que el que representa a δ_3 .

Se ha puntualizado que si se cumple (7.7) el contorno es ‘aproximadamente’ igual. Nótese que el caso $|Y/D_1|=|1/1+gp_{max}|<\delta_3/p_{max}$ puede ser más desfavorable que para p_{min} . Entonces, si se cumple (7.7) el contorno B para δ_3 coincide con el contorno B de δ_2 en ciertas fases del intervalo $\Psi_0=[-360^\circ, 0^\circ]$, allí donde el caso más desfavorable es p_{min} . Mientras que en otras fases donde las plantas más desfavorables sean p_{max} se cumplirá: $\delta_2 > \delta_3/p_{max}$, y por tanto, en dichas fases el contorno B para δ_3 poseería mayor altura. Un ejemplo sobre la contribución de p_{max} y p_{min} en el contorno de tipo B para δ_3 se mostraba en la Figura 5-39 de la Sección 5.3.2.3.

Aprovechando la formulación de los contornos sobre la Tabla 7-5 y los análisis de la contribución de la incertidumbre en la Sección 7.5.1, puede conocerse la posición exacta de los contornos para δ_2 y δ_3 . Y en función de ella, puede modelarse convenientemente $\delta_2(\omega)$ en relación a $\delta_3(\omega)$, si la regulación de las perturbaciones sobre el motor lo requiriesen.

* * *

El contorno intersección del problema multiobjetivo, $B_0(j\omega)$, y la planta nominal, $P_0(j\omega)$, se representan para el conjunto de frecuencias $\omega_i=\{0.1, 1, 10, 100\}$ en la Figura 7-20. El modelado de $L_0=GP$ se comenta en la siguiente Sección 7.6.3.

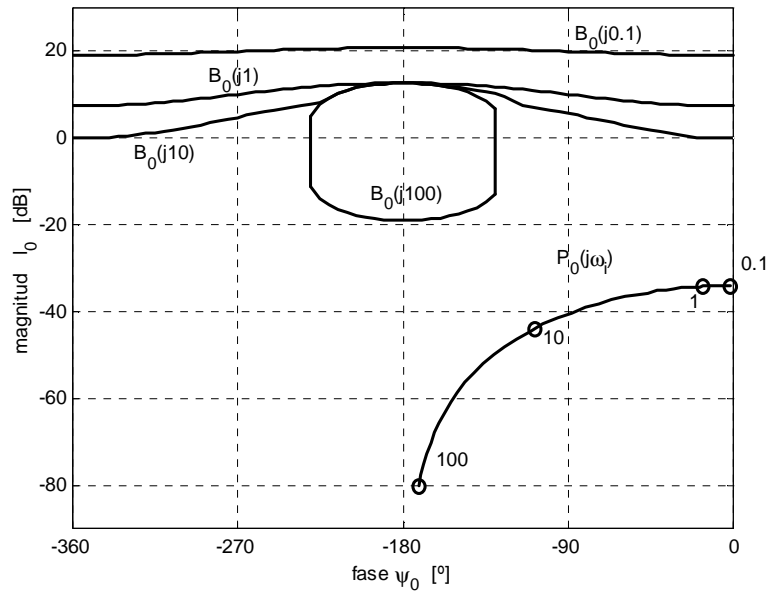


Figura 7-20: Ejemplo. Contornos intersección y planta nominal para regulador (i)

Ejemplo. Problema de regulación (ii)

El ejemplo de control (ii) planteado en la Sección 7.2 añade sobre el problema de regulación (i) anterior, $|T_k(j\omega)| \leq \delta_k(\omega)$, $k=1,2,3$, una especificación robusta *explícita* sobre el esfuerzo de control, $k=4$. Las tolerancias $\delta_k(\omega)$ se detallan en la Tabla 7-3.

Los contornos representativos de las especificaciones $k=1, 2, 3$ y 4 , ya comentados en secciones anteriores, se agrupan ahora en la Figura 7-21 por frecuencias $\omega_i = \{0.1, 1, 10, 100\}$.

$\delta_4(\omega_i)$ en bajas-medias frecuencias, $\omega_i = \{0.1, 1\}$, ha de elegirse de acuerdo a la demanda de tensión que requerirá el rechazo de perturbaciones, $|U/D_1|$ y $|U/D_2|$. Lógicamente, el sistema de potencia y los actuadores físicos deberán estar preparados para proporcionar esta demanda. Si no es así, serán las tolerancias de especificación $\delta_2(\omega_i)$ o $\delta_3(\omega_i)$ quienes deberán relajarse, para que el diseño teórico responda lo más fielmente posible a cómo se comportará en la práctica. En el ámbito de los contornos, unos actuadores en concordancia con la tensión demandada por el rechazo de perturbaciones equivale a unos contornos compatibles. Un ejemplo se muestra en los gráficos (a) y (b) de la Figura 7-21.

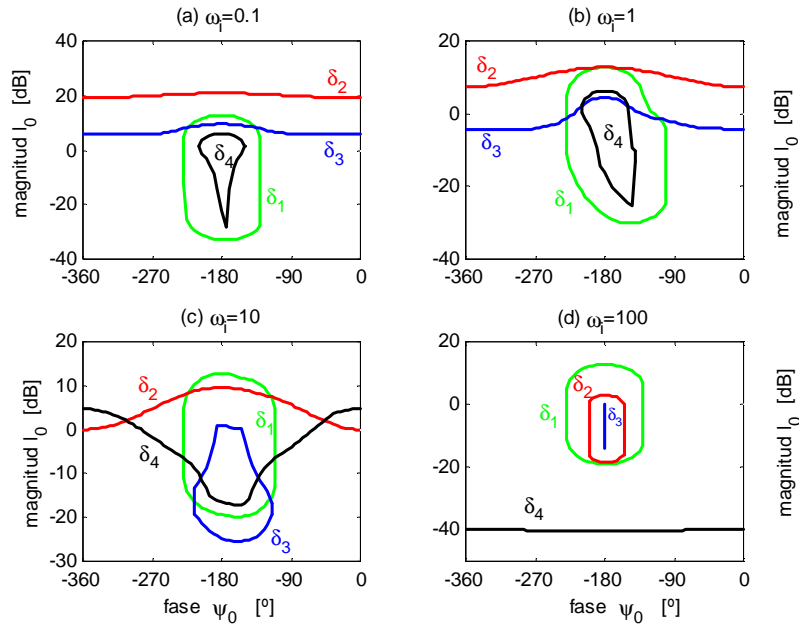


Figura 7-21: Ejemplo. L_0 -contornos para el problema de regulación (ii)

Conforme aumenta la frecuencia, $\omega_i=\{10, 100\}$, se podría adoptar la estrategia de disminuir $\delta_i(\omega_i)$, con el fin de evitar que el sistema trate de responder a perturbaciones más allá de las frecuencias previstas. A su vez esto prevendría también la amplificación de ruidos introducidos por el sensor, $|U/N|$ e $|Y/N|$. En el ejemplo, una disminución de $\delta_i(\omega_i) < 100$ para $\omega_i=100$ podría resultar un requisito muy difícil de cumplir al modelar L_0 . Un salto de ganancia elevado entre frecuencias relativamente cercanas (contorno B en $\omega_i=10$ y contorno D en $\omega_i=100$) puede aumentar enormemente el orden del controlador. Y lo que es más, si se trazaran infinitos contornos de estabilidad entre dichas frecuencias la pendiente de caída de L_0 está condicionada, por lo que el orden del controlador se incrementa aún más si no se quieren violar dichos contornos. Por ello, se decide adoptar el mismo criterio que para frecuencias menores, $\delta_i(\omega_i=100)=100$. Véase el gráfico (d) de la Figura 7-21, donde existe compatibilidad de contornos para $\omega_i=100$, resultando un contorno dominante de tipo D. No obstante, en el ejemplo existe un problema mayor.

En medias frecuencias, $\omega_i=10$, se quieren atenuar perturbaciones en la salida hasta un 50%, $|Y/D_2| < 0.5$, lo que requiere una cierta ganancia $|L_0(j\omega_i)|=l_0(\omega_i)$, como muestra su contorno B representativo. Por otro lado, alrededor de $\omega_i=10$ la ganancia $\{p(\omega_i)\}$ (y también $p_0(\omega_i)$) empiezan a decrecer fuertemente (véase Figura 7-5). Entonces, $l_0(\omega_i)/p_0(\omega_i)=g(\omega_i)$ se

eleva mucho a partir de $\omega_i=10$. Es decir, el ‘coste de la realimentación’ empieza a pagarse, y si éste quiere restringirse en los mismos términos anteriores, $\delta_i(\omega_i=10)=100$, aparece un contorno D. Éste restringe a un valor máximo $l_0(\omega_i)$ a partir de $\omega_i=10$, para limitar el pico de $g(\omega_i)$. Y esto puede ser incompatible con el contorno B que hasta $\omega_i=10$ todavía requiere una mínima $l_0(\omega_i)$ o $g(\omega_i)$. El gráfico (c) de la Figura 7-21, muestra como el contorno B para δ_2 y el contorno D para δ_i , sólo son compatibles en ciertas fases hacia los extremos del intervalo $\Psi_0=[-360^\circ, 0^\circ]$. En este caso aunque existe posible solución para el modelado de L_0 , su síntesis se complica. Nótese que en el diseño con QFT una vez satisfechos los contornos de baja frecuencia, L_0 tiende a reducir su ganancia, pero también su fase hacia -180° , para en alta frecuencia alcanzar lo más rápidamente posible su asíntota de decrecimiento máximo. Sin embargo, en este caso los contornos de $\omega_i=10$, obligan a aumentar la fase de L_0 , añadiendo ceros, con lo que posteriormente serán necesarios otros tantos polos para reducir la fase, más los polos previstos de rápido decrecimiento de L_0 en alta frecuencia. En definitiva, aunque hay solución, la complejidad del controlador aumenta considerablemente.

Gracias a los resultados presentados en esta tesis es posible predecir este tipo de situaciones de ausencia de compatibilidad o de compatibilidad en ciertas fases. También es posible establecer la relación entre tolerancias de especificación para manipular dicha compatibilidad según convenga. Un ejemplo se mostró en la Sección 6.1.5. De acuerdo a las fórmulas (6.38) y (6.39) se puede concluir:

- Para que exista intersección no nula entre los contornos B para $\delta_2 < 1$ y D para $\delta_i < 1/p$, en un intervalo absoluto de fases mayor de 0° se debe satisfacer:

$$\delta_2 > 1 - p_{min} \delta_4 \tag{7.8}$$

Equivalentemente,
$$\delta_4 > \frac{1 - \delta_2}{p_{min}} \tag{7.9}$$

- Para que exista intersección no nula entre los contornos B para $\delta_2 < 1$ y D para $\delta_i < 1/p$, en un intervalo absoluto de fases mayor de 90° se debe cumplir:

$$\delta_2 > \sqrt{1 - p_{min}^2 \delta_4^2} \tag{7.10}$$

Equivalentemente,
$$\delta_4 > \frac{\sqrt{1 - \delta_2^2}}{p_{min}} \tag{7.11}$$

- Un intervalo intersección de hasta 180° , es decir, que el contorno D esté en todo el intervalo $[-360^\circ, 0^\circ]$ por encima del contorno B, no es posible.

Utilizando las fórmulas de ambos contornos se obtiene que es necesario que $\delta_2 > 1$ (transformación del contorno B en tipo A) y $\delta_4 > 1/\{p\}$ (transformación del contorno D en tipo A).

Aplicado al ejemplo, $p_{min}(\omega_i=10)=6.3e-3$ (o -34dB). Para $\delta_4(\omega_i=10)=100$ fijo, según (7.8) se debe elegir δ_2 a partir de $\delta_2(\omega_i=10) > 0.37$ para que exista un intervalo de fases intersección mayor a 0° . Según (7.10), $\delta_2(\omega_i=10) > 0.78$ para conseguir solución en más de 90° . Como la tolerancia seleccionada, $\delta_2(\omega_i=10)=0.5$, cumple (7.9) pero no (7.10), el intervalo absoluto de fases solución está entre 0° y 90° . Comprobando esto sobre el gráfico (c) de la Figura 7-21 se obtiene aproximadamente un intervalo de 52° de fases posibles para ubicar L_o , a partir del ángulo 0° . Y simétricamente se obtiene otro intervalo solución en los alrededores de -360° . Para conseguir la compatibilidad de contornos de mínimo rechazo de perturbaciones y de máximo esfuerzo de control, en todo el intervalo de fases $[-360^\circ, 0^\circ]$, sería necesario relajar $\delta_2(\omega_i=10)$ y $\delta_4(\omega_i=10)$, aumentando sus valores hasta conseguir una transformación a tipología A: $\delta_2(\omega_i=10) > 1$ y $\delta_4(\omega_i=10) > 1/\{p(\omega_i=10)\}$.

Ejemplo. Servosistema (iii)

El ejemplo de control (iii) planteado en la Sección 7.2 pretende un control estable y adecuado del motor DC frente a diferentes consignas de velocidad, considerando igualmente la presencia de perturbaciones sobre dicha velocidad. Unos mínimos ‘coste de realimentación’ y complejidad del controlador, serán criterios *implícitos* de diseño. Por tanto se consideran $|T_k(j\omega)| \leq \delta_k(\omega)$, $k=1, 2$ y 5 , con $\delta_k(\omega)$ definidos en la Tabla 7-3.

Los contornos representativos de las especificaciones robustas, ya comentados en la Sección 7.4, se agrupan ahora en la Figura 7-22 por frecuencias $\omega_i = \{0.1, 1, 10, 100\}$.

En los gráficos (a) y (b) de la Figura 7-22 puede observarse cómo en baja frecuencia, $\omega_i = \{0.1, 1\}$, la especificación robusta para el seguimiento de señales es más severa que la del rechazo de perturbaciones. Entonces, en el modelado de $L_o(j\omega)$, su ganancia estática, $|L_o(j\omega_f)|$ debe cumplir con el contorno dictado por δ_5 , y ello conlleva un sobrediseño respecto a la ganancia que requiere δ_2 . El exceso puede ser fácilmente cuantificado aplicando convenientemente (5.2) y (6.49), recogidas en la Tabla 7-5. Sin embargo, este coste no es significativo si el objetivo fundamental fuera el seguimiento de la consigna.

El verdadero coste de realimentación se refleja en alta frecuencia. Los contornos para $\omega_i=100$ son todos de tipo A (véase gráfico (d) de la Figura 7-22), con lo que permiten la reducción de $|L_o(j\omega)|$, sin ningún límite a partir

de $\omega_i=100$. Nótese como la gran relajación de $\delta_5(\omega_i=100)=57.7$ y de $\delta_2(\omega_i=100)=2.5$, hacen que sus contornos A no sean significativos respecto a los de estabilidad $\delta_1(\omega_i=100)=1.3$. Sin embargo, la elevada altura (véase Figura 7-23) del contorno intersección de baja frecuencia, $B_0(j\omega_i=j0.1)$, debida a δ_5 , se traducirá en un aumento proporcional de la ganancia de alta frecuencia, que sólo puede paliarse, parcialmente, con un controlador de mayor complejidad (véase discusión en la Sección 7.6.3).

