Núcleo Alternativo Generalizado
y
Derivaciones Ternarias
de algunas estructuras algebraicas
no asociativas

Clara Jiménez Gestal

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Departamento de Matemáticas y Computación

Núcleo Alternativo Generalizado y Derivaciones Ternarias de algunas estructuras algebraicas no asociativas

Tesis Doctoral realizada por:

CLARA JIMÉNEZ GESTAL

Director:

JOSÉ MARÍA PÉREZ IZQUIERDO

Enero de 2010

L eer y leer. Libros, artículos, notas...
O rganizar los apuntes, las ideas
R ecopilar información de los sitios más insospechados
E scuchar las sabias palabras de los que nos precedieron
N avegar, ¿porqué no? en el ciberespacio
Z ozobrar ante la adversidad y resurgir de nuevo
O lvidar los malos momentos
y recordar siempre los buenos.
D isfrutar de cada día como si fuese el último,
I nvestigar los porqués y los cómo,
A prender cada momento un poquito,
N o dejarse abatir por el cansancio y
A lcanzar una ilusión de la niñez.

Agradecimientos

Cuando llega el momento de plasmar en el papel el trabajo de todos estos años de investigación me asalta una duda: ¿qué habría sido de mi ilusión por hacer una tesis sin el apoyo incondicional de toda mi gente? La respuesta es obvia: sin ellos (sin vosotros) esto habría sido una misión imposible. Por eso no puedo dejar pasar la oportunidad de recordar y agradecer a todas aquellas personas que de un modo u otro han contribuido a que este trabajo vea por fin la luz, y en particular:

a Chema, que me acogió sin conocerme y me ha guiado sabiamente a lo largo de estos años, que supo proponerme metas alcanzables y ha confiado en mi capacidad cuando ni siquiera yo lo hacía;

a Pilar, que se acordó de mi en el momento oportuno y desde entonces no ha dejado de apoyarme y escucharme, ni de chincharme y meterme prisa ;-);

a Fabián y Jesús Mari, que me abrieron las puertas de par en par y con su ilusión y su entusiasmo por el trabajo (y la fiesta) me devolvieron a la juventud;

a Jesús Murillo, que me ha recuperado para la educación y me ha descubierto que hay muchas formas (no todas buenas) de enseñar matemáticas;

a Jesús Laliena, Sara Sacristán, Sara Madariaga y Petra, con los que unas veces en el Departamento y otras en los congresos u otras actividades extracurriculares, he compartido muy gratos momentos;

a Juan Luis, dispuesto en todo momento a solucionar cualquier problemilla con el LaTeX;

a Esther, que siempre sabe qué papel es el que hace falta para cada cosa y no duda en proporcionártelo con una sonrisa;

a la cuadrilla de las cenas (y los respectivos), que han hecho que sea agradable trabajar aquí y han conseguido que el «buen rollo» se extienda fuera del Vives, hasta el infinito y más allá;

a los compañeros de aquí y de allí, que han conseguido que fuera donde fuera me sintiera como en mi casa;

a Belén, que siempre está ahí;

a Rafa y Alicia, que escuchan como si entendieran de lo que estoy hablando;

a José Luis, que tantas veces me ha ayudado a encontrarme;

a Juan Carlos, a Mirian, a Alicia, os recordaré hasta el último decimal de π;

a Raquel, que ejerciendo de niñera a tiempo completo ayudó a que pudiera terminar la carrera;

a mis padres y a mis suegros, que tanto han tenido que empujar para que por fin arranque el carro.

Por supuesto a Lorenzo, que me ha sufrido, me ha apoyado, me ha empujado, me ha cubierto las espaldas y sobre todo y pese a todo me ha querido y me lo ha demostrado.

Y un último agradecimiento especial para mi hija Diana, que ha tenido que aguantar mis ausencias y me ha tenido que compartir con una hermana pequeña con la que no se puede jugar.

Lorenzo, Diana

Gracias.

Índice general

Introducción

Cuando trabajamos con estructuras algebraicas, es interesante conocer las propiedades que verifican para poder clasificarlas. A investigar estas propiedades y a clasificar diferentes familias de álgebras han dedicado su tiempo matemáticos de todas las épocas, utilizando las herramientas disponibles en cada momento.

Nuestra investigación se ha centrado en una nueva herramienta, las derivaciones ternarias -que extiende la idea de derivación que se venía empleando para clasificar ciertos tipos de álgebras- y un conjunto, el núcleo alternativo generalizado, muy relacionado con ellas. Para saber si esta nueva herramienta es útil, necesitábamos comprobar si las clasificaciones que obtenemos son compatibles con las que se obtenían con las herramientas anteriores, y si de algún modo «refinan» estas clasificaciones, y hemos comenzado esta comprobación del modo más natural, con las álgebras conceptualmente «más sencillas»: las álgebras de Cayley–Dickson generalizadas y las álgebras de división reales de dimensión finita. Los resultados obtenidos son tan numerosos que han copado el alcance de esta tesis.

El primer contacto que tenemos con las matemáticas se produce cuando nacemos, que nos pesan y nos miden, y nos asignan un número en el test de Apgar. A partir de ese momento, en toda nuestra infancia, incluso antes de ir al colegio, nos rodean los números naturales– tiene 13 meses, va a cumplir 2 añitos, vive en el número 19 de Pio XII– y aprendemos a manejarlos y a realizar con ellos operaciones.

La suma, la resta y el producto no representan ningún problema (bueno, la resta a veces sí, pero es fácil comprender los enteros), pero en el momento en el que aparece la división en escena tenemos que hacer más grande el conjunto en el que nos movemos e introducir $\mathbb{Q}$, los racionales. Enseguida se nos queda pequeño este nuevo universo y conocemos al que nos acompañará durante toda nuestra vida: $\mathbb{R}$, que para la mayoría es suficiente, y su inseparable «hermano mayor» $\mathbb{C}$.

El conocimiento que de estos cuerpos y las leyes que rigen sus operaciones tenemos, hace que «el orden de los factores no altera el producto» sea una expresión que ha traspasado los límites de la matemática para convertirse en algo que podemos oír en una conversación de sábado por la noche.

Pero, ¿qué pasa cuando sí lo altera? Pues, sencillamente, que aparece la estructura de *álgebra de división*.

El primer ejemplo de esta estructura fue descubierto por Sir William R. Hamilton, que, a mediados del siglo XIX, se planteó extender la construcción de los números complejos a dimensiones mayores que 2. Si bien Gauss había representado –hacia 1831– los complejos como elementos de un plano y el producto como giro, Hamilton fue el primero en formalizar el concepto de número complejo como un álgebra de pares de números reales con las operaciones suma y producto definidas como en la actualidad. Partiendo de esta construcción, intentó llegar a un modelo análogo para el espacio tridimensional, buscando la forma de multiplicar ternas de números reales de modo que la norma euclídea fuera multiplicativa, como ocurre en el caso complejo. Después de diez años sin éxito, parece que cruzando el puente Brougham, en 1843, se le ocurrió que si no se restringía a las tres dimensiones y en lugar de multiplicar ternas multiplicaba cuartetos podía obtener el sistema que buscaba.

A partir de los cuaternios de Hamilton, $\mathbb{H}$, Graves en 1844 e independientemente Cayley en 1845, ampliaron esta construcción a dimensión ocho, dando el producto (no asociativo en este caso) de los octoniones, $\mathbb{O}$, y cerrando con ello la lista de las álgebras de división reales unitarias absolutamente valuadas.

En 1919 L.E. Dickson formaliza una construcción que obtiene el álgebra de Cayley desde los cuaternios del mismo modo que los complejos se obtienen desde los reales, y en 1942 A. A. Albert la utiliza para obtener, a partir de un cuerpo cualquiera, familias de álgebras con involución a las que llama *álgebras de Cayley–*

Dickson. La aplicación de este proceso partiendo de un álgebra cualquiera es lo que se llama *proceso de duplicación de Cayley–Dickson* y las álgebras que se generan son conocidas como *álgebras de Cayley–Dyckson generalizadas.*

Una de las características importantes de una estructura algebraica es su simetría, que puede medirse mediante su grupo de automorfismos. En el caso de un álgebra A, este grupo se aproxima mediante su álgebra de Lie de derivaciones, $\mathrm{Der}(A)$ (o el álgebra de Lie del grupo de automorfismos en el caso real). Desde este punto de vista, las álgebras A con una estructura de $\mathrm{Der}(A)$ rica deberían aparecer a menudo.

Un ejemplo importante es el álgebra de octoniones, que sobre cuerpos de característica distinta de 2 y 3 tiene un álgebra de Lie simple central de tipo G_2 como derivaciones. El álgebra de octoniones es un caso particular de las álgebras construidas mediante el proceso de duplicación de Cayley–Dickson, cuyo estudio fue desarrollado, sobre anillos conmutativos y asociativos, en 1985 por K. McCrimmon en [33].

Otro ejemplo son las álgebras de división reales, cuyas álgebras de derivaciones describieron en 1981 G.M.Benkart y J.M.Osborn, [5], y fueron utilizadas para estudiar su estructura, [6]. Mas tarde, en 2004, D. Ž. Doković y K. Zhao, [12], se centraron en el estudio de las álgebras de división cuyos grupos de automorfismos son grandes.

Recordemos que un álgebra (no necesariamente asociativa) es de división si para todo $x \neq 0$ los operadores de multiplicación a izquierda, L_x, y a derecha, R_x, son invertibles. En torno a 1958, J. Milnor y R. Bott [34] por un lado, y M. Kervaire [24] por otro probaron, que álgebras de división reales de dimensión finita solamente aparecen en dimensiones 1, 2, 4 y 8. La clasificación de estas álgebras ha sido completamente desarrollada entre 1985 y 2005 para dimensiones 1 y 2 [3, 8, 9, 10, 21, 40], pero unicamente se conocen resultados parciales en dimensiones 4 y 8.

Los isomorfismos preservan toda la información algebraica, por lo que cuando estudiamos una familia de álgebras definidas mediante condiciones algebraicas, cualquier copia isomorfa de un miembro de la familia pertenecerá a la familia. Esto hace que automorfismos e isomorfismos sean herramientas muy útiles a la hora de trabajar con familias arbitrarias de álgebras. Sin embargo, en ocasiones, los automorfismos no detectan ciertas simetrías ocultas de las álgebras. La siguiente familia biparamétrica es un ejemplo de esto: dados α y β escalares de un cuerpo F de característica 0 con $\alpha \neq 0$ o $\beta \neq 0$, definimos un nuevo producto en $sl(n+1, F)$ $n \geq 1$ mediante

$$x * y = \alpha xy + \beta yx - \frac{\alpha + \beta}{n+1}\,\mathrm{t}(xy)I,$$

con xy el producto usual de matrices, $t(x)$ la traza de x e I la matriz identidad. Para todo $n \geq 2$, independientemente de α y β, el álgebra de derivaciones es $\{ad_a : x \mapsto ax - xa \,|\, a \in sl(n+1, F)\}$. En lo que a automorfismos se refiere, hemos de considerar todas estas álgebras «de similar interés». Sin embargo, en la literatura encontramos que el caso $n = 2$ y $\alpha = -w^2\beta$, con $1 \neq w$ una raíz cúbica de la unidad, corresponde a un álgebra de Okubo, que tiene muchas propiedades interesantes [16, 17, 18, 19]. Este álgebra posee una forma cuadrática que admite composición aunque no tiene elemento identidad. Si no se ha detectado este caso excepcional, parece que el estudio de esta familia mediante automorfismos puede ser engañoso. Cuando tratamos con una familia concreta de álgebras tal vez sea más natural usar un grupo más grande que el de automorfismos (ver [39] y sus referencias). Las álgebras de división reales de dimensión finita forman, probablemente, una de esas familias.

Para toda álgebra no asociativa A, su núcleo alternativo generalizado $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ es siempre un álgebra de Malcev con el producto conmutador y, recíprocamente, toda álgebra de Malcev sobre un cuerpo de característica distinta de 2 y 3 es una subálgebra de Malcev de $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ para alguna A adecuada [38]. Sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero, la clasificación de las álgebras simples de dimensión finita generadas por su núcleo alternativo generalizado aparece en [35]; son isomorfas a productos tensoriales de álgebras asociativas simples y cocientes simples de álgebras simétricas de octoniones. Hay algunos problemas abiertos en la teoría de las álgebras de Malcev relativos a la existencia o no de álgebras de

Malcev que verifiquen ciertas propiedades ([11] Parte 1. Problema 81). Encontrar álgebras con grandes álgebras de Lie de derivaciones ternarias, $\mathrm{Tder}(A)$, que probablemente se relacionen con grandes núcleos alternativos generalizados, mientras se estudian familias de álgebras no asociativas puede que nos lleve a nuevos ejemplos de álgebras de Malcev. Esto motiva el estudio de $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ y $\mathrm{Tder}(A)$ en varias familias de álgebras no asociativas.

Objetivos

El primer objetivo que uno se plantea cuando comienza la andadura hacia una tesis doctoral es «seguir aprendiendo». Lo que esto significa cambia en función de la persona, en mi caso se trataba de aprender a investigar, aprender más Álgebra, aprender a reconocer un buen problema... Sinceramente creo que este objetivo sigue vigente en este momento y espero que por mucho tiempo.

Algunos de los objetivos que nos planteamos cuando presentamos la solicitud de admisión de la tesis fueron:

- Calcular el álgebra de derivaciones ternarias para las álgebras de Cayley–Dickson generalizadas.
- Calcular todas las posibles álgebras de derivaciones ternarias para las álgebras de división reales de dimensión finita.
- Clasificar las álgebras de división reales de dimensión finita usando este nuevo invariante por isotopía, generalizando el trabajo de Benkart y Osborn.

El trabajo con las álgebras de Cayley–Dickson generalizadas significó un acercamiento «natural» a las álgebras no asociativas, y los resultados obtenidos justificaron el esfuerzo y motivaron que nos planteáramos la generalización a otras familias de álgebras, comenzando por las álgebras de división reales de dimensión finita.

Comenzamos la memoria con el Capítulo 1, en el que recordaremos algunas definiciones y conceptos que serán de utilidad a lo largo de los capítulos posteriores.

También introduciremos aquí la notación utilizada, así como algunos resultados conocidos.

En el Capítulo 2 centramos la investigación en las álgebras de Cayley–Dickson generalizadas. Cuando aplicamos el proceso de duplicación de Cayley–Dickson partiendo de $A_0 = F$ ($\operatorname{car} F \neq 2$) obtenemos una extensión cuadrática separable de F, A_1; en el segundo paso, un álgebra de cuaternios generalizada A_2; después, un álgebra de octoniones generalizada A_3; después de este paso aparecen las álgebras A_t de dimensión 2^t, que se llaman álgebras de Cayley–Dickson generalizadas.

En nuestro estudio, basándonos en el trabajo de K. McCrimon [33] para derivaciones, calculamos las álgebras de derivación ternarias de las álgebras A_t obtenidas mediante el proceso de duplicación de Cayley–Dickson para cuerpos de característica distinta de 2. Los resultados obtenidos para $\operatorname{Tder}(A_t)$ revelan que «**cierta simetría» de los octoniones se pierde** cuando hacemos el proceso de duplicación de Cayley–Dickson más allá de $t = 3$.

También en este capítulo introducimos la noción de automorfismo ternario de A y determinamos los automorfismos ternarios de A_t cuando $t \geq 4$ y la característica del cuerpo es distinta de 2 y 3.

En el Capítulo 3 se estudia el núcleo alternativo generalizado de las álgebras de división reales de dimensión finita. En los casos en que este núcleo posee dimensión mayor o igual que dos, el álgebra de división empieza a acercarse a álgebras obtenidas por el proceso de duplicación de Cayley-Dickson. Como se verá, se obtienen clasificaciones cuando la dimensión de este núcleo es al menos la mitad de la dimensión del álgebra ambiente. En caso de que la dimensión sea menor, es conveniente imponer alguna condición algebraica extra tal como la flexibilidad o incluso la asociatividad de las terceras potencias para obtener resultados concretos.

El objetivo del Capítulo 4 es explorar la familia de las álgebras de división reales de dimensión finita utilizando sus derivaciones ternarias, ya que **la clase de isomorfía del álgebra de derivaciones ternarias es un invariante por isotopía**. Nuestros métodos utilizan la teoría de representación de las álgebras de Lie simples, por lo que solamente podemos considerar las álgebras de división reales cuyas álgebras de Lie de derivaciones ternarias son no abelianas. La familia de álgebras de división reales de dimensión ocho es, aun así, demasiado compleja, por lo que en este caso hemos de conformarnos con estudiar aquellas para las que su álgebra de Lie de derivaciones ternarias tiene una subálgebra simple de rango toral mayor o igual que dos. Hacer un acercamiento similar suponiendo que haya una subálgebra simple de rango toral uno parece demasiado complicado para los métodos que usamos.

Algunos de los resultados obtenidos a lo largo de estos años de investigación han sido presentados en diversos congresos tanto nacionales como internacionales, y han aparecido publicados en relevantes revistas internacionales. Así en el Capítulo 2 se recogen los resultados del artículo **Ternary derivations of generalized Cayley–Dickson algebras** publicado en *Communications in Algebra* [29] y parcialmente presentado en la *International Conference of Lie and Jordan algebras, their Representations and Applications* organizada por el Instituto de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Sao Paulo en 2002.

Los resultados del Capítulo 4 han sido presentados a medida que los hemos obtenido en la comunicación **Ternary derivations of real Division algebras** en el *Primer congreso conjunto de la AMS y la RSME* en Sevilla en 2003; en un póster presentado en el ICM 2006, y han sido publicados en *Linear Algebra and its Applications* [30].

En cuanto al Capítulo 3, la presentación del estado de nuestra investigación en el congreso *Estructuras de Jordan en Álgebra y Análisis*, celebrado en Almería en mayo de 2009, propició conversaciones con Erik Darpo que nos hicieron cambiar ligeramente el enfoque y favorecieron una elegante manera de concluirlo, por lo que le estoy muy agradecida.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de estos Preliminares es preparar al lector para lo que se avecina, recordando algunos conceptos y resultados que irán apareciendo a lo largo de la Memoria. Si bien su lectura puede ser obviada por quien esté familiarizado con el tema, pretende ser un lugar al que acudir en busca de un recordatorio en caso de ser necesario.

Comencemos pues con algunas definiciones:

Definición 1.1.1. *Un álgebra sobre un cuerpo F es un F-espacio vectorial A, dotado con una aplicación bilineal $\cdot : A \times A \to A$. Denotaremos el producto de $x, y \in A$ mediante $x \cdot y$, o simplemente xy, y $L_x : a \mapsto xa$ y $R_x : a \mapsto ax$ denotarán los operadores de multiplicación a izquierda y a derecha por x respectivamente.*

Definición 1.1.2. *Dada un álgebra A, diremos que es $\mathbb{Z}_2$–*graduada *si se puede descomponer como $A = A^{\bar{0}} \oplus A^{\bar{1}}$ con $x^\alpha y^\beta \in A^{\alpha+\beta} \quad \forall_{x^\alpha \in A^\alpha,\, y^\beta \in A^\beta}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$. Esta graduación induce una $\mathbb{Z}_2$–graduación en $\mathrm{End}_F(A) = (\mathrm{End}_F(A))^{\bar{0}} \oplus (\mathrm{End}_F(A))^{\bar{1}}$ de modo que dado $d \in \mathrm{End}_F(A)$ se descompone como $d = d^{\bar{0}} + d^{\bar{1}}$ con $d^\epsilon(A^\delta) \subseteq A^{\epsilon+\delta}$ para $\epsilon, \delta \in \mathbb{Z}_2$. A $d^{\bar{0}}$ se le llama* parte par *de d mientras que $d^{\bar{1}}$ es su* parte impar.

Por claridad en la notación habitualmente sustituiremos los superíndices $\bar{0}$ y $\bar{1}$ de las $\mathbb{Z}_2$–graduaciones por $+$ y $-$ respectivamente.

Aunque la única propiedad que le pedimos al producto es que sea bilineal, dependiendo de las propiedades que verifique nos proporciona distintos tipos de álgebras.

Definición 1.1.3. *A es un álgebra* de Lie *si su multiplicación es anticonmutativa ($x^2 = 0$) y se verifica la identidad de Jacobi*

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0 \quad \forall_{x,y,z \in A}. \tag{1.1}$$

A es un álgebra de Jordan *si su multiplicación es conmutativa ($xy = yx$) y se verifica la identidad de Jordan*

$$(xy)x^2 = x(yx^2) \quad \forall_{x,y \in A}. \tag{1.2}$$

Un álgebra es asociativa *si $x(yz) = (xy)z$ para todo $x, y, z \in A$. Un álgebra A se llama* alternativa *si $x^2y = x(xy)$, $yx^2 = (yx)x$ para todo $x, y \in A$. Un álgebra se dice* flexible *si verifica $(xy)x = x(yx)$ para todo $x, y \in A$. Un álgebra se dice* de potencias tres–asociativas *si verifica $(xx)x = x(xx)$ para todo $x \in A$.*

En un álgebra conmutativa se cumple que $xy = yx$ para cualesquiera x e y en A; si el álgebra no es conmutativa, el producto *conmutador* mide lo cerca o lejos que está de serlo, y se denota por

$$[x, y] = xy - yx.$$

Es importante recordar que un álgebra asociativa con el producto conmutador es un álgebra de Lie, y que un álgebra alternativa con el producto conmutador es un *álgebra de Malcev*, es decir, es anticonmutativa y verifica

$$[[x, z], [y, t]] = [[[x, y], z], t] + [[[y, z], t], x] + [[[z, t], x], y] + [[[t, x], y], z]$$

para todo $x, y, z, t \in A$.
Del mismo modo, en un álgebra no asociativa es interesante definir el *asociador*

$$(x, y, z) = (xy)z - x(yz),$$

que da una idea de lo lejos que está el álgebra de ser asociativa. Podemos expresar las identidades indicadas en la Definición 1.1.3 como:

$$(x, x, y) = 0 \qquad \text{identidad alternativa a izquierda} \tag{1.3}$$

$$(y, x, x) = 0 \qquad \text{identidad alternativa a derecha} \tag{1.4}$$

$$(x, y, x) = 0 \qquad \text{identidad flexible.} \tag{1.5}$$

En toda álgebra alternativa se satisfacen la identidad flexible y las identidades de Moufang [43]

$$x(yzy) = ((xy)z)y \qquad \text{a derecha} \tag{1.6}$$

$$(yzy)x = y(z(yx)) \qquad \text{a izquierda} \tag{1.7}$$

$$(xy)(zx) = x(yz)x \qquad \text{central.} \tag{1.8}$$

Teorema 1.1.4 (Artin,[43]). *En un álgebra alternativa, cualquier par de elementos generan un álgebra asociativa.*

Definición 1.1.5. *Un* automorfismo *de A es una aplicación lineal $f : A \to A$ biyectiva y tal que*

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \forall_{x,y \in A}.$$

Una derivación *de A es una aplicación lineal $d : A \to A$ tal que*

$$d(xy) = d(x)y + xd(y) \quad \forall_{x,y \in A}.$$

El conjunto de todas las derivaciones de un álgebra, con el conmutador $[d, d'] = dd' - d'd$, es un álgebra de Lie que se denota por $\mathrm{Der}(A)$ y se llama álgebra de derivaciones de A.

Recordemos ahora la definición de algunos conjuntos notables dentro de las álgebras:

Definición 1.1.6. *Se llama* centro conmutativo *al conjunto formado por los elementos del álgebra que conmutan con todos los elementos*

$$\mathrm{Comm}(A) = \{c \in A \mid [c, A] = 0\}.$$

Se llama núcleo asociativo a izquierda, central o a derecha *respectivamente a los conjuntos*

$$\mathrm{N_l}(A) = \{n|(n, A, A) = 0\},$$

$$\mathrm{N_m}(A) = \{n|(A, n, A) = 0\} \text{ y}$$

$$\mathrm{N_r}(A) = \{n|(A, A, n) = 0\}.$$

El núcleo asociativo *es*

$$\mathrm{N}(A) = \mathrm{N_l}(A) \cap \mathrm{N_m}(A) \cap \mathrm{N_r}(A).$$

Se llama centro *de A al conjunto formado por los elementos que conmutan y asocian con todos los elementos de A*

$$\mathcal{Z}(A) = \mathrm{Comm}(A) \cap \mathrm{N}(A).$$

Un conjunto notable de gran importancia en nuestro trabajo, tanto que forma parte del título de la Memoria, es el núcleo alternativo generalizado.

Definición 1.1.7 ([35])**.** *El* núcleo alternativo generalizado *de un álgebra A se define como*

$$\mathrm{N_{alt}}(A) = \{a \in A \,|\, (a, x, y) = -(x, a, y) = (x, y, a)\ \forall_{x,y \in A}\}.$$

Teorema 1.1.8 ([35])**.** *Sobre un cuerpo de característica distinta de 2, $\mathrm{N_{alt}}(A)$ con el conmutador es un álgebra de Malcev para toda A.*

A la hora de clasificar familias de álgebras, se puede utilizar el grupo de automorfismos asociado y clasificarlas salvo isomorfismo, o bien se puede intentar utilizar un grupo más grande que el de automorfismos, que nos dé una clasificación «más fina». De especial interés resultará la clasificación salvo isotopía.

Definición 1.1.9. *Dada un álgebra A con producto xy, y tres aplicaciones lineales biyectivas $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ de A en A, llamamos* isótopa *de A a la nueva álgebra que resulta si en A consideramos el producto*

$$x * y = \varphi_1^{-1}(\varphi_2(x)\varphi_3(y)).$$

Una isótopa de especial utilidad es la que aparece cuando consideramos el producto

$$x \star y = R_b^{-1}(x) L_a^{-1}(y),$$

que es unitaria con elemento unidad ab.

Definición 1.1.10. *Se llama* automorfismo ternario *de A a cualquier $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ tal que*

$$\varphi_1(xy) = \varphi_2(x)\varphi_3(y),$$

donde φ_1, φ_2 y φ_3 son aplicaciones lineales biyectivas.

Los automorfismos ternarios forman un grupo que denotaremos $\mathrm{TAut}(A)$.

Definición 1.1.11. *Dada un álgebra arbitraria A sobre un cuerpo F, una* derivación ternaria *de A es una terna $(d_1, d_2, d_3) \in \mathrm{End}_F(A)^3$ que verifica*

$$d_1(xy) = d_2(x)y + xd_3(y) \tag{1.9}$$

para todo $x, y \in A$.

El conjunto formado por las derivaciones ternarias de A, que denotaremos $\mathrm{Tder}(A)$, es un álgebra de Lie con el producto natural

$$[(d_1, d_2, d_3), (d_1', d_2', d_3')] = ([d_1, d_1'], [d_2, d_2'], [d_3, d_3']).$$

La estrecha relación que hay entre $\mathrm{Tder}(A)$ y $\mathrm{N_{alt}}(A)$ queda reflejada en el siguiente resultado:

Proposición 1.1.12. *Dada un álgebra A,*

$$a \in \mathrm{N_{alt}}(A) \text{ si y sólo si } (L_a, T_a, -L_a), (R_a, -R_a, T_a) \in \mathrm{Tder}(A), \tag{1.10}$$

donde L_a, R_a representan los operadores multiplicación a izquierda y a derecha por a y $T_a = L_a + R_a$.

Para realizar los cálculos nos serán útiles las siguientes identidades:

Lema 1.1.13 ([35])**.** *Para todo $a, b \in \mathrm{N_{alt}}(A)$ y $x \in A$ se verifica:*

(i) $L_{ax} = L_a L_x + [R_a, L_x]$, $L_{xa} = L_x L_a + [L_x, R_a]$, $L_{a^n} = L_a^n$

(ii) $R_{ax} = R_x R_a + [R_x, L_a]$, $R_{xa} = R_a R_x + [L_a, R_x]$, $R_{a^n} = R_a^n$

(iii) $[L_a, R_b] = [R_a, L_b]$

(iv) $[L_a, L_b] = L_{[a,b]} - 2[R_a, L_b]$, $[R_a, R_b] = -R_{[a,b]} - 2[L_a, R_b]$

(v) *La aplicación* $D_{a,b} = [L_a, L_b] + [L_a, R_b] + [R_a, R_b]$ *es una derivación de* A, $D_{a,b} = \mathrm{ad}_{[a,b]} - 3[L_a, R_b]$ *y* $2D_{a,b} = \mathrm{ad}_{[a,b]} + [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b]$ *donde* $\mathrm{ad}_a \colon x \mapsto [a, x]$.

En particular $\mathrm{alg}\langle a\rangle$ es asociativa para todo $a \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$.

1.2. Álgebras de composición

Toda forma cuadrática $\mathrm{n} : A \to F$ tiene asociada una forma bilineal simétrica,

$$\mathrm{n}(x, y) = \mathrm{n}(x + y) - \mathrm{n}(x) - \mathrm{n}(y).$$

Se dice que n es *estrictamente no degenerada* si su forma bilineal asociada es no degenerada, es decir, si $\mathrm{n}(a, x) = 0$ para todo x implica que $a = 0$.

Definición 1.2.1. *Un álgebra A con producto xy se dice álgebra* de composición *si existe una forma cuadrática estrictamente no degenerada* $\mathrm{n}(\,)$ *que verifica*

$$\mathrm{n}(xy) = \mathrm{n}(x)\,\mathrm{n}(y) \quad \forall_{x,y\in A}.$$

Un álgebra de composición con elemento unidad se llama álgebra Hurwitz.

Los primeros ejemplos de álgebras de composición los encontramos en $\mathbb{R}$ con $\mathrm{n}(x) = x^2$ y en $\mathbb{C}$ con $\mathrm{n}(x) = x\bar{x}$ donde $\bar{x}$ denota el conjugado complejo de x. Normalmente representamos los números complejos como $a + bi$, con $i^2 = -1$ $a, b \in \mathbb{R}$, y a partir de esta representación Hamilton consideró expresiones de la forma $a + bi + cj + dk$ que se multiplican según las reglas dadas en la Tabla 1.1.

Los octoniones $\mathbb{O}$ o *números de Cayley* son la siguiente generalización, y el modo más elemental de construirlos es dando la forma de multiplicar los elementos de una

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Tabla 1.1: Tabla de multiplicar de $\mathbb{H}$

base $\{1, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$. Esto se recoge en la Tabla 1.2. Nos resultará también útil otra forma de la tabla en función de otra base $\{u, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ que utilizaremos en el Capítulo 4.

Si observamos con atención esta tabla podemos descubrir los cuaternios ocultos en ella, sin más que fijar la vista en los elementos $1, a_1, a_2$ y a_3 de la base. Del mismo modo se encuentran los complejos considerando $1, a_1$ en la tabla de $\mathbb{O}$, o si consideramos únicamente las dos primeras filas y columnas de la tabla de $\mathbb{H}$.

Una aplicación lineal $J : A \to A$ de un álgebra A es una *involución* si

$$J(J(a)) = a \quad \text{y} \quad J(ab) = J(b)J(a) \quad \forall_{a,b\in A}.$$

La aplicación lineal $x \mapsto \bar{x}$ determinada por $1 \mapsto 1$ y $a_i \mapsto -a_i$ es una involución que podemos definir en $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$. Es la que llamamos *involución estándar* y en el caso de los números complejos coincide con la habitual. Una característica de esta involución es que tanto $\mathrm{t}(x) = x + \bar{x}$ como $\mathrm{n}(x) = x\bar{x}$ son números reales, es decir, están en el cuerpo base. Además, esta norma es multiplicativa (admite composición) y como estas álgebras tienen unidad son Hurwitz.

Pero podemos dar una familia más general de álgebras de composición, que incluye a estas como caso particular, si en lugar de considerar la Tabla 1.2 nos fijamos en la Tabla 1.3. Llamamos $F(\alpha)$ al álgebra generada por 1 y a_1, $\mathbb{H}(\alpha, \beta)$ a la generada por $\{1, a_1, a_2, a_3\}$ y $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ a la generada por $\{1, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$.

De nuevo, la aplicación lineal determinada por $1 \mapsto 1$ y $a_i \mapsto -a_i$ es una involución en cada una de las álgebras anteriores y verifica que tanto la traza $\mathrm{t}(x) = x + \bar{x}$ como la norma $\mathrm{n}(x) = x\bar{x}$ están en el cuerpo base, y la norma admite

	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	a_1	-1	a_3	$-a_2$	a_5	$-a_4$	$-a_7$	a_6
a_2	a_2	$-a_3$	-1	a_1	a_6	a_7	$-a_4$	$-a_5$
a_3	a_3	a_2	$-a_1$	-1	a_7	$-a_6$	a_5	$-a_4$
a_4	a_4	$-a_5$	$-a_6$	$-a_7$	-1	a_1	a_2	a_3
a_5	a_5	a_4	$-a_7$	a_6	$-a_1$	-1	$-a_3$	a_2
a_6	a_6	a_7	a_4	$-a_5$	$-a_2$	a_3	-1	$-a_1$
a_7	a_7	$-a_6$	a_5	a_4	$-a_3$	$-a_2$	a_1	-1

Tabla 1.2: Tablas de multiplicar de $\mathbb{O}$

	u	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
u	u	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	$-u$	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	$-u$	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	$-u$	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	$-u$	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	$-u$	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	$-u$	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	$-u$

composición, luego son álgebras Hurwitz.

Observamos que $\mathrm{n}(x) = x\bar{x} = x(\mathrm{t}(x) - x) = \mathrm{t}(x)x - x^2$, por lo que

$$x^2 - \mathrm{t}(x)x + \mathrm{n}(x) = 0,$$

y además se puede comprobar que estas álgebras son alternativas y verifican

$$\bar{x}(xy) = \mathrm{n}(x)y = x(\bar{x}y), \quad (yx)\bar{x} = \mathrm{n}(x)y = (y\bar{x})x, \tag{1.11}$$

$$\mathrm{n}(xy, z) = \mathrm{n}(y, \bar{x}z) = \mathrm{n}(x, z\bar{y}). \tag{1.12}$$

Teorema 1.2.2. *Sobre un cuerpo F de característica distinta de 2. Si A es un álgebra Hurwitz, entonces A es isomorfa a una de las siguientes:*

$$F, \quad F(\alpha), \quad \mathbb{H}(\alpha,\beta), \quad \mathbb{O}(\alpha,\beta,\gamma).$$

En particular, su dimensión es 1, 2, 4 u 8.

	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	a_1	α	a_3	αa_2	a_5	αa_4	$-a_7$	$-\alpha a_6$
a_2	a_2	$-a_3$	β	$-\beta a_1$	a_6	a_7	βa_4	βa_5
a_3	a_3	$-\alpha a_2$	βa_1	$-\alpha\beta$	a_7	αa_6	$-\beta a_5$	$-\alpha\beta a_4$
a_4	a_4	$-a_5$	$-a_6$	$-a_7$	γ	$-\gamma a_1$	$-\gamma a_2$	$-\gamma a_3$
a_5	a_5	$-\alpha a_4$	$-a_7$	$-\alpha a_6$	γa_1	$-\alpha\gamma$	γa_3	$\alpha\gamma a_2$
a_6	a_6	a_7	$-\beta a_4$	βa_5	γa_2	$-\gamma a_3$	$-\beta\gamma$	$-\beta\gamma a_1$
a_7	a_7	αa_6	$-\beta a_5$	$\alpha\beta a_4$	γa_3	$-\alpha\gamma a_2$	$\beta\gamma a_1$	$\alpha\beta\gamma$

Tabla 1.3: Tabla de multiplicar de $\mathbb{O}(\alpha,\beta,\gamma)$

Lema 1.2.3 (Kaplansky, [23]). *Sea A un álgebra de composición de dimensión finita, $a \in A$ con $\mathrm{n}(a) \neq 0$ y $u = a^2/\,\mathrm{n}(a)$. El álgebra $(A, \circ)$, donde*

$$x \circ y = R_u^{-1}(x) L_u^{-1}(y),$$

es un álgebra de composición unitaria, con la misma norma que A y elemento unidad u^2. Es decir, toda álgebra de composición de dimensión finita es isótopa a una Hurwitz y, por lo tanto, su dimensión es 1, 2, 4 u 8.

En cualquier álgebra Hurwitz la involución estándar la podemos expresar mediante

$$J : a \mapsto \bar{a} = \mathrm{n}(1,a) - a. \tag{1.13}$$

El álgebra $\mathbb{O}$ es $\mathbb{O}(-1,-1,-1)$. Contrariamente a lo que le ocurre a $\mathbb{O}$, sobre cuerpos algebraicamente cerrados todas las álgebras Hurwitz, de dimensión mayor o igual que dos, poseen divisores de cero, es decir, elementos $x \neq 0$ tales que existe $xy = 0$ ó $yx = 0$ con $y \neq 0$. A las álgebras Hurwitz con este tipo de elementos se les denomina «split» o *escindidas*, y existe, salvo isomorfismo, una única álgebra de este tipo en cada dimensión 2, 4, 8, y para cada una de ellas se puede encontrar una base $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_2, u_1, v_1\}$, $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ respecto de la cual el producto se puede representar mediante la tabla de multiplicación 1.4

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3
e_1	e_1	0	u_1	u_2	u_3	0	0	0
e_2	0	e_2	0	0	0	v_1	v_2	v_3
u_1	0	u_1	0	v_3	$-v_2$	$-e_1$	0	0
u_2	0	u_2	$-v_3$	0	v_1	0	$-e_1$	0
u_3	0	u_3	v_2	$-v_1$	0	0	0	$-e_1$
v_1	v_1	0	$-e_2$	0	0	0	u_3	$-u_2$
v_2	v_2	0	0	$-e_2$	0	$-u_3$	0	u_1
v_3	v_3	0	0	0	$-e_2$	u_2	$-u_1$	0

Tabla 1.4: Tabla de multiplicar de las álgebras Hurwitz «split»

Teorema 1.2.4. *Para las álgebras Hurwitz tenemos que:*

- $\mathrm{Der}(F) = 0$
- $\mathrm{Der}(F(\alpha)) = 0$
- $\mathrm{Der}(\mathbb{H}(\alpha, \beta))$ *es un álgebra de Lie simple central de tipo* A_1 *(*$\mathrm{car}\, F \neq 2$*)*
- $\mathrm{Der}(\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ *es un álgebra simple de tipo* G_2 *(*$\mathrm{car}\, F \neq 3$*)*

Definición 1.2.5. *Se dice álgebra* paraHurwitz *asociada a un álgebra Hurwitz C al álgebra que se obtiene cambiando el producto xy de C por*

$$x * y = \bar{x}\bar{y}.$$

Estas álgebras poseen una forma bilineal asociativa

$$\mathrm{n}(x * y, z) = \mathrm{n}(x, y * z)$$

y, salvo en dimensión uno, no son Hurwitz. La unidad e de C satisface

$$x * e = e * x = \mathrm{n}(e, x)e - x. \tag{1.14}$$

Un elemento de un álgebra de composición que cumpla (1.14) se llama paraunidad *y el álgebra en la que se encuentra es necesariamente un álgebra paraHurwitz.*

Sea un cuerpo F de característica $\neq 2, 3$ que contiene una raíz μ de la ecuación $3\mu(1-\mu) = 1$, definimos un nuevo producto en $sl(3, F)$ mediante

$$x * y = \mu xy + (1-\mu)yx - \frac{1}{3}\,\mathrm{t}(xy)I, \tag{1.15}$$

con xy el producto usual de matrices, $\mathrm{t}(x)$ la traza de x e I la matriz identidad. El álgebra $(sl(3, F), *)$ se denota por $P_8(F)$ y se llama *álgebra de pseudooctoniones* (sobre F). La forma cuadrática $n(x) = \frac{1}{6}\,\mathrm{t}(x^2)$ la convierte en un álgebra de composición con forma bilineal asociativa que cumple

$$(x * y) * x = \mathrm{n}(x)y = x * (y * x),$$

al igual que las álgebras paraHurwitz. A las álgebras de composición que cumplen esta propiedad se les llama *simétricas*.

Definición 1.2.6. *Llamaremos álgebras de Okubo sobre un cuerpo F a las formas de $P_8(\bar{F})$, donde $\bar{F}$ denota la clausura algebraica de F.*

1.3. Álgebras de Cayley–Dickson generalizadas

Trabajar con los cuaternios, y especialmente con los octoniones, utilizando las tablas 1.1, 1.2 o 1.3 puede ser poco operativo, por eso es de agradecer el desarrollo del proceso de duplicación de Cayley–Dickson.

