

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Facultad de Ciencias

Departamento de Física

ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LA
DINÁMICA DE PUENTES LÍQUIDOS

Memoria presentada por Conrado Ferrera Llera
para optar al grado de Doctor por la Universidad de Extremadura

Badajoz, Diciembre, 2007

***Edita: Universidad de Extremadura
Servicio de Publicaciones***

Caldereros 2. Planta 3^a
Cáceres 10071
Correo e.: publicac@unex.es
<http://www.unex.es/publicaciones>

A mis padres

Agradecimientos

Estimado lector:

Significa mucho para mí que leas este texto porque es fruto de cuatro años de duro trabajo. La mayor parte de las investigaciones que he realizado tuvieron lugar en la Universidad de Extremadura. Allí, he tenido la suerte de coincidir con un grupo de personas a las que necesito dedicar estas primeras líneas. Debo agradecer a:

Los Dres. María Guadalupe Cabezas Martín y José María Montanero Fernández, ambos directores de este trabajo. Ellos me han aportado, sin reservas, su tiempo y sus mejores consejos. Me gustaría destacar, su maestría científica y, sobre todo, su cercanía y paciencia en el ámbito personal. Espero que todo el saber que han depositado en mí, permanezca y madure con el paso del tiempo.

Al resto de compañeros del grupo de Mecánica de Fluidos. En especial, a Javi, por el ejemplo de quien sabe acompañar y motivar a un novato en estas lides y, a Emilio, por sus ánimos en estos periodos finales de tesina y tesis y, por la experiencia gratificante que ha supuesto para mí el haber podido acompañarlo en sus primeros pasos en este grupo. Gracias también, a Joaquín, por su soporte en el terreno informático.

A todas las personas que me ayudaron en la Escuela de Ingenierías Industriales. En particular, a Jota y Miguel, que contribuyeron de forma notable en la parte técnica y a nuestra entrañable limpiadora Isabel por contagiarme su alegría en los momentos de estrés.

Al grupo de Física del Aire por proporcionarme múltiples conocimientos durante la licenciatura y por iniciarme en la investigación.

Al Ministerio de Ciencia y Tecnología por la concesión de la beca predoctoral de Formación del Personal Investigador asociada al proyecto ESP2003-02859 y financiada parcialmente por los fondos FEDER.

Otra gran parte de este trabajo fue desarrollado en Bélgica. De cuantos allí conocí, debo dar las gracias a (Я выполнил часть этой работы в Бельгии. Я встретил там много людей и хотел бы особенно поблагодарить):

El Dr. Jean-Claude Legros, director del Microgravity Research Center (MRC) de la Université Libre de Bruxelles, cuya invitación me dio la posibilidad de trabajar en un ambiente de investigación pura que ha favorecido mucho mi formación (Je voudrais remercier le Docteur Jean-Claude Legros, directeur du Microgravity Research Center de l'Université Libre de Bruxelles, qui, grâce à son invitation, m'a offert la possibilité de travailler dans un contexte de recherche pure qui a beaucoup favorisé ma formation).

A los Dres. Valentina Shevtsova y Alexander (Sasha) Mialdun por su apoyo científico y personal durante toda mi estancia en el MRC. No sólo facilitaron mi acceso a los recursos necesarios para la realización de los experimentos sino que me orientaron y me animaron cuando los resultados no acababan de concretarse

A la comunidad rusa del MRC por que con su entera disponibilidad, hicieron que mi estancia dentro del centro fuera muy agradable. Siempre recordaré esas comidas y celebraciones en las que se me reveló una pequeña parte de la cultura rusa y en las que observé el mundo de un modo diferente.

Fuera del MRC, me gustaría agradecer las continuas visitas de Enrique Abad que han mitigado mis momentos nostálgicos, al padre Angelo Cavaletti “Cabou” y a todos los miembros de la Comunidad Católica Italiana de Scharbeek que me han ayudado moralmente (Vorrei ringraziare il padre Angelo Cavalletti “Cabou” e tutti i membri della Comunità Cattolica Italiana di Schaerbeek che mi hanno moralmente aiutato) y, sobre todo, no puedo olvidarme de María Pilar Arenales y de toda su familia a los que ya siento parte de la mía y con los que he contraído una deuda de cariño que jamás podré olvidar.

La última parte de este trabajo se llevó a cabo en esos lugares concretos donde uno también se va haciendo como persona y donde aparecen esos gestos de apoyo y estímulo que le van dando sentido a nuestra existencia. Gracias a:

Mis amigos y a mi familia. Si no les menciono individualmente, es por cuestiones de espacio pero, esto no puede restar un ápice a su importancia en todo el camino recorrido desde mi infancia. No puedo olvidar su presencia en los momentos difíciles, especialmente cuando el cáncer se cruzó en mi camino. Particularmente, me gustaría mencionar a mi primo Agustín y a mi Tata por su especial cercanía en el tratamiento de quimioterapia.

A las personas que me ayudan a crecer en la fe. En especial a Manolo Calvino, el Cura de mi pueblo y a las Carmelitas Descalzas de Talavera la Real, gracias a ellos he madurado como cristiano.

A todas las personas que no aparecen en estas líneas y que, de una manera u otra, han colaborado en este trabajo.

Para finalizar quiero dar las gracias a mi hermano y mis padres. A mi hermano por su desprendimiento y por su constante ejemplo de ánimo y superación. A mis padres, porque, con pocos medios, mucho afán y sacrificio, me han proporcionado la mejor educación posible. Espero que la vida me regale espacios suficientes para devolverles al menos un poco de lo mucho que ellos me han entregado.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Formas de equilibrio	3
1.1.1. Puentes líquidos axisimétricos	3
1.1.2. Puentes líquidos no axisimétricos	4
1.2. Estabilidad	5
1.2.1. Estabilidad en ausencia de gravedad	5
1.2.2. Influencia de perturbaciones axisimétricas	6
1.2.3. Influencia de perturbaciones no axisimétricas	7
1.3. Dinámica de puentes líquidos isoterms	9
1.3.1. Dinámica lineal	9
1.3.2. Dinámica no lineal	13
1.4. Dinámica de puentes líquidos no isoterms	16
1.5. Objetivo general	18
1.6. Estructura del documento	18
2. Técnicas de detección de contornos en imágenes digitales	21
2.1. Introducción	21
2.2. Montaje experimental	22
2.3. El contorno en la imagen	23
2.3.1. Imagen digital	23
2.3.2. Bordos	24
2.3.3. Ruidos	26

2.4.	Técnicas de detección de bordes	26
2.4.1.	Detectores de intensidad umbral	26
2.4.2.	Detectores de máximo gradiente	29
2.4.3.	Detector de Canny	32
2.4.4.	Detector de Laplaciana cero	32
2.5.	Procedimiento de detección de contornos	33
2.6.	Calibración del sistema de adquisición de imágenes	35
2.6.1.	Procedimiento de calibración	35
3.	Vibración axial de puentes líquidos isoterms	39
3.1.	Introducción	39
3.2.	Formulación del problema	40
3.3.	Montaje y procedimiento experimental	42
3.3.1.	Montaje experimental	42
3.3.2.	Procedimiento experimental	44
3.4.	Análisis de la vibración	45
3.4.1.	Detección de los contornos	46
3.4.2.	Cálculo de la fuerza inercial	46
3.4.3.	Cálculo de los parámetros geométricos y de la línea de contacto triple	52
3.4.4.	Cálculo de la deformación de la interfase y del volumen	55
3.5.	Resultados	57
4.	Vibración lateral de puentes líquidos isoterms	65
4.1.	Introducción	65
4.2.	Formulación del problema	66
4.3.	Montaje y procedimiento experimental	67
4.3.1.	Montaje experimental	67

4.3.2. Procedimiento experimental	68
4.4. Análisis de la vibración	69
4.5. Resultados	71
4.5.1. Validación del método experimental	71
4.5.2. Validación de un modelo propuesto para líquidos vis- cosos	72
5. Deformación dinámica de la interfase para puentes líquidos no isoterms	79
5.1. Introducción	79
5.2. Formulación del problema	80
5.3. Método experimental	81
5.3.1. Montaje experimental	81
5.3.2. Procedimiento experimental	83
5.3.3. Errores experimentales	85
5.4. Descripción y análisis de los datos	86
5.4.1. Detección del contorno en la imagen	86
5.4.2. Cálculo de las amplitudes y frecuencias	90
5.5. Resultados	93
5.5.1. Estructura de la deformación de la interfase	93
5.5.2. Regímenes de flujo	94
5.5.3. Influencia del volumen	98
6. Deformación media de la interfase para puentes líquidos no isoterms	101
6.1. Introducción	101
6.2. Formulación del problema	102
6.3. Método experimental	104

ÍNDICE GENERAL

6.3.1. Montaje experimental	104
6.3.2. Procedimiento experimental	105
6.4. Procesado de las imágenes	105
6.5. Evaluación de las medidas experimentales	106
6.5.1. Imágenes sintéticas	107
6.5.2. Imágenes reales	109
6.6. Resultados	110
7. Conclusiones	117

Índice de figuras

1.1. Técnica de la zona flotante.	3
2.1. Montaje experimental general	23
2.2. Forma ideal de la intensidad de gris de una imagen analógica en las proximidades de un borde a lo largo de la dirección x perpendicular a éste.	25
2.3. Forma de la función intensidad y sus derivadas en las proximidades de un borde a lo largo de la dirección x perpendicular a éste. a) Intensidad. b) Derivada. c) Segunda derivada.	25
2.4. Imagen de una sección de un puente líquido y su histograma correspondiente	27
2.5. Máscara 3×3 general.	30
2.6. Máscaras utilizadas con mayor frecuencia en el cálculo del gradiente en una imagen.	31
2.7. Máscaras utilizadas para calcular el valor aproximado de la laplaciana	33
2.8. Imagen de un puente líquido (a), y perfil de intensidad de grises (b) correspondiente a la línea dibujada en (a). El triángulo indica el píxel proporcionado por el método de Canny. Los puntos se corresponden con los vecinos más próximos a ese píxel. La línea es el resultado de la interpolación por splines cúbicos de los puntos. Los cuadros son los puntos que se utilizan para calcular el valor umbral.	34
2.9. a) Rejilla calibrada y sistema de referencia (x^G, z^G) asociado a ella. b) Imagen de la rejilla calibrada y sistema de referencia (x^I, z^I) asociado a ella.	36
3.1. Geometría y sistema de coordenadas asociado al puente líquido.	41

3.2. Dispositivo experimental: agujas (A), celda del puente líquido (B), plataforma vibrante (C) y amplificador (D)	43
3.3. Rejilla de calibración, puente líquido y sus sistemas de coordenadas respectivos.	44
3.4. Imagen digital de un puente líquido (a) y del conjunto de puntos $\{(x_s^G, z_s^G)\}_l$ y $\{(x_s^G, z_s^G)\}_r$ correspondientes a los contornos detectados (b).	47
3.5. Contorno izquierdo del puente líquido junto a la aguja superior. Pueden identificarse dos intervalos: Intervalo I donde x_s^G fluctúa alrededor de una línea prácticamente vertical, y el Intervalo II donde x_s^G aumenta monótonamente.	48
3.6. Coordenadas z_l^G (a) y z_r^G (b), y su diferencia Δz^G (c) en función del tiempo. En las gráficas (a) y (b) las líneas sirven de ayuda visual. En la gráfica (c), la línea sólida indica el valor medio $\langle \Delta z^G \rangle$, mientras que las líneas discontinuas indican el intervalo $ \Delta z^G - \langle \Delta z^G \rangle < \delta \langle \Delta z^G \rangle $ para $\delta = 0.15$	49
3.7. Coordenadas $\{(x_l^G, z_l^G)\}$ del punto característico izquierdo (puntos), dirección de vibración (línea continua), cálculo de γ ($\gamma = 3.82^\circ$), y sistema de coordenadas rotado (x^R, z^R)	50
3.8. Ajuste óptimo y conjunto de puntos utilizado para calcularlo correspondientes al experimento analizado en la Tabla 3.1.	51
3.9. Ajuste óptimo y conjunto de puntos utilizado para calcularlo.	52
3.10. R , L , y β obtenidos en función del tiempo	53
3.11. Cálculo de la posición del vértice de la aguja y de la línea de contacto triple.	54
3.12. R_1 y R_2 en función del tiempo. Las líneas discontinuas indican los valores promedio.	54
3.13. Evolución temporal de \mathcal{V}_l y \mathcal{V}_r durante la vibración. Las líneas discontinuas indican los valores promedio, mientras que las continuas corresponden a los volúmenes $\mathcal{V}_{0(l,r)}^{(1,2)}$ encerrados por los contornos en equilibrio.	56
3.14. Diagrama del procedimiento empleado para analizar tanto las imágenes en equilibrio como las dinámicas.	57

3.15. Deformación de la interfase (gráfico izquierdo) y contorno del puente líquido (gráfico derecho) para los parámetros especificados en la tabla 3.2. Los símbolos corresponden a los resultados experimentales de los contornos izquierdo (●) y derecho (○). En el gráfico izquierdo, las líneas se corresponden con las predicciones teóricas obtenidas a partir del modelo de Cosserat (línea continua), las ecuaciones de Euler (línea discontinua), las ecuaciones de Navier-Stokes para puentes líquidos cilíndricos (línea de puntos), y la solución cuasiestática de las ecuaciones de Euler (línea de puntos y rayas). En la gráfica derecha, las líneas continuas y discontinuas corresponden a los resultados de Cosserat y de Euler, respectivamente, mientras que la línea de puntos muestra el contorno de equilibrio. Las líneas continua y discontinua se superponen en ambas gráficas. 59

3.16. Deformación de la interfase para los parámetros especificados en la tabla 3.2. Los símbolos corresponden a los resultados experimentales de los contornos izquierdo (●) y derecho (○). Las líneas se corresponden con las predicciones teóricas obtenidas a partir del modelo de Cosserat (línea continua), las ecuaciones de Euler (línea discontinua), las ecuaciones de Navier-Stokes para puentes líquidos cilíndricos (línea de puntos), y la solución cuasiestática a las ecuaciones de Euler (línea de puntos y rayas de la gráfica (a)). Las líneas continua y discontinua prácticamente se superponen. En la gráfica (c) los resultados (1) y (2) corresponden a $t/t_0 \times 2\Omega/\pi = 0.115$ y 2.17, respectivamente, mientras que en la gráfica (e) corresponden a $t/t_0 \times 2\Omega/\pi = 2.02$ y 3.89, respectivamente. 60

4.1. Geometría y sistema de coordenadas del puente líquido. 66

4.2. Dispositivo experimental: aguja superior (A), disco inferior (B), celda del puente líquido (C), plataforma vibrante (D) y amplificador de señal (E). 68

4.3. Desviación de la posición horizontal x de la aguja superior con respecto a su valor medio x_0 , medido mediante el procesado de las imágenes tomadas en el experimento 70

<p>4.4. Deformación dinámica de la interfase $F - F_0$ en función de la altura z para $\theta = 0, \pi$, y $t = 0$. El signo de $F - F_0$ para $\theta = \pi$ aparece cambiado. Los símbolos constituyen los resultados experimentales para los perfiles $\theta = 0$ (\bullet) y π (\circ). En las gráficas (e) y (f) los perfiles $\theta = 0$ y π se promediaron para reducir las fluctuaciones. Las líneas continuas son las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes para $C_\nu = 0$. Las líneas discontinuas son las soluciones para las correspondientes formas cilíndricas. En las figuras (a) y (b), la línea de puntos es la solución en el límite cuasiestático. La línea de puntos y rayas en la gráfica (b) es la solución calculada tomando el valor de la tensión superficial de la literatura $\sigma = 26.2 \times 10^{-3}$ N/m.</p>	74
<p>4.5. Parte real $\text{Re}[\eta(z)]$ de la deformación de la interfase $\eta(z)$ en función de la altura z, obtenida en $\theta = 0$ y π. Los símbolos son los resultados experimentales para $\theta = 0$ (\bullet) y π (\circ), y las líneas continuas y discontinuas son las soluciones a las ecuaciones de Navier-Stokes para $C_\nu = 0$ y el modelo de rodajas, respectivamente. En los gráficos (a) y (b), se promediaron los resultados en $\theta = 0$ y π para reducir las fluctuaciones.</p>	77
<p>5.1. Geometría y sistema de coordenadas para el puente líquido.</p>	80
<p>5.2. Celda experimental: barras (A), resistencia eléctrica (B), sistema de enfriamiento (C), termopares (D).</p>	82
<p>5.3. Temperatura de la barra superior en función del voltaje aplicado.</p>	83
<p>5.4. Esquema de la cámara y óptica utilizadas.</p>	83
<p>5.5. Diagrama que muestra las distintas regiones (R) grabadas por la cámara en el curso de un experimento.</p>	85
<p>5.6. Imagen digital de la interfase de un puente líquido junto a la barra superior (a), y perfil de intensidad de grises (b) correspondiente a la línea discontinua en (a). La línea discontinua en el gráfico (b) indica el valor umbral de la intensidad.</p>	87

5.7. Posición de la entrefase en $z = L - 164.8 \mu\text{m}$ calculada a partir de las técnicas de umbral local (\circ) y global (\bullet) (a). El gráfico (b) muestra los resultados desplazados un valor constante para que los valores medios $\langle F \rangle_{\text{LT}}$ y $\langle F \rangle_{\text{GT}}$ obtenidos de las técnicas de umbral local y global, respectivamente, sean igual a $1/2 (\langle F \rangle_{\text{LT}} + \langle F \rangle_{\text{GT}})$ 88

5.8. Entrefases verdadera y detectada en una imagen (a). La entrefase verdadera (línea continua) está ubicada en algún lugar de la región rayada. Los puntos en la figura corresponden al valor umbral de intensidad de grises $I(i, j)$ para cada columna j y, por tanto, pertenecen a la entrefase detectada. El gráfico (b) es un esquema de la evolución temporal de la posición horizontal tanto de la entrefase verdadera (línea sólida) como de la detectada (línea discontinua) para una altura determinada z . 89

5.9. Temperatura medida por el segundo termopar para $\Delta T = 22.3 \text{ K}$ y $V = 0.85$ 91

5.10. TDF calculada a partir de la serie de datos de la figura 5.9. . 91

5.11. Ajuste no lineal calculado a partir de las series de la figura 5.7 (línea continua) y serie suavizada promediando los valores de cada cinco puntos consecutivos (símbolos). 93

5.12. Dependencia de la amplitud A , frecuencia ϕ , fase φ , y posición promedio A_0 con respecto de la coordenada vertical z para un puente líquido con $V = 0.90$ y $\Delta T = 26.1 \text{ K}$. Los símbolos corresponden a cada una de las 8 posiciones de la cámara en el experimento (véase sección 5.3.2). 95

5.13. Amplitud (a) y frecuencia (b) de las oscilaciones de la temperatura en el termopar 2 (\bullet) y de la deformación de la entrefase (\circ). Las líneas verticales indican los distintos regímenes de flujo identificados a partir del análisis de las oscilaciones de la temperatura medidas por los cinco termopares. Las flechas señalan los casos considerados en la figura 5.14. 96

5.14. Comportamiento temporal de la deformación de la interfase en $z = L - 567.1 \mu\text{m}$ (gráficas de la izquierda) y la temperatura en el termopar 2 (gráficas de la derecha) para $V = 0.85$ y distintos valores de ΔT . Desde la parte superior hasta la parte inferior, $\Delta T = 0.8, 15.5, 16.6, 20.0, 21.1, 27.5, 33.6, 42.7, 46.3$ K. En las gráficas de la izquierda, las líneas sólidas se corresponden con los ajustes no lineales (5.1) obtenidos a partir de las series de datos. 97

5.15. Dependencia de la amplitud, A con respecto a la coordenada vertical z para un puente líquido con volumen $V = 0.80$. Los símbolos $\bullet, \circ, \blacktriangle, \triangle, \blacksquare, \square, \blacklozenge, \lozenge$ y \star corresponden a $\varepsilon = 0.00, 3.18, 9.70, 17.64, 22.32, 27.17, 32.01, 39.44$ y 46.85 , respectivamente. $\Delta T_{cr} = 14.7$ K. 99

5.16. Amplitud (a) medida a partir de la evolución temporal de la temperatura en el termopar 2 ($V = 0.80$ (\blacksquare), $V = 0.90$ (\bullet), $V = 1.00$ (\blacktriangle)) y de la deformación de la interfase ($V = 0.80$ (\square), $V = 0.90$ (\circ), $V = 1.00$ (\triangle)) en $z = L - 530 \mu\text{m}$ 100

6.1. Imagen digital adquirida en un experimento con $L_0 = 3.691$ mm, $V_0 = 0.8200$, y $\Delta T = 15.20$ K. 106

6.2. Diferencia $\langle F \rangle - F^{(\text{ver})}$ de la posición media de la superficie libre $\langle F \rangle$ con respecto al valor verdadero $F^{(\text{ver})}$ (a), y curvatura media local $C(z)$ (b) obtenidas a partir de imágenes sintéticas generadas para $L = 3.67$ mm, $V = 0.843$, y $\Delta T = 25.8$ K. En la gráfica (b), la línea continua es el valor verdadero mientras que los símbolos son los resultados obtenidos por los métodos propuestos en (Montanero *et al.*, enviado) (\circ) y en (Lowry, 1996) (\triangle). 108

6.3. Diferencia $\langle F \rangle - F^{(0)}$ de la posición promedio de la interfase $\langle F \rangle$ con respecto a la correspondiente forma de equilibrio $F^{(0)}$ para $\{L_0 = 3.635$ mm, $V_0 = 0.8764$, $\Delta T = 0.01$ K} (\bullet) y $\{L_0 = 3.691$ mm, $V_0 = 0.8200$, $\Delta T = 1.04$ K} (\circ). 110

6.4. Curvatura media local $C(z)$ de la superficie libre de cuatro puentes líquidos en equilibrio ($\Delta T \simeq 0$) (símbolos), y de $\{L_0 = 3.635 \text{ mm}, V_0 = 0.8764, \Delta T = 41.86 \text{ K}\}$ (línea continua). Los símbolos corresponden a $\{L_0 = 3.635 \text{ mm}, V_0 = 0.8764, \Delta T = 0.01 \text{ K}\}$ (\circ), $\{L_0 = 3.691 \text{ mm}, V_0 = 0.8200, \Delta T = 1.04 \text{ K}\}$ (\bullet), $\{L_0 = 3.596 \text{ mm}, V_0 = 0.9000, \Delta T = 0.03 \text{ K}\}$ (\square), y $\{L_0 = 3.624 \text{ mm}, V_0 = 0.9895, \Delta T = 0.04 \text{ K}\}$ (\triangle). 111

6.5. Longitud (a) y volumen (b) del puente líquido en función de ΔT para las series experimentales I (\circ) y II (\bullet). Las barras de error son las desviaciones típicas calculadas a partir de las diez imágenes adquiridas para cada valor de ΔT 112

6.6. Deformación $\langle F \rangle - F^{(0)}$ de la posición media de la interfase $\langle F \rangle$ con respecto a las correspondientes formas de equilibrio $F^{(0)}$ para las series experimentales I (a) y II (b). 113

6.7. $(\langle F \rangle - F^{(0)})/\Delta T$ para las series experimentales I (a) y II (b). 114

6.8. Deformación $\langle F \rangle - F^{(1)}$ de la posición media de la interfase $\langle F \rangle$ con respecto a la forma correspondiente $F^{(1)}$ para las series experimentales I (a) y II (b). 115

6.9. Cociente $\langle C_z \rangle / \langle C_{z0} \rangle$ de la pendiente promedio de la curvatura $\langle C_z \rangle$ con respecto a su valor correspondiente $\langle C_{z0} \rangle$ medido en equilibrio ($\Delta T \simeq 0$) para las series experimentales I (\circ) y II (\bullet). Las barras de error son las desviaciones típicas. La línea corresponde al valor C_z^* de la pendiente de la curvatura calculada asumiendo equilibrio en $T = T_h$, es decir, $C_z^* = \rho(T_h)g_0/\sigma(T_h)$ 116

Índice de tablas

3.1. Amplitud A , velocidad angular ω , y distancias promedio Δ_l y Δ_r correspondientes a los dos puntos característicos para varios valores de δ . También se muestra el número N de puntos restantes después de quitar los anómalos.	51
3.2. Valores de los parámetros que caracterizan las configuraciones fluidas consideradas en las figuras 3.15 y 3.16. Notese, que si $t/t_0 \times 2\Omega/\pi$ toma un valor entero, entonces los valores impares (pares) corresponden a un valor máximo (cero) de la magnitud de $g(t)$	59
3.3. Primeras dos frecuencias de resonancia procedentes de las ecuaciones de Euler para los puentes líquidos considerados en las figuras 3.15 y 3.16.	61
4.1. Valores de los parámetros que caracterizan las configuraciones fluidas consideradas en la figura 4.4.	73
4.2. Valores de los parámetros que caracterizan las configuraciones fluidas consideradas en la figura 4.5.	76

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

El interés por los fenómenos capilares se inició en 1490 cuando Leonardo da Vinci observó por primera vez el ascenso de agua en tubos de cristal. Posteriormente, Hawksbee (1709, 1712) realizó las primeras mediciones de la acción capilar en tubos y platos de cristal, y Jurin (1719a,b) mostró que la altura del líquido en un capilar es inversamente proporcional al diámetro del tubo. A mediados del siglo XVIII, von Segner (1751) introdujo el concepto de tensión superficial, utilizado por Young (1805) para formular la teoría de los fenómenos capilares. Laplace (1806a; 1806b) obtuvo unos resultados idénticos a los de Young, pero desde un punto de vista completamente cuantitativo y, además, los comparó con algunos resultados experimentales previos de Gay-Lussac. Por este motivo, la ecuación que describe las diferencias de presión en equilibrio en la interfase entre dos fluidos recibe el nombre de ecuación de Young-Laplace. Sin embargo, existían partes de la teoría que no habían sido resueltas en detalle (Rouse Ball, 1960). Estas partes fueron completadas, principalmente, por Gauss (1830) y por pequeñas aportaciones de Poisson, Kirchoff, Maxwell, Rayleigh, Poincaré y Neumann (Minkowski, 1906; Bakker, 1928).

Más tarde, Plateau formuló el problema de la influencia de la gravedad en la forma de equilibrio adoptada por una masa líquida. Así, en 1840, diseñó un procedimiento experimental, aún utilizado, para simular la ausencia de gravedad introduciendo gotas de aceite en una mezcla de alcohol y agua con la misma densidad (Plateau, 1849, 1873). Thomson (1855) descubrió que la tensión superficial no es la misma para líquidos diferentes y, en 1871, Marangoni descubrió que si existen diferencias en la tensión superficial en la superficie libre de un líquido, éste fluye hacia la región con mayor tensión superficial. Además, elaboró la primera teoría que explica los flujos debidos a variaciones en la tensión superficial producidas por gradientes de temperatura y composición. Por este motivo, la convección interfacial causada por

dichos gradientes se conoce como convección de Marangoni¹. Siete años después, Gibbs estudió este fenómeno con una mayor precisión. Sin embargo, todos estos descubrimientos no atrajeron mucha atención hasta que Scriven y Sterling (1960) retomaron el estudio de las inestabilidades en las interfaces. En los setenta, la profunda influencia de la convección termocapilar en la homogeneidad del cristal fabricado con la técnica de crecimiento de cristales de la zona flotante (véase la figura 1.1), motivó un resurgimiento del interés por los fenómenos capilares. Más concretamente, se estudió el flujo termocapilar presente en la configuración fluida que aparece en dicha técnica. Esta configuración fluida es una masa de líquido que se sostiene entre dos soportes sólidos por la acción de la fuerza de tensión superficial, y recibe el nombre de puente líquido.

El estudio del puente líquido continúa siendo interesante, ya que esta configuración está presente en numerosos procesos tecnológicos. De hecho, aparece en procesos de fabricación de polvos cerámicos (Castillo y Munz, 2007) y cosméticos (Kani *et al.*, 2007), en la fabricación de estructuras metálicas con forma de panal (Oruganti y Ghosh, 2007), en la formación de aglomerados durante la interacción entre partículas sólidas a altas temperaturas (Paglai *et al.*, 2007), y en la dispersión de los mismos cuando se infiltra un líquido (Gopalkrishnana *et al.*, 2005). Asimismo, los puentes líquidos se estudian para evitar la unión de granos sensibles a la humedad durante su transporte y almacenaje (Röck y Schwedes, 2005; Billings *et al.*, 2006), para impedir la segregación de sólidos de distinto tamaño (Yang, 2006), para simular los procesos de recubrimiento y granulación de comprimidos en la industria farmacéutica (Turton, 2008; Song y Turton, 2007), para estudiar el comportamiento de suelos cohesivos (Zhang y Li, 2006), y los fenómenos de coalescencia (Decent *et al.*, 2006).

A lo largo de este capítulo, expondremos resultados previos concernientes tanto a la estática como a la dinámica de esta configuración fluida.

¹La convección interfacial originada exclusivamente por gradientes de temperatura se conoce también como convección termocapilar.

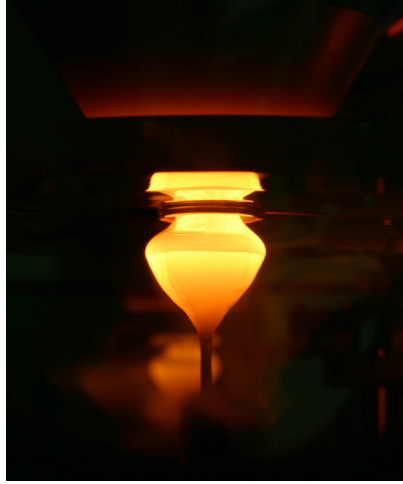


Figura 1.1: Técnica de la zona flotante.

1.1. Formas de equilibrio

1.1.1. Puentes líquidos axisimétricos

La forma de equilibrio de un puente líquido es axisimétrica si está sostenido entre dos soportes sólidos circulares paralelos y concéntricos, y si la gravedad actúa a lo largo de su eje. Para obtener dicha forma es necesario integrar la ecuación de Young-Laplace teniendo en cuenta las condiciones de volumen y de anclaje de la línea de contacto en el borde de los discos. Para configuraciones próximas a la cilíndrica, puede obtenerse una expresión analítica aproximada utilizando un método perturbativo (Meseguer *et al.*, 1985). La forma de equilibrio también puede calcularse utilizando herramientas numéricas (Martínez y Perales, 1986). Este cálculo se ha utilizado para deducir el valor de las fuerzas inerciales que actúan sobre el puente líquido (Meseguer *et al.*, 1996; Montanero *et al.*, 2001) y, en mayor medida, para obtener el número de Bond. El número adimensional de Bond mide la relación entre la fuerza gravitatoria y la tensión superficial, y se puede obtener comparando las formas de equilibrio teórica y experimental.

Medida de la tensión superficial con puentes líquidos

La ecuación de Young-Laplace proporciona la forma de un puente líquido en función de la tensión superficial, entre otros parámetros. Si el resto de parámetros es conocido, es posible medir la tensión superficial analizando la forma de equilibrio experimental de un puente líquido y comparándola con la predicción teórica. Numerosos autores han desarrollado procedimientos más o menos sencillos basados en este principio, y han realizado experimentos, tanto en tierra (Meseguer y Sanz, 1985; Meseguer *et al.*, 1985; Perales *et al.*, 1991; Perales y Meseguer, 1992; Ramos *et al.*, 1994) como en vuelos parabólicos (Martínez, 1987). Sin embargo, el desarrollo de un procedimiento adecuado para realizar esta comparación no es sencillo. Por una parte, no existe una expresión analítica exacta que proporcione la forma de equilibrio. Por otra, la forma experimental de la configuración debe extraerse con precisión de una imagen digital.

Cabezas *et al.* (2004, 2005) desarrollaron una técnica, *Theoretical Image Fitting Analysis* (TIFA), para la medida de la tensión superficial a partir de imágenes de gotas y burbujas. Posteriormente, fue adaptada para medir la tensión superficial a partir de imágenes de otras entrefases líquido-fluido axisimétricas, *TIFA-Axisymmetric Interfaces* (TIFA-AI) (Cabezas, 2005; Cabezas *et al.*, 2006). La precisión de las medidas proporcionadas por esta técnica se ha evaluado recientemente utilizando imágenes sintéticas en las que se han simulado diferentes condiciones experimentales reales (magnificación y relación de aspecto del píxel, inclinación de la cámara, ancho de borde de la entrefase, ruido producido por los componentes electrónicos del sistema de adquisición de imágenes, presencia de burbujas e iluminación) (Cabezas *et al.*, 2007). Además, se ha comprobado que, cuando el número de Bond es pequeño ($B \sim 10^{-2}$), la utilización de puentes líquidos para medir la tensión superficial proporciona mejores resultados que el uso de gotas con el mismo volumen (Ferrera *et al.*, 2007). Dado que esta técnica es robusta y precisa, se empleará para el cálculo de la tensión superficial en las configuraciones fluidas analizadas en este trabajo.

1.1.2. Puentes líquidos no axisimétricos

El puente líquido presenta una forma no axisimétrica en múltiples situaciones. Si sobre el puente líquido actúan fuerzas que poseen una componente lateral, si los discos no son concéntricos, o si los discos no son circulares, la

forma de equilibrio resultante no es axisimétrica. En este caso, la resolución de la ecuación de Young-Laplace para calcular la forma de equilibrio es más complicada.

Existen trabajos tanto numéricos (Chen y Saghir, 1994; Laverón-Simavilla y Perales, 1995; Laverón-Simavilla y Checa, 1997; Laverón-Simavilla *et al.*, 2003; Laverón-Simavilla *et al.*, 2005) como analíticos (Meseguer *et al.*, 1996, 2001; Montanero *et al.*, 2002b; Acero *et al.*, 2005) en los que se calcula la forma de equilibrio de puentes líquidos no axisimétricos en distintas condiciones.

Al igual que en el caso axisimétrico, la comparación de las formas teórica y experimental puede proporcionar resultados interesantes. Así, en los escasos estudios experimentales realizados (Meseguer *et al.*, 1996; Zayas *et al.*, 2000; Montanero *et al.*, 2002b), los puentes líquidos han sido utilizados como acelerómetros y tensiómetros. Además, la forma de equilibrio de un puente líquido no axisimétrico es más sensible a las variaciones de la tensión superficial que la de un puente axisimétrico (Cabezas y Montanero, 2004; Cabezas, 2005), por lo que se ha sugerido su utilización para obtener medidas precisas de la tensión superficial en condiciones adversas.

1.2. Estabilidad

1.2.1. Estabilidad en ausencia de gravedad

La longitud máxima de un puente líquido de volumen cilíndrico en ausencia de gravedad fue calculada por primera vez por Rayleigh (1945). Rayleigh obtuvo que el valor máximo de la esbeltez² es π . A raíz de este resultado, se publicaron varios estudios, entre la década de los setenta y principios de los ochenta, donde se variaron el volumen y la distancia entre los discos para determinar los límites de estabilidad (Haynes, 1970; Erle *et al.*, 1970; Mason, 1970; Gillette y Dyson, 1971; Sanz y Martínez, 1983; Russo y Steen, 1986; Boucher y Jones, 1988). Así, manteniendo la esbeltez constante, existe un volumen mínimo por debajo del cual el puente es inestable. La naturaleza de la inestabilidad depende de la esbeltez (Martínez, 1978; Slobozhanin *et al.*, 1997; Meseguer *et al.*, 1999). Si la esbeltez es muy pequeña, la línea de contacto triple se desprende del borde y se desplaza hacia el centro de los discos (Meseguer *et al.*, 1999). Si el valor de la esbeltez está comprendido

²La esbeltez, Λ , es la razón entre la longitud y el diámetro del puente.

entre uno y dos, el puente se rompe en dos gotas iguales que permanecen ancladas cada una a un disco (Meseguer *et al.*, 1999). Por último, si la esbeltez es mayor que dos, la rotura da lugar a dos gotas con volúmenes distintos. Estos resultados fueron comprobados experimentalmente por Sanz y Martínez (1983) haciendo uso de la técnica de Plateau.

1.2.2. Influencia de perturbaciones axisimétricas

La presencia de perturbaciones axisimétricas normalmente reduce la estabilidad del puente líquido. Durante las últimas décadas se han realizado numerosos estudios que analizan el efecto de la gravedad axial sobre el límite de estabilidad de volumen mínimo (Coriell *et al.*, 1977; Vega y Perales, 1983; Meseguer y Sanz, 1985; Myshkis *et al.*, 1987; Meseguer *et al.*, 1990; Perales *et al.*, 1991; Bezdenejnykh *et al.*, 1992; Slobozhanin y Perales, 1993). También se ha considerado la dependencia de este límite con respecto de la diferencia entre los diámetros de los discos soporte (Meseguer, 1984; Perales *et al.*, 1991; Bezdenejnykh y Meseguer, 1991). Los resultados muestran que cada uno de estos efectos por separado disminuye la estabilidad del puente líquido. Sin embargo, ambos efectos acoplados pueden cancelarse parcialmente entre sí. El cálculo de los límites de estabilidad bajo estas condiciones fue efectuado teóricamente y validado experimentalmente por Meseguer *et al.* (1990) para un amplio rango de valores del número de Bond y de diferencias entre los diámetros de los discos. Posteriormente, Perales *et al.* (1991) y Bezdenejnykh y Meseguer (1991) completaron este estudio experimentalmente. Por último, Slobozhanin y Alexander (1998) exploraron numéricamente las regiones que no habían sido consideradas en los diagramas de estabilidad previos, y calcularon el volumen máximo para puentes de esbeltez arbitraria, y el volumen mínimo para puentes de esbeltez pequeña.

Si un puente líquido rota como un sólido rígido, la naturaleza de la inestabilidad depende del número de Weber W (Vega y Perales, 1983). Este número adimensional mide la relación entre las fuerzas de inercia y la tensión superficial. De acuerdo con el análisis de estabilidad realizado para puentes cilíndricos (Vega y Perales, 1983), si $W \leq 1/3$ la pérdida de estabilidad se debe a perturbaciones axisimétricas (modo ánfora), y si $W \geq 1/3$ se debe a perturbaciones no axisimétricas (modo C).

Perales *et al.* (1990) estudiaron el efecto de la excentricidad e entre el eje de rotación y el de los discos y observaron una reducción de orden e^2 del número de Weber crítico para el modo ánfora, y del orden de $e^{2/3}$ para el

modo C . Posteriormente, Slobozhanin y Perales (1996), mediante un análisis numérico para puentes axisimétricos, observaron que la forma de la región de estabilidad y la naturaleza de las perturbaciones críticas cambian en función de la velocidad de rotación. El efecto añadido de la gravedad fue estudiado por Slobozhanin y Alexander (1997) y Gómez *et al.* (2002). Recientemente, Lapuerta *et al.* (en publicación) han ampliado numéricamente los estudios de Perales *et al.* (1990) a excentricidades mayores. Además, han comparado sus resultados con los datos experimentales obtenidos por Sanz *et al.* (1992).

1.2.3. Influencia de perturbaciones no axisimétricas

Algunas de las perturbaciones que provocan que la forma de equilibrio sea no axisimétrica han sido mencionadas en la sección 1.1.2. El análisis del efecto de estas perturbaciones sobre la estabilidad fue iniciado por Coriell *et al.* (1976, 1977), quienes estudiaron teórica y experimentalmente la influencia de una fuerza lateral en la estabilidad de puentes líquidos de volumen cilíndrico. Además, se demostró que las perturbaciones no axisimétricas tienen menor influencia que las axisimétricas sobre los límites de estabilidad, ya que el efecto de la gravedad lateral sobre el límite de Rayleigh es del orden del cuadrado de la perturbación, mientras que los efectos producidos por perturbaciones axisimétricas son del orden de la perturbación para pequeños cambios en el volumen, y del orden de una potencia dos tercios para la gravedad axial o la diferencia en el diámetro de los discos. Posteriormente, Perales (1987) analizó, mediante un método asintótico, la estabilidad de puentes líquidos esbeltos bajo perturbaciones no axisimétricas y mostró que las perturbaciones no axisimétricas tienen un efecto despreciable en el límite de estabilidad si se compara con el producido por las perturbaciones axisimétricas. Meseguer *et al.* (1995a) concluyeron que el efecto combinado de la excentricidad y la carga lateral puede estabilizar los puentes líquidos sometidos a cargas axiales, y analizaron experimentalmente la dependencia del límite de estabilidad con la excentricidad para puentes líquidos milimétricos.

Los límites de estabilidad de puentes líquidos no axisimétricos fueron calculados numéricamente mediante un esquema de diferencias finitas (Laverón-Simavilla y Perales, 1995; Laverón-Simavilla y Checa, 1997). Además, se midieron en puentes líquidos milimétricos sostenidos entre discos coaxiales con el mismo diámetro y sometidos a cargas laterales (Bezdeneynykh *et al.*, 1999). Asimismo, Zayas *et al.* (2000) analizaron, numérica y experimentalmente, la influencia de la carga lateral sobre la estabilidad de un puente

líquido, y compararon los resultados con predicciones analíticas (Meseguer *et al.*, 1995a). Por último, es destacable el conjunto de resultados analíticos para distintas configuraciones presentados en dos revisiones (Meseguer *et al.*, 1995b, 1999).

A pesar de su relevancia tecnológica en relación a la técnica de la zona flotante (Martínez *et al.*, 2002a,b), los estudios acerca de la estabilidad de puentes líquidos sujetos entre soportes no circulares son escasos. Meseguer *et al.* (2001) estudiaron, mediante un análisis asintótico, la influencia de la forma de los soportes sobre los límites de estabilidad de puentes líquidos casi cilíndricos. El análisis muestra que la forma de los discos modifica la estabilidad del puente de modo similar a otros efectos no simétricos con respecto al plano medio (como la gravedad axial o discos con distintos diámetros). Además, se obtiene que, si se considera la combinación entre formas no circulares de los discos y otros efectos no simétricos, la configuración resultante es más estable y se puede compensar el efecto de la gravedad. Laverón-Simavilla *et al.* (2003) estudiaron numéricamente la estabilidad y las formas de equilibrio de un puente líquido sostenido entre un disco circular y otro elíptico. Sus resultados reproducen los de Meseguer *et al.* (2001) si se retiene un término más en el desarrollo asintótico. Este último estudio ha sido ampliado recientemente (Laverón-Simavilla *et al.*, 2005) a puentes líquidos entre dos soportes elípticos con orientación arbitraria y bajo la acción de una carga lateral.

Para finalizar esta sección de estabilidad, es importante mencionar que, dado que los puentes líquidos son inestables si se supera una esbeltez crítica, se han propuesto varios procedimientos para estabilizarlos y aumentar el área de la interfase (González *et al.*, 1989; Langbein y Naumann, 1995; Marr-Lyon *et al.*, 1997; Mahajan *et al.*, 1998, 1999; Marr-Lyon *et al.*, 2000, 2001; Patel *et al.*, 2002; Thiessen *et al.*, 2002; Wei *et al.*, 2005). Además, Lowry (2000) y Patel *et al.* (2002) han analizado la estabilidad de puentes duales resultado de la conexión de dos sub-puentes mediante un canal fluido. Montanero *et al.* (2002a) han obtenido fórmulas explícitas que predicen el contorno de equilibrio de un número arbitrario de puentes líquidos conectados por presión. Estos resultados han sido comparados satisfactoriamente con datos numéricos y experimentales.