Si se relajara la especificación $\delta_5(\omega_i=0.1)$ desde 1.001 hasta 1.1, como indicaba la Tabla 7-8, su contorno reduce su altura en -40dB, como muestra el gráfico (b) de la Figura 7-18. Y si este contorno fuera el dominante frente al debido a $\delta_2(\omega_i=0.1)$, significaría una reducción de la ganancia estática del controlador en, aproximadamente⁹, 100 veces: $g(\omega=0.1)/100$.

Si se desea mantener $\delta_5(\omega_i=0.1)=1.001$ y el esfuerzo de control en baja o alta frecuencia excedieran los límites permitidos, puede tratar de diseñarse un control robusto-adaptativo, dividiendo la incertidumbre, según la metodología y el ejemplo propuestos en la Sección 6.2.6.

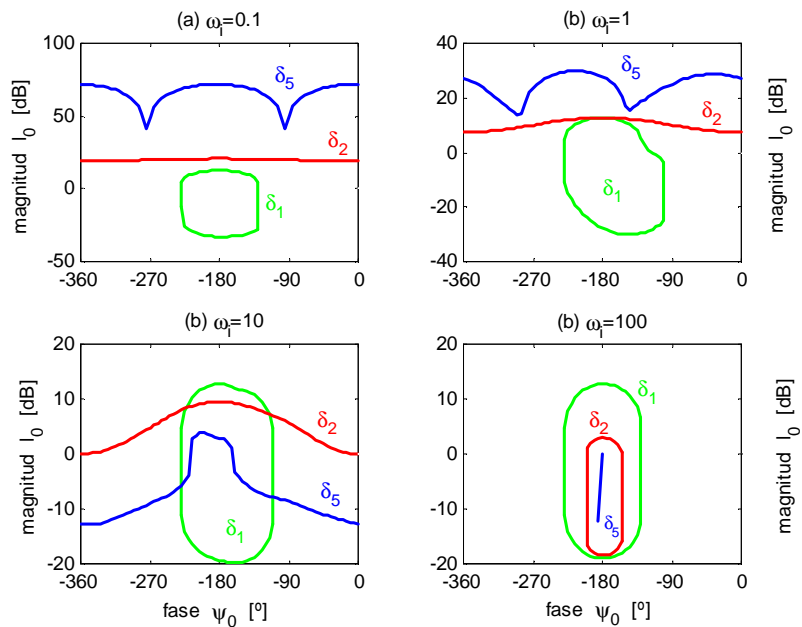


Figura 7-22: Ejemplo. L_0 -contornos para el servomecanismo (iii)

⁹ La fase de L_0 en baja frecuencia es donde se debe calcular de manera exacta la reducción de altura del contorno de baja frecuencia para δ_5 .

El contorno intersección del problema multiobjetivo, $B_0(j\omega)$, y la planta nominal $P_0(j\omega)$, se representan para el conjunto de frecuencias $\omega_i = \{0.1, 1, 10, 100\}$ rad/s en la Figura 7-23. El modelado de $L_0 = GP$ se comenta en la siguiente Sección 7.6.3.

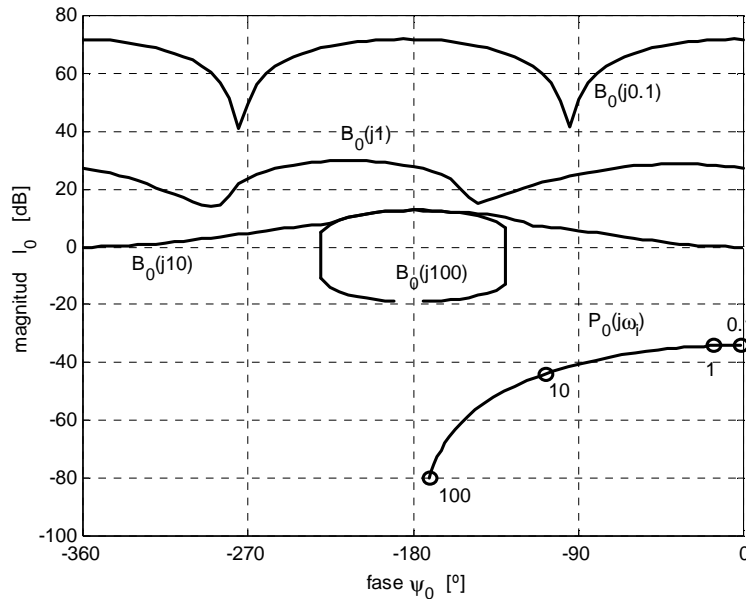


Figura 7-23: Ejemplo. Contornos intersección y planta nominal para servomecanismo (iii)

7.6.3 COMPATIBILIDAD DE ESPECIFICACIONES ROBUSTAS ENTRE FRECUENCIAS. MODELADO DE L_0

En todo diseño de control realimentado existen unos compromisos entre los distintos objetivos de control. Unas especificaciones dominan en ciertos rangos de frecuencia, relajándose en otras frecuencias donde el resto de objetivos predominan. Todo ello se manifiesta en QFT a través de distintas tipologías de contornos y la distinta ‘agresividad’ que puede ofrecer éstas. La compatibilidad de las distintas especificaciones a pesar de la incertidumbre ha sido ampliamente discutida en la Sección 7.6.2 para cada frecuencia. Finalmente, a partir del conjunto de contornos que muestran el/los requisitos dominantes a cumplir en cada frecuencia, $B_0(j\omega)$, y partiendo de la planta nominal, $P_0(j\omega)$, ahora ha de modelarse $L_0(j\omega)$. Esta función ha de cumplir en cada ω_i su correspondiente contorno B_0 , y cuanto mayor se ajuste a éste, más óptimo (Horowitz y Sidi, 1978) será el diseño respecto a las especificaciones planteadas.

En líneas generales unos objetivos de control compatibles o unos contornos compatibles frecuentemente se pueden resumir como sigue:

- Una ganancia de lazo abierto, $\{|L|\}=\{|GP|\}$, suficientemente grande en baja-media frecuencia. Aparecen contornos de tipo B que exigen una mínima ganancia en cada fase, $g \angle \phi \geq g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ (véase Figura 7-3). Se corresponde con las especificaciones que requieren el empleo del control realimentado (beneficios de la realimentación en la Tabla 7-7):
 - Atenuación de perturbaciones en la salida, $|Y/D_2(j\omega)| \leq \delta_2(\omega)$, con $\delta_2(\omega) \ll 1$.
 - Atenuación de perturbaciones en la entrada, $|Y/D_1(j\omega)| \leq \delta_3(\omega)$, $\delta_3(\omega) \ll p(\omega)$.
 - Disminución de la sensibilidad de lazo cerrado a la incertidumbre de la planta para el problema del servo, $\Delta p(\omega) = p_{max}/p_{min}(\omega) \gg \delta_5(\omega) \geq \Delta|T(j\omega)|$.
- Una ganancia de lazo abierto, $\{|L|\}=\{|GP|\}$, suficientemente pequeña en alta frecuencia. Pretende evitar que ruidos introducidos por el sensor o perturbaciones aparentemente insignificantes, sean amplificadas en exceso en la salida del sistema y, sobre todo, en la entrada de los actuadores, lo que puede provocar su saturación (Horowitz y Sidi, 1972). Habitualmente éste objetivo se tiene en cuenta *implícitamente* en el modelado de L_0 o síntesis de G . Para poder satisfacerlo basta con la relajación en alta frecuencia de las especificaciones que obtenían las ventajas de la realimentación; ahora:
 - $|Y/D_2(j\omega)| \leq \delta_2(\omega)$, con $\delta_2(\omega) > 1$,
 - $|Y/D_1(j\omega)| \leq \delta_3(\omega)$, con $\delta_3(\omega) > \{p(\omega)\}$,
 - $\Delta p(\omega) = p_{max}/p_{min}(\omega) < \delta_5(\omega) \leq \Delta|T(j\omega)|$.

Sus contornos representativos de tipo A suelen ser incluso menos restrictivos que los de estabilidad también de tipo A. En cualquier caso, un contorno A permite la reducción de $|L_0|$ conforme aumenta la frecuencia.

Si se imponen objetivos *explícitos* sobre la reducción de la ganancia de alta frecuencia, se pueden representar con contornos de tipo D (los más exigentes) o contornos de tipo A. El contorno D exige una reducción mínima de la ganancia en cada fase: $g \angle \phi \leq g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$ (véase Figura 7-3). El contorno A deja una mayor libertad en el modelado de L_0 , delimitando tan solo un área finita prohibida, y limitando el pico de la función de transferencia que se trate. Se trata, de especificaciones (Tabla 7-7) tales como:

- Atenuación de ruidos en la salida, $|Y/N(j\omega)| \leq \delta_1(\omega)$, con tolerancias estrictamente de atenuación $\delta_1(\omega) < 1$ (contornos tipo D), o con tolerancias de limitación del pico de $|Y/N(j\omega)|$ para $\delta_1(\omega) > 1$.
- Limitación de la amplificación de ruidos en la entrada del sensor, $|U/N(j\omega)| \leq \delta_2(\omega)$, con $p(\omega) < 1/\delta_2(\omega)$ para contornos D y con $\{p(\omega)\} > 1/\delta_2(\omega)$ para contornos A.
- Limitación de la amplificación de perturbaciones aparentemente insignificantes en la entrada del sensor o limitación del esfuerzo de control gastado en el rechazo de perturbaciones: $|U/D_1(j\omega)| \leq \delta_1(\omega)$, con $\delta_1(\omega) < 1$, o $|U/D_2(j\omega)| \leq \delta_2(\omega)$, con $p(\omega) < 1/\delta_2(\omega)$, originando ambos contornos de tipo D. Y si $\delta_1(\omega) < 1$ o $\{p(\omega)\} < 1/\delta_2(\omega)$ se representan con contornos tipo A.

Las especificaciones explícitas sobre el esfuerzo de control en bajas frecuencias no son dominantes respecto a aquellas especificaciones que buscan los beneficios. Entonces, en dichas frecuencias las tolerancias se relajan tal que: $\delta_1(\omega) \gg 1$, $p(\omega) \gg 1/\delta_2(\omega)$, y se originan contornos A no relevantes.

- Una transición moderada entre una alta ganancia de $\{L\} = \{GP\}$ en baja frecuencia, hacia una ganancia baja de $\{L\}$ en alta frecuencia. Ello persigue unos mínimos márgenes de estabilidad robusta alrededor de $0\text{dB} \angle -180^\circ$ considerando la incertidumbre. Para ello, unos contornos de tipología A establecen un área prohibida en ciertas fases y ganancias alrededor del punto crítico $0\text{dB} \angle -180^\circ$: $g \angle \phi \leq g_{INF} \angle \phi$ y $g \angle \phi \leq g_{SUP} \angle \phi$ en $\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T]$ (véase Figura 7-3). Aunque las especificaciones de estabilidad (objetivo más importante en control) deben imponerse en todo el rango de frecuencias $(0, \infty)$, sus contornos A empiezan a ser relevantes a partir de medias frecuencias. Si no existen criterios más exigentes, como los contornos D tratados en el punto anterior, los contornos A de estabilidad son los únicos dominantes en alta frecuencia. Las especificaciones que procuran estos objetivos (Tabla 7-7) son :
 - $|L/1+L(j\omega)| \leq \delta_1(\omega)$, con $\delta_1(\omega)$ moderadamente mayor que 1. Habitualmente, $\delta_1(\omega) \approx 1.3 > 1$, para $MG \geq 45^\circ$ y $MF \geq 5\text{dB}$.
 - $|1/1+L(j\omega)| \leq \delta_2(\omega)$, con $\delta_2(\omega)$ moderadamente mayor que 1. Habitualmente, $\delta_2(\omega) \approx 1.3 > 1$, para $MG \geq 45^\circ$ y $MF \geq 15\text{dB}$.

* * *

Habitualmente sólo se consideran especificaciones robustas explícitas de estabilidad (siempre imprescindibles) y especificaciones robustas que buscan los beneficios de la realimentación (rechazo de perturbaciones y/o

seguimiento de señales). Y el coste de realimentación es un criterio implícito. Bajo este supuesto, son válidos los teoremas de existencia en Horowitz (1979) y otros autores posteriores (véase Capítulo 2). Éstos demuestran formalmente y bajo ciertas restricciones en la planta y en las especificaciones (véase Sección 2.7.2) la existencia de una función L_0 óptima y única que se ajusta perfectamente a los contornos en cada frecuencia. Sin embargo, en la práctica esto conlleva un precio. El orden de dicho controlador óptimo es infinito y por lo tanto impracticable.

A continuación se muestran algunos ejemplos cuantificando la bondad y las dificultades en la síntesis de L_0 .

Ejemplo. Regulador (i)

Sobre la situación de partida ilustrada en la Figura 7-20, con contornos $B_0(j\omega)$ y planta nominal $P_0(j\omega)$ en $\omega_i = \{0.1, 1, 10, 100\}$, se ha modelado una primera función $L_{01}(j\omega)$, mostrada en la Figura 7-24. El controlador de realimentación $G_I(s)$ sintonizado se define:

$$G_I(s) = \frac{467 \left(\frac{s}{37} + 1 \right)}{\left(\frac{s^2}{181^2} + \frac{2 \cdot 0.5}{181} s + 1 \right)} \tag{7.12}$$

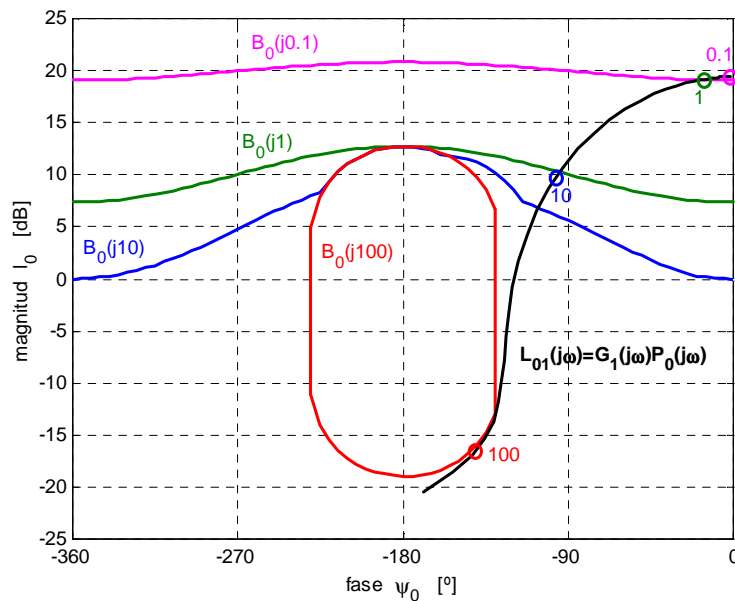


Figura 7-24: Ejemplo. Diseño de Regulador G_I

El controlador sintonizado $G_1(s)$ resulta suficientemente sencillo y cumple los objetivos de control en cada frecuencia $\omega_i = \{0.1, 1, 10, 100\}$.