Definición 1.3.1. *Una involución en un álgebra unitaria A se dice* escalar *si tanto la traza como la norma de cualquier elemento de A pertenecen al cuerpo base. Esto es, se cumple $\mathrm{t}(x) := x + \bar{x} \in F$ y $\mathrm{n}(x) := x\bar{x} \in F\ \forall_{x \in A}$.*

El proceso de Cayley–Dickson consiste en construir, a partir de un álgebra unitaria A con involución escalar $x \mapsto \bar{x}$, una nueva álgebra que sigue teniendo estas propiedades, tiene como subálgebra a A y su dimensión es el doble de la original.
Dado $0 \neq \mu \in F$, el proceso de Cayley–Dickson nos da una nueva álgebra (A, μ) sobre el espacio vectorial $A \times A$ con producto:

$$(a, b)(c, d) = (ac + \mu \bar{d} b, da + b\bar{c}).$$

El elemento $(1, 0)$ es la unidad para este producto; $\{(a, 0) | a \in A\}$ es un álgebra isomorfa a A; la aplicación $(a, b) \mapsto (\bar{a}, -b)$ extiende la involución de A a una involución escalar en (A, μ); si $\mathrm{n}(x)$ es estrictamente no degenerada en A entonces la forma bilineal $\mathrm{n}(x, y) = \mathrm{n}(x + y) - \mathrm{n}(x) - \mathrm{n}(y)$ es no degenerada en (A, μ) y (A, μ) es de composición si y sólo si A es asociativa [43]. Si llamamos u al elemento $(0, 1)$, tenemos que $u^2 = \mu(1, 0)$, podemos escribir $(A, \mu) = A \oplus Au$ y expresar el producto como

$$(a + bu)(c + du) = (ac + \mu \bar{d} b) + (da + b\bar{c})u.$$

Esta descomposición es una $\mathbb{Z}_2$–graduación de (A, μ). Partiendo de $A_0 = F$ obtenemos inductivamente $A_t = (A_{t-1}, \mu_t) = A_{t-1} + A_{t-1}u_t$ con $u_t^2 = \mu_t 1$. Si $\operatorname{car} F \neq 2$ en el primer paso obtenemos una extensión cuadrática separable de F, A_1; en el segundo paso un álgebra de cuaternios generalizada A_2, que es asociativa pero no conmutativa; después un álgebra de octoniones generalizada A_3, alternativa pero no asociativa; y después las álgebras A_t de dimensión 2^t llamadas álgebras de Cayley–Dickson generalizadas. Aunque para $t \geq 4$ no son de composición, todas estas álgebras son flexibles y además son *cuadráticas* pues verifican que

$$x^2 - \mathrm{t}(x)x + \mathrm{n}(x) = 0.$$

El modo en que se heredan algunas de las propiedades algebraicas al duplicar un álgebra A lo recogió McCrimmon [32], en el contexto mucho más general de álgebras sobre anillos asociativos y conmutativos e involuciones no necesariamente escalares. En nuestro caso, que F es un cuerpo y $\operatorname{car} F \neq 2$:

Teorema 1.3.2. *Si* $0 \neq \mu \in F$ *entonces*

- (A, μ) *es conmutativa* $\Leftrightarrow$ A *es conmutativa con involución dada por la identidad* Id_A,
- (A, μ) *es asociativa* $\Leftrightarrow$ A *es conmutativa y asociativa,*
- (A, μ) *es alternativa* $\Leftrightarrow$ A *es asociativa,*
- (A, μ) *es flexible* $\Leftrightarrow$ A *es flexible,*
- (A, μ) *es simple* $\Leftrightarrow$ A *es simple como álgebra con involución pero no conmutativa con involución* Id_A *con* $\gamma \in \mathcal{Z}(A)$, $\mu\gamma^2 = 1$.

Los conjuntos notables de (A, μ) *vienen dados por:*

- $\mathrm{Comm}(A, \mu) = \{a + bu \,|\, a, b \in F \quad \textit{con} \quad b(x - \bar{x}) = 0 \quad \forall_{x \in A}\}$,
- $\mathrm{N_l}(A, \mu) = \mathrm{N_r}(A, \mu) = \{a + bu \,|\, a \in \mathcal{Z}(A),\, b \in \mathrm{N_m}(A) \bigcap \mathrm{Comm}(A)$ *tales que* $c_1(c_2 b) = (c_2 c_1) b \quad y \quad (bc_2)c_1 = b(c_1 c_2) \quad \forall_{c_1, c_2 \in A}\}$,
- $\mathrm{N_m}(A, \mu) = \{a + bu \,|\, a \in \mathrm{N_m}(A) \bigcap \mathrm{Comm}(A),\, b \in \mathrm{Comm}(A)$ *tales que* $c_1(c_2 b) = (c_2 c_1) b \quad y \quad (bc_2)c_1 = b(c_1 c_2) \quad \forall_{c_1, c_2 \in A}\}$,
- $\mathrm{N}(A, \mu) = \{a + bu \,|\, a, b \in \mathcal{Z}(A) \quad \textit{con} \quad b\,[A, A] = 0\}$,
- $\mathcal{Z}(A, \mu) = \{a + bu \,|\, a, b \in F \quad \textit{con} \quad b(x - \bar{x}) = 0 \quad \forall_{x \in A}\}$.

Observar que $\mathrm{Comm}(A, \mu) = \mathcal{Z}(A, \mu)$.

Corolario 1.3.3. *Si* A_t *es un álgebra de Cayley–Dickson generalizada de dimensión* 2^t *obtenida a partir de* F *mediante el proceso de duplicación de Cayley–Dickson entonces:*

- $\mathrm{Comm}(A_t) = \mathcal{Z}(A_t)$,
- $\mathcal{Z}_*(A_t) = F$ *con* $\mathcal{Z}_* = \{c \in \mathcal{Z}(A_t) \,|\, \bar{c} = c\}$,
- $\mathcal{Z}(A_t) = F$ *si* $t \geq 2$,

- $\mathrm{N}(A_t) = F$ *si* $t \geq 3$.

Dada un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $A = A_{t-1} \oplus A_{t-1}u_t$ existe un automorfismo

$$\tau \colon a + bu_t \mapsto a - bu_t,$$

y todo automorfismo de A_{t-1} se extiende de manera natural a un automorfismo de A_t que fija a u_t. Para cada $\omega \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ con $\mathrm{n}(\omega) \neq 0$ la ecuación (1.17) implica que $\omega(xy)\omega^2 = (\omega x \omega^{-1})(\omega y \omega^2)$, entonces eligiendo $\omega^3 = 1$ tenemos que $\mu_\omega \colon x \mapsto \omega x \omega^{-1}$ es también un automorfismo. Para t mayor o igual que 4, μ_ω no es trivial si y sólo si $\sqrt{-3\mu_t^{-1}} \in F$. En este caso el subgrupo generado por τ y μ_ω es isomorfo a S_3, el grupo simétrico de grado tres. En el caso de que $\sqrt{-3\mu_t^{-1}} \notin F$ solamente obtenemos el subgrupo generado por τ que es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

Estas son precisamente las componentes $\mathbb{Z}_2$ y S_3 que aparecen en el Teorema 1.3.4, donde se describe el grupo de automorfismos de A_t ($t \geq 4$), que ha sido calculado en [14]:

Teorema 1.3.4. *Sea F un cuerpo de característica distinta de 2 y 3, entonces*

$$\mathrm{Aut}(A_t) \cong \mathrm{Aut}(A_{t-1}) \times \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & si \quad \sqrt{-3\mu_t^{-1}} \notin F \\ S_3 & si \quad \sqrt{-3\mu_t^{-1}} \in F \end{cases}$$

donde S_3 denota el grupo simétrico en tres cifras.

Sobre cuerpos de característica distinta de 2, Jacobson probó que toda álgebra Hurwitz se puede construir partiendo del cuerpo base y reiterando el proceso de Cayley–Dickson, pero si $\operatorname{car} F = 2$ entonces F no es Hurwitz, pues la norma $\mathrm{n}(x) = x^2$ no es estrictamente no degenerada y hemos de empezar el proceso por un álgebra Hurwitz de dimensión 2, obteniéndose el siguiente teorema que generaliza el Teorema 1.2.2

Teorema 1.3.5 (Teorema generalizado de Hurwitz)**.** *Cualquier álgebra Hurwitz es isomorfa a una de las siguientes:*

(I) El cuerpo base F, si su característica es distinta de dos

(II) $K(\mu) = F \oplus Fv$, *con* $vv = v + \mu$, $4\mu + 1 \neq 0$ *y la involución* $\overline{(a + bv)} = (a + b) - bv$

(III) Un álgebra generalizada de cuaternios $\mathbb{H}(\mu, \beta) = (K(\mu), \beta)$, *con* $\beta \neq 0$

(IV) Un álgebra generalizada de Cayley $\mathbb{C}(\mu, \beta, \gamma) = (\mathbb{H}(\mu, \beta), \gamma)$, *con* $\gamma \neq 0$

Para las álgebras de Cayley–Dickson generalizadas conviene observar el siguiente resultado:

Proposición 1.3.6. *Tenemos que*

i) $\mathrm{N_{alt}}(A_t) = A_t$ *si* $t \leq 3$*,*

ii) $\mathrm{N_{alt}}(A_t) = F1 \oplus Fu_t$ *si* $t > 3$*.*

Demostración. i) Es obvio, ya que A_t es alternativa si $t \leq 3$.

ii) Sea $a \in \mathrm{N_{alt}}(A_t)$ con $t \geq 4$ entonces $a = a_o + a_1 u_t$ con $a_0, a_1 \in A_{t-1}$

- Dados $x, y \in A_{t-1}$ se verifica que $(a_1 u_t, x, y) = -(x, a_1 u_t, y)$ y por tanto $(a_1 \bar{x})\bar{y} - a_1(\bar{y}\bar{x}) = -(a_1 x)\bar{y} + (a_1 \bar{y})x$.
  Si $x \perp 1$ entonces $\bar{x} = -x$ por lo que
  $$a_1(\bar{y}x) = (a_1 \bar{y})x \Rightarrow (a_1, y, x) = 0 \quad \forall_{x,y \in A, x \perp 1}.$$
  Como también es cierto para $x = 1$ entonces $a_1 \in \mathrm{N_l}(A_{t-1})$ que es $F1$ cuando $t \geq 4$ luego $a_1 \in F1$.

- Para cualesquiera $x, y \in A_{t-1}$ también $(a_0, xu_t, y) = -(xu_t, a_0, y)$ luego $(xa_0)\bar{y} - (x\bar{y})a_0 = -(x\bar{a}_0)\bar{y} + x(\bar{y}\bar{a}_0)$ lo que implica que $\mathrm{t}(a_0)x\bar{y} = (x\bar{y})a_0 + x(\bar{y}\bar{a}_0) = \mathrm{t}(a_0)x\bar{y} + (x, \bar{y}, a_0)$ y por tanto
  $$(x, \bar{y}, a_0) = 0 \quad \forall_{x,y \in A}.$$
  Entonces $a_0 \in \mathrm{N_r}(A_{t-1})$ luego $a_0 \in F1$ y por tanto $a \in F1 + Fu_t$.

Tenemos pues que $\mathrm{N_{alt}}(A_t) \subseteq F1 + Fu_t$ para $t \geq 4$, por lo que basta ver que $u_t \in \mathrm{N_{alt}}(A_t)$. Como A_t es flexible se verifica

$$(a, x, y) + (y, x, a) = 0$$

por lo que si vemos que $(u_t, x, y) = -(x, u_t, y) \quad \forall_{x,y \in A_t}$ entonces

$$(x, y, u_t) = -(u_t, y, x) = (y, u_t, x) = -(x, u_t, y) = (u_t, x, y),$$

con lo que se habrá probado que $u_t \in \mathrm{N_{alt}}(A_t)$.

Usamos elementos homogéneos para probar $(u_t, x, y) = -(x, u_t, y)$.

Sean $x, y \in A_{t-1}$

$$\begin{aligned}
(u_t, x, y) &= (\bar{x}\bar{y} - \bar{y}\bar{x})u_t = [\bar{x}, \bar{y}]\, u_t = -[x, \bar{y}]\, u_t \\
-(x, u_t, y) &= (-x\bar{y} + \bar{y}x)u_t = -[x, \bar{y}]\, u_t \\
(u_t, xu_t, y) &= \mu_t \bar{x} y - \mu_t \overline{(x\bar{y})} = \mu_t \bar{x} y - \mu_t y \bar{x} = \mu_t [\bar{x}, y] = -\mu_t [x, y] \\
-(xu_t, u_t, y) &= -\mu_t x, y + y x \mu_t = -\mu_t [x, y] \\
(u_t, x, yu_t) &= \mu_t \bar{y}\bar{x} - \mu_t \overline{y x} = \mu_t [\bar{y}, \bar{x}] = -\mu_t [\bar{y}, x] \\
-(x, u_t, yu_t) &= -\bar{y} x \mu_t + \mu_t x \bar{y} = -\mu_t [\bar{y}, x] \\
(u_t, xu_t, yu_t) &= \mu_t \bar{x} y u_t - u_t \mu_t \bar{y} x = \mu_t (y\bar{x} - \bar{x} y) u_t = \mu_t [y, \bar{x}]\, u_t = -\mu_t [y, x]\, u_t \\
-(xu_t, u_t, yu_t) &= -\mu_t x y u_t + \mu_t x u_t \bar{y} = -\mu_t (yx - xy) u_t = -\mu_t [y, x]\, u_t
\end{aligned}$$

La igualdad se verifica cualquiera que sea la combinación que tomemos, y como $(\ ,\ ,\ )$ es trilineal queda demostrada la proposición. $\square$

En el caso del álgebra de octoniones $A_3 = \mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ las identidades de Moufang izquierda, central y derecha

$$(axa)y = a(x(ay)), \ \ (ax)(ya) = a(xy)a \ \text{ y } \ \ x(aya) = ((xa)y)a \tag{1.16}$$

implican fácilmente que

$$(L_a, U_a, L_{a^{-1}}), (U_a, L_a, R_a), (R_a, R_{a^{-1}}, U_a) \in \mathrm{TAut}(A_3) \tag{1.17}$$

para todo $a \in A_3$ con $\mathrm{n}(a) \neq 0$, donde

$$U_a \colon x \mapsto axa.$$

Lema 1.3.7. $\mathrm{TAut}(A_3)$ *es el grupo generado por*

$$\{(L_a, U_a, L_{a^{-1}}), (R_a, R_{a^{-1}}, U_a), (\epsilon\,\mathrm{Id}, \mathrm{Id}, \epsilon\,\mathrm{Id}) \mid \mathrm{n}(a) \neq 0 \ \ y \ 0 \neq \epsilon \in F\}.$$

Lema 1.3.8. *Para todo* $a \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A_t)$ *con* $\mathrm{n}(a) \neq 0$ *se verifica*

$$(L_a, U_a, L_{a^{-1}}), (U_a, L_a, R_a), (R_a, R_{a^{-1}}, U_a) \in \mathrm{TAut}(A_t) \tag{1.18}$$

K. McCrimmon en [33] proporciona una descripción de las derivaciones a partir de las derivaciones de Cayley para las álgebras de Cayley–Dickson generalizadas sobre anillos de escalares asociativos y conmutativos.

Notar que $\mathrm{Der}(A)$ se extiende a $\mathrm{Der}(A, \mu)$ mediante $d(a + bu) = d(a) + d(b)u$.

Definición 1.3.9. *En un álgebra* A *con involución* $*$ *una* derivación de Cayley *de* A *es una aplicación lineal* $C : A \to A$ *tal que*

$$C(xy) = C(x)y^* + C(y)x$$

El conjunto de todas las derivaciones de Cayley de A *se denota por* $\mathrm{Cayder}(A)$

Teorema 1.3.10. *Dada un álgebra de Cayley–Dickson generalizada* A_t *de dimensión* 2^t *(con* $t \geq 3$*) sobre* F*. Entonces si* $\mathrm{car}\, F \neq 2, 3$

$$\mathrm{Cayder}(A_t) = 0, \quad \mathrm{Der}(A_t) = \widetilde{\mathrm{Der}(A_3)}$$

donde $\widetilde{\mathrm{Der}(A_3)}$ *es la extensión natural de* $\mathrm{Der}(A_3)$ *a* $\mathrm{Der}(A_t)$ *que anula a* $u_4, \ldots, u_t$ *mientras que si* $\mathrm{car}\, F \neq 2$ *entonces*

$$\mathrm{Cayder}(A_t) = 0, \quad \mathrm{Der}(A_t) = \widetilde{\mathrm{Der}(A_3)} \oplus FZ_4 \oplus \ldots \oplus FZ_t$$

con Z_i *la extensión natural de la derivación de* A_i *que anula a* A_{i-1} *y fija punto a punto a* $A_{i-1}u_i$ *y si* $\mathrm{car}\, F \neq 3$ *entonces*

$$\mathrm{Cayder}(A_t) = FS_t, \quad \mathrm{Der}(A_t) = \widetilde{\mathrm{Der}(A_3)} \oplus FW_4 \oplus \ldots \oplus FW_t$$

con W_i *la extensión natural de la derivación de* A_i *tal que* $W_i(a + bu_i) = \mu_i(b^* - b) + (a^* - a)u_i$ *para todo* $a, b \in A_{i-1}$ *y* $S_t(x) = x^* - x$*.*

1.4. Isotopía

Definición 1.4.1. *Un álgebra es* de división *si para todo elemento no nulo los operadores de multiplicación a izquierda y a derecha por él son invertibles.*

Si tenemos un álgebra de división cualquier isótopa también es de división, por eso comenzamos a estudiar la isotopía. El desarrollo de la investigación nos ha llevado a considerar otros tipos de transformaciones que conservan propiedades.

Como van a aparecer varios productos sobre el mismo espacio vectorial, a veces será útil la notación usada en [21]. Un álgebra será un par (A, P) con $P\colon A\times A \to A$ aplicación bilineal en un espacio vectorial A. El producto de $x, y \in A$ se denota mediante xPy. Los operadores de multiplicación a izquierda y a derecha por x se denotan por $L_P(x)$ y $R_P(x)$ respectivamente. Fijada un álgebra de división real de dimensión finita (A, P), los siguientes productos también proporcionan álgebras de división:

i) $xP^{\mathrm{op}}y = yPx$, el álgebra opuesta de (A, P).

ii) $xP^{\underline{\varphi}}y = \varphi_1^{-1}(\varphi_2(x)P\varphi_3(y))$ con $\underline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, $\varphi_i \in \mathrm{GL}(A)$ $i = 1, 2, 3$. $(A, P^{\underline{\varphi}})$ se obtiene por isotopía de (A, P).

iii) $xP^*y = L_P(x)^*(y)$ donde $L_P(x)^*$ denota el operador adjunto de $L_P(x)$ respecto de alguna forma bilineal simétrica no degenerada en A. Diremos que (A, P^*) es una adjunta de (A, P).

Cuando no usemos esta notación, la opuesta y la adjunta se denotarán mediante A^{op} y A^* respectivamente. Cuando un símbolo en particular represente el producto en A (por ejemplo $\circ$) lo reflejaremos en los operadores de multiplicación escribiendo L_a° (o R_a°) en lugar de L_a (o R_a).

Las transformaciones $P \mapsto P^{\mathrm{op}}, P^{\underline{\varphi}}, P^*$ se pueden ver como elementos del grupo $\mathrm{GL}(\mathrm{Hom}(A \otimes A, A))$. El subgrupo $\mathcal{G} = \mathcal{G}(A)$ generado por ellas actúa en $\{P \in \mathrm{Hom}(A \otimes A, A) \mid (A, P) \text{ es álgebra de división}\}$, por lo que es probablemente más natural estudiar las álgebras de división bajo la acción de este grupo que restringirnos a la acción del grupo de automorfismos (observar que la elección de distintas formas bilineales simétricas no degeneradas en la construcción de (A, P^*) nos lleva a álgebras isótopas, lo que justifica nuestra notación). Pensando en las álgebras de división reales de dimensión finita nos referimos a los grupos $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ con $n = 1, 2, 4, 8$. Es natural entonces identificar todo espacio vectorial real A de dimensión n con $\mathbb{R}^n$, y $\mathcal{G}(A)$ con $\mathcal{G}_n$, de modo que por ejemplo podemos decir que dos álgebras son isótopas incluso si los espacios vectoriales subyacentes son diferentes.

Nota 1.4.2. *En el caso de las álgebras Hurwitz, en su órbita bajo el correspondiente grupo $\mathcal{G}$, solamente aparecen álgebras isomorfas o isótopas, ya que al poseer involución el álgebra opuesta de un álgebra Hurwitz es isomorfa a ella misma, y para calcular el producto en la adjunta lo que hacemos es* $\mathrm{n}(x*y,z) = \mathrm{n}(y,xz) = \mathrm{n}(\bar{x}y,z)$ *con lo que la definición del producto es* $x*y = \bar{x}y = J(x)y$*, que nos da una isótopa.*

La órbita de (A,P) por la acción de $\mathcal{G}(A)$ es compatible con el álgebra de Lie de derivaciones ternarias en el siguiente sentido:

Proposición 1.4.3. *Dada* $(d_1,d_2,d_3) \in \mathrm{Tder}((A,P))$ *entonces*

i) $\mathrm{Tder}((A,P^{\mathrm{op}})) = \{(d_1,d_3,d_2) \mid (d_1,d_2,d_3) \in \mathrm{Tder}((A,P))\}$

ii) $\mathrm{Tder}((A,P^{\underline{\varphi}})) = \{(\varphi_1^{-1}d_1\varphi_1, \varphi_2^{-1}d_2\varphi_2, \varphi_3^{-1}d_3\varphi_3) \mid (d_1,d_2,d_3) \in \mathrm{Tder}(A,P)\}$

iii) $\mathrm{Tder}((A,P^*)) = \{(-d_3^*, d_2, -d_1^*) \mid (d_1,d_2,d_3) \in \mathrm{Tder}(A,P)\}$.

Corolario 1.4.4. *La clase de isomorfía de* $\mathrm{Tder}((A,P))$ *es la misma que la de* $\mathrm{Tder}((A,P^\sigma))$ *para todo* $\sigma \in \mathcal{G}(A)$*.*

Esto hace del álgebra de Lie de derivaciones ternarias una herramienta natural para estudiar las álgebras de división reales.

Proposición 1.4.5. *Las isotopías forman un subgrupo normal de* $\mathcal{G}$*.*

Demostración. La composición de isotopías es una isotopía, pero ¿qué pasa cuando componemos una isotopía con la opuesta o la adjunta? Al componer con la opuesta lo que tenemos es:

$$
\begin{aligned}
x(P^{\underline{\varphi}})^{\mathrm{op}}y &= yP^{\underline{\varphi}}x = \varphi_1^{-1}(\varphi_2(y)\varphi_3(x)) \\
x(P^{\mathrm{op}})^{(\varphi_1,\varphi_3,\varphi_2)}y &= \varphi_1^{-1}(\varphi_3(x)P^{\mathrm{op}}\varphi_2(y))
\end{aligned}
$$

Con lo que $(P^{\underline{\varphi}})^{\mathrm{op}} = (P^{\mathrm{op}})^{(\varphi_1,\varphi_3,\varphi_2)}$. Para ver qué ocurre cuando componemos con la adjunta utilizamos la forma bilineal $\mathrm{n}(\ ,\ )$ y lo que tenemos es:

$$\begin{aligned}
\mathrm{n}(x(P^{\underline{\varphi}})^* y, z) &= \mathrm{n}(y, xP^{\underline{\varphi}}z) = \mathrm{n}(y, \varphi_1^{-1}(\varphi_2(x)\varphi_3(z))) \\
&= \mathrm{n}((\varphi_1^*)^{-1}(y), \varphi_2(x)\varphi_3(z)) = \mathrm{n}(\varphi_2(x)P^*(\varphi_1^*)^{-1}(y), \varphi_3(z)) \\
&= \mathrm{n}(\varphi_3^*(\varphi_2(x)P^*(\varphi_1^*)^{-1}(y)), z)
\end{aligned}$$

lo que significa que $(P^{\underline{\varphi}})^* = (P^*)^{\underline{((\varphi_3^*)^{-1},\varphi_2,(\varphi_1^*)^{-1})}}$ □

1.5. Álgebras de división reales

En [5] G.Benkart y M.Osborn prueban que para toda álgebra A de división real de dimensión finita $\mathrm{Der}(A)$ es compacta y obtienen una clasificación de las posibilidades para el álgebra de derivaciones de un álgebra de división real que queda reflejada en el siguiente teorema.

Teorema 1.5.1. *Dada A álgebra de división real de dimensión finita y $\mathrm{Der}(A)$ su álgebra de derivaciones:*

- *Si* $\dim A = 1$ *o* 2, *entonces* $\mathrm{Der}(A) = 0$
- *Si* $\dim A = 4$ *entonces* $\mathrm{Der}(A)$ *es isomorfa a* $su(2)$ *(forma compacta de* $sl(2)$*) o* $\dim \mathrm{Der}(A) = 0$ *o* 1
- *Si* $\dim A = 8$ *entonces* $\mathrm{Der}(A)$ *es isomorfa a una de las siguientes álgebras de Lie:*

    1. *G_2 compacta*
    2. *$su(3)$*
    3. *$su(2) \oplus su(2)$*
    4. *$su(2) \oplus N$ con N ideal abeliano de dimensión 0 o 1*
    5. *N abeliana de dimensión 0, 1 o 2*

Además todas estas posibilidades ocurren.

Para mostrar ejemplos de todos los casos que describen en el teorema construyen una generalización de $\mathbb{O}$ tomando una base $\{u, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ tal que

$$u^2 = u, \quad ue_i = e_i = e_i u, \quad e_i^2 = -\beta_i u, \quad 1 \leq i \leq 7$$

$$e_i e_{i+1} = e_{i+3} = -e_{i+1} e_i, \quad e_{i+1} e_{i+3} = e_i = -e_{i+3} e_{i+1} \tag{1.19}$$

$$e_{i+3} e_i = e_{i+1} = -e_i e_{i+3} \quad \text{(interpretando los subíndices módulo 7)}$$

con $\beta_1, \ldots, \beta_7$ números reales positivos, (cuando $\beta_i = 1$ para todo i se obtiene $\mathbb{O}$), y demuestran que sea cual sea la elección para los β_i el álgebra que resulta es de división. Los valores que dan un ejemplo de álgebras con las derivaciones que buscan quedan recogidos en los siguientes corolarios:

Corolario 1.5.2. *Para cada una de las álgebras de Lie, L, enumeradas en el Teorema 1.5.1 existe un álgebra de división real, A, definida por (1.19) con* $\mathrm{Der}(A) = L$. *Concretamente:*

1. *Si* $\beta_1 = \ldots = \beta_7$ *entonces* $\mathrm{Der}(A) = G_2$ *compacta;*
2. *Si* $\beta_1 \neq \beta_2$ *y* $\beta_2 = \ldots = \beta_7$ *entonces* $\mathrm{Der}(A) = su(3)$*;*
3. *Si* $\beta_1 = \beta_2 = \beta_4 \neq \beta_3 = \beta_5 = \beta_6 = \beta_7$ *entonces* $\mathrm{Der}(A) = su(2) \oplus su(2)$*;*
4. *Si* β_1, β_2 *y* β_3 *son distintos,* $\beta_2 = \beta_4$ *y* $\beta_3 = \beta_5 = \beta_6 = \beta_7$ *entonces* $\mathrm{Der}(A) = su(2) \oplus N$ *con* $\dim N = 1$*;*
5. *Si* β_1, β_2, β_3 *y* β_6 *son distintos,* $\beta_1 = \beta_4$, $\beta_3 = \beta_5$ *y* $\beta_6 = \beta_7$ *entonces* $\dim \mathrm{Der}(A) = 2$ *y* $\mathrm{Der}(A)$ *es abeliano;*
6. *Si* β_1, β_2, β_3, β_4 *y* β_6 *son distintos,* $\beta_3 = \beta_5$ *y* $\beta_6 = \beta_7$ *entonces la dimensión de* $\mathrm{Der}(A)$ *es 1;*
7. *Si* $\beta_1, \ldots, \beta_7$ *son todos distintos entonces* $\mathrm{Der}(A) = 0$

Corolario 1.5.3. *Sea B la subálgebra generada por* $\{u, e_1, e_2, e_4\}$

a) *Si* $\beta_1 = \beta_2 = \beta_4$ *entonces* $\mathrm{Der}(B) = su(2)$

b) Si $\beta_1 = \beta_4 \neq \beta_2$ *entonces* $\dim \mathrm{Der}(B) = 1$

c) Si β_1, β_2 *y* β_4 *son distintos entonces* $\mathrm{Der}(B) = 0$

	u	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
u	u	ηe_1	ηe_2	ηe_3	ηe_4	ηe_5	ηe_6	ηe_7
e_1	ζe_1	$-\beta u$	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	ζe_2	$-e_4$	$-\beta u$	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	ζe_3	$-e_7$	$-e_5$	$-\beta u$	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	ζe_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	$-\beta u$	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	ζe_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	$-\beta u$	e_1	e_4
e_6	ζe_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	$-\beta u$	e_2
e_7	ζe_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	$-\beta u$

Tabla 1.5: Tabla de multiplicar de A con $\mathrm{Der}(A) = G_2$

En [6] estudiaron las álgebras de división reales de dimensión finita mediante sus derivaciones. Para que sirvan como ejemplo presentamos dos de los numerosos resultados que obtienen.

Teorema 1.5.4. *Un álgebra real* A *es de división de dimensión finita con* $\mathrm{Der}(A)$ *la forma compacta de* G_2 *si y solo si* A *tiene una base* $\{u, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ *con la tabla de multiplicación dada en 1.5 para algunos valores de* β, η, ζ *tales que* $\beta\eta\zeta > 0$.

Teorema 1.5.5. *Si* A *es un álgebra real de división de dimensión finita tal que* $\mathrm{Der}(A) = su(3)$ *y* A *no es un* $su(3)$*–módulo irreducible, entonces* A *tiene una base* $\{u, v, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$ *cuya multiplicación viene determinada por la tabla 1.6. Recíprocamente un álgebra definida mediante la tabla 1.6 tiene a* $su(3)$ *como derivaciones.*

Durante mucho tiempo se ha creído que $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$ son hasta cierto punto[1] las álgebras de división reales de dimensión finita mas simétricas. Sin embargo hay

[1] La componente conexa de la unidad del grupo de automorfismos de cada una de estas álgebras

	u	v	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
u	$\eta_1 u + \theta_1 v$	$\eta_2 u + \theta_2 v$	$\sigma_1 z_1 + \sigma_2 z_3$	$\sigma_1 z_2 + \sigma_2 z_6$	$\sigma_1 z_3 - \sigma_2 z_1$	$\sigma_1 z_4 + \sigma_2 z_5$	$\sigma_1 z_5 - \sigma_2 z_4$	$\sigma_1 z_6 - \sigma_2 z_2$
v	$\eta_3 u + \theta_3 v$	$\eta_4 u + \theta_4 v$	$\sigma_3 z_1 + \sigma_4 z_3$	$\sigma_3 z_2 + \sigma_4 z_6$	$\sigma_3 z_3 - \sigma_4 z_1$	$\sigma_3 z_4 + \sigma_4 z_5$	$\sigma_3 z_5 - \sigma_4 z_4$	$\sigma_3 z_6 - \sigma_4 z_2$
z_1	$\tau_1 z_1 + \tau_2 z_3$	$\tau_3 z_1 + \tau_4 z_3$	$-u$	z_4	v	$-z_2$	z_6	$-z_5$
z_2	$\tau_1 z_2 + \tau_2 z_6$	$\tau_3 z_2 + \tau_4 z_6$	$-z_4$	$-u$	z_5	z_1	$-z_3$	v
z_3	$\tau_1 z_3 - \tau_2 z_1$	$\tau_3 z_3 - \tau_4 z_1$	$-v$	$-z_5$	$-u$	z_6	z_2	$-z_4$
z_4	$\tau_1 z_4 + \tau_2 z_5$	$\tau_3 z_4 + \tau_4 z_5$	z_2	$-z_1$	$-z_6$	$-u$	v	z_3
z_5	$\tau_1 z_5 - \tau_2 z_4$	$\tau_3 z_5 - \tau_4 z_4$	$-z_6$	z_3	$-z_2$	$-v$	$-u$	z_1
z_6	$\tau_1 z_6 - \tau_2 z_2$	$\tau_3 z_6 - \tau_4 z_2$	z_5	$-v$	z_4	$-z_3$	$-z_1$	$-u$

Tabla 1.6: Tabla de multiplicación de A con $su(3) \subseteq \mathrm{Der}(A)$ dejando submódulos triviales.

otras álgebras de división reales que comparten su grupo de automorfismos pero no son isótopas a ellas [12]. En [6] se aísla otra álgebra de división que se construye partiendo de $su(3)$, las matrices complejas 3×3 anti–hermitianas de traza cero, reemplazando el producto usual de matrices xy por

$$x * y = \alpha(xy - yx) \pm \sqrt{3}\alpha i\{xy + yx - \frac{2}{3}t(xy)I\}.$$

Es una forma real del álgebra de pseudooctoniones sobre $\mathbb{C}$, por lo que su álgebra de Lie de derivaciones es isomorfa a $su(3)$, lejos del álgebra de Lie de derivaciones de $\mathbb{O}$ que es un álgebra de Lie simple compacta de tipo G_2. Sin embargo, la simetría de las álgebras de Okubo ha permitido dar construcciones sencillas de las álgebras de Lie excepcionales y comprender la simetría del cuadrado mágico de Freudenthal [16].

¿Qué papel juega esta álgebra cuando clasificamos mediante derivaciones ternarias? El álgebra de Lie de derivaciones ternarias de esta excepcional álgebra es isomorfa a la de $\mathbb{O}$, (Proposición 4.4.1) de dimensión máxima, luego ambas pertenecen a la misma órbita por la acción de $\mathcal{G}_8$ (Proposición 4.1.12).

Las derivaciones ternarias detectan cierto tipo de simetría oculta, por ejemplo la de los octoniones y el álgebra de Okubo, que no detectan las derivaciones usuales. Pero ¿cómo puede un álgebra de dimensión 8 como los octoniones tener un álgebra de derivaciones ternarias de dimensión 30? La respuesta es que las derivaciones ternarias están pensadas para ser compatibles con las álgebras alternativas, aquellas -como los octoniones- para las que $\mathrm{N_{alt}}(A) = A$. Dado que las condiciones para que un elemento a pertenezca a $\mathrm{N_{alt}}(A)$ son equivalentes a $(L_a, T_a, -L_a), (R_a, -R_a, T_a) \in \mathrm{Tder}(A)$, un gran $\mathrm{N_{alt}}(A)$ implica una gran $\mathrm{Tder}(A)$, como por ejemplo en el caso de los octoniones.

Las derivaciones ternarias pueden fallar en la detección de ciertos tipos de simetría en estructuras no asociativas, puesto que están muy orientadas hacia las álgebras alternativas. Aun así constituyen una herramienta genérica apropiada para

de división reales de dimensión finita tiene la mayor dimensión posible. Aun así hay otras álgebras con mayores grupos de automorfismos.

estudiar ciertos fenómenos no asociativos incluso después de profundas alteraciones como las realizadas por el grupo $\mathcal{G}$.

Capítulo 2

Álgebras de Cayley–Dickson Generalizadas

A lo largo de este capítulo trabajaremos sobre cuerpos de característica distinta de 2.

Partiendo de un álgebra unitaria A con involución escalar,[1] $x \mapsto \bar{x}$, y un $0 \neq \mu \in F$, podemos construir mediante el proceso de Cayley–Dickson una nueva álgebra (A, μ) sobre el espacio vectorial $A \oplus Au$ con producto:

$$(a + bu)(c + du) = (ac + \mu \bar{d} b) + (da + b\bar{c})u.$$

Cuando comenzamos con $A_0 = F$ ($\operatorname{car} F \neq 2$) obtenemos una extensión cuadrática separable de F, A_1, en el segundo paso un álgebra de cuaternios generalizada A_2 y a partir de ella un álgebra de octoniones generalizada A_3. Todas estas estas álgebras son de composición si bien en cada duplicación hemos perdido alguna característica, de A_1 a A_2 la conmutatividad, de A_2 a A_3 la asociatividad, y a partir de este momento podemos continuar el proceso de duplicación, pero las álgebras que aparecen ya no son álgebras de composición. Estas A_t de dimensión 2^t resultantes son las álgebras de Cayley–Dickson generalizadas.

[1] Definición 1.3.1

Pese a sus diferencias sí que tienen en común que todas ellas son álgebras flexibles y cuadráticas y la ecuación cuadrática que verifican es

$$x^2 - \mathrm{t}(x)x + \mathrm{n}(x) = 0 \tag{2.1}$$

La forma bilineal $\mathrm{n}(x,y) = \mathrm{n}(x+y) - \mathrm{n}(x) - \mathrm{n}(y)$ es no degenerada y la aplicación $a + bu \mapsto \bar{a} - bu$ extiende la involución de A a una involución en (A,μ) con propiedades análogas [43]. La descomposición $(A,\mu) = A \oplus Au$ es una $\mathbb{Z}_2$–graduación de (A,μ). Partiendo de $A_0 = F$ obtenemos inductivamente $A_t = (A_{t-1}, \mu_t) = A_{t-1} + A_{t-1}u_t$ con $u_t^2 = \mu_t 1$ (Sección 1.3).

Respecto a sus álgebras de derivaciones, un conocido resultado de Schafer [41] establece que, sobre cuerpos de característica distinta de 2 y 3, $\mathrm{Der}(A_t) \cong \mathrm{Der}(A_3)$ cuando $t \geq 3$ (ver Teorema 1.3.10). Sorprendentemente, aunque A_3 y A_t ($t \geq 3$) comparten la misma álgebra de derivaciones, es A_3 la que aparece más a menudo en la literatura con mucha diferencia.

El objetivo principal de este capítulo es calcular las álgebras de derivaciones ternarias de las álgebras A_t obtenidas mediante el proceso de duplicación de Cayley–Dickson. Al contrario de lo que pasa con $\mathrm{Der}(A_t)$, en el paso de $t = 3$ a $t = 4$, $\mathrm{Tder}(A_t)$ no permanece invariante: **¡decrece!** Es a partir de $t = 4$ cuando se estabiliza. Esto revela que cierta simetría de los octoniones se pierde cuando hacemos el proceso de duplicación de Cayley–Dickson mas allá de $t = 3$. Probaremos que

Teorema 2.1.1. *Sobre cualquier cuerpo de característica $\neq 2,3$ y para $t \geq 3$ tenemos que*

$$\mathrm{Tder}(A_t) = \widehat{\mathrm{Der}}(A_t) \oplus \langle (L_a, T_a, -L_a), (R_a, -R_a, T_a) \mid a \in \mathrm{N_{alt}}(A_t) \rangle,$$

donde $\widehat{\mathrm{Der}}(A_t) = \langle (d,d,d) \mid d \in \mathrm{Der}(A_t) \rangle$ y $\langle S \rangle$ denota la clausura lineal engendrada por S.

Y su análogo para cuerpos de característica tres:

Teorema 2.1.2. *Para todo cuerpo F de característica 3 tenemos que $\mathrm{Tder}(A_t)$ es*

$$\widehat{\mathrm{Der}}(A_t) + \langle (L_a, T_a, -L_a), (R_a, -R_a, T_a), (\mathrm{Id}, 0, \mathrm{Id}) \mid a \in \mathrm{N_{alt}}(A_t) \rangle$$

si $t \geq 4$, *o*

$$\mathrm{alg}_{\mathrm{Lie}}\langle (L_a, T_a, -L_a), (R_a, -R_a, T_a) \mid a \in A_3 \rangle + \langle (\mathrm{Id}, 0, \mathrm{Id}) \rangle,$$

donde $\mathrm{alg}_{\mathrm{Lie}}\langle S \rangle$ *es el álgebra de Lie generada por* S, *si* $t = 3$.

El comportamiento especial en característica tres no es una sorpresa. Por el Lema 1.1.13 todo $a \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ verifica

$$[L_a, L_x] = L_{[a,x]} - 2[R_a, L_x],$$

luego $[\mathrm{ad}_a, L_x] = L_{[a,x]} - 3[R_a, L_x]$ donde $\mathrm{ad}_a \colon x \mapsto [a, x]$. Si $\operatorname{car} F = 3$ entonces $\mathrm{ad}_a \in \mathrm{Der}(A)$. Si además $t \geq 4$ obtenemos una derivación central ad_{u_t} que corresponde a la derivación W en el Teorema 1.3.10. Además, si $\operatorname{car} F = 3$ entonces $\mathrm{Der}(A_3)$ no es un álgebra simple central como muestra [1], sino que tiene un único ideal propio I, isomorfo a un álgebra de Lie central simple de tipo A_2 y además $I \cong \mathrm{Der}(A_3)/I$ como álgebras de Lie.

El segundo resultado del capítulo es

Teorema 2.1.3. *Dado* $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathrm{TAut}(A_t)$ *con* $t \geq 4$ *y* $\operatorname{car} F \neq 2, 3$ *entonces existen* $\varphi \in \mathrm{Aut}(A_t), a, b \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A_t)$ *con* $\mathrm{n}(a) \neq 0 \neq \mathrm{n}(b)$ *y* $0 \neq \epsilon \in F$ *tales que*

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (\epsilon L_a R_b \varphi, U_a R_{b^{-1}} \varphi, \epsilon L_{a^{-1}} U_b \varphi).$$

Junto con el Teorema 1.3.4 este resultado da una descripción completa de $\mathrm{TAut}(A_t)$.

El capítulo se divide como sigue: En la Sección 2.2 consideramos probado el Teorema 2.1.1 y probamos el Teorema 2.1.3. Las Secciones 2.3 y 2.4 se dedican a calcular las derivaciones ternarias de A_t. El desarrollo está basado en el trabajo de McCrimmon [33]. En la Sección 2.3 introducimos el concepto de derivación ternaria de Cayley de A_t, y los resultados obtenidos se usan en la Sección 2.4 para probar los Teoremas 2.1.1 y 2.1.2.

Mientras que el estudio de las álgebras de derivación de las álgebras formadas por el proceso de duplicación de Cayley–Dickson ha sido totalmente desarrollado por McCrimmon en [33] para anillos de escalares asociativos y conmutativos arbitrarios, hemos preferido en este caso trabajar sobre cuerpos de característica $\neq 2$ para mantener los cálculos razonablemente bajo control.

2.2. Automorfismos Ternarios

En toda esta sección supondremos que $\operatorname{car} F \neq 2, 3$.

Sea $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ un automorfismo ternario de $A = A_t$, $t \geq 4$. Consideramos las aplicaciones $\phi_2 = \varphi_2\varphi_1^{-1}$, $\phi_3 = \varphi_3\varphi_1^{-1}$ y un nuevo producto en A definido por

$$x * y = \phi_2(x)\phi_3(y).$$

Denotamos los operadores de multiplicación a izquierda y a derecha en $(A, *)$ por L_x^* y R_x^* respectivamente. El isomorfismo de álgebras $\varphi_1 \colon A \to (A, *)$ nos permite considerar $(A, *)$ como una duplicación de $\varphi_1(A_{t-1})$ por el proceso de Cayley–Dickson con $v_t = \varphi_1(u_t)$. Sea e el elemento unidad en $(A, *)$. Tenemos que

$$\phi_2 = R_{\phi_3(e)}^{-1}, \quad \phi_3 = L_{\phi_2(e)}^{-1}, \quad L_x^* = L_{\phi_2(x)}L_{\phi_2(e)}^{-1} \quad \text{y} \quad R_x^* = R_{\phi_3(x)}R_{\phi_3(e)}^{-1}. \tag{2.2}$$

Lema 2.2.1. *Con la notación previa se verifica* $\langle \mathrm{Id}, L_{v_t}^*, R_{v_t}^* \rangle = \langle \mathrm{Id}, L_{u_t}, R_{u_t} \rangle$.