1.3. Dinámica de puentes líquidos isotermos

El estudio de los efectos dinámicos sobre puentes líquidos sólo se ha considerado a partir de mediados de los ochenta. Dado que el problema es complejo, es necesario realizar aproximaciones. Así, se ha restringido el análisis a puentes líquidos axisimétricos. En la mayoría de los casos, se ha asumido que la deformación de la interfase en torno a la forma de equilibrio y los campos de velocidad y presión son pequeños, para que las ecuaciones hidrodinámicas puedan ser linealizadas (Sanz, 1985; Gañán-Calvo, 1991). Algunos autores han derivado modelos unidimensionales en los que se considera únicamente la componente axial del campo de velocidades, y ésta es sólo función de la coordenada z y del tiempo t . Estos modelos son el “modelo de rodajas” y el modelo de Cosserat, y fueron propuestos por Lee (1974) y Green (1976) para la descripción de chorros capilares. Meseguer (1983) fue el primero que aplicó ambos modelos al estudio de la dinámica de puentes líquidos. Dichos modelos permiten calcular deformaciones finitas de la interfase y, por tanto, se pueden usar para analizar el proceso de rotura o las oscilaciones no lineales. Los estudios desarrollados muestran que la precisión de estas aproximaciones aumenta con la esbeltez del puente.

1.3.1. Dinámica lineal

Vibraciones de puentes

Existen varios trabajos sobre la respuesta dinámica de un puente líquido ante la vibración de pequeña amplitud de los discos que lo sostienen, o la presencia de un campo de microgravedad oscilatorio. Nicolás (1991) estudió el comportamiento de puentes líquidos cilíndricos sujetos a un campo de microgravedad oscilatorio. El análisis fue desarrollado haciendo uso de la aproximación lineal no viscosa. En un trabajo posterior, Perales y Meseguer (1992) presentaron un análisis teórico para puentes líquidos axisimétricos viscosos basado en el modelo de Cosserat. Las frecuencias de resonancia obtenidas mostraron un buen acuerdo con los resultados experimentales medidos haciendo uso de la técnica de Plateau.

Por otra parte, y haciendo uso del modelo de Cosserat, Meseguer y Perales (1992a) estudiaron los efectos de la viscosidad sobre la dinámica de columnas líquidas axisimétricas. Para ello, examinaron la acción de una excitación armónica, y calcularon la dependencia de la primera frecuencia de

resonancia con los parámetros que definen la configuración. Consideraron puentes líquidos entre discos de radios diferentes, con volumen diferente del cilíndrico, y bajo la acción de un campo gravitatorio axial de pequeña magnitud. Además, Meseguer y Perales (1992b) estudiaron la respuesta dinámica de puentes líquidos cilíndricos sometidos a un campo de microgravedad oscilatorio cuya frecuencia varía linealmente con el tiempo, y comprobaron que la excitación de frecuencia variable conduce a medidas erróneas de la frecuencia de resonancia.

El efecto combinado de la gravedad, discos desiguales y volumen no cilíndrico en la vibración de puentes líquidos axisimétricos también ha sido considerado en Montanero (2003b). Los resultados fueron calculados numéricamente a partir del modelo unidimensional de Cosserat y la descripción tridimensional. En general, se observó un buen acuerdo para la primera frecuencia de resonancia, aunque las discrepancias aumentan a medida que el valor de la esbeltez disminuye.

Los trabajos experimentales concernientes a la dinámica lineal de puentes líquidos son muy escasos, y se limitan a la medida de la frecuencia de resonancia en respuesta a vibraciones aplicadas mediante distintos métodos. Así, Ahrens *et al.* (1994) y Langbein *et al.* (1995) sometieron un puente líquido a vibraciones axiales electrodinámicas de distinta frecuencia, tanto en tierra como en condiciones de microgravedad. Morse *et al.* (1996) produjeron en un puente líquido rodeado por otro líquido de la misma densidad ondas estacionarias de amplitud pequeña mediante la acción de un campo ultrasónico de presión. Sus resultados coinciden con la aproximación no viscosa empleada por Sanz y López-Díez (1989). Por último, Mahajan *et al.* (2002) utilizaron un campo magnético para provocar vibraciones sinusoidales axiales y laterales en puentes líquidos cilíndricos, y observaron que, tanto para la vibración axial como para la lateral, la primera frecuencia de resonancia decrece si el número de Bond aumenta. Además, los resultados fueron comparados con las predicciones obtenidas a partir del modelo unidimensional de Zhang y Alexander (1990).

Oscilaciones libres

Las oscilaciones libres de pequeña amplitud de puentes líquidos pueden ser descritas en términos de los modos normales de oscilación. En general, estos modos están caracterizados por su frecuencia y factor de amortiguamiento. Si el puente líquido no es viscoso, este factor es nulo. Tanto las

frecuencias propias como los factores de amortiguamiento dependen de la tensión superficial asociada a la interfase, la viscosidad del líquido, las dimensiones del puente, los números de onda axial y azimutal, y la gravedad.

Sanz (1985) analizó la influencia de un baño exterior cilíndrico en la dinámica de un puente líquido también cilíndrico y no viscoso. En este trabajo, se calcularon las frecuencias de resonancia de los modos de oscilación axisimétricos para valores arbitrarios del tamaño del baño y su densidad relativa. Posteriormente, Sanz y López-Díez (1989) extendieron el trabajo anterior a oscilaciones no axisimétricas. En ambos trabajos se hizo uso de la técnica de Plateau para medir experimentalmente las frecuencias de resonancia. Los resultados obtenidos mostraron buen acuerdo con los teóricos. Recientemente, se ha analizado el efecto de un desplazamiento entre los ejes del puente líquido y el baño (Uguz y Narayanan, 2005).

Gañán-Calvo (1991) llevó a cabo un análisis lineal de las oscilaciones libres de puentes líquidos axisimétricos no viscosos en rotación, y obtuvo las frecuencias naturales correspondientes a los modos de oscilación. Además, se analizó el efecto sobre los modos de oscilación de la rotación, la forma de equilibrio del puente líquido y la presencia de un baño exterior. De acuerdo con el estudio de Myshkis *et al.* (1987), se ha comprobado que el espectro de frecuencias estaba dividido en dos conjuntos correspondientes a los regímenes elíptico ($\omega > 2\Omega$) y parabólico ($\omega < 2\Omega$), siendo ω la frecuencia de resonancia y Ω la velocidad de rotación (Gañán-Calvo y Montanero, 2005). Gañán-Calvo (1991) obtuvo los valores de las frecuencias de resonancia en el régimen elíptico para distintos rangos de la velocidad angular Ω , y diferentes valores del resto de los parámetros que caracterizan el problema. Además, se realizaron algunos experimentos que mostraron buen acuerdo con los resultados teóricos (Gañán-Calvo y Barrero, 1990). También se ha considerado el efecto de la rotación en el cálculo de los modos de oscilación axisimétricos y no axisimétricos de puentes líquidos no viscosos (Acero y Montanero, 2005; Acero, 2005). Los autores obtuvieron resultados analíticos para puentes líquidos cilíndricos y numéricos para formas de equilibrio axisimétricas.

Recientemente, se ha utilizado un esquema de diferencias finitas para calcular las frecuencias propias de un puente líquido axisimétrico no viscoso bajo la influencia de un baño líquido exterior (Montanero, 2004a). En este trabajo se analizó la dependencia de las frecuencias propias con respecto de la forma de equilibrio del puente líquido. La comparación entre las predicciones teóricas para la primera frecuencia y los datos experimentales

de Perales y Meseguer (1992) muestra la capacidad de la aproximación no viscosa para describir la dinámica de puentes líquidos reales (Montanero, 2004a). Además, se consideró la rotación utilizando una aproximación bi-dimensional potencial en la que los efectos de la fuerza de Coriolis fueron despreciados. Por último, se observó el efecto desestabilizante asociado a la fuerza centrífuga cuando la densidad del baño es inferior a la del puente.

Gracias a los estudios antes mencionados (Sanz, 1985; Sanz y López-Díez, 1989), se puede afirmar que la dinámica lineal de puentes líquidos cilíndricos no viscosos en ausencia de rotación es bien conocida. Para estudiar los efectos asociados a la viscosidad se han considerado distintos casos límites. Nicolás (1992) obtuvo las frecuencias de resonancia y los factores de amortiguamiento en el límite de Stokes. Un estudio de las capas límites en la interfase y las paredes sólidas permite obtener las correcciones a la aproximación no viscosa, tanto para oscilaciones axisimétricas (Higuera *et al.*, 1994) como no axisimétricas (Higuera y Nicolás, 1997) de puentes líquidos cilíndricos.

Nicolás y Vega (2000a) propusieron un método semianalítico para calcular los modos de oscilación para valores arbitrarios del número modificado de Reynolds. Se identificaron dos tipos de modos normales, llamados capilares e hidrodinámicos, el primero asociado a la deformación de la interfase, y el otro a un flujo significativo en el volumen hidrodinámico. Cuando el número modificado de Reynolds es pequeño, el factor de amortiguamiento asociado a ambos tipos de modos es comparable, y los hidrodinámicos explican la aparición de flujos estacionarios secundarios. Por otra parte, Tsamopoulos *et al.* (1992) calcularon los modos de oscilación de puentes líquidos axisimétricos haciendo uso de un método de elementos finitos.

El uso de modelos unidimensionales (García y Castellanos, 1994, 1996) permite analizar la dinámica de puentes líquidos no cilíndricos con una relativa sencillez. García *et al.* (1997) generalizaron dichos modelos para incluir el efecto de fuerzas eléctricas. Recientemente, Montanero (2004b) ha propuesto un método experimental que permite obtener, a partir de un único experimento y simultáneamente, la tensión superficial y la viscosidad del puente líquido objeto de estudio.

Movimiento impulsivo

La respuesta dinámica de un puente líquido ante una variación instantánea del campo gravitatorio que actúa sobre él se describe mediante la superposición de los infinitos modos de oscilación. El modo más significativo es el primero, ya que su amplitud es mayor que la de los siguientes y, por este motivo, domina la dinámica del puente durante los instantes de tiempo iniciales. Por otra parte, el valor absoluto del factor de amortiguamiento aumenta con el índice del modo de oscilación, de forma que la importancia relativa del primer modo crece con el tiempo.

El movimiento impulsivo de un puente líquido cilíndrico viscoso fue estudiado analíticamente haciendo uso del modelo de Cosserat (Meseguer y Perales, 1991). Este análisis fue extendido al caso axisimétrico mediante un esquema de diferencias finitas (Meseguer *et al.*, 1991). Por último, Montanero (2004b) comparó los resultados obtenidos a partir del modelo de Cosserat (García y Castellanos, 1994, 1996; Montanero, 2003a) con la aproximación tridimensional no viscosa (Montanero, 2003a) y obtuvo un buen acuerdo para puentes líquidos esbeltos.

1.3.2. Dinámica no lineal

La dinámica no lineal de columnas líquidas ha sido ampliamente estudiada tanto teórica como experimentalmente (Eggers, 1997). Meseguer (1983) parece haber sido el primero en aplicar un modelo unidimensional para estudiar el problema dinámico de la ruptura axisimétrica de puentes líquidos. Rivas y Meseguer (1984) estudiaron la dinámica no lineal de puentes líquidos axisimétricos viscosos cerca del límite de estabilidad de Plateau-Rayleigh. Para ello realizaron un análisis basado en el modelo unidimensional de Cosserat y emplearon un método perturbativo cerca del punto crítico. Esta aproximación permitió a Martínez *et al.* (2004) explicar los resultados de un experimento realizado a bordo de un cohete de sondeo en el que se aplicaban aceleraciones axiales a un puente líquido.

La respuesta no lineal de un puente líquido ante vibraciones axisimétricas ha sido analizada numéricamente mediante el método de los elementos finitos por Chen y Tsamopoulos (1993). Los resultados indican que la frecuencia de resonancia decrece y el factor de amortiguamiento crece, ambos linealmente, con la amplitud de la oscilación. Las predicciones teóricas fueron comparadas con datos experimentales obtenidos para microzonas (Mollot *et*

al., 1993). El objetivo de estos experimentos era obtener las frecuencias de resonancia cuando el puente líquido está sometido a vibraciones forzadas, y los factores de amortiguamiento cuando está sujeto a oscilaciones libres. La esbeltez de las microzonas fue lo suficientemente pequeña para simular condiciones de ingravidez. Se observó un error menor del 3% entre las frecuencias de resonancia teóricas y experimentales. Además se observaron las trayectorias en el interior del fluido y se comprobó que tienen el mismo tipo de movimiento predicho por Chen y Tsamopoulos (1993).

El proceso de ruptura de un puente líquido fue estudiado tanto teórica como experimentalmente por Meseguer y Sanz (1985). En este trabajo se utilizó un modelo unidimensional para analizar numéricamente la influencia de un campo microgravitatorio axial en la ruptura de un puente líquido entre dos discos iguales. Se encontró un buen acuerdo entre la teoría y los experimentos realizados mediante la técnica de flotabilidad neutra. El análisis fue extendido a puentes líquidos entre discos de distinto diámetro posteriormente (Meseguer, 1985).

La ruptura de un puente líquido fue analizada también por Schulkes (1993) mediante el modelo de Cosserat bajo la aproximación no viscosa. El rango de validez de dicho modelo fue establecido por comparación con los resultados obtenidos mediante otras aproximaciones. Otros modelos unidimensionales similares al modelo de Cosserat han sido empleados para analizar la dinámica de los puentes líquidos (Zhang y Alexander, 1990). Tanto la ruptura como el proceso de formación de las gotas resultantes han sido estudiadas también experimentalmente por Padday *et al.* (1997). Los resultados demostraron que el proceso de ruptura bajo condiciones de microgravedad es prácticamente simétrico con respecto al plano medio del puente líquido. Más recientemente, Burton *et al.* (2004) han propuesto un procedimiento experimental que permite explorar el proceso de ruptura de un puente líquido en instantes próximos a la rotura.

Ramos *et al.* (1999) realizaron un estudio tanto teórico como experimental de la ruptura de puentes líquidos axisimétricos dieléctricos sometidos a la acción de un campo eléctrico externo. El puente líquido se mantenía estable artificialmente mediante la aplicación del campo eléctrico. En un determinado instante la acción del campo eléctrico cesaba, provocándose la ruptura del puente líquido. La evolución posterior fue calculada mediante el modelo de Lee (García y Castellanos, 1996). Los resultados teóricos fueron comparados con los experimentales observándose buen acuerdo.

También se ha recurrido a los campos magnéticos para mantener un

puente líquido en equilibrio artificialmente, y estudiar así el proceso de ruptura que tiene lugar cuando este mecanismo estabilizador desaparece. Mahajan *et al.* (2000) estudiaron la deformación y el posterior colapso de un puente líquido sometido a una variación brusca del campo magnético que actuaba sobre él. El principal resultado de este estudio es que el tiempo que tarda en producirse el colapso es independiente de la longitud del puente líquido.

El proceso de ruptura para configuraciones en el límite de estabilidad de volumen mínimo ha sido analizado experimentalmente para puentes líquidos confinados tanto entre discos iguales (Espino *et al.*, 2002) como entre discos con distintos radios (Meseguer *et al.*, 2003). Los resultados muestran que, cerca del instante de ruptura, el radio del cuello disminuye de acuerdo a una ley potencial universal, independiente de la distancia que separa los discos.

La deformación y ruptura de puentes líquidos suspendidos entre dos discos que se separan progresivamente ha recibido también cierta atención. Davis y Frenkel (1992) obtuvieron una solución analítica en el límite de Stokes. Posteriormente, el problema fue abordado mediante métodos numéricos (Gaudet *et al.*, 1996; Zhang *et al.*, 1996; Ambravaneswaran y Basaran, 1999). La comparación entre predicciones numéricas y resultados experimentales para este problema muestra un buen acuerdo (Bansch *et al.*, 2004).

El proceso contrario a la ruptura de un puente líquido es la coalescencia. Muchos de los trabajos teóricos y experimentales sobre la coalescencia de gotas están motivados por su importancia en dinámica de fluidos, así como por sus aplicaciones en procesos industriales. Por ejemplo, Eggers *et al.* (1999) y Wu *et al.* (2004) estudiaron el problema de dos gotas líquidas que se aproximan entre sí con velocidades despreciables, hasta que las fuerzas de van der Waals las unen y forman un puente líquido minúsculo.

Efectos no lineales en la vibración de puentes líquidos con frecuencias próximas a la de resonancia han sido estudiados en detalle tanto en el caso axisimétrico (Nicolás y Vega, 1996; Nicolás *et al.*, 1998; Mancebo *et al.*, 1998), como no axisimétrico (Higuera y Nicolás, 1997; Higuera *et al.*, 2002). Para ello se ha considerado el límite de baja viscosidad (Nicolás y Vega, 1996; Mancebo *et al.*, 1998; Higuera y Nicolás, 1997; Higuera *et al.*, 2002), y el límite consistente en un elevado número de Reynolds y alta frecuencia de vibración (Nicolás *et al.*, 1998). En estos trabajos, el flujo estacionario secundario asociado a la vibración de las capas límites que aparece en el volumen hidrodinámico ha sido estudiado en detalle.

1.4. Dinámica de puentes líquidos no isotermos

En la técnica de crecimiento de cristales de la zona flotante, una barra policristalina de silicio se sostiene verticalmente y se conecta su extremo inferior a la semilla monocristalina (Meseguer *et al.*, 1999). A continuación, se funde una porción de la barra en contacto con la semilla mediante un calentador en forma de anillo. La parte fundida se sostiene entre la barra y la semilla debido a fuerzas de tensión superficial. El gradiente de temperaturas originado por el anillo calentador provoca una variación en la tensión superficial que origina la aparición de un flujo. La presencia de este flujo, junto al flujo debido a la convección natural gravitatoria, altera el crecimiento del cristal (Müller, 1989). Esto se debe a que se modifican los gradientes de temperatura y de concentración de las especies disueltas cerca de la zona de cristalización y, por este motivo, se altera la distribución de dopantes e impurezas en el fluido y el cristal, respectivamente. Si además el flujo no es estacionario, aparece una deformación dinámica de la interfase que provoca que las condiciones de crecimiento cristalino varíen con el tiempo y aparezcan estrías en el cristal (Eyer *et al.*, 1984). Estas limitaciones prácticas hicieron que se reactivara el interés por los estudios de Marangoni (Scriven y Sternling, 1960). Además, el hecho de que el entorno microgravitatorio del espacio se hiciera más accesible, y que se demostrara que la convección de Marangoni es la única responsable del flujo oscilatorio (Schwabe *et al.*, 1978; Eyer *et al.*, 1985; Velten *et al.*, 1991; Carotenuto *et al.*, 1998), ha provocado que la citada convección se haya convertido en una materia de investigación muy popular (Chang y Wilcox, 1975; Kuhlmann, 1994, 1999; Schatz y Neitzel, 2001).

En la gran mayoría de los trabajos realizados, se utiliza como modelo un puente líquido sostenido entre dos barras en las que se aplica distinta temperatura. En el instante de aplicación, aparece un flujo estacionario axisimétrico que provoca una deformación estática de la interfase. Esta deformación ha sido estudiada en distintas publicaciones (Hyer *et al.*, 1991; Lan y Kou, 1991; Zhang y Alexander, 1992). Cuando la diferencia de temperaturas alcanza un valor crítico, aparece una inestabilidad que provoca una transición a un flujo oscilatorio tridimensional. El inicio del flujo oscilatorio se ha monitorizado usualmente mediante la inserción de termopares en el interior del fluido (Chun y Wuest, 1979; Schwabe y Scharmann, 1979; Chun, 1980; Preisser *et al.*, 1983; Kamotani *et al.*, 1984; Velten *et al.*, 1991). En menor medida, se ha detectado mediante el cambio en los patrones de interferencias que se obtienen cuando un haz láser incide sobre el fluido (Cao *et al.*,

1991a), y mediante visualización por cámara (Cao *et al.*, 1991b). Además, se ha comprobado tanto numérica (Shevtsova y Legros, 1998) como experimentalmente (Shevtsova *et al.*, 1999) que el gradiente de temperaturas crítico depende del volumen del puente. Si se sigue incrementando la diferencia de temperaturas entre los discos aparecen distintos modos de oscilación en el fluido. Este hecho, que había sido observado experimentalmente (Frank y Schwabe, 1997; Ueno *et al.*, 2003), ha sido confirmado mediante simulaciones numéricas (Shevtsova *et al.*, 2003; Melnikov *et al.*, 2004).

Por otra parte, el flujo oscilatorio provoca una deformación dinámica de la superficie libre del puente líquido. El número de publicaciones concernientes al estudio de estas oscilaciones es muy pequeño dado que son diminutas en comparación con las deformaciones estáticas y, por lo tanto, muy difíciles de medir. Shevtsova *et al.* (1997) analizaron numéricamente la existencia de las oscilaciones, y observaron que alcanzan su mayor amplitud cerca del disco que está a mayor temperatura. Además, los cálculos mostraron que la amplitud de la oscilación de la entrefase es del orden de un 1% de la deformación en equilibrio, y que varía con la coordenada axial y el volumen del puente líquido. Kuhlmann y Nienhuser (2002) concluyeron que se deben a flujos de segundo orden. Con respecto a la medida de estas oscilaciones, Shu *et al.* (1994) demostraron la existencia de las oscilaciones mediante la observación de distorsiones de una rejilla proyectada sobre un puente líquido. Posteriormente, Nishino y Yoda (2000) utilizaron una técnica de microscopía para concluir que la amplitud de la oscilación varía con la coordenada axial y que su tamaño máximo, en puentes líquidos de aceite de silicona de 5-cSt, es del orden de $1 \mu\text{m}$. Recientemente, Okubo *et al.* (2005) han observado mediante técnicas de interferometría que la frecuencia de la oscilación depende de Λ .

En la actualidad, el objetivo de la mayoría de los estudios es la comprensión del mecanismo de la inestabilidad, así como la descripción de los distintos modos de oscilación del flujo oscilatorio. El mecanismo de la inestabilidad depende, principalmente, del número de Prandtl⁴. Si el fluido posee un número de Prandtl bajo o medio, los mecanismos han sido descritos mediante un análisis lineal de la estabilidad (Wanschura *et al.*, 1995), y mediante simulaciones numéricas (Yasuhiro *et al.*, 1999; Leypoldt *et al.*, 2000; Imaishi *et al.*, 2001; Lappa *et al.*, 2001; Sim y Zebib, 2002; Kuhlmann *et al.*, 2002; Shevtsova *et al.*, 2003; Li *et al.*, 2005). La influencia de la deformación

⁴El número adimensional de Prandtl es el cociente entre la viscosidad cinemática y la difusividad térmica

dinámica de la entrefase en el flujo es prácticamente despreciable (Kuhlmann y Nienhuser, 2002). Sin embargo, si el número de Prandtl es elevado, la convección es mayor y la deformación dinámica influye en el mecanismo de la inestabilidad (Hashimoto *et al.*, 2003, 2005; Kamotani y Ostrach, 1998; Kamotani *et al.*, 2000, 2001, 2003, 2007).

1.5. Objetivo general

El objetivo general de este trabajo es el desarrollo de un procedimiento experimental que permita analizar la dinámica de un puente líquido sometido a distintas perturbaciones. Se propondrá un montaje experimental general que permita el estudio de la dinámica del puente líquido, con pequeñas adaptaciones para cada experimento. Durante el experimento se obtendrán secuencias de imágenes del puente líquido tomadas a contraluz. Aplicando técnicas de detección de contorno avanzadas, se localizará la entrefase en las imágenes para, posteriormente, analizar el movimiento de la misma en las distintas condiciones. El primer caso que se estudiará es la dinámica de puentes líquidos isoterms en condiciones de gravedad terrestre que se someten a vibraciones lineales. El procedimiento experimental se desarrollará para el caso de vibraciones axiales y laterales. Por otro lado, se estudiará la deformación estática y dinámica de la entrefase del puente líquido sometido a un gradiente de temperaturas entre sus soportes.

1.6. Estructura del documento

Esta memoria se compone de siete capítulos. En el primer capítulo se ha llevado a cabo una extensa revisión bibliográfica y se han planteado los objetivos que se pretenden alcanzar. En el segundo capítulo se describen el montaje experimental general empleado en este trabajo, y el método desarrollado para localizar la posición de la entrefase en cada una de las imágenes digitales que componen la secuencia obtenida en un experimento. Los tres siguientes capítulos se centran en el estudio experimental de tres problemas de dinámica de puentes líquidos. En cada uno se presentan las diferencias con respecto al montaje presentado en el capítulo dos, y las consideraciones específicas para el análisis de la información experimental. Así, en el capítulo tercero se analiza la vibración axial lineal de puentes líquidos milimétricos. En el capítulo cuarto se estudia la deformación de la entrefase debida a vibraciones laterales de pequeña amplitud. El último caso estudiado es la

deformación dinámica de la interfase en puentes líquidos no isoterms. Así, en el capítulo quinto, se mide la deformación dinámica de la interfase y en el capítulo seis la deformación media. El séptimo capítulo recoge las conclusiones alcanzadas en este trabajo. Por último se incluye una sección con las referencias bibliográficas citadas.

Capítulo 2

TÉCNICAS DE DETECCIÓN DE CONTORNOS EN IMÁGENES DIGITALES

2.1. Introducción

El objetivo de este trabajo es desarrollar un procedimiento que permita el estudio experimental de la dinámica de un puente líquido sometido a ciertas perturbaciones. Este estudio se realizará a través del análisis de las secuencias de imágenes digitales que se obtengan en los experimentos. En cada imagen se detectará la posición del contorno y se estudiará la evolución del mismo en la secuencia. La amplificación utilizada en el experimento y la precisión del procedimiento de detección de contorno deberán ser suficientes para observar las deformaciones que se producen en la entrefase del puente en el experimento concreto.

En este trabajo, en primer lugar, se estudiará la respuesta dinámica de un puente líquido rodeado por aire y sometido a vibraciones forzadas. El tamaño de los soportes sólidos debe ser muy pequeño para minimizar el efecto de la gravedad. El tiempo característico del puente líquido resultante es muy pequeño y, por tanto, la evolución de esta configuración fluida ocurre en un periodo de tiempo muy corto (del orden de milisegundos). Además, el análisis de las oscilaciones lineales requiere que la deformación de la entrefase sea pequeña. Posteriormente, se estudiará el comportamiento de la entrefase de un puente líquido sometido a un gradiente de temperaturas. En este caso, el tamaño de las oscilaciones en la superficie libre del puente líquido es de orden micrónico.

La utilización de imágenes digitales para el estudio de la estática o la dinámica de entrefases no es nuevo. Las técnicas tipo ADSA (Axisymmetric Drop Shape Analysis) fueron pioneras en este campo (Girault *et al.*, 1982, 1984), y han realizado grandes esfuerzos orientados a lograr precisión en la detección de la entrefase (véase entre otros Cheng y Neumann (1992);

Song y Springer (1996); Zuo *et al.* (2004)). Estas técnicas calculan el valor de la tensión superficial a partir de imágenes experimentales de una gota obtenidas a contraluz. En primer lugar, localizan la posición de la interfase utilizando procedimientos complejos de detección de contorno, especialmente desarrollados para este fin. Posteriormente, calculan el valor de la tensión superficial que proporciona el mejor ajuste de la solución de la ecuación de Young-Laplace al contorno experimental extraído. La precisión de los valores de la tensión superficial que proporcionan las técnicas tipo ADSA ha sido estudiada en múltiples ocasiones y resulta muy satisfactoria (Noordmans y Busscher, 1991; Cheng y Neumann, 1992; Lin *et al.*, 1995; Hoorfar y Neumann, 2004). El éxito de estas técnicas procede de tres aspectos fundamentales:

1. El diseño de un montaje experimental que proporcione imágenes de la configuración fluida (gotas, en el caso de las técnicas tipo ADSA) con la calidad y amplificación suficientes.
2. El desarrollo de un procedimiento de detección de contorno complejo que localice la interfase fluido-líquido con alta precisión.
3. La utilización de un procedimiento preciso de calibración de los dispositivos de adquisición de imágenes.

El procedimiento experimental desarrollado en este trabajo aprovecha la experiencia de las técnicas tipo ADSA en el estudio de interfaces mediante imágenes. En las siguientes secciones de este capítulo se describen los fundamentos del procedimiento.

2.2. Montaje experimental

El montaje experimental utilizado en las técnicas tipo ADSA ha sido descrito repetidamente en la bibliografía (Girault *et al.*, 1982; Anastasiadis *et al.*, 1987; Cheng *et al.*, 1990; Pallas y Harrison, 1990; Hansen y Rødsrud, 1991; Faour *et al.*, 1996; Loglio *et al.*, 1996; Song y Springer, 1996). En la figura 2.1 se muestra el montaje experimental utilizado en este trabajo, similar al utilizado en las técnicas tipo ADSA. El puente líquido se forma en el interior de una celda (A), sujeto entre dos agujas o barras alineadas axialmente. La celda puede estar aislada o conectada a un dispositivo (B) que proporcione las condiciones específicas del experimento: movimiento,

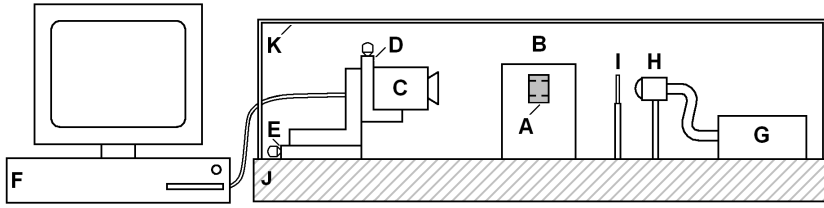


Figura 2.1: Montaje experimental general

gradiente térmico, campo eléctrico, magnético, etc. Por este motivo, el diseño de la celda depende de cómo esté conectada a este dispositivo. Las imágenes se toman a contraluz con una cámara (C), provista de un objetivo de gran aumento que reduce el campo de visión al puente líquido o a una parte del mismo. La cámara puede moverse vertical y horizontalmente utilizando dos tornillos micrométricos (D,E), y se controla desde un PC (F) donde se almacenan las imágenes. El efecto contraluz se produce situando al otro lado de la celda una fuente de iluminación (G) provista de una fibra óptica (H). La utilización de la fibra óptica limita en gran medida la transmisión de calor al puente líquido. Entre el puente líquido y la fibra óptica se interpone un difusor (I) para lograr una iluminación uniforme en la imagen. Todo este equipamiento se sitúa sobre una mesa óptica que amortigua las vibraciones procedentes del edificio (J), y está cubierto por una caja de plexiglás (K) para impedir interferencias debidas a corrientes de aire en el laboratorio.

2.3. El contorno en la imagen

2.3.1. Imagen digital

El desarrollo de los computadores y de las cámaras digitales ha supuesto un salto cualitativo en la detección de contornos. Con anterioridad al uso de estos dispositivos, las imágenes eran exclusivamente analógicas, la detección del contorno se realizaba manualmente y su precisión dejaba mucho que desear. Actualmente, el uso de imágenes digitales nos permite una detección automatizada del contorno.

Las cámaras de video modernas convierten la energía luminosa en corriente eléctrica que es muestreada a través de una rejilla rectangular produciendo una matriz bidimensional de valores (Burt, 1974; Gonzalez, 2000; Peterson,

2001). Así, las imágenes digitales son matrices formadas por elementos rectangulares denominados píxeles (*picture element*). La resolución espacial de dichas imágenes está definida por el número de columnas y filas de píxeles que la componen. Cada píxel se identifica por su posición en la imagen (i, j) , siendo i la columna y j la fila a la que pertenece, contando desde la esquina superior izquierda de la imagen. Por otra parte, a cada píxel le corresponde un determinado nivel de gris o intensidad. El número de niveles de grises permitidos depende de la resolución a nivel de gris del equipo con el que se tomó la imagen y es usualmente una potencia entera de 2, ya que la cuantificación en niveles de intensidad luminosa se realiza en código binario. La resolución a nivel de gris más común en los sistemas de adquisición de imágenes es de 8 bits con 256 niveles de gris permitidos.

Por tanto, la información de una imagen digital está almacenada en una matriz bidimensional I de dimensiones iguales a la resolución espacial de la imagen. El valor de un elemento (i, j) de la matriz es un número entero, comprendido entre 0 y 255, que indica la intensidad en el píxel correspondiente.

2.3.2. Bordes

Los cambios, tanto de las propiedades físicas de los objetos observados (profundidad, orientación, textura, color de la superficie), como de las condiciones externas (iluminación y propiedades reflectantes), se reflejan en variaciones bruscas de la intensidad en la imagen. Las zonas en las que se producen estas variaciones se conocen como *bordes* (Gonzalez y Woods, 2002). En una imagen ideal, la función intensidad \mathcal{I} debería presentar la forma de un escalón en la dirección x perpendicular al borde (fig. 2.2). Así, el borde estaría situado en el punto en el que se produce el salto en el valor de \mathcal{I} . Sin embargo, en las imágenes reales de cualquier objeto, la variación en la intensidad se produce en una zona más extensa (fig. 2.3.a). La posición exacta del borde ya no es obvia, y depende del criterio que se aplique para determinarla. El criterio más común basado en la intensidad localiza el borde en el punto en el se alcanza un determinado valor umbral. Aunque es menos frecuente, también puede localizarse el borde en el punto medio entre los que empieza y finaliza el salto.

Otros criterios frecuentemente utilizados se basan en la forma de las derivadas de la función intensidad. El borde se situará donde se produzca el máximo cambio de intensidad. La figura 2.3.b representa la derivada \mathcal{I}' de

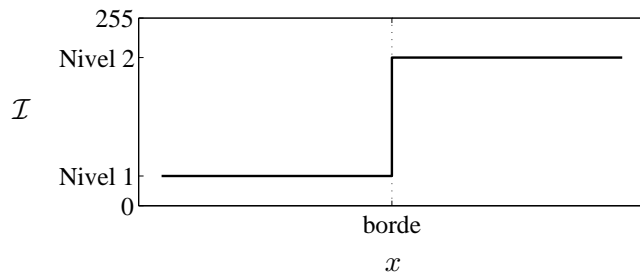


Figura 2.2: Forma ideal de la intensidad de gris de una imagen analógica en las proximidades de un borde a lo largo de la dirección x perpendicular a éste.

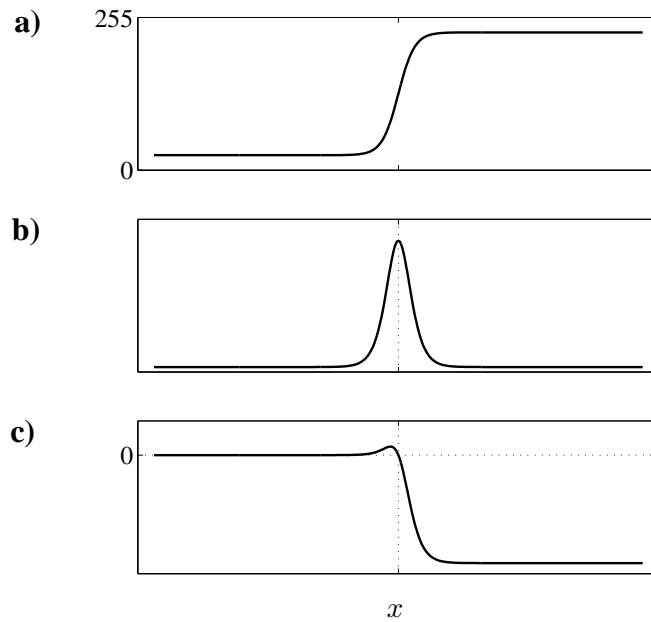


Figura 2.3: Forma de la función intensidad y sus derivadas en las proximidades de un borde a lo largo de la dirección x perpendicular a éste. a) Intensidad. b) Derivada. c) Segunda derivada.

la función intensidad de la fig.2.3.a. El punto en el que se produce el mayor cambio de intensidad se corresponde con un máximo en la derivada. La figura 2.3.c representa la forma de la segunda derivada \mathcal{I}'' de la intensidad. La presencia del máximo en la derivada se corresponde con una raíz de la segunda derivada. En la sección 2.4 se muestran algunos métodos de detección de borde basados en la función intensidad y en sus primera y segunda derivadas.

2.3.3. Ruidos

Algunas variaciones en la intensidad no corresponden a cambios en las propiedades de los objetos observados. Estas variaciones se conocen como ruidos y se introducen durante la adquisición de la imagen. También se consideran como ruidos aquellas variaciones que, aun correspondiendo a cambios de las propiedades físicas de los objetos, no aportan datos relevantes o de los que se desconoce como extraer información (Forsyth y Ponce, 2003). Así, serán fuentes de ruido los dispositivos electrónicos del equipo de adquisición de imágenes y aquellos fenómenos asociados al experimento (ambigüedad por desenfoque, condensación, evaporación, sombras, reflejos,...).

2.4. Técnicas de detección de bordes

2.4.1. Detectores de intensidad umbral

La técnica de intensidad umbral no es propiamente un método de detección de contorno, sino una técnica de segmentación. Las técnicas de segmentación dividen la imagen en zonas disjuntas (objetos y fondo)(Maravall, 1993). Su funcionamiento asume que la imagen contiene uno o más objetos oscuros sobre un fondo claro, y que es posible seleccionar una intensidad que permita separar el objeto del fondo. Así, esta técnica establece una intensidad umbral U y considera que un píxel (i, j) pertenece al objeto si es más oscuro que el nivel umbral ($I(i, j) \leq U$), y al fondo si es más claro. Aplicada a la detección de contornos, la técnica de intensidad umbral selecciona como píxeles del contorno aquellos píxeles del objeto en contacto con el fondo.

Aunque el fundamento de esta técnica es muy sencillo, la selección de una intensidad umbral adecuada es fundamental para obtener un borde correcto. Además, el valor umbral elegido puede ser único para toda la imagen (umbral

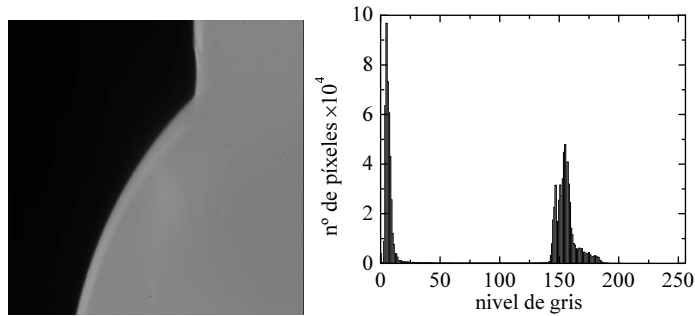


Figura 2.4: Imagen de una sección de un puente líquido y su histograma correspondiente

global) o puede ser distinto en las diferentes secciones de la imagen (umbral local o adaptativo).

Las técnicas de intensidad umbral global proporcionan buenos resultados cuando la iluminación es uniforme y existe un contraste aproximadamente constante entre el fondo y el objeto. El valor umbral U se calcula, frecuentemente, analizando el histograma de la imagen entera. El histograma presenta la frecuencia relativa de aparición de cada uno de los posibles niveles de intensidad en la imagen. En las imágenes de un objeto oscuro sobre un fondo claro, el histograma tiene forma bimodal (fig. 2.4) y los píxeles se agrupan en los lóbulos correspondientes al objeto y al fondo. Por tanto, cada lóbulo está formado por los niveles de intensidad de los píxeles de objetos físicos equivalentes. Existen varios métodos para calcular el valor del umbral U :

- El método del nivel de gris medio establece que la intensidad umbral U es el nivel medio de gris de la imagen. Es una técnica rápida, pero no es precisa dado que en la mayoría de las imágenes no existe igual proporción de píxeles pertenecientes a objetos y fondo.
- El método P-tile se basa en el conocimiento de la fracción de la imagen que ocupa el objeto. A partir de éste se calcula el número de píxeles que forman parte del mismo, N_p y se varía la intensidad umbral hasta que haya N_p píxeles con un nivel de intensidad de gris inferior. Este procedimiento es también muy rápido pero requiere conocer el valor de N_p .
- El método de los dos picos busca la intensidad para la que aparece un “valle” entre los dos lóbulos del histograma. Este método en principio

es muy simple, pero presenta dos inconvenientes. El primero es que en un histograma con mucho ruido puede haber muchos máximos y mínimos locales, y esto dificulta la tarea de encontrar el valle buscado. El segundo es que existen histogramas con lóbulos superpuestos que carecen de valle entre los mismos.

- El método de selección iterativa del umbral está basado en el algoritmo de agrupamiento de medias K (MacQueen, 1967), y se aplica cuando existan dos grupos de píxeles (objeto y fondo). Este método (Ridler y Calvard, 1978; Trussell, 1979) establece un umbral inicial, U_0 , que divide el conjunto de píxeles de la imagen en dos subconjuntos. A continuación, calcula el valor medio de intensidad de gris para cada subconjunto y calcula un nuevo umbral, U_1 , a partir de la media de dichos valores. Si $U_1 - U_0$ es menor que una determinada cantidad ϵ establecida por el usuario, el proceso finaliza y U_1 será el umbral buscado. En caso contrario, el proceso entra en un bucle donde U_0 toma el valor del último U_1 obtenido y se calcula un nuevo U_1 . Este bucle se repite hasta que $U_1 - U_0 < \epsilon$. Este algoritmo funciona siempre que la extensión de ambos grupos sea aproximadamente igual, y fue generalizado por Kittler e Illingworth en 1986 teniendo en cuenta las varianzas de cada grupo en el cálculo del umbral (método iterativo de error mínimo).
- El método de Otsu asume que el histograma de $I(i, j)$ es una combinación de dos distribuciones normales que corresponden al objeto (es decir al puente líquido y eventualmente a los soportes sólidos) y al fondo, respectivamente. El algoritmo de Otsu toma como valor umbral aquel que separa ambas distribuciones y minimiza la suma ponderada de sus varianzas. Más detalles sobre este método puede encontrarse en (Otsu, 1979).

Se han propuesto numerosos algoritmos adicionales, como puede comprobarse en (Glasbey, 1993; Leung y Lam, 1996). En el presente trabajo se ha escogido la técnica de Otsu, ya que se ha citado como una técnica efectiva (Kittler e Illingworth, 1986; Kurita *et al.*, 1992; Trier y Jain, 1995; Brink y Pendock, 1996; Yu *et al.*, 1997) y se ha utilizado en múltiples aplicaciones (Solihin y Leedham, 1999; Rosin e Ioannidis, 2003).

La selección de un único umbral para la imagen completa no proporciona resultados satisfactorios en condiciones de iluminación defectuosas (sombras, iluminación no uniforme,...) porque los niveles de intensidad luminosa no se

distribuyen de forma homogénea en la imagen. En este caso resulta más conveniente la utilización de las técnicas de umbral adaptativo, que dividen la imagen en secciones en las que la iluminación es uniforme. El método propuesto por Chow y Kaneko (1972) es una aproximación a la detección local del umbral. En primer lugar se divide una imagen en subimágenes de forma que cada subimagen se solape con la anterior en la mitad de su contenido. A continuación se calcula el histograma de cada parte, se rechazan los histogramas que no sean bimodales y se obtienen los umbrales del resto utilizando el método iterativo de error mínimo. Por último se realiza una interpolación a partir de dichos umbrales para calcular el umbral para cada píxel. Este método es bastante preciso, pero requiere mucho tiempo de cómputo. Por esta razón es frecuente determinar un umbral para cada píxel analizando la intensidad en los píxeles vecinos. Como la función intensidad del grupo de píxeles es similar a una función de tipo “rampa”, el umbral podrá determinarse como la semisuma de los valores medios de esa función (se entiende por nivel la zona donde la función intensidad de gris no varía).