Para $\omega_i = \{1, 10\}$, existe un ‘sobrediseño’ respecto a la especificación robusta representada con el contorno. Dicha especificación responde en concreto (véase Figura 7-19) al rechazo de perturbaciones, $|Y/D_2(j\omega)| \leq \delta_2(\omega)$, con $\delta_2(\omega_i=1) = 0.3$ y $\delta_2(\omega_i=10) = 0.5$, que eran dominantes respecto al objetivo de δ_3 . Sin embargo, dicho sobrediseño no supone ningún perjuicio, como se demuestra a continuación.

Un nuevo modelado $L_{02}(j\omega)$ trata ahora de ajustarse también en $\omega_i = \{1, 10\}$ a sus contornos $B_0(j\omega_i)$. El resultado se muestra en la Figura 7-25 y el controlador de realimentación que lo consigue es:

$$G_2(s) = \frac{467 \cdot \left(\frac{s}{1.5} + 1\right) \cdot \left(\frac{s}{4} + 1\right)}{\left(\frac{s}{0.22} + 1\right) \cdot \left(\frac{s^2}{189^2} + \frac{2 \cdot 0.7}{189} s + 1\right)} \quad (7.13)$$

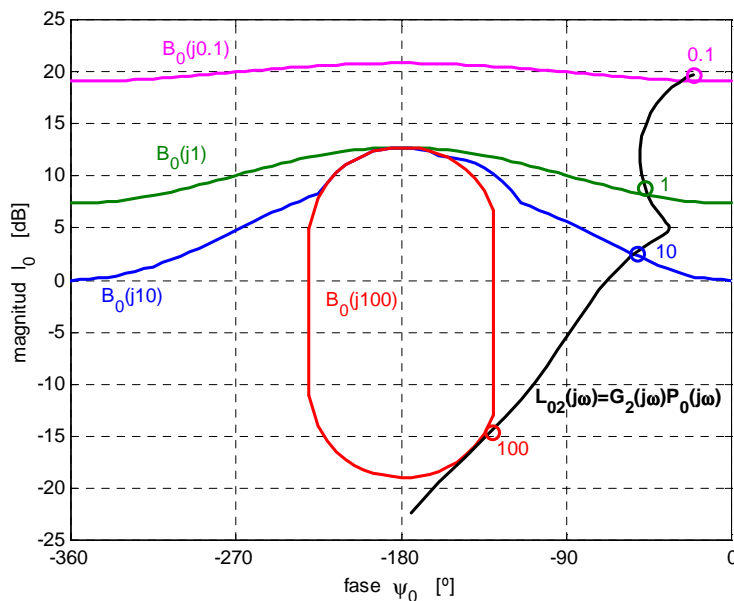


Figura 7-25: Diseño de Regulador G_2

Compruébese sobre la Figura 7-24 y Figura 7-25, o sobre sus controladores en (7.12) y (7.13), como la ganancia de $|L_0(j\omega)|$ en alta frecuencia (a partir de $\omega_i = 100$) y en baja frecuencia (hasta $\omega_i = 0.1$) es prácticamente la misma en ambos diseños. Luego, el comportamiento en el rechazo de perturbaciones en $\omega = [1, 10]$ empeora para G_2 respecto a G_1 .

Mientras que $G_2(s)$ atenúa las perturbaciones $D_2(s)$ de frecuencia $\omega=1\text{rad/s}$ en un 70% exactamente (modelado de $L_0(j\omega=1)$ sobre el contorno para $\delta_2 \leq 0.3$), la ganancia extra de $G_1(s)$ en esta frecuencia (función $L_0(j\omega=1)$ ubicada 20dB por encima del contorno para $\delta_2 \leq 0.3$) permite atenuarlas hasta aproximadamente un 90%. Un razonamiento similar es aplicable a las perturbaciones de frecuencia $\omega=10\text{rad/s}$, que $G_2(s)$ atenúa en un 50%, y $G_1(s)$ en un porcentaje superior. Por otro lado, como la ganancia de alta frecuencia en ambos diseños es la misma, el ‘coste de la realimentación’ en cuanto a la amplificación de ruidos del sensor es idéntico. La complejidad del controlador $G_2(s)$ es mayor que la de $G_1(s)$. Al ser el primero de mayor orden, en su implementación digital existirá un mayor retardo en aplicarse la ley de control efectiva. En conjunto, la única ventaja de $G_2(s)$ frente a $G_1(s)$, es un menor gasto de tensión de control en el rechazo de perturbaciones en medias frecuencias, $\omega=[1, 10]$. Y puesto que el gasto, aun mayor para $\delta_2(\omega=0.1)=0.1$, está previsto, parece lógico optar por el controlador $G_1(s)$ en (7.12) y la Figura 7-24.

* * *

Aunque el objetivo final del problema de regulación se cumple con $G_1(s)$, la mejora obtenida respecto a $G_2(s)$ puede cuantificarse y confirmarse en detalle. Se re-diseñarán las tolerancias de especificación robustas $\delta_2(\omega)$ para $\omega=\{1, 10\}$ en la Tabla 7-3, adecuándolas al controlador más sencillo y de mejor comportamiento, $G_1(s)$. Y en el resto de frecuencias, $\omega=\{0.1, 100\}$, se mantendrán los anteriores valores de $\delta_2(\omega)$. En este procedimiento, la formulación de los contornos (resumida en la Tabla 7-5) y el análisis de la influencia de la incertidumbre y la especificación (resumidos en la Sección 7.5) resultan imprescindibles. Una vez determinados los nuevos valores $\delta_2(\omega)$, se trazarán de nuevo los contornos y se *revisará* el modelado de L_0 , manteniendo su estructura (ganancia, cero real y dos polos complejos) y también su comportamiento de alta y baja frecuencia.

Observando la Figura 7-24, se trata de cuantificar cuanto debe ser corregida $\delta_2(\omega=1,10)$ para que $L_0(j1)$ y $L_0(j10)$ se sitúen sobre sus contornos $B_0(j1)$ y $B_0(j10)$.

Nótese que $|Y/D_2(j\omega)| \leq \delta_2(\omega)$ originaba el contorno dominante en todas las fases $[-360^\circ, 0^\circ]$ para $\omega=1$ (además de en $\omega=0.1$); véase la Figura 7-19, comprobando que $B_0(j1)=B_{02}(j1)$. Por otro lado, para $\omega=10$, la especificación de estabilidad $|L/1+L(j\omega)| \leq \delta_1(\omega)$, era también significativa en ciertas fases; $B_0(j10)=B_{02}(j10) \cap B_{01}(j10)$. Sin embargo, como el objetivo es reducir $\delta_2(\omega)$, se elevarán sus contornos representativos, como demostraba el gráfico (a) de la Figura 7-18. Por ello, tomaremos como

referencia tan sólo los contornos B de la especificación robusta $|Y/D_2(j\omega_i)| \leq \delta_2(\omega_i)$.

Para calcular los nuevos $\delta_2(\omega_i)$, primeramente consideraremos que plantas son las significativas en la configuración de los contornos para G. La Sección 7.5.1 resumían la influencia de la incertidumbre en la configuración de los contornos. Para el ejemplo, se concluía que en la frecuencia $\omega_i=0.1$ rad/s, el contorno intersección (considerando $\{p \angle \theta\}$ para G coincidía con el contorno simple para la planta de mínimo módulo $p_{min} \angle \theta$, véanse gráficos (a) de la Figura 7-14 y la Figura 7-15). Esto mismo es válido para la incertidumbre en $\omega_i=1$, que es de nuestro interés. Para la frecuencia $\omega_i=10$, en el contorno intersección intervenían *levemente* alguna otra planta del perfil inferior de la plantilla $\omega_i=1$, $\partial\{p_{min} \angle \theta\}$; véanse gráficos (a) de la Figura 7-16 y de Figura 7-17. Finalmente, se considerará que el contorno $g_2 \angle \phi$, definido en (5.2b), para $p_{min} \angle \theta$ en las plantillas $\Im P(j1)$ y $\Im P(j10)$ determina casi de manera exacta el contorno intersección $g_{SUP} \angle \phi$ o contorno para G. Según mostraba la Figura 7-4 se tiene $P_{min}(j1)=2e-2(-34.5dB) \angle -17^\circ$ y $P_{min}(j10)=6e-3(-44.5dB) \angle -109^\circ$. El contorno para L_0 es el mismo que para G, trasladado $P_0(j\omega_i)=p_0 \angle \theta_0$, coincidiendo en este caso la planta nominal y la de módulo mínimo en cada frecuencia, $P_0(j\omega_i)=P_{min}(j\omega_i)$. Luego, según todo esto para cada frecuencia $g_2 \angle \phi$ en (5.2b) con $p \angle \theta = p_{min} \angle \theta$ es la fórmula matemática del contorno a elevar. Basta determinar δ_2 .

El estudio de la especificación en la Sección 5.2.3.1 advertía que al disminuir δ_2 el contorno para G en (5.2b) se elevaba la máxima cantidad en $\phi=0^\circ-\theta$ y la mínima elevación se producía en $\phi=-180^\circ-\theta$. Traducido en términos del contorno para L_0 , y como para el ejemplo resulta $\theta=\theta_0$, dicha curva se eleva el máximo en $\psi_0=0^\circ$ y el mínimo en $\psi_0=-180^\circ$, al decrecer δ_2 . También se argumentaba en la Sección 7.5.1, que el desnivel entre el punto de máximo y mínimo del contorno se reducía al disminuir δ_2 . Compruébese todo ello, sobre el gráfico (a) de la Figura 7-18.

Como promedio tomemos como referencia el punto $L_0(j\omega_i)$ que se quiere hace coincidir con el contorno $B_0(j\omega_i)$. Sobre la Figura 7-24 se observa $L_0(j\omega_i=1)=19dB \angle -17^\circ$ y $L_0(j\omega_i=10)=10dB \angle -96^\circ$. En términos de un contorno para G, a los anteriores valores se les resta el valor de la planta nominal $P_0(j\omega_i=1)=-34dB \angle -37^\circ$ y $P_0(j\omega_i=10)=-44dB \angle -108^\circ$, resultando $g_2 \angle \phi(j\omega_i=1)=53dB \angle -340^\circ$ y $g_2 \angle \phi(j\omega_i=10)=54dB \angle -348^\circ$ los puntos a alcanzar por el contorno. Y substituyendo estos valores en magnitudes lineales en (5.2b), así como $p \angle \theta = p_{min} \angle \theta = P_0(j\omega_i)$ en ambas frecuencias, se obtiene $\delta_2(\omega_i=1)=0.1$ y $\delta_2(\omega_i=10)=0.3$. Del lado de la seguridad, con el fin de no tener que hacer un nuevo ajuste de L_0 , se aplican $\delta_2(\omega_i=1)=0.11$ y

$\delta_2(\omega=10)=0.33$. Los contornos resultantes, y la perfecta adecuación del anterior $L_{01}(j\omega)$ con G_1 en (7.12) se muestran en la Figura 7-26. El resto de tolerancias $\delta_k(\omega_i)$ utilizadas y, por tanto, sus contornos son los mismos que en el caso anterior. Compárense la Figura 7-26 con la Figura 7-24.

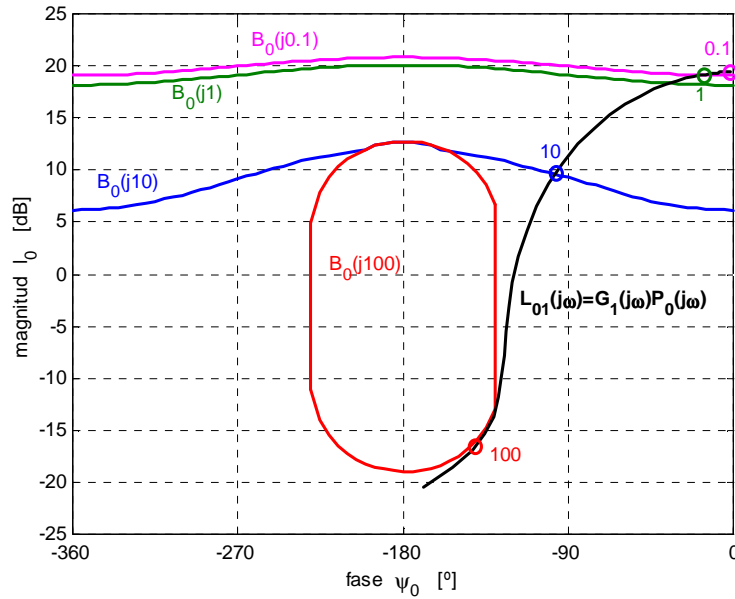


Figura 7-26: Ejemplo. Especificaciones más exigentes en media frecuencia para el rechazo de perturbaciones y validez del regulador G_1

* * *

Aprovechando los estudios realizados, resulta más interesante cuantificar los compromisos en el comportamiento de alta y baja frecuencia del controlador final. Supónganse ahora que se endurecen los requisitos de comportamiento frente a perturbaciones en la salida, no sólo en medias frecuencias, sino también en baja frecuencia, $\delta_2(\omega=0.1)=0.01$. Es decir, se solicita una atenuación de perturbación $|Y/D_2(j0.1)|$ del 99%.

La Figura 7-27 traza la nueva situación de los contornos, considerando todas las especificaciones. Se han empleado, $\delta_2(\omega)=\{0.01, 0.011, 0.033, 2.5\}$ y $\delta_1(\omega)=1.3$. La especificación $\delta_3(\omega)$ se ha obviado, considerando que intensificada en los mismos términos que $\delta_2(\omega)$ seguirá sin ser dominante según se argumentaba en el ejemplo la Sección 7.6.2. Entre las especificaciones robustas $\delta_2(\omega)$ y $\delta_1(\omega)$, y como se viene comentando reiteradamente, los contornos B para $\delta_2(\omega)$ dominan en bajas-medias

frecuencias $\omega_i = \{0.1, 1, 10\}$ y los contornos A de estabilidad para $\delta_l(\omega_i)$ dominan en $\omega_i = 100$.

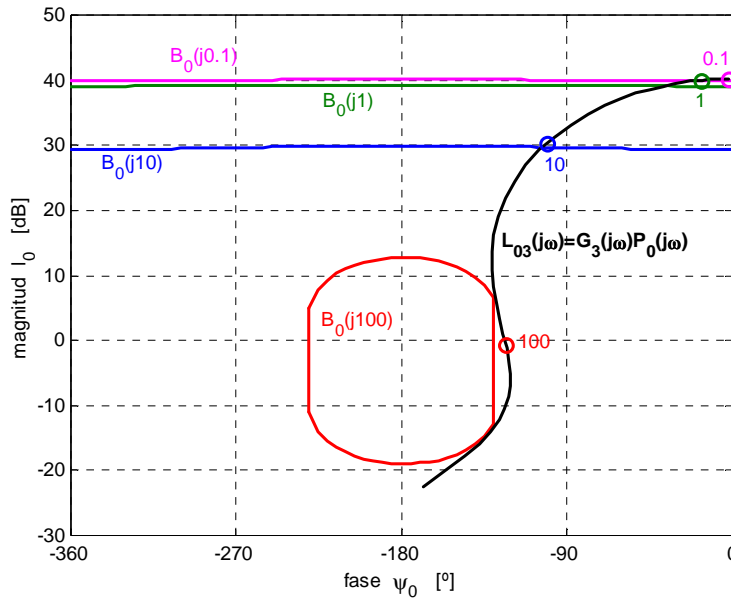


Figura 7-27: Ejemplo. Especificaciones más exigentes para el rechazo de perturbaciones y diseño del regulador G_3

Sobre al misma Figura 7-27 se modela una nueva L_{03} de la misma complejidad que L_{03} resultando un controlador G_3 con un cero y dos polos:

$$G_3(s) = \frac{5130 \cdot \left(\frac{s}{65} + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{1022^2} + \frac{2 \cdot 0.7}{1022} + 1\right)} \quad (7.14)$$

A continuación se comparan los controladores G_l en (7.12) y G_3 en (7.14).