Demostración. De (1.4.3) tenemos que

$$\mathrm{Tder}(A, *) = \{(d_1, \phi_2^{-1}d_2\phi_2, \phi_3^{-1}d_3\phi_3 \mid (d_1, d_2, d_3) \in \mathrm{Tder}(A)\}.$$

En particular, $\mathrm{Tder}(A)$ y $\mathrm{Tder}(A, *)$ comparten la misma proyección en la primera componente. Del Teorema 2.1.1 obtenemos

$$\mathrm{Der}(A, *) \oplus \langle \mathrm{Id}, L_{v_t}^*, R_{v_t}^* \rangle = \mathrm{Der}(A) \oplus \langle \mathrm{Id}, L_{u_t}, R_{u_t} \rangle.$$

Como $\mathrm{Der}(A) \cong \mathrm{Der}(A_3)$ es un álgebra simple central de tipo G_2 (Teorema 1.2.4), entonces el centro de esta proyección es $\langle \mathrm{Id}, L_{v_t}^*, R_{v_t}^* \rangle = \langle \mathrm{Id}, L_{u_t}, R_{u_t} \rangle$. $\square$

Lema 2.2.2. *Tenemos que* $L_{v_t}^* \in \langle L_{u_t} \rangle$ *y* $R_{v_t}^* \in \langle R_{u_t} \rangle$.

Demostración. Probaremos primero la afirmación para $L^*_{v_t}$. Por el Lema 2.2.1 podemos escribir $L^*_{v_t} = \alpha \operatorname{Id} + \beta L_{u_t} + \gamma R_{u_t}$. Elevando al cuadrado y notando que $(L^*_{v_t})^2, L^2_{u_t}, R^2_{u_t} \in F \operatorname{Id}$ entonces

$$2\alpha\beta L_{u_t} + 2\alpha\gamma R_{u_t} + 2\beta\gamma L_{u_t} R_{u_t} \in F \operatorname{Id}.$$

En la $\mathbb{Z}_2$-graduación de $\operatorname{End}_F(A)$ que induce la de $A = A_{t-1} \oplus A_{t-1}u_t$, L_{u_t}, R_{u_t} son de grado uno y $L_{u_t}R_{u_t}, \operatorname{Id}$ son de grado cero, por lo tanto

$$2\alpha\beta L_{u_t} + 2\alpha\gamma R_{u_t} = 0 \quad \text{y} \quad 2\beta\gamma L_{u_t} R_{u_t} \in F \operatorname{Id}.$$

Como u_t no pertenece al núcleo conmutativo de A tenemos que $\alpha\beta = 0 = \alpha\gamma$ y $\beta\gamma = 0$. En el caso de que $\beta = \gamma = 0$ entonces $L^*_{v_t} = \alpha \operatorname{Id}$ lo que no es posible, luego

$$\alpha = 0, \quad \beta\gamma = 0 \quad \text{y} \quad L^*_{v_t} = \beta L_{u_t} \quad \text{o} \quad L^*_{v_t} = \gamma R_{u_t}.$$

Descartaremos esta última opción.

Si $L^*_{v_t} = \gamma R_{u_t}$ entonces, por (2.2) $L_{\phi_2(v_t)} = \gamma R_{u_t} L_{\phi_2(e)}$. Sin embargo

$$\phi_2(v_t) = L_{\phi_2(v_t)}(1) = \gamma R_{u_t} L_{\phi_2(e)}(1) = \gamma\phi_2(e)u_t$$

implicaría que $L_{\gamma\phi_2(e)u_t} = R_{u_t} L_{\gamma\phi_2(e)}$, o equivalentemente

$$(\phi_2(e)u_t)x = (\phi_2(e)x)u_t.$$

Multiplicando por u_t ambos lados de la ecuación y utilizando la identidad de Moufang a derecha tenemos que

$$\phi_2(e)(u_t x u_t) = ((\phi_2(e)u_t)x)u_t = \mu_t \phi_2(e)x,$$

por lo que $u_t x u_t = \mu_t x$. Multiplicando por u_t de nuevo llegamos a $u_t x = x u_t$, lo que no es posible. La demostración de la afirmación para $R^*_{v_t}$ es similar. $\square$

Lema 2.2.3. *Todo elemento $a \in \mathrm{N_{alt}}(A)$ verifica*

$$\bar{a}(ax) = \mathrm{n}(a)x = (xa)\bar{a}.$$

Demostración. La traza de un elemento es $\mathrm{t}(a) = \bar{a} + a$, por lo que para todo $a \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ se cumple $\bar{a}(ax) = (\mathrm{t}(a)1 - a)(ax) = \mathrm{t}(a)ax - a(ax) = (\mathrm{t}(a)a - a^2)x = \mathrm{n}(a)x$, que, como $\mathrm{n}(a) \in F$, es igual que $x\,\mathrm{n}(a)$ y haciendo los mismos productos, pero esta vez a la derecha llegamos a $\mathrm{n}(a)x = (xa)\bar{a}$ □

Proposición 2.2.4. *Para todo automorfismo ternario* $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ *existen* $e_2, e_3 \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ *tales que* $\varphi_2 = R_{e_2}\varphi_1$ *y* $\varphi_3 = L_{e_3}\varphi_1$.

Demostración. Por el Lema 2.2.2 sean $\beta, \gamma \in F$ escalares tales que $\beta L_{u_t} = L^*_{v_t} = L_{\phi_2(v_t)}L^{-1}_{\phi_2(e)}$ y $\gamma R_{u_t} = R^*_{v_t} = R_{\phi_3(u_t)}R^{-1}_{\phi_3(e)}$. Entonces

$$L_{\phi_2(v_t)} = L_{u_t}L_{\beta\phi_2(e)} \text{ y } \ R_{\phi_3(u_t)} = R_{u_t}R_{\gamma\phi_3(e)}. \tag{2.3}$$

Evaluando en 1 deducimos que $\phi_2(v_t) = u_t\beta\phi_2(e)$ y $\phi_3(u_t) = \gamma\phi_3(e)u_t$, luego podemos escribir (2.3) como

$$(u_t, \beta\phi_2(e), x) = 0 \text{ y } \ (x, \gamma\phi_3(e), u_t) = 0.$$

Estas relaciones implican fácilmente que $\phi_2(e), \phi_3(e) \in \langle 1, u_t\rangle = \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ [14].

Entonces podemos escribir $\phi_2 = R^{-1}_{\phi_3(e)} = R_{e_2}$ con $e_2 = \overline{\phi_3(e)}/\,\mathrm{n}(\phi_3(e))$. Análogamente $\phi_3 = L_{e_3}$ con $e_3 = \overline{\phi_2(e)}/\,\mathrm{n}(\phi_2(e))$. Recordar que $\phi_2 = \varphi_2\varphi_1^{-1}$ y $\phi_3 = \varphi_3\varphi_1^{-1}$, con lo que esto concluye la demostración. □

Proposición 2.2.5 ($t \geq 4$)**.** *Sea* $v \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ *con* $\mathrm{n}(v) \neq 0$. *La nueva álgebra* $(A, \circ)$, *con el producto definido por* $x \circ y = (xv)y$, *es isomorfa a* A *si y sólo si existe* $c \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ *tal que* $v \in Fc^3$.

Demostración. Supongamos que $v = \alpha c^3$ con $\alpha \in F$ y $c \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$, y definimos $\mu\colon x \mapsto \alpha cxc^2$. Tenemos que

$$\mu(x \circ y) = \alpha c((xv)y)c^2 = \alpha^2 c((xc^3)y)c^2 = \alpha^2(cxc^2)(cyc^2) = \mu(x)\mu(y),$$

lo que nos da el isomorfismo.

Supongamos ahora que $(A, \circ)$ es isomorfa a A, y consideramos $\phi\colon A \to (A, \circ)$ un isomorfismo. Podemos extender escalares a $\bar{F}$, la clausura algebraica de F, para obtener las álgebras $\bar{A}$, $(\bar{A}, \circ)$ y el isomorfismo $\bar{\phi}\colon \bar{A} \to (\bar{A}, \circ)$ inducido por ϕ.

Habiendo extendido los escalares podemos encontrar $a \in \mathrm{N_{alt}}(\bar{A})$ tal que $v^{-1} = a^3$, con lo que la aplicación $\mu_a \colon \bar{A} \to (\bar{A}, \circ)$, definida mediante $x \mapsto axa^2$, nos da un isomorfismo. Por el Teorema 1.3.4 existe $\omega \in \mathrm{N_{alt}}(\bar{A})$ con $\omega^3 = 1$, $i \in 0, 1$ y $\sigma \in \mathrm{Aut}(\bar{A}_{t-1}) \subseteq \mathrm{Aut}(\bar{A})$ tal que $\mu_a^{-1}\bar{\phi} = \mu_w \tau^i \sigma$, luego $\bar{\phi} = \mu_{a\omega}\tau^i\sigma$. Como $(a\omega)^3 = a^3 = v^{-1}$ podemos cambiar a por $a\omega$ y escribir $\bar{\phi} = \mu_a \tau^i \sigma = \mu_a \sigma \tau^i$.

Para todo $x_0 \in A_{t-1}$ tenemos que $\mu_a\sigma(x_0) = \mu_a\sigma\tau^i(x_0) = \bar{\phi}(x_0) = \phi(x_0) \in A$. Por otro lado, si escribimos $a = \alpha 1 + \beta u_t$, con $\alpha, \beta \in \bar{F}$, entonces como $\sigma(x_0) \in \bar{A}_{t-1}$,

$$\mu_a\sigma(x_0) = a\sigma(x_0)a^2 = \Big(\epsilon_1\sigma(x_0) + \epsilon_2\overline{\sigma(x_0)}\Big) + \Big(\epsilon_3\sigma(x_0) + \epsilon_4\overline{\sigma(x_0)}\Big)\, u_t \in A,$$

donde $\epsilon_1 = \alpha(\alpha^2 + \mu_t\beta^2)$, $\epsilon_2 = 2\mu_t\alpha\beta^2$, $\epsilon_3 = 2\alpha^2\beta$ y $\epsilon_4 = \beta(\alpha^2 + \mu_t\beta^2)$. Por tanto $\epsilon_1\sigma(x_0) + \epsilon_2\sigma(\bar{x}_0)$ y $\epsilon_3\sigma(x_0) + \epsilon_4\sigma(\bar{x}_0)$ pertenecen a A_{t-1}. Con $x_0 \in A_{t-1}$ y $\mathrm{t}(x_0) = 0$ obtenemos que $(\epsilon_1 - \epsilon_2)\sigma(x_0)$ y $(\epsilon_3 - \epsilon_4)\sigma(x_0)$ también están en A_{t-1}. Podemos elegir $x_0, y_0 \in A_{t-1}$ con $\mathrm{t}(x_0) = 0 = \mathrm{t}(y_0)$ y $[x_0, y_0] \neq 0$, entonces $(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2\sigma([x_0, y_0]) = [(\epsilon_1 - \epsilon_2)\sigma(x_0), (\epsilon_1 - \epsilon_2)\sigma(y_0)] \in A_{t-1}$, lo que implica que $\epsilon_1 - \epsilon_2 \in F$. Análogamente $\epsilon_3 - \epsilon_4 \in F$. Ahora, con $x_0 = 1$ también obtenemos que $\epsilon_1 + \epsilon_2$ y $\epsilon_3 + \epsilon_4$ pertenecen a F, por tanto

$$\alpha(\alpha^2 + \mu_t\beta^2),\ \ 2\mu_t\alpha\beta^2,\ \ 2\alpha^2\beta \ \text{ y } \ \beta(\alpha^2 + \mu_t\beta^2) \in F.$$

En el caso de que $\beta \neq 0$ se sigue que $\beta^3 \in F$ y $\beta^{-1}a = \beta^{-1}\alpha 1 + u_t \in A$, por lo que $v = \beta^{-3}c^3$ con $c = (\beta^{-1}a)^{-1} \in \mathrm{N_{alt}}(A)$, lo que nos da el resultado en este caso. Si $\beta = 0$ entonces $a \in \bar{F}$, $v \in F$ y el resultado es obvio. □

Ahora podemos dar la demostración del Teorema 2.1.3.

Teorema (2.1.3)**.** *Dado* $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathrm{TAut}(A_t)$ *con* $t \geq 4$ *y* $\mathrm{car}\, F \neq 2, 3$ *entonces existen* $\varphi \in \mathrm{Aut}(A_t), a, b \in \mathrm{N_{alt}}(A_t)$ *con* $N(a) \neq 0 \neq N(b)$ *y* $0 \neq \epsilon \in F$ *tales que*

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (\epsilon L_a R_b \varphi, U_a R_{b^{-1}}\varphi, \epsilon L_{a^{-1}} U_b \varphi).$$

Demostración. De la Proposición 2.2.4 tenemos que existen $e_2, e_3 \in \mathrm{N_{alt}}(A)$ tales que $\varphi_2 = R_{e_2}\varphi_1$ y $\varphi_3 = L_{e_3}\varphi_1$. Esto es, $x * y = (xe_2)(e_3y)$. *(Recordemos que con*

$\phi_2 = \varphi_2\varphi_1^{-1}$, $\phi_3 = \varphi_3\varphi_1^{-1}$, *el producto* $*$ *en* A *está definido por* $x * y = \phi_2(x)\phi_3(y)$*).* Definimos ahora $x \circ y = (xe_3)(e_3y)$. La aplicación $U_{e_3}\colon x \mapsto e_3xe_3$ nos da un isomorfismo de $(A, \circ)$ en A. En particular, $(A, *)$ es isomorfa a $(A, \circ)$. Además,

$$x * y = (x \circ v) \circ y, \quad \text{con} \quad v = e_2e_3^{-3}.$$

Por la Proposición 2.2.5, existen $\epsilon \in F$ y $c \in \mathrm{N_{alt}}(A)$ tales que $v = \epsilon^{-1}(c \circ c \circ c) = \epsilon^{-1}e_3^4c^3$. Por la definición de v tenemos que $e_2 = \epsilon^{-1}e_3^7c^3$, luego $x * y = \epsilon^{-1}(x(e_3^2c)^3e_3)(e_3y)$ y $\gamma\colon x \mapsto \epsilon^{-1}e_3(e_3^2c)x(e_3^2c)^2e_3$ nos da un isomorfismo de $(A, *)$ en A. (No hay más que notar que $\gamma(x * y) = \epsilon^{-1}e_3(e_3^2c)(x * y)(e_3^2c)^2e_3 = \epsilon^{-1}e_3(e_3^2c)(\epsilon^{-1}(x(e_3^2c)^3e_3)(e_3y))(e_3^2c)^2e_3$, que desplazando el escalar podemos ver como $(\epsilon^{-1}e_3(e_3^2c)x(e_3^2c)^2e_3)(\epsilon^{-1}e_3(e_3^2c)y(e_3^2c)^2e_3) = \gamma(x)\gamma(y)$).

Por lo tanto $\varphi = \gamma\varphi_1 \in \mathrm{Aut}(A)$ y

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (\gamma^{-1}\varphi, R_{e_2}\gamma^{-1}\varphi, L_{e_3}\gamma^{-1}\varphi) = (\epsilon L_a R_b \varphi, U_a R_{b^{-1}}\varphi, \epsilon L_{a^{-1}} U_b \varphi),$$

con $a = e_3^{-3}c^{-1}$ y $b = e_3^{-5}c^{-2}$. Esto describe los automorfismos ternarios de A, $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, en función de $\mathrm{Aut}(A)$. □

2.3. Derivaciones Ternarias de Cayley

Definición 2.3.1. *Dada un álgebra* A *con involución* $x \mapsto \bar{x}$ *y* $d_1, d_2, d_3 \in \mathrm{End}_F(A)$*, diremos que* (d_1, d_2, d_3) *es una* derivación ternaria de Cayley *de* A *si*

$$d_1(xy) = d_2(x)\bar{y} + d_3(y)x. \tag{2.4}$$

El conjunto de las derivaciones ternarias de Cayley de A se denota por $\mathrm{TCayder}(A)$. Las derivaciones ternarias de Cayley generalizan la idea de derivación de Cayley introducida por McCrimmon en [33].

A partir de ahora supondremos que $A = A_t$ *con* $t \geq 3$ *y* $\mathrm{car}\, F \neq 2$.

Usaremos la notación

$$C_z = (R_z, -R_{\bar{z}}, \mathrm{t}(\star z)) \quad \text{y} \quad C'_z = (R_zJ, \mathrm{t}(\star\bar{z}), -R_{\bar{z}}J),$$

donde $J\colon x \mapsto \bar{x}$ y $\mathrm{t}(\star z)\colon x \mapsto \mathrm{t}(xz)$.

Proposición 2.3.2. *Si* $a \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ *entonces* $C_a, C'_a \in \mathrm{TCayder}(A)$.

Demostración. Como $y + \bar{y} = \mathrm{t}(y)$, entonces $(x, y, a) = -(x, a, y)$ implica

$$(xy)a = x(ya) + (x, a, \bar{y}) = -x(\bar{a}\bar{y}) + \mathrm{t}(ya)x - (x, \bar{a}, \bar{y}) = -(x\bar{a})\bar{y} + \mathrm{t}(ya)x,$$

luego $C_a \in \mathrm{TCayder}(A)$. Comenzando con $(\bar{y}, \bar{x}, a) = -(\bar{y}, a, \bar{x})$ obtenemos que $C'_a \in \mathrm{TCayder}(A)$. □

Dedicaremos esta sección a demostrar que

Teorema 2.3.3 ($t \geq 3$)**.**

$$\mathrm{TCayder}(A_t) = \langle C_a \,|\, a \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A_t)\rangle \oplus \langle C'_a \,|\, a \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A_t)\rangle.$$

Comenzaremos probando el siguiente lema.

Lema 2.3.4. *Para toda* $(d_1, d_2, d_3) \in \mathrm{TCayder}(A)$ *se cumple que*

$$(d_1^+, d_2^+, d_3^+) \text{ y } (d_1^-, d_2^-, d_3^-) \in \mathrm{TCayder}(A),$$

con d_i^+ *y* d_i^- *las partes par e impar respectivamente de* d_i. [2]

Demostración. Toda $(d_1, d_2, d_3) \in \mathrm{TCayder}(A)$ verifica la ecuación (2.4) para todo x e y de A, en particular para x, y homogéneos. Esto implica que si tomamos $x = x^\delta \in A^\delta$ e $y = y^\gamma \in A^\gamma$, al hacer $d_1(xy) = d_1(x^\delta y^\gamma) = (d_1^+ + d_1^-)(xy) = d_1^+(xy) + d_1^-(xy)$ nos queda $d_1^+(xy) \in A^{\delta\gamma}$ y $d_1^-(xy) \in A^{-\delta\gamma}$.

En el segundo término de la ecuación (2.4) observamos que $d_2(x)\bar{y}$ tiene componentes $d_2^+(x)\bar{y} \in A^{\delta\gamma}$ y $d_2^-(x)\bar{y} \in A^{-\delta\gamma}$, mientras que $d_3(y)x$ se descompone como $d_3^+(y)x \in A^{\delta\gamma}$ y $d_3^-(y)x \in A^{-\delta\gamma}$.

Debido a la graduación de A, se han de cumplir las igualdades en cada una de las componentes, lo que significa que tanto (d_1^+, d_2^+, d_3^+) como (d_1^-, d_2^-, d_3^-) pertenecen a $\mathrm{TCayder}(A)$ □

Nos referiremos a (d_1^+, d_2^+, d_3^+) como derivaciones ternarias de Cayley *de grado cero*, mientras que a las derivaciones ternarias de Cayley de la forma (d_1^-, d_2^-, d_3^-) las llamaremos *de grado uno*.

[2] recordar la Definición 1.1.2.

2.3.1. Derivaciones Ternarias de Cayley de Grado Cero

Sea $(d_1, d_2, d_3) \in \mathrm{Tder}(A)$ de grado cero, entonces

$$d_i(a + bu_t) = \alpha_i(a) + \beta_i(b)u_t$$

para ciertas aplicaciones lineales $\alpha_i, \beta_i \colon A_{t-1} \to A_{t-1}$. Imponiendo que $d_1(xy) = d_2(x)\bar{y} + d_3(y)x$, sin más que elegir adecuadamente x e y obtenemos

Proposición 2.3.5. *Las aplicaciones $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ y β_3 satisfacen las siguientes relaciones:*

R1) $\alpha_1(ab) = \alpha_2(a)\bar{b} + \alpha_3(b)a$,

R2) $\alpha_1(ab) = \bar{b}\beta_3(\bar{a}) - a\beta_2(b)$,

R3) $\beta_1(ab) = \beta_3(a)\bar{b} - a\alpha_2(b)$,

R4) $\beta_1(ab) = \beta_2(a)\bar{b} + a\alpha_3(\bar{b})$.

Evaluando las relaciones R1,…, R4 para $a = 1$ o $b = 1$ obtenemos

Corolario 2.3.6.

A1) $\alpha_1(a) = \alpha_2(a) + \alpha_3(1)a$,

A2) $\alpha_1(a) = \alpha_2(1)\bar{a} + \alpha_3(a)$,

A3) $\alpha_1(a) = \beta_3(\bar{a}) - a\beta_2(1)$,

A4) $\alpha_1(a) = \bar{a}\beta_3(1) - \beta_2(a)$,

B1) $\beta_1(a) = \beta_3(a) - a\alpha_2(1)$,

B2) $\beta_1(a) = \beta_3(1)\bar{a} - \alpha_2(a)$,

B3) $\beta_1(a) = \beta_2(a) + a\alpha_3(1)$,

B4) $\beta_1(a) = \beta_2(1)\bar{a} + \alpha_3(\bar{a})$.

Lema 2.3.7. *Sea S un subespacio de $A_3 \subseteq A_t$ con $\dim S \geq 5$, y $x \in A_t$ tal que $[x, S] = 0$. Entonces $x \in F$.*

Demostración. Primero observamos que si $a \in A_{t-1} \subseteq A_t$ y $L_a|_{A_{t-1}}$ y $R_a|_{A_{t-1}}$ son biyectivas, entonces L_a y R_a son biyectivas también. En particular, como $L_a|_{A_3}$ es biyectiva para todo $a \in A_3$ con $\mathrm{n}(a) \neq 0$, entonces L_a es biyectiva para estos elementos.

Como $\dim S \geq 5$, existe $a \in S$ con $\mathrm{t}(a) = 0$ y $\mathrm{n}(a) \neq 0$. Por (2.1) tenemos que $2ax = ax + xa = \mathrm{t}(x)a - \mathrm{n}(a, x)1$, y por tanto ax pertenece al álgebra generada por

a. Como L_a es biyectiva entonces $x \in \langle 1, a\rangle$, por lo que $x \in F$ o bien $[a, S] = 0$. En el segundo caso, como $\dim S \geq 5$ podemos elegir $0 \neq s \in S$ con $\mathrm{t}(s) = \mathrm{n}(a, s) = 0$, luego $as = sa = \bar{a}s = -as$. Entonces $as = 0$ y $s = 0$, lo que contradice la elección de s. $\square$

Proposición 2.3.8 ($t \geq 4$)**.** *Existen $\epsilon_{\alpha_i}, \epsilon_{\beta_i} \in F$ y $\delta_{\alpha_i}, \delta_{\beta_i} \colon A_{t-1} \to F$ tales que $\alpha_i(a) = \epsilon_{\alpha_i} a + \delta_{\alpha_i}(a)$ y $\beta_i(a) = \epsilon_{\beta_i} a + \delta_{\beta_i}(a)$, $i = 1, 2, 3$.*

Demostración. Procederemos en varios pasos:

Paso 1. $\epsilon_0 = \beta_3(1) - \beta_2(1) = \alpha_3(1) + \alpha_2(1) \in F$.

Restando R3 de R4 obtenemos $0 = (\beta_2(a) - \beta_3(a))\bar{b} + a(\alpha_3(\bar{b}) + \alpha_2(b))$.

Con $a = 1$ esto implica que $\alpha_3(\bar{b}) + \alpha_2(b) = \epsilon_0 \bar{b}$.

Por otro lado, con $b = 1$ obtenemos $\beta_2(a) - \beta_3(a) = -a\epsilon_0$.

Por lo tanto $(a\epsilon_0)\bar{b} = a(\epsilon_0\bar{b})$, lo que significa que $(A_{t-1}, \epsilon_0, A_{t-1}) = 0$, y como $t > 3$ esto implica que $\epsilon_0 \in F$ (Teorema 1.3.2).

Paso 2. $\epsilon_1 = \alpha_3(1) - \beta_3(1) = -\alpha_2(1) - \beta_2(1) \in F$.

Por un lado, A1 + B2 implica que

$$\alpha_1(a) + \beta_1(a) = \alpha_3(1)a + \beta_3(1)\bar{a} = \epsilon_1 a + \beta_3(1)\,\mathrm{t}(a). \tag{2.5}$$

Por otra parte, A4 + B3 implica que

$$\alpha_1(a) + \beta_1(a) = \bar{a}\beta_3(1) + a\alpha_3(1) = a\epsilon_1 + \beta_3(1)\,\mathrm{t}(a).$$

Entonces $\epsilon_1 a = a\epsilon_1$ para todo $a \in A_{t-1}$. Como $t \geq 3$ se sigue que $\epsilon_1 \in F$ (Teorema 1.3.2). Por último, la igualdad $\alpha_3(1) - \beta_3(1) = -\alpha_2(1) - \beta_2(1)$ es consecuencia de la igualdad $\beta_3(1) - \beta_2(1) = \alpha_3(1) + \alpha_2(1)$.

Paso 3. $\alpha_3(1) \in F$.

Sumando A1 y B3, por (2.1), tenemos que $\alpha_1(a) + \beta_1(a) = \alpha_2(a) + \beta_2(a) + \mathrm{t}(a)\alpha_3(1) + \mathrm{t}(\alpha_3(1))a - \mathrm{n}(\alpha_3(1), a)1$. Comparando con (2.5) tenemos

$$\alpha_2(a) + \beta_2(a) = \epsilon_2 a - \epsilon_1\,\mathrm{t}(a) + \mathrm{n}(\alpha_3(1), a)1, \tag{2.6}$$

donde $\epsilon_2 = \epsilon_1 - \mathrm{t}(\alpha_3(1))$.

Sumando R1 y R4 y utilizando (2.5) y (2.6) obtenemos

$$\alpha_1(ab)+\beta_1(ab)=\begin{cases}\epsilon_1 ab+\mathrm{t}(ab)\beta_3(1)\\ \\ (\alpha_2(a)+\beta_2(a))\bar{b}+\mathrm{t}(b)a\alpha_3(1)+[\alpha_3(b),a]=\\ \epsilon_2 a\bar{b}-\epsilon_1\,\mathrm{t}(a)\bar{b}+\mathrm{n}(\alpha_3(1),a)\bar{b}+\mathrm{t}(b)a\alpha_3(1)+[\alpha_3(b),a].\end{cases}$$

Para $\mathrm{t}(a)=\mathrm{t}(b)=0$ esto es

$$\begin{aligned}[\alpha_3(b),a] &= (\epsilon_1+\epsilon_2)ab+\mathrm{n}(\alpha_3(1),a)b+\mathrm{t}(ab)\beta_3(1)\\ &= \frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{2}[a,b]-\frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{2}\,\mathrm{n}(a,b)+\mathrm{t}(ab)\beta_3(1)+\mathrm{n}(\alpha_3(1),a)b,\end{aligned}$$

por lo que, como $-\mathrm{t}(ab)=\mathrm{n}(a,b)$, tenemos

$$[\alpha_3(b)+\frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{2}b,a]=\mathrm{t}(ab)(\beta_3(1)+\frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{2})+\mathrm{n}(\alpha_3(1),a)b. \tag{2.7}$$

Fijamos b con $\mathrm{t}(b)=0$ y consideramos $S=\{a\in A_3 \mid \mathrm{t}(a)=\mathrm{n}(a,b)=\mathrm{n}(a,\alpha_3(1))=0\}$ cuya dimensión es ≥ 5. Como la ecuación (2.14) implica que $[\alpha_3(b)+\frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{2}b,S]=0$ entonces, por el Lema 2.3.7

$$\alpha_3(b)+\frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{2}b\in F \quad \text{si} \quad \mathrm{t}(b)=0. \tag{2.8}$$

Ahora (2.7) se puede leer $\mathrm{t}(ab)(\beta_3(1)+\frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{2})+\mathrm{n}(\alpha_3(1),a)b=0$. Eligiendo b linealmente independiente con $(\beta_3(1)+\frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{2})$ podemos concluir que $\mathrm{n}(\alpha_3(1),a)=0$ si $\mathrm{t}(a)=0$. Entonces $\alpha_3(1)\in F$ como queríamos.

Último paso.

De los pasos previos tenemos que $\alpha_2(1),\alpha_3(1),\beta_2(1)$ y $\beta_3(1)$ están en F. De A1 y B1 también es cierto para $\alpha_1(1)$ y $\beta_1(1)$. Además, como $\alpha_3(1)\in F$, entonces (2.8) implica que existen $\epsilon_{\alpha_3}\in F$ y $\delta_{\alpha_3}\colon A_{t-1}\to F$ tales que $\alpha_3(a)=\epsilon_{\alpha_3}a+\delta_{\alpha_3}(a)$. La Proposición se deduce ahora de A1, A2, B3 y B4. □

Proposición 2.3.9 ($t\geq 4$)**.** *Con la notación anterior,*

$$(d_1,d_2,d_3)=-\epsilon_{\alpha_2}C_1+\epsilon_{\alpha_3}C_1'.$$

Demostración. Por R1 tenemos

$$\epsilon_{\alpha_1} ab + \delta_{\alpha_1}(ab) = \epsilon_{\alpha_2} a\bar{b} + \epsilon_{\alpha_3} ba + \delta_{\alpha_2}(a)\bar{b} + \delta_{\alpha_3}(b)a. \tag{2.9}$$

Eligiendo $a, b \in A_2$ con $1, a, b, ab$ base ortogonal con respecto a $\mathrm{n}(\ ,\ )$, tenemos

$$\epsilon_{\alpha_1} = -\epsilon_{\alpha_2} - \epsilon_{\alpha_3}. \tag{2.10}$$

Por (2.1) y (2.10) podemos reescribir (2.9) como

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha_3}(\mathrm{t}(a)b + \mathrm{t}(b)a - \mathrm{n}(a,b)) &+ \epsilon_{\alpha_2}\,\mathrm{t}(b)a - \delta_{\alpha_2}(a)b \\ &+ \delta_{\alpha_3}(b)a + \mathrm{t}(b)\delta_{\alpha_2}(a) - \delta_{\alpha_1}(ab) = 0.\end{aligned}$$

Agrupando términos tenemos

$$\begin{aligned}(-\epsilon_{\alpha_1}\,\mathrm{t}(b) + \delta_{\alpha_3}(b))a &+ (\epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(a) - \delta_{\alpha_2}(a))b \\ &- \epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{n}(a,b) + \mathrm{t}(b)\delta_{\alpha_2}(a) - \delta_{\alpha_1}(ab) = 0.\end{aligned}$$

Eligiendo $1, a, b$ linealmente independientes, podemos decir que para todo $a, b \in A_{t-1}$

$$\delta_{\alpha_1}(a) = \epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(a),\ \ \delta_{\alpha_2}(a) = \epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(a) \text{ y } \delta_{\alpha_3}(a) = \epsilon_{\alpha_1}\,\mathrm{t}(a).$$

Ahora escribimos R2 como

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha_1} ab + \epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(ab) &= \epsilon_{\beta_3}\bar{b}\bar{a} + \delta_{\beta_3}(\bar{a})\bar{b} - \epsilon_{\beta_2} ab - \delta_{\beta_2}(b)a \\ &= -\epsilon_{\beta_3} ab + \epsilon_{\beta_3}\,\mathrm{t}(ab) - \epsilon_{\beta_2} ab + \delta_{\beta_3}(\bar{a})\bar{b} - \delta_{\beta_2}(b)a.\end{aligned} \tag{2.11}$$

De nuevo tomamos $a, b \in A_2$ con $1, a, b, ab$ base ortogonal de A_2 para obtener

$$\epsilon_{\alpha_1} = -\epsilon_{\beta_2} - \epsilon_{\beta_3}.$$

Sustituyendo esta relación en (2.11) llegamos a

$$\epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(ab) = \epsilon_{\beta_3}\,\mathrm{t}(ab) - \delta_{\beta_2}(b)a - \delta_{\beta_3}(\bar{a})b + \delta_{\beta_3}(\bar{a})\,\mathrm{t}(b).$$

Como antes, esta relación implica fácilmente que $\delta_{\beta_2} = 0 = \delta_{\beta_3}$ y $\epsilon_{\beta_3} = \epsilon_{\alpha_3}$. Como $\epsilon_{\alpha_2} - \epsilon_{\alpha_3} = \epsilon_{\alpha_1} = -\epsilon_{\beta_2} - \epsilon_{\beta_3}$ entonces $\epsilon_{\beta_2} = \epsilon_{\alpha_2}$ también. Finalmente, de B3 tenemos que $\beta_1(a) = \epsilon_{\beta_2} a + a\alpha_3(1) = \epsilon_{\alpha_2} a + a(\epsilon_{\alpha_3} + 2\epsilon_{\alpha_1}) = \epsilon_{\alpha_1} a$, luego $\epsilon_{\beta_1} = \epsilon_{\alpha_1}$ y $\delta_{\beta_1} = 0$. Ahora que tenemos $\epsilon_{\alpha_i}, \epsilon_{\beta_i}, \delta_{\alpha_i}$ y δ_{β_i} en función de ϵ_{α_2} y ϵ_{α_3}, y considerando que

$$\begin{aligned}
d_1(x) &= d_1(a + bu_t) = \alpha_1(a) + \beta_1(b)u_t \\
&= \epsilon_{\alpha_1} a + \delta_{\alpha_1}(a) + (\epsilon_{\beta_1} b + \delta_{\beta_1}(b))u_t \\
&= -(\epsilon_{\alpha_2} + \epsilon_{\alpha_3})a + \epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(a) - (\epsilon_{\alpha_2} + \epsilon_{\alpha_3})bu_t \\
&= -\epsilon_{\alpha_2} a - \epsilon_{\alpha_2} bu_t + \epsilon_{\alpha_3}\bar{a} - \epsilon_{\alpha_3} bu_t = -\epsilon_{\alpha_2} x + \epsilon_{\alpha_3}\bar{x}, \\
d_2(x) &= d_2(a + bu_t) = \alpha_2(a) + \beta_2(b)u_t \\
&= \epsilon_{\alpha_2} a + \delta_{\alpha_2}(a) + (\epsilon_{\beta_2} b + \delta_{\beta_2}(b))u_t \\
&= \epsilon_{\alpha_2} a + \epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(a) + \epsilon_{\alpha_2} bu_t \\
&= \epsilon_{\alpha_2}(a + bu_t) + \epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(a) = \epsilon_{\alpha_2} x + \epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(x), \\
d_3(x) &= d_3(a + bu_t) = \alpha_3(a) + \beta_3(b)u_t \\
&= \epsilon_{\alpha_3} a + \delta_{\alpha_3}(a) + (\epsilon_{\beta_3} b + \delta_{\beta_3}(b))u_t \\
&= \epsilon_{\alpha_3} a + \epsilon_{\alpha_1}\,\mathrm{t}(a) + \epsilon_{\beta_3} bu_t \\
&= \epsilon_{\alpha_3} a - (\epsilon_{\alpha_2} + \epsilon_{\alpha_3})\,\mathrm{t}(a) + \epsilon_{\alpha_3} bu_t \\
&= -\epsilon_{\alpha_2}\,\mathrm{t}(a) - \epsilon_{\alpha_3}\bar{a} + \epsilon_{\alpha_3} bu_t = -\epsilon_{\alpha_3}\bar{x} - \epsilon_{\alpha_2}\,\mathrm{t}(x),
\end{aligned}$$

obtenemos $(d_1, d_2, d_3) = -\epsilon_{\alpha_2} C_1 + \epsilon_{\alpha_3} C_1'$ como queríamos demostrar. □

Proposición 2.3.10. *El conjunto de las derivaciones ternarias de Cayley de grado cero de A_3 es $\langle C_a \,|\, a \in A_2\rangle \oplus \langle C_a' \,|\, a \in A_2\rangle$.*

Demostración. Dada (d_1, d_2, d_3), derivación ternaria de Cayley de grado cero de A_3, sea $w = d_2(1) \in A_2$ y $z = d_3(1) \in A_2$. Como $\operatorname{car} F \neq 2$, entonces $w = w_0 + \frac{1}{2}\,\mathrm{t}(w)$, $z = z_0 + \frac{1}{2}\,\mathrm{t}(z)$ con $\mathrm{t}(w_0) = \mathrm{t}(z_0) = 0$ y

$$\begin{aligned}
d_2(1) + R_{\bar{w}_0}(1) - \mathrm{t}(\bar{z}_0) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{t}(w), \\
d_3(1) - \mathrm{t}(w_0) + R_{\bar{z}_0} J(1) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{t}(z).
\end{aligned}$$

Ahora, restando $C_{w_0} + C_{z_0}'$ de (d_1, d_2, d_3) podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\alpha_2(1), \alpha_3(1) \in F$. Como en los Pasos 2 y 3 en la demostración de la

Proposición 2.3.8

A1 + B2 implica que

$$\alpha_1(a) + \beta_1(a) = \alpha_3(1)a + \beta_3(1)\bar{a} = \epsilon_1 a + \beta_3(1)\,\mathrm{t}(a). \tag{2.12}$$

Por otra parte, A4 + B3 implica que

$$\alpha_1(a) + \beta_1(a) = \bar{a}\beta_3(1) + a\alpha_3(1) = a\epsilon_1 + \beta_3(1)\,\mathrm{t}(a).$$

Entonces $\epsilon_1 a = a\epsilon_1$ para todo $a \in A_2$, de lo que se sigue que $\epsilon_1 = \alpha_3(1) - \beta_3(1) \in F$, luego $\beta_3(1) \in F$. Evaluando A1, A3 y B1 en 1 se deduce que $\alpha_1(1), \beta_2(1)$ y $\beta_1(1) \in F$.

Sumando A1 y B3, por la ecuación cuadrática (2.1), tenemos que

$$\alpha_1(a) + \beta_1(a) = \alpha_2(a) + \beta_2(a) + \mathrm{t}(a)\alpha_3(1) + \mathrm{t}(\alpha_3(1))a - \mathrm{n}(\alpha_3(1), a)1,$$

que comparando con (2.12) implica

$$\alpha_2(a) + \beta_2(a) = \epsilon_2 a - \epsilon_1\,\mathrm{t}(a) + \mathrm{n}(\alpha_3(1), a)1, \tag{2.13}$$

donde $\epsilon_2 = \epsilon_1 - \mathrm{t}(\alpha_3(1)) = -\alpha_3(1) - \beta_3(1)$, ya que $\alpha_3(1) \in F$.

Sumando ahora R1 y R4 y utilizando (2.12) y (2.13) obtenemos

$$\alpha_1(ab) + \beta_1(ab) = \begin{cases} \epsilon_1 ab + \mathrm{t}(ab)\beta_3(1) \\ \\ (\alpha_2(a) + \beta_2(a))\bar{b} + \mathrm{t}(b)a\alpha_3(1) + [\alpha_3(b), a] = \\ \epsilon_2 a\bar{b} - \epsilon_1\,\mathrm{t}(a)\bar{b} + \mathrm{n}(\alpha_3(1), a)\bar{b} + \mathrm{t}(b)a\alpha_3(1) + [\alpha_3(b), a]. \end{cases}$$

Para a, b tales que $\mathrm{t}(a) = \mathrm{t}(b) = 0$ esto es

$$\begin{aligned} [\alpha_3(b), a] &= (\epsilon_1 + \epsilon_2)ab + \mathrm{n}(\alpha_3(1), a)b + \mathrm{t}(ab)\beta_3(1) \\ &= \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}[a, b] - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}\,\mathrm{n}(a, b) + \mathrm{t}(ab)\beta_3(1) + \mathrm{n}(\alpha_3(1), a)b, \end{aligned}$$

por lo que, como $-\,\mathrm{t}(ab) = \mathrm{n}(a, b)$, tenemos

$$[\alpha_3(b) + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}b, a] = \mathrm{t}(ab)(\beta_3(1) + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}) + \mathrm{n}(\alpha_3(1), a)b. \tag{2.14}$$

Pero en nuestro caso $\frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{2} = -\beta_3(1)$ y $\mathrm{n}(\alpha_3(1), a)b = \alpha_3(1)\,\mathrm{t}(a)b = 0$, por lo que tenemos que

$$[\alpha_3(b) + \beta_3(1)\bar{b}, a] = 0.$$

Entonces $\alpha_3(b) + \beta_3(1)\bar{b} \in F$, y podemos deducir de nuevo que existen $\epsilon_{\alpha_3} \in F$ y $\delta_{\alpha_3}\colon A_2 \to F$ tales que $\alpha_3(a) = \epsilon_{\alpha_3} a + \delta_{\alpha_3}(a)$. Por A2, A1, A3, A4 y B1 tenemos que la Proposición 2.3.8 es válida también en el caso $t = 3$. Igualmente la demostración de la Proposición 2.3.9 se aplica ahora para demostrar que $(d_1, d_2, d_3) \in \langle C_a \,|\, a \in A_2\rangle + \langle C'_a \,|\, a \in A_2\rangle$. Finalmente, no es difícil demostrar que la suma de estos subespacios es directa. □

2.3.2. Derivaciones Ternarias de Cayley de Grado Uno

Sea $(d_1, d_2, d_3) \in \mathrm{TCayder}(A)$ de grado uno, entonces

$$d_i(a + bu_t) = \alpha_i(b) + \beta_i(a)u_t$$

para algunas aplicaciones lineales $\alpha_i, \beta_i\colon A_{t-1} \to A_{t-1}$. Imponiendo $d_1(xy) = d_2(x)\bar{y} + d_3(y)x$ obtenemos fácilmente

Proposición 2.3.11. *Las aplicaciones $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ y β_3 satisfacen las siguientes relaciones:*

R1) $\alpha_1(ab) = \alpha_3(a)b - \mu_t\bar{a}\beta_2(b)$,

R2) $\alpha_1(ab) = \alpha_2(a)b + \mu_t\bar{a}\beta_3(\bar{b})$,

R3) $\beta_1(ab) = \beta_2(a)b + \beta_3(b)\bar{a}$,

R4) $\mu_t\beta_1(ab) = b\alpha_3(\bar{a}) - \bar{a}\alpha_2(b)$.