2.4.2. Detectores de máximo gradiente

Los detectores de máximo gradiente localizan el borde en los puntos en los que las variaciones de intensidad son máximas. La intensidad es una función bidimensional en la imagen, por lo que su variación se mide con la función gradiente (en lugar de con la derivada). Como la función intensidad I de la imagen digital es discreta, no es posible calcular el gradiente y es necesario utilizar una aproximación \mathbf{G} de su valor. Las aproximaciones más frecuentes se obtienen utilizando operadores (también llamados máscaras o filtros).

Los operadores son matrices cuadradas, de dimensiones mucho menores a las de la imagen, que indican los coeficientes por los que se multiplican las intensidades en un píxel y sus vecinos para calcular el gradiente en ese píxel. Los operadores de dimensiones pequeñas son muy sensibles a la presencia de ruido. Los de dimensiones grandes aumentan el tiempo de computación y difuminan los bordes, haciendo más difícil su localización. Se ha comprobado que los operadores 3×3 son los más efectivos (Gonzalez, 2000). La figura 2.5 muestra un operador 3×3 . En general, el valor V en un píxel al aplicar el

A_{11}	A_{21}	A_{31}
A_{21}	A_{22}	A_{32}
A_{31}	A_{32}	A_{33}

Figura 2.5: Máscara 3×3 general.

operador de la figura se calcula con la expresión

$$\begin{aligned} V(i, j) = & A_{11} I(i-1, j-1) + A_{21} I(i, j-1) + A_{31} I(i+1, j-1) \\ & + A_{12} I(i-1, j) + A_{22} I(i, j) + A_{32} I(i+1, j) \\ & + A_{13} I(i-1, j+1) + A_{23} I(i, j+1) + A_{33} I(i+1, j+1). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Las aproximaciones del gradiente más comunes utilizan dos operadores 3×3 , uno para calcular la componente G_i a lo largo de la dirección indicada por las filas, y otro para la componente G_j correspondiente a las columnas. La figura 2.6 presenta los operadores que han sido utilizados con más frecuencia en la detección de contornos. Su efectividad es diferente según la dirección del borde y la presencia de ruido. El operador de Roberts está todavía en uso porque detecta bien los bordes y tiene una excelente velocidad de cómputo, pero es más sensible al ruido que el resto. Por otro lado, el operador de Prewitt es más efectivo cuando los bordes son horizontales y verticales, mientras que el de Sobel es más sensible a los bordes diagonales (Gonzalez, 2000). Por este motivo Frei y Chen propusieron un operador que presentase isotropía aunque su rendimiento es aproximadamente igual al de los operadores de Prewitt y Sobel.

Calculadas las componentes G_i y G_j con los operadores elegidos, es posible obtener el módulo y dirección del gradiente. La magnitud del gradiente viene dada por la expresión

$$G = (G_i^2 + G_j^2)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Sin embargo, para reducir el tiempo de cálculo, es común utilizar como aproximación la suma de los valores absolutos

$$G = |G_i| + |G_j|, \quad (2.3)$$

		G_i		G_j																		
Roberts		<table border="1"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>-1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	0	0	0	0	1	0	-1	0	0		<table border="1"> <tr><td>-1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	-1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0																				
0	1	0																				
-1	0	0																				
-1	0	0																				
0	1	0																				
0	0	0																				
Prewitt	$\frac{1}{3}$	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr> </table>	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	$\frac{1}{3}$	<table border="1"> <tr><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	-1	-1	-1	0	0	0	1	1	1
1	0	-1																				
1	0	-1																				
1	0	-1																				
-1	-1	-1																				
0	0	0																				
1	1	1																				
Sobel	$\frac{1}{4}$	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>-2</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr> </table>	1	0	-1	2	0	-2	1	0	-1	$\frac{1}{4}$	<table border="1"> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>-1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	-1	-2	-1	0	0	0	1	2	1
1	0	-1																				
2	0	-2																				
1	0	-1																				
-1	-2	-1																				
0	0	0																				
1	2	1																				
Frei-Chen	$\frac{1}{2+\sqrt{2}}$	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr> <tr><td>$\sqrt{2}$</td><td>0</td><td>$-\sqrt{2}$</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr> </table>	1	0	-1	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	1	0	-1	$\frac{1}{2+\sqrt{2}}$	<table border="1"> <tr><td>-1</td><td>$-\sqrt{2}$</td><td>-1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>$\sqrt{2}$</td><td>1</td></tr> </table>	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0	0	0	1	$\sqrt{2}$	1
1	0	-1																				
$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$																				
1	0	-1																				
-1	$-\sqrt{2}$	-1																				
0	0	0																				
1	$\sqrt{2}$	1																				

Figura 2.6: Máscaras utilizadas con mayor frecuencia en el cálculo del gradiente en una imagen.

o, simplemente, el máximo de ambos valores

$$G = \max(|G_i|, |G_j|). \quad (2.4)$$

La detección de píxeles del contorno se realiza considerando el valor del gradiente obtenido con las expresiones anteriores. Existen distintos criterios para seleccionar el borde. El más sencillo establece un valor umbral U_G para el módulo del gradiente por encima del cual se considera que el píxel pertenece al contorno. Con este método, el contorno obtenido depende del valor U_G elegido. Valores elevados producen bordes discontinuos, mientras que valores reducidos producen bordes gruesos (de varios píxeles de ancho) que pueden incluir los ruidos. Otro procedimiento posible consiste en buscar los píxeles en los que G es un máximo local, analizando su valor por filas y por columnas.

2.4.3. Detector de Canny

El método de Canny es, rigurosamente hablando, un método de máximo gradiente. Actualmente, es una de las técnicas de detección de contornos más potentes y populares. Canny (1986) diseñó este algoritmo para conseguir una detección de contornos óptima. Para ello plantea tres objetivos: 1) buena detección, el contorno detectado debe incluir todo el borde real y no incluir partes que no pertenezcan a éste; 2) buena localización, la distancia entre el borde detectado y el borde real debe ser lo menor posible; y 3) respuesta única, un borde real sencillo no debe producir un borde detectado múltiple.

Antes de calcular el gradiente y seleccionar qué píxeles pertenecen al borde, el método de Canny reduce la presencia de ruido mediante un suavizado. Posteriormente, se utiliza el operador de Sobel sobre la imagen suavizada para calcular el gradiente. Sólo los píxeles correspondientes a máximos locales del módulo del gradiente son candidatos a pertenecer al contorno. El siguiente paso es establecer dos niveles umbrales de gradiente. Un nivel superior, por encima del cual un píxel directamente se considera parte del contorno; y otro inferior, por debajo del cual se rechaza el píxel como ruido. Los píxeles con gradiente entre los dos umbrales se incluyen en el contorno cuando están en contacto (en la dirección adecuada) con un píxel ya seleccionado para el contorno.

2.4.4. Detector de Laplaciana cero

En la sección 2.3.2 se mencionó que los puntos donde la intensidad es máxima coinciden con los puntos donde se anula la segunda derivada. Dado que la función intensidad I es una función bidimensional se utilizará la laplaciana para el cálculo de la segunda derivada. Ésta se aproxima aplicando una única máscara de dimensiones 3×3 que diferirá si se tienen en cuenta los vecinos que se asientan sobre las diagonales (fig. 2.7a) o no (fig. 2.7b). El valor de la laplaciana es muy sensible al ruido presente en las imágenes, por lo que antes de su aplicación se suavizan las imágenes. Esta operación difumina el borde por lo que se empeora la detección del mismo. Por éste motivo, los detectores de borde basados en el cálculo del gradiente se utilizan con mayor frecuencia que los basados en la segunda derivada.

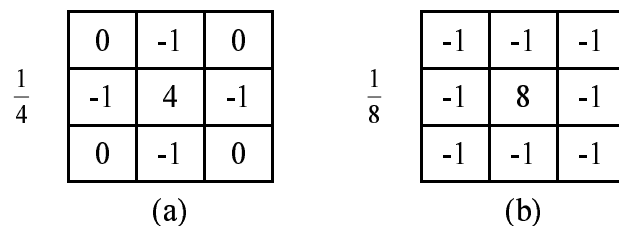


Figura 2.7: Máscaras utilizadas para calcular el valor aproximado de la laplaciana

2.5. Procedimiento de detección de contornos

Las técnicas tipo ADSA detectan el contorno en tres fases. En primer lugar, utilizan una técnica estándar de detección de bordes para obtener un conjunto inicial de píxeles del contorno. En segundo lugar, combinan un criterio de intensidad umbral adaptativo con técnicas de interpolación para determinar con mayor exactitud (a nivel subpíxel) la posición de los puntos del contorno. Por último, realizan un suavizado del perfil obtenido. En el presente trabajo se emplean dos procedimientos distintos para realizar una detección a nivel subpíxel. El primero se basa en la detección de contornos realizada por las técnicas ADSA. El segundo, es una extensión del método de Otsu para nivel subpíxel.

El primer procedimiento realiza una detección en dos etapas y se utiliza cuando la iluminación no es uniforme. Éste es el caso de las imágenes obtenidas en nuestros experimentos que contienen ambos contornos del puente (ver figura 2.8a), en las que la intensidad del fondo no coincide para ambos contornos 2.8. En la primera etapa, se detecta un conjunto de píxeles que probablemente pertenecen al contorno, utilizando la función *edge* que se incluye en el programa MATLAB y que contiene, entre otros, un detector basado en el método de Canny (1986). Concretamente, para una imagen de un puente líquido se obtienen dos conjuntos de píxeles, $\{(i_s, j_s)\}_l$ y $\{(i_s, j_s)\}_r$, que caracterizan los contornos izquierdo y derecho, respectivamente. A continuación, para aumentar la precisión de la localización del contorno al nivel subpíxel, se realiza una interpolación por splines cúbicos y se detecta el borde utilizando un umbral adaptativo (véase la sección 2.4.1). Para cada píxel (i_s, j_s) , perteneciente al contorno detectado con anterioridad, se analiza el perfil de intensidad de gris en un entorno de n píxeles en la misma fila $j = j_s$. La figura 2.8b muestra la intensidad de gris en el entorno del borde correspondiente a la línea de la figura 2.8a. La intensidad de gris varía

desde valores bajos (oscuros) correspondientes al puente, hasta valores elevados (claros) que corresponden al fondo. La variación de la intensidad de gris desde el nivel oscuro al claro se produce a lo largo de varios píxeles. El número n de píxeles del entorno elegido depende del ancho del borde, es decir, del número de píxeles en el que se produce la variación. A nivel subpíxel, el contorno se localiza utilizando un criterio de intensidad umbral local. El nivel umbral U local se calcula como la semisuma de la intensidad de gris media de la zona oscura y la correspondiente de la zona clara. En la figura 2.8b se han marcado los valores de intensidad utilizados para calcular el umbral. Para determinar dónde se alcanza ese nivel de intensidad, se utiliza una interpolación por splines cúbicos en el entorno considerado (línea en la figura 2.8b). El punto (x_s^I, z_s^I) , ($z_s^I = j_s$) donde la intensidad tome el valor umbral se considera parte del contorno detectado a nivel subpíxel.

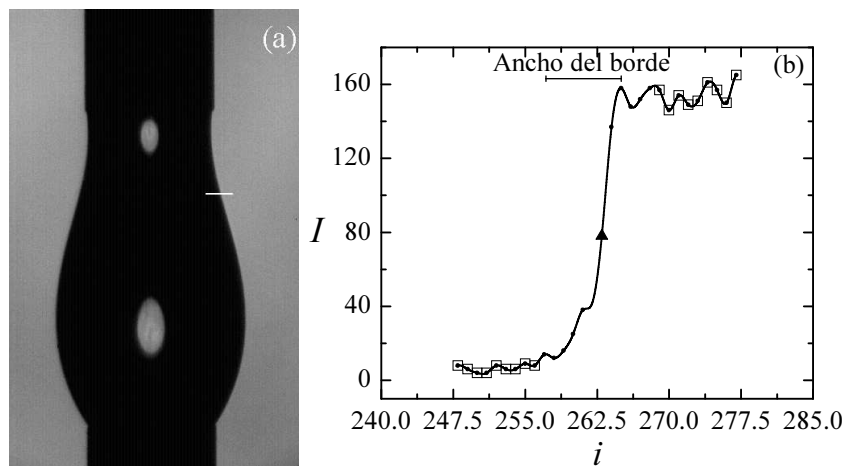


Figura 2.8: Imagen de un puente líquido (a), y perfil de intensidad de grises (b) correspondiente a la línea dibujada en (a). El triángulo indica el píxel proporcionado por el método de Canny. Los puntos se corresponden con los vecinos más próximos a ese píxel. La línea es el resultado de la interpolación por splines cúbicos de los puntos. Los cuadros son los puntos que se utilizan para calcular el valor umbral.

El segundo procedimiento realiza una detección directa a nivel subpíxel y proporciona mejores resultados cuando las imágenes presentan una iluminación uniforme. En primer lugar, determina el valor del umbral global de intensidad mediante la función *graythresh* de MATLAB, que implementa el método de Otsu (Otsu, 1979). Una vez que el valor del umbral ha sido calculado, para cada columna j se identifican los dos píxeles consecutivos

entre los que el valor de la intensidad I cruza el valor umbral. Por último, se interpola linealmente para calcular el punto donde la intensidad toma el valor umbral. Este procedimiento asume que ése es un punto del contorno.

2.6. Calibración del sistema de adquisición de imágenes

La mayoría de los dispositivos de digitalización producen píxeles no cuadrados en la imagen. Es decir, la amplificación en las direcciones horizontal y vertical no es la misma. La relación entre ambas amplificaciones se conoce como *relación de aspecto*, R_a , y es una característica propia del dispositivo utilizado. Por otra parte, las lentes, dependiendo de su calidad y de su curvatura, producen *distorsión* en las imágenes y en el contorno detectado.

Por tanto, la forma y dimensiones del objeto que aparece en la imagen experimental no coinciden con las reales. Las dimensiones varían debido a la amplificación de la cámara; y la forma debido a la relación de aspecto del píxel y a la distorsión producida por la lente. Los efectos producidos por la amplificación y la relación de aspecto del píxel son lineales, es decir, pueden ser representados mediante transformaciones geométricas lineales. La distorsión produce, sin embargo, variaciones no lineales de la forma. Todos estos efectos deben ser calibrados como se describe a continuación.

2.6.1. Procedimiento de calibración

La calibración se realiza tomando una imagen de una rejilla formada por líneas verticales y horizontales separadas una distancia conocida (otros métodos de calibración pueden encontrarse en Cabezas (2005)). La rejilla debe situarse en el plano vertical que coincida, aproximadamente, con el plano meridional del puente líquido. La figura 2.9.a presenta un esquema de la rejilla de calibración y la figura 2.9.b muestra la imagen de la rejilla obtenida en un experimento. La calibración pretende obtener una función que relacione la posición de un punto en la imagen y en la realidad. Por esa razón se define un sistema de referencia asociado a la geometría real y otro a la imagen.

El eje x^G marca la dirección de las líneas horizontales de la rejilla, y el eje z^G la dirección de las líneas verticales. El origen está situado en el vértice superior izquierdo de la rejilla (fig. 2.9.a). El sistema de referencia (x^I, z^I) asociado a la imagen tiene el eje x^I en la dirección horizontal, y z^I en la

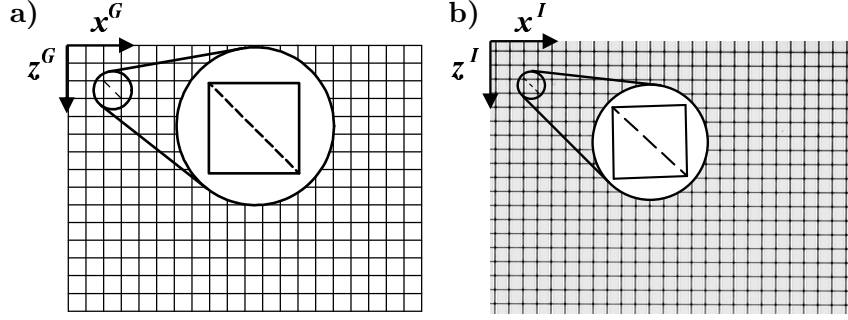


Figura 2.9: a) Rejilla calibrada y sistema de referencia (x^G, z^G) asociado a ella. b) Imagen de la rejilla calibrada y sistema de referencia (x^I, z^I) asociado a ella.

dirección vertical. El origen está situado en la esquina superior izquierda de la imagen (fig. 2.9.b). Tal y como se ha definido este sistema de referencia, coincide con el (i, j) utilizado para referenciar los píxeles en la imagen.

Las líneas de la rejilla y las diagonales dividen el plano en pequeñas celdas triangulares (fig. 2.9). Estas celdas son lo suficientemente pequeñas para que la deformación producida por la cámara en su interior pueda modelarse mediante la transformación lineal

$$\begin{bmatrix} x^I \\ z^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^G \\ z^G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_5 \\ p_6 \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

donde los parámetros $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ son desconocidos. Si se conocen las coordenadas de tres puntos pertenecientes a un triángulo en ambos sistemas de referencia y se sustituyen en la transformación lineal (2.5), se obtiene un sistema de seis ecuaciones que permite calcular los seis parámetros. Los puntos adecuados para realizar este cálculo son los vértices de los triángulos, ya que su posición puede determinarse con gran precisión. La transformación que se obtiene es coherente, ya que la transformada de una línea que separa dos triángulos es la misma independientemente del triángulo que se utilice para calcularla.

Aplicando este procedimiento se determinan los parámetros correspondientes a todos los triángulos de la imagen. Una vez calculados, se define la función $f_{CEC}(x^I, z^I)$ que corrige los efectos producidos por los dispositivos de adquisición de la imagen. Esta función busca el triángulo al que pertenece el punto (x^I, z^I) de la imagen y calcula la posición real del punto

correspondiente

$$\{(x_p^G, z_p^G)\} = f_{\text{CEC}}(\{(x_p^I, z_p^I)\}) . \quad (2.6)$$

En la sección (2.6) se ha explicado cómo se detecta el contorno de un puente líquido en una imagen utilizando las técnicas descritas en la sección 2.4. Mediante la transformación (2.6) se obtiene la posición del contorno en el sistema de referencia asociado a la rejilla (real).

Capítulo 3

VIBRACIÓN AXIAL DE PUENTES LÍQUIDOS ISOTERMOS

3.1. Introducción

Como se ha mencionado en el primer capítulo, el número de estudios experimentales que tratan sobre oscilaciones libres y forzadas de un puente líquido es bastante reducido, probablemente debido a las dificultades técnicas asociadas a la microgravedad. Así, aunque algunos estudios (Langbein *et al.*, 1995; Thiessen *et al.*, 2002; Martínez *et al.*, 2004) se han desarrollado en ambientes reales de gravedad cero, la mayoría de los experimentos se han llevado a cabo en Tierra en condiciones de microgravedad simulada, utilizando la técnica de Plateau-Rayleigh (Sanz, 1985; Sanz y López-Díez, 1989; Perales y Meseguer, 1992; Morse *et al.*, 1996; Zayas *et al.*, 2000; Wei *et al.*, 2005). No obstante, la influencia del baño de líquido en la dinámica del puente líquido ni es despreciable ni fácil de determinar, por lo que impide verificar las predicciones teóricas obtenidas para un puente líquido aislado.

Por otra parte, el análisis experimental de la respuesta dinámica de un puente líquido rodeado de aire en Tierra no es una tarea fácil. Como se ha explicado en la sección 2.1, para que el puente sea estable, el tamaño de los soportes sólidos debe ser muy pequeño. Esto se traduce en una reducción del tiempo característico del puente líquido milimétrico resultante (llamado microzona) a milésimas de segundo. Esto constituye un serio obstáculo si uno está interesado en la vibración forzada o en las oscilaciones libres a alta frecuencia.

El análisis de las oscilaciones lineales acarrea una dificultad adicional: la deformación de la interfase debe ser pequeña y, por lo tanto, cualquier falta de precisión en la detección del contorno del puente líquido conduce a resultados erróneos.

Las oscilaciones libres y forzadas de una microzona han sido estudiadas experimentalmente por Mollot *et al.* (1993) mediante videografía de alta velocidad. En ese trabajo midieron las frecuencias de resonancia y las tasas de amortiguamiento para diversos valores de la esbeltez y del número capilar. A pesar de la limitada resolución de la cámara, obtuvieron medidas precisas de la frecuencia de resonancia, mostrando un buen acuerdo con las predicciones calculadas en la teorías lineal (Tsamopoulos *et al.*, 1992) y no lineal (Chen y Tsamopoulos, 1993). Sin embargo, las imprecisiones cometidas en la determinación de la posición de la entrefase condujeron a resultados erróneos de las tasas de amortiguamiento para líquidos prácticamente no viscosos. En las referencias (Gañán-Calvo y Barrero, 1990; Ahrens *et al.*, 1994; Langbein *et al.*, 1995), se obtuvieron experimentalmente las frecuencias de resonancia de una microzona, y se compararon con los resultados calculados a partir del modelo de Cosserat y de las ecuaciones de Navier-Stokes. El acuerdo fue similar al obtenido por Mollot *et al.* (1993). No existen referencias en las que se comparen las deformaciones experimentales y teóricas de una microzona en oscilación.

En este capítulo, se utiliza una cámara de alta velocidad, junto con la metodología introducida en el capítulo anterior, para analizar experimentalmente las vibraciones axiales de amplitud pequeña en puentes líquidos axisimétricos milimétricos. Básicamente, esto requiere medidas precisas de la fuerza impulsora que actúa sobre el puente líquido, así como de la deformación de la entrefase resultante. La organización del capítulo es la siguiente. El problema se formula en la sección 3.2. El montaje y el procedimiento experimental se presentan en la sección 3.3. El análisis completo de la vibración se describe en la sección 3.4. Por último, se comparan las deformaciones experimentales de la entrefase y las correspondientes a distintos modelos teóricos (sec. 3.5).

3.2. Formulación del problema

La configuración fluida considerada se muestra en la figura 3.1. Consiste en una masa de líquido isoterms con volumen \mathcal{V} , sostenido entre dos agujas coaxiales de radio exterior R separadas una distancia L . El puente líquido está sometido a la acción de una fuerza axial constante (gravedad) de magnitud g_0 por unidad de masa. La densidad del puente líquido es ρ , la viscosidad cinemática es ν , y la tensión superficial asociada a la entrefase es σ . Estas propiedades son uniformes y constantes bajo las condiciones de

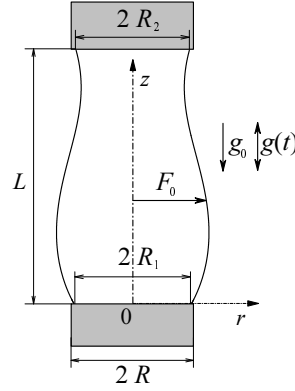


Figura 3.1: Geometría y sistema de coordenadas asociado al puente líquido.

análisis isoterma. El gas circundante tiene densidad y viscosidad despreciables, por lo que no afecta a la dinámica del puente líquido. El contorno en equilibrio de esta configuración axisimétrica se caracteriza mediante la función $F_0(z)$, que mide la distancia entre un elemento de la superficie libre y el eje z del puente líquido.

Por otra parte, se considera que la configuración fluida mencionada vibra, junto con las agujas, a lo largo del eje z . Se asume que las oscilaciones son armónicas de amplitud A ($A > 0$) y velocidad angular ω . Si se elige adecuadamente el origen de tiempos, la componente z de la fuerza inercial por unidad de masa producida por la vibración es $g(t) = A \omega^2 \cos(\omega t)$. El objetivo de este análisis experimental es la medida de la deformación $F(z, t) - F_0(z)$ de la interfase en el régimen periódico, donde la función $F(z, t)$ mide la distancia entre un elemento de la superficie libre y el eje z en el instante t . Como puede verse en el análisis de los experimentos (sec. 3.4.3), las dos líneas de contacto triple que existen en los bordes interiores de las agujas permanecen prácticamente en equilibrio durante la vibración, y sus radios en las agujas inferior y superior son R_1 y R_2 , respectivamente. Además, no existe un movimiento significativo de fluido a través de las agujas, de modo que el volumen \mathcal{V} del puente líquido permanece prácticamente constante.

Si se utilizan $R_0 \equiv 1/2 (R_1 + R_2)$, $t_0 \equiv (\rho R_0^3 / \sigma)^{1/2}$, y ρ como longitud, tiempo y densidad característicos, respectivamente, se obtienen los parámetros adimensionales que caracterizan el problema: la esbeltez $\Lambda \equiv L / (2R_0)$, el volumen reducido $V \equiv \mathcal{V} / \mathcal{V}^*$ (definido como la razón entre el volumen físi-

co \mathcal{V} y el volumen de un cilindro $\mathcal{V}^* = \pi R_0^2 L$ de la misma longitud L y radio igual a R_0), el número de Bond $B_0 \equiv \rho g_0 R_0^2 / \sigma$, el parámetro de diferencia entre los radios de las líneas de contacto $h \equiv (R_2 - R_1) / (R_2 + R_1)$, el número capilar $C_\nu \equiv \nu(\rho/\sigma R_0)^{1/2}$ (definido como la raíz cuadrada del número de Ohnesorge), la amplitud $a \equiv A/R_0$, y la velocidad angular $\Omega \equiv \omega(\rho R_0^3/\sigma)^{1/2}$. Por lo tanto, la deformación de la interfase adimensional $(F - F_0)/R_0$ en el instante t/t_0 depende del conjunto de parámetros $\{\Lambda, V, B_0, h, C_\nu, a, \Omega\}$. Para simplificar, se considera el mismo líquido (agua destilada) y las mismas agujas soporte en todos los experimentos. De esta forma $\{B_0, h, C_\nu\}$ se mantendrán (prácticamente) constantes durante el análisis realizado, y sólo se cambiarán los valores de $\{\Lambda, V, a, \Omega\}$.

3.3. Montaje y procedimiento experimental

3.3.1. Montaje experimental

En la sección 2.2 se ha descrito el montaje experimental general utilizado a lo largo de este trabajo. En los experimentos concernientes a este capítulo no se han utilizado alguno de los elementos descritos en el montaje general. El objetivo utilizado permitía un campo de visión ajustado al puente líquido completo, tanto en reposo como en movimiento, por lo que no fueron necesarios los tornillos micrométricos para desplazar la cámara. La caja de plexiglás tampoco fue necesaria, ya que las oscilaciones forzadas apenas son sensibles a las corrientes de aire en el laboratorio.

La figura 3.2 muestra el puente líquido formado entre las agujas (A) en el interior de la celda (B), y el vibrador electrodinámico (C) que los somete a vibración. El puente líquido está sostenido entre dos agujas de idéntico radio exterior $R = 0.917$ mm. La aguja superior se conecta a una bomba de inyección que permite inyectar y retirar controladamente el líquido utilizado. Además, la aguja puede moverse axialmente para ajustar la longitud del puente líquido. La aguja inferior está fijada a la celda y tiene un extremo cerrado de modo que no tenga lugar ningún movimiento de líquido a través de ella. La celda se ha mecanizado para asegurar que las agujas estén axialmente alineadas con una tolerancia menor de $10 \mu\text{m}$. La celda está encerrada en un compartimento de cristal transparente para evitar tanto la pérdida significativa de volumen del puente líquido, debido a la evaporación, como la contaminación de la interfase durante el experimento. La celda se monta sobre una plataforma conectada a un vibrador electrodinámico. El vibrador

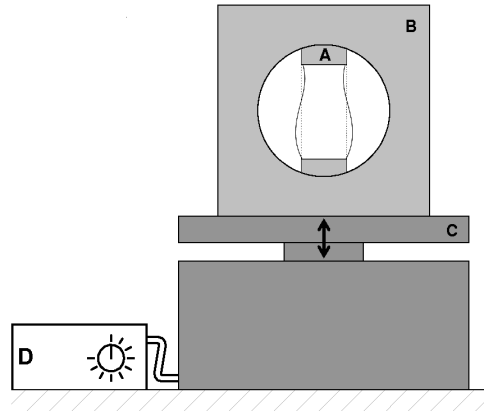


Figura 3.2: Dispositivo experimental: agujas (A), celda del puente líquido (B), plataforma vibrante (C) y amplificador (D)

electrodinámico, que se controla mediante una señal emitida desde un PC debidamente amplificada (D), produce vibraciones armónicas con velocidad angular ω y amplitud A . El valor de ω puede ser seleccionado. Las desviaciones de éste con respecto al valor medido mediante una fuente de luz estroboscópica fueron menores del 0.5 %. La amplitud A se especifica indirectamente seleccionando el voltaje de entrada de la señal. La determinación directa de su valor (que es inferior a 0.15 mm en el experimento) requeriría una meticulosa calibración previa del vibrador. Alternativamente, se pueden obtener medidas precisas tanto de ω como de A a partir de la secuencia de imágenes adquirida durante el experimento. La vibración del puente líquido se graba con la ayuda de una cámara de video de alta velocidad, que toma imágenes con una resolución de 360×570 píxeles. Además, el hecho de que las imágenes del puente líquido en movimiento se tomen en intervalos constantes, permite calcular fácilmente el instante de tiempo $t_i^* = (i - 1)\Delta t^*$ correspondiente a cada imagen i . Sin embargo, $t \neq t^*$ en casi todos los casos ya que el instante de tiempo $t^* = 0$ no coincide necesariamente con un máximo de $g(t)$.

Por otra parte, para que los efectos ópticos producidos por el sistema de adquisición de imágenes sean tenidos en cuenta, éste debe ser calibrado. Para ello, se toman imágenes digitales de una rejilla de calibración y de una plomada al inicio de cada experimento. La rejilla de calibración se sitúa en el plano vertical que coincide aproximadamente con el plano meridional del puente líquido. Para evaluar los efectos ópticos, se define un sistema

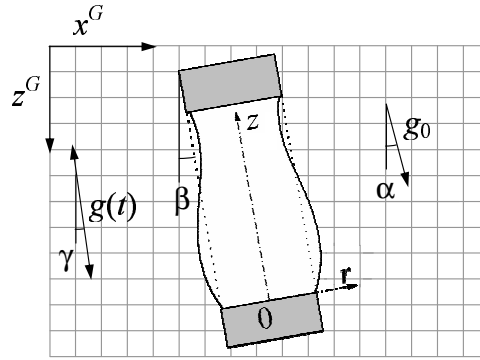


Figura 3.3: Rejilla de calibración, puente líquido y sus sistemas de coordenadas respectivos.

de coordenadas (x^G, z^G) asociado a la rejilla (véase Fig. 3.3). La rejilla está inclinada un ángulo α con respecto a la gravedad. El valor de α se estima analizando la imagen de la plomada. Tanto la rejilla como la plomada se retiran antes de montar la celda del puente líquido en la plataforma vibrante.

Por último, el sistema de coordenadas del puente líquido (r, z) está desplazado y rotado un ángulo β con respecto al sistema de coordenadas de la rejilla (x^G, z^G) . Además, el puente líquido es axisimétrico si z es paralelo a la dirección de la gravedad ($\alpha = \beta$). En caso contrario, el puente líquido no es axisimétrico debido a la contribución lateral de la gravedad. La dirección de vibración forma un ángulo γ con respecto al eje z^G . Para provocar deformaciones axisimétricas, la vibración debe ser paralela al eje del puente líquido ($\beta = \gamma$). En los experimentos, el puente líquido, la plataforma vibrante y la rejilla de calibración se han colocado de forma que los ángulos $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ tomen valores pequeños. En cualquier caso, sus valores se calculan en cada experimento a partir de las imágenes digitales.

3.3.2. Procedimiento experimental

Cada experimento se desarrolla en las siguientes etapas:

1. Se toman imágenes tanto de la rejilla de calibración como de la plomada antes de formar el puente líquido.

2. Se reemplaza la rejilla de calibración y la plomada por la celda del puente líquido en la plataforma vibrante y se inyecta líquido desde la aguja superior para formar un puente líquido entre las agujas.
3. Se graba una imagen digital del puente líquido en reposo.
4. Se vibra el puente líquido y, varios segundos después del comienzo de la vibración, se graba una película de 300 imágenes durante 0.5 s (a una velocidad de 600 imágenes por segundo). Las imágenes de la película se toman en intervalos constantes de tiempo $\Delta t^* \simeq 1.67$ ms y con un tiempo de exposición de 0.27 ms.
5. Se detiene la vibración y se toma una última imagen digital cuando el puente líquido ha vuelto al estado de equilibrio.

En total, se capturan 304 imágenes en cada experimento: una imagen de la rejilla de calibración, una imagen de la plomada, dos imágenes del puente líquido en equilibrio, una antes y otra después de las vibración, y 300 imágenes mostrando la evolución de la entrefase durante el régimen periódico de la vibración.

3.4. Análisis de la vibración

El objetivo de los experimentos descritos en este capítulo es la medida de la deformación de la entrefase $F(z, t) - F_0(z)$ en el régimen periódico. El contorno en equilibrio $F_0(z)$ de un puente líquido axisimétrico puede ser calculado con precisión a partir de la ecuación de Young-Laplace y de las correspondientes condiciones contorno. La técnica TIFA-AI ajusta el valor de la tensión superficial, entre otros parámetros, para calcular la solución de la ecuación de Young-Laplace que mejor se ajusta al perfil del puente líquido que aparece en una imagen. Así, TIFA-AI se utiliza en este trabajo para obtener simultáneamente el valor de la tensión superficial y el contorno $F_0(z)$ a partir de las imágenes del puente líquido en equilibrio.

Debido a la complejidad del problema numérico involucrado, la deformación dinámica de la entrefase $F(z, t)$, no puede ser predicha con el mismo grado de precisión que $F_0(z)$ ni siquiera en el régimen lineal. Por tanto, debe emplearse una estrategia totalmente diferente a la utilizada por TIFA-AI para extraer el contorno de la entrefase $F(z, t)$ de las imágenes de la vibración del puente.

En esta sección se describe el procedimiento utilizado para analizar las imágenes digitales del puente líquido durante la vibración. Este procedimiento consta de cuatro etapas: (i) detección de los contornos que delimitan las agujas y el puente líquido en cada imagen, (ii) cálculo de los parámetros de la vibración $\{\gamma, A, \omega, t\}$ que permiten obtener la fuerza inercial $g(t)$, (iii) cálculo de los parámetros geométricos $\{R, R_1, R_2, L, \beta\}$, y (iv) cálculo de la deformación de la interfase $F(z, t) - F_0(z)$ y del volumen \mathcal{V} del puente líquido en cada imagen.

3.4.1. Detección de los contornos

En la sección 2.3 se han descrito algunos criterios frecuentemente utilizados para localizar bordes en imágenes digitales. En este capítulo, los contornos de las agujas y la interfase en la imagen se detectan utilizando el primer procedimiento descrito en la sección 2.5 dado que la iluminación no es uniforme. Este proceso realiza la detección en dos etapas: primero utiliza el método de Canny para detectar los contornos a nivel píxel, y, posteriormente, utiliza una interpolación por splines cúbicos y un criterio de intensidad umbral local para localizar el contorno a nivel subpíxel. Como resultado proporciona dos conjuntos de píxeles $\{(x_s^I, z_s^I)\}_l$ y $\{(x_s^I, z_s^I)\}_r$ que caracterizan los dos contornos a nivel subpíxel.

A partir de éstos, se obtienen sus coordenadas en el sistema de coordenadas de la rejilla $\{(x_s^G, z_s^G)\}_l$ y $\{(x_s^G, z_s^G)\}_r$ utilizando la transformación lineal obtenida durante la calibración (sec. 2.6) del sistema de adquisición de imágenes. La detección de los contornos se lleva a cabo automáticamente para las dos imágenes del puente líquido en equilibrio y para la secuencia de 300 imágenes adquiridas durante la vibración. La figura 3.4b muestra los conjuntos de puntos $\{(x_s^G, z_s^G)\}_l$ y $\{(x_s^G, z_s^G)\}_r$ obtenidos de la imagen 3.4a mediante el proceso anteriormente descrito.

3.4.2. Cálculo de la fuerza inercial

El puente líquido y las agujas que lo sostienen oscilan con respecto al sistema de adquisición de imágenes. A pesar de que la oscilación de las agujas complica el análisis de las imágenes, permite medir el valor de la fuerza inercial que actúa sobre el puente líquido. Para este fin, se obtiene la trayectoria de un punto fijo (característico) en las agujas, detectando su posición en cada imagen.

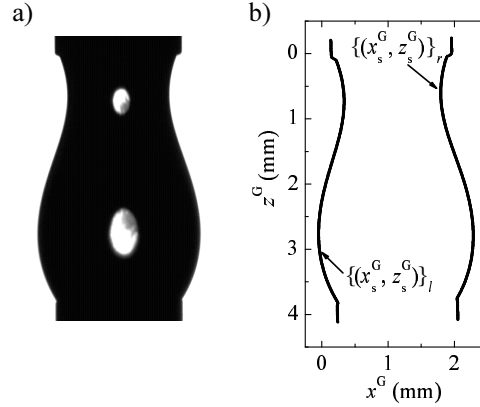


Figura 3.4: Imagen digital de un puente líquido (a) y del conjunto de puntos $\{(x_s^G, z_s^G)\}_l$ y $\{(x_s^G, z_s^G)\}_r$ correspondientes a los contornos detectados (b).

Alrededor de los vértices superiores, existe una pequeña región donde las curvas formadas por $\{(x_s^G, z_s^G)\}_l$ y $\{(x_s^G, z_s^G)\}_r$ toman formas similares en cualquier instante de tiempo, e independientemente de los valores de los parámetros que caracterizan el problema. La figura 3.5 muestra los puntos que pertenecen a esta región en la parte izquierda del contorno del puente líquido de la figura 3.4a. Puede observarse un primer intervalo (Intervalo I) donde x_s^G fluctúa alrededor de una línea, prácticamente vertical, que corresponde al contorno de la aguja, y un segundo intervalo (Intervalo II) donde x_s^G aumenta monótonamente, que debe corresponder a la sombra de la aguja o a la interfase del puente líquido. Este comportamiento se observa en todas las imágenes analizadas. Se asume que el último punto del Intervalo I y el primer punto del Intervalo II (véase la figura 3.5) delimitan un punto fijo (característico) de la aguja. Este punto característico probablemente corresponde al vértice de la aguja, aunque esto no sea importante en este momento. Por tanto, es posible obtener la trayectoria de este punto característico y utilizarla para calcular la fuerza inercial.

Se ha diseñado un algoritmo para la detección automática de los puntos característicos. El algoritmo, que combina técnicas simples de ajuste e interpolación, detecta los dos intervalos mencionados anteriormente en cada imagen de una secuencia, y encuentra los puntos característicos obviando las fluctuaciones de longitud de onda tanto corta como larga que aparecen en el Intervalo I. De esta forma proporciona, a nivel subpíxel, las posiciones (x_l^G, z_l^G) y (x_r^G, z_r^G) de los puntos característicos correspondientes a los

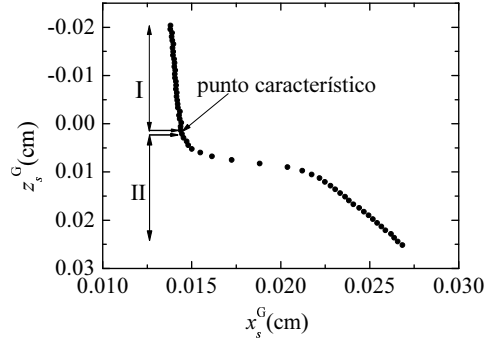


Figura 3.5: Contorno izquierdo del puente líquido junto a la aguja superior. Pueden identificarse dos intervalos: Intervalo I donde x_s^G fluctúa alrededor de una línea prácticamente vertical, y el Intervalo II donde x_s^G aumenta monótonamente.

contornos izquierdo y derecho, respectivamente.

La figura 3.6 muestra las coordenadas z_l^G y z_r^G en función del tiempo. Si se asume que el movimiento es realmente una oscilación armónica, los puntos deberían encontrarse en curvas armónicas. Debido a la incertidumbre en la determinación de los puntos característicos, existen puntos *anómalos* que se desvían claramente de las curvas armónicas. Estos puntos se ignoran para poder calcular con precisión la fuerza inercial $g(t)$. Para ello, se analiza la distancia vertical $\Delta z^G \equiv z_l^G - z_r^G$ entre los dos puntos característicos. Obviamente, $\Delta z^G \equiv z_l^G - z_r^G$ debería permanecer constante durante la vibración (ver Fig. 3.3). Como puede observarse en la figura 3.6c, Δz^G fluctúa alrededor del valor promedio $\langle \Delta z^G \rangle$ indicado por la línea sólida. Después de analizar varias alternativas para rechazar los puntos anómalos, se consideran como tales aquéllos para los que $|\Delta z^G - \langle \Delta z^G \rangle| > \delta |\langle \Delta z^G \rangle|$. Posteriormente, se explica como se determina el valor de δ .

En la sección 3.3 se ha explicado que la dirección de la vibración forma un ángulo γ con respecto al eje z^G (ver figura. 3.3). Así, una vez eliminados los puntos anómalos, las posiciones de los puntos característicos deben situarse en una línea recta. A continuación, se procede a realizar sendos ajustes a los conjuntos de puntos $\{(x_l^G, z_l^G)\}$ y $\{(x_r^G, z_r^G)\}$ y se obtiene el valor de γ a partir de las pendientes de las rectas de ajuste. La figura 3.7 muestra la posición $\{(x_l^G, z_l^G)\}$ del punto característico izquierdo durante la vibración en un experimento (puntos), y la dirección de la vibración (línea continua). Es preciso notar que la aparente dispersión en el eje x^G se debe a la diferencia

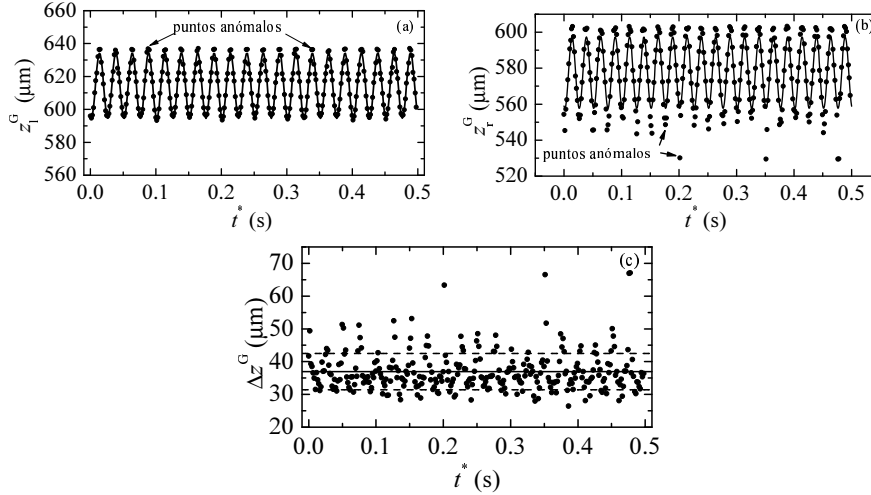


Figura 3.6: Coordenadas z_l^G (a) y z_r^G (b), y su diferencia Δz^G (c) en función del tiempo. En las gráficas (a) y (b) las líneas sirven de ayuda visual. En la gráfica (c), la línea sólida indica el valor medio $\langle \Delta z^G \rangle$, mientras que las líneas discontinuas indican el intervalo $|\Delta z^G - \langle \Delta z^G \rangle| < \delta |\langle \Delta z^G \rangle|$ para $\delta = 0.15$.

entre las escalas de los ejes. Para ilustrar este cálculo se ha considerado un valor elevado de γ ($\gamma = 3.82^\circ$). En todos los experimentos que se analizan en la sección 3.5, γ es menor que 2° . La razón $|\gamma - \alpha|/(90^\circ - |\gamma - \alpha|)$ indica la magnitud de la componente lateral con respecto a la componente axial de la fuerza inercial debida a la vibración. Esta cantidad es siempre menor que 0.016.