La reducción de la tolerancia $\delta_2(\omega=0.1)$ de atenuación de perturbaciones $|Y/D_2(j\omega)|$ ha elevado considerablemente el contorno de baja frecuencia. Esto se traduce en un incremento de la ganancia estática del controlador. Antes de realizar el trazado de los nuevos contornos y el nuevo modelado de L_{03} , la formulación desarrollada permite conocer el incremento en altura del contorno de baja frecuencia, y por tanto de la ganancia estática.

Al disminuir el valor $\delta_2(\omega=0.1) \ll 1$, el desnivel de cualquier contorno B para esta especificación robusta es prácticamente nulo como argumentaba la Sección 7.5.1. Calculando dicho desnivel entre sus puntos de máximo y mínimo de acuerdo a (5.51) es de tan sólo 0.17dB. Luego, todos los

contornos simples, $g_2 \angle \phi$ en (5.2), e intersección $g_{SUP} \angle \phi = \max \{g_2 \angle \phi\}$, son prácticamente una línea de altura constante en todo el intervalo $[-360^\circ, 0^\circ]$. Y esto favorece aún más que dentro del perfil inferior de la plantilla $\mathcal{SP}(j\omega_i=j0.1)$ sólo sea significativa la planta de módulo mínimo, $p_{min} \angle \theta = 0.02(-34\text{dB}) \angle -2^\circ$. Es decir, que el contorno G de baja frecuencia para $|T_2| \leq \delta_2$ y $\{p \angle \theta\}$, coincide con $g_2 \angle \phi$ en (5.2) para $p_{min} \angle \theta$. Como ésta es también la planta seleccionada como nominal, finalmente el contorno para $L_0 = l_0 \angle \psi_0$ resulta $g_2 p_0 \angle (\phi + \theta_0)$, cuya fórmula se conoce de manera exacta.

Entonces, sustituyendo en (5.2), o de manera casi exacta en su punto de máximo en (5.48) ya que se trata de una línea recta, se obtiene que el contorno en $\omega_i=0.1$ para $\delta_2=0.01$ y $p_{min} \angle \theta = 0.02(-34\text{dB}) \angle -2^\circ$ alcanzará una altura de $g_2 \angle \phi = 5050(74\text{dB}) \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$.

Para $\delta_2=0.1$ el desnivel máximo del contorno de baja frecuencia es algo mayor, 1.7dB según (5.51). Aún así se satisface la Simplificación 2 (Sección 5.2.2.3) por lo que en el contorno solo interviene la planta de módulo mínimo. Ahora para $p_{min} \angle \theta = 0.02(-34\text{dB}) \angle -2^\circ$ y $\delta_2=0.1$ el contorno en $\omega_i=0.1$ lo representa $g_2 \angle \phi$ en (5.2), con alturas g_2 ligeramente distintas en cada $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$. Tomemos la referencia de su punto de máximo. Según (5.48) o (5.12) $\max-g_2=550(54.8\text{dB})$ en $\phi=-178^\circ$.

La diferencia de alturas se mantiene para los contornos en L_0 , trasladados $p_{min} \angle \theta$ (planta nominal) respecto a los contornos para G . Es decir, se produce una elevación del punto máximo del contorno para G o L_0 de **19.2dB** cuando la especificación disminuye de $\delta_2=0.1$ a $\delta_2=0.01$. La diferencia de alturas entre los contornos para una y otra especificación es aún mayor en sus puntos de mínimo. Sustituyendo $\delta_2=0.1$ en (5.13) $\min-g_2=450(53\text{dB})$ en $\phi=-178^\circ$. Para $\delta_2=0.01$, $g_2=4950(\approx 74\text{dB})$, es decir, prácticamente presenta altura constante entre su punto de máximo y mínimo en magnitudes expresadas en decibelios. Luego, en el punto de mínimo se produce una elevación del contorno para G o L_0 de **21dB** cuando la especificación disminuye de $\delta_2=0.1$ a $\delta_2=0.01$.

Entonces, el incremento de ganancia estática del controlador (cuya L_0 se ajuste a su contorno de baja frecuencia) al pasar de $\delta_2=0.1$ a $\delta_2=0.01$ estará entre 19.2dB y 21dB o en magnitudes lineales se incrementará entre 9 y 11 veces. Compruébese como la ganancia estática de G_1 es de 467 y la de G_3 de 5130, luego ha habido un incremento en ganancia por un factor de 11. Se ha producido el máximo incremento previsto de ganancia debido a que ésta se añade en -2° , es decir, prácticamente en la fase de mínimo del contorno (0°), que es donde existía el máximo incremento. Si el sistema contara con un polo en el origen, la adición de ganancia se produce en -92° , prácticamente

entre las fases de máximo y mínimo del contorno. En tal caso se espera un incremento de 10 veces la ganancia estática.

El comportamiento temporal del motor con los reguladores $G_1(s)$ en (7.12) y $G_3(s)$ en (7.14) frente a una perturbación de tipo escalón en la salida $D_2(s)=1/s$ en el instante $t=1s$, se muestra en el la Figura 7-28.

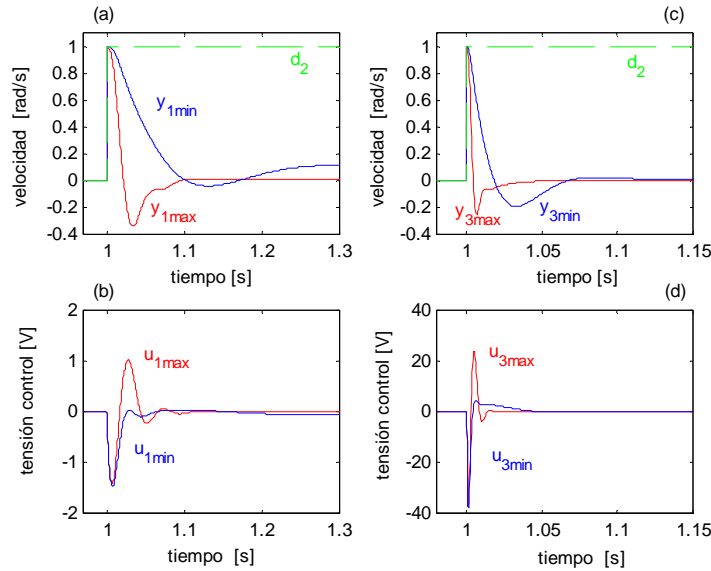


Figura 7-28: Ejemplo. Comportamiento temporal de reguladores G_1 y G_3

Las señales con el subíndice ‘max’ responden al comportamiento temporal de la planta que aporta el módulo máximo en todas las frecuencias y que se corresponde con $k=5$, $a=1$, $b=10$ en (7.3), es decir, $P_{max}(s)=5/(s+1)(s+10)$. El subíndice ‘min’ se corresponde con el comportamiento de la planta de módulo mínimo, elegida como nominal en el diseño, que equivale en todas las frecuencias a $k=1$, $a=5$, $b=10$ en (7.3), es decir, $P_{min}(s)=1/(s+5)(s+10)$. El subíndice ‘1’ hace referencia al controlador $G_1(s)$ en (7.12) y el subíndice ‘3’ al controlador $G_3(s)$ en (7.14). Las características nominales del motor en la Tabla 7-1 se corresponden con los parámetros $k=2$, $a=2$, $b=10$, tal como reflejaba $P_N(s)$ en (7.2). Su comportamiento se ubicaría entre las señales máxima y mínima representadas en la figura.

Las ventajas de una mayor ganancia del controlador son evidentes en los gráficos (a) y (c) de la Figura 7-28. Mejora el comportamiento dinámico con una evolución más rápida de $y(t)$ hacia el punto de referencia de velocidad de régimen constante. Y también, mejora el comportamiento en régimen permanente. Tal y como especificaba $|Y/D_2(j\omega_t)| \leq \delta_2(\omega_t=0.1)=0.1$ o 0.01 , hacia frecuencia cero la atenuación conseguida es de un 90% o un 99%.

Sin embargo, una mejora en el comportamiento de rechazo robusto de perturbaciones tiene un precio. Por un lado, existe un gran incremento del esfuerzo de control en el rechazo de la perturbación, $|U/D_2(j\omega)|$, alrededor de 10 veces mayor, como muestran los gráficos (b) y (d) de la Figura 7-28. En este sentido será necesario valorar lo que se gana en comportamiento frente al gasto y potencial de actuación que se necesitan.

Otro efecto de gran importancia, y muchas veces obviado en la fase de diseño teórico, es la amplificación de ruidos de alta frecuencia, $N(s)$, principalmente introducidos por el sensor de realimentación $H(s)$; (Figura 7-1). Una simulación del comportamiento temporal del motor que incluye cierto ruido en la medida se incluye en la Figura 7-29.

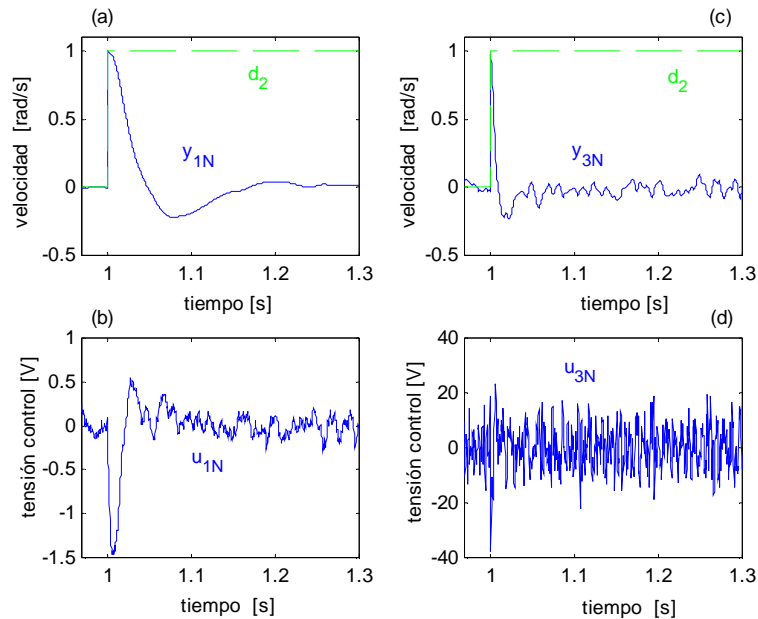


Figura 7-29: Ejemplo. Comportamiento de reguladores G_1 y G_3 , incluido el ruido del sensor

Obsérvese cómo la mayor amplificación del ruido de alta frecuencia se produce en la entrada de control, $u(t)$, más que en la salida, $y(t)$. Y comparando los gráficos (b) y (d) quede patente como una excesiva ganancia en alta frecuencia, derivada de un mejor comportamiento en baja frecuencia, conlleva una mayor amplificación de ruidos. Sobre el gráfico (d) puede observarse como el efecto U/N es prácticamente del mismo orden que el de U/D_2 . Esto puede provocar la saturación de actuadores, no ya en respuesta a la perturbación a rechazar, sino al ruido del sensor. Las ganancias de alta frecuencia, $\omega=100\text{rad/s}$, de los diseños L_{01} y L_{03} se corresponden con $0.15(-16.5\text{dB})$ y $0.92(-0.76\text{dB})$; véanse la Figura 7-24 y Figura 7-27.

Ejemplo. Servosistema (iii)

Según los contornos $B_0(j\omega)$ en la Figura 7-23, que representaban la reducción de incertidumbre para el seguimiento señales, el rechazo robusto de perturbaciones y la estabilidad robusta, se modela $L_0(j\omega)$ como ilustra la Figura 7-30. El controlador de realimentación diseñado responde a:

$$G(s) = \frac{1194 \cdot \left(\frac{s}{0.11} + 1\right) \cdot \left(\frac{s}{4.2} + 1\right) \cdot \left(\frac{s}{9.4} + 1\right)}{s \cdot \left(\frac{s}{0.09} + 1\right) \cdot \left(\frac{s^2}{290.9^2} + \frac{2 \cdot 0.99}{290.9} + 1\right)} \quad (7.15)$$

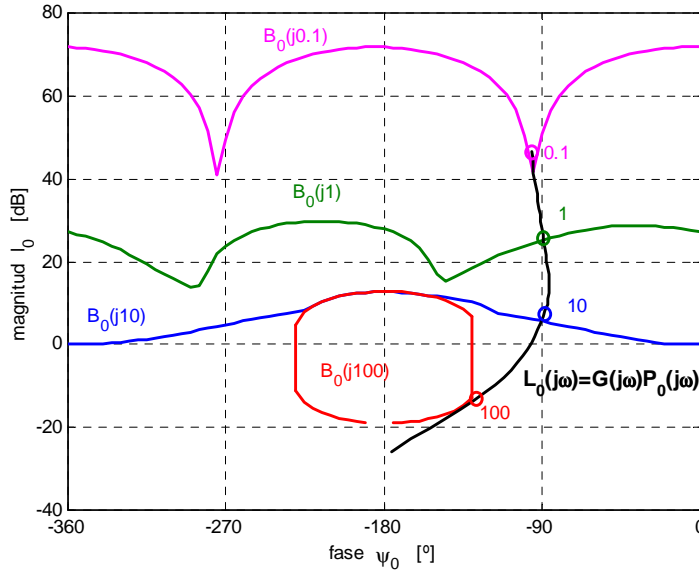


Figura 7-30: Ejemplo. Diseño de controlador para seguimiento de referencias

Por tanto, $G(j\omega)$ en (7.15) reduce la incertidumbre de lazo cerrado, $\{T_5(j\omega)\}$, a los límites establecidos por $\delta_5(\omega)$ en la Tabla 7-3 según prescribe (3.10). Y simultáneamente satisface la estabilidad robusta en (3.6) y el rechazo de perturbaciones en (3.7). El prefiltro $F(j\omega)$ debe ubicar la nueva incertidumbre de lazo cerrado entre $\delta_{5sup}(\omega)$ y $\delta_{5inf}(\omega)$ según exija (3.11), para completar un adecuado seguimiento de referencias. Esto se comprueba en la Figura 7-31 para un prefiltro:

$$F(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{3.8} + 1\right) \cdot \left(\frac{s}{4.8} + 1\right)} \quad (7.16)$$

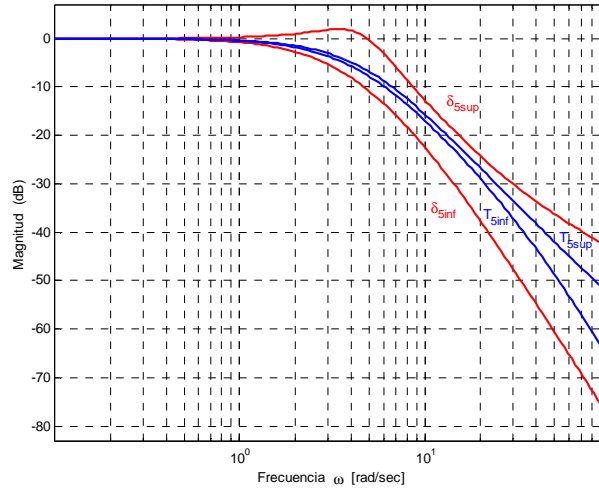


Figura 7-31: Ejemplo. Diseño de prefiltro para seguimiento de referencias.