Evaluando R1,. . . , R4 para $a = 1$ ó $b = 1$ obtenemos

Corolario 2.3.12.

A1) $\alpha_1(a) = \alpha_3(a) - \mu_t\bar{a}\beta_2(1)$,

A2) $\alpha_1(a) = \alpha_3(1)a - \mu_t\beta_2(a)$,

A3) $\alpha_1(a) = \alpha_2(a) + \mu_t\bar{a}\beta_3(1)$,

A4) $\alpha_1(a) = \alpha_2(1)a + \mu_t\beta_3(\bar{a})$,

B1) $\beta_1(a) = \beta_2(a) + \beta_3(1)\bar{a}$,

B2) $\beta_1(a) = \beta_2(1)a + \beta_3(a)$,

B3) $\mu_t\beta_1(a) = \alpha_3(\bar{a}) - \bar{a}\alpha_2(1)$,

B4) $\mu_t\beta_1(a) = a\alpha_3(1) - \alpha_2(a)$.

Proposición 2.3.13 $(t \geq 4)$**.** *Existen* $\epsilon_{\alpha_i}, \epsilon_{\beta_i} \in F$ *y* $\delta_{\alpha_i}, \delta_{\beta_i} : A_{t-1} \to F$ *tales que* $\alpha_i(a) = \epsilon_{\alpha_i} a + \delta_{\alpha_i}(a)$ *y* $\beta_i(a) = \epsilon_{\beta_i} a + \delta_{\beta_i}(a)$, $i = 1, 2, 3$.

Demostración. De nuevo iremos paso a paso:

Paso 1. $\epsilon_0 := \alpha_3(1) - \alpha_2(1) = \mu_t(\beta_2(1) + \beta_3(1)) \in F$.

Primero restamos R2 de R1 para obtener $0 = (\alpha_3(a) - \alpha_2(a))b - \mu_t \bar{a}(\beta_2(b) + \beta_3(\bar{b}))$. Ahora, para $a = 1$ llamamos $\epsilon_0 := \alpha_3(1) - \alpha_2(1)$ y obtenemos $\epsilon_0 b = \mu_t(\beta_2(b) + \beta_3(\bar{b}))$; para $b = 1$ la expresión nos da $\alpha_3(a) - \alpha_2(a) = \bar{a}\epsilon_0$, introduciendo estas dos relaciones en la inicial tenemos $(\bar{a}\epsilon_0)b = \bar{a}(\epsilon_0 b)$. Como $t > 3$ esto implica que $\epsilon_0 \in F$ (Teorema 1.3.2).

Paso 2. $\epsilon_1 = \alpha_3(1) - \mu_t\beta_3(1) = \alpha_2(1) + \mu_t\beta_2(1) \in F$.

Comparando la fórmula para $\alpha_1(a) + \mu_t\beta_1(a)$ obtenida de A2$+\mu_t$B1 con la obtenida de A3 + B4, tenemos $\alpha_3(1)a + \mu_t\beta_3(1)\bar{a} = \mu_t\bar{a}\beta_3(1) + a\alpha_3(1)$, luego $[\alpha_3(1), a] = \mu_t[\bar{a}, \beta_3(1)] = [\mu_t\beta_3(1), a]$. Como $t \geq 3$ y $[\alpha_3(1) - \mu_t\beta_3(1), a] = 0$, entonces $\epsilon_1 \in F$ (Teorema 1.3.2). La igualdad $\alpha_3(1) - \mu_t\beta_3(1) = \alpha_2(1) + \mu_t\beta_2(1)$ deriva de la igualdad $\alpha_3(1) - \alpha_2(1) = \mu_t(\beta_2(1) + \beta_3(1)) \in F$ del Paso 1.

Paso 3. $\beta_3(1) \in F$.

Por un lado A2 + μ_tB1 nos dice que $\alpha_1(a) + \mu_t\beta_1(a) = \alpha_3(1)a + \mu_t\beta_3(1)\bar{a}$, sumando y restando $\mu_t\beta_3(1)a$ tenemos

$$\alpha_1(a) + \mu_t\beta_1(a) = \epsilon_1 a + \mu_t\beta_3(1)\,\mathrm{t}(a). \tag{2.15}$$

Por otro lado de A3 + μ_tB1 obtenemos

$$\alpha_1(a) + \mu_t\beta_1(a) = \begin{cases} \epsilon_1 a + \mu_t\beta_3(1)\,\mathrm{t}(a) \\ \\ \alpha_2(a) + \mu_t\beta_2(a) + \mu_t\bar{a}\beta_3(1) + \mu_t\beta_3(1)\bar{a} = \alpha_2(a) + \mu_t\beta_2(a) \\ +\mu_t\left(\mathrm{t}(\bar{a})\beta_3(1) + \mathrm{t}(\beta_3(1))\bar{a} - \mathrm{n}(\bar{a}, \beta_3(1))\right). \end{cases}$$

Por tanto

$$\alpha_2(a) + \mu_t\beta_2(a) = \epsilon_2 a - \mu_t\,\mathrm{n}(a, \beta_3(1)), \tag{2.16}$$

donde $\epsilon_2 = \epsilon_1 + \mu_t\,\mathrm{t}(\beta_3(1))$.

Sumando R2 y μ_tR3 tenemos

$$\alpha_1(ab) + \mu_t\beta_1(ab) = \begin{cases} \epsilon_1 ab + \mu_t\beta_3(1)\,\mathrm{t}(ab) \\ \\ \alpha_2(a)b + \mu_t\beta_2(a)b + \mu_t\bar{a}\beta_3(\bar{b}) + \mu_t\beta_3(b)\bar{a} = \\ \epsilon_2 ab - \mu_t\,\mathrm{n}(a,\beta_3(1))b + \mu_t\bar{a}\beta_3(\bar{b}) + \mu_t\beta_3(b)\bar{a}. \end{cases}$$

Como $\epsilon_1 - \epsilon_2 = -\mu_t\,\mathrm{t}(\beta_3(1))$, entonces dividiendo por μ_t

$$\begin{aligned} -\mathrm{t}(\beta_3(1))ab + \beta_3(1)\,\mathrm{t}(ab) &= -\mathrm{n}(a,\beta_3(1))b + \bar{a}\beta_3(\bar{b}) + \beta_3(b)\bar{a} \\ &= -\mathrm{n}(a,\beta_3(1))b + [\beta_3(b),\bar{a}] + \mathrm{t}(b)\bar{a}\beta_3(1). \end{aligned}$$

Como $ab = \frac{1}{2}[a,b] + \frac{1}{2}(ab+ba) = \frac{1}{2}[a,b] + \frac{1}{2}(\mathrm{t}(a)b + \mathrm{t}(b)a - \mathrm{n}(a,b))$ entonces

$$\begin{aligned} [\beta_3(b) + \frac{1}{2}\,\mathrm{t}(\beta_3(1))b, \bar{a}] &= \beta_3(1)\,\mathrm{t}(ab) + \mathrm{n}(a,\beta_3(1))b - \mathrm{t}(b)\bar{a}\beta_3(1) \\ &- \mathrm{t}(\beta_3(1))\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{t}(a)b + \frac{1}{2}\,\mathrm{t}(b)a - \frac{1}{2}\,\mathrm{n}(a,b)\right). \end{aligned}$$

En caso de que $\mathrm{t}(a) = \mathrm{t}(b) = 0$ entonces

$$\begin{aligned} [\beta_3(b) + \frac{1}{2}\,\mathrm{t}(\beta_3(1))b, \bar{a}] &= \beta_3(1)\,\mathrm{t}(ab) + \mathrm{n}(a,\beta_3(1))b + \frac{1}{2}\,\mathrm{t}(\beta_3(1))\,\mathrm{n}(a,b) \\ &= \left(\beta_3(1) - \frac{1}{2}\,\mathrm{t}(\beta_3(1))\right)\mathrm{t}(ab) + \mathrm{n}(a,\beta_3(1))b. \end{aligned}$$

Igual que en el Paso 3 de la demostración de la Proposición 2.3.8 fijamos b con $\mathrm{t}(b) = 0$ y consideramos $S = \{a \in A_3 \mid \mathrm{t}(a) = \mathrm{n}(a,b) = \mathrm{n}(a,\beta_3(1)) = 0\}$ cuya dimensión es ≥ 5. Como la ecuación anterior implica que $[\beta_3(b) + \frac{1}{2}\,\mathrm{t}(\beta_3(1))b, S] = 0$ entonces, por el Lema 2.3.7,

$$\beta_3(b) + \frac{1}{2}\,\mathrm{t}(\beta_3(1))b \in F \quad \text{si} \quad \mathrm{t}(b) = 0. \tag{2.17}$$

Por tanto, $0 = \left(\beta_3(1) - \frac{1}{2}\,\mathrm{t}(\beta_3(1))\right)\mathrm{t}(ab) + \mathrm{n}(a,\beta_3(1))b$, luego $\mathrm{n}(a,\beta_3(1)) = 0$ si $\mathrm{t}(a) = 0$; esto es, $\beta_3(1) \in F$.

Paso Final.

Por los pasos previos, $\alpha_1(1), \alpha_2(1), \alpha_3(1), \beta_1(1), \beta_2(1)$ y $\beta_3(1)$ están en F, y por (2.17) el resultado es cierto para β_3. Usando las relaciones B2, B1, B3, B4 y A1 ya lo tenemos. □

Proposición 2.3.14 $(t \geq 4)$**.** *Con la notación previa,* $(d_1, d_2, d_3) = \epsilon_{\beta_2} C_{u_t} - \epsilon_{\beta_3} C'_{u_t}$.

Demostración. Por R3 tenemos

$$\epsilon_{\beta_1} ab + \delta_{\beta_1}(ab) = \epsilon_{\beta_2} ab + \delta_{\beta_2}(a)b + \epsilon_{\beta_3} b\bar{a} + \delta_{\beta_3}(b)\bar{a}. \tag{2.18}$$

Eligiendo $a, b \in A_2$ con $1, a, b, ab$ base ortogonal con respecto a $\mathrm{n}(\, , \,)$, podemos escribir esta ecuación como

$$\epsilon_{\beta_1} ab + \delta_{\beta_1}(ab) = \epsilon_{\beta_2} ab + \epsilon_{\beta_3} ab - \epsilon_{\beta_3} \mathrm{t}(ab) + \delta_{\beta_2}(a)b + \delta_{\beta_3}(b)\bar{a}$$

y obtenemos

$$\epsilon_{\beta_1} = \epsilon_{\beta_2} + \epsilon_{\beta_3}. \tag{2.19}$$

Por (2.1) y (2.19) podemos reescribir (2.18) como

$$\begin{aligned} \epsilon_{\beta_3}(\mathrm{t}(a)b + \mathrm{t}(b)a - \mathrm{n}(a,b)) \quad &+ \quad (-\,\mathrm{t}(a)\epsilon_{\beta_3} - \delta_{\beta_2}(a))b \\ &+ \quad \delta_{\beta_3}(b)a - \delta_{\beta_3}(b)\,\mathrm{t}(a) + \delta_{\beta_1}(ab) = 0. \end{aligned}$$

Agrupando términos tenemos

$$\begin{aligned} (\epsilon_{\beta_3}\,\mathrm{t}(b) + \delta_{\beta_3}(b))a \quad &- \quad \delta_{\beta_2}(a)b \\ &+ \quad \delta_{\beta_1}(ab) - \epsilon_{\beta_3}\,\mathrm{n}(a,b) - \delta_{\beta_3}(b)\,\mathrm{t}(a) = 0. \end{aligned}$$

Eligiendo 1, a y b linealmente independientes, podemos decir que para todo $a, b \in A_{t-1}$

$$\delta_{\beta_3}(b) = -\epsilon_{\beta_3}\,\mathrm{t}(b), \;\; \delta_{\beta_2}(a) = 0 \text{ y } \delta_{\beta_1}(a) = -\epsilon_{\beta_3}\,\mathrm{t}(a).$$

Ahora escribimos R4 como

$$\begin{aligned} \mu_t \epsilon_{\beta_1} ab - \mu_t \epsilon_{\beta_3}\,\mathrm{t}(ab) \quad &= \quad b\epsilon_{\alpha_3}\bar{a} + b\delta_{\alpha_3}(\bar{a}) - \bar{a}\epsilon_{\alpha_2} b - \bar{a}\delta_{\alpha_2}(b) \\ &= \quad \epsilon_{\alpha_3} ab - \epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(ab) + \epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(b)\bar{a} + \epsilon_{\alpha_2} ab - \epsilon_{\alpha_2}\,\mathrm{t}(a)b \\ &\quad\quad + \delta_{\alpha_3}(\bar{a})b - \delta_{\alpha_2}(b)\bar{a}, \end{aligned}$$

que agrupando adecuadamente queda:

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \quad (\mu_t \epsilon_{\beta_1} - \epsilon_{\alpha_3} - \epsilon_{\alpha_2})ab - (\epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(b) - \delta_{\alpha_2}(b))\bar{a} \\ &+ \quad (\epsilon_{\alpha_2}\,\mathrm{t}(a) - \delta_{\alpha_3}(\bar{a}))b - \mu_t \epsilon_{\beta_3}\,\mathrm{t}(ab) + \epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(ab). \end{aligned}$$

De nuevo tomamos $a, b \in A_2$ con $1, a, b, ab$ base de A_2 para obtener

$$\mu_t \epsilon_{\beta_1} = \epsilon_{\alpha_3} + \epsilon_{\alpha_2}, \ \ \delta_{\alpha_2}(b) = \epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(b), \ \ \delta_{\alpha_3}(\bar{a}) = \epsilon_{\alpha_2}\,\mathrm{t}(a) \text{ y } \epsilon_{\alpha_3} = \mu_t \epsilon_{\beta_3}.$$

Como $\epsilon_{\alpha_3} + \epsilon_{\alpha_2} = \mu_t \epsilon_{\beta_1} = \mu_t \epsilon_{\beta_3} + \mu_t \epsilon_{\beta_2}$ entonces $\epsilon_{\alpha_2} = \mu_t \epsilon_{\beta_2}$. Con esta información retomamos A3 que dice que

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha_1} a + \delta_{\alpha_1}(a) &= \epsilon_{\alpha_2} a + \epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(a) + \mu_t \bar{a} \beta_3(1) \\ &= \mu_t \epsilon_{\beta_2} a + \mu_t \epsilon_{\beta_3}\,\mathrm{t}(a) - \mu_t \epsilon_{\beta_3}\,\mathrm{t}(a) + \mu_t \epsilon_{\beta_3} a, \end{aligned}$$

luego $\epsilon_{\alpha_1} = \mu_t \epsilon_{\beta_2} + \mu_t \epsilon_{\beta_3}$ y $\delta_{\alpha_1} = 0$. Procedemos igual que en el caso de grado cero para reconstruir (d_1, d_2, d_3) en función de ϵ_{β_2} y ϵ_{β_3}

$$\begin{aligned} d_1(x) &= d_1(a + bu_t) = \alpha_1(b) + \beta_1(a) u_t \\ &= \epsilon_{\alpha_1} b + \delta_{\alpha_1}(b) + (\epsilon_{\beta_1} a + \delta_{\beta_1}(a)) u_t \\ &= (\mu_t \epsilon_{\beta_2} + \mu_t \epsilon_{\beta_3}) b + (\epsilon_{\beta_2} a + \epsilon_{\beta_3} a - \epsilon_{\beta_3}\,\mathrm{t}(a)) u_t \\ &= \epsilon_{\beta_2}(\mu_t b + a u_t) - \epsilon_{\beta_3}(-\mu_t b + \bar{a} u_t) = \epsilon_{\beta_2} x u_t - \epsilon_{\beta_3} \bar{x} u_t, \\ d_2(x) &= d_2(a + bu_t) = \alpha_2(b) + \beta_2(a) u_t \\ &= \epsilon_{\alpha_2} b + \delta_{\alpha_2}(b) + (\epsilon_{\beta_2} a + \delta_{\beta_2}(a)) u_t \\ &= \mu_t \epsilon_{\beta_2} b + \mu_t \epsilon_{\beta_3}\,\mathrm{t}(b) + \epsilon_{\beta_2} a u_t \\ &= \epsilon_{\beta_2}(\mu_t b + a u_t) + \epsilon_{\beta_3} \mu_t\,\mathrm{t}(b) = \epsilon_{\beta_2} x u_t + \epsilon_{\beta_3}\,\mathrm{t}(x u_t), \\ d_3(x) &= d_3(a + bu_t) = \alpha_3(b) + \beta_3(a) u_t \\ &= \epsilon_{\alpha_3} b + \delta_{\alpha_3}(b) + (\epsilon_{\beta_3} a + \delta_{\beta_3}(a)) u_t \\ &= \mu_t \epsilon_{\beta_3} b + \mu_t \epsilon_{\beta_3}\,\mathrm{t}(b) + \epsilon_{\beta_3} a u_t - \epsilon_{\beta_3}\,\mathrm{t}(a) u_t \\ &= \epsilon_{\beta_2}(\mu_t\,\mathrm{t}(b)) + \epsilon_{\beta_3}(\mu_t b - \bar{a} u_t) \\ &= \epsilon_{\beta_2}\,\mathrm{t}(x u_t) - \epsilon_{\beta_3} \bar{x} u_t, \end{aligned}$$

obteniendo $(d_1, d_2, d_3) = \epsilon_{\beta_2} C_{u_t} - \epsilon_{\beta_3} C'_{u_t}$ como queríamos demostrar. □

Proposición 2.3.15. *El conjunto de las derivaciones ternarias de Cayley de grado uno de A_3 es $\langle C_z \mid z \in A_2 u_3 \rangle \oplus \langle C'_z \mid z \in A_2 u_3 \rangle$.*

Demostración. Dada (d_1, d_2, d_3) derivación ternaria de Cayley de grado uno de A_3, si restamos $C_{d_2(1)} + C'_{d_3(1)}$ a (d_1, d_2, d_3) obtenemos una derivación tenaria de Cayley (d'_1, d'_2, d'_3) con

$$\begin{aligned} d'_2(1) &= d_2(1) + \overline{d_2(1)} = 0, \\ d'_3(1) &= d_3(1) + \overline{d_3(1)} = 0, \end{aligned}$$

cuyas componentes segunda y tercera anulan al elemento 1, lo que implica que

$$\begin{aligned} d'_1(x) &= d'_1(x1) = d'_2(x) + d'_3(1)x = d'_2(x) \ \Rightarrow d'_1 = d'_2, \\ d'_1(y) &= d'_1(1y) = d'_2(1)\bar{y} + d'_3(y) = d'_3(y) \ \Rightarrow d'_1 = d'_3, \end{aligned}$$

por lo que podemos suponer que $d_1(1) = d_2(1) = d_3(1) = 0$, y probaremos que $(d_1, d_2, d_3) = (0, 0, 0)$.

Entonces tenemos $d_1 = d_2 = d_3$ y por lo tanto, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ y $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$. Además como $d_i(1) = 0$ entonces $\beta_i(1) = 0$. Con el mismo razonamiento del Paso 2 en la demostración de la Proposición 2.3.13, comparamos la fórmula para $\alpha_1(a) + \mu_3\beta_1(a)$ obtenida de A2 + μ_3B1 con la obtenida de A3 + B4 y tenemos $\alpha_3(1)a + \mu_3\beta_3(1)\bar{a} = \mu_3\bar{a}\beta_3(1) + a\alpha_3(1)$, luego $[\alpha_3(1), a] = 0$ para todo $a \in A_2$, y entonces $\alpha_i(1) \in F$ para $i = 1, 2$ y 3.

Escribimos R2 + μ_3R3 como

$$\begin{aligned} \alpha_1(ab) + \mu_3\beta_1(ab) &= (\alpha_2(a) + \mu_3\beta_2(a))b + \mu_3(\bar{a}\beta_3(\bar{b}) + \beta_3(b)\bar{a}) \\ &= (\alpha_2(a) + \mu_3\beta_2(a))b + \mu_3[\beta_3(b), \bar{a}], \end{aligned} \tag{2.20}$$

donde hemos usado que $\beta_3(\bar{b}) = \mathrm{t}(b)\beta_3(1) - \beta_3(b) = -\beta_3(b)$. Para $a = 1$ obtenemos

$$\alpha_1(b) + \mu_3\beta_1(b) = \alpha_2(1)b. \tag{2.21}$$

Incorporando (2.21) a la ecuación (2.20) obtenemos que $\alpha_2(1)(ab) = (\alpha_2(1)a)b + \mu_3[\beta_3(b), \bar{a}]$. Como $\alpha_2(1) \in F$ esto implica que $[\beta_3(b), \bar{a}] = 0$ para todo $a, b \in A_2$. Esto obliga a que $\beta_3(b) \in F$. De (2.21) tenemos $\alpha_1(b) = \alpha_2(1)b - \mu_3\beta_1(b)$ y para ajustarlo a la notación anterior basta tomar $\epsilon_{\alpha_i} = \alpha_2(1)$, $\delta_{\alpha_i}(a) = -\mu_3\beta_1(a)$, $\epsilon_{\beta_i} = 0$ y $\delta_{\beta_i} = \beta_i$ entonces $\alpha_i(a) = \epsilon_{\alpha_i}a + \delta_{\alpha_i}(a)$ y $\beta_i(a) = \epsilon_{\beta_i}a + \delta_{\beta_i}(a)$. Finalmente usamos R3, $\epsilon_{\beta_1} ab + \delta_{\beta_1}(ab) = \epsilon_{\beta_2} ab + \delta_{\beta_2}(a)b + \epsilon_{\beta_3} b\bar{a} + \delta_{\beta_3}(b)\bar{a}$, que con nuestras condiciones queda

$$\beta_1(ab) = \beta_1(a)b + \beta_1(b)\bar{a} \quad \text{con} \quad \beta_1(x) \in F. \tag{2.22}$$

Eligiendo $a, b \in A_2$ linealmente independientes, tenemos que $\beta_1 = \delta_{\beta_i} = 0$.
Ahora escribimos R4 como

$$\begin{aligned} 0 &= b\epsilon_{\alpha_3}\bar{a} + b\delta_{\alpha_3}(\bar{a}) - \bar{a}\epsilon_{\alpha_2} b - \bar{a}\delta_{\alpha_2}(b) \\ &= \epsilon_{\alpha_3} ab - \epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(ab) + \epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(b)\bar{a} + \epsilon_{\alpha_2} ab - \epsilon_{\alpha_2}\,\mathrm{t}(a)b + \delta_{\alpha_3}(\bar{a})b - \delta_{\alpha_2}(b)\bar{a}, \end{aligned}$$

que agrupando adecuadamente queda:

$$\begin{aligned} 0 &= (-\epsilon_{\alpha_3} - \epsilon_{\alpha_2})ab - (\epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(b) - \delta_{\alpha_2}(b))\bar{a} \\ &+ (\epsilon_{\alpha_2}\,\mathrm{t}(a) - \delta_{\alpha_3}(\bar{a}))b + \epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(ab). \end{aligned}$$

De nuevo tomamos $a, b \in A_2$ con $1, a, b, ab$ base ortogonal de A_2 para obtener

$$\epsilon_{\alpha_3} = -\epsilon_{\alpha_2}, \;\; \delta_{\alpha_2}(b) = \epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(b), \;\; \delta_{\alpha_3}(\bar{a}) = \epsilon_{\alpha_2}\,\mathrm{t}(a) \text{ y } \epsilon_{\alpha_3}\,\mathrm{t}(ab) = 0$$

con lo que tenemos que $\epsilon_{\alpha_i} = 0$ y $\delta_{\alpha_i} = 0$. Por lo tanto $(d_1, d_2, d_3) = (0, 0, 0)$. □

2.4. Derivaciones Ternarias

Por la definición de derivación ternaria (1.9), las componentes de $(d_1, d_2, d_3) \in \mathrm{Tder}(A)$ están relacionadas mediante

$$d_1 = d_2 + R_{d_3(1)} \text{ y } d_1 = d_3 + L_{d_2(1)}. \tag{2.23}$$

Como en el Lema 2.3.4 $\mathrm{Tder}(A)$ hereda una $\mathbb{Z}_2$–graduación de la $\mathbb{Z}_2$–graduación de A. La parte par de (d_1, d_2, d_3) es (d_1^+, d_2^+, d_3^+), y la parte impar (d_1^-, d_2^-, d_3^-). Llamaremos a (d_1^+, d_2^+, d_3^+) derivación ternaria *de grado cero* y a (d_1^-, d_2^-, d_3^-) derivación ternaria *de grado uno*.

Dedicaremos esta sección a demostrar el Teorema 2.1.1 y el Teorema 2.1.2. Primero estudiaremos la situación para $t = 3$. Si car $F \neq 3$ entonces dada $(d_1, d_2, d_3) \in$

$\mathrm{Tder}(A_3)$, $a_2 = d_2(1)$ y $a_3 = d_3(1)$,

$$\begin{aligned}(d_1, d_2, d_3) \quad - \quad & \frac{1}{3}(L_{2a_2+a_3}, T_{2a_2+a_3}, -L_{2a_2+a_3}) \\ & \qquad -\frac{1}{3}(R_{2a_3+a_2}, -R_{2a_3+a_2}, T_{2a_3+a_2}) \in \widehat{\mathrm{Der}}(A_3).\end{aligned}$$

Como las componentes anulan el elemento unidad, entonces

$$\mathrm{Tder}(A_3) = \widehat{\mathrm{Der}}(A_3) + \langle (L_a, T_a, L_a), (R_a, -R_a, T_a) \mid a \in A_3 \rangle.$$

Si car $F = 3$ entonces, dada $(d_1, d_2, d_3) \in \mathrm{Tder}(A_3)$, consideramos $a_1 = d_1(1)$ y $b = d_2(1) - 2d_1(1)$. Como $A_3 = F1 + [A_3, A_3]$ podemos escribir $b = 1/2T(b) + \sum [b_i, b_i']$ para algunos $b_i, b_i' \in A_3$. Ahora, como antes

$$\begin{aligned}(d_1, d_2, d_3) - (L_{a_1}, T_{a_1}, -L_{a_1}) \quad - \quad & \left(\sum_i ([L_{b_i}, R_{b_i'}], -[T_{b_i}, R_{b_i'}], -[L_{b_i}, R_{b_i'}]) \right) \\ & -\frac{1}{2} T(b)(0, \mathrm{Id}, -\mathrm{Id}) \in \widehat{\mathrm{Der}}(A_3).\end{aligned}$$

Como cualquier elemento en $\widehat{\mathrm{Der}}(A_3)$ pertenece al álgebra de Lie generada por $\{(L_a, T_a, -L_a), (R_a, -R_a, T_a) \mid a \in A_3\}$ [1], esto completa el caso $t = 3$ en el Teorema 2.1.2. *En lo sucesivo supondremos que* $t \geq 4$.

2.4.1. Derivaciones Ternarias de Grado Cero

Sea (d_1, d_2, d_3) una derivación ternaria de grado cero, entonces

$$d_i(a + bu_t) = \alpha_i(a) + \beta_i(b)u_t,$$

para ciertas aplicaciones lineales $\alpha_i, \beta_i \colon A_{t-1} \to A_{t-1}$. Imponiendo que $d_1(xy) = d_2(x)y + xd_3(y)$ obtenemos

Proposición 2.4.1. *Las aplicaciones* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ *y* β_3 *verifican las siguientes relaciones:*

R1) $\alpha_1(ab) = \alpha_2(a)b + a\alpha_3(b)$,

R2) $\alpha_1(ab) = a\beta_2(b) + \bar{\beta}_3(a)b$, *R3)* $\beta_1(ab) = a\alpha_2(b) + \beta_3(a)b$,

R4) $\beta_1(ab) = \beta_2(a)b + a\bar{\alpha}_3(b)$.

donde para cada aplicación γ, $\bar{\gamma}$ *denota* $J\gamma J$.

Proposición 2.4.2 ($t \geq 4$)**.** *Con la notación previa tenemos que la derivación ternaria* (d_1, d_2, d_3) *pertenece a* $\langle (d_1, d_2, d_3) \,|\, d_i(a + bu_t) = \alpha_i(a) + \alpha_i(b)u_t$ *con* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \widehat{\mathrm{Der}}(A_{t-1})\rangle + \langle (\mathrm{Id}, \mathrm{Id}, 0), (\mathrm{Id}, 0, \mathrm{Id})\rangle$.

Demostración. Paso 1. $\epsilon_0 = \alpha_2(1) - \bar{\beta}_3(1) = \beta_2(1) - \alpha_3(1) \in F$.
R1 − R2 implica que

$$(\alpha_2(a) - \bar{\beta}_3(a))b + a(\alpha_3(b) - \beta_2(b)) = 0. \tag{2.24}$$

Para $a = 1$ se deduce que $\beta_2(b) - \alpha_3(b) = \epsilon_0 b$, y para $b = 1$ tenemos que $\alpha_2(a) - \bar{\beta}_3(a) = a(\beta_2(1) - \alpha_3(1)) = a\epsilon_0$. Si añadimos a (2.24) esta información se transforma en $(a\epsilon_0)b = a(\epsilon_0 b)$, por lo tanto $\epsilon_0 \in F$ (Teorema 1.3.2).

Paso 2. $\epsilon_1 = \alpha_2(1) - \bar{\alpha}_3(1) = \beta_2(1) - \beta_3(1) \in F$.
El razonamiento es el mismo que en el Paso 1 pero comenzando por R3 − R4 en lugar de R1 − R2.

Paso 3. $\epsilon_0 = \epsilon_1$ y $\alpha_3(1) = \beta_3(1)$.
Tenemos que $\epsilon_1 = \beta_2(1) - \beta_3(1) = (\alpha_3(1) + \epsilon_0) + (\epsilon_0 - \bar{\alpha}_2(1)) = 2\epsilon_0 - (\bar{\alpha}_2(1) - \alpha_3(1)) = 2\epsilon_0 - \epsilon_1$, luego $\epsilon_0 = \epsilon_1$. La otra igualdad es consecuencia directa de esta.

Paso 4. $(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_2 - \alpha_2) \in \mathrm{Tder}(A_{t-1})$.
Notar que R1−R2 con $b = 1$ implica que $\alpha_2(a) - \bar{\beta}_3(a) = \epsilon_0 a$ y que R3−R4 con $a = 1$ implica que $\alpha_2(b) - \bar{\alpha}_3(b) = \epsilon_1 b$. Como $\epsilon_0 = \epsilon_1$ entonces $\beta_3(a) = \alpha_3(a) = \bar{\alpha}_2(a) + \lambda a$, donde $\lambda = -\epsilon_0$. Ahora, R1 y R3 implican que $(\alpha_1, \alpha_2, \bar{\alpha}_2 + \lambda\,\mathrm{Id}), (\beta_1, \bar{\alpha}_2 + \lambda\,\mathrm{Id}, \alpha_2) \in \mathrm{Tder}(A_{t-1})$. Restando estas derivaciones ternarias llegamos a que $(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \bar{\alpha}_2 - \lambda\,\mathrm{Id}, \bar{\alpha}_2 - \alpha_2 + \lambda\,\mathrm{Id}) \in \mathrm{Tder}(A_{t-1})$, y sumando $(0, \lambda\,\mathrm{Id}, -\lambda\,\mathrm{Id}) \in \mathrm{Tder}(A_{t-1})$ ya lo tenemos.

Paso 5. $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, 2, 3$ y $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2$.
Para simplificar la notación definimos $\varphi_1 = \alpha_1 - \beta_1$, $\varphi_2 = \alpha_2 - \bar{\alpha}_2$. Entonces el

Paso 4 queda $(\varphi_1, \varphi_2, -\varphi_2) \in \mathrm{Tder}(A_{t-1})$. Por (2.23) tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi_1(a) &= \varphi_2(a) - a\varphi_2(1), \\ \varphi_1(a) &= \varphi_2(1)a - \varphi_2(a). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Entonces,

$$2\varphi_2(a) = a\varphi_2(1) + \varphi_2(1)a = \mathrm{t}(a)\varphi_2(1) + \mathrm{t}(\varphi_2(1))a - \mathrm{n}(a, \varphi_2(1))1.$$

En este caso particular $\varphi_2(1) = \alpha_2(1) - \bar{\alpha}_2(1)$, luego $\mathrm{t}(\varphi_2(1)) = 0$ y

$$2\varphi_2(a) = \mathrm{t}(a)\varphi_2(1) - \mathrm{n}(a, \varphi_2(1)).$$

Si $S = \langle a \in A_3 \mid \mathrm{t}(a) = 0 = \mathrm{n}(a, \varphi_2(1))\rangle$, entonces $2\varphi_2(a) = 0$ para todo $a \in S$. Como $\varphi_1(ab) = \varphi_2(a)b - a\varphi_2(b)$, entonces $2\varphi_1(ab) = 0$ para todo $a, b \in S$. Además, si añadimos las ecuaciones a (2.25), obtenemos que $0 = 2\varphi_1(ab) = [\varphi_2(1), ab]$ para todo $a, b \in S$. Como $\dim S \geq 6$ entonces se deduce del Lema 2.3.7 que $\varphi_2(1) \in F$. Además, $\mathrm{t}(\varphi_2(1)) = 0$ implica que $\varphi_2(1) = 0$. Ahora está claro por (2.25) que $\varphi_1 = 0 = \varphi_2$, esto es, $\alpha_1 = \beta_1$ y $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2$. Como por el argumento del Paso 4 tenemos que $\alpha_3 = \beta_3 = \bar{\alpha}_2 + \lambda\,\mathrm{Id}$ entonces $\bar{\alpha}_3 = \alpha_3$, y comparando R1 y R4 obtenemos $\alpha_2 = \beta_2$.

Paso Final. Como $\bar{\alpha}_2(1) = \alpha_2(1)$ y $\lambda = \alpha_3(1) - \alpha_2(1) = \alpha_1(1) - 2\alpha_2(1)$, entonces $\alpha_2(1) \in F$ y

$$((2\alpha_2(1) + \lambda)\,\mathrm{Id},\ \alpha_2(1)\,\mathrm{Id},\ (\alpha_2(1) + \lambda)\,\mathrm{Id}) \in \mathrm{Tder}(A_{t-1}).$$

Restando esta derivación ternaria a $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ tenemos que

$$(\alpha_1 - (2\alpha_2(1) + \lambda)\,\mathrm{Id},\ \alpha_2 - \alpha_2(1)\,\mathrm{Id},\ \alpha_2 - \alpha_2(1)\,\mathrm{Id}) \in \mathrm{Tder}(A_{t-1}).$$

Como cada componente de esta derivación ternaria anula la unidad, entonces $d = \alpha_1 - (2\alpha_2(1) + \lambda)\,\mathrm{Id} = \alpha_2 - \alpha_2(1)\,\mathrm{Id} \in \mathrm{Der}(A_{t-1})$. Por lo tanto,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (d, d, d) + ((2\epsilon + \lambda)\,\mathrm{Id}, \epsilon\,\mathrm{Id}, (\epsilon + \lambda)\,\mathrm{Id}),$$

donde $\epsilon = \alpha_2(1) \in F$. Esto concluye la demostración. $\square$

2.4.2. Derivaciones Ternarias de Grado Uno

Sea (d_1, d_2, d_3) una derivación ternaria de grado uno, entonces

$$d_i(a + bu_t) = \alpha_i(b) + \beta_i(a)u_t \tag{2.26}$$

para algunas aplicaciones lineales $\alpha_i, \beta_i \colon A_{t-1} \to A_{t-1}$. Imponiendo $d_1(xy) = d_2(x)y + xd_3(y)$ obtenemos

Proposición 2.4.3. *Las aplicaciones $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ and β_3 satisfacen las siguientes relaciones:*

R1) $\alpha_1(ab) = b\alpha_3(a) + \mu_t\bar{a}\beta_2(b)$,

R2) $\alpha_1(ab) = \alpha_2(a)\bar{b} + \mu_t\bar{\beta}_3(b)a$,

R3) $\beta_1(ab) = \beta_2(a)\bar{b} + \beta_3(b)a$,

R4) $\mu_t\beta_1(ab) = \bar{a}\alpha_2(b) + b\bar{\alpha}_3(a)$.

donde para cada aplicación γ, $\bar{\gamma}$ denota $J\gamma J$.

Podemos escribir fácilmente las igualdades anteriores como

Proposición 2.4.4. *Las aplicaciones $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ y β_3 verifican:*

S1) $(\bar{\alpha}_1, \mu_t\bar{\beta}_2, \bar{\alpha}_3) \in \mathrm{TCayder}(A_{t-1})$,

S2) $(\alpha_1, \alpha_2, \mu_t\bar{\beta}_3) \in \mathrm{TCayder}(A_{t-1})$,

S3) $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathrm{TCayder}(A_{t-1})$,

S4) $(\mu_t\bar{\beta}_1, \bar{\alpha}_2, \alpha_3) \in \mathrm{TCayder}(A_{t-1})$.

Proposición 2.4.5 $(t \geq 4)$**.** *Con la notación previa tenemos que (d_1, d_2, d_3) pertenece a $\langle (R_{u_t}, -R_{u_t}, T_{u_t}), (L_{u_t}, T_{u_t}, -L_{u_t}) \rangle$.*

Demostración. Como $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathrm{TCayder}(A_{t-1})$ con $t - 1 \geq 3$ existen $w, z \in \mathrm{N_{alt}}(A_{t-1})$ tales que $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_w + C'_z$. Primero probaremos en varios pasos que $w, z \in F$.

Paso 1. $w - z \in F$.

Por un lado, $\beta_1 = R_w + R_z J$ implica que $\mu_t \bar{\beta}_1 = \mu_t L_{\bar{w}} + \mu_t J R_z$. Por otra parte, por S4 $(\mu_t \bar{\beta}_1, \bar{\alpha}_2, \alpha_3) \in \mathrm{TCayder}(A_{t-1})$, luego como antes deben existir $w', z' \in \mathrm{N_{alt}}(A_{t-1})$ tales que $\mu_t L_{\bar{w}} + \mu_t J R_z = \mu_t \bar{\beta}_1 = R_{w'} + R_{z'} J$. Por lo tanto

$$\mu_t \bar{w} x + \mu_t \bar{z} \bar{x} = x w' + \bar{x} z' \tag{2.27}$$

para todo $x \in A_{t-1}$. Si además, $\mathrm{t}(x) = 0$ entonces

$$\mu_t (\bar{w} - \bar{z}) x = x (w' - z'), \tag{2.28}$$

por lo que $\mathrm{n}(\mu_t(\bar{w} - \bar{z}), x) = -\mathrm{n}(\mu_t(\bar{w} - \bar{z})x, 1) = -\mathrm{n}(x(w' - z'), 1) = \mathrm{n}(w' - z', x)$, o equivalentemente $\mathrm{n}(\mu_t(\bar{w} - \bar{z}) - (w' - z'), x) = 0$ para todo $x \in A_{t-1}$ con $\mathrm{t}(x) = 0$. Entonces $\epsilon = \mu_t(\bar{w} - \bar{z}) - (w' - z') \in F$. Multiplicando a derecha por x con $\mathrm{t}(x) = 0$ y utilizando (2.28) obtenemos

$$\epsilon x = [x, w' - z']. \tag{2.29}$$

Con $x = (w' - z') - \frac{1}{2}\mathrm{t}(w' - z')$ obtenemos que $\epsilon((w' - z') - \frac{1}{2}\mathrm{t}(w' - z')) = 0$. En particular, o bien $w' - z' \in F$ o bien $\epsilon = 0$. En el primer caso (2.29) implica que $\epsilon = 0$. En el segundo, (2.29) implica que $w' - z' \in F$. Luego en cualquier caso tenemos que $\mu_t(\bar{w} - \bar{z}) = w' - z' \in F$ como queríamos.

Paso 2. $\alpha_2 = -L_{\mu_t \bar{w}} + \mathrm{t}(*\mu_t \bar{z})$ y $\alpha_3 = \mathrm{t}(*\mu_t \bar{w}) - R_{\mu_t z} J$.

En el paso previo hemos probado que $\mu_t(\bar{w} - \bar{z}) = w' - z' \in F$. Imponiendo esto en (2.27) obtenemos que $z' = \mu_t \bar{z}$ y $w' = \mu_t \bar{w}$. Por la definición de w' y z' tenemos que $(\mu_t \bar{\beta}_1, \bar{\alpha}_2, \alpha_3) = C_{w'} + C'_{z'}$, luego $\bar{\alpha}_2 = -R_{\mu_t w} + \mathrm{t}(*\mu_t z)$ y $\alpha_3 = \mathrm{t}(*\mu_t \bar{w}) - R_{\mu_t z} J$.

Paso 3. $w, z \in F$.