Una vez calculado el valor de γ , se define un nuevo sistema de coordenadas (x^R, z^R) donde el eje z^R coincide con la dirección de vibración (ver figura 3.7). A continuación, se obtienen las coordenadas de los puntos característicos $\{(x_l^R, z_l^R)\}$ y $\{(x_r^R, z_r^R)\}$ en el sistema de referencia rotado (x^R, z^R) a partir de los puntos $\{(x_l^G, z_l^G)\}$ y $\{(x_r^G, z_r^G)\}$, respectivamente. Como era de esperar, los dos conjuntos de datos $\{(t^*, x_l^R)\}$ y $\{(t^*, x_r^R)\}$ fluctúan alrededor de cero, mientras que $\{(t^*, z_l^R)\}$ y $\{(t^*, z_r^R)\}$ siguen aproximadamente oscilaciones armónicas. La magnitud de las fluctuaciones es mucho menor que la amplitud de las oscilaciones.

Los conjuntos de datos $\{(t^*, z_l^R)\}$ y $\{(t^*, z_r^R)\}$ se analizan para deducir el valor de la fuerza inercial $g(t)$. Se utiliza un procedimiento de regresión no lineal estándar para encontrar el ajuste por mínimos cuadrados de los

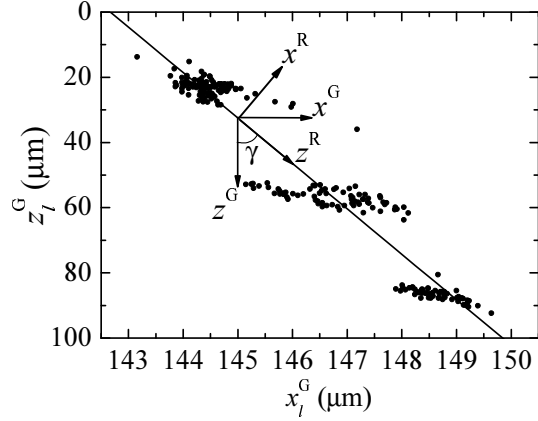


Figura 3.7: Coordenadas $\{(x_l^G, z_l^G)\}$ del punto característico izquierdo (puntos), dirección de vibración (línea continua), cálculo de γ ($\gamma = 3.82^\circ$), y sistema de coordenadas rotado (x^R, z^R) .

conjuntos de datos $\{(t^*, z_l^R)\}$ y $\{(t^*, z_r^R)\}$ al modelo $z^R(t^*) = A \cos[\omega(t^* - t_0^*)] + A_0$ ($A > 0$). La cantidad Δ_l (Δ_r) es la distancia media entre las coordenadas $\{z_l^R\}$ ($\{z_r^R\}$) del punto característico izquierdo (derecho) y los valores dados por el ajuste en los correspondientes instantes de tiempo. Esta cantidad mide la calidad de dicho ajuste. Para cada vibración, se calculan $\{A, \omega, t_0^*, A_0, \Delta_l\}$ a partir de $\{(t^*, z_l^R)\}$ y $\{(t^*, z_r^R)\}$ y para varios valores de δ . El ajuste óptimo es el que conduce al valor mínimo Δ_{\min} de Δ_l y Δ_r . Ese ajuste se utiliza para calcular la amplitud A y frecuencia ω de la vibración.

La tabla 3.1 muestra los distintos valores de la amplitud A y la velocidad angular ω correspondientes a los dos puntos característicos de un experimento en función de δ . También se muestra el número N de puntos restantes después de eliminar los anómalos. La velocidad angular ω prácticamente coincide con el valor esperado $\omega = 219.9$ rad/s (35 Hz) en todos los casos. Existen discrepancias entre las dos amplitudes calculadas a partir de los dos puntos característicos. El ajuste óptimo se obtiene para $\delta = 0.2$ ($\Delta_{\min} = 2.7$ μm) y proporciona los valores de A , ω , y t en el experimento. La figura 3.8 muestra este ajuste óptimo y el conjunto de puntos utilizado para calcularlo. Se observa que varios puntos anómalos no se han filtrado mediante el procedimiento anteriormente mencionado. La figura 3.9 presenta unos resultados excelentes obtenidos en un experimento en el que $\Delta_{\min} = 3.2$ μm . El valor máximo de Δ_{\min} en los distintos experimentos que se presentan en la sección 3.5 es 1.8 μm . Además, y dado que el tamaño del pixel es aproximadamente

δ	punto izquierdo			punto derecho			N
	A (μm)	ω (rad/s)	Δ_l (μm)	A (μm)	ω (rad/s)	Δ_r (μm)	
1	36.3	219.2	7.1	40.3	219.6	3.7	300
0.3	35.3	219.3	6.1	40.1	219.1	2.9	277
0.25	35.3	219.3	5.8	40.2	219.2	2.9	269
0.2	35.3	219.3	5.4	39.7	219.3	2.7	240
0.15	36.2	219.9	4.7	39.3	219.9	3.6	170
0.1	39.0	219.8	4.0	40.6	219.9	3.6	99
0.05	41.5	219.9	2.7	42.0	219.9	2.8	46

Tabla 3.1: Amplitud A , velocidad angular ω , y distancias promedio Δ_l y Δ_r correspondientes a los dos puntos característicos para varios valores de δ . También se muestra el número N de puntos restantes después de quitar los anómalos.

11 μm , se puede afirmar que la detección de los puntos característicos se desarrolla con éxito a nivel subpíxel.

En todos los casos que se analizan, a excepción del experimento con mayor frecuencia (100 Hz) donde $A = 3.25 \mu\text{m}$ y $\Delta_{\min}/A = 0.17$, la razón Δ_{\min}/A es menor que 0.08, lo que constituye un resultado satisfactorio.

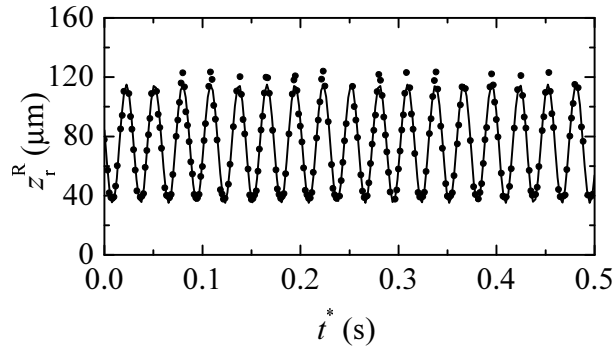


Figura 3.8: Ajuste óptimo y conjunto de puntos utilizado para calcularlo correspondientes al experimento analizado en la Tabla 3.1.

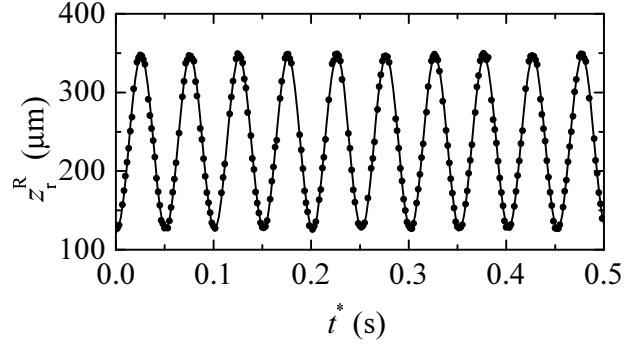


Figura 3.9: Ajuste óptimo y conjunto de puntos utilizado para calcularlo.

3.4.3. Cálculo de los parámetros geométricos y de la línea de contacto triple

En la sección 3.4.1, se ha descrito el método utilizado para obtener los conjuntos de puntos $\{(x_s^G, z_s^G)\}_l$ y $\{(x_s^G, z_s^G)\}_r$ que caracterizan los contornos izquierdo y derecho del puente líquido y las agujas. En esta sección, se explica un procedimiento para calcular los parámetros geométricos R , L , y β , y los radios R_1 y R_2 de las líneas de contacto triple a partir de esos conjuntos de datos. En primer lugar, se calculan los cuatro vértices que delimitan las agujas. Para la aguja superior, se asume que los vértices son los puntos característicos calculados como se ha descrito en la sección previa. Los vértices de la aguja inferior se estiman utilizando un procedimiento similar. En este caso, la interfase forma un menisco muy pequeño junto a los vértices y requiere un análisis específico, ya que puede conducir a errores en su determinación. Una vez se han estimado las posiciones de los cuatro vértices, se busca el rectángulo que mejor se ajusta a ellos. Los vértices de este rectángulo constituyen el resultado buscado. A partir de estos vértices se calcula fácilmente el radio exterior R de las agujas y la longitud del puente líquido L . La orientación del rectángulo nos permite obtener el ángulo β . La figura 3.10 muestra los resultados de un experimento. Los valores de R , L y β fluctúan alrededor de sus valores promedio, siendo las desviaciones típicas inferiores al 0.015 %, 0.64 % y 5.17 % de los mismos, respectivamente. Los valores promedio se consideran los verdaderos para todas las imágenes en un experimento. En todos los experimentos, β es menor que 0.62° . La razón $|\beta - \alpha|/(90^\circ - |\beta - \alpha|)$, que indica la magnitud de la gravedad lateral con respecto a la gravedad axial, es menor que 5.2×10^{-3} en todos los

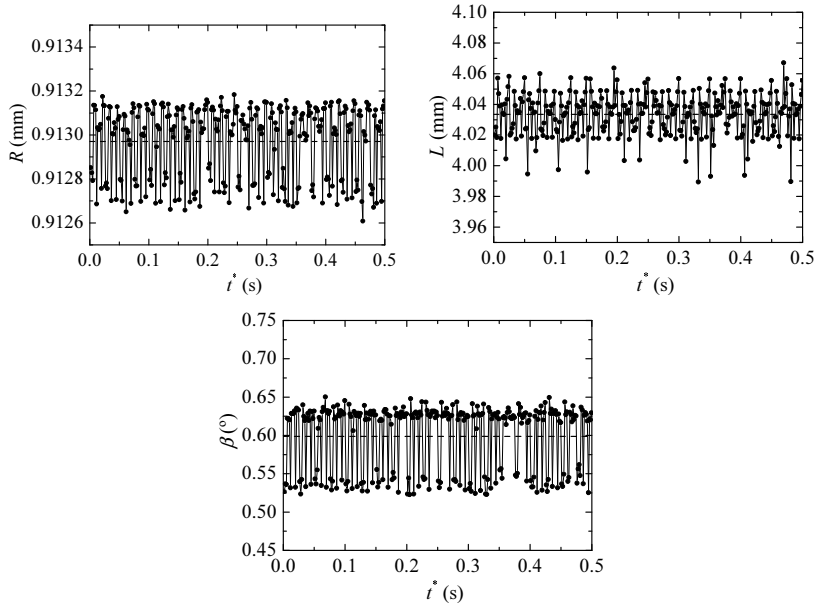


Figura 3.10: R , L , y β obtenidos en función del tiempo

experimentos.

Por otra parte, la posición y la orientación del rectángulo permite localizar el sistema de coordenadas (r, z) del puente líquido en el sistema de coordenadas (x^G, z^G) de la rejilla (ver figura 3.3).

La figura 3.11 muestra una ampliación del contorno izquierdo cerca del vértice de la aguja superior. Se indica la posición del vértice y del rectángulo utilizado para calcularla. Como puede observarse, la sombra del borde de la aguja en el líquido impide determinar con precisión la posición de la línea de contacto triple. Esta dificultad se supera siguiendo un análisis geométrico simple. Se toma un subconjunto de 20 puntos $\{(x_s^G, z_s^G)\}_l$ de la entrefase muy próximos al vértice y que no pertenezcan a la sombra. A continuación se ajustan a una parábola y se asume que la intersección entre la extrapolación de la parábola y el lado del rectángulo que une los dos vértices de la aguja pertenece a la línea de contacto triple. Este cálculo se ilustra en la figura 3.11 donde la parábola se desvía significativamente del contorno de la sombra. Este hecho confirma que la sombra no pertenece a la entrefase.

Debe puntualizarse que esta sombra también se observa en las imágenes

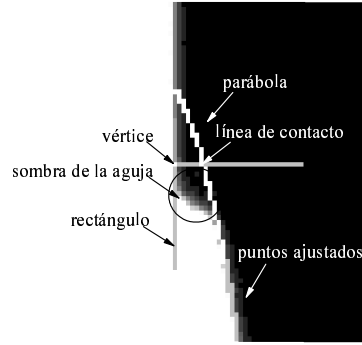


Figura 3.11: Cálculo de la posición del vértice de la aguja y de la línea de contacto triple.

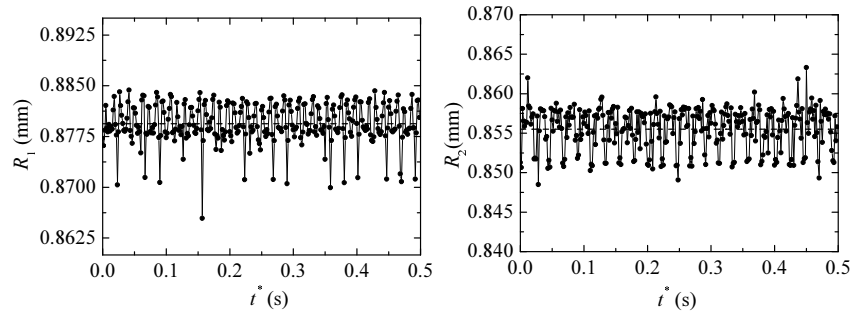


Figura 3.12: R_1 y R_2 en función del tiempo. Las líneas discontinuas indican los valores promedio.

del puente líquido en equilibrio procesadas por TIFA-AI. En este caso, no se considera la región próxima a la misma en el cálculo de los parámetros de optimización.

La figura 3.12 muestra la evolución temporal de los radios de las líneas de contacto durante una vibración. Las cantidades R_1 y R_2 fluctúan ligeramente (la desviación típica es menor que $3 \mu\text{m}$) alrededor de los valores promedio 0.879 mm y 0.856 mm, respectivamente, de modo que las líneas de contacto permanecen prácticamente en equilibrio. Estos valores promedio se consideran como los valores verdaderos, y prácticamente coinciden en todos los experimentos analizados. Las pequeñas diferencias observadas entre R_1 y R_2 pueden deberse a la acción de la gravedad, que modifica la línea de anclaje.

3.4.4. Cálculo de la deformación de la interfase y del volumen

Una vez se han calculado las líneas de contacto, los puntos situados entre ellas son los puntos que pertenecen a los contornos izquierdo y derecho del puente líquido. A continuación se obtienen las posiciones de los puntos en el sistema de coordenadas (r, z) asociado al puente líquido. Por último, se obtienen las funciones $F_l(z)$ y $F_r(z)$ dentro del intervalo $[0 \leq z \leq L]$ mediante interpolación lineal. Los volúmenes axisimétricos \mathcal{V}_l y \mathcal{V}_r encerrados por $F_l(z)$ y $F_r(z)$, respectivamente, se calculan por cuadratura Gaussiana. El valor verdadero de \mathcal{V} considerado en cada instante es el promedio $(\mathcal{V}_l + \mathcal{V}_r)/2$. Siguiendo el mismo procedimiento, se obtienen los contornos de equilibrio $F_{0(l,r)}^{(1,2)}(z)$ y los volúmenes $\mathcal{V}_{0(l,r)}^{(1,2)}$ encerrados por ellos. En este caso, los subíndices l y r se refieren a los contornos izquierdo y derecho, respectivamente, mientras que los superíndices 1 y 2 corresponden a las imágenes de equilibrio tomadas antes y después de la vibración, respectivamente.

La figura 3.13 muestra la evolución temporal de \mathcal{V}_l y \mathcal{V}_r durante la vibración. Como puede observarse, dichas cantidades fluctúan alrededor de sus valores promedios, siendo las desviaciones típicas inferiores al 0.15 % de dichos valores. Esto confirma que no existe ni evaporación ni un flujo significativo a través de las agujas durante la vibración. La figura también muestra los valores de los volúmenes $\mathcal{V}_{0(l,r)}^{(1,2)}$ encerrados en los contornos correspondientes al equilibrio $F_{0(l,r)}^{(1,2)}(z)$. En este caso se produce una evaporación de un 1 % del volumen del puente líquido entre los instantes de tiempo en los que se toman las imágenes de equilibrio durante el experimento. Además, las discrepancias entre los volúmenes obtenidos para los contornos izquierdo y derecho son de un 1 % tanto para las imágenes en equilibrio como para las dinámicas. Se ha verificado que estas pequeñas discrepancias no sólo se deben a perturbaciones no axisimétricas asociadas a deficiencias en el montaje experimental (como la componente lateral de las fuerzas que actúan sobre el puente líquido y la excentricidad entre las agujas), sino también a deficiencias en la localización del sistema de coordenadas del puente líquido (r, z) en cada imagen.

El objetivo de nuestro análisis es obtener la pequeña deformación de la interfase $F(z) - F_0(z)$ con respecto al contorno en equilibrio $F_0(z)$ en función del tiempo. Debido a que los contornos $F(z)$ y $F_{0(l,r)}^{(1,2)}(z)$ se calculan utilizando el mismo procedimiento, se espera que los pequeños errores cometidos en la localización del sistema de coordenadas (r, z) se cancelen prácticamente entre sí cuando se calcula la diferencia $F - F_0$. Además, también pueden

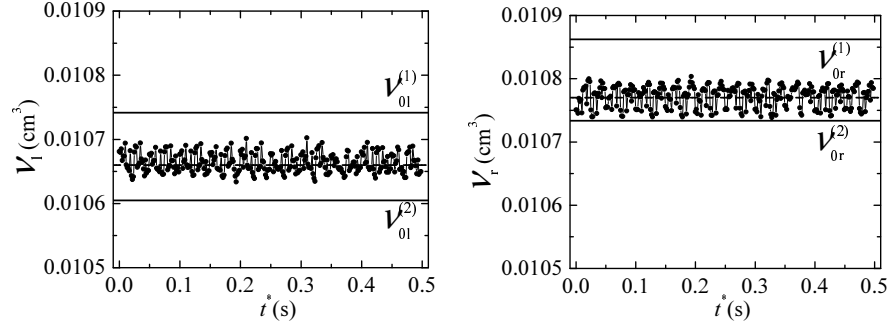


Figura 3.13: Evolución temporal de \mathcal{V}_l y \mathcal{V}_r durante la vibración. Las líneas discontinuas indican los valores promedio, mientras que las continuas corresponden a los volúmenes $\mathcal{V}_{0(l,r)}^{(1,2)}$ encerrados por los contornos en equilibrio.

compensarse parcialmente los posibles errores sistemáticos en el cálculo a nivel subpíxel de F y F_0 .

Por otra parte, es necesario puntualizar que debido a que $|F - F_0| \ll F_0$, cualquier pequeño error en el cálculo de F_0 conduce a resultados no válidos para $F - F_0$. Como se muestra en la figura 3.13, los volúmenes $\mathcal{V}_{0(l,r)}^{(1,2)}$ encerrados por $F_{0(l,r)}^{(1,2)}(z)$ no coinciden con los volúmenes $\mathcal{V}_{(l,r)}$ encerrados por $F_{(l,r)}(z)$ debido a que se miden en distintos instantes de tiempo. Para eliminar este problema, se calculan mediante interpolación lineal los contornos de equilibrio izquierdo y derecho $F_{0(l,r)}(z)$ a partir de $F_{0(l,r)}^{(1,2)}(z)$, es decir,

$$F_{0(l,r)}(z) = \frac{\mathcal{V}_{(l,r)} - \mathcal{V}_{0(l,r)}^{(2)}}{\mathcal{V}_{0(l,r)}^{(1)} - \mathcal{V}_{0(l,r)}^{(2)}} F_{0(l,r)}^{(1)}(z) + \frac{\mathcal{V}_{0(l,r)}^{(1)} - \mathcal{V}_{(l,r)}}{\mathcal{V}_{0(l,r)}^{(1)} - \mathcal{V}_{0(l,r)}^{(2)}} F_{0(l,r)}^{(2)}(z). \quad (3.1)$$

A modo de resumen, diremos que las magnitudes involucradas en el problema son $\{\mathcal{V}, \sigma, \rho, \nu, R_1, R_2, L, g_0, A, \omega, t, z, F_{(l,r)}, F_{0(l,r)}\}$. Sólo se consideran como conocidos *a priori* $\{\rho, \nu, g_0\}$, mientras que el resto de los parámetros se calculan con el método descrito en esta sección y con la técnica TIFA-AI. El algoritmo diseñado procesa automáticamente, durante 60 minutos en un ordenador con procesador *Pentium* 2.8 MHz, la secuencia de 304 imágenes resultado de un experimento. La figura 3.14 presenta un diagrama con las distintas etapas del cálculo junto con los parámetros obtenidos.

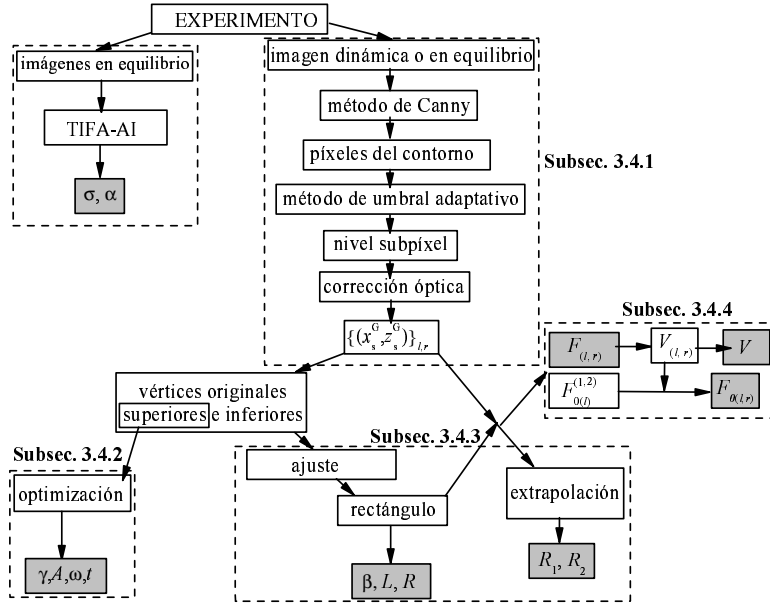


Figura 3.14: Diagrama del procedimiento empleado para analizar tanto las imágenes en equilibrio como las dinámicas.

3.5. Resultados

Hemos llevado a cabo experimentos para analizar la vibración de una microzona axisimétrica. Como se ha mencionado en la sección 3.2, la deformación adimensional instantánea $(F - F_0)/R_0$ de la interfase depende de z/R_0 y t/t_0 , así como del conjunto de parámetros adimensionales $\{\Lambda, V, B_0, h, C_\nu, a, \Omega\}$. En todos los experimentos se ha considerado el mismo líquido (agua destilada) y las mismas agujas soporte. De esta forma, $\{B_0, h, C_\nu\}$ se han mantenido (prácticamente) constantes y sólo se han variado los valores de $\{\Lambda, V, a, \Omega\}$.

Entre las distintas posibilidades (aceites de silicona, agua y ciclohexano), se ha elegido agua destilada ($\rho = 995 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1.005 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) como líquido de trabajo porque es el que mejor ancla a las agujas soporte. Sin embargo, el uso de agua destilada puede conducir a resultados erróneos porque: (i) el valor de la tensión superficial es extremadamente sensible a la contaminación que se produce durante la realización del experimento y en la manipulación previa del líquido; y (ii) esta contaminación puede afectar a su

comportamiento dinámico (Henderson y Miles, 1994; Nicolás y Vega, 2000b). La primera dificultad se ha superado utilizando TIFA-AI, que proporciona el valor de la tensión superficial en el experimento sin recurrir a manipulaciones adicionales. El segundo obstáculo puede ser importante en otros fenómenos, como el amortiguamiento de oscilaciones libres (Henderson y Miles, 1994; Nicolás y Vega, 2000b), pero no se espera que juegue un papel relevante en la evolución de la interfase debida a oscilaciones forzadas.

Los resultados experimentales se han comparado con tres aproximaciones teóricas para el régimen lineal: (i) el modelo de Cosserat para puentes líquidos viscosos axisimétricos y esbeltos (Perales y Meseguer, 1992; Montanero, 2003a), (ii) las ecuaciones de Euler para puentes líquidos axisimétricos no viscosos ($C_\nu = 0$) con cualquier esbeltez (Tsamopoulos *et al.*, 1992; Montanero, 2004a), y (iii) las ecuaciones de Navier-Stokes para puentes líquidos viscosos cilíndricos ($V - 1 = B_0 = h = 0$) de esbeltez arbitraria (Nicolás y Vega, 2000a). Los resultados de los tres modelos se han obtenido en el dominio de frecuencias para el régimen periódico. Montanero (2003a, 2004a) ha resuelto numéricamente las ecuaciones de Cosserat y Euler para puentes líquidos axisimétricos. Los resultados de las ecuaciones de Navier-Stokes se calcularon a partir de un método semianalítico (Nicolás y Vega, 2000a).

Las figuras 3.15 y 3.16 muestran la deformación de la interfase obtenida en diferentes experimentos y sus correspondientes predicciones teóricas. Los valores de los parámetros que caracterizan la configuración fluida se muestran en la tabla 3.2. La tabla 3.3 proporciona los valores de las dos primeras frecuencias de resonancia Ω_1 y Ω_2 (que corresponden a los modos (2,0) y (3,0), respectivamente) obtenidas a partir de las ecuaciones de Euler (Tsamopoulos *et al.*, 1992; Montanero, 2004a) para los puentes líquidos considerados en esas figuras. Como puede apreciarse, la magnitud de las fluctuaciones es menor que el tamaño del píxel (alrededor de $11 \mu\text{m}$) en todos los casos analizados, lo que demuestra que el contorno fue detectado a nivel subpíxel. Además, las deformaciones izquierda y derecha se superponen (dentro de las fluctuaciones), lo que constituye una prueba exigente de la precisión de todo el procedimiento experimental.

Las capas límites viscosas oscilantes situadas cerca de los discos soporte y de la interfase son de gran importancia, incluso en líquidos prácticamente no viscosos, para explicar fenómenos como el amortiguamiento de las oscilaciones libres (Mollot *et al.*, 1993; Nicolás y Vega, 2000a). Los efectos viscosos también explican el notable incremento de las frecuencias de resonancia en puentes líquidos cortos o próximos a los límites de estabilidad (Montane-

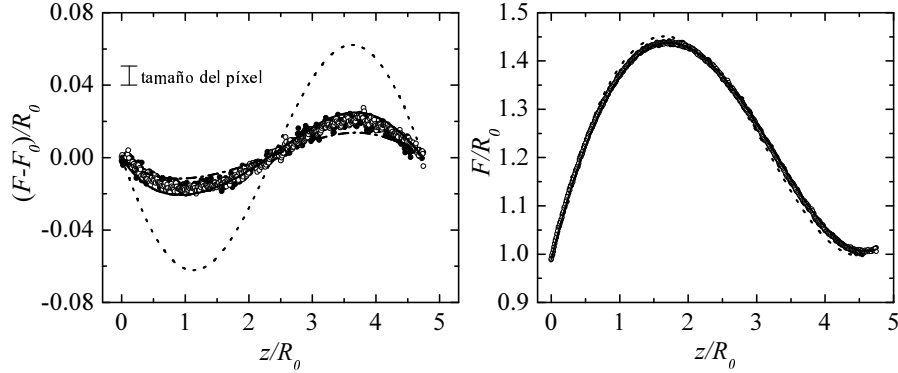


Figura 3.15: Deformación de la interfase (gráfico izquierdo) y contorno del puente líquido (gráfico derecho) para los parámetros especificados en la tabla 3.2. Los símbolos corresponden a los resultados experimentales de los contornos izquierdo (\bullet) y derecho (\circ). En el gráfico izquierdo, las líneas se corresponden con las predicciones teóricas obtenidas a partir del modelo de Cosserat (línea continua), las ecuaciones de Euler (línea discontinua), las ecuaciones de Navier-Stokes para puentes líquidos cilíndricos (línea de puntos), y la solución cuasiestática de las ecuaciones de Euler (línea de puntos y rayas). En la gráfica derecha, las líneas continuas y discontinuas corresponden a los resultados de Cosserat y de Euler, respectivamente, mientras que la línea de puntos muestra el contorno de equilibrio. Las líneas continua y discontinua se superponen en ambas gráficas.

	R_0 (mm)	t_0 (ms)	Λ	V	B_0	$h \times 10^2$	$C_\nu \times 10^3$	$a \times 10^2$	Ω	$\frac{t}{t_0} \times \frac{2\Omega}{\pi}$
Fig. 3.15	0.896	3.11	2.37	1.57	0.106	1.01	3.88	4.96	0.391	1.95
Fig. 3.16a	0.889	3.07	2.54	1.64	0.104	0.854	3.87	4.30	0.385	2.34
Fig. 3.16b	0.891	3.34	2.27	0.950	0.122	0.905	4.20	3.61	0.587	3.80
Fig. 3.16c	0.897	3.14	2.37	1.44	0.108	1.10	3.90	2.53	0.691	0.115, 2.17
Fig. 3.16d	0.891	3.11	2.54	1.50	0.106	0.901	3.92	2.28	0.782	0.702
Fig. 3.16e	0.887	3.24	2.27	1.07	0.116	0.545	4.12	2.40	0.815	2.02, 3.89
Fig. 3.16f	0.903	3.25	2.36	1.23	0.115	1.32	3.99	0.360	2.04	0.216

Tabla 3.2: Valores de los parámetros que caracterizan las configuraciones fluidas consideradas en las figuras 3.15 y 3.16. Notese, que si $t/t_0 \times 2\Omega/\pi$ toma un valor entero, entonces los valores impares (pares) corresponden a un valor máximo (cero) de la magnitud de $g(t)$.

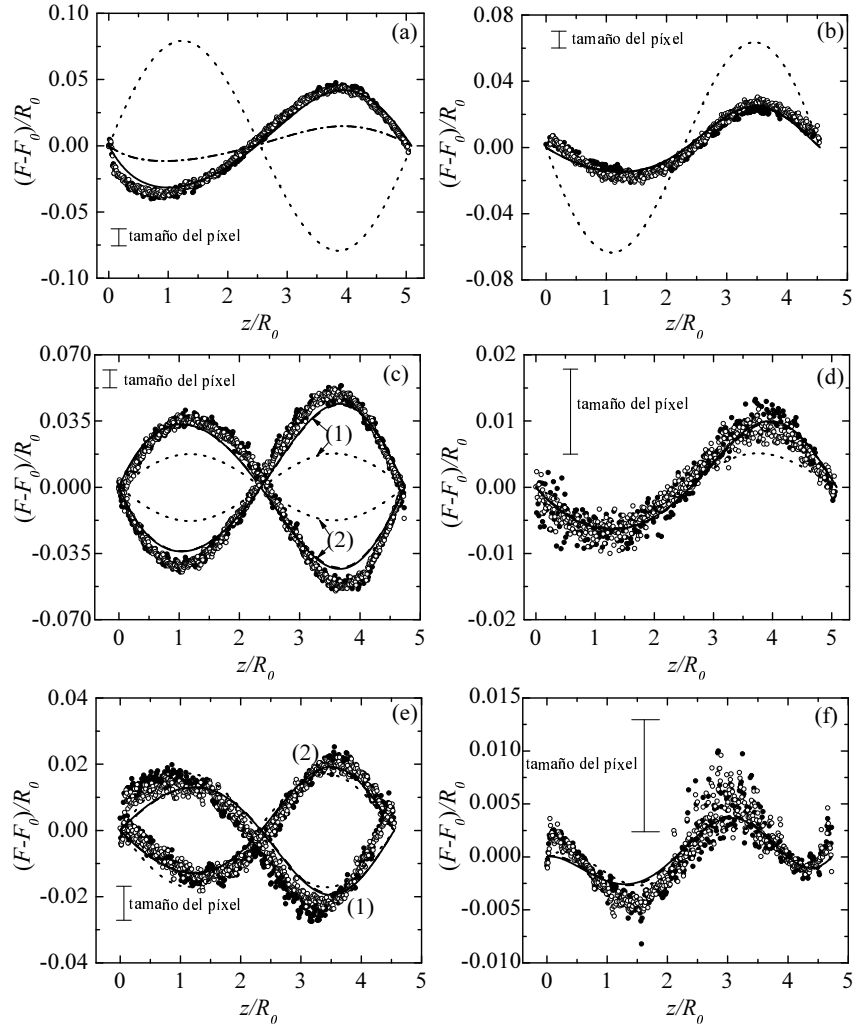


Figura 3.16: Deformación de la interfase para los parámetros especificados en la tabla 3.2. Los símbolos corresponden a los resultados experimentales de los contornos izquierdo (\bullet) y derecho (\circ). Las líneas se corresponden con las predicciones teóricas obtenidas a partir del modelo de Cosserat (línea continua), las ecuaciones de Euler (línea discontinua), las ecuaciones de Navier-Stokes para puentes líquidos cilíndricos (línea de puntos), y la solución cuasiestática a las ecuaciones de Euler (línea de puntos y rayas de la gráfica (a)). Las líneas continua y discontinua prácticamente se superponen. En la gráfica (c) los resultados (1) y (2) corresponden a $t/t_0 \times 2\Omega/\pi = 0.115$ y 2.17 , respectivamente, mientras que en la gráfica (e) corresponden a $t/t_0 \times 2\Omega/\pi = 2.02$ y 3.89 , respectivamente.

	Fig. 3.15	Fig. 3.16a	Fig. 3.16b	Fig. 3.16c	Fig. 3.16d	Fig. 3.16e	Fig. 3.16f
Ω_1	0.588	0.490	0.348	0.556	0.449	0.478	0.486
Ω_2	1.65	1.41	1.40	1.62	1.39	1.58	1.54

Tabla 3.3: Primeras dos frecuencias de resonancia procedentes de las ecuaciones de Euler para los puentes líquidos considerados en las figuras 3.15 y 3.16.

ro, 2007). No obstante, las ecuaciones de Cosserat y Euler proporcionan virtualmente las mismas predicciones en todos los casos considerados en las figuras 3.15 y 3.16. Esto indica que los efectos asociados a la viscosidad y a la componente radial del momento pueden ser despreciados en las condiciones experimentales consideradas en este trabajo y, por tanto, ambas aproximaciones conducen a resultados precisos. Además, los efectos no lineales pueden ser despreciados porque la amplitud de la deformación es menor que $0.05R_0$ en todos los experimentos. Por lo tanto, las predicciones de Cosserat y Euler pueden considerarse en este análisis como una referencia para validar las medidas experimentales. Como puede observarse, las discrepancias entre los resultados teóricos y experimentales son menores que el tamaño de un píxel. Estas pequeñas discrepancias pueden deberse a efectos no lineales (prácticamente despreciables), a deficiencias en el montaje experimental (como la excentricidad entre las agujas o la componente lateral tanto de la gravedad como de la fuerza inercial) y a las limitaciones inherentes a la técnica de procesamiento de imágenes.

Las líneas de puntos en las figuras muestran las predicciones procedentes de las ecuaciones de Navier-Stokes para puentes líquidos cilíndricos. Esto permite observar la influencia de la forma de equilibrio del puente líquido en su comportamiento dinámico. La forma de equilibrio afecta a la deformación dinámica de la entrefase no sólo cuantitativamente (ver figuras 3.15 y 3.16b–3.16f) sino cualitativamente (ver figura 3.16a). En el caso analizado en la figura 3.16a, la frecuencia de excitación $\Omega = 0.385$ es menor que la primera frecuencia de resonancia $\Omega_1 = 0.490$, pero mayor que el valor $\Omega_1 = 0.352$ correspondiente a la forma cilíndrica (Nicolás y Vega, 2000a), y por lo tanto las formas de las oscilaciones son opuestas.

Las figuras 3.15 y 3.16a muestran los resultados obtenidos para la frecuencia más baja (20 Hz), menor que la primera frecuencia de resonancia Ω_1 . Los efectos dinámicos asociados al término inercial en las ecuaciones hidrodinámicas son notables incluso para esta frecuencia, como puede concluirse a partir de la comparación con la solución cuasiestática ($\Omega \rightarrow 0$) de las ecuaciones de Euler. Estos efectos son mucho más importantes para el puente líquido de la figura 3.16a, donde la razón Ω/Ω_1 es bastante mayor. En el gráfico derecho de la figura 3.15 se dibuja el contorno del puente líquido $F(z)$ para mostrar la magnitud de la perturbación dinámica con respecto a la deformación de equilibrio F_0 . Aunque los valores de los parámetros que caracterizan las formas de equilibrio y la magnitud de la fuerza inercial $g(t)$ sean similares en ambos experimentos, la deformación en la figura 3.16a es bastante mayor que la observada en la figura 3.15. Esto se debe a que el va-

lor de la esbeltez en la figura 3.16a está más cerca del límite de estabilidad $\Lambda \simeq 2.8$ (Slobozhanin y Perales, 1993), y el puente líquido es mucho más sensible a perturbaciones axisimétricas.

En las figuras 3.16b–3.16e se ha analizado el comportamiento dinámico del puente líquido para las frecuencias Ω del intervalo $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$. Debido a que en estos casos se ha superado la primera frecuencia de resonancia Ω_1 , la forma de la oscilación es la opuesta a la observada en las figuras 3.15 y 3.16a. Más concretamente, se obtienen formas opuestas si $g(t)$ tiene el mismo signo (ver figura 3.16a y los resultados (2) en la figura 3.16c), y formas similares en caso contrario (ver figuras 3.15 y 3.16b). El acuerdo entre los resultados experimentales y las predicciones teóricas proporcionadas por los modelos de Cosserat y Euler es satisfactorio. La técnica de detección de contornos permite observar la estructura oscilatoria en la figura 3.16f, a pesar de que su amplitud es aproximadamente un cuarto del tamaño del píxel. Las discrepancias observadas pueden deberse a la incertidumbre asociada al cálculo de la amplitud de la vibración (ver la subsección 3.4.2). Debido a que se supera la segunda frecuencia de resonancia Ω_2 , se encontraron cuatro nodos de oscilación. La longitud de onda de la oscilación es menor, lo que explica las (pequeñas) discrepancias observadas entre las aproximaciones de Euler y Cosserat.

Capítulo 4

VIBRACIÓN LATERAL DE PUENTES LÍQUIDOS ISOTERMOS

4.1. Introducción

Las oscilaciones no axisimétricas de puentes líquidos han recibido menor atención que las axiales. Las frecuencias naturales para formas cilíndricas se han calculado analíticamente en el caso no viscoso (Sanz y López-Díez, 1989; Acero y Montanero, 2005) y en el límite de número capilar pequeño (Higuera y Nicolás, 1997). Además se han obtenido numéricamente para números capilares arbitrarios (Langbein, 1992). Los métodos numéricos también han sido aplicados para analizar puentes líquidos axisimétricos no viscosos (Gañán-Calvo, 1991; Acero y Montanero, 2005). El número de trabajos experimentales es muy reducido y se limitan al análisis de la vibración lateral. En las referencias (Sanz y López-Díez, 1989; Morse *et al.*, 1996), los experimentos se llevaron a cabo en Tierra utilizando la técnica de Plateau-Rayleigh. Para puentes rodeados por aire sólo tenemos conocimiento de la existencia de dos referencias. La primera analiza experimentalmente puentes líquidos cilíndricos utilizando un campo magnético oscilatorio (Mahajan *et al.*, 2002), y la segunda estudia el comportamiento de puentes axisimétricos al vibrar los soportes sólidos (Gañán-Calvo y Barrero, 1990). Todos estos estudios se han centrado en características globales de la oscilación, como las frecuencias de resonancia. Esto se debe a que la función de transferencia usualmente presenta picos agudos para esas frecuencias y no se necesita un análisis preciso de la deformación de la interfase para detectarlas.

En este capítulo se adapta el procedimiento experimental descrito en el capítulo anterior para estudiar la deformación de la interfase de un puente líquido sujeto a oscilaciones laterales. La organización del capítulo es la siguiente. El problema se formula en la sección 4.2. En la sección 4.3 se describen tanto el montaje como el procedimiento experimental utilizados. A

continuación se presenta el análisis de la vibración (sec. 4.4), y en la sección 4.5.1 se comparan los resultados obtenidos con las predicciones teóricas dadas por las ecuaciones de Navier-Stokes (NS) para número capilar nulo. Por último, se valida experimentalmente un modelo propuesto (Montanero y Ferrera, 2008) para describir las oscilaciones laterales de pequeña amplitud en un puente líquido viscoso (sección 4.5.2).

4.2. Formulación del problema

En este capítulo se estudia la configuración fluida cuyo esquema se muestra en la figura 4.1. Consta de una masa isoterma de líquido de volumen \mathcal{V} , sostenida entre dos discos paralelos coaxiales de radio R separados una distancia L . Debido a que los bordes de los discos son afilados, se asume que el líquido ancla perfectamente en ellos impidiendo el movimiento de la línea de contacto triple. El puente líquido está sometido a la acción de una fuerza axial constante (gravedad) de magnitud g_0 por unidad de masa. La densidad del puente líquido es ρ , la viscosidad es ν , y la tensión superficial asociada con la interfase es σ . Estas propiedades son uniformes y constantes bajo las presentes condiciones de análisis isoterma e incomprensible. El gas circundante tiene viscosidad y densidad despreciables, por lo que no afecta a la dinámica del puente líquido. El contorno en equilibrio del puente líquido se caracteriza mediante la función $F_0(z)$, que mide la distancia entre un elemento de la superficie y el eje z de los discos.

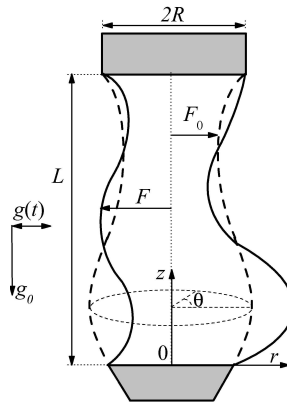


Figura 4.1: Geometría y sistema de coordenadas del puente líquido.

El puente líquido es sometido, junto con los discos soportes, a una vibración de amplitud A y frecuencia ω en la dirección del eje lateral $\theta = 0, \pi$. La fuerza inercial por unidad de masa producida por la vibración es $g(t) = A\omega^2 \cos(\omega t)$. La función $F(\theta, z; t)$ mide la distancia entre un elemento de la superficie libre y el eje z en el instante t , mientras $\mathbf{v}(r, \theta, z; t)$ y $p(r, \theta, z; t)$ son los campos de velocidad y presión, respectivamente. En este capítulo, las magnitudes se adimensionalizan utilizando $R, t_0 \equiv (\rho R^3/\sigma)^{1/2}$, y ρ como longitud, tiempo y densidad característicos, respectivamente. Los parámetros adimensionales característicos del problema son la esbeltez $\Lambda \equiv L/(2R)$, el volumen reducido $V \equiv \mathcal{V}/\mathcal{V}^*$ (donde $\mathcal{V}^* = \pi R^2 L$), el número de Bond $B_0 \equiv \rho g_0 R^2/\sigma$, el número capilar $C_\nu \equiv \nu(\rho/\sigma R)^{1/2}$ (definido como la raíz cuadrada del número de Ohnesorge), la amplitud $a \equiv A/R$, y la velocidad angular $\Omega \equiv \omega(\rho R^3/\sigma)^{1/2}$.