El adecuado comportamiento temporal frente a consignas se representa en la Figura 7-32. Una menor incertidumbre, permitiría comportamientos temporales más agresivos. La combinación del control robusto y adaptativo es una buena opción para ello. La Sección 6.2.6 y Gil-Martínez y García Sanz (2000) esbozan una metodología de división de la incertidumbre sin perder la estabilidad robusta. El montaje robusto-adaptativo final y su validación formal y experimental, es una de las posibles vías de continuación de la presente tesis.

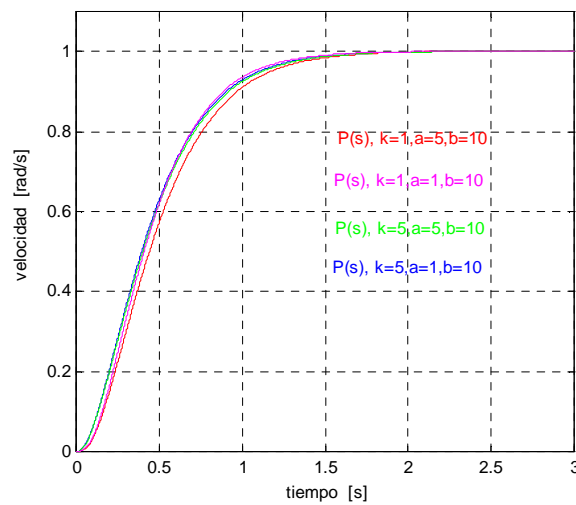


Figura 7-32: Ejemplo. Comportamiento temporal del servomecanismo

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 7-1: Estructura genérica de control realimentado (Igual a Figura 2-1)	359
Figura 7-2: Ejemplo. Esquema de motor DC, controlado por tensión de armadura	359
Figura 7-3: Tipologías de contornos. (Igual a Figura 3-6).....	365
Figura 7-4: Ejemplo. Incertidumbre frecuencial: plantillas.....	368
Figura 7-5: Ejemplo. Tipologías de contornos para $ T_k \leq \delta_k$, $k=1,2,3,4$ en $\omega_i = \{0.1, 1, 10, 100\}$	369
Figura 7-6: Ejemplo. Tipologías de contornos para $ T_k \leq \delta_k$, $k=5$ en $\omega_i = \{0.1, 1, 10, 100\}$..	369
Figura 7-7: Ejemplo. Contornos de L_0 para $ T_1(\omega_i) \leq \delta_1(\omega_i) = 1.3$	372
Figura 7-8: Ejemplo. Contornos de L_0 para $ T_2(\omega_i) \leq \delta_2(\omega_i)$	374
Figura 7-9: Ejemplo. Contornos de L_0 para $ T_3(\omega_i) \leq \delta_3(\omega_i)$	375
Figura 7-10: Ejemplo. Contornos de L_0 para $ T_5(\omega_i) \leq \delta_5(\omega_i)$	376
Figura 7-11: Ejemplo. Contornos de L_0 para $ T_4(\omega_i) \leq \delta_4(\omega_i)$	378
Figura 7-12: Ejemplo. Plantillas con distinta incertidumbre para $\omega_i = 1 \text{ rad/s}$	382
Figura 7-13: Ejemplo. Contornos A simples e intersección para G en $\omega_i = 1$	382
Figura 7-14: Ejemplo. Plantillas con distinta incertidumbre para $\omega_i = 0.1 \text{ rad/s}$	387
Figura 7-15: Ejemplo. Contornos B simples e intersección para G en $\omega_i = 0.1$	387
Figura 7-16: Ejemplo. Plantillas con distinta incertidumbre para $\omega_i = 10 \text{ rad/s}$	388
Figura 7-17: Ejemplo. Contornos B simples e intersección para G en $\omega_i = 10$	388
Figura 7-18: Ejemplo. Variación de los L_0 -contornos con la tolerancia de especificación δ_k	396
Figura 7-19: Ejemplo. L_0 -contornos para el problema de regulación (i).....	402
Figura 7-20: Ejemplo. Contornos intersección y planta nominal para regulador (i)	405
Figura 7-21: Ejemplo. L_0 -contornos para el problema de regulación (ii)	406
Figura 7-22: Ejemplo. L_0 -contornos para el servomecanismo (iii)	409
Figura 7-23: Ejemplo. Contornos intersección y planta nominal para servomecanismo (iii)	410
Figura 7-24: Ejemplo. Diseño de Regulador G_1	413
Figura 7-25: Diseño de Regulador G_2	414
Figura 7-26: Ejemplo. Especificaciones más exigentes en media frecuencia para el rechazo de perturbaciones y validez del regulador G_1	417
Figura 7-27: Ejemplo. Especificaciones más exigentes para el rechazo de perturbaciones y diseño del regulador G_3	418
Figura 7-28: Ejemplo. Comportamiento temporal de reguladores G_1 y G_3	420
Figura 7-29: Ejemplo. Comportamiento de reguladores G_1 y G_3 , incluido el ruido del sensor.....	421
Figura 7-30: Ejemplo. Diseño de controlador para seguimiento de referencias	422
Figura 7-31: Ejemplo. Diseño de prefiltro para seguimiento de referencias.....	423
Figura 7-32: Ejemplo. Comportamiento temporal del servomecanismo	423

ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 7-1: Ejemplo. Características nominales del motor.....</i>	<i>360</i>
<i>Tabla 7-2: Objetivos de Control Realimentado.....</i>	<i>361</i>
<i>Tabla 7-3: Ejemplo. Tolerancias de especificación robusta</i>	<i>363</i>
<i>Tabla 7-4: Inecuaciones cuadráticas sin la incertidumbre para las especificaciones</i>	<i>364</i>
<i>Tabla 7-5: Fórmulas de los contornos para las distintas especificaciones robustas</i>	<i>366</i>
<i>Tabla 7-6: Formulación y tipología de contornos simples para las especificaciones robustas</i>	<i>366</i>
<i>Tabla 7-7: Formulación y tipología de contornos intersección para las especificaciones ...</i>	<i>367</i>
<i>Tabla 7-8: Ejemplo. Variación de las tolerancias de especificación robusta</i>	<i>396</i>

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES

Resumen

A continuación se resumen las principales aportaciones del trabajo de investigación desarrollado en los anteriores capítulos.

Contenidos

8 Conclusiones.....	427
8.1 Resumen de Resultados	429
8.2 Conclusiones Finales	432
8.3 Posibles Vías de Continuación	433

8 CONCLUSIONES

8.1 RESUMEN DE RESULTADOS

El presente trabajo de investigación se ha planteado ante la necesidad de conocer y cuantificar las dificultades en la resolución simultánea de distintos objetivos de control en presencia de incertidumbres. Un incremento indefinido de los beneficios de la realimentación es impracticable debido al coste pagado en alta frecuencia. Y al mismo tiempo, si la incertidumbre crece los compromisos de la realimentación también aumentan. Entonces, ¿cuándo hay solución a un problema de control realimentado? o ¿qué dificultades plantean los compromisos de control y la incertidumbre en el diseño de control?. Quién sino una técnica como QFT que permite cuantificar especificaciones e incertidumbre puede arrojar luz sobre esta problemática. Algunas respuestas a estas cuestiones se resumen a continuación.

La entidad de mayor relevancia en el problema de la existencia de solución al problema de control realimentado en QFT son los **contornos**. Éstos expresaban en cada frecuencia y para cada especificación las necesidades a aportar por la realimentación. Hasta el momento, todos los trabajos anteriores habían fundamentado la existencia de solución en la etapa de síntesis final de $L_0=GP_0$. Sin embargo, se ha demostrado que la dificultad para el modelado de L_0 depende en último término de la ubicación de los contornos. Por tanto, al menos desde un punto de vista práctico, son éstos los que deben ser analizados exhaustivamente.

El estudio de los contornos realizado se ha basado en el análisis de sus fórmulas matemáticas. Éstas originariamente fueron presentadas por Chait y Yaniv en 1993 con el fin de automatizar el cálculo de los contornos, representarlos gráficamente y desarrollar herramientas CAD de ayuda en el diseño del controlador. Dichas fórmulas han sido aprovechadas en este trabajo con un objetivo bien diferente: cuantificar y demostrar matemáticamente la influencia de las tolerancias de especificación y de la incertidumbre en los contornos resultantes. Según Chait y Yaniv (1993) las fórmulas de los contornos y la forma de satisfacerlos surgen de la resolución de inecuaciones cuadráticas que contienen la especificación, la planta y el controlador.

La solución de las inecuaciones cuadráticas ha permitido clasificar los contornos en cuatro tipologías, de las cuales tres aparecen en la resolución de los problemas habituales de control:

- Tipología A de contornos, cuando éstos ocupan sólo un cierto intervalo angular del dominio de diseño sobre el plano de Nichols, $[-360^\circ, 0^\circ]$. En el diseño, L_0 debe permanecer fuera del área cerrada delimitada por el contorno. El objetivo fundamental de G es alejar suficientemente al sistema con incertidumbre $\{L=GP\}$ del punto de estabilidad crítica $0\text{dB} \angle -180^\circ$. Este tipo de contornos resultan los más asequibles de satisfacer simultáneamente junto con otro tipo de contornos, B o D. Su agresividad se incrementa cuando mayor área en fase y ganancia es encerrada.
- Tipología B de contornos. Éstos exigen que la función L_0 permanezca por encima de una cierta ganancia en cada fase $[-360^\circ, 0^\circ]$. Es decir, requieren de una ganancia mínima del conjunto $\{L\}$ para satisfacer el objetivo de control que representan. El contorno B ocupa todo el intervalo angular de diseño, por lo que resulta más difícil de satisfacer que los contornos de tipo A. Incluso se puede llegar a la incompatibilidad con otras especificaciones que en la misma frecuencia traten de limitar L_0 por debajo de una cierta ganancia en cada fase. La agresividad expresada por los contornos B se incrementa cuando su altura aumenta para cada fase.
- Tipología D de contornos. Estos persiguen que la función L_0 debe permanecer por debajo de una cierta ganancia en cada fase $[-360^\circ, 0^\circ]$. Es decir, limitan la ganancia máxima de control incluida la incertidumbre, $\{L\}$. El contorno D ocupa todo el intervalo angular de diseño. Por tanto, éste puede resultar incompatible si un contorno B a la misma frecuencia demanda una ganancia mayor que la que el contorno D permite.

Se han estudiado las soluciones de las inecuaciones cuadráticas para las siguientes desigualdades de especificación robusta. Los contornos representativos se catalogaron según las tipologías anteriores.

- Tolerancias máximas, sobre la función de sensibilidad complementaria. Éstas representan problemas de estabilidad robusta, con tipologías A de contornos, o limitaciones del ancho de banda con tipologías D. Ambos contornos se hacen dominantes en altas frecuencias.
- Tolerancias simples sobre la función de sensibilidad. Cuando éstas son menores que la unidad, hasta moderadamente altas frecuencias, representan una adecuada dinámica de rechazo de perturbaciones. Esta problemática la representan contornos de tipología B, que son dominantes junto con los del seguimiento de señales en las frecuencias de interés para la realimentación. Y para alta frecuencia, tolerancias ligeramente mayores que la unidad limitan el pico máximo de sensibilidad, que garantiza una mínima estabilidad robusta a través de contornos tipo A. Se ha distinguido entre la función de sensibilidad clásica, que representa la influencia de las

perturbaciones en la salida, y de la sensibilidad incluida la planta, para perturbaciones que afectan a la entrada del proceso.

- Tolerancias simples sobre el esfuerzo de control. Estas pueden originar contornos de tipología D o A. Por ello, cuando se consideran tolerancias explícitas para limitar el coste de la realimentación, pueden surgir problemas de compatibilidad de contornos en medias frecuencias (cuando existe otro contorno B en la misma frecuencia).
- Tolerancias dobles sobre la sensibilidad complementaria permiten reducir la sensibilidad del sistema en lazo cerrado frente a la incertidumbre en lazo abierto. Esta tarea es imprescindible en el seguimiento adecuado de señales de referencia. Se originan contornos de tipología B cuando la realimentación reduce la incertidumbre. Estos contornos B son dominantes en medias-bajas frecuencias junto con los del rechazo de perturbaciones. En alta frecuencia la incertidumbre permitida en lazo cerrado debe ser superior a la de lazo abierto para reducir el coste de la realimentación allí donde el control realimentado no es efectivo. Los contornos A resultantes no son dominantes en estas frecuencias.

Se ha estudiado la influencia sobre los contornos de cualquier tamaño de incertidumbre en magnitud y fase para el modelo del proceso, por separado cada una, y conjuntamente ambas incertidumbres. Los sistemas eran lineales, invariantes y monovariantes. Y también se ha analizado la influencia de cualquier valor de tolerancia de especificación. Se ha demostrado como el incremento de la incertidumbre en unos casos, unas tolerancias de especificación más agresivas en otros, o ambos efectos combinados suponen:

- La evolución hacia la tipología más agresiva entre las dos posibles en cada problema de control. Es decir, el paso de contornos tipo A a tipo B, o de tipo A a tipo D.
- Dentro de cada tipología, el incremento de la agresividad de los contornos en magnitud y/o fase.

Los contornos se podían calcular en términos del controlador. Entonces, partiendo de un control unitario $G=1$, el contorno en una frecuencia expresa respecto al punto $0\text{dB}\angle 0^\circ$ qué ganancia y qué fase G hay que aportar para satisfacer cierta especificación de control en presencia de incertidumbre. Como el diseño de control debe sintonizar un valor complejo G para el conjunto de especificaciones en cada frecuencia y los elementos de control, ganancia, polos o cero, tienen su repercusión en todas las frecuencias, en lugar del punto de $0\text{dB}\angle 0^\circ$ los contornos se expresan en términos de la función de transferencia de lazo abierto $L_0=GP_0$. Para ello, se define una planta nominal. Se ha demostrado cómo las necesidades expresadas por los contornos para G y para L_0 son, evidentemente, las mismas, ya que

únicamente cambia el sistema de referencia. Y, por ello, también se concluye cómo no importa la selección de la planta nominal. Entonces, indistintamente se ha estudiado la influencia de la incertidumbre y de las tolerancias de especificación en los contornos para G o para L_0 .