Por un lado, del Paso 2 sabemos que $\alpha_2 = -L_{\mu_t \bar{w}} + \mathrm{t}(*\mu_t \bar{z})$, pero por otro lado de S2 también sabemos que existen $w'', z'' \in \mathrm{N_{alt}}(A_{t-1})$ tales que $\alpha_2 = -R_{\bar{w}''} + \mathrm{t}(*\bar{z}'')$, luego $-\mu_t \bar{w} x + \mu_t \mathrm{t}(x\bar{z}) = -x\bar{w}'' + \mathrm{t}(x\bar{z}'')$. Usando que $\mathrm{t}(y) = y + \bar{y}$, podemos escribir esta identidad como $-\mu_t \bar{w} x + \mu_t x \bar{z} + \mu_t z \bar{x} = -x\bar{w}'' + x\bar{z}'' + z''\bar{x}$, por lo que

$$-\mu_t \bar{w} x + \mu_t x \bar{z} - \mu_t z x + \mathrm{t}(x)\mu_t z = -x\bar{w}'' + x\bar{z}'' - z'' x + \mathrm{t}(x) z''. \tag{2.30}$$

Para todo $x \in A_{t-1}$ con $\mathrm{t}(x) = 0$ (2.30) significa que

$$(-\mu_t \bar{w} - \mu_t z + z'')x = x(-\bar{w}'' + \bar{z}'' - \mu_t \bar{z}).$$

Como para (2.28) esto implica que

$$-\mu_t \bar{w} - \mu_t z + z'' = -\bar{w}'' + \bar{z}'' - \mu_t \bar{z} \in F. \tag{2.31}$$

Con esta nueva información (2.30) nos da $\mu_t z = z''$, y finalmente (2.31) implica que $\mu_t \bar{w} = w'' \in F$; esto es, $w \in F$. Como, por el Paso 1, $w - z \in F$ entonces $z \in F$ también.

Paso Final. Hasta ahora tenemos que $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = wC_1 + zC_1'$, o lo que es lo mismo

$$\beta_1 = w\,\mathrm{Id} + zJ, \;\; \beta_2 = -w\,\mathrm{Id} + z\,\mathrm{t}(*) \text{ y } \beta_3 = w\,\mathrm{t}(*) - zJ \tag{2.32}$$

con $w, z \in F$. Del Paso 2 también tenemos que $\alpha_2 = \mu_t \beta_2$ y $\alpha_3 = \mu_t \beta_3$. Como $\bar{\beta}_i = \beta_i$ entonces S1 significa que $(\bar{\alpha}_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathrm{TCayder}(A_{t-1})$. Multiplicando S3 por μ_t también tenemos $(\mu_t \beta_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathrm{TCayder}(A_{t-1})$, por lo que $(\bar{\alpha}_1 - \mu_t \beta_1, 0, 0) \in \mathrm{TCayder}(A_{t-1})$, lo que implica que $\alpha_1 = \mu_t \beta_1$ también. De las relaciones $\alpha_i = \mu_t \beta_i$, $i = 1, 2, 3$ y (2.32), como $x = a + bu_t$ y $(a + bu_t)u_t = \mu_t b + au_t$,

$$\begin{aligned}
(d_1, d_2, d_3)(x) &= (\alpha_1(b) + \beta_1(a)u_t, \alpha_2(b) + \beta_2(a)u_t, \alpha_3(b) + \beta_3(a)u_t) \\
&= (\mu_t\beta_1(b) + \beta_1(a)u_t, \mu_t\beta_2(b) + \beta_2(a)u_t, \mu_t\beta_3(b) + \beta_3(a)u_t) \\
&= (\mu_t(w\,\mathrm{Id} + zJ)(b) + (w\,\mathrm{Id} + zJ)(a)u_t, \mu_t(-w\,\mathrm{Id} + z\,\mathrm{t}(*))(b) \\
&+ (-w\,\mathrm{Id} + z\,\mathrm{t}(*))(a)u_t, \mu_t(w\,\mathrm{t}(*) - zJ)(b) + (w\,\mathrm{t}(*) - zJ)(a)u_t) \\
&= w(\mu_t b + au_t, \mu_t(-b) + (-a)u_t, \mu_t\,\mathrm{t}(b) + \mathrm{t}(a)u_t) \\
&+ z(\mu_t J(b) + J(a)u_t, \mu_t\,\mathrm{t}(b) + \mathrm{t}(a)u_t, \mu_t(-J)(b) + (-J)(a)u_t) \\
&= w(xu_t, -xu_t, u_t x + xu_t) + z(u_t x, xu_t + u_t x, -u_t x),
\end{aligned}$$

con lo que $(d_1, d_2, d_3) = w(R_{u_t}, -R_{u_t}, T_{u_t}) + z(L_{u_t}, T_{u_t}, -L_{u_t})$ □

En breve.

En este capítulo hemos presentado los resultados de nuestro trabajo con las álgebras de Cayley–Dickson generalizadas. El objetivo que nos planteábamos al inicio era calcular sus derivaciones ternarias y sus automorfismos ternarios, y para lograrlo hemos seguido dos caminos.

Para obtener los automorfismos ternarios hemos transformado el producto en el álgebra, utilizando isomorfismos y elementos pertenecientes al núcleo alternativo generalizado, $\mathrm{N_{alt}}(A)$, y así hemos logrado, en el Teorema 2.1.3, la siguiente descripción de los automorfismos ternarios en función de los automorfismos.

Dado $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathrm{TAut}(A_t)$ con $t \geq 4$ y $\mathrm{car}\, F \neq 2, 3$ entonces existen $\varphi \in \mathrm{Aut}(A_t), a, b \in \mathrm{N_{alt}}(A_t)$ con $N(a) \neq 0 \neq N(b)$ y $0 \neq \epsilon \in F$ tales que

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (\epsilon L_a R_b \varphi, U_a R_{b^{-1}} \varphi, \epsilon L_{a^{-1}} U_b \varphi).$$

En cuanto a las derivaciones ternarias, en el Teorema 2.3.3 hemos calculado las derivaciones ternarias de Cayley, que para $t \geq 3$ son

$$\mathrm{TCayder}(A_t) = \langle C_a \mid a \in \mathrm{N_{alt}}(A_t) \rangle \oplus \langle C'_a \mid a \in \mathrm{N_{alt}}(A_t) \rangle,$$

y utilizando esta descripción y la graduación heredada por $\mathrm{Tder}(A)$ de la $\mathbb{Z}_2$–graduación inducida en A por el proceso de duplicación, hemos visto cuáles son las derivaciones ternarias de grado cero y de grado uno, logrando de este modo la descripción completa de $\mathrm{Tder}(A)$ que queda reflejada en los Teoremas 2.1.1 y 2.1.2. Así sobre cualquier cuerpo de característica $\neq 2, 3$ y para $t \geq 3$ tenemos que

$$\mathrm{Tder}(A_t) = \widehat{\mathrm{Der}}(A_t) \oplus \langle (L_a, T_a, -L_a), (R_a, -R_a, T_a) \mid a \in \mathrm{N_{alt}}(A_t) \rangle,$$

Y para cuerpos de característica tres $\mathrm{Tder}(A_t)$ es

$$\widehat{\mathrm{Der}}(A_t) + \langle (L_a, T_a, -L_a), (R_a, -R_a, T_a), (\mathrm{Id}, 0, \mathrm{Id}) \mid a \in \mathrm{N_{alt}}(A_t) \rangle,$$

si $t \geq 4$, o

$$\mathrm{alg_{Lie}} \langle (L_a, T_a, -L_a), (R_a, -R_a, T_a) \mid a \in A_3 \rangle + \langle (\mathrm{Id}, 0, \mathrm{Id}) \rangle,$$

si $t = 3$.

Capítulo 3

El núcleo alternativo generalizado de las álgebras de división reales de dimensión finita

Nuestro interés por el núcleo alternativo generalizado y su comprobada utilidad para determinar las derivaciones ternarias de las álgebras de Cayley–Dickson generalizadas, nos llevaron a iniciar el estudio de las álgebras de división reales por su búsqueda. Comenzamos presentando algunos resultados generales, referentes tanto a los núcleos asociativos, como a la conveniencia de considerar la dimensión de $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ mayor o igual que dos, y algunas propiedades de sus elementos.

En la Sección 3.2 clasificamos las álgebras de división reales de dimensión 4 cuyo núcleo alternativo generalizado tiene dimensión mayor o igual que dos en dos familias cuya construcción damos, y observamos que si la dimensión es mayor o igual a 3 se trata de un álgebra isomorfa a la de cuaterniones.

La Sección 3.3 está dedicada a las álgebras de división reales de dimensión 8.

En este caso la exigencia de dimensión 2 para el núcleo alternativo generalizado no facilita la clasificación, por lo que nos limitamos a las álgebras flexibles que satisfacen esta condición, y esto nos permite describirlas salvo isomorfismo. Para las álgebras cuyo núcleo alternativo generalizado tiene dimensión mayor que 2 no necesitamos más condiciones y aparecen álgebras que se pueden asociar a las obtenidas por el proceso de duplicación de Cayley–Dickson.

En la Sección 3.4 nos centramos en las álgebras de división con la propiedad de inversión a izquierda, para las que damos una descripción y logramos una clasificación sencilla si imponemos algunas otras propiedades, como la flexibilidad o la asociatividad de terceras potencias.

3.1. Algunos resultados generales

Proposición 3.1.1. *No existen álgebras de división reales de dimensión 8 con dos núcleos asociativos (a izquierda, central o a derecha) isomorfos a* $\mathbb{H}$.

Demostración. Sea $A = (A, P)$ un álgebra de división real de dimensión 8 con dos núcleos isomorfos a $\mathbb{H}$. Usando isotopía, podemos suponer que A tiene unidad. Cambiando a (A, P^{op}) si es preciso, podemos suponer también que $\mathrm{N_r}(A) \cong \mathbb{H}$. Por último, cambiando a (A, P^*) y a una isótopa de nuevo si es necesario, suponemos que $\mathrm{N_l}(A) \cong \mathbb{H}$ y que A es unitaria.

A es un $\mathrm{N_l}(A)$–módulo a izquierda y un $\mathrm{N_r}(A)^{\mathrm{op}}$–módulo a derecha. De hecho es un bimódulo, por lo que se descompone como $A = Q_1 \oplus Q_2$ con Q_1 y Q_2 sub–bimódulos irreducibles de dimensión 4. Por las dimensiones, para cualesquiera elementos no nulos $x_1 \in Q_1$ y $x_2 \in Q_2$, $Q_i = \mathrm{N_l}(A)x_i = x_i \mathrm{N_r}(A)$. Luego existen isomorfismos $\sigma_1, \sigma_2 \colon \mathrm{N_l}(A) \to \mathrm{N_r}(A)$, de álgebras de hecho, que verifican que $ax_1 = x_1\sigma_1(a)$ y $ax_2 = x_2\sigma_2(a)$ para todo $a \in \mathrm{N_l}(A)$. La aplicación $\sigma_2^{-1}\sigma_1$ es un automorfismo de $\mathrm{N_l}(A)$, luego es interna. Sea $e \in \mathrm{N_l}(A)$ con $\sigma_2^{-1}\sigma_1(a) = eae^{-1}$. Entonces $\sigma_1(a)\sigma_2(e) = \sigma_2(e)\sigma_2(a)$. Tomando $x_1\sigma_2(e)$ en lugar de x_1 podemos suponer que $\sigma_1 = \sigma_2$. Esto es, existe un isomorfismo $\sigma\colon \mathrm{N_l}(A) \to \mathrm{N_r}(A)$ tal que $ax_i = x_i\sigma(a)$ para todo $a \in \mathrm{N_l}(A)$ $(i = 1, 2)$.

Consideramos ahora $u, v \in A$ con $x_1 = uv$. El álgebra $(A, \circ)$ con $x \circ y = R_v^{-1}(x)L_u^{-1}(y)$ es unitaria, con unidad x_1, y Q_1 se convierte en su núcleo asociativo a izquierda y a derecha. Por tanto podemos suponer que $\mathrm{N_l}(A) = Q_1 = \mathrm{N_r}(A)$ y $x_1 = 1$.

La aplicación σ es un automorfismo de $\mathrm{N_l}(A)$, luego es interna. Sea $e \in \mathrm{N_l}(A)$ tal que $\sigma(a) = eae^{-1}$ para todo $a \in \mathrm{N_l}(A)$, entonces $ax_2 = x_2eae^{-1}$. Tomando x_2e en lugar de x_2 podemos suponer que $\sigma = \mathrm{Id}$.

Después de todas estas transformaciones, terminamos con un álgebra de división real A con una subálgebra $Q = \mathrm{N_l}(A) = \mathrm{N_r}(A)$ isomorfa a $\mathbb{H}$ y tal que A se puede descomponer como $A = Q \oplus vQ$, con $Qv = vQ$ y $av = va$ para todo $a \in Q$.

Sea $v^2 = a + vb$ con $a, b \in Q$ (notar que $a = 0$ implica que $v(v - b) = 0$ una contradicción, luego $a \neq 0$). La ecuación cuadrática de coeficientes cuaternios $z^2 + zb - a = 0$ siempre tiene soluciones no nulas en Q [20]. Sea a' una de estas raíces y $b' = -(a')^{-1}a$. Tenemos

$$(a' + v)(b' + v) = (-a + a) + (a' + b' + b)v = (a')^{-1}((a')^2 + a'b - a)v = 0,$$

luego A no es un álgebra de división. $\square$

La existencia de elemento identidad no es una propiedad usual en las álgebras de división reales de dimensión finita, pero es una condición demasiado general como para poder obtener una clasificación en virtud de ella. El siguiente resultado muestra que es conveniente exigir que el núcleo alternativo generalizado sea de dimensión mayor o igual que dos. *En este capítulo a partir de este momento, mientras no se diga lo contrario, A denotará un álgebra de división real de dimensión finita.*

Proposición 3.1.2. *A posee elemento identidad si y solamente si* $\mathrm{N_{alt}}(A) \neq 0$.

Demostración. La implicación directa es obvia. Veamos que la recíproca es cierta. Sea $a \in \mathrm{N_{alt}}(A)$. Por el Lema 1.1.13, el álgebra generada por a es un álgebra de división asociativa y conmutativa de dimensión finita. En particular, posee un elemento identidad e. Puesto que $(a^n, a^m, x) = 0$ para todo $x \in A$ entonces

$$e(ex) = (ee)x = ex,$$

por lo que, por la biyectividad de L_e, $ex = x$ y e es identidad a izquierda de A. De modo similar se obtiene que también es identidad a derecha. $\square$

En lo que sigue se asumirá siempre que $\dim \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A) \geq 2$.

Lema 3.1.3. *Para cualquier* $a \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ *se cumple que* L_a*,* R_a *y* $T_a = L_a + R_a$ *son semisimples.*

Demostración. Por [36], $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ contiene las partes semisimple y nilpotente de sus elementos, es decir, existen a_s y a_n, en la subálgebra generada por a, de modo que $a = a_s + a_n$ con L_{a_s} y R_{a_s} semisimples y L_{a_n} y R_{a_n} nilpotentes. Puesto que el álgebra A es de división, a_n debe ser nulo y por lo tanto L_a y R_a son semisimples, al igual que T_a, ya que $[L_a, R_a] = 0$. $\square$

Lema 3.1.4. $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ *contiene una subálgebra de* A *isomorfa a* $\mathbb{C}$*.*

Demostración. Dado cualquier elemento $a \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ que no pertenezca a $\mathbb{R}1$, la subálgebra generada por a es de división, conmutativa y asociativa de dimensión mayor o igual que 2. Al ser la dimensión de A finita, dicha álgebra es isomorfa a $\mathbb{C}$ y está generada linealmente por $\{1, a\}$. Puesto que ambos elementos pertenecen a $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$, queda demostrado el enunciado. $\square$

Fijemos en lo que sigue una subálgebra C *de* A *tal que* $C \cong \mathbb{C}$ *y* $C \subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$. Es conveniente resaltar que el elemento identidad de C y el de A coinciden.

Lema 3.1.5. A *es un* C*-bimódulo unitario.*

Demostración. Sea a un generador del álgebra C. Como $(a, a, x) = (x, a, a) = 0$ se sigue que A es un C-módulo a ambos lados. Como también $(a, x, a) = 0$, entonces es un C-bimódulo, que al compartir elemento identidad A y C resulta ser unitario. $\square$

Sea

$$V = \{x \in A \mid xa = \bar{a}x \quad \forall a \in C\},$$

donde $\bar{a}$ es el conjugado complejo de a.

Proposición 3.1.6. *Se tiene que V es un sub-bimódulo de A y que*

$$A = C \oplus V.$$

Demostración. Claramente se tiene que para cualesquiera $a, b \in C$ y $x \in V$

$$\begin{aligned}(bx)a &= b(xa) = b(\bar{a}x) = \bar{a}(bx),\\ (xb)a &= \bar{a}(xb),\end{aligned}$$

lo que muestra que V es un sub-bimódulo.

Consideremos ahora a A como un C-módulo a izquierda. El conjunto $\{R_a \mid a \in C\}$ es, por el Lema 3.1.5, un conjunto de transformaciones C-lineales semisimples que conmutan entre sí. Por lo tanto existe una C-base de vectores propios comunes a todas estas transformaciones. Sean $\{1, x_1, \ldots, x_n\}$ ($n = \dim A/2$) una tal C-base y $\gamma_i \colon C \to C$ aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales tales que

$$x_i a = \gamma_i(a) x_i \quad \forall_{a \in C}.$$

Por ser A un bimódulo, $\gamma_i(ab)x_i = x_i(ab) = (x_i a)b = (\gamma_i(a)x_i)b = \gamma_i(a)(x_i b) = \gamma_i(a)\gamma_i(b)x_i$. De este modo vemos que γ_i son $\mathbb{R}$-automorfismos de la $\mathbb{R}$-álgebra C. Por lo tanto, fijado i,

$$x_i a = a x_i \quad \forall_{a \in C} \qquad \text{o bien} \qquad x_i a = \bar{a} x_i \quad \forall_{a \in C}.$$

Definimos

$$S = \{x \in A \mid xa = ax \quad \forall_{a \in C}\}.$$

Si probamos que $S = C$ entonces $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V$ y por lo tanto $A = C + V$. Esta suma es, de hecho, directa ya que cualquier elemento no nulo x en la intersección verificaría que $ax = xa = \bar{a}x$ $\forall_{a \in C}$. Simplificando x se obtendría que $a = \bar{a}$ $\forall_{a \in C}$, lo que no es cierto.

Para probar que $S = C$, primero probamos que S es una subálgebra de A. En efecto, fijemos $a \in C$ tal que $a^2 = -1$. Dados $x, y \in S$ arbitrarios, como $a \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$,

$$a(xy) = (ax + xa)y - x(ay) = 2(ax)y - x(ay)$$

y, volviendo a multiplicar a izquierda por a,

$$-xy = -4xy - 4(ax)(ay) - 2(ax)(ay) - xy,$$

de donde $(ax)(ay) = -xy$. Multiplicando esta última igualdad por $-a$ se tiene que

$$a(xy) = -a((ax)(ay)) = 2x(ay) - (ax)y,$$

por lo que $(ax)y = x(ay)$, o lo que es lo mismo $(x, a, y) = 0$. Puesto que $a \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$, esto implica que $(a, x, y) = (x, y, a) = -(x, a, y) = 0$. En otras palabras, $a(xy) = (ax)y = (xa)y = x(ay) = x(ya) = (xy)a$. Queda probado así que S es una subálgebra de A. Más aún, como $(a, x, y) = (x, a, y) = (x, y, a) = [x, a] = 0$, entonces a pertenece al centro de S. Sin embargo, el centro de cualquier álgebra real de división unitaria de dimensión finita mayor o igual que dos es $\mathbb{R}1$. Como $C \subseteq S$ entonces necesariamente $C = S$. □

El siguiente lema muestra que para describir el producto en A basta centrarse en el producto entre elementos de una C-base de V.

Lema 3.1.7. *Para cualesquiera $x, y \in V$ y $a \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ se tiene que*

- $(ax)y = (xy)a$,
- $x(ay) = \bar{a}(xy)$, *y*
- $(ax)(ay) = \bar{a}(xy)a$.

Demostración. Puesto que $a \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ entonces,

$$\begin{aligned}(xy)a &= -(xa)y + x(ay + ya) = -(xa)y + x((a + \bar{a})y) \\ &= -(xa)y + \mathrm{t}(a)xy = (x\bar{a})y = (ax)y.\end{aligned}$$

A partir de $a(xy) = (ax + xa)y - x(ay)$ se prueba, de modo análogo, la segunda igualdad. La tercera es consecuencia de las dos primeras. □

3.2. Álgebras de división de dimensión cuatro

Las álgebras reales de división de dimensión cuatro cuyo núcleo alternativo generalizado posee dimensión mayor o igual que dos vendrán dadas por las dos construcciones que presentamos a continuación. Dado $u \in \mathbb{C}$ se define $Q_I(\mathbb{C}, u)$ como el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ con el producto dado por

$$(a, b)(a', b') = (aa' + b\bar{b}'u, ab' + b\bar{a}' + \bar{b}\bar{b}').$$

Dado $u \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{n}(u) = 1$, se define $Q_{II}(\mathbb{C}, u)$ como el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ con el producto dado por

$$(a, b)(a', b') = (aa' + b\bar{b}'u, ab' + b\bar{a}').$$

Lema 3.2.1. *Con estas definiciones se cumple que*

- *El álgebra $Q_I(\mathbb{C}, u)$ es un álgebra de división si y solamente si $\mathrm{t}(u) + 1 < \sqrt{\mathrm{n}(u)}$.*
- *El álgebra $Q_{II}(\mathbb{C}, u)$ es un álgebra de división si y solamente si $u \neq 1$.*

Demostración. Supongamos que $(a, b)(c, d) = (0, 0)$ en $Q_I(\mathbb{C}, u)$, con (a, b) y (c, d) no nulos. En tal caso

$$ac + b\bar{d}u = 0 \quad \text{y} \quad ad + b\bar{c} + \bar{b}\bar{d} = 0.$$

Es sencillo comprobar que si uno de los elementos a, b,c, d es nulo, entonces estas ecuaciones implican que (a, b) o (c, d) es nulo. Por lo tanto podemos asumir que $abcd \neq 0$.

De la primera condición despejamos $a = -c^{-1}b\bar{d}u$, que sustituida en la segunda condición nos da

$$-\mathrm{n}(d)c^{-1}bu + b\bar{c} + \bar{b}\bar{d} = 0.$$

Multiplicando por $\bar{b}c$ se tiene que

$$c\bar{d}\frac{\bar{b}^2}{\mathrm{n}(b)} = \mathrm{n}(d)u - \mathrm{n}(c).$$

Puesto que $\{\frac{\bar{b}^2}{\mathrm{n}(b)} \mid b \in \mathbb{C}\} = \{b \in \mathbb{C} \mid \mathrm{n}(b) = 1\}$, entonces existe b que hace cierta la igualdad anterior si y solamente si

$$\mathrm{n}(c\bar{d}) = \mathrm{n}(\mathrm{n}(d)u - \mathrm{n}(c)),$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} \mathrm{n}(c)\,\mathrm{n}(d) &= -\,\mathrm{n}(d)\,\mathrm{n}(c)\,\mathrm{n}(u,1) + \mathrm{n}(d)^2\,\mathrm{n}(u) + \mathrm{n}(c)^2 \\ &= \mathrm{n}(d)^2\,\mathrm{n}(u) + \mathrm{n}(c)^2 - \mathrm{n}(d)\,\mathrm{n}(c)\,\mathrm{t}(u). \end{aligned}$$

Dividiendo por $\mathrm{n}(c)\,\mathrm{n}(d)$ queda

$$1 = \frac{\mathrm{n}(d)\,\mathrm{n}(u)}{\mathrm{n}(c)} + \frac{\mathrm{n}(c)}{\mathrm{n}(d)} - \mathrm{t}(u).$$

Esto equivale a que exista $\lambda > 0$ tal que $1 = \lambda^{-1}\,\mathrm{n}(u) - \mathrm{t}(u) + \lambda$, o equivalentemente

$$\lambda^2 - (\mathrm{t}(u) + 1)\lambda + \mathrm{n}(u) = 0$$

tenga raíces reales y al menos una de ellas sea positiva. La condición de existencia de raíces reales es $(\mathrm{t}(u) + 1)^2 \geq \mathrm{n}(u)$, mientras que una de ellas será positiva si y solamente si $\mathrm{t}(u) + 1 > 0$. Así pues, existen divisores de cero en el álgebra $Q_I(\mathbb{C}, u)$ si y solamente si $\mathrm{t}(u) + 1 \geq \sqrt{\mathrm{n}(u)}$.

Supongamos ahora que $(a, b)(c, d) = (0, 0)$ en $Q_{II}(\mathbb{C}, u)$, con (a, b) y (c, d) no nulos. En tal caso

$$ac + b\bar{d}u = 0 \quad \text{y} \quad ad + b\bar{c} = 0.$$

Como en el caso anterior puede suponerse que $abcd \neq 0$. Tenemos pues que $b = -\frac{adc}{\mathrm{n}(c)}$ y que $0 = ac - \frac{adc\bar{d}u}{\mathrm{n}(c)} = ac - ac\frac{\mathrm{n}(d)}{\mathrm{n}(c)}u$, de donde

$$u = \frac{\mathrm{n}(c)}{\mathrm{n}(d)}.$$

Puesto que $\mathrm{n}(u) = 1$ entonces esta última condición es equivalente a que $u = 1$. Por lo tanto $Q_{II}(\mathbb{C}, u)$ posee divisores de cero si y solamente si $u = 1$. □

Teorema 3.2.2. *Un álgebra de división real de dimensión cuatro posee núcleo alternativo generalizado de dimensión mayor o igual que dos si y solamente si es isomorfa a un álgebra $Q_I(\mathbb{C}, u)$ o $Q_{II}(\mathbb{C}, u)$.*

Demostración. Sea A un álgebra de división real de dimensión cuatro con núcleo alternativo generalizado de dimensión mayor o igual que dos. Elegimos una subálgebra $C \subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ isomorfa a $\mathbb{C}$. Como C-módulo a izquierda, A se descompone como $A = C \oplus Cx$ para un cierto $x \notin C$. Sean $u, v \in C$ tales que $x^2 = u + vx$. Claramente $u \neq 0$, ya que de lo contrario $x^2 = vx$ implicaría que $x = v \in C$, lo que no es cierto. Cambiando x por ax con $0 \neq a \in C$ observamos que, como por el Lema 3.1.7

$$(ax)(ax) = \bar{a}x^2a = \mathrm{n}(a)u + \bar{a}^2vx,$$

entonces eligiendo a tal que $\bar{a}^2v = a$ si es preciso, se puede asumir que $v = 0$ o $v = 1$. En el primer caso, $v = 0$, se podría elegir a con $\mathrm{n}(a) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}(u)}}$ y asumir que $\mathrm{n}(u) = 1$. Esto muestra que $A \to Q_{II}(\mathbb{C}, u)$, dada por $a + bx \mapsto (a, b)$, es un isomorfismo de álgebras. En el segundo caso, $v = 1$, se obtiene que A es isomorfa a un álgebra $Q_I(\mathbb{C}, u)$.

Veamos que efectivamente $\dim \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(Q_I(\mathbb{C}, u)) \geq 2$. Por simplicidad de notación es conveniente denotar como x al elemento $(0, 1)$, como a al elemento $(a, 0)$ y como ax al elemento $(0, a)$ $(a \in \mathbb{C})$. De este modo el producto en $Q_I(\mathbb{C}, u)$ se expresa mediante

$$(a + bx)(c + dx) = (ac + b\bar{d}u) + (ad + b\bar{c} + \bar{d}\bar{b})x.$$

Ahora, dado $\gamma \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}(\gamma(a + bx) + (a + bx)\gamma)(c + dx) - (a + bx)(\gamma(c + dx))& \\ &= \gamma ac + \gamma b\bar{d}u + \gamma adx + \gamma b\bar{c}x \\ &= \gamma((a + bx)(c + dx)),\end{aligned}$$

lo que nos muestra que $(\gamma, a+bx, c+dx) = -(a+bx, \gamma, c+dx)$. Del mismo modo se probaría que $(a+bx, c+dx, \gamma) = -(a+bx, \gamma, c+dx)$, por lo que $\mathbb{C} \subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(Q_I(\mathbb{C}, u))$. Análogamente $\mathbb{C} \subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(Q_{II}(\mathbb{C}, u))$. $\square$

Es conveniente observar que, si $\dim \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A) \geq 3$ entonces $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ es un álgebra de Lie, y por lo tanto genera una subálgebra asociativa de A de dimensión ≥ 3 [38]. Esto implica que A es asociativa y por consiguiente isomorfa al álgebra de cuaternios. Como antes, y ya de ahora en adelante, $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ quedará identificado con $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}x$, x con $(0,1)$ y (a,b) con $a+bx$.

Lema 3.2.3. *Se verifica que*

- $\mathrm{N_{alt}}(Q_I(\mathbb{C},u))=\mathbb{C}$.
- $\mathrm{N_{alt}}(Q_{II}(\mathbb{C},u))=\mathbb{C}$ *si y solamente si* $u\neq -1$.

Demostración. Bastará ver que $Q_I(\mathbb{C},u)$ no es isomorfa al álgebra de cuaternios. Para ello probamos, por ejemplo, que no es un álgebra cuadrática. Dado $b\in\mathbb{C}$ con $b^3\notin\mathbb{R}$ se tiene que $(bx)(bx)=n(b)u+\bar{b}^2x$. Si $Q_I(\mathbb{C},u)$ fuese cuadrática entonces existirían $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tales que $\mathrm{n}(b)u+\bar{b}^2x=\alpha bx+\beta$ por lo que $\bar{b}^2=\alpha b$ y así $\alpha\,\mathrm{n}(b)=\bar{b}^3$, lo que no es posible ya que $b^3\notin\mathbb{R}$.

En cuanto a $Q_{II}(\mathbb{C},u)$ observar que si $u\neq -1$ entonces $u\notin\mathbb{R}$ por lo que $1,x,u$ pertenecen al álgebra generada por x y así $Q_{II}(\mathbb{C},u)$ no es cuadrática. Obviamente, si $\mathrm{N_{alt}}(Q_{II}(\mathbb{C},u))=\mathbb{C}$ entonces necesariamente $u\neq -1$. □

Proposición 3.2.4. *Se tiene que*

- *No hay ningún álgebra* $Q_I(\mathbb{C},u)$ *que sea isomorfa a un álgebra* $Q_{II}(\mathbb{C},u')$.
- *Dos álgebras* $Q_I(\mathbb{C},u)$ *y* $Q_I(\mathbb{C},u')$ *son isomorfas si y solamente si* $u=u'$ *o* $u=\bar{u}'$.
- *Dos álgebras* $Q_{II}(\mathbb{C},u)$ *y* $Q_{II}(\mathbb{C},u')$ *son isomorfas si y solamente si* $u=u'$ *o* $u=\bar{u}'$.

Demostración. Sea $\varphi\colon Q_{II}(\mathbb{C},u')\to Q_I(\mathbb{C},u)$ un isomorfismo. Llamaremos $C=\mathbb{C}\times 0\subseteq Q_I(\mathbb{C},u)$ y $x=(0,1)\in Q_I(\mathbb{C},u)$, mientras que llamaremos $C'=\mathbb{C}\times 0\subseteq Q_{II}(\mathbb{C},u')$ y $x'=(0,1)\in Q_{II}(\mathbb{C},u')$. Puesto que los isomorfismos preservan el núcleo alternativo generalizado entonces podemos suponer que $\varphi(C)\subseteq C'$. La imagen del elemento $bx\in Q_{II}(\mathbb{C},u')$ cumple que $\varphi(bx)^2=\varphi((bx)^2)=\varphi(\bar{b}x^2b)=\mathrm{n}(b)\varphi(u')\in C$. Sin embargo, si $\varphi(x)=c+dx'$ entonces $\varphi(bx)^2=(\varphi(b)^2c^2+\mathrm{n}(\varphi(b)d)u')+(\mathrm{t}(\varphi(b)c)\varphi(b)d+(\overline{\varphi(b)d})^2)x'$. De este modo se debería cumplir que

$\mathrm{t}(\varphi(b)c)\varphi(b)d + (\overline{\varphi(b)d})^2 = 0$, para todo $b \in C$, y por lo tanto que $\varphi(b)^3 d^3 \in \mathbb{R}$ para todo $b \in C$, lo que no es cierto.

Observar que la aplicación de $Q_I(\mathbb{C}, u) \to Q_I(\mathbb{C}, \bar{u})$ dada por

$$a + bx \mapsto \bar{a} + \bar{b}wx',$$

para un elemento $w \in C$ prefijado que satisfaga $w^3 = 1$, es un isomorfismo cuya restricción a C es la conjugación compleja.

Dado un isomorfismo $\varphi\colon Q_I(\mathbb{C}, u) \to Q_I(\mathbb{C}, u')$, puesto que los isomorfismos conservan el núcleo alternativo generalizado, entonces podemos identificar el núcleo alternativo generalizado, C, de $Q_I(\mathbb{C}, u)$ con el de $Q_I(\mathbb{C}, u')$. Componiendo con el isomorfismo anterior, se puede asumir también que la restricción de φ a C es la identidad. Como antes, x denota el elemento $(0, 1)$ de $Q_I(\mathbb{C}, u)$, mientras que x' denota el correspondiente elemento de $Q_I(\mathbb{C}, u')$. Dado $a \in C$,

$$\varphi(x)a = \varphi(xa) = \varphi(\bar{a}x) = \varphi(\bar{a})\varphi(x) = \bar{a}\varphi(x)$$

implica que $\varphi(x) \in \{y \in Q_I(\mathbb{C}, u') \mid ya = \bar{a}y \,\forall_{a \in C}\} = Cx'$. Sea $c \in C$ tal que $\varphi(x) = cx'$. Tenemos que

$$\varphi(x^2) = \begin{cases} \varphi(u + x) = u + cx' \\ \\ (cx')^2 = N(c)u' + \bar{c}^2 x' \end{cases}$$

de donde $\bar{c}^2 = c$ y así $N(c) = 1$ y $u = u'$.

Sea ahora $\varphi\colon Q_{II}(\mathbb{C}, u) \to Q_{II}(\mathbb{C}, u')$. Podemos asumir que $u, u' \neq -1$. De nuevo, también podemos identificar el núcleo alternativo generalizado, C, de $Q_{II}(\mathbb{C}, u)$ con el de $Q_{II}(\mathbb{C}, u')$ mediante φ. Mantendremos también el significado evidente de x y x'.

La aplicación $Q_{II}(\mathbb{C}, u) \to Q_{II}(\mathbb{C}, \bar{u})$ dada por

$$\varphi(a + bx) = \bar{a} + \bar{b}wx',$$

para un cierto $w \in C$ con $\mathrm{n}(w) = 1$, es un isomorfismo. Componiendo φ con él si es preciso, se puede asumir que la restricción de φ a C es la identidad.

Al igual que para el caso anterior, es sencillo probar que $\varphi(Cx) = Cx'$ por lo que existe $c \in C$ tal que $\varphi(x) = cx$. Ahora

$$\varphi(x^2) = \begin{cases} \varphi(u) = u \\ \\ (cx')^2 = \mathrm{n}(c)u' \end{cases}$$

Puesto que $\mathrm{n}(u) = 1 = \mathrm{n}(u')$ entonces $\mathrm{n}(c) = 1$ y $u = u'$. $\square$

3.3. Álgebras de división de dimensión ocho

3.3.1. Núcleo alternativo generalizado de dimensión dos

En este caso, la estructura que induce la presencia de un núcleo alternativo generalizado de dimensión dos no parece ser suficiente como para lograr una clasificación. Debido a ello hemos limitado el alcance de nuestra investigación a álgebras que además son flexibles.

Nuestra primera observación, sin embargo, abarca a álgebras que no necesariamente son flexibles pero que sí que satisfacen la asociatividad de terceras potencias, es decir,

$$x^2x = xx^2 \tag{3.1}$$

Proposición 3.3.1. *Sea A un álgebra de división real de dimensión finita cuyo núcleo alternativo generalizado tiene dimensión mayor o igual que dos. Si además A satisface la asociatividad de terceras potencias entonces existe una forma cuadrática $N\colon A \to \mathbb{R}$ definida positiva tal que*

$$y^2 - \mathrm{t}(y)y + N(y) = 0 \quad \forall_{y \in A},$$

donde $\mathrm{t}(y) = N(y, 1)$ *y* $N(x, y) = N(x + y) - N(x) - N(y)$.

Demostración. Sea C una subálgebra de $\mathrm{N_{alt}}(A)$ de dimensión dos y $V = \{x \in A \mid \bar{a}x = xa \quad \forall_{a \in C}\}$. Linealizando la identidad (3.1) se obtiene

$$(xy + yx)x + x^2y = yx^2 + x(xy + yx).$$

Si se elige $x \in V$ e $y = a \in C$, entonces

$$(xa + ax)x + x^2 a = ax^2 + x(ax + xa)$$

implica que

$$\mathrm{t}(a)x^2 + x^2 a = ax^2 + \mathrm{t}(a)x^2,$$

por lo que $x^2 a = ax^2$ para todo $a \in C$. Por la Proposición 3.1.6 esto implica que $x^2 \in C$. Además, por la asociatividad de terceras potencias, $x^2 x = xx^2$ implica también que de hecho $x^2 \in \mathbb{R}$. Si se define $N(x) = -x^2 \ \forall_{x \in V}$ y se extiende de modo que C y V sean ortogonales y $N(\,)$ coincida con la norma usual de C, entonces dado $a \in C$ y $x \in V$

$$\begin{aligned} (a+x)^2 &= a^2 + ax + xa + x^2 = \mathrm{t}(a)a - N(a) + (a + \bar{a})x - N(x) \\ &= \mathrm{t}(a)(a+x) - N(a+x) = \mathrm{t}(a+x)(a+x) - N(a+x), \end{aligned}$$

donde $\mathrm{t}(a+x) = \mathrm{t}(a)$.

La forma cuadrática $N(\,)$ es definida positiva ya que lo es en C y además también en V, puesto que si $x^2 = -N(x) \geq 0$ entonces $(x - \sqrt{-N(x)})(x + \sqrt{-N(x)}) = 0$, y por lo tanto $x \in \mathbb{R}$. Como $x^2 \geq 0$ entonces $x = 0$. □

Lema 3.3.2. *Sean $x, y \in V$ tales que $N(y, Cx) = 0$. Entonces $N(Cy, Cx) = 0$ y $xy \in V$.*

Demostración. Puesto que x e y son ortogonales, entonces $xy + yx = -N(x,y) = 0$, por lo que anticonmutan. Sea ahora $a \in C$. Se tiene que por un lado

$$(xy)a + a(xy) = \mathrm{t}(a)xy + \mathrm{t}(xy)a - N(xy, a),$$

mientras que por otro lado, por el Lema 3.1.7,

$$\begin{aligned} (xy)a + a(xy) &= (xy)a - a(yx) = (x\bar{a})y - y(\bar{a}x) = (x\bar{a})y - y(xa) \\ &= \mathrm{t}(a)xy - (xa)y - y(xa), \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\mathrm{t}(xy)a - \mathrm{t}(xy, a) = -\mathrm{t}(xa)y - \mathrm{t}(y)xa + \mathrm{t}(xa, y) = 0.$$

Puesto que a es arbitrario, esto implica que $\mathrm{t}(xy) = N(xy, a) = 0$ para todo $a \in C$ o, equivalentemente, $xy \in V$.

Finalmente, dados $a, b \in C$,

$$(ay)(bx) = \bar{b}(yx)a = -\bar{b}(xy)a = -\bar{a}(xy)b = -(bx)(ay),$$

lo que implica que $N(ay, bx) = 0$. □

La presencia de un núcleo alternativo generalizado de dimensión al menos dos ha permitido introducir una estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial en A y determinar el producto en A a partir de una $\mathbb{C}$-base en lugar de una $\mathbb{R}$-base. *Para reducir las posibilidades se asumirá en lo que sigue que A es flexible.*

Lema 3.3.3. *Sean $x, y \in V$ tales que $N(Cx, Cy) = 0$. Se tiene que $N(Cxy, Cx) = N(Cxy, Cy) = 0$ y que $(xy)x \in V$.*

Demostración. Puesto que $(xy)x = x(yx) = -x(xy)$ entonces $N(xy, x) = 0$. En general, dado $a \in C$, por un lado

$$((ax)y)(ax) = \bar{a}(((ax)y)x) = \bar{a}((xy)x)\bar{a},$$

mientras que por otro

$$((ax)y)(ax) = (ax)(y(ax)) = (x(y(ax)))a = a((xy)x)a,$$

por lo que $a^2((xy)x) = ((xy)x)\bar{a}^2$. Puesto que $C = \{a^2 \mid a \in C\}$, se tiene que $(xy)x \in V$.

Finalmente, $(xy)(ax) = \bar{a}((xy)x) = ((xy)x)a = -(x(xy))a = -(ax)(xy)$ implica que $N(xy, Cx) = 0$. El resto del enunciado del lema se sigue fácilmente. □

Si $x, y \in V$ son tales que $N(Cx, Cy) = 0$ y $N(x) = 1 = N(y)$, entonces diremos que el triple (x, y, xy) es un *triple básico*. Puesto que quizás la norma de xy puede ser distinta de 1, el orden es importante en el triple básico.

Lema 3.3.4. *Sea (x, y, xy) un triple básico y $\lambda = N(xy)$. Se tiene que*

- $x(xy) = -\lambda y$, $(xy)x = \lambda y$,

- $y(xy) = \lambda x$, $(xy)y = -\lambda x$.

Demostración. Por el Lema 3.3.3 se tiene que V se descompone ortogonalmente como $V = Cx \oplus Cy \oplus C(xy)$. Puesto que $x(xy)$ es ortogonal a Cx y $C(xy)$, entonces $x(xy) = \alpha y$ para un cierto $\alpha \in C$. Por flexibilidad, $(xy)x = x(yx) = -x(xy) = -\alpha y$. De igual modo se obtiene que $y(xy) = -\beta x$ y que $(xy)y = \beta x$ para cierto $\beta \in C$.

Linearizando la identidad flexible se obtiene que para cualquier $c \in C$,

$$(xy)(c(xy)) + ((c(xy))y)x = x(y(c(xy))) + (c(xy))(yx),$$

lo que implica que

$$-N(xy)\bar{c} + ((\beta x)c)x = x(\bar{c}(-\beta x)) + N(xy)c.$$

Puesto que $x^2 = -1 = y^2$, esta última igualdad se puede escribir como $-N(xy)\bar{c} - \beta\bar{c} = \bar{\beta}c + N(xy)c$. Agrupando términos se tiene que $-(N(xy)+\beta)\bar{c} = (\bar{\beta}+N(xy))c$. Al ser c arbitrario, esto implica que $\beta = -N(xy) = -\lambda$. Queda demostrado entonces que $(xy)y = -\lambda x = y(xy)$.