Las oscilaciones de pequeña amplitud de la configuración fluida verifican las ecuaciones

$$\frac{F(\theta, z; t)}{R} = \frac{F_0(z)}{R} + a\Omega^2 \cos \theta \operatorname{Re} \left[\eta(z) e^{-i\Omega t/t_0} \right], \quad (4.1)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(r, \theta, z; t) = a\Omega^2 \operatorname{Re} \left[\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta \tilde{v}_r(r, z) \\ \sin \theta i\tilde{v}_\theta(r, z) \\ \cos \theta \tilde{v}_z(r, z) \end{array} \right\} e^{-i\Omega t/t_0} \right], \quad (4.2)$$

$$\tilde{p}(r, \theta, z; t) = \tilde{p}_0(z) + a\Omega^2 \cos \theta \operatorname{Re} \left[\Phi(r, z) e^{-i\Omega t/t_0} \right], \quad (4.3)$$

donde las magnitudes $\tilde{\mathbf{v}}(r, \theta, z; t)$ y $\tilde{p}(r, \theta, z; t)$ son los campos de velocidad y presión adimensionalizados, respectivamente, y \tilde{p}_0 es el campo de presiones adimensional en equilibrio. Las perturbaciones $|a\Omega^2\eta|$ y $|a\Omega^2\Phi|$ son mucho menores que los correspondientes valores de equilibrio F_0/R y \tilde{p}_0 .

4.3. Montaje y procedimiento experimental

4.3.1. Montaje experimental

Para estudiar la vibración lateral del puente líquido se ha utilizado un montaje experimental similar al que se utilizó en el estudio de la vibración axial (sección 3.3.1). Sin embargo, en este caso la vibración se produce en la dirección perpendicular al eje del puente líquido y se utilizan un líquido y una celda diferentes. Como se ha mencionado en el capítulo anterior, la utilización de agua en el experimento es problemática debido a que la interfase

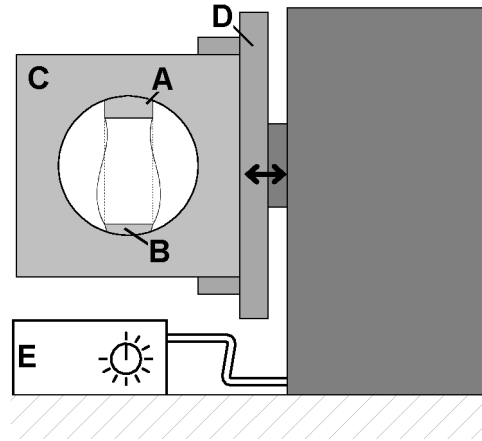


Figura 4.2: Dispositivo experimental: aguja superior (A), disco inferior (B), celda del puente líquido (C), plataforma vibrante (D) y amplificador de señal (E).

se contamina fácilmente y a que se produce evaporación (incluso cuando la celda está cerrada con cristales). Por este motivo, se han utilizado hexadecano y aceite de silicona que carecen de esos inconvenientes. Sin embargo, estos líquidos no anclan perfectamente en las agujas de la celda utilizada en el capítulo anterior. Así, ha sido necesario diseñar una nueva celda en la que la aguja inferior se ha reemplazado por un disco. Para producir la vibración lateral se utiliza el montaje mostrado en la figura 4.2. La aguja y el disco tienen un radio $R = 0.977$ mm y están montados en una celda cúbica (C) mecanizada para que estén situados concéntricamente. La aguja superior, como en el experimento anterior, puede desplazarse a lo largo de su eje, y se utiliza para inyectar y retirar líquido mediante una bomba de inyección. La celda se monta en una plataforma (D) de forma que el eje de vibración sea perpendicular al eje axial del puente líquido. La vibración se controla amplificando (E) una señal procedente de un ordenador.

4.3.2. Procedimiento experimental

Cada experimento consta de las siguientes fases:

1. Se toman imágenes digitales de una rejilla y de una plomada, antes de formar el puente líquido, para calibrar el sistema de adquisición de imágenes.

2. La rejilla de calibración y la plomada se reemplazan por la celda del puente líquido en la plataforma vibrante del montaje experimental.
3. Se forma un puente líquido entre la aguja y el disco inferior. Para ello, se inyecta el líquido a través de la aguja superior con la ayuda de una bomba de inyección.
4. Se graban diez imágenes digitales del puente líquido en equilibrio.
5. Se somete el puente líquido a la vibración y, varios segundos después del comienzo de la vibración, se graba una película de 300 imágenes durante 0.5 s.
6. Se para la vibración. Una vez que el líquido ha vuelto al equilibrio, se graban otras 10 imágenes.

En total, se graban 322 imágenes del puente líquido en cada experimento.

4.4. Análisis de la vibración

El procedimiento utilizado para el análisis de la vibración lateral es una adaptación del desarrollado para el análisis de la vibración axial (ver sección 3.4). Al igual que el anterior, proporciona los valores instantáneos de la posición F de la interfase, la fuerza inercial lateral $g(t)$ que actúa sobre el puente líquido, el volumen V , la altura L del puente, la inclinación de la celda, y la dirección de vibración.

En este caso, las imágenes de equilibrio se utilizan para calcular la tensión superficial σ mediante la técnica TIFA-AI (Cabezas *et al.*, 2006). Como se muestra en la sección 4.5.1, este es un paso fundamental para obtener resultados válidos, ya que la contaminación asociada a la manipulación del líquido provoca que el valor de la literatura no sea adecuado.

Las imágenes tomadas durante la vibración se procesan mediante un procedimiento similar al descrito en la sección 3.4. El cálculo se realiza en cuatro fases: (i) detección de los contornos izquierdo y derecho de la aguja superior; (ii) ajuste de los mismos a dos rectas con la misma pendiente; (iii) corrección de la inclinación de las agujas, y (iv) ajuste sinusoidal de la evolución temporal de la posición horizontal x correspondiente a cada uno de los bordes de la aguja superior. La figura 4.3 muestra la precisión alcanzada en este cálculo. Los puntos corresponden a la diferencia $x - x_0$

con respecto a la posición media x_0 , mientras que la línea es el ajuste a esos puntos. La distancia media entre los puntos y el ajuste es de 86.9 nm. El ajuste proporciona los valores tanto de la amplitud A como de la frecuencia ω . La diferencia entre el valor obtenido de ω y el seleccionado es menor del 0.2 %. En el caso de la amplitud A , no se puede realizar una comparación semejante ya que esta cantidad se obtiene indirectamente seleccionando el voltaje de la señal de entrada en el vibrador electrodinámico. Es importante mencionar que se ha obtenido una medida precisa de $g(t)$ incluso cuando la amplitud de la vibración es diez veces menor que el tamaño del píxel (alrededor de $10 \mu\text{m}$). Esto confirma que el procedimiento proporciona una detección muy precisa a nivel subpíxel.

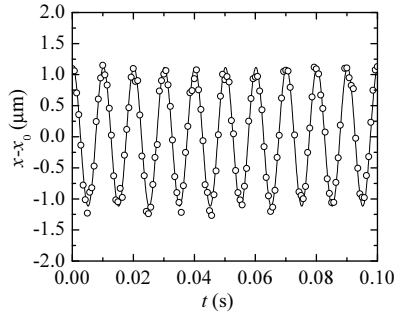


Figura 4.3: Desviación de la posición horizontal x de la aguja superior con respecto a su valor medio x_0 , medido mediante el procesamiento de las imágenes tomadas en el experimento

En la sección 3.4.4, se describe el cálculo de $F - F_0$ a partir de las posiciones de la interfase cuando está en reposo F_0 y en movimiento F . En dicho cálculo, es estrictamente necesario obtener la posición de la interfase de un puente líquido que, en equilibrio, posea el mismo volumen que el que tiene el puente líquido en el instante de la vibración. Cuando la vibración es lateral, el cálculo del volumen a partir de la imagen dinámica no es posible. Por este motivo, para calcular la deformación de la interfase de un puente líquido sujeto a una vibración lateral se sigue una estrategia diferente. Si se tiene en cuenta la ecuación 4.1, la deformación $F - F_0$ en el plano meridional $\theta = 0, \pi$ viene dada por $F(\theta, z; t) - F_0(z) = 1/2 [F(\theta, z; t) - F(\theta, z; t + \pi t_0/\Omega)]$. Por lo tanto, la deformación $F - F_0$ se puede calcular a partir de la medida de las posiciones instantáneas $F(\theta, z; t)$ y $F(\theta, z; t + \pi t_0/\Omega)$. De esta forma, se cancelan parcialmente los pequeños errores inherentes al cálculo tanto de $F(z, t)$ como de $F(z, t + \pi t_0/\Omega)$.

Se han estimado los errores experimentales de la siguiente forma. Analizando imágenes de la celda vacía, se han evaluado los errores en el mecanizado de la misma. La excentricidad entre la aguja superior y el disco inferior, y la diferencia entre sus radios es menor que el 2% de la longitud característica R . Por otra parte, el análisis de las imágenes adquiridas durante la vibración muestra que los ángulos de inclinación de la celda del puente líquido y la dirección de vibración son menores que 0.3° en todos los casos analizados. La desviación típica de las medidas de σ , V , y L es menor que el 1% de los valores medios (verdaderos) correspondientes.

4.5. Resultados

Los experimentos de puentes líquidos sometidos a vibración lateral se han realizado con dos objetivos. En primer lugar, se pretende comprobar que las medidas proporcionadas por el método experimental son correctas. Para ello, se realizan experimentos utilizando hexadecano (que tiene una viscosidad muy baja) y se comparan los resultados con las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes para $C_\nu = 0$. En segundo lugar, se pretende utilizar el método experimental para validar un modelo teórico, recientemente propuesto, que describe las oscilaciones laterales de pequeña amplitud de un puente líquido viscoso. En este caso, los experimentos se realizarán utilizando aceite de silicona.

4.5.1. Validación del método experimental

La figura 4.4 muestra la deformación de la interfase en $t = 0$ (cuando la deformación es máxima) para distintos puentes. Los parámetros que caracterizan las configuraciones experimentales se recogen en la tabla 4.1. Esta tabla muestra también los valores de las dos primeras frecuencias de resonancia Ω_1 y Ω_3 calculadas a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes para un número capilar igual a cero. Existen diferencias significativas entre estos valores y los obtenidos analíticamente para las correspondientes formas cilíndricas (Sanz y López-Díez, 1989). Por ejemplo, $\Omega_1 = 0.9848$ para $\Lambda = 1.66$, $V = 1$, y $B_0 = 0$. Los símbolos en la figura son los resultados experimentales para $\theta = 0$ (\bullet) y $\theta = \pi$ (\circ). Se observa que, en todos los casos analizados, al cambiar el signo de la deformación para $\theta = \pi$, los dos conjuntos de puntos coinciden dentro de la dispersión de los datos. Esto confirma la existencia de un comportamiento lineal [ver la ecuación (4.1)], y

constituye un test exigente para el procedimiento experimental. Las gráficas en la figura se muestran ordenadas con respecto a la frecuencia de vibración. La forma de la oscilación cambia entre las figuras (b) y (c) debido a que se superó la primera frecuencia de resonancia. La forma de la oscilación en la figura (f) es muy similar a la del tercer modo de oscilación debido a que la frecuencia de excitación tiene un valor muy próximo a Ω_3 .

Las líneas continuas en la figura 4.4 corresponden a la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes para número capilar nulo. Debido a que C_ν/Ω es del orden o menor que 10^{-2} en todos los experimentos, la disipación dentro de las finas capas límite en los extremos sólidos y en la interfase del puente líquido es prácticamente despreciable (Higuera y Nicolás, 1997). Por este motivo, se espera que la aproximación no viscosa proporcione predicciones precisas de la deformación de la interfase. Incluso para la frecuencia más alta [ver figura 4.4(f)], donde la amplitud de la oscilación es menor que el tamaño del píxel, existe un buen acuerdo entre esta aproximación y las medidas experimentales.

Las líneas discontinuas son las soluciones obtenidas para las formas cilíndricas de equilibrio correspondientes. Como se puede observar, la influencia de la forma de equilibrio es más importante para frecuencias pequeñas y decrece a medida que Ω aumenta. Las líneas de puntos en las gráficas (a) y (b) son las soluciones cuasiestáticas ($\Omega = 0$). Los efectos dinámicos son importantes incluso para las frecuencias más pequeñas consideradas en los experimentos. La línea de puntos y rayas de la gráfica (b) es la solución calculada tomando el valor de la tensión superficial de la literatura $\sigma = 26.2 \times 10^{-3}$ N/m (en lugar del valor dado por TIFA-AI en el experimento $\sigma = 23.06 \times 10^{-3}$ N/m). Aunque el hexadecano se ha manipulado con cuidado durante el experimento, y la interfase hexadecano-aire es bastante insensible a la contaminación, los resultados experimentales no pueden analizarse adecuadamente si se asume el valor de la literatura para σ . Este resultado demuestra la importancia de medir la tensión superficial durante el experimento cuando se analiza con detalle un fenómeno capilar.

4.5.2. Validación de un modelo propuesto para líquidos viscosos

Recientemente, se ha propuesto un modelo teórico sencillo para describir las oscilaciones laterales de pequeña amplitud de un puente líquido viscoso (Montanero y Ferrera, 2008). Este modelo se ha derivado utilizando principios similares a los que conducen al modelo de rodajas para movimientos

	R (mm)	t_0 (ms)	Λ	V	B_0	$C_\nu \times 10^2$	$a \times 10^2$	Ω	Ω_1	Ω_3
Fig. 4.4(a)	0.977	5.32	1.84	0.928	0.284	2.18	2.31	0.669	0.8608	3.366
Fig. 4.4(b)	0.977	5.59	1.66	0.800	0.314	2.30	2.76	0.879	1.056	3.896
Fig. 4.4(c)	0.977	5.37	1.83	0.809	0.289	2.20	0.683	1.35	0.9123	3.372
Fig. 4.4(d)	0.977	5.59	1.66	0.871	0.314	2.30	1.61	1.41	1.015	3.905
Fig. 4.4(e)	0.977	5.39	1.83	0.821	0.291	2.21	0.403	2.20	0.9070	3.374
Fig. 4.4(f)	0.977	5.65	1.66	0.922	0.320	2.32	0.179	3.55	0.9856	3.903

Tabla 4.1: Valores de los parámetros que caracterizan las configuraciones fluidas consideradas en la figura 4.4.

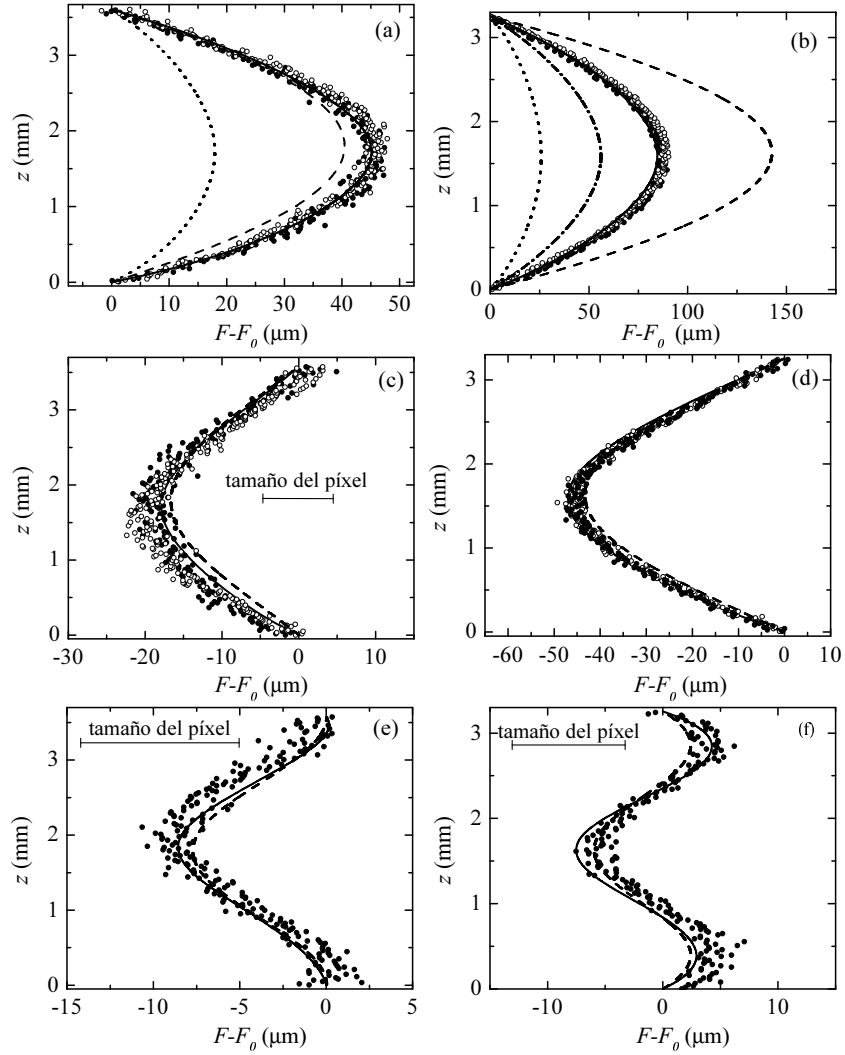


Figura 4.4: Deformación dinámica de la interfase $F - F_0$ en función de la altura z para $\theta = 0, \pi$, y $t = 0$. El signo de $F - F_0$ para $\theta = \pi$ aparece cambiado. Los símbolos constituyen los resultados experimentales para los perfiles $\theta = 0$ (\bullet) y π (\circ). En las gráficas (e) y (f) los perfiles $\theta = 0$ y π se promediaron para reducir las fluctuaciones. Las líneas continuas son las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes para $C_\nu = 0$. Las líneas discontinuas son las soluciones para las correspondientes formas cilíndricas. En las figuras (a) y (b), la línea de puntos es la solución en el límite cuasiestático. La línea de puntos y rayas en la gráfica (b) es la solución calculada tomando el valor de la tensión superficial de la literatura $\sigma = 26.2 \times 10^{-3}$ N/m.

axiales (Meseguer, 1983). En esencia, el puente líquido se ve como un conjunto de rodajas de altura infinitesimal que oscilan a lo largo del eje lateral. La conservación de la cantidad de movimiento para una rodaja conduce a la expresión

$$M\Omega^2\eta + \frac{1}{F_0^2} \frac{d}{dz} \left[\frac{F_0\eta_z}{(1 + F_{0z}^2)^{3/2}} \right] - C_\nu i\Omega\eta_{zz} + 1 = 0, \quad (4.4)$$

en la que se ha introducido el término M que es una medida de la masa de líquido efectiva vibrando a lo largo del eje lateral. Mediante comparación con las ecuaciones de Navier-Stokes para $C_\nu = 0$ se ha obtenido el valor óptimo $M(\Omega) = 1 - 0.04091\Omega - 0.03327\Omega^2$.

La validez de este modelo se ha comprobado mediante experimentos realizados con puentes líquidos de aceite de silicona de viscosidad 35-cSt. La tabla 4.2 muestra las distintas configuraciones estudiadas. El procedimiento experimental proporciona los perfiles $F(\theta, z; t)$ para $\theta = 0$ y π en distintos instantes t . Sustituyendo en la ecuación 4.1 se obtiene que $\text{Re}[\eta(z)] = [F(\theta, z; 0) - F(\theta, z; \pi t_0/\Omega)] / (2A\Omega^2 \cos \theta)$ en $\theta = 0$ y π . La medida de $\text{Im}[\eta(z)]$ requeriría determinar con precisión la deformación de la interfase en $t = \pi t_0/(2\Omega)$ y $3\pi t_0/(2\Omega)$, lo que es extremadamente difícil debido a su pequeña magnitud. La máxima deformación que se observa en los experimentos es de $60 \mu\text{m}$ ($\simeq 0.06R$) y, por tanto, se puede asumir que existe un régimen de respuesta lineal. Los valores del número capilar C_ν se sitúan en torno a 0.24, por lo que se espera que los efectos de la viscosidad sean notables. Además, la tabla 4.2 proporciona los valores correspondientes a la primera frecuencia de resonancia calculada con el modelo propuesto.

La figura 4.5 muestra los resultados experimentales y las predicciones teóricas obtenidas a partir de las ecuaciones de Navier Stokes con número capilar nulo y a partir del modelo de rodajas (4.4). Las figuras están ordenadas de acuerdo a la razón Ω/Ω_1 en orden creciente. Debido a que la amplitud de la oscilación es muy pequeña en las figuras (a) y (b), los perfiles $\theta = 0$ y π se han promediado para reducir las fluctuaciones. El signo de $\text{Re}(\eta)$ ha cambiado en los casos (e) y (f) debido a que la frecuencia excede la primera frecuencia de resonancia. Existe un acuerdo muy bueno entre los resultados experimentales y las predicciones del modelo de rodajas en todos los casos, excepto para el caso (f) donde la frecuencia es mucho mayor que la primera frecuencia de resonancia. Las ecuaciones de Navier-Stokes para $C_\nu = 0$ sólo proporcionan resultados precisos para el caso con frecuencia más baja, lejos de la primera frecuencia de resonancia. El efecto estabilizador debido a los esfuerzos viscosos tiene una mayor influencia en la deformación de la entrefa-

	R (mm)	t_0 (ms)	Λ	V	B	C_ν	$a \times 10^2$	Ω	Ω_1
Fig. 4.5(a)	0.977	6.70	1.62	0.732	0.451	0.243	3.18	0.632	1.047
Fig. 4.5(b)	0.977	6.69	1.62	0.733	0.448	0.242	2.79	0.840	1.049
Fig. 4.5(c)	0.977	6.70	1.62	0.835	0.450	0.257	2.99	0.842	0.9952
Fig. 4.5(d)	0.977	6.56	1.62	1.02	0.432	0.237	2.73	0.825	0.9140
Fig. 4.5(e)	0.977	6.66	1.62	1.02	0.445	0.241	2.33	1.05	0.9091
Fig. 4.5(f)	0.977	6.69	1.62	1.02	0.449	0.242	2.00	1.26	0.9073

Tabla 4.2: Valores de los parámetros que caracterizan las configuraciones fluidas consideradas en la figura 4.5.

se cerca de la resonancia [figuras (c), (d), y (e)]. La principal conclusión que se extrae de la figura 4.5 es que el modelo de rodajas proporciona resultados satisfactorios para puentes líquidos moderadamente viscosos, si la frecuencia de oscilación es menor o similar a la primera frecuencia de resonancia.

Comentario adicional

Debido a su precisión, las técnicas de análisis de la forma de la gota, como el método Axisymmetric Drop Shape Analysis (ADSA) (del Río y Neumann, 1997) o TIFA-AI (Cabezas *et al.*, 2006), se utilizan ampliamente para medir la tensión superficial a partir de las imágenes digitales de configuraciones fluidas en equilibrio. En experimentos bajo condiciones de microgravedad ($g_0 \rightarrow 0$), en los que existe una fuerte limitación de volumen ($\mathcal{V} \rightarrow 0$, $R \rightarrow 0$) y en los que tienen interfaces que separan líquidos de la misma densidad ($\Delta\rho \rightarrow 0$), el número de Bond toma valores muy pequeños ($B_0 \rightarrow 0$). En ese caso, la forma de equilibrio es independiente del valor de la tensión superficial, y no se pueden utilizar las técnicas anteriores. En esas condiciones es posible medir la tensión superficial desplazando la configuración fluida de su equilibrio y analizando su respuesta dinámica. Como se muestra en la figura 4.4(b), la respuesta del puente líquido a la vibración lateral es extremadamente sensible a las variaciones de la tensión superficial cuando la frecuencia de vibración está próxima a la primera frecuencia de resonancia (con la condición de que el número capilar no tome valores muy elevados). Concretamente, una disminución de 3 mJ/m^2 en la tensión superficial provoca un incremento de un 40 % en la deformación máxima de la interfase cuando se vibra con una frecuencia $\Omega = 0.832 \Omega_1$. Esto se debe a que la función de transferencia presenta un pico agudo en la frecuencia de resonancia $\Omega_1/(\rho R^3/\sigma)^{1/2}$, cuyo valor depende de σ . Por tanto, el ajuste de la predicción teórica para la deformación de la interfase a medidas ex-

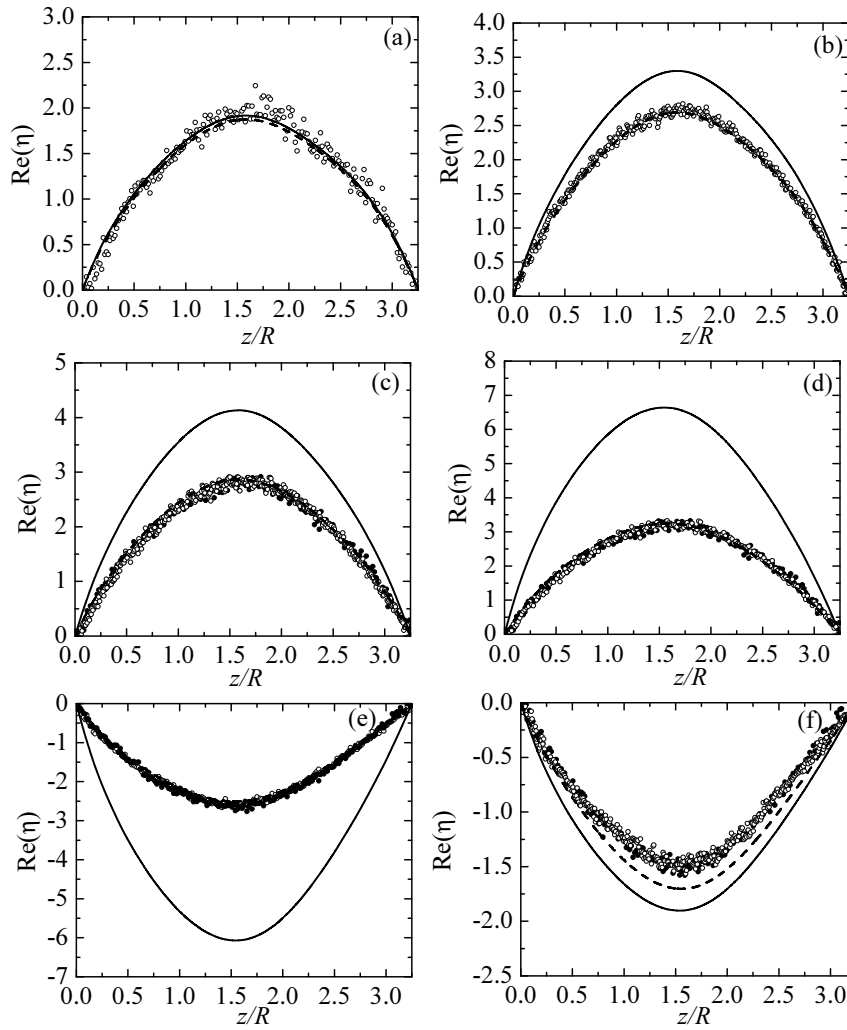


Figura 4.5: Parte real $\text{Re}[\eta(z)]$ de la deformación de la interfase $\eta(z)$ en función de la altura z , obtenida en $\theta = 0$ y π . Los símbolos son los resultados experimentales para $\theta = 0$ (\bullet) y π (\circ), y las líneas continuas y discontinuas son las soluciones a las ecuaciones de Navier-Stokes para $C_\nu = 0$ y el modelo de rodajas, respectivamente. En los gráficos (a) y (b), se promediaron los resultados en $\theta = 0$ y π para reducir las fluctuaciones.

perimentales proporcionaría valores muy precisos de σ incluso para $B_0 = 0$. Debe señalarse que en este caso un puente líquido con el volumen apropiado es cilíndrico, y su deformación dinámica puede ser calculada para $C_\nu = 0$ (Sanz y López-Díez, 1989) y $C_\nu \neq 0$ (Higuera *et al.*, 2002; Montanero y Ferrera, 2008).

Capítulo 5

DEFORMACIÓN DINÁMICA DE LA ENTREFASE PARA PUENTES LÍQUIDOS NO ISOTERMOS

5.1. Introducción

Como se ha mencionado en el capítulo introductorio, cuando se aplica una pequeña diferencia de temperaturas entre los soportes sólidos que sostienen un puente líquido aparece un flujo axisimétrico estacionario. Para números de Prandtl elevados, este flujo se torna inestable cuando ΔT excede un valor umbral (Kuhlmann, 1999). Bajo la acción combinada del gradiente de temperaturas y de la fuerza gravitatoria, se produce una transición a un flujo no axisimétrico oscilatorio. En este nuevo régimen aparece una deformación dinámica de la entrefase del puente líquido. Este fenómeno fue estudiado por primera vez, numéricamente, por Shevtsova *et al.* (1997). En ese estudio concluyeron que la máxima deformación se alcanza cerca del disco caliente, que la amplitud de oscilación de la entrefase es del orden de un 1% de la deformación estática, y que varía con la coordenada axial y el volumen del puente líquido. Desde el punto de vista experimental, la existencia de estas deformaciones fue probada por Shu *et al.* (1994). Posteriormente, Nishino y Yoda (2000) presentaron resultados experimentales donde la amplitud de la oscilación varía con la coordenada axial y su valor máximo es aproximadamente $1 \mu\text{m}$. Recientemente, Okubo *et al.* (2005) han observado mediante técnicas de interferometría que la frecuencia de la oscilación depende de la esbeltez del puente.

A pesar de su pequeña magnitud, el papel jugado por la deformación dinámica en el mecanismo de la inestabilidad es todavía objeto de discusión (Kamotani *et al.*, 2007). El objetivo de este capítulo es la medida tanto de la amplitud como de la frecuencia que caracterizan la magnitud y la forma de las oscilaciones de la entrefase. Para ello se emplea una metodología similar a la descrita en capítulos anteriores y se comparan los resultados con las

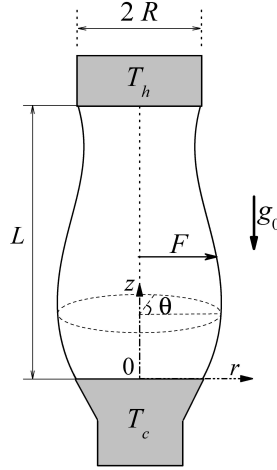


Figura 5.1: Geometría y sistema de coordenadas para el puente líquido.

medidas de temperatura proporcionadas por cinco termopares colocados en el interior del líquido.

5.2. Formulación del problema

La configuración fluida objeto de estudio se representa en la figura 5.1. Consiste en un volumen \mathcal{V} de líquido, sostenido entre dos barras coaxiales de radio R separadas una distancia L . Se supone que el líquido se ancla a los bordes de las barras impidiendo el movimiento de la línea de contacto triple. Las temperaturas en las interfaces sólido-líquido superior e inferior son T_h y T_c ($T_h > T_c$), respectivamente, por lo que el puente líquido está sometido a una diferencia de temperatura $\Delta T = T_h - T_c$ entre sus extremos. El puente líquido está sujeto a la acción de la gravedad g_0 .

El principal objetivo de este capítulo es describir la deformación de la superficie libre asociada a la inestabilidad oscilatoria que aparece cuando se supera la diferencia de temperaturas crítica ΔT_{cr} . La deformación (no axisimétrica) de la superficie libre se caracteriza mediante la función $F(\theta, z; t)$, que mide la distancia entre un elemento de la superficie y el eje del puente líquido (eje z). El sistema de referencia se escoge de forma que el eje óptico de la cámara sea perpendicular al plano meridional del puente líquido $\theta = 0, \pi$ (véase la sección 5.3).

Por otra parte, existen dos ramas de bifurcación, $\mathcal{V} < \mathcal{V}^*$ y $\mathcal{V} > \mathcal{V}^*$, donde \mathcal{V}^* es el volumen del cilindro delimitado por las barras (Shevtsova *et al.*, 1999). Por este motivo, de aquí en adelante se utilizan volúmenes adimensionalizados $V \equiv \mathcal{V}/\mathcal{V}^*$. V y ΔT pueden considerarse como los parámetros de control en los experimentos.

5.3. Método experimental

5.3.1. Montaje experimental

El montaje experimental utilizado se muestra en la figura 2.1. El líquido que se utiliza en los experimentos es aceite de silicona ($Pr=68.4$). Sus propiedades físicas a $25\text{ }^\circ\text{C}$ son $\sigma = 1.97 \times 10^{-2}\text{ N/m}$, $\sigma_T = -6.37 \times 10^{-5}\text{ N/m K}$, $\rho = 912\text{ kg/m}^3$, $\beta = 1.09 \times 10^{-3}\text{ K}^{-1}$, $\nu = 5 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$, y $\alpha = 7.31 \times 10^{-8}\text{ m}^2/\text{s}$, donde σ es la tensión superficial, $\sigma_T = \frac{d\sigma}{dT}$, ρ la densidad, β el coeficiente de expansión térmica, ν la viscosidad cinemática y α la difusividad térmica. Las razones para el uso de este aceite son que existen resultados numéricos previos para el mismo, que su tensión superficial es perfectamente reproducible, y que se conoce su dependencia con respecto a la temperatura.

La figura 5.2 muestra un esquema de la celda utilizada en los ensayos. En el interior de la celda se forma un puente líquido sostenido entre dos barras (A) fabricadas en una aleación de aluminio con una conductividad térmica de 164 W/m K . Las barras tienen el mismo radio $R = 3\text{ mm}$, y están separadas una distancia $L = 3.6\text{ mm}$. Como no son huecas, el líquido para formar el puente no se inyecta a través de una de ellas como en el experimento de vibración, sino que se deposita entre las barras mediante un sistema de inyección externo. La celda del puente líquido se ha mecanizado para que las barras estén alineadas axialmente. Alrededor de la barra superior se monta una resistencia eléctrica Minco de 100 Ohms (B) que permite fijar la temperatura T_h de la misma. La resistencia se calienta al aplicarle un voltaje mediante una fuente de alimentación que posee una precisión de 0.001 V . Dicha precisión permite un control riguroso de la temperatura de la barra superior. La figura 5.3 muestra la dependencia de T_h con el voltaje aplicado. Los símbolos rellenos y huecos corresponden, respectivamente, a los test hechos cuando el montaje está aislado térmicamente o no. Sólo se observan pequeñas discrepancias cuando las temperaturas son elevadas. Con respecto a la barra inferior, un circuito de refrigeración por agua (Thermo Electric, CAL-31502, USA) (C) permite mantener su temperatura constante e igual

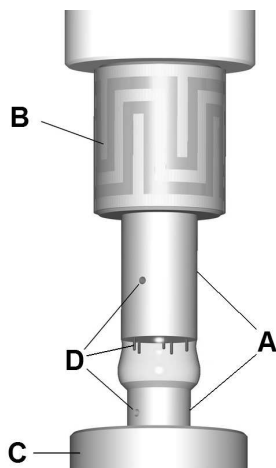


Figura 5.2: Celda experimental: barras (A), resistencia eléctrica (B), sistema de enfriamiento (C), termopares (D).

a T_c . Las temperaturas de las barras soporte se miden con la ayuda de dos termopares (D) insertados en ellas. Asimismo, para medir las oscilaciones de la temperatura debidas a la convección dependiente del tiempo se han sumergido cinco microtermopares apantallados (D) de 0.25 mm de diámetro en el interior del líquido. Todos están a la misma altura $z = 2.34$ mm, a una distancia radial $r = 2.2$ mm del centro de la barra, y desplazados azimutalmente entre sí un ángulo de 72° . Los termopares se introducen en el líquido a través de la barra superior para impedir que se perturbe la superficie libre del puente líquido. Las señales de temperatura proporcionadas por los termopares son amplificadas y se les aplica un filtro de paso banda antes que sean registradas en el ordenador en intervalos de tiempo de 0.1 s.

La cámara y la óptica utilizadas en la adquisición de imágenes en estos experimentos son distintas a las de los capítulos anteriores (ver la figura 5.4). En primer lugar, la cámara (I) es estándar, ya que las oscilaciones tienen un periodo del orden de segundos y no se necesita una adquisición a alta velocidad. En segundo lugar, la amplitud de la oscilación es micrométrica. Por este motivo, se utiliza un tubo extensor (II) junto con un objetivo microscópico de diez aumentos (III) para ampliar el campo de visión y permitir la medida de las oscilaciones. Sin embargo, esta ampliación provoca que los fotogramas tengan dimensiones de 0.809×0.809 mm y no cubran la región correspondiente a un puente líquido completo. Para poder tomar imágenes

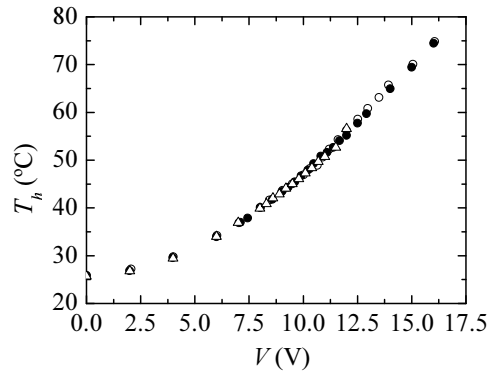


Figura 5.3: Temperatura de la barra superior en función del voltaje aplicado.

de la interfase en toda la longitud de la misma, la cámara se monta sobre un soporte que puede desplazarse verticalmente bajo la acción de un tornillo micrométrico (figura 2.1).



Figura 5.4: Esquema de la cámara y óptica utilizadas.

En este experimento es especialmente importante aislar de vibraciones externas tanto el puente líquido como la cámara. El puente líquido puede ser muy sensible a las vibraciones, y puede amplificar vibraciones inferiores a micras presentes en las barras y convertirlas en deformaciones de la superficie libre de varias micras de magnitud. Se ha comprobado que situar el montaje sobre una mesa óptica dotada de un sistema antivibraciones no elimina todas las vibraciones procedentes del edificio. El mejor aislamiento contra las vibraciones mecánicas externas se ha obtenido al utilizar una mesa óptica fijada a la pared.

5.3.2. Procedimiento experimental

Antes de proceder a la realización del experimento es necesario calibrar el sistema de adquisición de imágenes para tener en cuenta los distintos efec-

tos ópticos producidos por el mismo. Por este motivo se reemplaza la celda donde se forma el puente líquido por una rejilla de calibración. La rejilla de calibración se sitúa en el plano vertical que coincide aproximadamente con el plano meridional del puente líquido. A continuación se toma una imagen de dicha rejilla y se analiza como se describe en la sección 2.6. Se ha verificado que la amplificación debida al objetivo en ambas direcciones vertical y horizontal es prácticamente la misma. El análisis de la rejilla también ha mostrado que la distorsión producida por las lentes es despreciable. Por otra parte, los termopares se han calibrado utilizando el sistema que permite regular la temperatura de la barra inferior.

Cada experimento consta de las siguientes operaciones:

1. Se limpia la celda donde se forma el puente líquido y se aplica un recubrimiento de un agente antimojado, FC273, sobre la superficie lateral de las barras para mantener el líquido anclado en los bordes e impedir que “trepe” por ellos.
2. Se inyecta entre las barras el volumen de líquido necesario para formar el puente líquido deseado. Para ello se utiliza una jeringa cuyo émbolo se acciona mediante una bomba de inyección (KDS 270) que permite controlar con gran precisión el volumen del puente.
3. Se selecciona el voltaje a aplicar a la resistencia eléctrica. Se espera 20 minutos para que el sistema alcance un flujo totalmente desarrollado y caracterizado por la diferencia de temperatura ΔT aplicada entre las barras soporte.
4. Una vez alcanzado este régimen, se graban las oscilaciones de la interfase del puente líquido. En primer lugar, se graban las oscilaciones de la región de la interfase que está en contacto con la barra superior. Para ello se toman 350 imágenes de un puente líquido de dimensiones 1004×1004 píxeles a una velocidad de 45 imágenes por segundo. A continuación la cámara se desplaza verticalmente $500 \mu\text{m}$ hacia la barra inferior y se vuelven a tomar 350 imágenes de la interfase (véase la figura 5.5). Esta operación se repite 6 veces hasta grabar imágenes de toda la interfase. Además, simultáneamente a la grabación de imágenes, se toman 1000 medidas de temperatura con cada termopar.
5. Las etapas 3 y 4 se repiten para diferentes voltajes aplicados a la resistencia que fija la temperatura de la barra superior.

Este mismo procedimiento se repitió para puentes líquidos con diferente volumen.

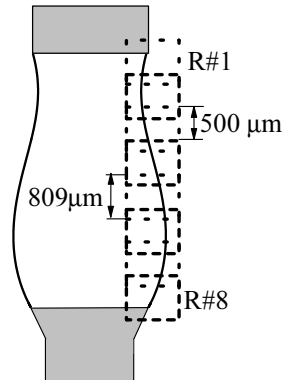


Figura 5.5: Diagrama que muestra las distintas regiones (R) grabadas por la cámara en el curso de un experimento.

5.3.3. Errores experimentales

Antes de analizar los resultados obtenidos en los experimentos, resulta interesante evaluar los errores e incertidumbres asociados al montaje experimental. En primer lugar, se han evaluado los errores en el mecanizado de la celda del puente líquido analizando imágenes de la celda vacía para distintos valores de ΔT . La excentricidad entre las barras superior e inferior, y la diferencia entre sus radios es menor que el 1% de la longitud característica radial R . La discrepancia entre los valores real y nominal $L = 3.6$ mm de la distancia entre las barras soporte no alcanza el 3%. También se ha comprobado que los errores correspondientes a las medidas de temperatura son inferiores a 0.05° C. Además, antes de cada experimento, se verifica que todos los termopares miden la misma temperatura teniendo en cuenta la incertidumbre en la medida.

El volumen del puente líquido no se puede calcular a partir de las imágenes, como se hacía en los experimentos de vibración forzada, porque en este tipo de experimentos no se toman imágenes del puente líquido completo. Por eso, el volumen del puente líquido se estima a partir de las especificaciones de la bomba de inyección. Para evaluar la incertidumbre de esta estimación, se reduce la amplificación provocada por las lentes y se toman

varias imágenes de puentes completos para $\Delta T = 0$. A continuación, se calcula el volumen a partir de las imágenes y se compara con el proporcionado por la bomba de inyección. Las diferencias son menores que el 5%. A pesar de que esta incertidumbre dificulta la repetición de los experimentos bajo las mismas condiciones, se obtienen resultados perfectamente reproducibles para la frecuencia de oscilación de la superficie libre. Sólo se han encontrado pequeñas variaciones en la amplitud cuando se repiten los experimentos.