8.2 CONCLUSIONES FINALES

La solución simultánea al conjunto de especificaciones de control basada en el estudio de los contornos se apoya en:

- Estudiar la compatibilidad del conjunto de contornos en cada frecuencia. Se han analizado los principales problemas en la intersección no nula de contornos en cada frecuencia. Evidentemente, la incertidumbre y la especificación condicionan ésta.
- Analizar los compromisos de control expresados por los contornos en el conjunto de frecuencias. Es decir, la dificultad en la síntesis del controlador que satisfaga los contornos de especificación robusta y al mismo tiempo sea suficientemente sencillo y con la mínima ganancia de alta frecuencia. Se ha demostrado cómo la incertidumbre y la especificación condicionan la complejidad de esta etapa de diseño.

Y finalmente los análisis, demostraciones y formulación de los contornos incluidos permiten:

- Predecir la existencia de solución para un proceso con una cierta incertidumbre inherente al mismo y planteadas unas especificaciones deseadas de control realimentado.
- Considerada la incertidumbre fija e inherente al sistema, cuantificar los compromisos entre las especificaciones de modo que se garantice la existencia de solución en cada frecuencia (compatibilidad de contornos) y la posibilidad de modelar una L_0 que satisfaga requisitos explícitos e implícitos. Los objetivos explícitos, o representados mediante contornos, son habitualmente los de estabilidad y el rechazo de perturbaciones y/o el seguimiento de referencias. Y los requisitos implícitos de diseño suelen ser, entre otros, el ancho de banda y la complejidad del controlador.
- Si dadas unas especificaciones mínimas de comportamiento se advierte, debido a la excesiva incertidumbre, la inexistencia de solución en los contornos, o una excesiva complejidad en la síntesis del controlador, se plantea la reducción de la incertidumbre. Ésta también resulta interesante por el sobrediseño implícito en el empleo de un único controlador para todas las plantas en el dominio de incertidumbre. Todo esto sugiere el empleo de estructuras robusto-adaptativas. Estudiados los contornos, se ha desarrollado una metodología de división de la incertidumbre, dejando en

manos de futuros trabajos la construcción de la estructura de control robusto-adaptativa.

- Detectar ciertos aspectos susceptibles de mejora en el cálculo automático de los contornos. Tanto en términos de eficiencia como de precisión.

8.3 POSIBLES VÍAS DE CONTINUACIÓN

- La generalización de los resultados a los sistemas no lineales, invariantes y/o multivariados.
- El planteamiento de un problema físico de control que ilustre los resultados presentados.
- La construcción de estructuras robusto-adaptativas que particularicen la metodología de división de incertidumbre. Así como un estudio formal de la validez de la combinación de técnicas robustas y adaptativas.
- El desarrollo de algoritmos de cálculo automático de contornos que incluyan los aspectos susceptibles de mejora detectados.

APÉNDICE

**PRODUCCIÓN
CIENTÍFICA**

PRODUCCIÓN CIENTÍFICA

Algunos de los resultados presentados en esta tesis han sido ya contrastados y expuestos ante la comunidad científica:

- Gil-Martínez, M., and García-Sanz, M. (2000). Uncertainty fragmentation to reduce static gain in QFT controllers. *Book of abstracts of the UKACC International Conference on Control. University of Cambridge, UK.*, 151(6 páginas).
- Gil-Martínez, M., and García-Sanz, M. (2000). Disminución del Esfuerzo de Control Mediante Técnicas QFT. *XXI Jornadas de Automática*, Sevilla, Spain, 9 páginas.
- Gil-Martínez, M., and García-Sanz, M. (2001). Simultaneous meeting of control specifications in QFT. *Proceedings of the 5th International International Symposium on Quantitative Feedback Theory and Robust Frequency Domain Methods*, Pamplona, Spain, pp. 193-202.

Otros resultados han sido enviados para su revisión:

- El trabajo: “Solution existence conditions for simultaneous meeting of control specifications in uncertain systems” ha pasado una primera revisión para la revista “*International Journal of Robust and Non-Linear Control*” en Febrero de 2001.
- El trabajo: “Robust specification influence on feedback control strategies” ha sido enviado en Septiembre de 2001 al Comité evaluador del *15th IFAC World Congress on Automatic Control*, Barcelona, 2002.

GLOSARIO

ABREVIATURAS

- QFT: (*Quantitative Feedback Theory*). Teoría de realimentación cuantitativa.
- SISO: (*Single Input/Single Output*). Simple entrada/simple salida.
- MIMO: (*Multiple Input/Multiple Output*). Múltiple entrada/múltiple salida.
- NC: (*Nichols Chart*). Diagrama de Nichols.
- LTI: (*Linear Time Invariant*). Lineal e invariante en el tiempo.
- 1-DOF o 2-DOF: (*Degree of Freedom*). 1 o 2 grados de libertad.
- LC: lazo cerrado de realimentación-
- LA: lazo abierto.

SÍMBOLOS Y FUNCIONES

\angle : argumento

$||$: módulo

$\sqrt{\quad}$: raíz cuadrada

Δ : incremento o variación

Π : producto de elementos

Σ : suma de elementos

\cup : unión

\cap : intersección

\triangleq : proporcional

$Lm()$: función '20*log₁₀()'

Lim : función límite

$d()/dt$: función derivada temporal

sen : seno

cos : coseno

max : máximo

min : mínimo

$cte.$: constante

VARIABLES

ELEMENTOS DE CONTROL

- k : ganancia
- p : polo real
- z : cero real
- ξ : amortiguamiento
- ω_n : frecuencia natural
- ω_i : frecuencia discreta
- ω : frecuencia

VARIABLES COMPLEJAS

General

- $P(j\omega)$ o $P_r(j\omega)$: planta en lazo abierto sin incertidumbre. Forma polar: $P=p\angle\theta$.
- $P_0(j\omega)$: planta nominal. Forma polar: $P_0=p_0\angle\theta_0$.
- \mathcal{P} o $\{P\}$ familia de plantas, habitualmente en el dominio 's'.
- $\mathcal{S}P(j\omega)$: plantilla o *template*; conjunto de plantas característico de cada frecuencia ω_i .
- $G(j\omega)$: controlador. Forma polar: $G=g\angle\phi$.
- $F(j\omega)$: prefiltro.
- $T_k(j\omega)$: función de transferencia en lazo cerrado que expresa una relación k entre salida/entrada.
- $\delta_k(\omega)$: valor modular de especificación impuesto sobre $|T_k(j\omega)|$.
- $L(j\omega)$: función de transferencia en lazo abierto. $L=GP$. Forma polar: $L=l\angle\psi$.
- $L_0(j\omega)$: función de transferencia nominal de lazo abierto. $L_0=GP_0$. Forma polar: $L_0=l\angle\psi_0$.

Plantillas

- $\{p\angle\theta\}$: Conjunto de plantas de módulo p y fase θ , para la frecuencia ω_i . Plantilla $\mathcal{S}P(j\omega_i)$.

- $\{p_{max} \angle \theta\}$: Conjunto de plantas de módulo máximo p_{max} en cada fase θ dentro de la plantilla $\mathfrak{S}P = \{p \angle \theta\}$ para la frecuencia ω_i . Equivale al perfil superior de $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$.
- $\{p_{min} \angle \theta\}$: Conjunto de plantas de módulo mínimo p_{min} en cada fase θ dentro de la plantilla $\{p \angle \theta\}$ para la frecuencia ω_i . Equivale al perfil inferior de $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$.
- $\{p \angle \theta_{max}\}$: Conjunto de plantas de fase máxima θ_{max} para cada módulo p dentro de la plantilla $\mathfrak{S}P = \{p \angle \theta\}$ para la frecuencia ω_i . Equivale al perfil derecho de $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$.
- $\{p \angle \theta_{min}\}$: Conjunto de plantas de fase mínima θ_{min} para cada módulo p dentro de la plantilla $\mathfrak{S}P = \{p \angle \theta\}$ para la frecuencia ω_i . Equivale al perfil izquierdo de $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$.
- $\partial\{p \angle \theta\}$: Perfil de una plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$.
- $\{p\} \angle \theta = \{p\} \angle \theta_{cte}$: Conjunto de plantas con la misma fase constante $\theta = \theta_{cte}$ y distinto módulo p , para la frecuencia ω_i . Equivale a una plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$ con solo incertidumbre en ganancia.
- $p \angle \{\theta\} = p_{cte} \angle \{\theta\}$: Conjunto de plantas con el mismo módulo constante $p = p_{cte}$ y distinta fase θ , para la frecuencia ω_i . Equivale a una plantilla $\mathfrak{S}P(j\omega_i)$ con solo incertidumbre en fase.

Contornos

- $B_k(j\omega_i)$: contorno en la frecuencia ω_i para que el controlador $G(j\omega_i)$ satisfaga la especificación robusta k , $|T_k(j\omega_i)| \leq \delta(\omega_i)$. Formado por: $B_k(j\omega_i) = \{g_{SUP} \angle \phi \text{ y/o } g_{INF} \angle \phi\}$.
- $B_{ok}(j\omega_i)$: contorno en la frecuencia ω_i para que la función de transferencia nominal de lazo abierto $L_o(j\omega_i)$ satisfaga la especificación robusta k , $|T_k(j\omega_i)| \leq \delta(\omega_i)$. Formado por: $B_{ok}(j\omega_i) = \{l_{oSUP} \angle \psi_0 \text{ y/o } l_{oINF} \angle \psi_0\}$.
- $B_k(j\omega)$: conjunto de contornos para el controlador $G(j\omega)$ en el conjunto de frecuencias de interés $\omega = \{\omega_i, i=1, \dots, N\}$, que representan la especificación robusta k , $|T_k(j\omega)| \leq \delta(\omega)$.
- $B_{ok}(j\omega)$: conjunto de contornos para la función de transferencia nominal de lazo abierto $L_o(j\omega)$ en el conjunto de frecuencias de interés $\omega = \{\omega_i, i=1, \dots, N\}$, que representan la especificación robusta k , $|T_k(j\omega)| \leq \delta(\omega)$.

- $B(j\omega)$: contorno intersección en la frecuencia ω_i para el controlador $G(j\omega)$, considerando todas las especificaciones robustas, $\{|T_k(j\omega)| \leq \delta(\omega)\}$, $k=1, \dots, M\}$. Se calcula como $B(j\omega_i) = \bigcap_{k=1}^M B_k(j\omega_i)$, $\omega_i \in \bigcup_{k=1}^M \Omega_k$.
- $B_0(j\omega)$: contorno intersección en la frecuencia ω_i para $L_0(j\omega)$, considerando todas las especificaciones robustas, $\{|T_k(j\omega)| \leq \delta(\omega)\}$, $k=1, \dots, M\}$. Surge de: $B_0(j\omega_i) = \bigcap_{k=1}^M B_{0k}(j\omega_i)$, $\omega_i \in \bigcup_{k=1}^M \Omega_k$.
- $B(j\omega)$: conjunto de contornos intersección para el controlador $G(j\omega)$ considerado el conjunto de especificaciones robustas, $\{|T_k(j\omega)| \leq \delta(\omega)\}$, $k=1, \dots, M\}$, en el conjunto unión de frecuencias de interés, $\omega = \{\omega_i \in \bigcup_{k=1}^M \Omega_k, \Omega_k = \{\omega_i\}, i=1, \dots, N\}$. Resulta $B(j\omega) = \{B(j\omega_i)\}$.
- $B_0(j\omega)$: conjunto de contornos intersección para $L_0(j\omega)$, considerado el conjunto de especificaciones robustas, $\{|T_k(j\omega)| \leq \delta(\omega)\}$, $k=1, \dots, M\}$, en el conjunto unión de frecuencias de interés, $\omega = \{\omega_i \in \bigcup_{k=1}^M \Omega_k, \Omega_k = \{\omega_i\}, i=1, \dots, N\}$. Resulta $B_0(j\omega) = \{B_0(j\omega_i)\}$.

MAGNITUDES

Magnitudes de la Planta $P(j\omega)$

- p o $|P|$: magnitud o módulo de la planta sin incertidumbre en la frecuencia ω .
- p_0 o $|P_0|$ módulo de la planta nominal en ω .
- p_{max} : módulo máximo en la plantilla ω , lineal o en dB.
- p_{min} : módulo mínimo en la plantilla ω , lineal o en dB.
- $\{p\}$: conjunto de magnitudes de planta que definen la incertidumbre vertical en ω . También incertidumbre vertical relativa de una plantilla.
- Δp o $\Delta p(\omega)$: incertidumbre absoluta en magnitud de la plantilla para la frecuencia ω .

Magnitudes del Controlador $G(j\omega)$ y sus Contornos

- g : magnitud del controlador en la frecuencia ω .
- g_l o g_{inf} : magnitud del contorno simple (sin considerar la incertidumbre) de tipo D (o mono-valuado inferior) para G , en la frecuencia ω_i y dada la especificación deseada k .

- g_2 o g_{sup} : magnitud del contorno simple (sin considerar la incertidumbre) de tipo B (o mono-valuado superior) para G , en la frecuencia ω_i y dada la especificación deseada k .
- g_{12} : magnitud del contorno simple (sin considerar la incertidumbre) de tipo a (o doblevaluado) para G , en la frecuencia ω_i y dada la especificación deseada k .
- g_{INF} : magnitud del contorno intersección (para un proceso con incertidumbre) monovaluado inferior (tipo D) para G , en la frecuencia ω_i y para la especificación robusta k .
- g_{SUP} : magnitud del contorno intersección (considerada la incertidumbre) monovaluado superior (tipo B) de G , en la frecuencia ω_i y para la especificación robusta k .
- g_{INFSUP} : magnitud del contorno intersección (considerada la incertidumbre) doblevaluado (tipo A) para G , en la frecuencia ω_i y para la especificación robusta k .
- $min-g_1$: altura mínima de la curva inferior de un contorno simple doblevaluado (tipología A) o monovaluado inferior (tipología D).
- $min-g_{INF}$: idem para un contorno intersección monovaluado inferior (tipología D).
- $max-g_2$: altura máxima de la curva superior de un contorno simple doblevaluado (tipología A) o monovaluado superior (tipología B).
- $max-g_{SUP}$: idem para un contorno intersección monovaluado superior (tipología B).
- $max-g_{INFSUP}$: altura máxima de un contorno intersección doblevaluado (tipología A)
- $min-g_{INFSUP}$: idem altura mínima.
- g_{h1} : altura o eje horizontal de un contorno simple monovaluado inferior (tipología D) $g_1 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$.
- g_{HI} : idem para un contorno intersección $g_{INF} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$.
- g_{h2} : altura o eje horizontal de un contorno simple monovaluado superior (tipología B) $g_2 \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$.
- g_{HS} : idem para un contorno intersección $g_{SUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi = [-360^\circ, 0^\circ]$.
- g_{h12} : altura o eje horizontal de un contorno simple doblevaluado (tipología A) $g_{12} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{12} = [\phi_{v12} \mp \varepsilon] \subset [-360^\circ, 0^\circ]$.
- g_{HIS} : Idem para un contorno intersección $g_{INFSUP} \angle \phi$, $\phi \in \Phi_{IS} = [\phi_{VIS} \mp \varepsilon_T] \subset [-360^\circ, 0^\circ]$.