Considerando el triple básico (y, x, yx) en lugar de (x, y, xy) obtenemos que $x(xy) = (yx)x = -\lambda y$, por lo que $\alpha = -\lambda$. □

Lema 3.3.5. *La forma bilineal $\sigma\colon V \times V \to C$, dada por*

$$\sigma(x, y) = -\pi_C(xy),$$

es una forma hermítica en el C-espacio vectorial V.

Demostración. Dados $x, y \in V$, escribimos $y = ax + z$ con $z \in V$ perpendicular a Cx. De este modo,

$$\begin{aligned} \sigma(x,y) &= -\pi_C(xy) = -\pi_C(\bar{b}(-N(x))) = N(x)\bar{b}, \\ \overline{\sigma(y,x)} &= -\overline{\pi_C(yx)} = -\overline{\pi_C((bx)x)} = -\overline{\pi_C(-N(x)b)} = N(x)\bar{b} = \sigma(x,y). \end{aligned}$$

Claramente $\sigma(x, x) = N(x)$. Finalmente,

$$\sigma(ax, y) = -\pi_C((ax)y) = -\pi_C((xy)a) = -\pi_C(xy)a = -a\pi_C(xy) = a\sigma(x, y).$$

□

Sea $\mathbb{O}(\lambda) = \mathbb{C}^4$, $\{e_1, \ldots, e_4\}$ la base canónica de $\mathbb{O}(\lambda)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda > 0$. Se define el producto $e_i e_j$ mediante la tabla

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-\lambda e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-e_1$	λe_2
e_4	e_4	λe_3	$-\lambda e_2$	$-\lambda e_1$

	ce_1	de_j
ae_1	ace_1	ade_j
be_i	$b\bar{c}e_i$	$b\bar{d}(e_i e_j)$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $i, j \geq 2$. Como antes, la aplicación $\sigma\colon \mathbb{O}(\lambda) \times \mathbb{O}(\lambda) \to \mathbb{C}$ dada por $\sigma(x, y) = -\pi_{\mathbb{C}e_1}(xy)$ es una forma hermítica en $V = \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4$ con la estructura de $C = \mathbb{C}e_1$ espacio vectorial.

Teorema 3.3.6. *Un álgebra real de dimensión ocho A es un álgebra de división flexible con núcleo alternativo generalizado de dimensión mayor o igual que dos si y solamente si es isomorfa a un álgebra $\mathbb{O}(\lambda)$ para algún $\lambda > 0$.*

Demostración. Veamos primero la implicación directa. Si se elige un triple básico (x, y, xy) de A entonces la aplicación

$$1 \mapsto e_1, \quad x \mapsto e_2, \quad y \mapsto e_3, \quad xy \mapsto e_4$$

extendida por C-linealidad proporciona un isomorfismo entre A y $\mathbb{O}(\lambda)$, donde $\lambda = N(xy)$.

Para probar el recíproco, bastaría comprobar que $\mathbb{C}e_1 \subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(\mathbb{O}(\lambda))$, que $\mathbb{O}(\lambda)$ es flexible y que es de división. Sea $C = \mathbb{C}e_1$ y $V = \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4$. La primera y la tercera afirmación son una comprobación directa.

Para probar que el álgebra $\mathbb{O}(\lambda)$ es un álgebra de división, consideramos un operador de multiplicación a izquierda no invertible L_{a+v} con $a \in C$ y $v \in V$. Puesto que L_a es invertible si $0 \neq a \in \mathbb{C}$ entonces necesariamente $v \neq 0$. Reescalando el vector v, se puede asumir que su norma $\sigma(v, v)$ es uno. Por el Lema 3.3.3, podemos encontrar una C-base $\{x = v, y, xy\}$ de V con $\sigma(x, y) = \sigma(x, xy) = \sigma(y, xy) = 0$ y $\sigma(x, x) = \sigma(y, y) = 1$. El Lema 3.3.4 muestra que $L_{a+v}(C + Cx) \subseteq C + Cx$ y que $L_{a+v}Cy + C(xy) \subseteq Cy + C(xy)$, por lo que para probar la biyectividad de

L_{a+v} podemos hacerlo independientemente en $(C+Cx)$ y $Cy+C(xy)$. Puesto que $C+Cx$ es isomorfa al álgebra $\mathbb{H}$ y $a+v \in C+Cx$ entonces la restricción de L_{a+v} a este subespacio es biyectiva. En cuanto a su restricción al subespacio $Cx+C(xy)$,

$$(a+v)(by+c(xy)) = aby + ac(xy) + \bar{b}xy - \bar{c}N(xy)y,$$

que será nulo si y solamente si $abc = N(c)N(xy)$ y $abc = -N(b)$. Estas condiciones solamente son compatibles en el caso en que $b=c=0$.

La biyectividad del operador de multiplicación a izquierda L_{a+v} puede ser probada directamente sin utilizar este proceso de reducción con la ayuda de un programa de cálculo simbólico. El operador de multiplicación a izquierda por el elemento genérico $x_1e_1 + y_1ie_1 + x_2e_2 + y_2ie_2 + x_3e_3 + y_3ie_3 + x_4e_4 + y_4ie_4$ tiene matriz coordenada en base $\{e_1, ie_1, e_2, ie_2, e_3, ie_3, e_4, ie_4\}$ a

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 & -x_2 & -y_2 & -x_3 & -y_3 & -\lambda x_4 & -\lambda y_4 \\ y_1 & x_1 & -y_2 & x_2 & -y_3 & x_3 & -\lambda y_4 & \lambda x_4 \\ x_2 & y_2 & x_1 & -y_1 & -\lambda x_4 & \lambda y_4 & \lambda x_3 & -\lambda y_3 \\ y_2 & -x_2 & y_1 & x_1 & \lambda y_4 & \lambda x_4 & -\lambda y_3 & -\lambda x_3 \\ x_3 & y_3 & \lambda x_4 & -\lambda y_4 & x_1 & -y_1 & -\lambda x_2 & \lambda y_2 \\ y_3 & -x_3 & -\lambda y_4 & -\lambda x_4 & y_1 & x_1 & \lambda y_2 & \lambda x_2 \\ x_4 & y_4 & -x_3 & y_3 & x_2 & -y_2 & x_1 & -y_1 \\ y_4 & -x_4 & y_3 & x_3 & -y_2 & -x_2 & y_1 & x_1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es

$$\begin{aligned}&\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \right.\\ &\quad \left.\lambda\left(x_4^2 + y_4^2\right)\right)^2 \left(x_1^2 + y_1^2 + \lambda\left(x_2^2 + x_3^2 + y_2^2 + y_3^2 + \lambda\left(x_4^2 + y_4^2\right)\right)\right)^2,\end{aligned}$$

que claramente no toma el valor cero en ningún punto si y solamente si $\lambda > 0$. □

Proposición 3.3.7. *El álgebra $\mathbb{O}(\lambda)$ es isomorfa a los octoniones $\mathbb{O}$ si y solamente si $\lambda = 1$.*

Demostración. Si $\mathbb{O}(\lambda)$ es alternativa entonces, $e_3(e_3e_4) = (e_3e_3)e_4$ implica que $-\lambda e_3e_2 = -e_4$, es decir, $-\lambda e_4 = -e_4$ o equivalentemente $\lambda = 1$.

Recíprocamente, es sencillo probar que el álgebra $\mathbb{O}(1)$ es isomorfa al álgebra $\mathbb{O}$. $\square$

Lema 3.3.8. *Si* $\lambda \neq 1$ *entonces* $\mathrm{N_{alt}}(\mathbb{O}(\lambda)) = \mathbb{C}e_1$.

Demostración. Si $\mathrm{N_{alt}}(\mathbb{O}(\lambda)) \neq C = \mathbb{C}e_1$ entonces existiría $y \in \mathrm{N_{alt}}(\mathbb{O}(\lambda))$ tal que $\sigma(x, y) = 0$ con $x = e_1$ y $\sigma(y, y) = 1$. Usando el triple básico (x, y, xy) encontramos, como en la demostración de la proposición anterior, que $y(y(xy)) = y^2(xy)$ implica que $N(xy) = 1$, y que $\mathbb{O}(\lambda)$ es isomorfa a los octoniones, por lo que $\lambda = 1$. $\square$

Lema 3.3.9. *La aplicación*

$$\sigma(u, v, w) = \sigma(u, uv)$$

es una forma C-trilineal alternada en V.

Demostración. Puesto que $u(vv) = -N(v)u \in V$ para cualesquiera $u, v \in V$ entonces $\pi_C(u(vv)) = 0$. Linealizando esta igualdad se obtiene que

$$\sigma(u, v, w) = -\pi_C(u, vw) = \pi_C(u, wv) = -\sigma(u, w, v).$$

De igual modo, $u(uw) \in Cw$ implica que $\sigma(u, u, w) = 0$. Linealizando en u se obtiene que $\sigma(u, v, w) = -\sigma(v, u, w)$. Queda probado así que $\sigma(u, v, w)$ es alternada. Ahora,

$$\begin{aligned} \sigma(u, v, aw) &= \sigma(u, v(aw)) = -\pi_C(u, (vw)a) = -\pi_C(a, u(vw)) \\ &= -a\pi_C(u, vw) = a\sigma(u, v, w), \end{aligned}$$

que por la alternacia implica que $\sigma(u, v, w)$ es C-trilineal. $\square$

Las álgebras $\mathbb{O}(\lambda)$ poseen una rica estructura de automorfismos. Sea

$$S = \{\varphi \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V) \mid \sigma(\varphi(v), \varphi(w)) = \sigma(v, w)\forall_{v,w\in V} \text{ y } \det(\varphi) = 1\}.$$

Los elementos de S pueden extenderse, y así los pensaremos, a aplicaciones C-lineales de V en V cuya restricción a C es la identidad. Dichas aplicaciones forman un grupo compacto isomorfo a $SU(3)$. Además del grupo S es conveniente destacar la aplicación

$$\kappa\colon ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 \mapsto \bar{a}e_1 + \bar{b}e_2 + \bar{c}e_3 + \bar{d}e_4$$

Proposición 3.3.10. *Si $\lambda \neq 1$ entonces el conjunto de automorfismos de $\mathbb{O}(\lambda)$ es*

$$S \sqcup \kappa S.$$

Demostración. Dado un automorfismo φ, componiendo con κ si es preciso y puesto que φ necesariamente preserva el núcleo alternativo $C = \mathbb{C}e_1$ de $\mathbb{O}(\lambda)$, podemos suponer que la restricción de φ a C es la identidad. Esto implica que $\sigma(v,w) = \varphi(\sigma(v,w)) = \sigma(\varphi(v),\varphi(w))$. Puesto que también φ conserva la forma trilineal $\sigma(u,v,w)$ entonces

$$\sigma(u,v,w) = \sigma(\varphi(u),\varphi(v),\varphi(w)) = \det(\varphi)\sigma(u,v,w),$$

lo que prueba que $\det(\varphi) = 1$.

Sea ahora una aplicación $\varphi \in S$ y consideramos un triple básico (x,y,xy). El conjunto $(\varphi(x),\varphi(y),\varphi(xy))$ cumple que $\sigma(\varphi(x),\varphi(y)) = \sigma(x,y) = 0$ y que $\sigma(\varphi(x),\varphi(x)) = 1 = \sigma(\varphi(y),\varphi(y))$, pero sin embargo podría no ser un triple básico ya que a priori no sabemos si $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ o no. Puesto que $\sigma(\varphi(xy),\varphi(x)) = \sigma(\varphi(xy),\varphi(y)) = 0$, entonces existe $d \in C$ tal que $\varphi(xy) = d\varphi(x)\varphi(y)$. Ahora bien,

$$\sigma(\varphi(xy),\varphi(x),\varphi(y)) = \begin{cases} \det(\varphi)\sigma(xy,xy) = \lambda\det(\varphi) = \lambda \\ \sigma(\varphi(xy), d^{-1}\varphi(xy)) = \bar{d}^{-1}\sigma(\varphi(xy),\varphi(xy)) = \bar{d}^{-1}\lambda \end{cases}$$

implica que $d = 1$, y que por lo tanto $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Puesto que φ actúa como la identidad en C, es claro que φ es un automorfismo de $\mathbb{O}(\lambda)$. $\square$

Proposición 3.3.11. *Dos álgebras $\mathbb{O}(\lambda)$ y $\mathbb{O}(\lambda')$ son isomorfas si y solamente si $\lambda = \lambda'$.*

Demostración. Podemos suponer que $\lambda \neq 1 \neq \lambda'$. Sea $\varphi\colon \mathbb{O}(\lambda) \to \mathbb{O}(\lambda')$ un isomorfismo. Identificamos el núcleo alternativo generalizado, C, de $\mathbb{O}(\lambda)$ con el de $\mathbb{O}(\lambda')$. Componiendo φ con κ, podemos suponer que la restricción de φ a C es la identidad. Identificaremos también el correspondiente espacio V de $\mathbb{O}(\lambda)$ con el de $\mathbb{O}(\lambda')$.

Observemos primero que si (x, y, xy) es un triple básico en $\mathbb{O}(\lambda)$ y cambiamos y por otro elemento $z \in V$, con $\sigma(x, z) = 0$ y $\sigma(z, z) = 1$, entonces $z = ay + b(xy)$ para ciertos $a, b \in C$. Puesto que $\sigma(z, z) = 1$, entonces $N(a) + \lambda N(b) = 1$. De este modo la norma de xz queda $N(xz) = N(\bar{a}(xy) - \lambda \bar{b} y) = \lambda N(a) + \lambda^2 N(b) = \lambda(1 - \lambda N(b)) + \lambda^2 N(b) = \lambda$. Es decir, el valor λ no se altera al cambiar el segundo elemento (y consecuentemente el tercero) en un triple básico. Dados dos triples básicos, (x, y, xy) y $(x', y', x'y')$, podemos tomar $z \in V$ tal que $\sigma(z, x) = 0 = \sigma(z, x')$ y $\sigma(z, z) = 1$. A partir de los triples básicos (x, y, xy) y (x, z, xz) obtenemos que $N(xy) = N(xz)$ ya que comparten el primer elemento. A partir de $(x', y', x'y')$ y $(x', z, x'z)$ se obtiene que $N(x'y') = N(x'z)$ y finalmente a partir de los triples (x, z, xz) y $(x', z, x'z)$ se obtiene que $N(xz) = N(x'z)$. A través de las igualdades hasta ahora obtenidas llegamos a que $N(xy) = N(x'y')$. De este modo queda claro que el valor de $N(xy)$, es decir λ, no depende del triple básico de partida.

Puesto φ envía un triple básico de $\mathbb{O}(\lambda)$ a un triple básico de $\mathbb{O}(\lambda')$ entonces necesariamente $\lambda = \lambda'$. □

3.3.2. Núcleo alternativo generalizado de dimensión mayor que dos

En este apartado A denotará un álgebra real de división de dimensión ocho.

Proposición 3.3.12. *Si* $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ *no es un álgebra de Lie entonces* $A \cong \mathbb{O}$.

Demostración. En primer lugar, $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A) = \mathbb{R}1 \oplus \{a \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A) \mid \mathrm{t}(L_a) = 0\}$ es una descomposición de $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ como suma directa de dos ideales. Para que $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ no sea un álgebra de Lie se necesita que el segundo ideal en la descomposición anterior de $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ no sea un álgebra de Lie. En particular, la dimensión de este conjunto ha de ser mayor o igual que cuatro. De este modo, $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ posee dimensión mayor o igual que 5 y, por lo tanto, el álgebra que genera es exactamente A. En particular, A es un álgebra real de dimensión ocho generada por su núcleo alternativo generalizado. Por [35], puesto que A es un álgebra simple central, se tiene que o bien el álgebra derivada $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)' = [\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A), \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)]$ contiene un ideal isomorfo al álgebra simple excepcional siete-dimensional, o bien A es un álgebra asociativa. Como $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ no es un álgebra de Lie entonces debe darse necesariamente la primera posibilidad. Ahora bien, en tal caso $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A) = A$, y por lo tanto A es un álgebra alternativa de división central (de dimensión ocho) no asociativa, es decir $A \cong \mathbb{O}$. □

Lema 3.3.13. *Si $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ es un álgebra de Lie de dimensión mayor que dos, entonces $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ es cerrado por el producto de A y es isomorfa a $\mathbb{H}$.*

Demostración. Puesto que $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ es un álgebra de Lie entonces genera una subálgebra asociativa de A. Por la restricción en la dimensión, esta subálgebra ha de ser isomorfa a $\mathbb{H}$. Puesto que cualquier subálgebra de $\mathbb{H}^-$ de dimensión mayor que dos es $\mathbb{H}^-$, entonces se sigue el enunciado del lema. □

En lo siguiente identificaremos $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$ con los cuaternios $\mathbb{H}$. Dado $a \in \mathbb{H}$, puesto que $(L_a, T_a, -La)$ es una derivación ternaria entonces (L_a, U_a, L_a^{-1}), con $U_a = L_aR_a$, es un automorfismo ternario. Del mismo modo (R_a, R_a^{-1}, U_a) es también un automorfismo ternario.

El siguiente lema se basa en [28].

Lema 3.3.14. *Sean $i, j \in \mathbb{H} \subseteq A$ tales que $i^2 = -1 = j^2$, $ij = -ji$. Se tiene que*

$$\sigma = R_{ji}R_jR_i$$

es un automorfismo de orden dos cuya restricción a $\mathbb{H}$ es la identidad.

Demostración. Puesto que $(R_{ji}R_jR_i, -R_{ji}^{-1}R_j^{-1}R_i^{-1}, -U_{ji}U_jU_i)$ es un automorfismo ternario y además

$$\begin{aligned} R_{ji}R_jR_i(1) &= (ij)(ji) = -(ij)(ij) = 1, \\ -R_{ji}^{-1}R_j^{-1}R_i^{-1}(1) &= -((-i)(-j))(-ji) = 1, \end{aligned}$$

entonces $\sigma = R_{ji}R_jR_i = -R_{ji}^{-1}R_j^{-1}R_i^{-1} = -U_{ji}U_jU_i$ es un automorfismo. El cuadrado de σ es

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= R_{ji}R_jR_iR_{ji}R_jR_i = -R_{ji}R_jR_iR_{ji}R_iR_iR_jR_i \\ &= R_{ji}R_jR_{ijii}R_iR_jR_i = -R_{ji}R_jR_{ij}R_iR_jR_i = -R_{jijji}R_{iji} \\ &= -R_jR_j = \mathrm{Id}\,.\end{aligned}$$

Claramente, puesto que $\mathbb{H}$ es asociativa, σ fija a $\mathbb{H}$. Como el subespacio de elementos fijos por σ es una subálgebra, entonces se trata de $\mathbb{H}$ o de A. En el segundo caso se tiene que $(x,i,j) = 0\ \forall_{x\in A}$. Puesto que $i,j \in \mathrm{N_{alt}}(A)$ entonces $(x,i,j) = -(x,j,i) = -(i,x,j) = (j,x,i) = (i,j,x) = -(j,i,x) = 0$. Además, $(ij,x,i) = i(j,x,i) + (i,j,x)i + (i,jx,i) - (i,j,xi) = 0$ [43, p.136] y de modo análogo se puede llegar a probar que A es un $\mathbb{H}$-bimódulo. El argumento de la demostración de la Proposición 3.1.1 muestra que esto no es posible, por lo tanto $\sigma \neq \mathrm{Id}$. □

Sea

$$A = \mathbb{H} \oplus S(-1)$$

la descomposición de A en subespacios fundamentales para σ. Al ser σ un automorfismo, esta descomposición es una $\mathbb{Z}_2$-graduación. Tenemos también que

$$(xi)j = x(ji) \quad \forall_{i,j\in\mathbb{H},x\in S(-1)}$$

Lema 3.3.15. *Para cualesquiera $a,b \in \mathbb{H}$ y $x,y \in S(-1)$ se tiene que*

- $xa = \bar{a}x$,
- $(xa)b = x(ba)$,
- $a(bx) = (ba)x$,
- $(ax)(bx) = \bar{b}x^2a$ *con* $x^2 \in \mathbb{H}$,

donde $\bar{a}$ denota la imagen de a por la involución estándar de $\mathbb{H}$.

Demostración. Si se toma como C cualquier subálgebra de dimensión dos de $\mathbb{H}$, entonces, al ser $S(-1)$ estable por la multiplicación por elementos de $\mathbb{H}$, se sigue que también lo es por la multiplicación por elementos de C y que por lo tanto $S(-1) \subseteq V$. De este modo $xa = \bar{a}x \; \forall_{a \in \mathbb{H}}$.

La segunda igualdad se ha probado ya para ciertos i, j que definen el automorfismo de orden dos σ en el Lema 3.3.14. Primero probaremos que el automorfismo no depende de la elección de i y j, siempre que cumplan las hipótesis del Lema 3.3.14. En efecto, si cambiamos j por $j' = \alpha j + \beta ij$, con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
R_{j'i} R_{j'} R_i &= R_{(\alpha j + \beta ij)i} R_{\alpha j + \beta ij} R_i \\
&= \alpha^2 R_{ji} R_j R_i + \beta^2 R_j R_{ij} R_i + \alpha\beta R_i - \beta\alpha R_i \\
&= \alpha^2 R_{ji} R_j R_i + \beta^2 R_j R_{ij} R_i = (\alpha^2 + \beta^2) R_{ji} R_j R_i \\
&= \sigma.
\end{aligned}$$

Si en lugar de cambiar solamente j por j' cambiamos también i por otro i' entonces, tomando $z \in \mathbb{H}$ tal que $z^2 = -1$ y que $iz = -iz$, $i'z = -zi'$, $\sigma = R_{ji} R_j R_i = R_{zi} R_z R_i = R_{zi'} R_z R_{i'} = R_{j'i'} R_{j'} R_{i'}$.

Ahora que ya sabemos que $(xa)b = x(ba)$ para cualesquiera $i, j \in \mathbb{H}$ tales que $a^2 = b^2 = -1$ y $ab = -ba$, puesto que si a, b son linealmente dependientes la igualdad del enunciado es trivial, resulta sencillo probarlo para elementos a, b linealmente independientes. Por lo tanto la igualdad es cierta para cualesquiera a, b.

La tercera igualdad es una consecuencia inmediata de la primera y segunda.

En cuanto a la última igualdad, $(ax)(bx) = \bar{b}((ax)x) = \bar{b}(x^2 a) = \bar{b}x^2 a$, debido a que $S(-1) \subseteq V$. □

Se tiene ahora suficiente información para recuperar las álgebras que se están considerando en este apartado. Dada el álgebra de cuaternios $\mathbb{H}$ y $u \in \mathbb{H}$ se define $\mathbb{H}(u)$ como el espacio vectorial $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ con el producto dado por

$$(a, b)(c, d) = (ac + \bar{d}ub, da + b\bar{c}).$$

Proposición 3.3.16. *El álgebra $\mathbb{H}(u)$ es un álgebra de división si, y solamente si, u no es un número real positivo o nulo.*

Demostración. Podemos suponer que $u \neq 0$, ya que si $u = 0$ entonces $(0,1)(0,1) = (0,0)$. Sea $(a,b)(c,d) = (0,0)$ con $(a,b) \neq (0,0) \neq (c,d)$. Se tiene que $ac + \bar{d}ub = 0 = da + b\bar{c}$. Si $c = 0$ entonces $da = 0 = \bar{d}ub$, lo que implica que o bien $d = 0$ o bien $(a,b) = (0,0)$. En cualquier caso se obtiene una contradicción. Por lo tanto $c \neq 0$. Del mismo modo se puede suponer también que $a \neq 0$. Podemos despejar $b = -\frac{dac}{N(c)}$ y sustituirla en $ac + \bar{d}ub = 0$ para así obtener que $ac - \frac{\bar{d}udac}{N(c)} = 0$. Simplificando se tiene que $\bar{d}ud = N(c)$

$$u = N(c)N(d)^{-1}.$$

Por lo tanto u es un número real positivo o nulo si existen divisores de cero. El recíproco es sencillo, puesto que en el proceso de deducción que hemos llevado a cabo casi todas los pasos son equivalencias. □

Proposición 3.3.17. *Para cualquier $0 \neq v \in \mathbb{H}$ y $\lambda > 0$ se tiene que $\mathbb{H}(u) \cong \mathbb{H}(\lambda v^{-1}uv)$.*

Demostración. Identifiquemos $\mathbb{H} \times 0$ con $\mathbb{H}$ y $0 \times \mathbb{H}$ con $\mathbb{H}x$ donde $x = (0,1)$. Con estas identificaciones, la fórmula del producto en $\mathbb{H}(u)$ es $(a+bx)(c+dx) = (ac + \bar{d}ub) + (da + b\bar{c})x$. Si se cambiase x por $x' = vx$, con $0 \neq v \in \mathbb{H}$, el producto $(a + bx')(c + dx')$ quedaría $(ac + \bar{d}(x')^2b) + (da + b\bar{c})x'$. Puesto que $(x')^2 = (vx)(vx) = \bar{v}x^2v = N(v)v^{-1}uv$, entonces $\mathbb{H}(u) \cong \mathbb{H}(N(v)v^{-1}uv)$ que corresponde a la afirmación del enunciado. □

Esta proposición permite normalizar el elemento u que aparece en $\mathbb{H}(u)$, de modo que puede asumirse que su norma es uno.

Corolario 3.3.18. *Dados $u, u' \in \mathbb{H}$ con $N(u) = N(u') = 1$, se tiene que $\mathbb{H}(u) \cong \mathbb{H}(u')$ si y solamente si $T(u) = T(u')$.*

Demostración. Basta recordar que dos elementos no nulos $u, u' \in \mathbb{H}$ son conjugados si y solamente si $N(u) = N(u')$ y $T(u) = T(u')$. □

Proposición 3.3.19. *Si u es un número real negativo entonces $\mathbb{H}(u)$ es isomorfa a $\mathbb{O}$, mientras que si $u \notin \mathbb{R}$ entonces el núcleo alternativo generalizado de $\mathbb{H}(u)$ es $\mathbb{H}$.*

Demostración. Si u es un número real negativo entonces $\mathbb{H}(u) \cong \mathbb{H}(-1) \cong \mathbb{O}$. Sea u un número no real. Si el núcleo alternativo generalizado de $\mathbb{H}(u)$ no fuese $\mathbb{H}$, entonces existiría $(0,d)$ para cierto $0 \neq d \in \mathbb{H}$. De este modo

$$(0,d)(0,d)\cdot(0,d) = \begin{cases} (\bar{d}ud,0)(0,d) = (0,d\bar{d}ud) = N(d)(0,ud) \\ (0,d)\cdot(0,d)(0,d) = (0,d)(\bar{d}ud,0) = N(d)(0,\bar{u}d) \end{cases}$$

lo que implicaría que $\bar{u} = u$, lo que no es cierto. □

3.4. Álgebras de división con la propiedad de inversión a izquierda

Aunque se han visto las restricciones que el núcleo alternativo generalizado impone al producto en una estructura algebraica, quizás en el caso de álgebras de división existen otros tipos de clasificación que también son de interés. En esta sección desarrollamos un tipo de clasificación en esta línea. Sin embargo, será en el siguiente capítulo donde veamos que el estudio utilizando derivaciones ternarias es una extensión natural del estudio mediante el núcleo alternativo generalizado.

Una propiedad usual en álgebra asociativa es que si un operador de multiplicación es invertible entonces su inverso es de nuevo un operador de multiplicación del mismo tipo (a izquierda o a derecha).

A es un álgebra de división si los operadores de multiplicación a izquierda L_a y a derecha R_a son biyectivos para todo $a \neq 0$.

Definición 3.4.1. *Diremos que un álgebra de división verifica la propiedad de inversión a izquierda si el inverso del operador multiplicación a izquierda es otro operador multiplicación a izquierda, esto es*

$$L_a^{-1} \in L_A = \{L_x \mid x \in A\} \text{ para todo } 0 \neq a \in A.$$

Son ejemplos de álgebras de división que cumplen esta propiedad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$. En todas ellas se verifica que si $x \neq 0$ entonces $L_x^{-1} = L_{x^{-1}}$ y $R_x^{-1} = R_{x^{-1}}$, con $x^{-1} = \frac{\bar{x}}{n(x)}$.

Si A es un álgebra de división y $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in \mathrm{GL}(A)$ entonces podemos considerar el producto

$$x \circ y := \phi_1^{-1}(\phi_2(x)\phi_3(x)),$$

para el cual $L_x^{\circ} = \phi_1^{-1} L_{\phi_2(x)} \phi_3$ es biyectiva si $x \neq 0$ y $R_y^{\circ} = \phi_1^{-1} R_{\phi_3(y)} \phi_2$ es biyectiva si $y \neq 0$. Con este producto $(A, \circ)$ es álgebra de división. En el Teorema 3.4.5 se probará que todas las álgebra de división que cumplen la propiedad de inversión a izquierda se pueden describir de este modo.

Conviene recordar la identidad de Hua [27], que dice que para cualesquiera elementos x, y en un álgebra asociativa unitaria, tales que x, y, $xy-1$, sean invertibles, se cumple que

$$xyx = x - (x^{-1} + (y^{-1} - x)^{-1})^{-1}. \tag{3.2}$$

Si A es un álgebra de división con la propiedad de inversión a izquierda entonces podemos definir

$$\begin{aligned} S \colon A \setminus \{0\} &\rightarrow A \setminus \{0\} \\ a &\mapsto S(a) = a^{-1} \end{aligned}$$

determinada por $L_a^{-1} = L_{a^{-1}} = L_{S(a)}$. Claramente S es biyectiva, y verifica que $S^2 = \mathrm{Id}$.

Proposición 3.4.2. *Sea A un álgebra de división que cumple la propiedad de inversión a izquierda. Se tiene que $L_a L_b L_a \in L_A$ $\forall_{a,b \in A}$.*

Demostración. En el caso en que L_a, L_b y $L_a L_b - \mathrm{Id}$ sean invertibles, entonces la identidad de Hua proporciona el resultado. Si a o b son nulos, el resultado es inmediato. Finalmente si $L_a L_b - \mathrm{Id}$ no es inversible pero $a \neq 0 \neq b$ entonces $L_b - L_a^{-1}$ no es invertible, pero como $L_a^{-1} \in L_A$ esto significa que $L_b = L_a^{-1}$ y en tal caso el resultado es de nuevo inmediato. □

Nos gustaría sin embargo incluir una demostración alternativa que sirve solamente para álgebras reales de dimensión finita, y que descansa en nociones básicas de cálculo diferencial. Esto prueba en qué forma resultados obtenidos inicialmente de forma analítica, pueden rescatarse en un contexto más general mediante técnicas algebraicas como la identidad de Hua.

Lema 3.4.3. *Sea A un álgebra real de dimensión finita que satisface la propiedad de inversión a izquierda. Se tiene que $L_aL_bL_a \in L_A$ $\forall a, b \in A$.*

Demostración. Para $a \neq 0$ y b cualquiera en A consideramos la curva

$$\begin{array}{rcl} \gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) & \to & A \setminus \{0\} \to A \setminus \{0\} \\ t & \mapsto & L_{a-tb} \mapsto L_{a-tb}^{-1} \end{array}$$

donde ϵ es suficientemente pequeño como para que $0 \notin \{a - tb \mid t \in (-\epsilon, \epsilon)\}$. Puesto que esta aplicación es composición de diferenciables, entonces es diferenciable en $(-\epsilon, \epsilon)$, y cumple que $L_{a-tb}\gamma(t) = \mathrm{Id}$ por lo que $(L_a - tL_b)\gamma(t) = \mathrm{Id}$. Derivando esta expresión

$$-L_b\gamma(t) + (L_a - tL_b)\dot{\gamma}(t) = 0,$$

que para $t = 0$ es

$$\dot{\gamma}(0) = L_a^{-1}L_bL_a^{-1}.$$

Como $\gamma(t) \in L_A$, que es un subespacio vectorial de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(A)$, y por lo tanto es cerrado en la topología usual entonces $\dot{\gamma}(0) = \text{lím}_{h\to 0} \frac{\gamma(t)-\gamma(0)}{h}$ está en L_A, es decir,

$$L_a^{-1}L_bL_a^{-1} \in L_A \quad \forall 0 \neq a \in A \text{ y } \forall b \in A.$$

Al ser la aplicación S biyectiva, se tiene que $L_aL_bL_a \in L_A$ para cualesquiera a, b en A (si $a = 0$ el resultado es obvio). $\square$

Fijado $u \in A$ no nulo podemos definir un nuevo producto

$$x \star y = R_u^{-1}(x)L_u^{-1}(y),$$

que verifica que

- $e \star x = x = x \star e$ con $e = u^2$,
- $(L_a^\star)^{-1} = \left(L_u L^{-1}_{R_u^{-1}(x)} L_u\right) L_u^{-1} \in L_A^\star$ para todo $a \neq 0$.

Por lo tanto, salvo isotopía podemos suponer que A posee elemento identidad e.

Teorema 3.4.4. $(A, *)$ *es un álgebra de división alternativa.*

Demostración. Puesto que $L_a^\star L_b^\star L_a^\star \in L_A^*$, evaluando este operador en el elemento identidad e se tiene que

$$L_a^\star L_b^\star L_a^\star = L_{a\star(b\star a)}^\star.$$

Con $b = e$ se obtiene que $(A, \star)$ es un álgebra de división alternativa a izquierda. Por [43] se sigue que $(A, \star)$ es un álgebra de división alternativa. □

Centrémonos ahora en el caso real, donde se puede dar un paso más gracias al Teorema de Segre [42], que asegura que un álgebra real de división siempre posee algún elemento idempotente no nulo.

Teorema 3.4.5. *Sea A un álgebra real de división de dimensión finita. Se tiene que A satisface la propiedad de inversión a izquierda si, y solamente si, es isomorfa a un álgebra cuyo producto está dado por $\varphi(x) \star \sigma(y)$, donde $(A, \star)$ es un álgebra isomorfa a $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ o $\mathbb{O}$ con elemento identidad e, σ es un automorfismo de $(A, \star)$ tal que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$ y $\varphi \in \mathrm{GL}(A)$ es una aplicación lineal biyectiva que fija a e.*

Demostración. En la construcción anterior del producto $\star$, podemos comenzar con un idempotente u, ya que por el Teorema de Segre toda álgebra real de división finta posee idempotentes no nulos. Así pues, $e = u^2 = u$ es idempotente y el producto de A se recupera como

$$xy = R_e(x) \star L_e(y),$$

con $(A, \star)$ un álgebra alternativa de división de dimensión finita con elemento identidad e, es decir, $(A, \star)$ es isomorfa a $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ o $\mathbb{O}$. Sean $\varphi = R_e$ y $\sigma = L_e$, y observemos, ya que va a ser muy importante, que $\varphi(e) = e = \sigma(e)$.

La propiedad de inversión a izquierda se traduce en que $\sigma^{-1}\left(L_{\varphi(x)}^\star\right)^{-1} \sigma^{-1}\sigma \in L_A^\star$, es decir, existe $\phi \in \mathrm{GL}(A)$ tal que $\sigma^{-1} L_x^\star \sigma^{-1} = L_{\phi(x)}^\star$. Evaluando esta igualdad en e se obtiene que $\sigma^{-1}(x) = \phi(x)$. De este modo,

$$\sigma^{-1} L_x^\star \sigma = L_{\sigma^{-1}(x)}^\star$$

y σ es un automorfismo de $(A, \star)$.

Puesto que σ es un automorfismo, entonces $L_{\sigma^{-1}(x)}^\star \sigma^{-2} = \sigma^{-1} L_x^\star \sigma^{-1} = L_{\phi(x)}^\star = L_{\sigma^{-1}(x)}^\star$ implica que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$.

La afirmación recíproca es obvia, por lo que no la presentamos. □

3.4.1. Álgebras de división flexibles con la propiedad de inversión a izquierda

Puesto que la clasificación salvo isomorfismo de las álgebras que aparecen en el Teorema 3.4.5 parece ser excesivamente compleja, nos limitaremos a su clasificación imponiendo algunas identidades no muy restrictivas.

Teorema 3.4.6. *Sea A un álgebra real de división de dimensión finita que satisface la propiedad de inversión a izquierda. Si A es además flexible entonces, o bien A es un álgebra alternativa, o bien A es un álgebra para-Hurwtiz de dimensión dos.*

Demostración. Nos basaremos en la descripción del Teorema 3.4.5, pero para evitar la excesiva aparición del símbolo $\star$ asumiremos que es el producto de A el que denotaremos por $x \star y$, mientras que el del álgebra alternativa lo denotaremos simplemente por xy.

La identidad flexible es $(x \star y) \star x = x \star (y \star x)$. En términos del producto alternativo y de las aplicaciones φ y σ se tiene que

$$\varphi(\varphi(x)\sigma(y))\sigma(x) = \varphi(x)(\sigma\varphi(y)x). \tag{3.3}$$

Evaluando esta identidad en el elemento identidad $x = 1$ se tiene que $\varphi\sigma(y) = \sigma\varphi(y)$. Utilizando esta nueva relación y cambiando y por $\sigma(y)$ se obtiene que

$$\varphi(\varphi(x)y)\sigma(x) = \varphi(x)(\varphi(y)x).$$

Con $y = 1$ esta igualdad implica que

$$\varphi^2(x)\sigma(x) = \varphi(x)x.$$

Puesto que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$, entonces $A = S(1) \oplus S(-1)$ donde $S(\pm 1)$ denota el subespacio fundamental de valor propio ± 1 de σ. Si $x \in S(1)$ entonces se sigue que $\varphi^2(x)x = \varphi(x)x$, por lo que simplificando x se tiene que $\varphi^2(x) = \varphi(x)$. Por ser φ biyectivo concluimos que $\varphi(x) = x = \sigma(x)$. Si $\sigma(x) = -x$ entonces $-\varphi^2(x)x = \varphi(x)x$, y obtendríamos que $\varphi(x) = -x = \sigma(x)$. Concluimos pues que

$$\varphi = \sigma.$$

Volviendo a (3.3),

$$(xy)\sigma(x) = \sigma(x)(yx).$$

Linealizando en x se tiene que

$$(xy)\sigma(z) + (zy)\sigma(x) = \sigma(x)(yz) + \sigma(z)(yx).$$

Evaluando en $x = 1$ se logra $y\sigma(z) + zy = yz + \sigma(z)y$, o lo que es lo mismo

$$[y, \sigma(z) - z] = 0,$$

por lo que o bien $\dim A = 2$ o bien $\sigma = \mathrm{Id}$. En el primer caso $(A, \star)$ es isomorfa a $\mathbb{C}$ o a un álgebra para-Hurwitz de dimensión dos. En el segundo caso $(A, \star)$ es alternativa. $\square$

3.4.2. Álgebras de división de potencias tres asociativas con la propiedad de inversión a izquierda

Examinaremos ahora el caso más general en el que el álgebra cumpla la asociatividad de las terceras potencias. El resultado que alcanzamos es que una tal álgebra es nuevamente, o bien un álgebra alternativa, o bien un álgebra para-Hurwitz de dimensión dos. Sin embargo, es interesante observar que mientras que en la demostración del Teorema 3.4.6 no se ha necesitado extender escalares al cuerpo de los números complejos, en este caso una demostración sin esta extensión parece complicada. Se pone así de manifiesto la importancia de la descomposición de Peirce para resolver determinados problemas.

Como en el caso flexible, intercambiaremos la notación en la descripción del Teorema 3.4.5 de modo que el producto de A se denotará por $x \star y$, mientras que el del álgebra alternativa se denotará por xy. El elemento identidad del álgebra alternativa se denotará por e. De este modo

$$x \star y = \varphi(x)\sigma(y), \tag{3.4}$$

con $\varphi \in \mathrm{GL}(A)$, $\varphi(e) = e$ y $\sigma \in \mathrm{Aut}(A)$, $\sigma^2 = \mathrm{Id}$.

La asociatividad de terceras potencias en $(A, \star)$ es equivalente a

$$\varphi(\varphi(x)\sigma(x))\sigma(x) = \varphi(x)(\sigma(\varphi(x))x). \tag{3.5}$$

En lo que sigue se asumirá que $(A, \star)$ satisface la asociatividad de terceras potencias.

Lema 3.4.7. *Si $\sigma = \mathrm{Id}$ entonces el álgebra $(A, \star)$ definida por (3.4) es alternativa.*

Demostración. La asociatividad de terceras potencias se lee en este caso como

$$\varphi(\varphi(x)x)x = \varphi(x)(\varphi(x)x).$$

Puesto que A es alternativa entonces $\varphi(\varphi(x)x) = \varphi(x)^2$. Linealizando esta identidad obtenemos

$$\varphi(\varphi(y)x) + \varphi(\varphi(x)y) = \varphi(x)\varphi(y) + \varphi(y)\varphi(x).$$

Evaluando en $y = e$, y como $\varphi(e) = e$, se tiene que

$$\varphi(x) + \varphi^2(x) = \varphi(x) + \varphi(x),$$

lo que implica que $\varphi^2(x) = \varphi(x)$. Puesto que φ es biyectiva entonces necesariamente $\varphi = \mathrm{Id}$ y $(A, \star)$ es alternativa. □

Lema 3.4.8. *Sea A un álgebra real de dimensión menor o igual que dos que satisface la propiedad de inversión a izquierda. Si A satisface además la asociatividad de las terceras potencias entonces A es o bien un álgebra alternativa o un álgebra para-Hurwitz de dimensión dos.*

Demostración. Utilizaremos la descripción del producto de A dada por (3.4).