5.4. Descripción y análisis de los datos

5.4.1. Detección del contorno en la imagen

En los experimentos realizados se obtienen secuencias de imágenes para las distintas zonas de la entrefase. Detectando la entrefase en cada una de las imágenes que componen la secuencia, se puede analizar el movimiento de la misma. La figura 5.6a muestra una imagen digital de la zona del puente líquido más próxima a la barra superior. Debido al gran aumento de la óptica utilizada, se pueden apreciar deficiencias en el mecanizado de la barra y presencia de líquido que ha “trepado” sobre la misma. Como se muestra más adelante, este aumento es necesario para detectar las oscilaciones de la entrefase del puente líquido. De hecho, la amplitud de estas oscilaciones es menor que el tamaño del píxel ($0.806 \mu\text{m}$) en la mayoría de los casos analizados. Por tanto, la posición del contorno del puente líquido debe ser determinada a nivel subpíxel.

En la sección 2.4 se han descrito algunos criterios frecuentemente utilizados para localizar bordes en imágenes digitales. Es importante señalar que es muy probable que los distintos criterios proporcionen bordes en distintas posiciones. La figura 5.6b muestra el perfil de la intensidad de grises correspondiente a la línea discontinua dibujada en la figura 5.6a. La distribución de intensidad cerca de la entrefase puede ser descrita por una función de tipo Heaviside. La intensidad varía desde un nivel bajo (correspondiente al objeto) a un nivel alto (correspondiente al fondo). Existe un pico de intensidad en $i \approx 500$ que puede deberse a difracción. Dicho pico provoca la aparición de un máximo local cuando se calcula el gradiente de I , lo que entorpece la detección de la entrefase con los detectores de máximo gradiente y de laplaciana cero. Por este motivo, para el análisis de este tipo de imágenes, sólo se han considerado las técnicas que localizan el contorno utilizando un criterio de intensidad umbral. Concretamente, se han considerado los dos

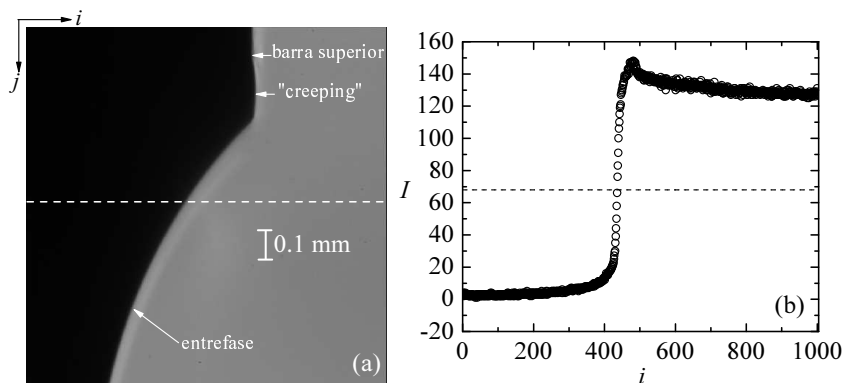


Figura 5.6: Imagen digital de la entrefase de un puente líquido junto a la barra superior (a), y perfil de intensidad de grises (b) correspondiente a la línea discontinua en (a). La línea discontinua en el gráfico (b) indica el valor umbral de la intensidad.

procedimientos descritos en la sección 2.5 y que detectan el contorno del puente líquido a nivel subpíxel.

Como el movimiento de la entrefase es muy pequeño, cabría esperar que las matrices de intensidad de gris $I(i, j)$ correspondientes a las imágenes de una serie temporal fueran prácticamente las mismas. Sin embargo, se ha observado que el valor de intensidad umbral proporcionado por el método de Otsu varía significativamente para las imágenes de una secuencia. Estas variaciones se deben, probablemente, al ruido producido por los componentes electrónicos del sistema de digitalización de imágenes, que cambia el histograma de $I(i, j)$ y, por tanto, el valor del umbral. También se analizó en este trabajo la utilización de un umbral común para todas las imágenes de una misma secuencia, obteniéndose resultados muy similares.

La posición del contorno del puente líquido (y de la aguja, si es el caso) se obtiene aplicando a cada una de las imágenes que componen la serie temporal los procedimientos de umbral local y global descritos en la sección 2.5. Para calcular la posición $F(0, z; t)$ de la entrefase en el sistema de referencia indicado en la figura 5.1, es necesario determinar la posición del puente líquido en la imagen. Para ello se detecta automáticamente la posición del vértice de la barra superior siguiendo el procedimiento descrito en la sección 3.4. Conocida la posición de ese vértice, es posible calcular la deformación $R - F(0, z; t)$ de la entrefase respecto a la forma cilíndrica.

La figura 5.7 muestra las posiciones de la entrefase $R - F$ calculadas en

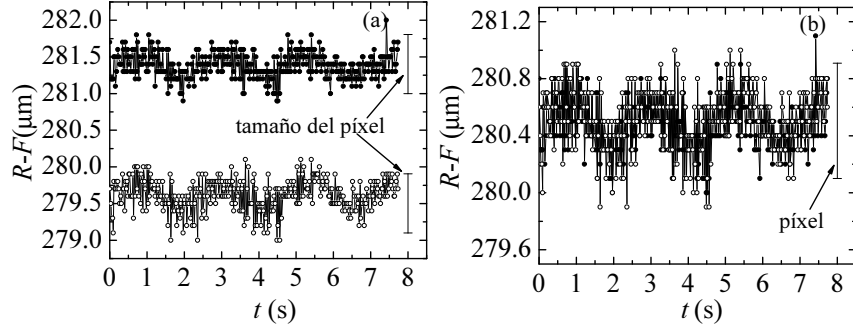


Figura 5.7: Posición de la interfase en $z = L - 164.8 \mu\text{m}$ calculada a partir de las técnicas de umbral local (\circ) y global (\bullet) (a). El gráfico (b) muestra los resultados desplazados un valor constante para que los valores medios $\langle F \rangle_{\text{LT}}$ y $\langle F \rangle_{\text{GT}}$ obtenidos de las técnicas de umbral local y global, respectivamente, sean igual a $1/2 (\langle F \rangle_{\text{LT}} + \langle F \rangle_{\text{GT}})$.

$z = L - 164.8 \mu\text{m}$ en un experimento con $V = 0.85$ y $\Delta T = 20.0 \text{ K}$ utilizando ambos métodos de detección de contorno. El tamaño del píxel es $0.806 \mu\text{m}$. Como puede apreciarse, la amplitud de la oscilación es más pequeña que el tamaño del píxel, lo que demuestra que la detección debe realizarse a nivel subpíxel. Ambas técnicas muestran básicamente el mismo comportamiento oscilatorio, aunque los valores medios de la posición de la interfase no son iguales. De hecho, la discrepancia entre ambos valores es aproximadamente dos veces el tamaño del píxel. Esto, como ya se ha comentado, podría deberse a que los dos métodos empleados utilizan distintos criterios para localizar el contorno del puente líquido lo que afecta al resultado incluso a nivel píxel. No obstante, esta discrepancia no es relevante a la hora de calcular la amplitud y la frecuencia de la oscilación. La figura 5.7b muestra los resultados desplazados un valor constante para poder comparar las amplitudes y las frecuencias obtenidas a partir de ambas técnicas. Ambos métodos proporcionan resultados muy similares, aunque el método de umbral adaptativo presenta mayores fluctuaciones y requiere un mayor tiempo de computación. Por este motivo, se ha elegido el método de umbral global para el cálculo del contorno en este análisis.

Los resultados mostrados en la figura 5.7 (y otros que no se presentan en esta memoria) permiten deducir la siguiente conclusión general: no se necesita un conocimiento preciso de la *posición* de la interfase líquido-fluido para describir su *movimiento* con gran precisión. La figura 5.8 ilustra esta afirmación. La región rayada en la figura 5.8a corresponde a los píxeles

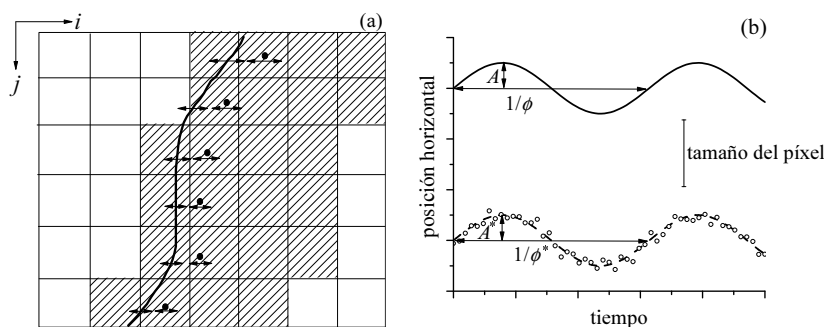


Figura 5.8: Entrefases verdadera y detectada en una imagen (a). La entrefase verdadera (línea continua) está ubicada en algún lugar de la región rayada. Los puntos en la figura corresponden al valor umbral de intensidad de grises $I(i, j)$ para cada columna j y, por tanto, pertenecen a la entrefase detectada. El gráfico (b) es un esquema de la evolución temporal de la posición horizontal tanto de la entrefase verdadera (línea sólida) como de la detectada (línea discontinua) para una altura determinada z .

alrededor del valor umbral (véase figura 5.6b). Se asume que la entrefase verdadera (línea continua) está situada en algún lugar en esta región. Por tanto, la incertidumbre en la determinación de la posición de la entrefase es del orden del tamaño de varios píxeles. Los puntos en la figura corresponden al valor umbral de la intensidad de gris $I(i, j)$ para cada columna j , y por lo tanto, pertenecientes a la entrefase detectada. Estos puntos se calculan a nivel subpíxel usando una técnica de interpolación. Las técnicas de detección asumen que las entrefases verdadera y detectada coinciden, pero esta suposición no es importante para nuestros propósitos. Por ejemplo, si se asume que la distancia horizontal entre las entrefases verdadera y detectada permanece constante en el tiempo, entonces la amplitud y la frecuencia que caracterizan la oscilación de ambas entrefases coinciden. El procedimiento que aquí se presenta proporciona la amplitud y la frecuencia de la oscilación de la entrefase detectada con una incertidumbre menor que el tamaño de un píxel (véase, por ejemplo, la figura 5.7). Por tanto, los valores que corresponden a la entrefase verdadera se obtienen con esa incertidumbre. La figura 5.8b muestra la evolución temporal de la posición horizontal de ambas entrefases, verdadera (línea continua) y detectada (línea discontinua), para una altura determinada z . Aunque la entrefase detectada puede desviarse de la verdadera en más de un píxel, la amplitud A^* y la frecuencia ϕ^* medidas a partir de ella coinciden con los valores verdaderos A y ϕ .

5.4.2. Cálculo de las amplitudes y frecuencias

En los experimentos llevados a cabo se han obtenido una gran cantidad de datos. El experimento descrito en la sección 5.3 proporciona la evolución temporal de la temperatura T en los cinco termopares, y de la posición $F(z, t)$ de 7000 puntos pertenecientes a la entrefase del puente líquido en $\theta = 0$. Ambas magnitudes se miden para un amplio rango de diferencia de temperaturas ΔT aplicadas. Este experimento se ha repetido para varios volúmenes V del puente líquido. Como se ha mencionado en la introducción de este capítulo, el principal objetivo es comparar la magnitud y la forma de las oscilaciones de la temperatura con las de la entrefase. Por este motivo, se calculan la amplitud A promedio y la frecuencia fundamental ϕ que describen esas oscilaciones. Debido a la gran cantidad de datos experimentales se han ideado algoritmos para calcular automáticamente tanto la amplitud A como la frecuencia ϕ a partir de las series de datos.

Tanto en las simulaciones numéricas (Shevtsova *et al.*, 2003; Melnikov *et al.*, 2004) como en los experimentos (Frank y Schwabe, 1997; Shevtsova *et al.*, 1999; Ueno *et al.*, 2003; Shevtsova *et al.*, 2005) se ha demostrado que las oscilaciones de temperatura tienen una forma perfectamente sinusoidal cerca de la aparición de la inestabilidad oscilatoria, y que sólo varía la amplitud con la distancia respecto del punto crítico. Para valores mayores de ΔT , las oscilaciones, aunque periódicas y autosostenidas, dejan de ser sinusoidales. Para ilustrar este comentario, la figura 5.9 muestra la temperatura medida por el segundo termopar en un experimento de un puente líquido con $\Delta T = 22.3$ K y $V = 0.85$. En ella puede apreciarse un alejamiento significativo de la forma sinusoidal, aunque la oscilación todavía tenga un máximo por ciclo. Las oscilaciones con un sólo máximo sufren una transición a oscilaciones con dos máximos para determinados valores de ΔT debido al cambio de la fase entre la frecuencia fundamental y su primer armónico. Para valores mayores de ΔT , ocurren transiciones entre oscilaciones cuasiperiódicas y caóticas. En esta sección se utiliza un algoritmo para calcular automáticamente tanto la amplitud como la frecuencia fundamental de las oscilaciones en las medidas de temperatura. Este algoritmo sólo puede ser aplicado a oscilaciones periódicas y cuasiperiódicas con un único máximo por oscilación. La amplitud obtenida debe ser vista como una amplitud efectiva que indica la magnitud de las oscilaciones.

El algoritmo que analiza las oscilaciones de la temperatura procede de la siguiente manera. Primero, elimina fluctuaciones promediando los valores de

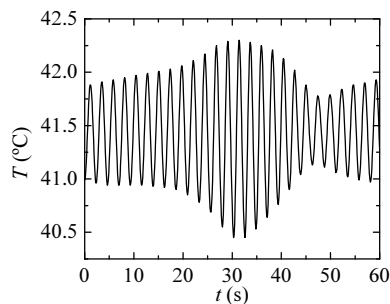


Figura 5.9: Temperatura medida por el segundo termopar para $\Delta T = 22.3$ K y $V = 0.85$.

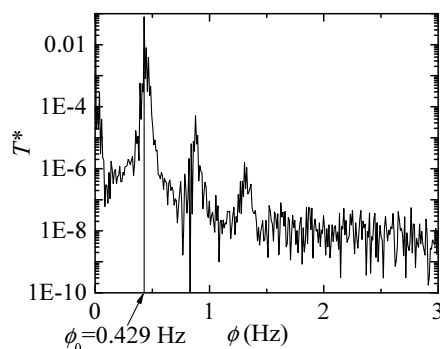


Figura 5.10: TDF calculada a partir de la serie de datos de la figura 5.9.

cada cinco puntos consecutivos. A continuación, detecta todos los máximos y mínimos locales de la serie de datos. Calcula la amplitud efectiva A de la oscilación promediando las diferencias entre dos extremos locales consecutivos. Después realiza interpolaciones lineales entre los M puntos de la señal original (es decir, sin quitar las fluctuaciones) para obtener una función continua. Utilizando esta función, obtiene un conjunto de N puntos equiespaciados temporalmente, donde N es la potencia de 2 más próxima a M . Por último, calcula la transformada discreta de Fourier (TDF) $\{T_n^*\}$ ($n = 0, 2, \dots, N - 1$) del conjunto de N puntos utilizando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier. La frecuencia ϕ de la oscilación es el máximo de la serie $\{T_n^*\}$. La figura 5.10 muestra la TDF de la serie de la figura 5.9. Puede apreciarse el pico $\phi = 0.429$ Hz que corresponde a la frecuencia fundamental de la oscilación.

El campo de temperaturas y la posición de la entrefase están relacionados, y por este motivo deben esperarse los mismos tipos de oscilación para ambas cantidades. Como se muestra en la figura 5.7, existen fluctuaciones importantes en la evolución de la posición de la entrefase, incluso utilizando el método de detección de contorno de intensidad umbral global. Se ha verificado que en muchos casos estas fluctuaciones no pueden ser eliminadas totalmente suavizando la serie, lo que impide la búsqueda automática de los extremos locales. Además, debido a las limitaciones del sistema de adquisición de imágenes utilizado en los experimentos, la serie temporal consta sólo de 350 puntos, lo que reduce significativamente la precisión de las frecuencias calculadas utilizando la TDF. Debido a esto, para calcular A y ϕ debe seguirse una estrategia totalmente distinta a la que se ha seguido para las oscilaciones de la temperatura. Se ha utilizado el método de optimización de Levenberg–Marquardt (Bates y Watts, 1988) para encontrar un ajuste por mínimos cuadrados de los datos experimentales al modelo

$$R - F = A \cos(2\pi\phi t + \varphi) + A_0 . \quad (5.1)$$

Se ha verificado que este método converge prácticamente a los mismos valores de las variables de optimización $\{A, \phi, \varphi, A_0\}$ partiendo de diferentes valores iniciales. Por tanto, no se requiere un análisis adicional de la serie para determinar los valores iniciales, y el cálculo tanto de la amplitud A como de la frecuencia ϕ se ha automatizado fácilmente. La figura 5.11 muestra el resultado obtenido a partir de la serie dibujada en la figura 5.7. La figura también muestra la serie suavizada promediando los valores de cada cinco puntos consecutivos. Como puede observarse, el ajuste no lineal reproduce satisfactoriamente la forma de la serie. La fiabilidad del cálculo de las variables de optimización se establece como se explica a continuación. Se obtienen diez estimaciones de $\{A, \phi, \varphi, A_0\}$ a partir del ajuste (5.1) a 10 subconjuntos de 35 puntos escogidos aleatoriamente entre los datos de la serie. Las desviaciones típicas de esas estimaciones indican la incertidumbre asociada con el cálculo de las variables de optimización. En todos los casos analizados, las desviaciones típicas para la amplitud A y la frecuencia ϕ fueron menores que $0.05 \mu\text{m}$ y $8 \times 10^{-3} \text{ Hz}$, respectivamente. Por último, se ha de reseñar que este método proporciona medidas precisas de la frecuencia fundamental ϕ y estima la amplitud (efectiva) A sólo para oscilaciones periódicas y cuasiperiódicas con un único máximo por oscilación, cuyas formas son similares a las asumidas en la ecuación (5.1). Por tanto, este procedimiento no se ha aplicado ni en oscilaciones en las que el máximo se ha dividido, ni en las no periódicas.

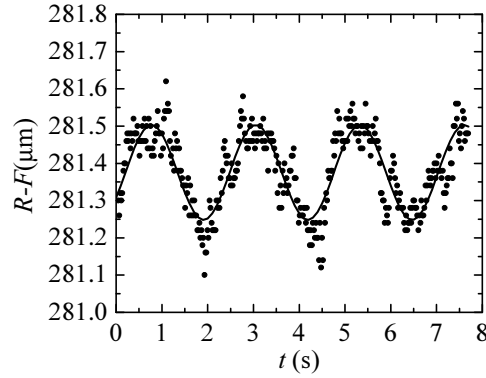


Figura 5.11: Ajuste no lineal calculado a partir de las series de la figura 5.7 (línea continua) y serie suavizada promediando los valores de cada cinco puntos consecutivos (símbolos).

Los métodos descritos con anterioridad permiten calcular, a partir de las medidas obtenidas en imágenes y termopares, tanto la amplitud (efectiva) como la frecuencia fundamental de las oscilaciones periódicas y cuasiperiódicas en las que el máximo no está dividido. Las frecuencias subyacentes en las oscilaciones periódicas en las que el máximo está escindido y en las oscilaciones caóticas pueden calcularse utilizando la TDF. En este último caso, tanto las oscilaciones de la temperatura como de la entrefase se han procesado mediante una función de MATHEMATICA que hace uso de la transformada rápida de Fourier. Los resultados obtenidos se presentan en la próxima sección.

5.5. Resultados

5.5.1. Estructura de la deformación de la entrefase

La imagen 5.12 muestra la dependencia de la amplitud A , frecuencia ϕ , fase φ , y posición media A_0 con respecto a la coordenada vertical z para un puente líquido con $V = 0.90$ y $\Delta T = 26.1$ K. Los diferentes símbolos corresponden a cada una de las 8 posiciones de la cámara en el experimento (véase la sección 5.3.2). Como se esperaba, los símbolos prácticamente se solapan en los intervalos en los que la altura z es común. La amplitud de las oscilaciones alcanza un máximo cerca de la barra superior, como se ha predicho

en trabajos teóricos previos (Shevtsova *et al.*, 1997; Kuhlmann y Nienhuser, 2002). La amplitud máxima es aproximadamente $1.2 \mu\text{m}$. La entrefase del puente líquido oscila con una frecuencia prácticamente independiente de la altura z . Las amplias fluctuaciones observadas para ϕ y φ cerca de la barra inferior son debidas a que en esa zona las oscilaciones son muy pequeñas y la presencia de ruido es importante, por lo que se reduce la efectividad del ajuste no lineal. La posición media $A_0(z)$ debería idealmente anularse en los puntos de anclaje $z = 0$ y $z = L$ mm. En el punto de anclaje superior se cumple que $A_0(L) = 0$, ya que ese punto es el que se utiliza como referencia para calcular la posición del puente en la imagen. El valor 0.09 mm obtenido en el soporte sólido inferior para A_0 revela ligeras deficiencias en el mecanizado de la celda del puente líquido, y/o una inclinación del eje de desplazamiento de la cámara con un ángulo inferior a 1.5° . También puede deberse a la dilatación de la barra superior y a la excentricidad entre las barras.

5.5.2. Regímenes de flujo

El análisis de las oscilaciones de la temperatura captadas por los cinco termopares permite identificar los distintos regímenes del flujo inducidos en el puente líquido. En distintos experimentos (Ueno *et al.*, 2003) y simulaciones numéricas (Melnikov *et al.*, 2004), se han encontrado al menos seis regímenes diferentes: (i) flujo estacionario axisimétrico, (ii) onda estacionaria con número de onda azimutal $m = 1$, (iii) onda viajera con $m = 1$, (iv) onda estacionaria con un modo mixto $m = 1 + 2$, (v) onda viajera cuasi-periódica con $m = 1 + 2$, y (vi) flujo caótico. Este hecho nos plantea la pregunta de si sería posible identificar los citados regímenes a partir de la observación de la deformación de la entrefase.

La figura 5.13 muestra la frecuencia fundamental y la amplitud que caracterizan la evolución temporal tanto de la temperatura del termopar 2 (el termopar más cercano al contorno observado) como de la deformación de la entrefase. La frecuencia de oscilación de la entrefase se ha calculado como el promedio sobre toda la entrefase, mientras que la amplitud se ha obtenido en $z = L - 567.1 \mu\text{m}$. Los resultados se han obtenido para $V = 0.85$ en función de ΔT . Tanto la temperatura como la deformación de la entrefase muestran el mismo comportamiento oscilatorio. Además, las frecuencias medidas prácticamente coinciden, mientras que las amplitudes presentan tendencias similares. Las líneas discontinuas verticales de la figura delimitan

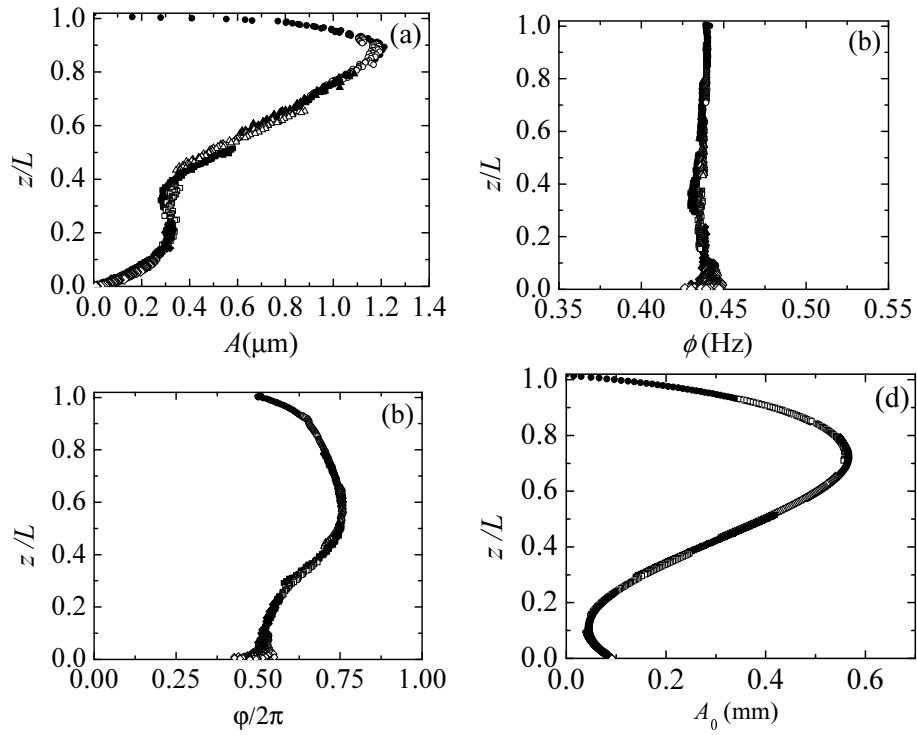


Figura 5.12: Dependencia de la amplitud A , frecuencia ϕ , fase φ , y posición promedio A_0 con respecto de la coordenada vertical z para un puente líquido con $V = 0.90$ y $\Delta T = 26.1$ K. Los símbolos corresponden a cada una de las 8 posiciones de la cámara en el experimento (véase sección 5.3.2).

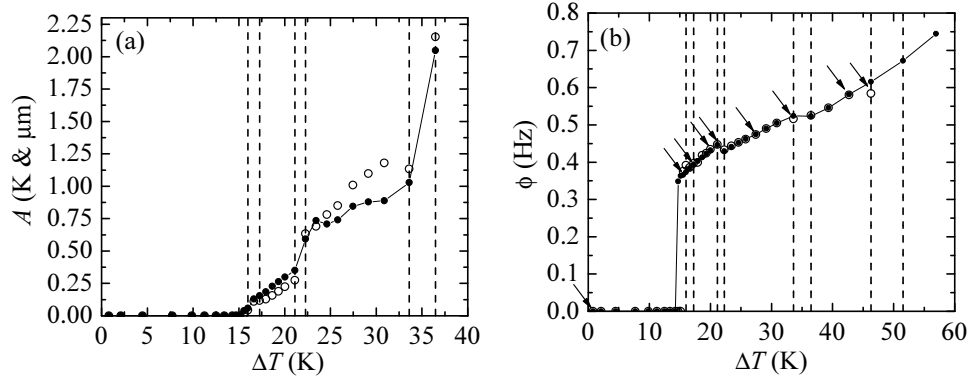


Figura 5.13: Amplitud (a) y frecuencia (b) de las oscilaciones de la temperatura en el termopar 2 (\bullet) y de la deformación de la interfase (\circ). Las líneas verticales indican los distintos regímenes de flujo identificados a partir del análisis de las oscilaciones de la temperatura medidas por los cinco termopares. Las flechas señalan los casos considerados en la figura 5.14.

tan los distintos regímenes del flujo mencionados con anterioridad. Éstos han sido identificados a partir del análisis de las oscilaciones de las temperaturas captadas por los cinco termopares (Shevtsova *et al.*, 1999, 2005).

La figura 5.14 muestra el comportamiento temporal de la temperatura en el termopar 2 y de la deformación de la interfase en $z = L - 567.1 \mu\text{m}$ para $V = 0.85$ y distintos valores de ΔT . Los valores de las frecuencias de oscilación correspondientes a los distintos regímenes de flujo se indican en la figura 5.13b. Para mostrar la magnitud de las oscilaciones, los valores medios $\langle F \rangle$ y $\langle T \rangle$ de las posiciones de la interfase y la temperatura se han sustraído de sus series correspondientes. Para que se aprecie mejor la forma de las oscilaciones de la interfase, se han eliminado pequeñas fluctuaciones promediando los valores de cada cinco puntos consecutivos. Como se menciona en la sección 5.3.2, la temperatura fue medida en el experimento durante un intervalo de tiempo de 100 s. La figura sólo muestra grabaciones de 8 s para poder comparar las formas de las oscilaciones de la temperatura y de la interfase. Por otra parte, es importante señalar que los orígenes temporales no coinciden necesariamente en ambos casos. En los gráficos de la izquierda, las líneas continuas corresponden a los ajustes no lineales (ecuación 5.1) obtenidos a partir de las series de datos. Como se explica en la sección 5.4.2, estos ajustes se han calculado para oscilaciones periódicas y cuasiperiódicas en las que el máximo no se divide.

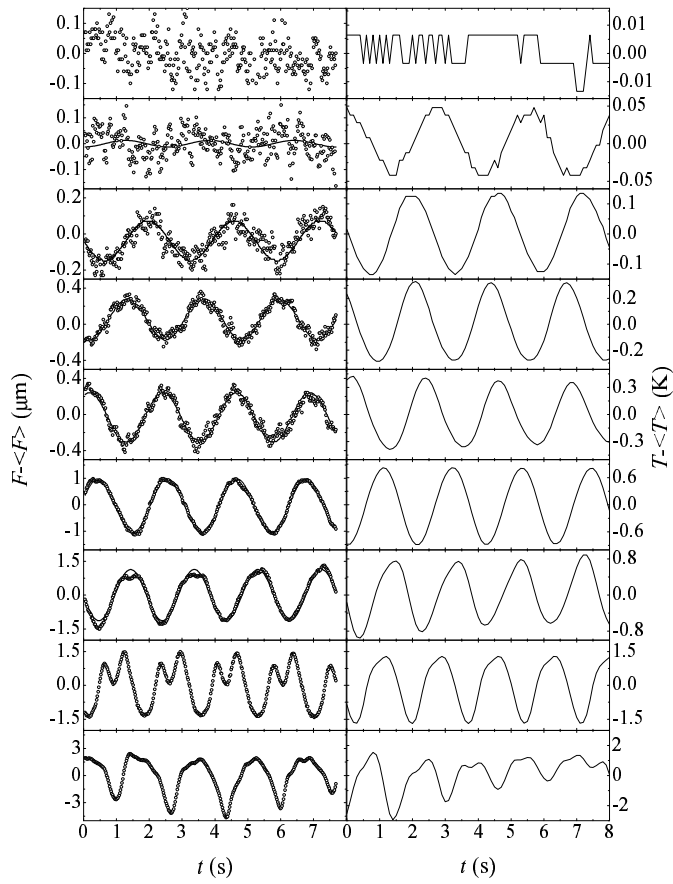


Figura 5.14: Comportamiento temporal de la deformación de la interfase en $z = L - 567.1 \mu\text{m}$ (gráficas de la izquierda) y la temperatura en el termopar 2 (gráficas de la derecha) para $V = 0.85$ y distintos valores de ΔT . Desde la parte superior hasta la parte inferior, $\Delta T = 0.8, 15.5, 16.6, 20.0, 21.1, 27.5, 33.6, 42.7, 46.3$ K. En las gráficas de la izquierda, las líneas sólidas se corresponden con los ajustes no lineales (5.1) obtenidos a partir de las series de datos.

La figura 5.14 merece varios comentarios. Para el caso en el que $\Delta T = 0.8$ K (gráficas superiores) se obtiene ruido blanco tanto en la posición de la interfase como en las medidas de temperatura. Cuando $\Delta T = 15.6$ K puede apreciarse claramente una oscilación de amplitud pequeña en el caso de la temperatura. Este comportamiento oscilatorio difícilmente se observa en el caso de la posición de la interfase, aunque el ajuste no lineal permite apreciar una oscilación armónica de $0.013 \mu\text{m}$ de amplitud y 0.38 Hz de frecuencia. Esta última es muy similar a la obtenida partir de las medidas de temperatura. Los casos en los que $\Delta T = 16.6, 20.0, 21.1, 27.5,$ y 33.6 K corresponden a oscilaciones cuasi-sinusoidales cuyas amplitudes aumentan monótonamente a medida que ΔT crece. Cuando $\Delta T = 16.6$ K se puede observar una ligera tendencia ascendente en ambas oscilaciones. Para $\Delta T = 21.1$ K, la amplitud de ambas oscilaciones decrece con el tiempo dentro del intervalo considerado, probablemente debido a la superposición de dos armónicos. El alejamiento de ambas oscilaciones es también similar para $\Delta T = 33.6$ K. La oscilación de la interfase recupera su carácter periódico para $\Delta T = 42.7$ K, aunque los máximos se excinden. La oscilación en la temperatura también vuelve a ser periódica, aunque la división del máximo no puede apreciarse. Finalmente, se observa un comportamiento no periódico (caótico) para $\Delta T = 46.3$ K en ambas oscilaciones.

Es importante señalar que, dado que la interfase se comporta como una superficie fluida, su posición F y la distribución de velocidades están unidos mediante la condición de compatibilidad cinemática. De esta forma, la influencia de la velocidad puede producir diferencias cualitativas entre las oscilaciones de la interfase y la temperatura. Por ejemplo, las simulaciones numéricas para puentes líquidos cilíndricos con un número de Prandtl medio (Shevtsova *et al.*, 2003), han mostrado una escisión de los máximos en las oscilaciones de la velocidad para valores de ΔT para los que las oscilaciones de la temperatura no presentaron dicha escisión. Esto puede explicar que haya diferencia entre las formas de las oscilaciones de la interfase y de la temperatura para $\Delta T = 42.7$ K.

5.5.3. Influencia del volumen

Por último, se han realizado distintos experimentos variando el volumen del puente líquido. La figura 5.15 muestra la dependencia de la amplitud A con respecto a la coordenada vertical z para $V = 0.80$. Concretamente, se indica la desviación relativa $\varepsilon = 100 \frac{\Delta T - \Delta T_{cr}}{\Delta T_{cr}}$ con respecto a la diferencia de

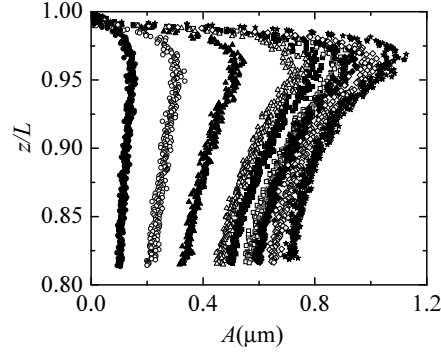


Figura 5.15: Dependencia de la amplitud, A con respecto a la coordenada vertical z para un puente líquido con volumen $V = 0.80$. Los símbolos \bullet , \circ , \blacktriangle , \triangle , \blacksquare , \square , \blacklozenge , \diamond y \star corresponden a $\varepsilon = 0.00, 3.18, 9.70, 17.64, 22.32, 27.17, 32.01, 39.44$ y 46.85 , respectivamente. $\Delta T_{cr} = 14.7$ K.

temperaturas crítica ΔT_{cr} para la que aparece el flujo oscilatorio. ΔT_{cr} se calculó a partir de las medidas de la entrefase y de la temperatura. Estas medidas han coincidido en todos los experimentos. Los datos correspondientes a cada valor de ε se han representado con símbolos diferentes. Como puede apreciarse en dicha figura, la amplitud de la oscilación alcanza un máximo en $z \simeq L - 120 \mu\text{m}$, y decrece a medida que z disminuye. Con lo que se mantiene la tendencia observada en la figura 5.12a para $V = 0.90$.

Por otra parte, la figura 5.16 muestra la amplitud que caracteriza la evolución temporal tanto de la temperatura del termopar 2 como de la deformación de la entrefase en $z = L - 530 \mu\text{m}$. Los resultados se han obtenido en función de ΔT para tres volúmenes distintos, $V = 0.80, 0.90$ y 1.00 . En dicha figura puede observarse, al igual que en la figura 5.13, que las amplitudes calculadas a partir de los termopares y de las imágenes presentan el mismo comportamiento. Además, la amplitud de la oscilación decrece a medida que aumenta el volumen medido. Para finalizar, se ha de señalar que ΔT_{cr} aumenta a medida que se incrementa el volumen, ya que $\Delta T_{cr} = 14.71$ K para $V = 0.80$, $\Delta T_{cr} = 18.02$ K para $V = 0.90$ y $\Delta T_{cr} = 18.44$ K para $V = 1.00$.

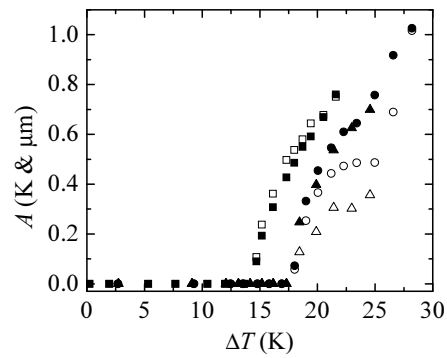


Figura 5.16: Amplitud (a) medida a partir de la evolución temporal de la temperatura en el termopar 2 ($V = 0.80$ (■), $V = 0.90$ (●), $V = 1.00$ (▲)) y de la deformación de la interfase ($V = 0.80$ (□), $V = 0.90$ (○), $V = 1.00$ (△)) en $z = L - 530 \mu\text{m}$.

Capítulo 6

DEFORMACIÓN MEDIA DE LA ENTREFASE PARA PUENTES LÍQUIDOS NO ISOTERMOS

6.1. Introducción

El flujo termocapilar que se produce en el interior de un puente líquido cuando se somete a un gradiente térmico altera la posición de la superficie libre. Si el gradiente de temperaturas es pequeño, la superficie libre adopta una posición estática diferente a la de equilibrio. Si el gradiente de temperaturas supera un cierto valor crítico, la posición instantánea de la entrefase es la superposición de una deformación media (estática) y oscilaciones de pequeña amplitud. Estas oscilaciones fueron analizadas en el capítulo anterior.

La inmensa mayoría de las simulaciones numéricas se realizan asumiendo que la superficie libre adopta su posición de equilibrio ($\Delta T = 0$) tanto para gradientes térmicos inferiores al crítico como para valores supercríticos. Se asume que esta simplificación no conduce a errores significativos si el número capilar es suficientemente pequeño. En este capítulo presentamos medidas experimentales de la deformación promedio de la superficie libre con respecto a su posición de equilibrio. Para gradientes térmicos inferiores al crítico, el promedio tiene simplemente un sentido estadístico y permite reducir el ruido en la medida. Para gradientes térmicos superiores al crítico, el promedio permite eliminar la influencia de las oscilaciones y obtener así la deformación estática que subyace dichas oscilaciones. Estos resultados permiten evaluar la simplificación adoptada en las simulaciones numéricas realizadas hasta la fecha. La organización del capítulo es la siguiente. En primer lugar, se presenta la configuración fluida objeto de estudio (sección 6.2). Además, se analiza la deformación promedio de la superficie libre cuando se aplica un gradiente de temperaturas determinado entre las barras que sostienen el puente líquido y se utiliza para el cálculo de la curvatura media

local de la interfase. Posteriormente, en las secciones 6.3 y 6.4, se explican tanto el método experimental completo como el procedimiento seguido para el análisis de las imágenes medidas experimentalmente. A continuación, se evalúan las medidas experimentales para establecer el rango de validez de las mismas (véase sección 6.5) y por último, en la sección 6.6, se discuten los resultados obtenidos.

6.2. Formulación del problema

La configuración fluida que se estudia en este capítulo es la misma que la del capítulo anterior (figura 5.1). Se trata de un puente líquido de volumen \mathcal{V} sujeto entre dos barras verticales y coaxiales de igual radio R separadas una distancia L . Para caracterizar la configuración se utiliza el volumen adimensionalizado $V \equiv \mathcal{V}/\mathcal{V}^*$, donde $\mathcal{V}^* = \pi R^2 L$ es el volumen del cilindro delimitado por las barras. Además, se asume que el líquido ancla a los bordes de éstas, impidiendo el movimiento de la línea de contacto triple. En las interfaces sólido-líquido superior e inferior se aplican temperaturas T_h y T_c ($T_h > T_c$), lo que conduce a una diferencia de temperaturas $\Delta T = T_h - T_c$. Además, el puente líquido está sujeto a la acción de la gravedad g_0 . Finalmente, la posición de su superficie libre se caracteriza mediante la función $F(\theta, z; t)$ que mide la distancia entre un elemento de la superficie y el eje z de los discos en el instante t .

Cuando $\Delta T = 0$, el puente líquido está en equilibrio, la superficie libre es axisimétrica, y se caracteriza mediante la función $F_0(z)$. La deformación respecto al cilindro $F_0(z) - R$ se debe a la acción de la fuerza gravitatoria y a la diferencia entre el volumen del puente líquido y el del cilindro delimitado entre las barras que lo sostienen. Cuando se aplica una pequeña diferencia de temperaturas entre los soportes, aparece un flujo estacionario axisimétrico en el puente líquido que deforma la superficie libre. La posición de la interfase $F(z) = F_0(z) + F^{(\text{est})}(z)$ todavía es axisimétrica, y difiere de la forma de equilibrio $F_0(z)$ en la perturbación $F^{(\text{est})}(z)$. Ésta última es al menos un orden de magnitud menor que la deformación $F_0(z) - R$ en equilibrio (Shevtsova *et al.*, en publicación).

Se pueden identificar fácilmente tres efectos responsables de la perturbación $F^{(\text{est})}(z)$: la expansión térmica del líquido, la variación de la tensión superficial a lo largo de la interfase, y los efectos hidrodinámicos en la fuerza que el líquido ejerce sobre la superficie libre. La expansión térmica causa un pequeño ($\lesssim 2\%$) incremento del volumen de líquido que constituye sin

embargo una contribución significativa a $F^{(\text{est})}(z)$. La tensión superficial varía en la superficie libre debido a la distribución de temperaturas, lo que cambia la respuesta local de la interfase a la fuerza que actúa sobre ella. En equilibrio esta fuerza es el resultado de la presión hidrostática. El flujo termoconvectivo altera el campo de presiones e induce la aparición de esfuerzos viscosos cerca de la superficie libre. Ambos efectos hidrodinámicos son relevantes cuando se determina la perturbación $F^{(\text{est})}(z)$.

Como ya se ha mencionado, cuando ΔT excede un cierto valor umbral ΔT_{cr} , el flujo termoconvectivo estacionario axisimétrico se vuelve inestable y aparece un flujo oscilatorio no axisimétrico. En ese caso, la forma de la superficie libre $F(\theta, z; t)$ se puede ver como la superposición de la correspondiente al régimen estacionario subyacente, $F_0(z) + F^{(\text{est})}(z)$, y las oscilaciones $F^{(\text{osc})}(\theta, z; t)$. En el capítulo 5, se ha utilizado una técnica óptica para medir la contribución $F^{(\text{osc})}(\theta, z; t)$ a la deformación total de la superficie libre $F(\theta, z; t)$. En la mayoría de los casos que se han analizado, $F^{(\text{osc})}(\theta, z; t)$ es una función periódica (o cuasiperiódica) del tiempo y al menos un orden de magnitud menor que $F^{(\text{est})}(z)$. El periodo de las oscilaciones varía entre 1.5 y 2.5 s.

En el presente análisis, se utilizan de nuevo técnicas ópticas para medir con precisión la contribución $F^{(\text{est})}(z)$ a la deformación total de la interfase, $F(\theta, z; t)$, tanto en el régimen estacionario como en el oscilatorio. Promediando los contornos de un conjunto de imágenes equiespaciadas temporalmente, se obtiene la deformación media $\langle F \rangle(z)$. En el régimen estacionario, este promedio sólo tiene significado estadístico ya que reduce el ruido asociado con la detección de la superficie libre en la imagen. Sin embargo, en el régimen oscilatorio el promedio se utiliza para eliminar la influencia de la oscilación. Es decir, debido a su pequeña magnitud y al carácter periódico de las oscilaciones que aparecen para $\Delta T \geq \Delta T_{cr}$, se puede despreciar la contribución $F^{(\text{osc})}(\theta, z; t)$ a la deformación promedio $\langle F \rangle(z)$, y por lo tanto, $\langle F \rangle \simeq F_0 + F^{(\text{est})}$ tanto para $\Delta T < \Delta T_{cr}$ como para $\Delta T \geq \Delta T_{cr}$.