Magnitudes de la Función de Transferencia de Lazo Abierto $L_0(j\omega)=G(j\omega)P(j\omega)$ y sus Contornos

- l_0 : magnitud de la función de transferencia en lazo abierto, L_0 , en la frecuencia ω_i .
- l_{01} o l_{0inf} : magnitud del L_0 -contorno inferior sin considerar la incertidumbre para la frecuencia ω_i y la especificación k .
- l_{02} o l_{0sup} : magnitud del L_0 -contorno superior sin considerar la incertidumbre para la frecuencia ω_i y la especificación k .
- l_{0INF} : magnitud del L_0 -contorno inferior de un proceso con incertidumbre para la frecuencia ω_i y la especificación robusta k . También denominado como curva inferior de $B_{0k}(j\omega)$.
- l_{0SUP} : magnitud del L_0 -contorno superior de un proceso con incertidumbre para la frecuencia ω_i y la especificación robusta k . También denominado como curva superior de $B_{0k}(j\omega)$.

FASES

Fases de la Planta P

- θ : fase de la planta sin incertidumbre en la frecuencia ω_i .
- θ_0 : fase de la planta nominal en ω_i .
- θ_{max} : fase máxima en la plantilla ω_i , en grados o radianes.
- θ_{min} : fase mínima en la plantilla ω_i , en grados o radianes.
- $\{\theta\}$: conjunto de fases de la planta que definen la incertidumbre horizontal en la frecuencia ω_i o incertidumbre horizontal relativa de una plantilla.
- $\Delta\theta$: incertidumbre absoluta en fase de la plantilla para la frecuencia ω_i .

Fases del Controlador G y sus contornos

- ϕ : fase discreta del controlador; fase discreta de los G -contornos doblevaluados (tipo A), monovaluados superiores (tipo B), monovaluados inferiores (tipo D), todos ellos con o sin incertidumbre y en la frecuencia ω_i .
- $\Phi=[-360, 0^\circ]$: intervalo de fases de diseño de G sobre el diagrama de Nichols. También, intervalo de fases de existencia de los contornos monovaluados (superiores o inferiores) con o sin incertidumbre (simple o intersección).

- $\Phi_{12}=[\phi_{v12}\mp\epsilon]\subset[-360^\circ, 0^\circ]$: intervalo de fases de existencia de un G -contorno doblevaluado simple (sin la incertidumbre) para la frecuencia ω y la especificación k .
- ϕ_{v12} : fase o eje vertical de un contorno doblevaluado simple (sin la incertidumbre).
- ϵ : fase comprendida entre 0° y 90° que determina el intervalo de fases de existencia ($\mp\epsilon$) de un contorno doblevaluado simple alrededor de su eje vertical ϕ_{v12} .
- $\Phi_{1S}=[\phi_{v1S}\mp\epsilon_T]\subseteq[-360^\circ, 0^\circ]$: intervalo de fases de existencia de un G -contorno doblevaluado intersección (considerada la incertidumbre) para la frecuencia ω y la especificación k .
- ϕ_{v1S} : fase o eje vertical de un contorno doblevaluado intersección (considerada la incertidumbre).
- ϵ_T : fase comprendida entre 0° y 180° que determina el intervalo de fases de existencia ($\mp\epsilon_T$) de un contorno doblevaluado intersección alrededor de su eje vertical ϕ_{v1S} .
- Φ_{min_INF} : intervalo de fases donde un G -contorno monovaluado inferior con incertidumbre toma su magnitud (altura) mínima.
- Φ_{max_SUP} : intervalo de fases donde un G -contorno monovaluado superior con incertidumbre toma su magnitud (altura) máxima.
- Φ_{minmax} : intervalo de fases donde un G -contorno doblevaluado con incertidumbre toma sus magnitudes mínima y máxima.

Fases de la Función de Transferencia en Lazo Abierto

$L_\theta(j\omega)=G(j\omega)P(j\omega)$

- ψ_θ : fase discreta de la función de transferencia en lazo abierto L_θ .
- $\Psi_\theta=[-360, 0^\circ]$: intervalo de fases de diseño de L_θ sobre el diagrama de Nichols.

REFERENCIAS



REFERENCIAS

- Aström, K. J., Neumann, L. and Gutman, P.O. (1986). A comparison between robust and adaptive control of uncertain systems. *Proceedings 2nd IFAC Workshop on adaptive systems in control and signal processing*, Lund, Sweden.
- Aström, K.J. and Wittenmark, B. (1995). *Adaptive control*. Addison-Wesley, California, USA.
- Bailey, F.N., J.W. Helton and O. Merino (1994). Alternative Process in Frequency Domain Design of Single Loop Feedback Systems with Plant Uncertainty. *Proceedings of the American Control Conference, Baltimore, MD*. June.
- Bailey, F.N., J.W. Helton and O. Merino (1995). Generation of Worst Case Performance Functions in Loop Phase-Gain Shaping. *Proceedings of the Symposium on Quantitative and Parametric Feedback Theory, Purdue University, West Lafayette, IN*.
- Bailey, F.N. and C.-H. Hui (1989). CACSD tools for loop gain-phase shaping design of SISO robust controllers. *Proc. IEEE Control System Society Workshop on Computer Aided Control System*, pp. 151-157.
- Bailey, F.N., D. Panzer and G. Gu (1988). Two algorithms for frequency domain design of robust control systems. *International Journal of Control*, Vol.48, No5, pp. 1787-1806.
- Ballance, D. J., and Gawthrop, P. J. (1991). Control systems design via a Quantitative Feedback Theory approach. *Proceedings of the IEE Conference Control'91*, Edinburgh, UK, pp.476-480.
- Baños, A., and Barreiro, A. (2000). Stability of non-linear QFT designs based on robust absolute stability criteria. *International Journal of Control*, Vol.73, pp.74-88.
- Bartlett, A. C. (1993). Computation of the frequency response of systems with uncertain parameters: a simplification. *International Journal of Control*, Vol.57, pp.1293-1309.
- Biernson G. (1988). *Principles of Feedback Control*. Vol(1), Wiley
- Bode, H.W (1945). *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. Van Nostrand, NY.
- Boje, E. (2000). Finding nonconvex hulls of QFT templates. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 122,pp.230-232.

- Boje, E. (2001). Pre-filter design for tracking error specifications in QFT. *Proceedings of the 5th International International Symposium on Quantitative Feedback Theory and Robust Frequency Domain Methods*, Pamplona, Spain, pp. 63-66.
- Boje, E., and Nwokah, O. D. I. (1997). Quantitative feedback design using forward path decoupling. *Proceedings of the 3rd International Symposium on Quantitative Feedback Theory and Robust Frequency Domain Methods*, Glasgow, UK, pp.185-191.
- Borghesani C., Y. Chait and O. Yaniv (1994). *Quantitative Feedback Theory Toolbox User's Guide*. The Math Works Inc., USA.
- Brown, M. and I. Petersen (1991). Exact computation of the Horowitz bound for interval plants. *Proceedings of 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pp.2268-2273.
- Bryant, G. F., and Halikias, G. D. (1995). Optimal loop-shaping for systems with large parameter uncertainty via linear programming. *International Journal of Control*, 62 pp. 557-568.
- Castillejo, J., Barreras, M., Vital, P. and García-Sanz, M. (2001). High-order controllers model reduction using QFT tools. *Proceedings of the 5th International Symposium on Quantitative Feedback Theory and Robust Frequency Domain Methods*, Pamplona, Spain, pp. 231-238.
- Cervera, J., Baños, A. and Horowitz, I.M. (2001). Computation of SISO general plants templates. *Proceedings of the 5th International Symposium on Quantitative Feedback Theory and Robust Frequency Domain Methods*, Pamplona, Spain, pp. 247-254.
- Chait Y. (1997). Optimal automatic loop-shaping of QFT controllers via convex optimization. *Proceedings Symp. on Quantitative Feedback Theory and other Frequency Domain Methods and Applications*, Glasgow, Scotland, pp. 13-28, September.
- Chait, Y., C. Borghesani and Y. Zheng (1995). Single-loop QFT design for Robust Performance in the Presence of Non-parametric Uncertainties. *ASME J. of Dynamic Systems, Measurements and Control*. Vol. 117, pp. 420-425.
- Chait Y., Qian Chen and C.V. Hollot (1999). Automatic loop-shaping of QFT controllers via linear programming. Submitted to *ASME J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, 23 pages, Vol. 121, pp. 351-357.
- Chait, Y. and O. Yaniv (1993). Multiple input/single output computer-aided control design using the quantitative feedback theory. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 3, pp.47-54.

- Chen, W. H., and Ballance, D. J. (1999). Plant template generation for uncertain plants in Quantitative Feedback Theory. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol.121, pp.358-364.
- Choi, S. B., Cho, S. S., and Park, Y. P. (1999). Vibration and position tracking control of piezoceramic-based smart structures via QFT. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 121 pp.27-33.
- D'Azzo, J. and C.H. Houpis (1995). *Linear control systems analysis and design conventional and modern*. Chap. 18, 4th ed., McGraw-Hill, New York.
- Dorf, R. and Bishop, R. (1998). *Modern Control Systems*. 8th ed., Addison – Wesley.
- Doyle, J. C. (1986). Quantitative Feedback Theory (QFT) and robust control. *Proceedings of the 1986 American Control Conference*, Seattle, WA, pp.1691-1698.
- Doyle, J. C., Francis, B. and Tannenbaum, A. (1992). *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company.
- East, D.J. (1981). A new approach to optimum loop synthesis. *International Journal of Control*, Vol. 34, No.4, pp.731-748.
- Egaña, I., and García-Sanz, M. (1999). Quantitative non-diagonal MIMO controller design for uncertain systems. *4th International Symposium on Quantitative Feedback Theory and Robust Frequency Domain Methods*, Durban, South Africa, pp.187-198.
- Egaña, I., and García-Sanz, M. (2000). PID tuning for loop decoupling of multivariable systems with uncertainty. *Preprints IFAC Workshop on Digital Control: Past, Present and Future of PID Control*, Terrassa, Spain, pp.297-302.
- Egaña, I., Villanueva, J. and García-Sanz, M. (2001). Quantitative multivariable feedback design for a scara robot arm. *Proceedings of the 5th International International Symposium on Quantitative Feedback Theory and Robust Frequency Domain Methods*, Pamplona, Spain, pp. 67-72.
- Eitelberg, E., and E. Boje (1989). Some Practical Low Frequency Bounds in Quantitative Feedback Design. *IEEE International Conference on Control Applications, Israel, WP-2*.
- Fialho, I.J., V. Pande and P.S.V. Nataraj (1992). Design of feedback systems using Kharitonov's segments in Quantitative Feedback Theory. *Proceeding First QFT Symposium*, pp.457-470.

- Franchek, M. A., Herman, P., and Nwokah, O. D. I. (1997). Robust nondiagonal controller design for uncertain multivariable regulating systems. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 119, pp.80-85.
- Fransson, C. M., Lennartson, B., Wik, T., and Gutman, P. O. (2000). On optimizing PID controllers for uncertain plants using Horowitz bounds. *Preprints IFAC Workshop on Digital Control: Past, Present and Future of PID Control*, Terrassa, Spain, pp.605-610.
- Freudenbeg, J.S. and Looze, D.P. (1985). Right half planes poles and zeros and design tradeoffs in feedback systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, pp. 555-565.
- Freudenbeg, J.S. and Looze, D.P. (1988). *Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems*, Vol.104 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, Berlin.
- García-Sanz, M. and Egaña, I. (2002). Quantitative non-diagonal controller design for multivariable systems with uncertainty. *Aceptado para su publicación en la revista internacional "International journal of robust and non-linear control. Isaac Horowitz special issue, part. 2."* Marzo 2002. UK.
- García-Sanz, M., Guillén, J.C. and Ibarrola, J.J. (2001). Robust controller design for time delay systems with application to a pasteurisation process. *Aceptado para su publicación en la revista internacional "Control Engineering practice" IFAC*, febrero 2001, USA.
- García-Sanz, M., and Ostolaza, X. (1998). QFT-control of a biological reactor for simultaneous ammonia and nitrates removal. *European Robotics, Intelligent Systems and Control Conference EURISCON'98*, Athens, Greece.
- García-Sanz, M., and Vital, P.(1999). Efficient computation of the frequency representation of uncertain systems. *Proc. 4th Int. Sym. on QFT and Robust Frequency Domain Methods*, Durban, South Africa, pp.117-126.
- Gawthrop, P. J. (1988). Quantitative feedback theory and adaptive control. *Proceedings IEE Conf. Control*.
- Gera, A., and I. Horowitz (1980). Optimization of the Loop Transfer Function. *Int. J. of Control*, Vol. 31, pp.389-398.
- Gil-Martínez, M., and García-Sanz, M. (2000). Uncertainty fragmentation to reduce static gain in QFT controllers. *Book of abstracts of the UKACC International Conference on Control. University of Cambridge, UK*.

- Gil-Martínez, M., and García-Sanz, M. (2001). Simultaneous meeting of control specifications in QFT. *Proceedings of the 5th International International Symposium on Quantitative Feedback Theory and Robust Frequency Domain Methods*, Pamplona, Spain, pp. 193-202.
- Glaría, J., Rojas, R. and Salgado, M. (1992). Unstructured uncertainty and graphic robust control system design. *Proceedings of the 31st Conference on decision and control*. Tucson, Arizona, pp.1575-1577.
- Gutierrez, J.A. and Rabins, M.J. (1993). A computer loop-algorithm for controllers for minimum-phase, uncertain systems starting from QFT type bounds, *Proceedings of the 1993 American Control Conference*, San Francisco, CA, USA, Vol. 2, pp. 1711-1715.
- Gutman, P.O. (1988). Robust Certainty Equivalence – A new principle for adaptive control. *IFAC Workshop on Robust Adaptive Control, Newcastle, Australia*, pp. 113-118, August 22-24.
- Gutman, P.O. (1996). *Qsyn-the toolbox for robust control systems design, user's manual*. NovoSyn AB, Jonstorp, Sweden.
- Gutman, P.O., Levin, H., Neumann, L., Sprecher, T. and Venezia, E.(1988). Robust and adaptive control of a beam deflector. *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. 33 No. 7, pp. 610-619.
- Gutman, P.O. and Neumann, L.(1985). HORPAC: an interactive program package for robust control systems design. *Proceedings of the 2nd IEEE Control Systems Society Symp. On Computer Aided Control Systems Design*. Santa Bárbara, CA.
- Gutman, P.O., Aström, K.J. and Neumann, L.(1989). Incorporation of unstructured uncertainty into the Horowitz design method. *Proceedings ICCON 89-IEEE Int. Conf. Control Applic.* Jerusalem, Israel.
- Horowitz, I.M. (1959). Fundamental theory of linear feedback control systems. *I.R.E. Transactions on Automatic Control*, Vol.4, pp.5-19.
- Horowitz, I.M. (1963). *Synthesis of Feedback Systems*, Academic Press, New York.
- Horowitz, I.M. (1973). Optimum loop transfer function in single-Loop minimum phase feedback systems. *International Journal of Control*, Vol.22, pp. 97-113.
- Horowitz, I.M. (1975). A synthesis theory for linear time-varying feedback systems with plant uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-20, pp. 454-463.