Evidentemente basta considerar el caso en que $\dim A = 2$. Por el Lema 3.4.7 también podemos suponer que $\sigma \neq \mathrm{Id}$. Puesto que $\dim A = 2$ entonces $A \cong \mathbb{C}$ los números complejos y necesariamente σ es la conjugación compleja. Sea i la unidad imaginaria. Se tiene que $\varphi(i) = \alpha_0 + \alpha_1 i$ con $\alpha_0, \alpha_i \in \mathbb{R}$. Evaluando (3.5) en $x = i$ se tiene que

$$\varphi((\alpha_0 + i\alpha_1)(-i)) = -\alpha_0^2 - \alpha_1^2.$$

Aplicando nuevamente que $\varphi(i) = \alpha_0 + i\alpha_1$ se obtiene que

$$\alpha_0\alpha_1 = 0 \quad \text{y} \quad \alpha_1^2 = -\alpha_1.$$

Puesto que $\alpha_1 \neq 0$, ya que sino φ no sería biyectiva, entonces $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_1 = -1$. Por lo tanto φ es la conjugación compleja. Queda probado pues que A es un álgebra para-Hurwitz de dimensión dos. □

Lema 3.4.9. *Sea A un álgebra real de división de dimensión finita que satisface la propiedad de inversión a izquierda cuyo producto viene descrito por (3.4). Si A satisface la asociatividad de terceras potencias entonces se tiene que*

$$\varphi\sigma = \sigma - \varphi + \mathrm{Id} \quad y \quad \sigma\varphi = \varphi^2 - 2\varphi + 2\sigma.$$

Demostración. Linealizando (3.5) y evaluando en $x = e$ se tiene que

$$\varphi^2 + \varphi\sigma + \sigma = \varphi + \sigma\varphi + \mathrm{Id}\,. \tag{3.6}$$

Fijemos ahora $b \in S(1;\sigma)$, un vector propio de σ de valor propio 1. Aplicando (3.6) se tiene que

$$\varphi^2(b) = \sigma\varphi(b). \tag{3.7}$$

Si aplicamos (3.6) a $\varphi(b)$ obtenemos que

$$\varphi^3(b) + \varphi^3(b) + \varphi^2(b) = \varphi^2(b) + \varphi(b) + \varphi(b),$$

de donde se sigue que $\varphi^3(b) = \varphi(b)$. Como φ es biyectiva entonces necesariamente $\varphi^2(b) = b$. Ahora bien, (3.7) implica en este caso que $\varphi(b) = b$.

Puesto que la imagen de $\sigma+\mathrm{Id}$ está contenida en $S(1;\sigma)$, entonces $(\varphi-\mathrm{Id})(\sigma+\mathrm{Id})=0$, es decir,

$$\varphi\sigma=\sigma-\varphi+\mathrm{Id}\,.$$

Sustituyendo el valor de $\varphi\sigma$ en (3.6) se tiene que

$$\sigma\varphi=\varphi^2-2\varphi+2\sigma.$$

□

Teorema 3.4.10. *Sea A un álgebra real de división de dimensión finita que satisface la propiedad de inversión a izquierda. Si A satisface además la asociatividad de terceras potencias entonces o bien A es alternativa o bien A es un álgebra para-Hurwitz de dimensión dos.*

Demostración. Utilizaremos la descripción de A del Teorema 3.4.5 pero con la notación de (3.4). El caso en que $\sigma=\mathrm{Id}$ o que la dimensión de A sea menor o igual que dos ya se ha tratado por lo que se asumirá que $\sigma\neq 1$ y que $\dim A\geq 4$.

Recordemos que se ha visto en la demostración del Lema 3.4.9, y es también consecuencia de que $\varphi\sigma=\sigma-\varphi+\mathrm{Id}$, que para cualquier $b\in S(1;\sigma)$ elemento fijo por σ se tiene que $\varphi(b)=b$.

Extendiendo escalares al cuerpo de los números complejos podemos encontrar una base estándar $\{e_1,e_2,u_1,v_1\}$ ($\dim A=4$) o $\{e_1,e_2,u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3\}$ ($\dim A=8$) tal que, o bien $\{e_1,e_2\}$ ($\dim A=4$), o bien $\{e_1,e_2,u_1,v_1\}$ ($\dim A=8$) sea una base de $S(1;\sigma)$. Una base de $S(-1;\sigma)$ sería $\{u_1,v_1\}$ ($\dim A=4$) o $\{u_2,u_3,v_2,v_3\}$ ($\dim A=8$). Linealizando (3.5) y evaluando en $x=e_1$ se tiene que

$$\varphi(\varphi(y)e_1)e_1+\varphi(e_1\sigma(y))e_1+e_1\sigma(y)=\varphi(y)e_1+e_1\sigma(\varphi(y))e_1+e_1y,$$

o equivalentemente

$$e_1\sigma(y)-e_1y=-\varphi(\varphi(y)e_1)e_1-\varphi(e_1\sigma(y))e_1+\varphi(y)e_1+e_1\sigma(\varphi(y))e_1.$$

Multiplicando a derecha por el idempotente e_1 obtenemos que

$$e_1\sigma(y)-e_1y=e_1\sigma(y)e_1-e_1ye_1\quad\forall_{y\in A}.$$

Evaluando en $y = u_i \in S(-1;\sigma)$ se tiene que

$$-2u_i = 0,$$

lo que no es posible. Esto prueba el resultado. $\square$

3.5. Anexo: otra aproximación al Teorema 3.4.5

La demostración del Teorema 3.4.5 hace uso del Teorema de Segre y de la clasificación de las álgebras alternativas y las álgebras de división alternativas a un lado. En este anexo presentamos otra aproximación usando solamente la representación de las álgebras de Clifford reales que conduce a un resultado más débil.

Sea A un álgebra real de división de dimensión finita que verifica la propiedad de inversión a izquierda. Por la Proposición 3.4.2, $L_aL_bL_a \in L_A \ \forall_{a,b\in A}$. Fijemos un elemento $0 \neq e \in A$. Cambiando el producto de A por el nuevo producto

$$xL_e^{-1}(y), \tag{3.8}$$

podemos asumir que A posee elemento identidad a izquierda e, por lo que $\mathrm{Id} \in L_A$. La Proposición 3.4.2 asegura entonces que $L_x^2, L_x^3 \in L_A \ \forall_{x\in A}$. La subálgebra de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(A)$ generada por L_x queda contenida en L_A y es un álgebra asociativa y conmutativa de dimensión finita sin divisores de cero, es decir, un cuerpo que necesariamente es isomorfo o bien a $\mathbb{R}$ o bien a $\mathbb{C}$. En cualquier caso, existe una ecuación cuadrática

$$L_x^2 - \mathrm{t}(x)L_x + \mathrm{n}(x)\,\mathrm{Id} = 0 \quad \forall_{x\in A}$$

de modo que $\mathrm{n}(\,)$ es una forma cuadrática definida positiva, $\mathrm{n}(e) = 1$ y $\mathrm{t}(e) = 2$.

Sea $V = \{x \in A \mid \mathrm{t}(x) = 0\}$, como $L_x^2 = -\mathrm{n}(x)\,\mathrm{Id} \ \forall_{x\in V}$, entonces la inclusión $x \mapsto L_x$ se extiende a un homomorfismo de álgebras

$$\mathrm{Clifford}(V, -\mathrm{n}(\,)) \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(A)$$

y A es un $\mathrm{Clifford}(V, -\mathrm{n}(\,))$–módulo irreducible.

La clasificación del álgebra de Clifford real de la forma cuadrática $x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2$ viene dada por la Tabla 3.1.

$p-q \mod 8$	$m=\frac{n}{2}$	$p-q \mod 8$	$m=\frac{n-1}{2}$
0	$M_{2^m}(\mathbb{R})$	1	$M_{2^m}(\mathbb{R}) \oplus M_{2^m}(\mathbb{R})$
2	$M_{2^m}(\mathbb{R})$	3	$M_{2^m}(\mathbb{C})$
4	$M_{2^{m-1}}(\mathbb{H})$	5	$M_{2^{m-1}}(\mathbb{H}) \oplus M_{2^{m-1}}(\mathbb{H})$
6	$M_{2^{m-1}}(\mathbb{H})$	7	$M_{2^m}(\mathbb{C})$

Tabla 3.1: Clasificación de las álgebras de Clifford reales ($n = p + q$).

Si denotamos por d la dimensión de A entonces $n := \dim V = d - 1$ y como además $p = 0$ encontramos las siguientes posibilidades para $\mathrm{Clifford}(V, -\mathrm{n}(\,))$

1. d impar (n par): se nos plantean dos posibilidades:

   - $\mathrm{Clifford}(V, -\mathrm{n}(\,)) \cong M_{2^m}(\mathbb{R})$ con lo que el único módulo irreducible tiene dimensión $2^{\frac{n}{2}}$ y $d = 2^{\frac{d-1}{2}}$, luego $d = 1$ y por tanto $A \cong \mathbb{R}$.
   - $\mathrm{Clifford}(V, -\mathrm{n}(\,)) \cong M_{2^{m-1}}(\mathbb{H})$ en este caso el módulo irreducible tendría dimensión $4{\cdot}2^{m-1} = 2^{m+1}$ y tendría que verificarse que $d = 2^{\frac{n+2}{2}} = 2^{\frac{d+1}{2}}$ lo que no es posible.

2. d par (n impar y $m = \frac{d-2}{2}$): las posibilidades para $\mathrm{Clifford}(V, -\mathrm{n}(\,))$ son

   - $M_{2^m}(\mathbb{R}) \oplus M_{2^m}(\mathbb{R})$: la dimensión de los módulos irreducibles es en este caso $2^{\frac{d-2}{2}} = d$, luego $d = 8$ y $\mathrm{Clifford}(V, -\mathrm{n}(\,)) = M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$
   - $M_{2^m}(\mathbb{C})$: en este caso $d = 2 \cdot 2^{\frac{d-2}{2}} = 2^{\frac{d}{2}}$. Si $d = 4$ entonces $n = 3 = q$ y $p - q \cong 5 \mod 8$ lo que no es posible (Tabla 3.1). Sí que es posible el caso $d = 2$ que implica que $\mathrm{Clifford}(V, -\mathrm{n}()) = \mathbb{C}$
   - $M_{2^{m-1}}(\mathbb{H}) \oplus M_{2^{m-1}}(\mathbb{H})$: ahora la dimensión de los módulos irreducibles es $4 \cdot 2^{\frac{d-4}{2}} = 2^{\frac{d}{2}} = d$ lo que implica que $d = 4$ y aparece el caso $M_1(\mathbb{H}) \oplus M_1(\mathbb{H}) = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$

Proposición 3.5.1. *Las únicas posibilidades para la dimensión de A son $d = 1, 2, 4$ u 8. Las posibilidades para las correspondientes álgebras de Clifford son:*

$$\mathbb{R}\ (d=1),\ \mathbb{C}\ (d=2),\ \mathbb{H}\oplus\mathbb{H}\ (d=4)\ \text{y}\ M_8(\mathbb{R})\oplus M_8(\mathbb{R})\ (d=8)$$

Sea ahora $*$ un producto en A de modo que $(A, *)$ es un álgebra Hurwitz con elemento identidad e y misma forma cuadrática $\mathrm{n}(\,)$. Los módulos irreducibles para $\mathrm{Clifford}(V, -\mathrm{n}(\,))$ se pueden construir como:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Clifford}(V, -n(\,)) & \to & \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(A) \\ x \in V & \mapsto & L_x^* \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{Clifford}(V, -n(\,)) & \to & \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(A) \\ x \in V & \mapsto & R_x^* \end{array}$$

En el caso en que $\dim A = 1, 2$ es obvio que ambos módulos son isomorfos, mientras que para $d = 4, 8$ se obtienen los dos módulos irreducibles no isomorfos entre sí. Existe pues, $f\colon A \to A$ lineal biyectiva tal que

$$f(L_x^*(y)) = L_x f(y) \quad \text{o} \quad f(R_x^*(y)) = L_x f(y)$$

para cualesquiera $x \in V$ e $y \in A$. Puesto que las igualdades son también ciertas para $x = e$ entonces la restricción $x \in V$ puede eliminarse. Tenemos pues que el producto en A se recupera a partir del producto del álgebra Hurwitz $(A, *)$ mediante o bien $xy = f(x * f^{-1}(y))$ o $xy = f(f^{-1}(y) * x)$, por lo que salvo isomorfismo o bien $xy = f(x) * y$ o $xy = y * f(x)$. Observando que $(A, *)$ es isomorfa a su opuesta tenemos que, salvo isomorfismo, el producto en A es de la forma $f(x) * y$ para una cierta aplicación lineal biyectiva f.

El producto que acabamos de describir no es realmente el de A ya que en (3.8) se hizo un cambio. Deshaciendo este cambio concluimos que existen f, g lineales biyectivas tales que

$$xy = f(x) * g(y) \quad \text{con} \quad gL_A^* g \subseteq L_A^*,$$

donde la condición en g es equivalente a la condición de inversión a izquierda para A. Es evidente que el Teorema 3.4.5 mejora esta descripción, ya que permite asumir que g es un automorfismo de cuadrado la identidad.

Se pueden caracterizar las aplicaciones g que cumplen la condición $gL_D^* g \subseteq L_D^*$, pero puesto que la demostración es demasiado técnica, en comparación con el carácter ilustrativo de este anexo, la obviaremos. Como ejemplo del tipo de caracterización que se logra asumamos, por ejemplo, que $(D, *)$ es un álgebra de octoniones. Cualquier componente de un automorfismo ternario de $(D, *)$, como por ejemplo g, se escribe de forma no necesariamente única como $L_b^* {R_a^*}^2 L_a^* \sigma$ para ciertos elementos a, b y un automorfismo σ. Puede probarse que la condición $gL_D^* g \subseteq L_D^*$ es equivalente a que g admita una descomposición $g = L_b^* {R_a^*}^2 L_a^* \sigma$ donde $\mathrm{n}(a) = 1$ y el automorfismo σ cumple que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$, $\sigma(a) \in \mathbb{R}\bar{a}$ y $\sigma(b) = a * b * a^{-1}$.

En breve.

Los resultados que hemos presentado en este capítulo relacionan las álgebras de división reales de dimensión finita con su núcleo alternativo generalizado.

Si la dimensión del álgebra es 4 aparecen tres familias no isomorfas: los cuaternios, $\mathbb{H}$, con $\mathrm{N_{alt}}(\mathbb{H})$ de dimensión 3, $Q_I(\mathbb{C}, u)$ y $Q_{II}(\mathbb{C}, u)$, cuyos núcleos alternativos generalizados tienen dimensión 2.

Para las álgebras de dimensión 8 hemos visto en el Teorema 3.3.6 que son de división flexibles con núcleo alternativo generalizado de dimensión mayor o igual que dos si y solamente si son isomorfas a un álgebra $\mathbb{O}(\lambda)$ para algún $\lambda > 0$. Además, $\mathbb{O}(\lambda)$ es isomorfa a los octoniones si y solamente si $\lambda = 1$.

Al considerar las álgebras cuyo núcleo alternativo generalizado tiene dimensión mayor que 2 hemos obtenido las álgebras $\mathbb{H}(u)$ que son de división si, y solamente si, u no es un número real positivo o nulo. Además la Proposición 3.3.19 dice que si u es un número real negativo entonces $\mathbb{H}(u)$ es isomorfa a $\mathbb{O}$, mientras que si $u \notin \mathbb{R}$ entonces el núcleo alternativo generalizado de $\mathbb{H}(u)$ es $\mathbb{H}$.

Un resultado importante de este Capítulo es el Teorema 3.4.5 que dice que dada un álgebra A real de división de dimensión finita, se tiene que A satisface la propiedad de inversión a izquierda si, y solamente si, es isomorfa a un álgebra cuyo producto está dado por $\varphi(x) \star \sigma(y)$, donde $(A, \star)$ es un álgebra isomorfa a $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ o $\mathbb{O}$ con elemento identidad e, σ es un automorfismo de $(A, \star)$ tal que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$ y $\varphi \in \mathrm{GL}(A)$ es una aplicación lineal biyectiva que fija a e.

Para estas álgebras reales de división de dimensión finita que satisfacen la propiedad de inversión a izquierda, hemos obtenido también que si además son flexibles (Teorema 3.4.6) o si satisfacen la asociatividad de terceras potencias (Teorema 3.4.10) entonces o bien son alternativas o bien son álgebras para–Hurwitz de dimensión 2.

Hemos terminado el Capítulo con un Anexo que recoge nuestra primera aproximación al Teorema 3.4.5, utilizando la clasificación de las álgebras de Clifford reales, por razones sentimentales además de científicas.

Capítulo 4

Álgebras de división reales de dimensión finita

Recordemos que un álgebra (no necesariamente asociativa) es de división si para todo $x \neq 0$ los operadores de multiplicación a izquierda, L_x y a derecha, R_x son invertibles. Milnor y Bott [34] y Kervaire [24] probaron que álgebras de división reales de dimensión finita solamente aparecen en dimensiones 1, 2, 4 y 8. La clasificación de estas álgebras está completamente desarrollada para dimensiones 1 y 2 [3, 8, 9, 10, 21, 40] pero sólo se conocen resultados parciales en dimensiones 4 y 8.

El objetivo de este capítulo es examinar la familia de las álgebras de división reales de dimensión finita usando sus derivaciones ternarias. Para ello empleamos la teoría de representación de las álgebras de Lie simples, lo que nos permite considerar únicamente las álgebras de división reales cuyas álgebras de Lie de derivaciones ternarias son no abelianas.

A pesar de esta restricción, la familia de álgebras de división reales de dimensión ocho es demasiado compleja para estudiarla globalmente con nuestras herramientas. Esto nos restringe a estudiar aquellas álgebras con una subálgebra simple de rango toral mayor o igual que dos en su álgebra de Lie de derivaciones ternarias.

El capítulo está estructurado como sigue. En la sección 4.1 demostramos que el rango toral de $\mathrm{Tder}(A)$ de un álgebra de división real de dimensión finita A está acotado superiormente por 2, 4, 5 ó 6, y la dimensión por 2, 4, 11 ó 30 respectivamente dependiendo de si la dimensión de A es 1, 2, 4 u 8. Estas dimensiones máximas se alcanzan en las órbitas de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$ respectivamente (Proposición 4.1.12).

Las álgebras de división reales de dimensión 1 y 2 son isótopas de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, luego la teoría completa es trivial en ambos casos.

En la Sección 4.2 estudiamos las álgebras de división reales de dimensión cuatro. El Teorema 4.2.1 muestra qué dos tipos de álgebras modelizan este caso.

La Sección 4.3 se dedica a las álgebras de división reales de dimensión ocho, donde cuatro tipos de álgebras parecen ser los modelos naturales (Teorema 4.3.1). De hecho todas las álgebras que aparecen son de división.

En la Sección 4.4 exploramos la familia de álgebras no asociativas dadas por (4.7). No solo el álgebra de Okubo muestra un comportamiento excepcional, también el álgebra construida a partir de $sl(4, F)$ con el producto conmutativo $xy + yx - \frac{1}{2}t(xy)I$ tiene un álgebra de derivaciones ternarias inusualmente grande (Proposición 4.4.1).

Denotaremos a los cuaternios y a los octoniones de traza cero como $\mathbb{H}_0$ y $\mathbb{O}_0$ respectivamente, $x \in \mathbb{O}$ se descompone como $x = \frac{1}{2}t(x) + x_0$ con $x_0 \in \mathbb{O}_0$, $t(x) = x + \bar{x}$ la traza de x y $x \mapsto \bar{x}$ la involución usual en $\mathbb{O}$. Identificaremos $\mathbb{C}$ con $\mathrm{span}\langle 1, i\rangle \subseteq \mathbb{O}$ y $\mathbb{H}$ con $\mathrm{span}\langle 1, i, j, ij\rangle \subseteq \mathbb{O}$. Aunque en general trataremos de evitarlo alguna vez usaremos la notación xPy para el producto de A. Cuando no usemos esta notación la opuesta y la adjunta de A se denotarán mediante A^{op} y A^* respectivamente. Aunque en algún momento usaremos A^* para el espacio vectorial dual de A, el significado estará claro por el contexto. Cuando un símbolo en particular como $\circ$ represente el producto de A trataremos de reflejarlo en los operadores de multiplicación escribiendo L_a° (resp. R_a°) en lugar de L_a (resp. R_a). Las descomposiciones de productos tensoriales de módulos se han obtenido de [7].

4.1. Derivaciones ternarias

A lo largo de esta sección A denotará un álgebra de división real de dimensión finita. Es conveniente recordar que esto implica que $xA = A = Ax$ y $\dim xS = \dim S = \dim Sx$ para todo $0 \neq x \in A$ y todo subespacio S, como es habitual $xS = \{xa \mid a \in S\}$ y $Sx = \{ax \mid a \in S\}$. También hay que recordar que para álgebras unitarias las componentes de cualquier derivación ternaria (d_1, d_2, d_3) están relacionadas por

$$d_1 = d_2 + R_{d_3(1)} \quad \text{y} \quad d_1 = d_3 + L_{d_2(1)}. \tag{4.1}$$

Las derivaciones ternarias de cualquier álgebra unitaria asociativa B son

$$\{(d, d, d) \mid d \in \mathrm{Der}(B)\} + \langle (L_b, L_b, 0), (R_b, 0, R_b) \mid b \in B \rangle.$$

En particular, $\mathrm{Tder}(\mathbb{R})$ es un álgebra de Lie abeliana de dimensión dos, $\mathrm{Tder}(\mathbb{C})$ es un álgebra de Lie abeliana de dimensión cuatro y $\mathrm{Tder}(\mathbb{H}) \cong su(2) \oplus su(2) \oplus su(2) \oplus \langle (\mathrm{Id}, \mathrm{Id}, 0), (0, \mathrm{Id}, \mathrm{Id}) \rangle$, con $su(2)$ la forma compacta de $sl(2, \mathbb{C})$, que es isomorfa a los cuaternios de división de traza cero con el producto conmutador. Las derivaciones ternarias de cualquier álgebra alternativa con unidad B, sobre un cuerpo de característica $\neq 3$, son

$$\{(d, d, d) \mid d \in \mathrm{Der}(B)\} + \langle (L_b, T_b, -L_b), (R_b, -R_b, T_b) \mid b \in B \rangle.$$

En el caso de los octoniones esto nos da

$$\mathrm{Tder}(\mathbb{O}) \cong D_4 \oplus \langle (\mathrm{Id}, \mathrm{Id}, 0), (\mathrm{Id}, 0, \mathrm{Id}) \rangle,$$

con D_4 el álgebra de Lie compacta de tipo D_4 [29].

Para cualquier álgebra de división de dimensión finita podemos obtener una isótopa unitaria mediante

$$x \circ y = R_v^{-1}(x) L_u^{-1}(y), \tag{4.2}$$

para la que el elemento uv juega el papel de unidad. Como salvo isomorfismos las únicas álgebras de división unitaria reales de dimensión 1 o 2 son $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, entonces cualquier álgebra de división de dimensión 1 o 2 es una isótopa de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Su álgebra de derivaciones ternarias es un álgebra de Lie abeliana de dimensión 2 o 4.

4.1.1. La estructura de $\mathrm{Tder}(A)$

Los resultados siguientes son equiparables a los que aparecen en [5], si bien se refieren a conceptos diferentes.

Dado $d \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ siempre existen $d_s, d_n \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ tales que $d = d_s + d_n$, con d_s semisimple, d_n nilpotente y $[d_s, d_n] = 0$. Es lo que se conoce como descomposición de Jordan–Chevalley [5]. Dada $(d_1, d_2, d_3) \in \mathrm{Tder}(A)$ cada una de las componentes de puede escribir como $d_i = (d_i)_s + (d_i)_n$. Llamaremos parte semisimple (respectivamente nilpotente) de (d_1, d_2, d_3) a $((d_1)_s, (d_2)_s, (d_3)_s)$ (respectivamente $((d_1)_n, (d_2)_n, (d_3)_n)$).

Lema 4.1.1 ([36]). $\mathrm{Tder}(A)$ *contiene las partes semisimple y nilpotente de todos sus elementos.*

Proposición 4.1.2. *Todo elemento de* $\mathrm{Tder}(A)$ *es semisimple.*

Demostración. Tanto la parte semisimple como la nilpotente de los elementos de $\mathrm{Tder}(A)$ son a su vez derivaciones ternarias de A, por lo que para demostrar el teorema lo que hemos de probar es que la única derivación ternaria nilpotente de A es $(0, 0, 0)$.

Sea $(d_1, d_2, d_3) \in \mathrm{Tder}(A)$ con $d_i^{n_i} = 0$ y $d_i^{n_i-1} \neq 0$ para algún $n_i \geq 1$ ($i = 1, 2, 3$). En caso de que $n_2 = 1$ entonces para algún $0 \neq y \in \ker(d_3)$ (recordemos que los d_i son nilpotentes) y algún $x \in A$, $d_1(xy) = xd_3(y) = 0$ luego $d_1 = 0$ y por tanto $(d_1, d_2, d_3) = (0, 0, 0)$. El mismo argumento se puede aplicar cuando $n_3 = 1$, por lo que podemos suponer que $n_2, n_3 \geq 2$. En este caso

$$d_1^{n_2+n_3-2}(xy) = \binom{n_2 + n_3 - 2}{n_2 - 1} d_2^{n_2-1}(x) d_3^{n_3-1}(y)$$

implica que $A = Ay \subseteq \ker(d_1^{n_2+n_3-2})$ para algún $0 \neq y \in \ker(d_3^{n_3-1})$, luego $d_1^{n_2+n_3-2} = 0$. Por tanto $0 = d_2^{n_2-1}(x) d_3^{n_3-1}(y)$ para todo $x, y \in A$. Eligiendo $x \notin \ker(d_2^{n_2-1})$ e $y \notin \ker(d_3^{n_3-1})$ obtenemos una contradicción. □

Corolario 4.1.3. $\mathrm{Tder}(A)$ *es abeliana o* $\mathrm{Tder}(A) = \mathrm{Tder}(A)' \oplus \mathcal{Z}$*, con* $\mathrm{Tder}(A)' = [\mathrm{Tder}(A), \mathrm{Tder}(A)]$ *álgebra de Lie semisimple compacta y* $\mathcal{Z}$ *el centro de* $\mathrm{Tder}(A)$*.*

El espacio

$$\mathcal{Z}_0 = \langle (\mathrm{Id}, \mathrm{Id}, 0), (\mathrm{Id}, 0, \mathrm{Id}) \rangle \tag{4.3}$$

siempre pertenece al centro de $\mathrm{Tder}(A)$. Usaremos esta notación en adelante.

4.1.2. Trialdad

La proyección de $\mathrm{Tder}(A)$ en la i–ésima componente

$$\begin{aligned} \pi_i \colon \mathrm{Tder}(A) &\to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(A) \\ (d_1, d_2, d_3) &\mapsto d_i \end{aligned}$$

es una representación de $\mathrm{Tder}(A)$. Entonces A se puede considerar un $\mathrm{Tder}(A)$–módulo de tres maneras, probablemente no isomorfas, A_1, A_2 y A_3. El producto en A es un homomorfismo

$$\begin{aligned} A_2 \otimes A_3 &\to A_1 \\ x \otimes y &\mapsto xy \end{aligned}$$

de $\mathrm{Tder}(A)$–módulos. Esta situación es comparable con el principio de trialdad local en $\mathbb{O}$, dónde estos módulos corresponden a las representaciones natural y espines de D_4 [25].

Lema 4.1.4. *Dada una subálgebra* $S \leq \mathrm{Tder}(A)$ *tal que* $A_2 \cong A_1 \cong A_3$ *como* S*–módulos, podemos cambiar el producto en* A *de modo que una copia isomorfa a* S *actúe como derivaciones.*

Demostración. Si $A_2 \cong A_1 \cong A_3$ como S–módulos, entonces fijados los isomorfismos $\varphi_2 \colon A_1 \to A_2$ y $\varphi_3 \colon A_1 \to A_3$, tenemos que $\varphi_2(d_1(x)) = d_2(\varphi_2(x))$ y $\varphi_3(d_1(x)) = d_3(\varphi_3(x))$ para todo $(d_1, d_2, d_3) \in S$. Por la Proposición 1.4.3 podemos cambiar A por $(A, \circ)$, con $x \circ y = \varphi_2(x)\varphi_3(y)$, donde una copia isomorfa a S actúa como derivaciones. $\square$

Como las derivaciones de las álgebras de división reales son conocidas, este truco será útil.

Para usar modelos concretos de S, A_1, A_2 y A_3, tenemos que continuar con estas manipulaciones. De nuevo fijamos una subálgebra $S \subseteq \mathrm{Tder}(A)$. Dado un espacio vectorial B con tres estructuras de S–módulo, B'_1, B'_2 y B'_3, representaciones ρ_1, ρ_2 y ρ_3, e isomorfismos $\varphi_i\colon B'_i \to A_i$ como S–módulos, podemos definir un producto en B mediante $x \circ y = \varphi_1^{-1}(\varphi_2(x)\varphi_3(y))$. S es isomorfa a la subálgebra $\{(\rho_1(\underline{d}), \rho_2(\underline{d}), \rho_3(\underline{d})) \,|\, \underline{d} \in S\}$ de $\mathrm{Tder}(B, \circ)$ y las tres estructuras de módulo inducidas en el álgebra B por las proyecciones de esta subálgebra son exactamente $B_1 = B'_1$, $B_2 = B'_2$ y $B_3 = B'_3$. Por tanto, salvo isotopía, podemos identificar A_i con B_i y S con $\{(\rho_1(\underline{d}), \rho_2(\underline{d}), \rho_3(\underline{d})) \,|\, \underline{d} \in S\}$.

Basamos nuestro estudio en la existencia de subálgebras grandes, $S \subseteq \mathrm{Tder}(A)$, y las descomposiciones posibles de A_1, A_2 y A_3 como S–módulos. Para poder reducir el número de posibilidades, usamos un argumento de permutaciones que dice que el papel que juegan A_1, A_2 y A_3 se puede intercambiar considerando otra álgebra en la órbita de A por la acción del correspondiente $\mathcal{G}(A)$ ([1]).

Por ejemplo, S es isomorfa a $\{(d_1, d_3, d_2) \,|\, (d_1, d_2, d_3) \in S\}$, una subálgebra de $\mathrm{Tder}(A^{\mathrm{op}})$. Por tanto, una subálgebra isomorfa a S actúa como derivaciones ternarias de A^{op} y las tres estructuras de módulo para esta subálgebra inducida en A^{op} son $A_1^{\mathrm{op}} = A_1, A_2^{\mathrm{op}} = A_3$ y $A_3^{\mathrm{op}} = A_2$.

Para intercambiar el papel de A_1 y A_3 suponemos que S es semisimple y consideramos cualquier forma bilineal, $(\, , \,)$, simétrica no degenerada en A. S es isomorfa a $\{(-d_3^*, d_2, -d_1^*) \,|\, (d_1, d_2, d_3) \in S\}$, una subálgebra de $\mathrm{Tder}(A^*)$. Las tres estructuras de módulo para esta subálgebra inducidas en A^* son $A_1^* \cong (A_3)^*$ el módulo dual de A_3, $A_2^* = A_2$ y $A_3^* \cong (A_1)^*$ el módulo dual de A_1. Como cualquier módulo finito–dimensional de un álgebra de Lie semisimple compacta es autodual [37] entonces $A_1^* = A_3$, $A_2^* = A_2$ y $A_3^* = A_1$.

El núcleo de las proyecciones π_i también es relevante. El núcleo de, por ejemplo π_1, es $\{(0, d_2, d_3) \in \mathrm{Tder}(A)\}$. El isomorfismo inducido en las derivaciones terna-

[1] recordar la Sección 1.4

rias cuando pasamos de (A, P) a una isótopa $(A, P^{\underline{\varphi}})$ con $\underline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ envía $(0, d_2, d_3)$ a $(0, \varphi_2^{-1} d_2 \varphi_2, \varphi_3^{-1} d_3 \varphi_3)$, luego el núcleo de la primera proyección de $\mathrm{Tder}((A, P^{\underline{\varphi}}))$ es isomorfo al de la primera proyección de $\mathrm{Tder}((A, P))$. Entonces por (4.2) para estudiar este núcleo podemos asumir que A es unitaria. Por (4.1), $(0, d_2, d_3) \in \mathrm{Tder}(A)$ si y sólo si $(0, d_2, d_3) = (0, R_a, -L_a)$ con $a \in \mathrm{N_m}(A)$ el núcleo asociativo central de A, una subálgebra asociativa de A. El núcleo $\ker \pi_1$ es isomorfo por tanto a $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{C}^-$ o $\mathbb{H}^-$, dónde A^- representa es álgebra de Lie obtenida de A cuando tomamos el producto $[x, y] = xy - yx$.

Lema 4.1.5. *A_i siempre es un módulo fiel para cualquier subálgebra semisimple de $\mathrm{Tder}(A)$ que no contenga ideales isomorfos a $su(2)$.*

Lema 4.1.6. *Si $\dim A = 4$ y $\mathrm{Tder}(A)' \cap \ker \pi_i \neq 0$ entonces $\ker \pi_i \cong su(2)$ y A es isótopa a $\mathbb{H}$.*

4.1.3. Cota superior del rango toral de $\mathrm{Tder}(A)$

En esta subsección T denota una subálgebra toral de $\mathrm{Tder}(A)$ que contiene a las derivaciones ternarias $(\mathrm{Id}, \mathrm{Id}, 0)$ y $(\mathrm{Id}, 0, \mathrm{Id})$.

Como vimos en la Subsección 4.1.2, el núcleo de la proyección en la segunda componente de $\mathrm{Tder}(A)$ es isomorfo a $\mathbb{R}^-, \mathbb{C}^-$ o $\mathbb{H}^-$. La dimensión de cualquier subespacio de elementos que conmutan en estas álgebras es como mucho 2, por lo que $\dim T \cap \ker(\pi_2) \leq 2$. Definiendo

$$T^2 = \{d_2 \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(A) \,|\, \exists d_1, d_3 \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(A) \text{ tal que } (d_1, d_2, d_3) \in T\},$$

tenemos que

$$\dim T \leq \dim T^2 + 2.$$

Como T^2 está formado por aplicaciones lineales semisimples que conmutan podemos encontrar una base de A tal que la matriz coordenada de cualquier elemento

d de T^2 tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(d) & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \alpha_r(d) & & & & & & \\ & & & \beta_1(d) & \lambda_1(d) & & & & \\ & & & -\lambda_1(d) & \beta_1(d) & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \beta_s(d) & \lambda_s(d) \\ & & & & & & -\lambda_s(d) & \beta_s(d) \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

para ciertas aplicaciones lineales $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, $\beta_1, \ldots, \beta_s$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \colon T^2 \to \mathbb{R}$ con $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \neq 0$. Sea $\{v_1, \ldots, v_r, w_1', w_1'', \ldots, w_s', w_s''\}$ una tal base.

Lema 4.1.7. *Existe* $0 \neq e \in A$ *tal que el subespacio* $T_0^2 = \{d_2 \in T^2 \mid d_2(e) = 0\}$ *verifica*

$$\dim T \leq \dim T_0^2 + 4.$$

Demostración. Distinguimos dos casos dependiendo de r. Si $r > 0$, entonces la dimensión del núcleo de α_1 es al menos $\dim T^2 - 1$ y cualquier $d_2 \in \ker(\alpha_1)$ anula v_1. Definiendo $e = v_1$, obtenemos que $\dim T \leq \dim T^2 + 2 \leq \dim T_0^2 + 3$. En caso de que $r = 0$, nos fijamos en $\ker(\beta_1)$ y $\ker(\lambda_1)$. La dimensión de $\ker(\beta_1) \cap \ker(\lambda_1)$ es al menos $\dim T^2 - 2$ y cualquiera de sus elementos anula w_1' (y w_1'' de hecho). Con $e = w_1'$ obtenemos el resultado. □

El nuevo elemento unidad, e

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que A es unitaria. Consideramos e y T_0^2 como en el Lema 4.1.7 y definimos

$$x \circ y = xL_e^{-1}(y).$$

El elemento e se convierte en la unidad de $(A, \circ)$. La aplicación

$$\begin{aligned} \psi \colon \operatorname{Tder}(A) &\to \operatorname{Tder}(A, \circ) \\ (d_1, d_2, d_3) &\mapsto (d_1, d_2, L_e d_3 L_e^{-1}) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de álgebras de Lie. La subálgebra toral T corresponde a $\psi(T)$; la proyección de T en la segunda componente, T_2 es igual que la proyección en la segunda componente de $\psi(T)$, denotada por $\psi(T)^2$, y $T_0^2 = \{d_2 \in T^2 \mid d_2(e) = 0\} = \psi(T)_0^2$. Como nuestro objetivo es acotar la dimensión de T_0^2 entonces no hay pérdida de generalidad en la siguiente

Suposición: el elemento e del Lema 4.1.7 es la unidad de A.

La principal ventaja de esta suposición sobre e es que para cada $d_2 \in T_0^2$ y d_1, d_3 con $(d_1, d_2, d_3) \in T$ la ecuación (4.1) implica que $d_1 = d_3$.

Cota del rango toral de $\mathrm{Tder}(A)$

Fijamos una base $\{v_1, \ldots, v_r, w_1', w_1'', \ldots, w_s', w_s''\}$ tal que la matriz coordenada de los elementos de T tenga la forma canónica (4.4).

Proposición 4.1.8. *Tenemos que:*

i) $\dim A = 4$ *implica* $\dim T \leq 5$,

ii) $\dim A = 8$ *implica* $\dim T \leq 7$.

Demostración. La afirmación es inmediata una vez que probemos que las restricciones de $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s$ a T_0^2 se anulan. En ese caso, la aplicación $T_0^2 \to \mathbb{R}^s$ $d \mapsto (\lambda_1(d), \ldots, \lambda_s(d))$ es inyectiva, luego $\dim T_0^2 \leq s \leq 2$ ($\dim A = 4$) o $\dim T_0^2 \leq s \leq 4$ ($\dim A = 8$). Las posibilidades $\dim T_0^2 = 2$ y $\dim T_0^2 = 4$ implican que existen elementos en T_0^2 sin valores propios reales, lo que es falso (e pertenece al núcleo de cualquier elemento de T_0^2). La cota se sigue del Lema 4.1.7.

Probemos que $\alpha_1(d_2) = \cdots = \alpha_r(d_2) = 0$ para todo $d_2 \in T_0^2$. En otro caso, consideramos $d_2 \in T_0^2$ con $\alpha_1(d_2) \neq 0$. Tomamos d_1 con $(d_1, d_2, d_1) \in \mathrm{Tder}(A)$. Como $d_2 \neq 0$ entonces $d_1 \neq 0$ y podemos elegir un vector propio $x \in \hat{A} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} A$ de d_1 (usamos la misma notación para la extensión natural de d_1 al álgebra $\hat{A}$) con un valor propio no nulo $\lambda \in \mathbb{C}$. En $\hat{A}$ tenemos

$$d_1(v_1 x) = d_2(v_1)x + v_1 d_1(x) = (\alpha_1(d_2) + \lambda) v_1 x.$$

Como la multiplicación por v_1 es biyectiva, entonces v_1x es un vector propio de d_1 con valor propio $\alpha_1(d_2)+\lambda$. Reiterando tenemos que $m\alpha_1(d_2)+\lambda$ es un valor propio de d_1 para todo natural m, lo que es imposible. Por lo tanto $\alpha_1(d_2)=0$ para todo $d_2\in T_0^2$. El mismo argumento sirve para $\alpha_2,\dots,\alpha_r$.

Finalmente probemos que $\beta_1(d_2)=\cdots=\beta_s(d_2)=0$ para todo $d_2\in T_0^2$. De nuevo suponemos que existe $d_2\in T_0^2$ con $\beta_1(d_2)\neq 0$, y consideramos $0\neq d_1$ con $(d_1,d_2,d_1)\in \mathrm{Tder}(A)$. Los elementos $w_1'\pm iw_1''\in\hat{A}$ son vectores propios de d_2 de valores propios $\beta_1(d_2)\pm i\lambda_1(d_2)$ respectivamente. Dado un vector propio x de d_1 con valor propio no nulo $\lambda\in\mathbb{C}$, entonces $d_1((w_1'\pm iw_1'')x)=(\beta_1(d_2)\pm i\lambda_1(d_2)+\lambda)(w_1'\pm iw_1'')x$. Por tanto

$$0\neq w_1'x\in\hat{A}_{\beta_1(d_2)+i\lambda_1(d_2)+\lambda}+\hat{A}_{\beta_1(d_2)-i\lambda_1(d_2)+\lambda},$$

donde $\hat{A}_\zeta$ denota el espacio de vectores propios de d_1 de valor propio ζ. Iterando el proceso, tenemos que para cada número natural m existe k tal que el subespacio $\hat{A}_{m\beta_1(d_2)+ki\lambda_1(d_2)+\lambda}$ no es nulo, lo que no es posible. Entonces $\beta_1(d_2)=0$ para todo $d_2\in T_0^2$. El mismo argumento funciona para $\beta_2,\dots,\beta_s$. $\square$

Teorema 4.1.9. *Tenemos que*

i) $\dim A=4$ *implica que el rango toral de* $\mathrm{Tder}(A)$ *es como máximo* 5*,*

ii) $\dim A=8$ *implica que el rango toral de* $\mathrm{Tder}(A)$ *es como máximo* 6*.*

Demostración. Supongamos que la dimensión de A es 8 y el rango toral de $\mathrm{Tder}(A)$ es 7. Entonces todas las desigualdades de la demostración de la Proposición 4.1.8 deben ser igualdades, y por tanto

1) $\dim T=\dim T^2+2$ y $\dim T\cap\ker(\pi_2)=2$,

2) $\dim T^2=\dim T_0^2+2$ y

3) $\dim T_0^2=3$.

La igualdad 3) y la demostración de la Proposición 4.1.8, nos dicen que podemos tener una base de A en la que la matriz coordenada de cualquier $d \in T_0^2$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & \lambda_1(d) & & & & \\ & & -\lambda_1(d) & 0 & & & & \\ & & & & 0 & \lambda_2(d) & & \\ & & & & -\lambda_2(d) & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \lambda_3(d) \\ & & & & & & -\lambda_3(d) & 0 \end{pmatrix}$$

y la aplicación $T_0^2 \to \mathbb{R}^3$, dada por $d \mapsto (\lambda_1(d), \lambda_2(d), \lambda_3(d))$, es un isomorfismo. Entonces podemos elegir $d \in T_0^2$ con $\dim \ker(d) = 6$. Veamos en varios pasos que esto es imposible.