A partir de la deformación promedio $\langle F \rangle(z)$ de la superficie libre se pueden obtener diferentes magnitudes. Entre ellas, la curvatura media local

$$C(z) = \frac{1}{\langle F \rangle (1 + \langle F \rangle_z^2)^{1/2}} - \frac{\langle F \rangle_{zz}}{(1 + \langle F \rangle_z^2)^{3/2}} \quad (6.1)$$

es probablemente la más relevante porque puede proporcionar medidas precisas y no intrusivas del salto de presiones Δp en la interfase (Lowry, 1996). Para demostrar esta afirmación, consideremos la convección de Marangoni

en un puente líquido cilíndrico. Si se desprecia la influencia de la viscosidad del aire, el balance entre las componentes normales de las fuerzas que actúan sobre la superficie libre conduce a $\sigma/R = \Delta p + 2\mu \partial v_n/\partial n$, donde v_n es la componente normal de la velocidad, y σ y μ son la tensión superficial y la viscosidad dinámica, respectivamente. $v_n \sim \text{Ma}^{-4/7}$ en la capa límite cercana a la superficie libre, cuyo ancho es $\delta \sim \text{Ma}^{-3/7}$ (Kuhlmann, 1999). En este análisis, v_n y δ se han adimensionalizado utilizando $V_c = \sigma_T \Delta T/\mu$ y $L_c = L$ como velocidad y longitud características, respectivamente, y $\sigma_T = d\sigma/dT$. Además, $\text{Ma} = \sigma_T \Delta T \rho L/\mu^2 \text{Pr}$ es el número de Marangoni evaluado a partir de los valores de σ_T , μ y de la densidad ρ en $T = T_c$. Dado que $\partial v_n/\partial n \sim v_n/\delta V_c/L_c$, se puede calcular con facilidad el orden de magnitud de la razón ξ entre los esfuerzos viscosos y la presión capilar: $\xi = 2\mu \partial v_n/\partial n/(\sigma/R) = 2\text{Ma}^{-1/7} R \sigma_T \Delta T/(\sigma L)$. Si se asume que este resultado puede aplicarse aproximadamente a formas no cilíndricas, entonces, $\xi \lesssim 10^{-2}$ en nuestros experimentos y, por lo tanto, $\Delta p \simeq \sigma C$.

Las simulaciones numéricas de la convección térmica en puentes líquidos de aceite de silicona de 5-cSt han mostrado que la temperatura T y, por consiguiente, la tensión superficial σ , toman valores prácticamente constantes en la parte central $0.1 \lesssim z/L \lesssim 0.85$ de la superficie libre, incluso para valores elevados de la diferencia de temperatura ΔT (Shevtsova y Legros, 1998). Esto implica que medidas ajustadas de C se pueden transformar inmediatamente en valores precisos del salto de presiones Δp en esa zona del puente líquido.

En este capítulo, se obtiene la curvatura media local $C(z)$ en la parte central $0.1 \lesssim z/L \lesssim 0.85$ del puente líquido a partir de imágenes adquiridas en experimentos. Los resultados se comparan con los correspondientes valores en el equilibrio para evaluar los efectos hidrodinámicos en la fuerza ejercida por el líquido sobre la superficie libre.

6.3. Método experimental

6.3.1. Montaje experimental

El montaje experimental es prácticamente el mismo que el descrito en la sección 5.3.1. Sin embargo, para medir la deformación de la interfase del puente líquido completo es necesario utilizar una amplificación inferior a la utilizada en los experimentos anteriores. Por este motivo, el tubo extensor y el objetivo microscópico se reemplazan por un objetivo que proporciona

un campo de visión de 8.6×8.6 mm y permite observar el puente líquido completo. Como no es necesario el desplazamiento vertical de la cámara, se prescinde del tornillo micrométrico vertical. El tornillo micrométrico horizontal se mantiene para mejorar la calidad del enfoque. El resto de los dispositivos experimentales son los descritos en el capítulo anterior, por lo que los errores experimentales concernientes a la excentricidad de las barras de la celda, a la diferencia de sus radios y a las temperaturas medidas en los microtermopares, son los que se indican en la sección 5.4.2. En este caso, el volumen no se obtiene de las especificaciones de la bomba de inyección, sino a partir de las imágenes experimentales, que muestran el puente líquido completo.

6.3.2. Procedimiento experimental

El procedimiento experimental coincide fundamentalmente con el descrito en la sección 5.3.2. En primer lugar, se realiza la calibración del montaje experimental y se prepara la celda para poder formar el puente. A continuación, se colocan las barras separadas una distancia L_0 , y se deposita un puente líquido de volumen V_0 entre ellas, inyectando aceite de silicona con la bomba de inyección. Una vez formado el puente, se aplica la diferencia de temperaturas ΔT seleccionando el voltaje correspondiente. Después de esperar un tiempo suficiente para que se desarrolle el flujo, se toman diez imágenes del puente líquido completo a intervalos iguales durante dos segundos. Los parámetros de control del experimento son L_0 , V_0 y ΔT . El experimento se repitió para distintos valores de estos parámetros.

Hay que tener en cuenta que al aplicar una diferencia de temperaturas ΔT se produce un calentamiento que provoca la dilatación tanto de las barras soporte como del líquido que forma el puente. Así, un puente que originalmente (con $\Delta T = 0$) tiene una altura L_0 y un volumen adimensional V_0 , pasa a tener una altura L menor y un volumen adimensional V mayor cuando se aplica una diferencia de temperaturas ΔT .

6.4. Procesado de las imágenes

En cada serie experimental se obtienen diez imágenes como la de la figura 6.1, en la que se observan el puente líquido y las barras entre las que se sostiene. El análisis de estas imágenes se ha realizado mediante un proce-

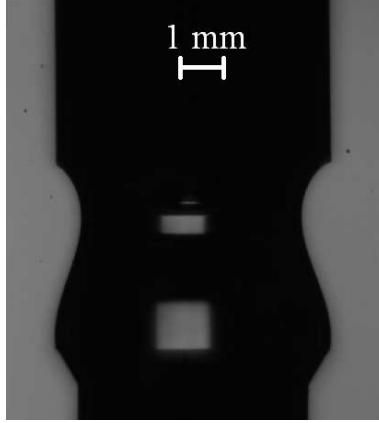


Figura 6.1: Imagen digital adquirida en un experimento con $L_0 = 3.691$ mm, $V_0 = 0.8200$, y $\Delta T = 15.20$ K.

dimiento desarrollado por Montanero y que se describe en Montanero *et al.* (enviado). Este procedimiento detecta los contornos en la imagen mediante un método ligeramente distinto a los descritos en este trabajo. Los contornos obtenidos son promediados y analizados para obtener los parámetros geométricos L y V , y la deformación media $\langle F \rangle$. La contribución $F^{(est)}$ se calcula restando al valor $\langle F \rangle$ la forma F_0 calculada numéricamente. Para ello se integra la ecuación de Young-Laplace utilizando los valores de L y V obtenidos a partir de las imágenes. Por último, la deformación media $\langle F \rangle$ también se utiliza para calcular la curvatura media local $C(z)$.

6.5. Evaluación de las medidas experimentales

El presente análisis pretende medir los efectos de la convección térmica en la forma $F(z)$ de la superficie libre de un puente líquido. Dado que las diferencias con respecto a la forma de equilibrio son pequeñas, la precisión del procedimiento experimental debe evaluarse con cuidado. Se pueden identificar dos fuentes de errores experimentales: la adquisición y el procesado de las imágenes. Respecto a la adquisición, los errores se deben a deficiencias en el montaje y en el procedimiento experimental. En el caso del procesado de imágenes, los errores se deben a la incertidumbre inherente al uso de un criterio para detectar la posición de la interfase en la imagen. Una comparación entre los resultados obtenidos a partir de imágenes reales y los esperados en

casos simples, permite evaluar la precisión global del método experimental. El uso de imágenes sintéticas permite, no obstante, analizar separadamente, y de forma controlada, la precisión de la técnica de procesamiento de imágenes. En este caso, la posición de la superficie libre en la imagen, obtenida mediante su procesamiento, puede ser comparada con su valor verdadero (conocido), y se pueden analizar las causas de la discrepancia. Se ha demostrado que las imágenes sintéticas son útiles para evaluar técnicas de procesamiento de imágenes (Cabezas *et al.*, 2007) o metodologías experimentales (Ferrera *et al.*, 2007). En esta sección, se utilizan ambos tipos de imágenes, real y sintética, para establecer el rango de fiabilidad de las medidas realizadas.

6.5.1. Imágenes sintéticas

Recientemente, se ha propuesto un procedimiento simple para generar imágenes sintéticas (Cabezas *et al.*, 2007). El procedimiento se basa en dos supuestos: (i) el perfil continuo de intensidad de gris en un eje perpendicular al contorno viene dado por la función sigmoideal (Boltzmann), y (ii) el valor de la función discreta de intensidad de gris $I(i, j)$ se puede calcular como el promedio espacial sobre el área de un píxel (i, j) de la función continua de intensidad de gris. La validez del primer supuesto está contrastada por muchas observaciones experimentales (Song y Springer, 1996). Por este motivo se emplea, hasta cierto punto, en las técnicas de detección de borde que se usan frecuentemente en este contexto. El segundo supuesto es una idealización del proceso de cuantización que ocurre en el sensor óptico. El procedimiento presentado por Cabezas *et al.* (2007) se controla mediante un conjunto de parámetros que permiten especificar los distintos aspectos de la imagen.

Para generar una imagen sintética del puente líquido tienen que especificarse la posición de su superficie libre y los parámetros de control de la imagen. Para simular las condiciones experimentales, se calcula la posición de la interfase numéricamente a partir de la ecuación de Young-Laplace teniendo en cuenta que la tensión superficial varía debido a la distribución de temperaturas. Esta distribución se obtiene a partir de simulaciones numéricas de las ecuaciones de Navier-Stokes (Shevtsova y Legros, 1998). Los valores de los parámetros de control se han determinado analizando imágenes experimentales. De esta manera, características como el contraste, la uniformidad en la iluminación, el ruido, o el ancho de borde, son similares tanto en la imagen real como en la sintética.

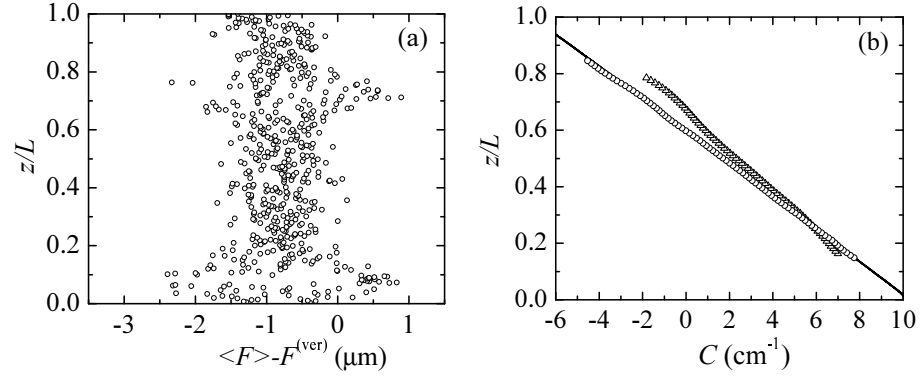


Figura 6.2: Diferencia $\langle F \rangle - F^{(ver)}$ de la posición media de la superficie libre $\langle F \rangle$ con respecto al valor verdadero $F^{(ver)}$ (a), y curvatura media local $C(z)$ (b) obtenidas a partir de imágenes sintéticas generadas para $L = 3.67$ mm, $V = 0.843$, y $\Delta T = 25.8$ K. En la gráfica (b), la línea continua es el valor verdadero mientras que los símbolos son los resultados obtenidos por los métodos propuestos en (Montanero *et al.*, enviado) (\circ) y en (Lowry, 1996) (\triangle).

La figura 6.2(a) muestra la diferencia $\langle F \rangle - F^{(ver)}$ de la posición media de la interfase $\langle F \rangle$, obtenida a partir de diez imágenes sintéticas, con respecto al valor verdadero $F^{(ver)}$. El procedimiento de detección de contornos utilizado (con criterio de intensidad umbral global) subestima la distancia entre la superficie libre y el eje del puente líquido. La distancia promedio entre la posición de la superficie libre detectada y su valor verdadero es de $0.83 \mu\text{m}$, lo que indica la precisión del criterio de umbral global aplicado a este problema. Como la detección de contornos se realiza a nivel subpíxel, este valor es inferior al tamaño del píxel que es $8 \mu\text{m}$, aproximadamente. La figura 6.2(b) muestra la distribución de la curvatura media local $C(z)$ calculada a partir de $\langle F \rangle$ utilizando el algoritmo propuesto por Montanero *et al.* (enviado). Existe un acuerdo muy bueno con el valor verdadero. La figura también muestra el resultado obtenido por una regresión no paramétrica propuesta por Lowry (1996) para el cálculo de la curvatura de gotas y puentes líquidos. Este método es más eficiente computacionalmente, aunque conduce a errores significativos para las imágenes que aquí se presentan.

6.5.2. Imágenes reales

Los resultados que se muestran en la figura 6.2(a) (y otros que no se incluyen en este documento) permiten concluir que un error de $1 \mu\text{m}$ puede deberse al criterio utilizado para determinar la posición de la entrefase. Este es el límite inferior del error total cometido en los experimentos, que es la suma de aquellos asociados tanto a la adquisición como al procesado de las imágenes. Para estimar el error total, se analizan imágenes reales de puentes líquidos en equilibrio ($\Delta T \simeq 0$). La posición de la entrefase detectada se compara con la correspondiente forma de equilibrio $F^{(0)}(z)$. Esta última se obtiene utilizando los valores de L y V calculados a partir de las imágenes en la integración de la ecuación de Young-Laplace. Además, se ha hecho uso de la tensión superficial σ obtenida mediante el método TIFA-AI (Cabezas *et al.*, 2006).

La figura 6.3 muestra los resultados obtenidos en dos experimentos. En ambos casos, la desviación máxima con respecto al valor esperado $F^{(0)}(z)$ es aproximadamente $3 \mu\text{m}$, mientras que su valor promedio está en torno a $0.9 \mu\text{m}$ (\bullet) y $1.3 \mu\text{m}$ (\circ). Estas discrepancias son ligeramente superiores a las obtenidas en las imágenes sintéticas. Debe puntualizarse que la naturaleza de las discrepancias observadas en las imágenes sintéticas es diferente de las obtenidas en las reales. En el primer caso, se ha medido el error asociado al procesado de las imágenes, es decir, la diferencia entre el contorno detectado $\langle F \rangle$ y su posición verdadera $F^{(\text{ver})}$. En el segundo caso, se logra una cancelación parcial de este error debido a que la forma de referencia $F^{(0)}(z)$ se calcula con los valores de L y V que se obtienen del análisis geométrico del perfil $\langle F \rangle$ obtenidos de las imágenes. De hecho, la diferencia $\langle F \rangle - F^{(0)}$ se debe asignar principalmente a errores en la adquisición de imágenes (impurezas en la entrefase, gradiente de temperaturas residual, ...). Esto explica por qué se puede observar una cierta estructura espacial en $\langle F \rangle - F^{(0)}$ que no existe en $\langle F \rangle - F^{(\text{ver})}$. La forma de $\langle F \rangle - F^{(0)}$ es diferente en los dos experimentos que se muestran en la figura.

La curvatura media local $C(z)$ de una entrefase axisimétrica en equilibrio es una función lineal de la altura z , es decir, $C(z) = C_0 - C_z z$. La tensión superficial σ puede ser obtenida a partir de su pendiente $C_z = \rho g_0 / \sigma$. La figura 6.4 muestra la curvatura media local $C(z)$ obtenida en la parte central $0.1 \lesssim z/L \lesssim 0.85$ de cuatro puentes líquidos en equilibrio. Como era de esperar, se obtienen funciones cuasilineales en los cuatro casos. Los valores de la tensión superficial calculados a partir de sus pendientes se diferencian

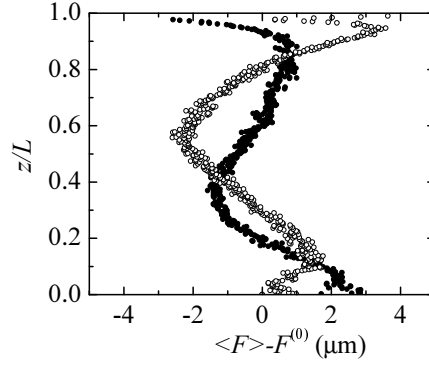


Figura 6.3: Diferencia $\langle F \rangle - F^{(0)}$ de la posición promedio de la interfase $\langle F \rangle$ con respecto a la correspondiente forma de equilibrio $F^{(0)}$ para $\{L_0 = 3.635 \text{ mm}, V_0 = 0.8764, \Delta T = 0.01 \text{ K}\}$ (●) y $\{L_0 = 3.691 \text{ mm}, V_0 = 0.8200, \Delta T = 1.04 \text{ K}\}$ (○).

de los proporcionados por TIFA-AI en menos de un 1%, lo que constituye una validación del procedimiento experimental completo. La figura también muestra los resultados obtenidos para un puente líquido con una diferencia de temperaturas aplicada $\Delta T = 41.86 \text{ K}$. A pesar que ΔT toma un valor elevado, la convección térmica no modifica sustancialmente la forma de $C(z)$. La pendiente (promedio) de $C(z)$ se incrementa debido a una disminución efectiva de la tensión superficial. Esto se discute con más detalle en la sección siguiente.

En resumen, los resultados que se han presentado en esta sección permiten concluir que la deformación $\langle F \rangle - F^{(0)}$ de la posición media de la interfase $\langle F \rangle$ con respecto a la forma de equilibrio $F^{(0)}$ correspondiente, se mide en los experimentos con una incertidumbre de $2 \mu\text{m}$ aproximadamente. Además, se obtienen resultados precisos de la curvatura media local mediante el algoritmo propuesto por Montanero *et al.* (enviado).

6.6. Resultados

Se han realizado varios experimentos sometiendo los puentes líquidos a distintas diferencias de temperatura ΔT . Para cada ΔT , se toman diez imágenes para medir los valores medios de la longitud L , volumen V y posición de la interfase F del puente líquido. Además, la curvatura media

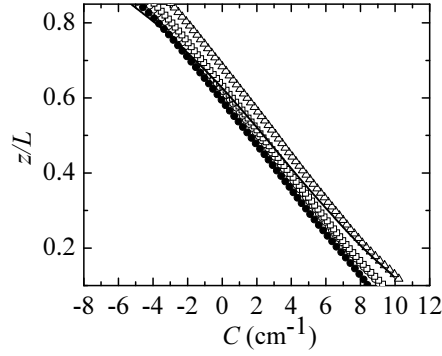


Figura 6.4: Curvatura media local $C(z)$ de la superficie libre de cuatro puentes líquidos en equilibrio ($\Delta T \simeq 0$) (símbolos), y de $\{L_0 = 3.635 \text{ mm}, V_0 = 0.8764, \Delta T = 41.86 \text{ K}\}$ (línea continua). Los símbolos corresponden a $\{L_0 = 3.635 \text{ mm}, V_0 = 0.8764, \Delta T = 0.01 \text{ K}\}$ (\circ), $\{L_0 = 3.691 \text{ mm}, V_0 = 0.8200, \Delta T = 1.04 \text{ K}\}$ (\bullet), $\{L_0 = 3.596 \text{ mm}, V_0 = 0.9000, \Delta T = 0.03 \text{ K}\}$ (\square), y $\{L_0 = 3.624 \text{ mm}, V_0 = 0.9895, \Delta T = 0.04 \text{ K}\}$ (\triangle).

local C se calcula a partir de $\langle F \rangle$ en la parte central del puente líquido. Los resultados que se presentan en esta sección corresponden a dos series experimentales. Los valores iniciales L_0 y V_0 de la longitud y del volumen del puente líquido son $\{L_0 = 3.691 \text{ mm}, V_0 = 0.8200\}$ y $\{L_0 = 3.635 \text{ mm}, V_0 = 0.8764\}$, mientras que los rangos de las diferencias de temperatura aplicados son $0 < \Delta T < 32 \text{ K}$ y $0 < \Delta T < 38 \text{ K}$ para las series experimentales (I) y (II), respectivamente. El análisis de las series de temperaturas medidas por los cinco termopares revela que la inestabilidad oscilatoria aparece en $\Delta T_{cr} = 16.80$ y 16.55 K para las series experimentales (I) y (II), respectivamente. Para $\Delta T \geq \Delta T_{cr}$, aparecen diferentes regímenes oscilatorios, al igual que en los experimentos analizados en el capítulo anterior (véase la sección 5.5.2).

La figura 6.5 muestra el efecto de la expansión térmica en la longitud L y el volumen V del puente líquido en dos series experimentales. La expansión térmica incrementa ligeramente la longitud de la barra superior y, por consiguiente, reduce la distancia L . Debido a las limitaciones en la detección del vértice de la barra superior, se observan amplias fluctuaciones. Se ha verificado que no existe incremento significativo de los radios de la barra superior en el curso de los experimentos. El efecto de la expansión térmica en el volumen V se aprecia fácilmente en la figura 6.5(b). Los dos experimentos muestran las mismas tendencias, aunque se obtienen pequeñas diferencias para valores elevados de ΔT . Esto indica que la temperatura pro-

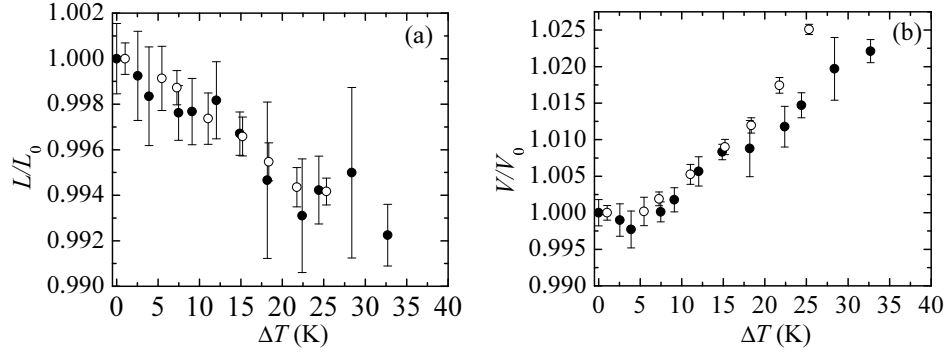


Figura 6.5: Longitud (a) y volumen (b) del puente líquido en función de ΔT para las series experimentales (I) (○) y (II) (●). Las barras de error son las desviaciones típicas calculadas a partir de las diez imágenes adquiridas para cada valor de ΔT .

mediada sobre el volumen del puente líquido es ligeramente diferente en los dos experimentos para esos valores de ΔT . Hay que señalar que las series experimentales se llevaron a cabo en días distintos y, por tanto, la temperatura ambiente y, consecuentemente, la transferencia de calor en la interfase pudo ser diferente. Para $\Delta T = 2.57$ y 3.90 K se observa una disminución muy pequeña del volumen del puente líquido en uno de los experimentos, que puede ser debida a una disminución de la temperatura de la barra inferior.

Las figuras 6.6-6.8 muestran los resultados obtenidos para las dos series experimentales $\Delta T=1.04, 5.46, 11.05, 15.20, 21.76, 25.33,$ y 31.26 K [serie (I)], y $\Delta T=0.01, 3.90, 7.46, 12.03, 18.18, 24.39, 28.39, 32.70,$ y 37.20 K [serie (II)]. Para cada ΔT , se toman diez imágenes para medir el valor medio $\langle F \rangle(z)$. Recordemos que si $\Delta T < \Delta T_{cr}$ entonces $\langle F \rangle(z)$ es la deformación de la interfase causada por la convección térmica estacionaria y axisimétrica. Si $\Delta T \geq \Delta T_{cr}$ entonces $\langle F \rangle(z)$ es una buena aproximación de la posición promedio de la interfase sobre un periodo de oscilación, y se corresponde con la deformación causada por el flujo estacionario axisimétrico que subyace esa oscilación (ver sección 6.2).

La deformación de la superficie libre $\langle F \rangle(z)$ difiere de la obtenida en equilibrio ($\Delta T = 0$) debido a la expansión térmica del líquido, la variación de la tensión superficial en la interfase, y los efectos hidrodinámicos en la fuerza ejercida sobre la superficie libre. En la figura 6.6 se dibuja la deformación $\langle F \rangle - F^{(0)}$, donde $F^{(0)}$ es la forma de equilibrio calculada a partir de la ecuación de Young-Laplace con L y V medidos en las imágenes. De esta

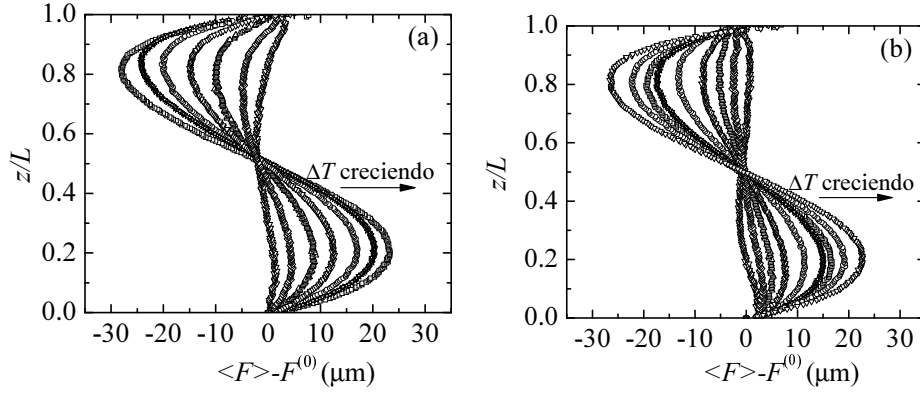


Figura 6.6: Deformación $\langle F \rangle - F^{(0)}$ de la posición media de la interfase $\langle F \rangle$ con respecto a las correspondientes formas de equilibrio $F^{(0)}$ para las series experimentales I (a) y II (b).

manera, se puede aislar la deformación causada por la variación en la tensión superficial y los efectos hidrodinámicos de aquella debida a la expansión térmica.

La deformación de la superficie libre mostrada en la figura 6.6 aumenta monótonamente con ΔT en las dos series experimentales, y su forma es prácticamente independiente de la diferencia de temperaturas aplicada ΔT . Esto puede apreciarse mejor en la figura 6.7 donde se ha dibujado el cociente $(\langle F \rangle - F^{(0)})/\Delta T$. Las deformaciones de la superficie libre se superponen dentro de la incertidumbre de las medidas, lo que significa que tienen la misma forma y sus magnitudes son aproximadamente proporcionales a ΔT . La magnitud de la deformación es mayor en la serie (I), para la que el volumen inicial es menor. No se observa diferencia significativa entre los resultados obtenidos en el flujo estacionario axisimétrico ($\Delta T < \Delta T_{cr}$) y el régimen oscilatorio ($\Delta T \geq \Delta T_{cr}$). En otras palabras, las ondas hidrotérmicas que aparecen en el régimen oscilatorio a medida que ΔT aumenta, no modifican el comportamiento de la deformación media. Los resultados experimentales están cualitativamente de acuerdo con las simulaciones numéricas para $\Delta T < \Delta T_{cr}$ (Shevtsova *et al.*, en publicación), que predicen una dependencia lineal de la deformación máxima con respecto a ΔT .

La figura 6.6 muestra la deformación de la interfase causada tanto por la variación de la tensión superficial a lo largo de la interfase como por los efectos hidrodinámicos sobre la fuerza ejercida por el líquido en la citada

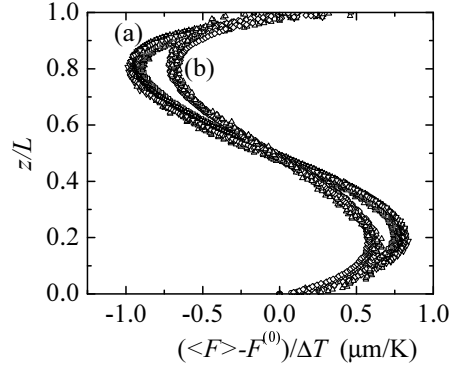


Figura 6.7: $(\langle F \rangle - F^{(0)})/\Delta T$ para las series experimentales I (a) y II (b).

superficie. Estos efectos hidrodinámicos pueden ser aislados calculando la diferencia $\langle F \rangle - F^{(1)}$. En este caso, $F^{(1)}$ es la forma calculada a partir de la ecuación de Young-Laplace teniendo en cuenta la dependencia $\sigma(T) = \sigma_0 + \sigma_T(T - T_c)$ de la tensión superficial con la temperatura. Para calcular $F^{(1)}$, se obtienen L y V mediante el procesamiento de las imágenes. A continuación, se mide σ_0 aplicando el método TIFA-AI a las imágenes experimentales para $\Delta T = 0$ y, por último, se estima $T(z)$ mediante simulaciones numéricas (Shevtsova y Legros, 1998). Si el campo de presiones fuera el de equilibrio y los esfuerzos viscosos normales a la interfase nulos, entonces $\langle F \rangle - F^{(1)}$ se anularía. El hecho que $\langle F \rangle - F^{(1)}$ no se anule revela la existencia de diferencias de la distribución de presiones en la interfase con respecto a la de equilibrio y/o esfuerzos normales viscosos.

La figura 6.8 muestra los resultados para las series experimentales (I) y (II). En ambos casos, la magnitud de $\langle F \rangle - F^{(1)}$ es aproximadamente la mitad de $\langle F \rangle - F^{(0)}$, lo que indica que los efectos hidrodinámicos tienen una influencia en la deformación de la interfase similar a la asociada con la variación de la tensión superficial. La forma de $\langle F \rangle - F^{(1)}$ indica que la convección térmica incrementa la fuerza ejercida en la parte inferior de la interfase y reduce la aplicada en la parte superior.

Los efectos hidrodinámicos en la fuerza soportada por la superficie libre también se pueden observar analizando su curvatura media local $C(z)$. Esta magnitud se calcula en los puntos que se sitúan en la parte central $0.1 \lesssim z/L \lesssim 0.85$ del contorno detectado (Montanero *et al.*, enviado). En todos los casos estudiados en este capítulo, se ha verificado que $C(z)$ es cua-

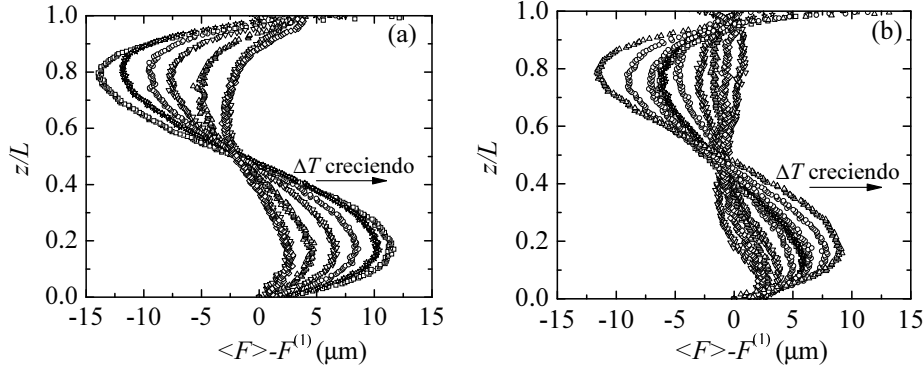


Figura 6.8: Deformación $\langle F \rangle - F^{(1)}$ de la posición media de la interfase $\langle F \rangle$ con respecto a la forma correspondiente $F^{(1)}$ para las series experimentales I (a) y II (b).

silineal, $C(z) = C_0 - C_z z$ (ver figura 6.4). A partir de los ajustes lineales realizados a diez subconjuntos de 35 puntos escogidos aleatoriamente sobre la superficie libre, se obtienen diez estimaciones $\{C_z^{(i)}\}$ ($i = 1, 2, \dots, 10$) de la pendiente C_z que permiten calcular la pendiente media $\langle C_z \rangle = \sum_{i=1}^{10} C_z^{(i)}$ y su correspondiente desviación típica. $\langle C_z \rangle$ representa la pendiente media de la curvatura entre $0.1 \lesssim z/L \lesssim 0.85$, mientras que la desviación típica es una medida de su linealidad.

La figura 6.9 muestra el cociente $\langle C_z \rangle / \langle C_{z0} \rangle$ de la pendiente promedio de la curvatura $\langle C_z \rangle$ con respecto a su valor $\langle C_{z0} \rangle$ medido en equilibrio ($\Delta T \simeq 0$) para las series experimentales I y II. En ambos casos, se obtienen dependencias lineales similares con respecto a ΔT . La pendiente $\langle C_z \rangle$ se incrementa con ΔT debido a la disminución de la tensión superficial y a los efectos hidrodinámicos sobre la fuerza soportada por la superficie libre. Para apreciar estos efectos hidrodinámicos, la figura también muestra el valor C_z^* de la pendiente de la curvatura calculada asumiendo equilibrio para $T = T_h$, es decir, $C_z^* = \rho(T_h)g_0/\sigma(T_h)$. La razón $\rho(T)/\sigma(T)$ aumenta con T para el aceite de silicona de 5-cSt. Esto implica que C_z^* constituye un límite superior de $\langle C_z \rangle$ si los efectos hidrodinámicos fueran despreciables. Sin embargo, $\langle C_z \rangle$ es mayor que C_z^* en los experimentos, lo que muestra la existencia de una contribución extra a $\langle C_z \rangle$ asociada al flujo termoconvectivo. La convección incrementa la diferencia entre la fuerza ejercida sobre las partes inferior y superior de la superficie libre y, por consiguiente, la parte inferior se abomba en contra de lo que ocurre en la parte superior.

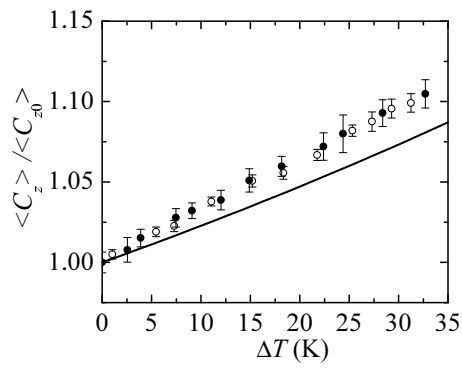


Figura 6.9: Cociente $\langle C_z \rangle / \langle C_{z0} \rangle$ de la pendiente promedio de la curvatura $\langle C_z \rangle$ con respecto a su valor correspondiente $\langle C_{z0} \rangle$ medido en equilibrio ($\Delta T \simeq 0$) para las series experimentales I (○) y II (●). Las barras de error son las desviaciones típicas. La línea corresponde al valor C_z^* de la pendiente de la curvatura calculada asumiendo equilibrio en $T = T_h$, es decir, $C_z^* = \rho(T_h)g_0/\sigma(T_h)$.

Capítulo 7

CONCLUSIONES

A continuación se presenta un resumen de los principales resultados y conclusiones obtenidos en este trabajo. Respecto al procedimiento experimental propuesto:

- Se ha diseñado un montaje experimental para el estudio de la dinámica de puentes líquidos. Este montaje se ha utilizado para el análisis de la vibración lineal, tanto axial como lateral, de puentes líquidos isoterms y en el estudio de la deformación de la entrefase en puentes líquidos no isoterms.
- Se ha desarrollado un procedimiento de análisis de imágenes que permite medir con gran precisión (a nivel subpíxel y con incertidumbres del orden de μm) la evolución de la entrefase. En los estudios del puente líquido sometido a una vibración, el procedimiento propuesto permite medir con precisión todas las cantidades involucradas en el problema (a excepción de la viscosidad cinemática y la gravedad).
- Uno de los aspectos más importantes del procedimiento experimental es la medida, sin ningún tipo de interacción con el puente, de la tensión superficial durante el experimento. Es muy importante conocer el valor de la tensión superficial con precisión ya que, como se puede observar en el capítulo cuarto, una pequeña diferencia de 3 mJ/m^2 produce un incremento de un 40% en la deformación máxima de la entrefase.

Al aplicar el procedimiento experimental propuesto al análisis de puentes líquidos sometidos a vibración forzada se obtienen las siguientes conclusiones:

- En el estudio de la vibración axial, los resultados experimentales coinciden con las aproximaciones de Cosserat y Euler. Esto indica que,

en las condiciones experimentales consideradas, se pueden despreciar los efectos asociados a la viscosidad y a la componente radial de la cantidad de movimiento.

- En el caso de vibración lateral, los resultados para un puente líquido no viscoso se han comparado con éxito con las predicciones teóricas dadas por las ecuaciones de Euler. Los resultados experimentales para puentes viscosos han permitido validar un modelo de rodajas recientemente propuesto (Montanero y Ferrera, 2008).
- Para ambos tipos de vibración, los resultados experimentales se han comparado con las predicciones para puentes líquidos cilíndricos. En el caso axial, la forma de equilibrio afecta a la deformación dinámica de la interfase no sólo cuantitativamente sino cualitativamente. En el caso lateral el efecto es menos apreciable a medida que aumenta la frecuencia.
- En ambos tipos de vibración, los efectos dinámicos son notables incluso para las frecuencias más pequeñas, ya que los resultados no coinciden con las soluciones cuasiestáticas de las ecuaciones de Euler.

Aplicando el procedimiento experimental desarrollado al estudio de puentes líquidos no isotermos, se han obtenido los siguientes resultados y conclusiones:

- Se han obtenido las amplitudes y las frecuencias de oscilación de la interfase en el régimen oscilatorio. Las amplitudes presentan el mismo comportamiento con respecto a ΔT y a V que las medidas a partir de las ondas térmicas. Las frecuencias obtenidas con las dos técnicas empleadas coinciden.
- Se ha analizado la dependencia axial de la oscilación dinámica de la interfase. La frecuencia no depende de la altura y la amplitud presenta un máximo cerca de la barra caliente. Estos resultados ratifican lo predicho en trabajos teóricos previos.
- Se ha obtenido la deformación media de la superficie libre tanto en el régimen estacionario como en el oscilatorio. La precisión con la que se ha medido la deformación con respecto a la forma de equilibrio es de $2 \mu\text{m}$.

-
- Se ha estudiado la influencia de la expansión térmica, la variación de la tensión superficial en la interfase y los efectos hidrodinámicos sobre la fuerza soportada por la interfase en la deformación media de la misma. Si se elimina el efecto de la expansión térmica, la magnitud de la deformación es proporcional al gradiente de temperaturas aplicado. Por otra parte, los efectos hidrodinámicos ejercen una influencia similar que los asociados a la variación de la tensión superficial a lo largo de la interfase.
 - Se ha mostrado la existencia de los citados efectos hidrodinámicos calculando la curvatura media local y comparándola con su valor en el equilibrio.

Son varias las líneas de trabajo que emanan del estudio presentado en esta tesis, especialmente en lo que concierne a la adaptabilidad de la metodología experimental desarrollada. El procedimiento propuesto puede ser fácilmente aplicado al estudio de la evolución de interfaces sujetas a perturbaciones de pequeña magnitud. Ejemplos son las ondas superficiales de alta frecuencia en contenedores (Henderson y Miles, 1994), la respuesta lineal de microzonas a fuerzas, tanto axiales como laterales, cuyas magnitudes son funciones arbitrarias del tiempo, y la medida de las tasas de amortiguamiento que caracterizan la posterior relajación al equilibrio.

Publicaciones

Los resultados principales de esta memoria están contenidos total o parcialmente en las siguientes publicaciones:

- Ferrera, C., Cabezas, M.G., Montanero, J.M. *An experimental analysis of the linear vibration of axisymmetric liquid bridges*. Phys. Fluids **18**, 082105:1-082105:16, 2006.
- Ferrera, C., Montanero, J.M. *Experimental study of small-amplitude lateral vibrations of an axisymmetric liquid bridge*. Phys. Fluids **19**, 118103:1-118103:4, 2007.
- Ferrera, C., Montanero, J.M., Mialdun, A., Shevtsova, V.M., Cabezas, M.G. *A new experimental technique for measuring the dynamical free surface deformation in liquid bridges due to thermal convection*. Meas. Sci. Technol. **19**, 015410:1-015410:10, 2008.
- Montanero, J.M., Ferrera, C. *A simple model to describe the lateral oscillations of axisymmetric liquid bridges*. Phys. Fluids, **20** (2), 2008.
- Ferrera, C., Mialdun, A., Shevtsova, V.M., Cabezas, M.G., Montanero, J.M. *Measurement of the dynamical free surface deformation in liquid bridges*. Acta Astronautica, en publicación.
- Shevtsova, V., Mialdun, A., Ferrera, C., Ermakov, M., Cabezas, M.G., Montanero, J.M. *Subcritical and Oscillatory Dynamic Surface Deformations in Non-Cylindrical Liquid Bridges*. Fluid Dynamics & Materials Processing, en publicación.
- Montanero, J.M., Ferrera, C., Shevtsova, V.M. *Experimental study of the free surface deformation due to thermal convection in liquid bridges*. Experiments in Fluids, enviado.

Otros trabajos publicados por el autor durante el periodo de realización de la tesis son:

- Acero, F.J., Ferrera, C., Cabezas, M.G., Montanero, J.M. *Liquid bridge equilibrium contours between non-circular supports*. Microgravity. Sci. Technol. **17**, 18-30, 2005.

- Cabezas, M.G., Montanero, J.M., Ferrera, C. *Computational evaluation of the theoretical image fitting analysis-axisymmetric interfaces (TIFA-AI) method of measuring interfacial tension*. Meas. Sci. Technol. **18**, 1637-1650, 2007.
- Ferrera, C., Montanero, J.M., Cabezas, M.G. *An analysis of the sensitivity of pendant drops and liquid bridges to measure the interfacial tension*. Meas. Sci. Technol. **18**, 3713-3723, 2007.

Bibliografía

- Acero, F. J. (2005). *Influencia de la rotación en las formas de equilibrio y la dinámica lineal de un puente líquido*. Tesis Doctoral, Universidad de Extremadura, Badajoz, España.
- Acero, F. J., Ferrera, C., Cabezas, M. G., y Montanero, J. M. (2005). Liquid bridge equilibrium contours between non-circular supports. *Microgravity sci. technol.*, XVII(2):18–30.
- Acero, F. J. y Montanero, J. M. (2005). Influence of isorotation on the linear dynamics of liquid bridges. *Phys. Fluids*, 17:078105.
- Ahrens, S., Falk, F., Großbach, R., y Langbein, D. (1994). Experiments on oscillations of small liquid bridges. *Microgravity Science and Technology*, 7(1):2–5.
- Ambrahaneswaran, B. y Basaran, O. A. (1999). Effects of insoluble surfactants on the nonlinear deformation and breakup of stretching liquid bridges. *Physics of Fluids*, 11(5):997–1015.
- Anastasiadis, S. H., Chen, J. K., Koberstein, J. T., Siegel, A. F., Sohn, J. E., y Emerson, J. A. (1987). The determination of interfacial-tension by video image-processing of pendant fluid drops. *J. Colloid Interface Sci.*, 119:55–66.
- Bakker, G. (1928). *Handbuch der Experimentalphysik*, volumen 6, capítulo Kapillarität und Oberflächenspannung. Verlag.
- Bansch, E., Berg, C. P., y Ohlhoff, A. (2004). Uniaxial extensional flows in liquid bridges. *Journal of Fluid Mechanics*, 521:353–379.
- Bates, D. M. y Watts, D. G. (1988). *Nonlinear Regression Analysis and its Applications*. John Wiley & Sons, New York.
- Bezdenejnykh, N. A. y Meseguer, J. (1991). Stability limits of minimum volume and breaking of axisymmetric liquid bridges between unequal disks. *Microgravity Science and Technology*, 4(4):235–239.