- Horowitz, I.M. (1976). Synthesis of feedback systems with non-linear time-varying uncertain plants to satisfy quantitative performance specifications. *IEEE Proceedings*, Vol.64, pp. 123-130.
- Horowitz, I.M. (1979). Quantitative synthesis of uncertain multiple input-output feedback systems. *International Journal of Control*, Vol. 30, pp.81-106.
- Horowitz, I. M. (1982). Improved design technique for uncertain multiple input-output feedback systems. *International Journal of Control*, 36, pp.977-988.
- Horowitz, I. M. (1983). Some properties of delayed controls (Smith regulator). *International Journal of Control*, 38, pp.977-990.
- Horowitz, I.M. (1991). Survey of Quantitative Feedback Theory (QFT). *Int. J. of Control*, Vol.53, No.2, pp.255-291.
- Horowitz, I. M. (1992). *The Quantitative Feedback Design Theory*, Vol. 1, QFT Publications, Boulder, Colorado.
- Horowitz, I. M., and Breiner, M. (1981). Quantitative synthesis of feedback systems with uncertain non-linear multivariable plants. *International Journal of Control*, 12, pp.539-563.
- Horowitz, I. M., and Liao, Y. K. (1984). Limitations of non-minimum phase feedback systems. *International Journal of Control*, 40, pp.1003-1013.
- Horowitz, I. M., and Liao, Y. K. (1986). Quantitative feedback design for sampled-data system. *International Journal of Control*, 44, pp.665-675.
- Horowitz, I.M., and C. Loecher (1981). Design of 3×3 Multivariable Feedback System with Large Plant Uncertainty. *International Journal of Control*, Vol. 33, pp.677-699.
- Horowitz, I. M., Oldak, S., and Yaniv, O. (1986). An important property of non-minimum phase multiple-input-multiple-output feedback systems. *International Journal of Control*, 44, pp.677-688.
- Horowitz, I.M., and M. Sidi (1972). Synthesis of Feedback Systems with Large Plant Ignorance for Prescribed Time Domain Tolerances. *International Journal of Control*, Vol.16, pp. 287-309.
- Horowitz, I.M., and M. Sidi (1973). Synthesis of cascade multiple-loop feedback systems with large plant parameter ignorance. *Automatica*, Vol.9, pp589-600, Sep.
- Horowitz, I.M., and M. Sidi (1978). Optimum synthesis of nonminimum-phase feedback systems with parameter uncertainty. *International Journal of Control*, Vol.27, pp.361-386.

- Houpis, C.H. (1996). *The control handbook*. Chapter 44: Quantitative feedback theory (QFT) technique, pp.701-717. CRC Press, Inc.
- Houpis, C.H., and G.B. Lamont (1988). *ICECAP-QFT Users Manual*, Air Force Institute of Technology, Electrical and Computer Department, Wright-Paterson AFB.
- Houpis, C.H., and S.J. Rasmussen (1999). *Quantitative feedback theory fundamentals and applications*, Marcel Dekker, New York.
- Houpis C.H., and R.R. Sating (1997). *MIMO QFT CAD Package (Version 3)*, International Journal of robust and nonlinear control, Vol 7, No. 6, pp. 533-549.
- Houpis C.H., R.R. Sating, S. Rasmussen and S. Sheldon (1994). Quantitative feedback theory technique and applications. *International Journal of Control*, Vol. 59, No. 1, pp. 39-70.
- Hwang, C. and Yang, S.F. (2001). Generation of frequency response templates for linear systems with an uncertain time delay an multilinearly correlate parameter perturbations. *Proceedings of the 5th International International Symposium on Quantitative Feedback Theory and Robust Frequency Domain Methods*, Pamplona, Spain, pp. 239-246.
- Jayasuriya, S. (1990). QFT type design for maximizing tolerable disturbances in structured uncertain systems. *Recent Developments in QFT*, O.D.I. Nowokah ed., ASME Pubs., 51-58.
- Jayasuriya, S. (1993). Frequency domain design for robust performance under parametric, unstructured, or mixed uncertainties. *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, No115, pp.439-451.
- Jayasuriya, S and Y. Zhao (1994a). Robust stability of plants with mixed uncertainties and quantitative feedback theory. *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, No.116, pp. 10-16.
- Jayasuriya, S and Y. Zhao (1994b). Stability of quantitative feedback designs and the existence of robust QFT controllers. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, Vol.4, No.1, pp.21-46.
- Kelemen, M., and Bagchi, A. (1993). Modelling and feedback control of a flexible arm of a robot for prescribed frequency domain tolerances. *Automatica*, Vol.29, pp.899-909.
- Kidron, O. and Yaniv, O. (1996). Robust control of uncertain resonant systems. *European Journal of Control*, Vol. 1, No. 2, pp. 104-112.
- Krishnan, K., and A. Cruickshank (1977). Frequency domain design of feedback systems for specified insensitivity of time-domain response to parameter variation. *Int. J. of Control*, Vol.25, pp.609-620.

- Kuo, B.C. (1996). *Sistemas de control automático*. 7ª Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana, Mexico.
- Lasky, T. A., and Ravani, B. (1997). Use of convex hulls for plant template approximation in QFT design. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 119, pp. 598-600.
- Longdon L., and D.J. East (1978). A simple geometrical technique for determining loop frequency bounds which achieve prescribed sensitivity specifications. *Int. J. Control*, Vol.30 , No.1, pp.153-158.
- Maciejowski, J.M. (1990). *Multivariable Feedback Design*, Addison Wesley, New York.
- Matworks, Inc. (1990). Simulink Toolbox, Versión 3.
- Matworks, Inc. (1997). Matlab Toolbox, Versión 5.
- Middleton, R.H. (1991). Trade-offs in linear control systems design. *Automatica*, Vol.27, No.2, pp.281-292.
- Moreno, J.C., Baños, A. and Berenguel, M. (2001). QFT design with phase specifications. *Proceedings of the 5th International Symposium on Quantitative Feedback Theory and Robust Frequency Domain Methods*, Pamplona, Spain, pp. 123-132.
- Nataraj, P.S.V. (1994). A MATLAB based toolbox for synthesis of lumped linear and nonlinear and distributed systems. *IEEE/IFAC Symposium on Computer Aided Control System Design*, pp.513-518.
- Nataraj, P.S.V., and G. Sardar (2000). Computation of QFT bounds for robust sensitivity and gain-phase margin specifications *ASME J. of Dyn. Syst., Meas., Control*, Vol 122, pp. 528-534.
- Nataraj, P.S.V., Sheela, S. and Prakash, A.K. (2001). Interval QFT: a mathematical and computational enhancement of QFT. *Proceedings of the 5th International Symposium on Quantitative Feedback Theory and Robust Frequency Domain Methods*, Pamplona, Spain, pp. 193-202.
- Nordgren, R.E., O.D.I. Nwokah, and M.A. Franchek (1994). New formulations for Quantitative Feedback Theory. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, Vol.4, pp.47-64.
- Nwokah, O.D.I. (1984). Synthesis of controllers for uncertain multivariable plants for described time domain tolerances. *Int. J. of Control*, Vol.40, pp. 1189-1206.
- Nwokah, O.D.I. (1986). On non-singular value based design. *Proceedings of the IEE*, PtD, 133, 57-64. Ibid, 134, 43- , (1987).

- Nwokah, O.D.I. (1988a). Strong robustness in uncertain multivariable systems. *IEEE Conference on Decision and Control, Austin, TX*.
- Nwokah, O.D.I. (1988b). Quantitative design of robust multivariable control systems. *IEE proceedings*. Vol. 135 No. 1, pp. 57-66.
- Nwokah, O. D. I., Happawana, G. S., and Afolabi, D. (1999). The design of quality engineered control systems. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 121, pp. 583-593.
- Nwokah, O.D.I. and D.F. Thompson (1989). Algebraic and topological aspects of quantitative feedback theory. *Int. J. of control*, No50, pp.1057-1069.
- Nwokah, O.D.I., D.F. Thompson, and R.A. Perez (1990). On some existence conditions for QFT controllers. *Recent Developments in Quantitative Feedback Theory, O.D.I Nowokah (Ed.), DSC, Vol.24*, pp.1-10.
- Nwokah, O.D.I., R.E. Nordgren and G.S. Grewel (1994). Optimal loop transmission functions in SISO Quantitative Feedback Theory. *Proceedings of the American Control Conference, Baltimore, MD*. June.
- Nowokah, O.D.I., S. Jayasuriya and Y. Chait (1992). Parametric robust control by Quantitative Feedback Theory. *AIAA J. of Guidance, Control and Dynamics*, 15(1), pp.207-214.
- Oldak, S., Baril, C., and Gutman, P. O. (1994). Quantitative design of a class of nonlinear systems with parameter uncertainty. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4, pp.101-117.
- Park, M. S., Chait, Y., and Steinbuch, M. (1997). Inversion-free design algorithms for multivariable Quantitative Feedback Theory: an application to robust control of a CD-ROM. *Automatica*, 33, 915-920.
- Piedmonte, M. D., Meckl, P. H., Nwokah, O. D. I., and Franchek, M. A. (1998). Multivariable vibration control of a coupled flexible structure using QFT. *International Journal of Control*, 69, pp.475-498.
- Pritchard, C. J., and Wigdorowitz, B. (1997). Mapping frequency response bounds to the time domain. *International Journal of Control*, 64, pp. 335-343.
- Rodrigues, J.M., Y. Chait, and C.V. Hollot (1995). A New algorithm for computing QFT bounds. *Proceedings of the 1995 American Control Conference, Seattle, WA, USA*, Vol.6, pp.3970-3974, 21-23 June.
- Rodrigues, J.M., Y. Chait, and C.V. Hollot (1997). An efficient algorithm for computing QFT bounds. *ASME J. of Dyn. Syst., Meas., Control*, 119 (3), pp.548-552. September.

- Shaked, U., I. Horowitz, and S. Golde (1974). Synthesis of multivariable noninteracting systems with significant plant uncertainty. *Proc. 3rd IFAC Symp. Multivariable, Technological Systems, Univ. Manchester, England, Sep.*
- Sidi, M. (1973). Synthesis of feedback systems with large plant ignorance for prescribed time-domain tolerances. *Ph.D. dissertation, Dep. Appl. Math., Weizmann Ins. Science, Rehovot, Israel.*
- Sidi, M. (1976). Feedback synthesis with plant ignorance, non-minimum phase, and time-domain tolerances. *Automatica*, Vol.12, pp.265-271.
- Sidi, M. (1980). On maximization of gain-bandwidth in sampled systems, *International Journal of Control*, Vol. 32, pp. 1099-1109.
- Skogestad, S., and I. Postlewaite (1996). *Multivariable Feedback Control*, Wiley, New York.
- Theodor, Y. and Shaked, U. (1994). H_∞ multiple objective robust controllers for infinite-horizon single measurement single control input problems, *IEEE transactions on automatic control*, Vol. 39, No. 10, pp. 2130-2134.
- Thompson D.F. (1998). Gain Bandwidth optimal design for the new formulation quantitative feedback theory. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol.120, pp.401-404, September.
- Thompson, D.E (1995). Gradient formulations for sensitivity-based QFT performance bounds. *Proceedings of the 1995 American Control Conference, Seattle, WA, USA*, Vol.6, pp.3975-3976, 21-23 June.
- Thompson, D.F., and O.D.I. Nowokah (1989). Stability and optimal design in Quantitative Feedback Theory. *Proceedings of the ASME Winter Annual Meeting, San Francisco*, ASME Paper No. 89-WA/DSC-39.
- Thompson, D.F., and O.D.I. Nowokah (1990). Optimal loop synthesis in Quantitative Feedback Theory. *Proceedings of the American Control Conference, San Diego*, pp. 626-631.
- Thompson D.F. and O.D.I. Nowokah (1994). Analytic loop shaping methods in Quantitative Feedback Theory. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 116, pp.169-177.
- Wang, G.C., C.W. Chen, and S.H. Wang (1991). Equation for loop bound in quantitative feedback theory. *Proc. Conf. on Decision and Control*, 2968-2969.
- Yaniv, O. (1990). *MISO QFT CAD Package*. Tel-Aviv University. Israel.
- Yaniv, O. (1991a). Robust design of MIMO feedback systems having an uncertain non-linear plant. *International Journal of Control*, 53, pp. 1283-1294.

- Yaniv, O. (1991b). Arbitrarily small sensitivity in multiple-input-output uncertain feedback systems. *Automatica*, Vol.27, pp.565-568.
- Yaniv, O. (1999a). Robust LTV feedback synthesis for nonlinear MIMO plants. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 121, pp.226-232.
- Yaniv, O. (1999b). Quantitative feedback design of linear and nonlinear control systems. Kluwer Academic Publishers, Massachusetts.
- Yaniv, O., and Boneh, R. (1997). Robust LTV feedback synthesis for SISO non-linear plants. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 7, pp.11-28.
- Yaniv, O., and Y. Chait (1991). Direct robust control of uncertain sampled-data systems using the quantitative feedback theory. *Proc. ACC Conf.*, 1987-1988.
- Yaniv, O., and Y. Chait (1992). A simplified multi input/output formulation for the Quantitative Feedback Theory. *J. of Dyn. Syst., Meas., Control*, 114, 179-185.
- Yaniv, O., and Y. Chait (1993). Direct control design in sampled-data uncertain systems. *Automatica*, 29 (2), 365-372.
- Yaniv, O., P.O. Gutman, and L. Neumann (1990). An algorithm for adaptation of robust controller to reduced plant uncertainty. *Automatica*, Vol. 26, no.4, pp.709-720.
- Yaniv O. and I.M. Horowitz (1986). A quantitative design method for MIMO linear feedback systems having uncertain plant. *Int. J. of Control*, Vol.43, pp. 401-421.
- Yaniv, O., and Horowitz, I. M. (1987). Quantitative feedback theory—reply to criticisms. *International Journal of Control*, 46, pp.945-962.
- Yaniv, O., and Horowitz, I. M. (1990). Quantitative feedback theory for active vibration control synthesis. *International Journal of Control*, Vol. 51, No. 6, pp.1251-1258.
- Yaniv, O., and B. Schwartz (1991). Criterion for loop stability in MIMO feedback systems having uncertain plants. *Int. J. of Control*, Vol.43, No.3, pp.527-539.
- Zhao Y., and S. Jayasuriya (1993). Robust stabilization of uncertain systems with parametric uncertainties. *Proceedings 12th IFAC Conference*, Sidney, Australia, Vol.6, pp. 31-34.
- Zhao Y., and S. Jayasuriya (1994). On the generation of QFT bounds for general interval plants. *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol.116, No.4, pp.618-27.

- Zhao, Y., and Jayasuriya, S. (1996). A new formulation of multiple-input multiple-output Quantitative Feedback Theory. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 118, pp.748-752.
- Zhao, Y., and Jayasuriya, S. (1998). An H_∞ formulation of Quantitative Feedback Theory. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 120, pp.305-313.
- Zhou, K., Doyle, J.C. and Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall, Upper Saddle River.
- Zolotas, A.C., and Halikias, G.D. (1999). Optimal design of PID controllers using the QFT method. *IEE Proceedigs Control Theory and Applications*, 146, pp.585-589.