- Bezdeneynykh, N. A., Meseguer, J., y Perales, J. M. (1992). Experimental analysis of stability limits of capillary liquid bridges. *Physics of Fluids A*, 4(4):677–680.
- Bezdeneynykh, N. A., Meseguer, J., y Perales, J. M. (1999). An experimental analysis of the instability of nonaxisymmetric liquid bridges in a gravitational field. *Physics of Fluids*, 11(10):3181–3185.
- Billings, S., Bronlund, J., y Paterson, A. (2006). Effects of capillary condensation on the caking of bulk sucrose. *Journal of Food Engineering*, 77:887–895.
- Boucher, E. A. y Jones, T. G. J. (1988). Equilibrium and stability characteristics of zero-gravity fluid bridges constrained between equal solid rods. *Journal of Colloid and Interface Science*, 126(2):469–481.
- Brink, A. D. y Pendock, N. E. (1996). Minimum Cross-Entropy Threshold Selection. *Pattern Recognition*, 29(1):179–188.
- Burt, D. J. (1974). Basic Operation of the Charge Coupled Device. In *Int. Conf. on Technology and Applications of Charge Coupled Devices*, páginas 1–12, UK.
- Burton, J. C., Rutledge, J. E., y Taborek, P. (2004). Fluid pinch-off dynamics at nanometer length scales. *Physical Review Letters*, 92(24):244505–1.
- Cabezas, M. G. (2005). *Estudio experimental de la estática de gotas y puentes líquidos. Medición de la tensión superficial*. Tesis Doctoral, Universidad de Extremadura.
- Cabezas, M. G., Bateni, A., Montanero, J. M., y Neumann, A. W. (2004). A new drop-shape methodology for surface tension measurement. *Applied Surface Science*, 238:480–484.
- Cabezas, M. G., Bateni, A., Montanero, J. M., y Neumann, A. W. (2005). A new method of image processing in the analysis of axisymmetric drop shapes. *Colloid Surf. A-Physicochem. Eng. Asp.*, 255:193–200.
- Cabezas, M. G., Bateni, A., Montanero, J. M., y Neumann, A. W. (2006). Determination of surface tension and contact angle from the shapes of axisymmetric fluid interfaces without use of apex coordinates. *Langmuir*, 22:10053–10060.

- Cabezas, M. G., Ferrera, C., y Montanero, J. M. (2007). Computational evaluation of the theoretical image fitting analysis-axisymmetric interfaces (TIFA-AI) method of measuring interfacial tension. *Meas. Sci. Technol.*, 18(5):1637–1650.
- Cabezas, M. G. y Montanero, J. M. (2004). On the use of liquid bridges as tensiometers. *Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering*, 4:75–85.
- Canny, J. (1986). A computational approach to edge-detection. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 8:679–698.
- Cao, Z. H., Xie, J. C., Tang, Z. M., y Hu, W. R. (1991a). The influence of buoyancy on the onset of oscillatory convection in a half floating zone. *Advances in Space Research*, 11(7):163–166.
- Cao, Z. H., You, X. T., Tang, Z. M., y Hu, W. R. (1991b). Experimental investigation of thermocapillary convection in half floating zone. *Advances in Space Research*, 11(7):229–232.
- Carotenuto, L., Castagnolo, D., Albanese, C., y Monti, R. (1998). Instability of thermocapillary convection in liquid bridges. *Phys. Fluids*, 10(3):555–565.
- Castillo, I. y Munz, R. J. (2007). Transient modeling of heat, mass and momentum transfer of an evaporating cerium nitrate solution droplet with a surrounding shell in a rf thermal argon-oxygen plasma under reduced pressure. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 50:4468–4487.
- Chang, C. E. y Wilcox, W. R. (1975). Inhomogeneities due to thermocapillary flow in floating zone melting. *Journal of Crystal Growth*, 28(1):8–12.
- Chen, H. y Saghir, M. Z. (1994). Nonaxisymmetric equilibrium shapes of the liquid bridge. *Microgravity Science and Technology*, 7(1):12–19.
- Chen, T. Y. y Tsamopoulos, J. (1993). Nonlinear dynamics of capillary bridges: theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 255:373–409.
- Cheng, P., Li, D., Boruvka, L., Rotenberg, Y., y Neumann, A. (1990). Automation of axisymmetric drop shape analysis for measurements of interfacial tensions and contact angles. *Colloid Surf.*, 43:151–167.
- Cheng, P. y Neumann, A. W. (1992). Computational evaluation of axisymmetric drop shape analysis-profile (ADSA-P). *Colloid Surf.*, 62:297–305.

- Chow, C. K. y Kaneko, T. (1972). Automatic detection of the left ventricle from cineangiograms. *Computers and Biomedical Research*, 5:388–410.
- Chun, C. H. (1980). Marangoni convection in a floating zone under reduced gravity. *Journal of Crystal Growth*, 48(4):600–610.
- Chun, C. H. y Wuest, W. (1979). Experiments on the transition from steady to the oscillatory marangoni convection of a floating zone under reduced gravity effect. *Acta Astronautica*, 6:1073–1082.
- Coriell, S. R., Hardy, S. C., y Cordes, M. R. (1976). Melt shape in weightless crystal growth. *NBS Space Processing Research (NBSIR 76-980)*, página 99.
- Coriell, S. R., Hardy, S. C., y Cordes, M. R. (1977). Stability of liquid zones. *Journal of Colloid and Interface Science*, 60:126.
- Davis, A. M. J. y Frenkel, A. L. (1992). Cylindrical liquid bridges squeezed between parallel plates: Exact stokes flow solutions and hydrodynamic forces. *Physics of Fluids A*, 4(6):1105–1109.
- de Laplace, P.-S. (1806a). Supplément a la théorie de l'action capillaire in *Traité de la Mécanique Céleste*. *Gauthier-Villars*, páginas 419–498.
- de Laplace, P.-S. (1806b). Supplément au livre X: Sur l'action capillaire in *Traité de la Mécanique Céleste*. *Gauthier-Villars*, páginas 349–417.
- Decent, S. P., Sharpe, G., Shaw, A. J., y Suckling, P. M. (2006). The formation of a liquid bridge during the coalescence of drops. *International Journal of Multiphase Flow*, 32:717–738.
- del Río, O. I. y Neumann, A. W. (1997). Axisymmetric drop shape analysis: computational methods for the measurement of interfacial properties from the shape and dimensions of pendant and sessile drops. *J. Colloid Interface Sci.*, 196:136–147.
- Eggers, J. (1997). Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows. *Reviews of Modern Physics*, 69(3):865–929. Review.
- Eggers, J., Lister, J. R., y Stone, H. A. (1999). Coalescence of liquid drops. *Journal of Fluid Mechanics*, 401:293–310.
- Erle, M. A., Gillette, R. D., y Dyson, R. C. (1970). Stability of interfaces of revolution with constant surface tension. the case of catenoid. *Chemical Engineering Journal*, 1(2):97–109.

- Espino, J. L., Meseguer, J., y Laverón-Simavilla, A. (2002). An experimental study of the breakage of liquid bridges at stability limit of minimum volume. *Physics of Fluids*, 14(10):3710–3713.
- Eyer, A., Leiste, H., y Nitsche, R. (1984). Crystal growth of silicon in spacelab-1 experiment es 321. In *5th European Symposium on Material Sciences under Microgravity, ESA SP-222*, páginas 173–182.
- Eyer, A., Leiste, H., y Nitsche, R. (1985). Floating zone growth of silicon under microgravity in a sounding rocket. *J. Crystal Growth*, 71:173.
- Faour, G., Grimaldi, M., Richou, J., y Bois, A. (1996). Real-time pendant drop tensiometer using image processing with interfacial area and interfacial tension control capabilities. *J. Colloid Interface Sci.*, 181:385–392.
- Ferrera, C., Montanero, J. M., y Cabezas, M. G. (2007). An analysis of the sensitivity of pendant drops and liquid bridges to measure the interfacial tension. *Meas. Sci. Technol*, 18(12):3713–3723.
- Forsyth, D. A. y Ponce, J. (2003). *Computer Vision: A Modern Approach*. Prentice Hall.
- Frank, S. y Schwabe, D. (1997). Temporal and spatial elements of thermocapillary convection in floating zones. *Experiments in Fluids*, 23:234–251.
- Gañán-Calvo, A. M. (1991). Oscillations of liquid captive rotating drops. *Journal of Fluid Mechanics*, 226:63–89.
- Gañán-Calvo, A. M. y Barrero, A. (1990). Free oscillations of liquid captive drops. *Microgravity Science and Technology*, 3(2):70–86.
- Gañán-Calvo, A. M. y Montanero, J. M. (2005). A note on the small oscillation regimes of rotating liquid bridges: Transition from surface to internal wave modes. *Physics of Fluids*, 17:012101–1.
- García, F. J. y Castellanos, A. (1994). One-dimensional models for slender axisymmetric viscous liquid jets. *Physics of Fluids*, 6(8):2676–2689.
- García, F. J. y Castellanos, A. (1996). One-dimensional models for slender axisymmetric viscous liquid bridges. *Physics of Fluids*, 8(11):2837–2846.
- García, F. J., Castellanos, A., y González, H. (1997). Dynamics of slender viscous liquid bridges subjected to axial ac fields. *Journal of Electrostatics*, 42:259–278.

- Gaudet, S., McKinley, G. H., y Stone, H. A. (1996). Extensional deformation of newtonian liquid bridges. *Physics of Fluids*, 8(10):2568–2579.
- Gauss, C. F. (1830). Principia generalia Theoriae Figurae Fluidorum in statu Aequilibrii. *Comment. Soc. Reg. Gotting.*
- Gillette, R. D. y Dyson, R. C. (1971). Stability of fluid interfaces of revolution between equal solid circular plates. *Chemical Engineering Journal*, 2(1):44–54.
- Girault, H., Schiffrin, D. J., y Smith, B. J. (1982). Drop image processing for surface and interfacial tension measurements. *J. Electroanal. Chem.*, 137:207–217.
- Girault, H., Schiffrin, D. J., y Smith, B. J. (1984). The measurement of interfacial tension of pendant drops using a video image profile digitizer. *J. Colloid Interface Sci.*, 101:257–266.
- Glasbey, C. A. (1993). An analysis of histogram-based thresholding algorithms. *CVGIP: Graph. Models Image Process.*, 55(6):532–537.
- Gómez, M., Parra, I. E., y Perales, J. M. (2002). Mechanical imperfections effect on the minimum volume stability limit of liquid bridges. *Physics of Fluids*, 14(7):2029–2042.
- González, H., McCluskey, F. M. J., Castellanos, A., y Barrero, A. (1989). Stabilization of dielectric liquid bridges by electric fields in the absence of gravity. *Journal of Fluid Mechanics*, 206:545–561.
- Gonzalez, J. (2000). *Visión por computador*. Paraninfo.
- Gonzalez, R. C. y Woods, R. E. (2002). *Digital Image Processing*. Prentice Hall, NJ, 2 edition.
- Gopalkrishnana, P., Manas-Zloczowera, I., y Fekeb, D. (2005). Investigating dispersion mechanisms in partially infiltrated agglomerates: Interstitial fluid effects. *Powder Technology*, 156:111–119.
- Green, A. E. (1976). On the linear behaviour of fluid jets. *International Journal of Engineering and Science*, 14:49–63.
- Hansen, F. K. y Rødsrud, G. (1991). Surface tension by pendant drop: I. a fast standard instrument using computer image analysis. *J. Colloid Interface Sci.*, 141:1–9.

- Hashimoto, T., Kousaka, Y., Ueno, I., Kawamura, H., y Yoda, S. (2005). Numerical simulation of marangoni convection in consideration of free surface displacement. Technical Report JAXA-RR-04-027E, JAXA.
- Hashimoto, T., Ueno, I., Kawamura, H., y Yoda, S. (2003). Numerical simulation of marangoni convection in consideration of free surface displacement (part 6). Technical Report NASDA-TMR-0300004, NASDA.
- Hawksbee, F. (1709). *Physico-Mechanical Experiments on various subjects*, páginas 13916–13919. Hawksbee, F., London.
- Hawksbee, F. (1710/1712). An account of an experiment touching the direction of a drop of oil of oranges, between two glass planes. *Philosophical Transactions*, 27.
- Haynes, J. M. (1970). Stability of a fluid cylinder. *Journal of Colloid and Interface Science*, 32(4):652–654.
- Henderson, D. M. y Miles, J. W. (1994). Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line. *J. Fluid Mech.*, 275:285.
- Higuera, M. y Nicolás, J. (1997). Linear nonaxisymmetric oscillations of nearly inviscid liquid bridges. *Physics of Fluids*, 9(2):276–285.
- Higuera, M., Nicolás, J., y Vega, J. M. (1994). Linear oscillations of weakly dissipative axisymmetric liquid bridges. *Physics of Fluids*, 6(2):438.
- Higuera, M., Nicolás, J. A., y Vega, J. M. (2002). Weakly nonlinear non-axisymmetric oscillations of capillary bridges at small viscosity. *Physics of Fluids*, 14(9):3251–3271.
- Hoorfar, M. y Neumann, A. W. (2004). Axisymmetric drop shape analysis (ADSA) for the determination of surface tension and contact angle. *J. Adhes.*, 80:727–743.
- Hyer, J., Jankowski, D., y Neitzel, G. (1991). Thermocapillary convection in a model float zone. *AIAA J. Thermophys. Heat Transfer*, 5:577–582.
- Imaishi, N., Yasuhiro, S., Akiyama, Y., y Yoda, S. (2001). Numerical simulation of oscillatory marangoni flow in halfzone liquid bridge of low prandtl number. *J. Crystal Growth*, 230:164–171.
- Jurin, J. (1717/1719a). An Account of Some Experiments Shown before the Royal Society; With an Enquiry into the Cause of the Ascent and Suspension of Water in Capillary Tubes. *Philosophical Transactions*, 30:739–747.

- Jurin, J. (1717/1719b). An Account of Some New Experiments, Relating to the Action of Glass Tubes upon Water and Quicksilver. *Philosophical Transactions*, 30:1083–1096.
- Kamotani, Y., Matsumoto, S., y Yoda, S. (2007). Recent developments in oscillatory marangoni convection. *Fluid Dynamics & Materials Processing*, 3(2):147–160.
- Kamotani, Y. y Ostrach, S. (1998). Theoretical analysis of thermocapillary flow in cylindrical columns of high prandtl number fluids. *ASME J. Heat Transfer*, 120:758–764.
- Kamotani, Y., Ostrach, S., y Masud, J. (2000). Microgravity experiments and analysis of oscillatory thermocapillary flows in cylindrical containers. *J. Fluid Mech.*, páginas 211–233.
- Kamotani, Y., Ostrach, S., y Vargas, M. (1984). Oscillatory thermocapillary convection in a simulated floating-zone configuration. *Journal of Crystal Growth*, 66(1):83–90.
- Kamotani, Y., Wang, L., Hatta, S., Selver, R., y Yoda, S. (2001). Effect of free surface heat transfer on onset of oscillatory thermocapillary flow of high prandtl fluid. *J. Japan Society of Microgravity Application*, 18:283–288.
- Kamotani, Y., Wang, L., Hatta, S., Wang, A., y Yoda, S. (2003). Free surface heat loss effect on oscillatory thermocapillary flow in liquid bridges of high prandtl number fluids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46:3211–3220.
- Kani, T., Tamonoki, M., Suzuki, T., M., T., y H., K. (2007). Influence of surface-adhered nanoparticles and nanoporous structure on particle-particle interaction of silica. *Powder Technology*, 176:99–107.
- Kittler, J. e Illingworth, J. (1986). Minimum Error Thresholding. *Pattern Recognition*, 19(1):41–47.
- Kuhlmann, H., Nienhüser, C., Rath, H., y Yoda, S. (2002). Influence of the volume of liquid on the onset of three-dimensional flow in thermocapillary liquid bridges. *Adv. Space Research*, 29(4):639–644.
- Kuhlmann, H. C. (1994). Thermocapillary flows in finite size systems. *Mathl. Comput. Modelling*, 20(10-11):145–173.

- Kuhlmann, H. C. (1999). *Thermocapillary convection in models of crystal growth*. Springer-Verlag, Berlin.
- Kuhlmann, H. C. y Nienhuser, C. (2002). Dynamic free-surface deformations in thermocapillary liquid bridges. *Fluid Dynamic Research*, 31:103–127.
- Kurita, T., Otsu, N., y Abdelmalek, N. (1992). Maximum Likelihood Thresholding Based on Population Mixture Models. *Pattern Recognition*, 25(10):1231–1240.
- Lan, C. y Kou, S. (1991). Heat transfer, fluid flow, y interface shapes in floating-zone crystal growth. *J. Crystal Growth*, 108:351–366.
- Langbein, D. (1992). Oscillations of finite liquid columns. *Microgravity Sci. Technol.*, 5:73.
- Langbein, D., Falk, F., y Großbach, R. (1995). Oscillations of liquid columns under microgravity. *Advances in Space Research*, 16(7):23–26.
- Langbein, D. y Naumann, R. J. (1995). Double float zones. *Microgravity Science and Technology*, 8(4):226–235.
- Lappa, M., Savino, R., y Monti, R. (2001). Threedimensional numerical simulation of marangoni instabilities in non-cylindrical liquid bridges in microgravity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44:1983–2003.
- Lapuerta, V., Laverón-Simavilla, A., y Rodríguez, J. (en publicación). Stability of liquid bridges subject to an eccentric rotation. *Advances in Space Research*, en publicación.
- Laverón-Simavilla, A. y Checa, E. (1997). Effect of a lateral gravitational field on the nonaxisymmetric equilibrium shapes of liquid bridges held between eccentric disks and of volumes equal to those of cylinders. *Physics of Fluids*, 9(4):817–822.
- Laverón-Simavilla, A., Checa, E., y Perales, J. M. (2005). Stability of liquid bridges between twisted elliptical disks. *Advances in Space Research*, 36(1):17–25.
- Laverón-Simavilla, A., Meseguer, J., y Espino, J. L. (2003). Stability of liquid bridges between an elliptical and a circular supporting disk. *Physics of Fluids*, 15(10):2830–2836.

- Laverón-Simavilla, A. y Perales, J. M. (1995). Equilibrium shapes of non-axisymmetric liquid bridges of arbitrary volume in gravitational fields and their potential energy. *Physics of Fluids*, 7(6):1204–1213.
- Lee, H. C. (1974). Drop formation in a liquid jet. *IBM J. Res. Dev.*, 18:364–369.
- Leung, C. K. y Lam, F. K. (1996). Performance analysis for a class of iterative image thresholding algorithms. *Pattern Recognition*, 29:1523–1530.
- Leypoldt, J., Kuhlmann, H. C., y Rath, H. J. (2000). Three-dimensional numerical simulation of thermocapillary flows in cylindrical liquid bridges. *J. Fluid Mech.*, 414:285–314.
- Li, K., Yasuhiro, S., Imaishi, N., y Yoda, S. (2005). Marangoni flow in half-zone liquid bridge of molten tin under ramped temperature difference. *Journal of Crystal Growth*, 280(4):620–631.
- Lin, S. Y., Chen, L. J., Xyu, J., y Wang, W. J. (1995). An examination on the accuracy of interfacial tension measurement from pendant drop profiles. *Langmuir*, 11:4159–4166.
- Loglio, G., Tesei, U., Pandolfini, P., y Cini, R. (1996). A software-driven apparatus designed for measuring geometrical and physical properties of a large bubble formed at a capillary tip. *Colloid Surf. A-Physicochem. Eng. Asp.*, 114:23–30.
- Lowry, B. J. (1996). Pressure and stress measurement via image analysis (p-sia) of axisymmetric drops and liquid bridges. *J. Colloid Interface Sci.*, 176:284–297.
- Lowry, B. J. (2000). Fixed boundary dual liquid bridges in zero gravity. *Physics of Fluids*, 12(5):1005–1015.
- MacQueen, J. B. (1967). Some Methods for classification and Analysis of Multivariate Observations. In *5-th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, páginas 281–297, Berkeley, USA.
- Mahajan, M. P., Tsige, M., Taylor, P. L., y Rosenblatt, C. (1998). Paramagnetic liquid bridge in a gravity-compensating magnetic field. *Physics of Fluids*, 10(9):2208–2211.

- Mahajan, M. P., Tsige, M., Zhang, S., Alexander, J. I. D., Taylor, P. L., y Rosenblatt, C. (2000). Collapse dynamics of liquid bridges investigated by time-varying magnetic levitation. *Physical Review Letters*, 84(2):338–341.
- Mahajan, M. P., Tsige, M., Zhang, S., Alexander, J. I. D., Taylor, P. L., y Rosenblatt, C. (2002). Resonance behavior of liquid bridges under axial and lateral oscillating forces. *Experiments in Fluids*, 33:503–507.
- Mahajan, M. P., Zhang, S., Tsige, M., Taylor, P. L., y Rosenblatt, C. (1999). Stability of magnetically levitated liquid bridges of arbitrary volume subjected to axial and lateral gravity. *Journal of Colloid and Interface Science*, 213:592–595.
- Mancebo, F. J., Nicolás, J. A., y Vega, J. M. (1998). Chaotic oscillations in a nearly inviscid, axisymmetric capillary bridge at 2:1 parametric resonance. *Physics of Fluids*, 10(5):1088–1103.
- Maravall, D. (1993). *Reconocimiento de formas y visión artificial*. RAMA.
- Marr-Lyon, M. J., Thiessen, D. B., Blonigen, F. J., y Marston, P. L. (2000). Stabilization of electrically conducting capillary bridges using feedback control of radial electrostatic stresses and the shapes of extended bridges. *Physics of Fluids*, 12(5):986–995.
- Marr-Lyon, M. J., Thiessen, D. B., y Marston, P. L. (1997). Stabilization of a cylindrical capillary bridge far beyond the rayleigh-plateau limit using acoustic radiation pressure and active feedback. *J. Fluid Mech.*, 351:345–357.
- Marr-Lyon, M. J., Thiessen, D. B., y Marston, P. L. (2001). Passive stabilization of capillary bridges in air with acoustic radiation pressure. *Physical Review Letters*, 86(11):2293–2296.
- Martínez, I. (1978). *Floating zone. Equilibrium shapes and stability criteria*, volumen COSPAR Space Research XVIII., páginas 519–522. Pergamon Press.
- Martínez, I. (1987). Stability of liquid bridges results of SL-D1 experiment. *Acta Astronautica*, 6(7):449–453.
- Martínez, I., Meseguer, J., y Perales, J. M. (2002a). Analytical modelling of floating zone crystal growth. *Advances in Space Research*, 29(4):569–574.

- Martínez, I., Meseguer, J., y Perales, J. M. (2002b). Simulation of non-axisymmetric floating zone crystal growth under microgravity. *Microgravity Science and Technology*, 13(2):3–11.
- Martínez, I. y Perales, J. M. (1986). Liquid bridge stability data. *Journal of Crystal Growth*, 78:369–378.
- Martínez, I., Perales, J. M., y Meseguer, J. (2004). Non-linear response of a liquid bridge to a sinusoidal acceleration under microgravity. *Experiments in Fluids*, 37:775–781.
- Mason, G. C. (1970). An experimental determination of the stable length of cylindrical liquid bubbles. *Journal of Colloid and Interface Science*, 32(1):172–176.
- Melnikov, D. E., Shevtsova, V. M., y Legros, J. C. (2004). Onset of temporal aperiodicity in high Prandtl number liquid bridge under terrestrial conditions. *Phys. Fluids*, 16:1746–1757.
- Meseguer, J. (1983). The breaking of axisymmetric slender liquid bridges. *Journal of Fluid Mechanics*, 130:123–151.
- Meseguer, J. (1984). Stability of slender, axisymmetric liquid bridges between unequal disks. *Journal of Crystal Growth*, 67:141–143.
- Meseguer, J. (1985). The dynamics of axisymmetric slender liquid bridges between unequal disks. *Journal of Crystal Growth*, 73:599–608.
- Meseguer, J., Bezdenejnykh, N. A., Perales, J. M., y de Francisco, P. R. (1995a). Theoretical and experimental analysis of stability limits of non-axisymmetric liquid bridges under microgravity conditions. *Microgravity Science and Technology*, 8(1):2–9.
- Meseguer, J., Bezdenejnykh, N. A., y Rodríguez de Francisco, P. (1996). On the use of liquid bridges as accelerometers. *Microgravity Science and Technology*, 9(2):1–8.
- Meseguer, J., Espino, J. L., Perales, J. M., y Laverón-Simavilla, A. (2003). On the breaking of long, axisymmetric liquid bridges between unequal supporting disks at minimum volume stability limit. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 22:355–368.
- Meseguer, J., Mayo, L. A., Llorente, J. C., y Fernández, A. (1985). Experiments with liquid bridges in simulated microgravity. *Journal of Crystal Growth*, 73:609–621.

- Meseguer, J. y Perales, J. M. (1991). Viscosity effects on the dynamics of long axisymmetric liquid bridges. *Microgravity Science and Technology*, 4(2):139–142.
- Meseguer, J. y Perales, J. M. (1992a). Non steady phenomena in the vibration of viscous, cylindrical, long liquid bridges. *Microgravity Science and Technology*, 5(2):69–72.
- Meseguer, J. y Perales, J. M. (1992b). Viscosity effects on the dynamics of long axisymmetric liquid bridges. In Rath, H. J., editor, *Microgravity fluid mechanics*, páginas 3–16, Bremen, Germany. IUTAM, Springer-Verlag.
- Meseguer, J., Perales, J. M., y Alexander, J. I. D. (2001). A perturbation analysis of the stability of long liquid bridges between almost circular supporting disks. *Physics of Fluids*, 13(9):2724–2727.
- Meseguer, J., Perales, J. M., y Bezdenejnykh, N. A. (1991). A theoretical approach to impulsive motion of viscous liquid bridges. *Microgravity Q.*, 1(4):215–219.
- Meseguer, J., Perales, J. M., Martínez, I., Bezdenejnykh, N. A., y Sanz, A. (1999). Hydrostatic instabilities in floating zone crystal growth process. *Current Topics in Crystal Growth Research*, 5:27–42.
- Meseguer, J. y Sanz, A. (1985). Numerical and experimental study of the dynamics of axisymmetric slender liquid bridges. *Journal of Fluid Mechanics*, 153:83–101.
- Meseguer, J., Sanz, A., y Perales, J. M. (1990). Axisymmetric long liquid bridges stability and resonances. *Applied Microgravity Technology*, 2(4):186–192.
- Meseguer, J., Slobozhanin, L. A., y Perales, J. M. (1995b). A review on the stability of liquid bridges. *Advances in Space Research*, 16(7):5–14.
- Minkowski, H. (1906). *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, volumen 5, cap'itulo 9, Kapillarität, páginas 558–613. Erstel Teil.
- Mollot, D. J., Tsamopoulos, J., Chen, T. Y., y Ashgriz, N. (1993). Nonlinear dynamics of capillary bridges: experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, 255:411–435.
- Montanero, J. M. (2003a). Linear dynamics of axisymmetric liquid bridges. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 22:167–178.

- Montanero, J. M. (2003b). Theoretical analysis of the vibration of axisymmetric liquid bridges of arbitrary shape. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 16(3):171–186.
- Montanero, J. M. (2004a). Influence of the outer bath on the eigenfrequencies of rotating axisymmetric liquid bridges. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 17(3):213–223.
- Montanero, J. M. (2004b). On the experimental analysis of the linear dynamics of slender axisymmetric liquid bridges. *Microgravity Science and Technology*, 15:3–11.
- Montanero, J. M. (2007). Numerical analysis of the nonlinear vibration of axisymmetric liquid bridges. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 26:284–294.
- Montanero, J. M., Acero, F. J., Cabezas, M. G., y Moya, J. M. (2002a). Equilibrium contour of liquid bridges connected by pressure. *Microgravity Science and Technology*, 13(4):14–23.
- Montanero, J. M., Cabezas, G., Acero, J., y Perales, J. M. (2002b). Theoretical and experimental analysis of the equilibrium contours of liquid bridges of arbitrary shape. *Physics of Fluids*, 14(2):682–693.
- Montanero, J. M., Cabezas, G., Acero, J., y Zayas, F. (2001). Using rotating liquid bridges as accelerometers. *Microgravity Science and Technology*, 12(3):101–106.
- Montanero, J. M. y Ferrera, C. (2008). A simple model to describe the lateral oscillations of axisymmetric liquid bridges. *Phys. Fluids*, 20.
- Montanero, J. M., Ferrera, C., y Shevtsova, V. (enviado). Experimental study of the free surface deformation due to thermal convection in liquid bridges. *Experiments in Fluids*.
- Morse, S. F., Thiessen, D. B., y Marston, P. L. (1996). Capillary bridge modes driven with modulated ultrasonic radiation pressure. *Physics of Fluids*, 8(1):3–5.
- Müller, G. (1989). *Crystals: Growth, properties and applications*, volumen 12, capítulo Convection and inhomogeneities in crystal growth from the melt, páginas 1–133. Springer, Berlin.
- Myshkis, A. D., Babskii, V. G., Kopachevskii, N. D., Slobozhanin, L. A., y Tyuptsov, A. D. (1987). *Low-gravity fluid mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, Germany.

- Nicolás, J. A. (1991). Frequency response of axisymmetric liquid bridges to an oscillatory microgravity field. *Microgravity Science and Technology*, 4(3):188–190.
- Nicolás, J. A. (1992). Hydrodynamic stability of high-viscosity cylindrical liquid bridges. *Physics of Fluids A*, 4(8):1620–1626.
- Nicolás, J. A., Rivas, D., y Vega, J. M. (1998). On the steady streaming flow due to high-frequency vibration in nearly inviscid liquid bridges. *Journal of Fluid Mechanics*, 354:147–174.
- Nicolás, J. A. y Vega, J. M. (1996). Weakly nonlinear oscillations of nearly inviscid axisymmetric liquid bridges. *Journal of Fluid Mechanics*, 328:98–128.
- Nicolás, J. A. y Vega, J. M. (2000a). Linear oscillations of axisymmetric viscous liquid bridges. *Z. angew. Math. Phys.*, 51:701–731.
- Nicolás, J. A. y Vega, J. M. (2000b). A note on the effect of surface contamination in water wave damping. *J. Fluid Mech.*, 410:367.
- Nishino, K. y Yoda, S. (2000). The role of dynamic surface deformation in oscillatory marangoni convection in liquid bridge of high prandtl number. In Inokuchi, H., editor, *Marangoni convection modeling research, NASDA Technical Memorandum*, number TMR-000006E, páginas 43–71. NASDA.
- Noordmans, J. y Busscher, H. J. (1991). The influence of droplet volume and contact-angle on liquid surface-tension measurements by axisymmetrical drop shape analysis-profile (ADSA-P). *Colloid Surf.*, 58:239–249.
- Okubo, N., Jono, R., Shiratori, S., Goto, S., y Hibiya, T. (2005). Non-contact measurement of surface oscillation due to marangoni flow instability in a silicon liquid bridge by phase-shift interferometry. *Journal of Materials Science*, 40:2245–2249.
- Oruganti, R. K. y Ghosh, A. K. (2007). Fabrication of nickel honeycombs. *Acta Materialia*, 55:6074–6083.
- Otsu, N. (1979). A Threshold Selection Method from Gray-Level Histograms. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*.
- Padday, J. F., Pétré, G., Rusu, C. G., Gamero, J., y Wozniak, G. (1997). The shape, stability and breakage of pendant liquid bridges. *Journal of Fluid Mechanics*, 352:177–204.

- Paglai, P., Simons, S. J. R., y Rhodes, D. (2007). A novel experimental study of temperature enhanced cohesive interparticle forces. *Powder Technology*, 174:71–74.
- Pallas, N. R. y Harrison, Y. (1990). An automated drop shape apparatus and the surface-tension of pure water. *Colloid Surf.*, 43:169–194.
- Patel, N. M., Dodge, M. R., Alexander, J. I. D., Slobozhanin, L. A., Taylor, P. L., y Rosenblatt, C. (2002). Stability of connected cylindrical liquid bridges. *Physical Review E*, 65:0263061–0263064.
- Perales, J. M. (1987). Non-axisymmetric effects on long liquid bridges. *Acta Astronautica*, 15(8):561–565.
- Perales, J. M. y Meseguer, J. (1992). Theoretical and experimental study of the vibration of axisymmetric viscous liquid bridges. *Physics of Fluids*, 4(6):1110–1130.
- Perales, J. M., Meseguer, J., y Martínez, I. (1991). Minimum volume stability limits for axisymmetric liquid bridges subject to steady axial acceleration. *Journal of Crystal Growth*, 110:855–861.
- Perales, J. M., Sanz, A., y Rivas, D. (1990). Eccentric rotation of a liquid bridge. *Applied Microgravity Technology*, 2(4):193–197.
- Peterson, C. (2001). How It Works: The Charged-Coupled Device. *Journal of Young Investigators*.
- Plateau, J. A. F. (1849). Sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur. *Mem. Acad. R. Belg. Nouv. Ser.*, 23.
- Plateau, J. A. F. (1873). Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires. *Gauthier-Villars*.
- Preisser, F., Schwabe, D., y Scharmann, A. (1983). Steady and oscillatory thermocapillary convection in liquid columns with free cylindrical surface. *J. Fluid Mech.*, 126:545–567.
- Ramos, A., García, F. J., y Valverde, J. M. (1999). On the breakup of slender liquid bridges: experiments and a one-dimensional numerical analysis. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 18(4):649–658.
- Ramos, A., González, H., y Castellanos, A. (1994). Experiments on dielectric liquid bridges subjected to axial electric fields. *Physics of Fluids*, 6(9):3206–3208.

- Rayleigh, J. W. S. (1945). *The Theory of Sound*. Dover, New York, USA.
- Ridler, T. W. y Calvard, S. (1978). Picture thresholding using an iterative selection method. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, 8(8):630–632.
- Rivas, D. y Meseguer, J. (1984). One-dimensional self-similar solution of the dynamics of axisymmetric slender liquid bridges. *Journal of Fluid Mechanics*, 138:417–429.
- Röck, M. y Schwedes, J. (2005). Investigations on the caking behaviour of bulk solids—macroscopic experiments. *Powder Technology*, 157:121–127.
- Rosin, P. e Ioannidis, E. (2003). Evaluation of global image thresholding for change detection. *Pattern Recognition Letters*, 24:2345–2356.
- Rouse Ball, W. W. (1960). *A short account of the history of mathematics*. Courier Dover, New York.
- Russo, M. J. y Steen, P. H. (1986). Instability of rotund capillary bridges to general disturbances: Experiment and theory. *Journal of Colloid and Interface Science*, 113(1):154–163.
- Sanz, A. (1985). The influence of the outer bath in the dynamics of axisymmetric liquid bridges. *Journal of Fluid Mechanics*, 156:101–140.
- Sanz, A. y López-Díez, J. (1989). Non-axisymmetric oscillations of liquid bridges. *Journal of Fluid Mechanics*, 205:503–521.
- Sanz, A. y Martínez, I. (1983). Minimum volume for a liquid bridge between equal disks. *Journal of Colloid and Interface Science*, 93(1):235–240.
- Sanz, A., Perales, J., y Rivas, D. (1992). Rotational instability of a long liquid column. *ESA SP-1132*, 2:8–21.
- Schatz, M. y Neitzel, G. (2001). Experiments on thermocapillary instabilities. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 33:93–129.
- Schulkes, R. M. S. M. (1993). Nonlinear dynamics of liquid columns: A comparative study. *Physics of Fluids A*, 5(9):2121–2130.
- Schwabe, D. y Scharmman, A. (1979). Some evidence for the existence and magnitude of a critical marangoni number for the onset of oscillatory flow in crystal growth melts. *Journal of Crystal Growth*, 46(1):125–131.

- Schwabe, D., Scharmann, A., Preisser, F., y Oeder, R. (1978). Experiments on surface tension driven flow in floating zone melting. *J. Crystal Growth*, 99:1258–1264.
- Scriven, L. E. y Sternling, C. V. (1960). The Marangoni effects. *Nature*, 187:186–188.
- Shevtsova, V., Ermakov, M., Ryabitskii, E., y Legros, J. (1997). Oscillations of a liquid bridge free surface due to the thermal convection. *Acta Astronautica*, 41:471–479.
- Shevtsova, V., Melnikov, D. E., y Legros, J. C. (2003). Multistability of oscillatory convection in a liquid bridge. *Phys. Rev. E*, 68:066311.
- Shevtsova, V., Mialdun, A., Ferrera, C., Ermakov, M., Cabezas, M. G., y Montanero, J. M., (en publicación). Subcritical and oscillatory dynamic surface deformations in non-cylindrical liquid bridges. *Fluid Dynamics and Material Processing*, en publicación.
- Shevtsova, V., Mojahed, M., y Legros, J. (1999). The loss of stability in ground based experiments in liquid bridges. *Acta Astronautica*, 44:625–634.
- Shevtsova, V. M. y Legros, J. C. (1998). Thermocapillary motion and stability of strongly deformed liquid bridges. *Physics of Fluids*, 10(7):1621–1634.
- Shevtsova, V. M., Mialdun, A., y Mojahed, M. (2005). A study of heat transfer from liquid bridge interfaces to surroundings. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 30:261–281.
- Shu, J., Yao, Y. L., Zhou, R., y Hu, W. (1994). Experimental study of free surface oscillations of a liquid bridge by optical diagnostics. *Microgravity Sci. Technol.*, VII/2:83.
- Sim, B. C. y Zebib, A. (2002). Thermocapillary convection in liquid bridges with undeformable curved surfaces. *AIAA J. Thermophysics and Heat transfer*, 16:553.
- Slobozhanin, L. A. y Alexander, J. I. D. (1997). Stability of an isorotating liquid bridge in an axial gravity field. *Physics of Fluids*, 9(7):1880–1892.
- Slobozhanin, L. A. y Alexander, J. I. D. (1998). Combined effect of disk inequality and axial gravity on axisymmetric liquid bridge stability. *Physics of Fluids*, 10(10):2473–2488.

- Slobozhanin, L. A., Alexander, J. I. D., y Resnick, A. H. (1997). Bifurcation of the equilibrium states of a weightless liquid bridge. *Physics of Fluids*, 9(7):1893–1905.
- Slobozhanin, L. A. y Perales, J. M. (1993). Stability of liquid bridges between equal disks in an axial gravity field. *Physics of Fluids*, 5(6):1305–1314.
- Slobozhanin, L. A. y Perales, J. M. (1996). Stability of an isorotating liquid bridge between equal disks under zero-gravity conditions. *Physics of Fluids*, 8(9):2307–2318.
- Solihin, Y. y Leedham, C. G. (1999). Integral Ratio: A New Class of Global Thresholding Techniques for Handwriting Images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(8):761–768.
- Song, B. y Springer, J. (1996). Determination of interfacial tension from the profile of a pendant drop using computer-aided image processing. 2. experimental. *J. Colloid Interface Sci.*, 184:77–91.
- Song, Y. y Turton, R. (2007). Study of the effect of liquid bridges on the dynamic behavior of two colliding tablets using DEM. *Powder Technology*, 178:99–108.
- Thiessen, D. B., Marr-Lyon, M. J., y Marston, P. L. (2002). Active electrostatic stabilization of liquid bridges in low gravity. *Journal of Fluid Mechanics*, 457:285–294.
- Thomson, J. (1855). On certain curious motions observable on the surfaces of wine and other alcoholic liquours. *Philosophical Magazine*, 10:330.
- Trier, O. y Jain, A. K. (1995). Goal-Directed Evaluation of Binarization Methods. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 17(12):1191–1201.
- Trussell, H. J. (1979). Comments on Picture thresholding using an iterative selection method. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, 9(5):311.
- Tsamopoulos, J., Chen, T. Y., y Borkar, A. (1992). Viscous oscillations of capillary bridges. *Journal of Fluid Mechanics*, 235:579–609.
- Turton, R. (2008). Challenges in the modeling and prediction of coating of pharmaceutical dosage forms. *Powder Technology*, 181:186–194.
- Ueno, I., Tanaka, S., y Kawamura, H. (2003). Oscillatory and chaotic thermocapillary convection in a half-zone liquid bridge. *Phys. Fluids*, 15:408–416.

- Uguz, A. K. y Narayanan, R. (2005). The stability of an encapsulated cylindrical liquid bridge subject to off-centering. *Physics of Fluids*, 17:032102–1.
- Vega, J. M. y Perales, J. M. (1983). Almost cylindrical isorotating liquid bridges for small bond numbers. *ESA*, SP-191:247–252.
- Velten, R., Schwabe, D., y Scharmann, A. (1991). The periodic instability of thermocapillary convection in cylindrical liquid bridge. *Phys. Fluids*, A3:267–279.
- von Segner, J. A. (1751). De figuris superficierum fluidarum. *Comment. Soc. Reg. Gotting.*, página 301.
- Wanschura, M., Shevtsova, V. M., Kuhlmann, H. C., y Rath, H. J. (1995). Convective instability mechanism in thermocapillary liquid bridges. *Phys. Fluids*, 7(5):912–925.
- Wei, W., Thiessen, D. B., y Marston, P. L. (2005). Enhanced damping of capillary bridge oscillations using velocity feedback. *Physics of Fluids*, 17:032105–1.
- Wu, M., Cubaud, T., y Ho, C. M. (2004). Scaling law in liquid drop coalescence driven by surface tension. *Physics of Fluids*, 16(7):L51–L54.
- Yang, S. (2006). Segregation of cohesive powders in a vibrated granular bed. *Chemical Engineering Science*, 61:6180–6188.
- Yasuhiro, S., Imaishi, N., Kuhlmann, H. C., y Yoda, S. (1999). Numerical simulation of three-dimensional oscillatory thermocapillary flow in a half zone of $pr=1$ fluid. *Adv. Space Research*, 24(10):1385–1390.
- Young, T. (1805). An Essay on the Cohesion of Fluids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 95:65–87.
- Yu, B., Jain, A. K., y Mohiuddin, M. (1997). Address Block Location on Complex Mail Pieces. In *Int. Conf. Document Analysis and Recognition*, páginas 897–901, Ulm, Germany.
- Zayas, F., Alexander, J. I. D., Meseguer, J., y Ramus, J. F. (2000). On the stability limits of long nonaxisymmetric cylindrical liquid bridges. *Physics of Fluids*, 12(5):979–985.
- Zhang, R. y Li, J. (2006). Simulation on mechanical behavior of cohesive soil by Distinct Element Method. *Journal of Terramechanics*, 43:303–316.

- Zhang, X., Padgett, R. S., y Basaran, O. A. (1996). Nonlinear deformation and breakup of stretching liquid bridges. *Journal of Fluid Mechanics*, 329:207–245.
- Zhang, Y. y Alexander, J. (1992). Surface tension and buoyancy driven flow in a non-isothermal liquid bridge. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 14:197–215.
- Zhang, Y. y Alexander, J. I. D. (1990). Sensitivity of liquid bridges subject to axial residual acceleration. *Physics of Fluids A*, 2(11):1966–1974.
- Zuo, Y., Ding, M., Bateni, A., Hoorfar, M., y Neumann, A. (2004). Improvement of interfacial tension measurement using a captive bubble in conjunction with axisymmetric drop shape analysis (ADSA). *Colloid Surf. A-Physicochem.*, 250:233–246.