Paso 1. Sea $0 \neq d'$ tal que $(d', d, d') \in T$. Para todo $\mu \in \mathbb{C}$ consideramos $A_\mu = \{v \in A \mid (d' - \mu \operatorname{Id})(d' - \bar{\mu} \operatorname{Id})(v) = 0\}$, donde $\bar{\mu}$ es el conjugado complejo de μ, entonces $A_\mu = A_{\bar{\mu}}$, por lo que $A = \sum_{\mu \in \mathbb{C}} A_\mu$. Ahora, $d'(xy) = xd'(y)$ para todo $x \in \ker(d)$ implica que $\ker(d)A_\mu \subset A_\mu$, entonces $\dim A_\mu \geq 6$ para todo $A_\mu \neq 0$. Contando dimensiones, tenemos que $A = A_\mu$ para algún $\mu \neq 0$. Restando un múltiplo real de $(\operatorname{Id}, 0, \operatorname{Id})$ a (d', d, d'), podemos suponer que $\mu \in \mathbb{R}i$, y dividiendo (d', d, d') por la norma de μ, también podemos suponer que $\mu = i$, por lo que $(d')^2 = -\operatorname{Id}$.

Paso 2. $\ker(\pi_2) \cap T = \{(R_a, 0, R_a) \in T \mid a \in \mathrm{N_r}(A)\}$ y $\mathrm{N_r}(A) \cong \mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$. Salvo múltiplos escalares, restando un múltiplo escalar de $(\operatorname{Id}, 0, \operatorname{Id})$ a $(R_a, 0, R_a)$, por la identidad 1) podemos elegir $(R_a, 0, R_a) \in T$ con $R_a^2 = -\operatorname{Id}$.

Paso 3. (d', d, d') y $(R_a, 0, R_a)$ pertenecen a la subálgebra toral T, luego $[d', R_a] = 0$. En particular, $(d' - R_a)(d' + R_a) = (d')^2 - R_a^2 = -\operatorname{Id} + \operatorname{Id} = 0$. Cambiando a por $-a$, podemos elegir $0 \neq v \in A$ que se anule por $d'' = d' + R_a$. La aplicación d'' tiene en común con d' que $(d'', d, d'') \in T$ (luego $d'' \neq 0$) pero $\ker(d'') \neq 0$. Comenzando el primer paso con d'' en lugar de d' llegamos a una contradicción. $\square$

Las derivaciones ternarias $(\operatorname{Id}, \operatorname{Id}, 0)$ y $(\operatorname{Id}, 0, \operatorname{Id})$ pertenecen a cualquier subálgebra toral maximal.

Corolario 4.1.10. *El rango toral de* $\mathrm{Tder}(A)' = [\mathrm{Tder}(A), \mathrm{Tder}(A)]$ *es como mucho* 3 *(*$\dim A = 4$*) ó* 4 *(*$\dim A = 8$*).*

4.1.4. Álgebras con $\mathrm{Tder}(A)$ de dimensión máxima

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que A es unitaria. Para acotar la dimensión de $\mathrm{Tder}(A)$ definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \epsilon\colon \mathrm{Tder}(A) &\rightarrow A \times A \\ (d_1, d_2, d_3) &\mapsto (d_2(1), d_3(1)) \end{aligned} \tag{4.5}$$

cuyo núcleo, $\ker(\epsilon) = \{(d_1, d_2, d_3) \in \mathrm{Tder}(A) \mid d_1 = d_2 = d_3\}$, es isomorfo a $\mathrm{Der}(A)$ el álgebra de derivaciones de A.

Proposición 4.1.11. *Se verifica que*

i) $\dim A = 1$ *implica que* $\dim \mathrm{Tder}(A) = 2$*,*

ii) $\dim A = 2$ *implica que* $\dim \mathrm{Tder}(A) = 4$*,*

iii) $\dim A = 4$ *implica que* $\dim \mathrm{Tder}(A) \leq 11$*,*

iv) $\dim A = 8$ *implica que* $\dim \mathrm{Tder}(A) \leq 30$*.*

Demostración. Claramente $\dim \mathrm{Tder}(A) \leq \dim(A \times A) + \dim \ker(\epsilon) = 2 \dim A + \dim \mathrm{Der}(A)$. Las cotas se derivan de las correspondientes cotas de $\dim \mathrm{Der}(A)$ en [5], que vienen dadas por el Teorema 1.5.1. □

Recordar, [6], que para cada dimensión $\equiv 0, 1, 3 \mod 4$ existe, salvo isomorfismo, un único $su(2)$–módulo irreducible. El de dimensión $2m + 1$, $W(2m)$, es absolutamente irreducible y $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W(2m) \cong V(2m)$. $V(2n - 1)$ en dimensión $4n$ –el $sl(2, \mathbb{C})$–módulo complejo $V(2n - 1)$ visto como $su(2)$–módulo real– verifica $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V(2n - 1) \cong V(2n - 1) \oplus V(2n - 1)$, luego $\mathrm{End}_{su(2)}(V(2n - 1)) \cong \mathbb{H}$. Todo $su(2)$–módulo fiel de dimensión 4 es isomorfo o bien a $W(0) \oplus W(2)$ o bien a $V(1)$.

Ambos casos son fácilmente identificables porque $\mathrm{End}_{su(2)}(W(0) \oplus W(2)) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ y $\mathrm{End}_{su(2)}(V(1)) \cong \mathbb{H}$.

Proposición 4.1.12. *Tenemos que:*

i) Si $\dim A = 4$ *entonces* $\dim \mathrm{Tder}(A) = 11$ *si y sólo si* A *es isótopa a los cuaternios* $\mathbb{H}$.

ii) Si $\dim A = 8$ *entonces* $\dim \mathrm{Tder}(A) = 30$ *si y sólo si* A *es isótopa a los octoniones* $\mathbb{O}$.

Demostración. Supongamos que $\dim A = 4$ y $\dim \mathrm{Tder}(A) = 11$. Usando esta dimensión, la cota del rango toral de $\mathrm{Tder}(A)$ y las posibles dimensiones de las álgebras de Lie semisimples de rango toral ≤ 3, es fácil concluir que las únicas posibilidades son $\mathrm{Tder}(A)' \cong su(2) \oplus su(2) \oplus su(2)$ y $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0$ o $\mathrm{Tder}(A)' \cong su(3)$ y $\dim \mathcal{Z} = 3$. En el último caso $\mathrm{Tder}(A)' \cap \ker \pi_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$, ya que $su(3)$ no tiene representaciones de dimensión 4 no triviales. En el caso de que $\mathrm{Tder}(A)' \cong su(2) \oplus su(2) \oplus su(2)$, si $\ker \pi_i \cap \mathrm{Tder}(A)' \neq 0$ entonces A será isótopa a $\mathbb{H}$. De otro modo, $\mathrm{Tder}(A)' \cap \pi_i = 0$ implica que A_i es un $su(2) \oplus su(2) \oplus su(2)$ módulo fiel. Para uno de estos $su(2)$, A_i se descompone como o bien $W(0) \oplus W(2)$ o bien $V(1)$. Las otras dos copias de $su(2)$ estarán en $\mathrm{End}_{su(2)}(A_i) \cong \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$ lo que no es posible.

Supongamos ahora que $\dim A = 8$ y $\dim \mathrm{Tder}(A) = 30$. Comparando las dimensiones de las álgebras de Lie semisimples de rango toral ≤ 4, la dimensión y el rango toral de $\mathrm{Tder}(A)$, tenemos que o bien $\mathrm{Tder}(A)' \cong D_4$ o $\mathrm{Tder}(A)' \cong G_2 \oplus G_2$. En ambos casos $\ker \pi_i \cap \mathrm{Tder}(A)' = 0$. El único módulo fiel de dimensión 8 para G_2 es la suma directa de un módulo absolutamente irreducible de dimensión 7 y uno trivial. El centralizador del módulo para esta acción, $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, debería contener una copia de G_2 lo que no es posible. Entonces, $\mathrm{Tder}(A)' \cong D_4$. Los módulos irreducibles de dimensión ≤ 8 para D_4 son el trivial, el natural y los dos módulos espines: $V(0)$, V, V' y V''. En los últimos tres módulos D_4 actúa como operadores antisimétricos [25], respecto de la misma forma bilineal invariante (la de $\mathbb{O}$). En el caso de que dos de ellos sean isomorfos, podemos cambiar mediante alguna de las transformaciones reflejadas en la Proposición 1.4.3 a un álgebra A con $A_2 \cong A_3$. En cualquier caso, ni $V \otimes V$, ni $V' \otimes V'$ ni $V'' \otimes V''$ tienen submódulos de dimensión 8. Por lo tanto A_1, A_2 y A_3 no son isomorfos. Como $\dim \mathrm{Hom}_{D_4}(A_i \otimes A_j, A_k) = 1$, ($\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$) y salvo permutaciones (ver Sección 4.1.2) de A_i, A_j y A_k este producto viene dado por el producto de los octoniones (Principio de trialdad local), entonces A está en la órbita de $\mathbb{O}$ bajo la acción de $\mathcal{G}_8$. En este caso A es isomorfa o isótopa a $\mathbb{O}$. $\square$

4.2. Dimensión cuatro

Será conveniente tener a mano realizaciones concretas de los $su(2)$–módulos fieles de dimensión 4. Todos se obtienen de los cuaternios $\mathbb{H}$. Los elementos de traza cero, $\mathbb{H}_0$, de $\mathbb{H}$ forman una subálgebra de Lie de $\mathbb{H}^-$ isomorfa a $su(2)$. $\mathbb{H}$ es un $su(2)$–módulo de varias formas:

$$L\colon (a,x) \mapsto ax, \quad R\colon (a,x) \mapsto -xa \text{ y } \mathrm{ad}\colon (a,x) \mapsto [a,x] \quad (a \in \mathbb{H}_0, x \in \mathbb{H}).$$

Las dos primeras representaciones, $\mathbb{H}_L$ y $\mathbb{H}_R$, son isomorfas a $V(1)$, mientras la tercera, $\mathbb{H}_{\mathrm{ad}}$, es isomorfa a $W(0) \oplus W(2)$.

Teorema 4.2.1. *Un álgebra real A es un álgebra de division de dimensión 4 con álgebra de derivaciones ternarias de Lie no abeliana si, y sólo si, existe $\sigma \in \mathcal{G}_4$ tal que A^σ es isomorfa a $\mathbb{H}$ con uno de los siguientes productos:*

i) $xy - \frac{1-\beta}{2} t(xy_0)1$, *con* $\beta > 0$

ii) $xy - t(xcy)1$, *con* $c \in \mathbb{H}$ *y* $t(c) \neq 1$

donde xy denota el producto en $\mathbb{H}$, $t(\,)$ denota la traza e $y_0 = y - \frac{1}{2}t(y)$ es la parte imaginaria de y.

Demostración. Consideramos $(\mathbb{H}, \circ)$ con $x \circ y = xy - \frac{1-\beta}{2} t(xy_0)$ y $\beta > 0$. Claramente $(\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_a) \in \mathrm{Tder}(\mathbb{H}, \circ)$ para todo $a \in \mathbb{H}$, luego esta álgebra de Lie no es abeliana. Veamos que $(\mathbb{H}, \circ)$ es un álgebra de división. En caso contrario, suponemos

	u	e_1	e_2	e_4
u	u	ηe_1	ηe_2	ηe_4
e_1	ζe_1	$-\beta u$	e_4	$-e_2$
e_2	ζe_2	$-e_4$	$-\beta u$	e_1
e_4	ζe_4	e_2	$-e_1$	$-\beta u$

Tabla 4.1: $su(2)$ actúa en A como derivaciones.

que $x \circ y = 0$ con $x \neq 0 \neq y$. Entonces, $0 \neq xy \in \mathbb{R}1$ implica que $y = \alpha\bar{x}$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\bar{x}$ el conjugado de x. Como $x\bar{x} = n(x)1$, la norma de x, entonces $xy = \frac{1-\beta}{2}t(xy_0)$ implica que $\alpha x\bar{x} = \alpha n(x) = \frac{1-\beta}{2}t(x_0y_0) = (1-\beta)\alpha n(x_0)$, con x_0 la parte imaginaria de x. Finalmente, $n(x) \geq n(x_0)$ nos lleva a que $\beta \leq 0$ lo que no es posible. De modo análogo se puede probar que el álgebra descrita en ii) es un álgebra de división y que $(\mathrm{ad}_a, L_a, -R_a)$ es una derivación ternaria para todo $a \in \mathbb{H}$, luego el álgebra de Lie de derivaciones ternarias de este álgebra de división no es abeliana.

Probemos ahora el recíproco. Como $\mathrm{Tder}(A)$ no es abeliana, contiene una subálgebra isomorfa a $su(2)$. Distinguimos dos casos dependiendo de la descomposición de A_i como $su(2)$–módulo.

i) Suponemos que $W(0)\oplus W(2)$ aparece dos veces en $\{A_1, A_2, A_3\}$. Como $W(0)\otimes W(0) \cong W(0)$ y $W(0) \otimes V(1) \cong V(1) \cong V(1) \otimes W(0)$ entonces $A_1 \cong A_2 \cong A_3 \cong W(0)\oplus W(2)$ y salvo isotopía podemos suponer que $\mathrm{Der}(A)$ contiene una subálgebra isomorfa a $su(2)$ (ver Sección 4.1.2). Esto implica que la tabla de multiplicación de $(A, \circ)$ viene dada por la Tabla 4.1 [6], que corresponde al producto i) del teorema.

ii) El producto tensorial $V(1)\otimes V(1)$ no contiene submódulos isomorfos a $V(1)$, por lo que, en caso de que $A_2 \cong V(1) \cong A_3$, entonces $A_1 \cong W(0) \oplus W(2)$. Luego si dos módulos A_i, A_j son isomorfos a $V(1)$ entonces el otro es isomorfo a $W(0) \oplus W(2)$. Por permutación podemos suponer que $A_1 \cong V(1) \cong A_3$ (luego $A_2 \cong W(0) \oplus W(2)$).

Como vimos en la Sección 4.1.2, salvo isotopía podemos ver A como $(\mathbb{H}, \circ)$

para algún producto $\circ$, A_1 como $\mathbb{H}_L$ y $su(2)$ como $\{(L_a, \mathrm{ad}_a, L_a) \mid a \in \mathbb{H}_0\}$, donde los operadores de multiplicación se refieren a $\mathbb{H}$. Entonces, $\circ$ verifica $a(x \circ y) = [a, x] \circ y + x \circ (ay)$ para todo $a \in \mathbb{H}_0$. El operador multiplicación a izquierda $L^\circ_x \colon y \mapsto x \circ y$ verifica $L_a L^\circ_x = L^\circ_{[a,x]} + L^\circ_x L_a$, luego $[L_a, L^\circ_x] = L^\circ_{[a,x]}$.

Sea $\{a_1, \ldots, a_4\}$ una base de $\mathbb{H}$. El isomorfismo $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}^{\mathrm{op}}$ nos permite escribir de modo único

$$L^\circ_x = \sum_{i=1}^{4} L_{\varphi_i(x)} R_{a_i}$$

para algún $\varphi_i \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{4} L_{\varphi_i([a,x])} R_{a_i} = L^\circ_{[a,x]} = [L_a, L^\circ_x] = \sum_{i=1}^{4} [L_a, L_{\varphi_i(x)}] R_{a_i} = \sum_{i=1}^{4} L_{[a, \varphi_i(x)]} R_{a_i}$$

lo que implica que $\varphi_i([a, x]) = [a, \varphi_i(x)]$ para cualesquiera $a, x \in \mathbb{H}$ y $i = 1, 2, 3, 4$. Los módulos $W(0)$ y $W(2)$ son absolutamente irreducibles, luego los endomorfismos de $\mathbb{H}_{\mathrm{ad}}$ como módulo forman un espacio vectorial de dimensión dos generado por la identidad y la aplicación $x \mapsto t(x)1$. Las aplicaciones φ_i se pueden escribir entonces como $\varphi_i(x) = \alpha_i t(x) + \beta_i x$ para algunos $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. El operador L°_x se puede escribir como $L^\circ_x = \sum_{i=1}^{4} L_{\alpha_i t(x) + \beta_i x} R_{a_i}$. Por tanto, $L^\circ_x = t(x) R_a + L_x R_b$ y $x \circ y = t(x) y a + x y b$, con $a, b \in \mathbb{H}$ y $b \neq 0$. Cambiando $\circ$ por $x \circ R_b^{-1}(y)$ obtenemos

$$x \circ y = xy - t(x) y c,$$

donde $c = -b^{-1} a$. Siendo A un álgebra de división, $(\mathbb{H}, \circ)$ debe ser también álgebra de división, luego, $c \circ c = (1 - t(c)) c^2 \neq 0$ si $c \neq 0$ implica que $t(c) \neq 1$.

Considerando el producto opuesto a $\overline{\bar{x} \circ \bar{y}}$ tenemos un nuevo producto $xy - t(y) \bar{c} x$. Usando la forma bilineal de $\mathbb{H}$, el producto adjunto a este es $\bar{x} y - t(\bar{x} c y)$, que salvo isotopía corresponde al producto dado en ii). $\square$

Se puede probar que si $\beta \neq 1$ en la parte i) del teorema, entonces $\mathrm{Tder}(A) = su(2) \oplus \mathcal{Z}_0$. Para las álgebras en ii), si $c \in \mathbb{R}$ entonces A es una isótopa de los cuaterniones; si $c \notin \mathbb{R}$ entonces $\mathrm{Tder}(A) = su(2) \oplus \mathcal{Z}_0$.

4.3. Dimensión ocho

En esta sección supondremos que $\dim A = 8$ y que $\mathrm{Tder}(A)$ no es abeliana. Por comodidad en la notación, hemos utilizado $(\ ,\ ) = \frac{1}{2}\mathrm{n}(\ ,\ )$ en lugar de la forma bilineal asociada a la norma. Probaremos que

Teorema 4.3.1. *Un álgebra real A es álgebra de división de dimensión 8 con una subálgebra simple de rango toral ≥ 2 contenida en $\mathrm{Tder}(A)$ si y sólo si existe $\tau \in \mathcal{G}_8$ tal que el producto en A^τ viene dado por un producto en $\mathbb{O}$ mediante una de las fórmulas:*

i) $xy - \frac{1-\beta}{2}t(xy_0)1$, *con* $\beta > 0$

ii) $xy + (a,x)b(cy)$, *para algunos* $a,b,c \in \langle 1,i,j\rangle$ *con* $(a,bc) \neq -1$

iii) $xy + \sigma(x,y)$, *con* $\sigma\colon \mathbb{O}\times\mathbb{O} \to \mathbb{C}$ *una aplicación* $\mathbb{R}$*–bilineal que verifica que* $\sigma(a,b) \neq -\lambda ab$, *para algunos* $a,b \in \mathbb{C}$ *no nulos y* $\lambda \geq 1$, *y* $\sigma(\mathbb{C}^\perp,\mathbb{O}) + \sigma(\mathbb{O},\mathbb{C}^\perp) = 0$ *ó*

iv) viene dado por $su(3)$ *mediante* $\alpha[x,y] + \sqrt{3}i(xy + yx - \frac{2}{3}t(xy)I)$, *con* xy *el producto usual de matrices y* $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$.

Los productos del enunciado del Teorema 4.3.1 dan álgebras de división. Esto se deriva de [6] en el caso iv), y de la demostración del Teorema 4.2.1, el Paso 9 de la demostración de la Proposición 4.3.8 y el Lema 4.3.10 en los casos i), ii) y iii) respectivamente.

Lema 4.3.2. *El álgebra de Lie de las derivaciones ternarias de las álgebras del Teorema 4.3.1 contiene una subálgebra simple de rango toral ≥ 2.*

Demostración. En el caso i), toda derivación de $\mathbb{O}$ es una derivación de este nuevo producto.

Para el producto ii), las derivaciones ternarias de $\mathbb{O}$ de la forma (d,d',d), con $d'(\mathbb{C}) = 0$ (que contienen una subálgebra de Lie de tipo B_2), siguen siendo derivaciones ternarias.

Las derivaciones de $\mathbb{O}$ que anulan $\mathbb{C}$ (que forman un álgebra de Lie isomorfa a $su(3)$) continúan siendo derivaciones para el producto iii).

Y para el producto iv) la representación adjunta de $su(3)$ nos da una subálgebra de derivaciones isomorfa a $su(3)$. □

La formulación del Teorema 4.3.1 busca una descripción sencilla de las familias implicadas.

Nota 4.3.3. *Para iii) se puede dar otra descripción, sólo hay que desarrollar $\sigma(x, y)$ como $\sigma(x, y) = a_1xy + a_2\bar{x}y + a_3x\bar{y} + a_4\bar{x}\bar{y}$ para ciertos $a_1, \ldots, a_4 \in \mathbb{C}$. Como para cualquier a el producto de los octoniones verifica las relaciones $xy = a^{-1}((axa)(a^{-1}y))$ y $xy = ((xa^{-1})(aya))a^{-1}$, entonces σ se puede modificar mediante $a^{-1}\sigma(axa, a^{-1}y)$ o $\sigma(xa^{-1}, aya)a^{-1}$. Esto nos permite suponer que dos de $\{a_2, a_3, a_4\}$ son escalares, lo que reduce el número de parámetros involucrados en la definición de σ a seis.*

Nota 4.3.4. *Mediante algunas manipulaciones con los elementos de $\mathcal{G}_8$ el producto ii) se transforma en $xy + t(((yb)c)x)e$ para algún e. Podemos usar entonces que $xy = e^{-1}((exe)(e^{-1}y))$ para obtener $xy + t((exe)(((e^{-1}y)b)c))1$ análogo a ii) en el Teorema 4.2.1.*

Este teorema no considera los casos en que $\mathrm{Tder}(A)' = su(2) \oplus su(2) \oplus su(2) \oplus su(2)$, $su(2) \oplus su(2) \oplus su(2)$, $su(2) \oplus su(2)$, $su(2)$ ó 0. De hecho se puede comprobar que el primer caso no es posible. El resto parecen ser posibles para pequeñas modificaciones del proceso de Cayley–Dickson cuando construimos los octoniones a partir de los cuaternios.

Nota 4.3.5. *El resultado también sugiere que de un álgebra de división A, con producto xPy, se obtienen otras álgebras de división mediante $xQy = xPy - (x, y)a$, para algún $a \in A$ y una forma bilineal $(\, , \,)$. No intentamos incorporar estas transformaciones como elementos de $\mathcal{G}$ porque no preservan el álgebra de Lie de las derivaciones ternarias. Que el elemento a y la forma bilineal $(\, , \,)$ hagan de (A, Q) un álgebra de división dependerá, probablemente, del producto P.*

El rango toral de la parte semisimple de $\mathrm{Tder}(A)$ es ≤ 4. Por tanto contiene una subálgebra compacta de las siguientes

$$su(5),\ B_4,\ C_4,\ D_4,\ F_4,\ su(4),\ B_3,\ C_3,\ su(3),\ B_2,\ G_2,\ su(2).$$

Cuando no haya riesgo de confusión, denotaremos un módulo irreducible por su dimensión. Observamos que para cualquier álgebra de Lie real L y cualesquiera L–módulos irreducibles V y W con $\mathbb{C}\otimes V \cong \mathbb{C}\otimes W$ como $\mathbb{C}\otimes L$–módulos, se tiene que como L–módulos, $V\oplus V \cong \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} V \cong \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} W \cong W\oplus W$ y así $V\cong W$. Por lo tanto, a lo sumo hay una forma real irreducible de un módulo complejo.

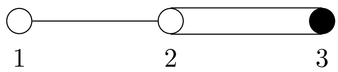
Proposición 4.3.6. *El álgebra de Lie de las derivaciones ternarias de un álgebra de división real de dimensión finita no contiene ninguna subálgebra isomorfa a F_4, B_4, C_4, $su(5)$ o C_3.*

Demostración. La dimensión del menor módulo irreducible no trivial para un álgebra split de tipo F_4 es 26, luego podemos eliminar F_4. En el caso de un álgebra de tipo B_4 la dimensión es 9, luego este caso no aparece. Algunas álgebras de tipo C_4 admiten una representación de dimensión ocho. Sin embargo esta representación posee una forma bilineal antisimétrica invariante, que a su vez implica que el álgebra es split. Los módulos $su(5)$–irreducibles de dimensión ≤ 8 tienen dimensión 1, luego este álgebra no aparece. Nos quedan las álgebras de tipo C_3. Los módulos irreducibles de dimensión ≤ 8 para este álgebra son el trivial, de dimensión 1, y el módulo irreducible de dimensión 6. Por tanto los tres módulos A_1, A_2 y A_3 son isomorfos. Salvo isotopía esto significa que $C_3 \subseteq \mathrm{Der}(A)$ lo que no es posible [5]. $\square$

Esta proposición reduce los casos por analizar a D_4, $su(4)$, B_3, $su(3)$, B_2, G_2 y $su(2)$. Los casos más grandes, esto es D_4, $su(4)$ y B_3 nos dan álgebras isótopas a los octoniones. En particular, la parte semisimple de $\mathrm{Tder}(A)$ es el álgebra de Lie compacta de tipo D_4.

Proposición 4.3.7. *Si* $\mathrm{Tder}(A)$ *contiene una subálgebra isomorfa a D_4, B_3 o $su(4)$ entonces A es isótopa a los octoniones.*

Demostración. Los módulos irreducibles de dimensión ≤ 8 para B_3 son $V(0), V(\lambda_1)$ y $V(\lambda_3)$ de dimensiones 1, 7 y 8 respectivamente.



En caso de que $A_1 \cong A_2 \cong A_3$, entonces salvo isotopía B_3 actúa como derivaciones, lo que no es posible [5]. Además, si dos de ellos son isomorfos a $1+7$ el tercero también lo es, con lo que esta posibilidad no se puede presentar.
Salvo permutaciones, podemos suponer que $A_1 \cong 8$, $A_3 \cong 8$, ambos absolutamente irreducibles, y $A_2 \cong 1+7$. Como $\dim \mathrm{Hom}_{B_3}(V(\lambda_1) \otimes V(\lambda_3), V(\lambda_3)) = 1$, entonces salvo escalares, el producto $7 \otimes 8 \to 8$ se puede tomar como el inducido por el producto de los octoniones, donde B_3 está contenido en $\mathrm{Tder}(\mathbb{O})$ como $\{(d,d,d) | d \in \mathrm{Der}\,\mathbb{O}\} \oplus \langle (L_a + 2R_a, L_a - R_a, L_a + 2R_a) \,|\, a \in \mathbb{O}_0 \rangle$. Entonces, para cada $x \perp 1$, el operador multiplicación a izquierda por x es αL_x para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, donde L_x denota el operador multiplicación correspondiente en los octoniones. El operador multiplicación a izquierda por 1 es $\beta\,\mathrm{Id}$ para algún $\beta \in \mathbb{R}$. Definiendo φ mediante $1 \mapsto \beta 1$, y $x \mapsto \alpha x$ si $x \perp 1$, tenemos que A es isomorfa a la isótopa $\varphi(x)y$ de los octoniones.

Los módulos irreducibles de dimensión ≤ 8 para $su(4)$ tienen dimensión 1, 6 o 8. El módulo irreducible de dimensión ocho no es absolutamente irreducible, se descompone como suma directa de dos módulos duales de dimensión 4 no isomorfos. Igual que antes, la aparición de dos módulos $1+1+6$ forzaría que el tercero fuera igual, y $su(4)$ actuaría como derivaciones de A. Por tanto, salvo permutaciones $A_2 \cong 1+1+6$, $A_3 \cong 8$ y $A_1 \cong 8$. Salvo isotopía, podemos ver A como los octoniones, $\mathbb{O}$, con un nuevo producto, $\circ$. Entonces $su(4)$ está contenido en $\mathrm{Tder}(\mathbb{O})$ como $su(4) = \{(d_1, d_2, d_1) \,|\, d_2(\mathbb{C}) = 0\}$. Claramente,

$$\{L_a^\circ \mid a \in \mathbb{C}\} + \{L_a \mid a \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathrm{End}_{su(4)}(8) \cong \mathbb{C},$$

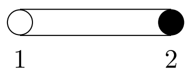
luego $\{L_a^\circ \,|\, a \in \mathbb{C}\} = \{L_a \,|\, a \in \mathbb{C}\}$. Como $\dim \mathrm{Hom}_{su(4)}(6 \otimes 8, 8) = 2$, entonces existe $e \in \mathbb{C}$ tal que $x \circ y = e(xy)$ para todo $x \perp \mathbb{C}$. Esto es, $L_x^\circ = L_e L_x$ para todo $x \perp \mathbb{C}$. Además, $L_a^\circ = L_e L_{\varphi(a)}$ con $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ biyectiva. Luego si extendemos φ por $\varphi|_{\mathbb{C}^\perp} = \mathrm{Id}$, entonces $L_x^\circ = L_e L_{\varphi(x)}$ para todo $x \in \mathbb{O}$. Esto implica que $L_e^{-1}(\varphi^{-1}(x) \circ y) = L_e^{-1} L_e(xy) = xy$, luego A es isótopa a los octoniones. □

Las únicas posibilidades para una subálgebra simple de las derivaciones ternarias de un álgebra de división real de dimensión ocho no isótopa a los octoniones son

$$G_2, \quad su(3), \quad B_2 \quad \text{y} \quad su(2).$$

4.3.1. Caso B_2

Sea L un álgebra de Lie compacta de tipo B_2 contenida en $\mathrm{Tder}(A)$.



Los $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} L$ módulos irreducibles tienen dimensión:

$$\dim V(m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2) = \frac{1}{3!}(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)(2m_1+m_2+3).$$

Las únicas posibilidades para dimensión ≤ 8 son $V(0), V(\lambda_1)$ (de dimensión cinco) y $V(\lambda_2)$ (de dimensión cuatro). De hecho, todo L–módulo V con $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V \cong V(\lambda_2)$ tendrá una forma bilineal invariante antisimétrica no degenerada, luego L será isomorfa al álgebra de Lie split de tipo C_2, lo que no es posible. Por lo tanto, un L–módulo fiel de dimensión ocho se descompone como 8 o bien $1+1+1+5$. Además, A_1, A_2 y A_3 no son isomorfos, puesto que esto significaría que B_2 aparecería actuando como derivaciones y no es así [5]. Salvo permutaciones la única posibilidad es $A_1 \cong 8$, $A_2 \cong 1+1+1+5$ y $A_3 \cong 8$.

Primero determinaremos algunos modelos para L y los módulos implicados. Sea $T = \langle 1, i, j \rangle \subseteq \mathbb{O}$. Tenemos

$$\mathbb{O} = T \oplus T^\perp \text{ con } \dim T = 3 \text{ y } \dim T^\perp = 5.$$

El álgebra

$$L' = \{(d, d', d) \in \mathrm{Tder}(\mathbb{O}) \mid d'|_T = 0,\ \mathrm{t}(d) = 0\}$$

donde $\mathrm{t}(\,)$ denota la traza usual, es isomorfa a L, y la descomposición de $\mathbb{O}$ para las distintas proyecciones de L' son $\mathbb{O}_2 \cong 1+1+1+5$ y $\mathbb{O}_1 \cong \mathbb{O}_3 \cong 8$. Por tanto, salvo isotopía podemos realizar la identificación: $A = (\mathbb{O}, \circ)$ para algún producto $\circ$, $L = \{(d, d', d) \in \mathrm{Tder}(\mathbb{O}) \mid d'|_T = 0,\ \mathrm{t}(d) = 0\}$, $1{+}1{+}1 = T$, $5 = T^{\perp}$, $\mathbb{O}_1 \cong \mathbb{O}_3 \cong 8$ y $\mathbb{O}_2 \cong 1+1+1+5$.

Proposición 4.3.8. *Sea A un álgebra de división real de dimensión finita con $B_2 \subseteq \mathrm{Tder}(A)$. Entonces existen $a, b, c \in \langle 1, i, j\rangle \subseteq \mathbb{O}$ y $\sigma \in \mathcal{G}_8$ tales que el producto en A^{σ} viene dado por el producto xy de $\mathbb{O}$ mediante*

$$xy + (a, x)b(cy),$$

con $(a, bc) \neq -1$.

Demostración. Haremos la demostración en varios pasos:

Paso 1. $D = \mathrm{End}_L(\mathbb{O}_3)$ *es un álgebra de división de cuaternios*:
$\mathbb{O}_3$ es un L–módulo irreducible, luego D es un álgebra de división. Como $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{O}_3 \cong V(\lambda_2) \oplus V(\lambda_2)$ entonces $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} D = M_2(\mathbb{C})$. Luego D es un álgebra de división de cuaternios.

Paso 2. $\langle L_a \,|\, a \in T\rangle + \langle L_a^{\circ} \,|\, a \in T\rangle \subseteq D$:
Como $d(xy) = d'(x)y + xd(y)$ entonces $[d, L_x] = L_{d'(x)}$, luego $[d, L_a] = 0 = [d, L_a^{\circ}]$ para todo $a \in T$. Luego, $L_a, L_a^{\circ} \in D$ para todo $a \in T$.

Paso 3. $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}_3) \cong L^* \otimes_{\mathbb{R}} D^{\mathrm{op}}$ *con* $L^* = \mathrm{alg}_1\langle d \,|\, (d, d', d) \in L\rangle$:
Como $\mathbb{O}_3$ es un L–modulo, es también un L^*–módulo y $D = \mathrm{End}_{L^*}(\mathbb{O}_3)$. Luego, $\mathbb{O}_3$ es un $L^* \otimes_{\mathbb{R}} D^{\mathrm{op}}$–módulo de modo natural. El centralizador de esta acción es $\mathbb{R}$, el centro de D. Por el Teorema de Densidad de Jacobson, $L^* \otimes_{\mathbb{R}} D^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}_3)$.

Paso 4. *Como L–módulos,* $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}_3) \cong L^* \otimes_{\mathbb{R}} D^{\mathrm{op}}$:
El espacio vectorial $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}_3)$ es L–módulo de modo natural

$$(d, d', d) \cdot \varphi = [d, \varphi].$$

L^* es L–submódulo de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}_3)$ y D^{op} se puede ver como L–módulo trivial de dimensión cuatro. Dado $(d, d', d) \in L$, $\varphi \in L^*$ y $\gamma \in D^{\mathrm{op}}$ tenemos que

$$(d, d', d) \cdot (\varphi \otimes \gamma) = [d, \varphi] \otimes \gamma$$

corresponde, por el isomorfismo anterior, a $[d, \varphi]\gamma = (d, d', d) \cdot \varphi\gamma$, ya que d conmuta con todos los elementos de D.

Paso 5. $L^* = L + 1 + 5$ *como L–módulo*:
La dimensión de L^* es $64/4 = 16$. Como la dimensión de L es 10 entonces el complemento de L en L^* tiene dimensión seis. La identidad Id pertenece a L^*, luego la única posibilidad es $L^* = L + 1 + 5$.

Paso 6. *Existe* $\gamma \in D$ *con* $L^\circ_x = L_x\gamma$ *para todo* $x \in T^\perp$:
La relación $[d, L^\circ_x] = L^\circ_{d'(x)}$ implica que el subespacio $\{L^\circ_x \mid x \in T^\perp\}$ es un submódulo de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}_3) \cong L^* \otimes_{\mathbb{R}} D^{\mathrm{op}}$ absolutamente irreducible de dimensión cinco. Estos submódulos son $\{L_x \mid x \in T^\perp\}D$. Entonces, existe $\gamma \in D$ tal que $L^\circ_x = L_x\gamma$ para todo $x \in T^\perp$.

Paso 7. *Salvo isotopía, podemos suponer que existe* $0 \neq a \in T$ *con* $L^\circ_x = L_x$*, para todo* $x \in (\mathbb{R}a)^\perp$:
Como $\langle L_a \mid a \in T\rangle + \langle L^\circ_a \mid a \in T\rangle \subseteq D$ y $\gamma \in D$ entonces $\dim(L_T \cap L^\circ_T\gamma^{-1}) \geq 2$. Sea $S \subseteq T$ y $\varphi \colon S \to T$ tal que $L_b = L^\circ_{\varphi(b)}\gamma^{-1}$ para todo $b \in S$. Definimos $\varphi|_{T^\perp} = \mathrm{Id}$. Sea $a \in T$ con $(\mathbb{R}a)^\perp = S \oplus T^\perp$. Tenemos que para todo $x \in (\mathbb{R}a)^\perp$, $L_x = L^\circ_{\varphi(x)}\gamma^{-1}$. Definimos

$$x \diamond y = \varphi(x) \circ \gamma^{-1}(y).$$

Dado $x \in (\mathbb{R}a)^\perp$,

$$x \diamond y = \varphi(x) \circ \gamma^{-1}(y) = L^\circ_{\varphi(x)}(\gamma^{-1}(y)) = L_x\gamma\gamma^{-1}(y) = xy.$$

Como φ conmuta con d', y γ conmuta con d para todo $(d, d', d) \in L$, entonces $L \subseteq \mathrm{Tder}(A, \diamond)$.

Paso 8. *Salvo isotopía, existen* $a, b, c \in T$ *tales que* $x \circ y = xy + (x, a)b(cy)$:
Como $L^\circ_a \in D$ y $D = \mathrm{alg}\langle L_x \mid x \in T\rangle$ ($\mathbb{H}$ no tiene subálgebras de dimensión tres)

entonces existen $a', a'', a''' \in T$ con $L^\circ_a = L_{a'} + L_{a''}L_{a'''}$. Podemos suponer que $a'' \perp a'''$ y $a'', a''' \perp 1$. Luego,

$$a \circ y = a'y + a''(a'''y) \text{ y } x \circ y = xy \text{ para todo } x \perp a.$$

Veamos ahora cuando este producto nos da un álgebra de división. Dado $0 \neq y$, existe $\alpha a + x_0$ con $x_0 \perp a$ tal que

$$\begin{aligned}
(\alpha a + x_0) \circ y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha a'y + \alpha a''(a'''y) + x_0 y = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha a' + \alpha(a''(a'''y))y^{-1} = -x_0 \\
&\Leftrightarrow \quad (\alpha a' + \alpha(a''(a'''y))y^{-1}, a) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 0 \text{ y } x_0 = 0 \text{ (un caso trivial que omitimos)} \\ \text{ó} \\ (a' + (a''(a'''y))y^{-1}, a) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad (a', a) + (a''(a'''y), ay/n(y)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (a', a) + (a''a'''y_0, ay_0/n(y)) + ((a'''a'')y_1, ay_1/n(y)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (a', a) + (a''a''', a)n(y_0)/n(y) + (a'''a'', a)n(y_1)/n(y) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (a', a) = 0
\end{aligned}$$

donde $n(y) = (y, y)$ es la norma usual de $\mathbb{O}$, hemos escrito $y = y_0 + y_1$ con $y_0 \in \mathbb{H}$ e $y_1 \in \mathbb{H}^\perp$, y la última equivalencia se verifica porque $a'', a''' \perp 1$ y $a'' \perp a'''$ implica que $a''a''' \perp T$, luego $(a', a) \neq 0$. Ahora escribimos $a' = \alpha a + b_0$ con $b_0 \in T$, $b_0 \perp a$ y $\alpha \neq 0$. Como

$$\begin{aligned}
L^\circ_{\alpha^{-1}(a-b_0)} &= \alpha^{-1}L^\circ_a - \alpha^{-1}L^\circ_{b_0} = \alpha^{-1}(L_{a'} + L_{a''}L_{a'''}) - \alpha^{-1}L_{b_0} \\
&= L_a + \alpha^{-1}L_{a''}L_{a'''}
\end{aligned}$$

entonces el producto $x \diamond y = \varphi(x) \circ y$, con $\varphi\colon a \mapsto \alpha^{-1}(a - b_0)$ y $\varphi|_{(\mathbb{R}a)^\perp} = \mathrm{Id}$ verifica que $x \diamond y = xy$ para todo $x \perp a$, y $a \diamond y = ay + \alpha^{-1}a''(a'''y)$. Por lo tanto, salvo isotopía, existen $a, b, c \in T$ tales que $x \circ y = xy + (a, x)b(cy)$.

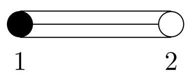
Paso 9. $(\mathbb{O}, \circ)$ *es álgebra de división si y sólo si* $(a, bc) \neq -1$:
Como en el paso 8, dado $0 \neq y = y_0 + y_1 \in \mathbb{O}$ con $y_0 \in \mathbb{H}$ e $y_1 \in \mathbb{H}^\perp$, sabemos

	u	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
u	u	ηe_1	ηe_2	ηe_3	ηe_4	ηe_5	ηe_6	ηe_7
e_1	ζe_1	$-\beta u$	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	ζe_2	$-e_4$	$-\beta u$	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	ζe_3	$-e_7$	$-e_5$	$-\beta u$	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	ζe_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	$-\beta u$	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	ζe_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	$-\beta u$	e_1	e_4
e_6	ζe_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	$-\beta u$	e_2
e_7	ζe_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	$-\beta u$

Tabla 4.2: G_2 actúa en A como derivaciones.

que existe $0 \neq \alpha a + x_0$ con $x_0 \perp a$ tal que $(\alpha a + x_0) \circ y = 0$ si y sólo si $n(a) + \frac{n(a)}{n(y)}(b(cy), ay) = 0$. Como $a \neq 0$, esto es equivalente a $(b(cy), ay/n(y)) = -1$. O lo que es lo mismo, $(bc, a)\frac{n(y_0)}{n(y)} + (cb, a)\frac{n(y_1)}{n(y)} = -1$. Como $[b, c] \perp T$ implica que $(bc, a) = (cb, a)$ entonces esta última condición es lo mismo que $(bc, a) = -1$. $\square$

4.3.2. Caso G_2



Los G_2–módulos irreducibles de dimensión ≤ 8 tienen dimensiones 1 y 7. Esto significa que en caso de que $G_2 \subseteq \mathrm{Tder}(A)$ entonces $A_1 \cong A_2 \cong A_3 \cong 1 + 7$ y salvo isotopía G_2 actúa como derivaciones. Por [6] podemos encontrar una base en la que la tabla de multiplicación de A viene dada por la Tabla 4.2. Los operadores de multiplicación a izquierda y a derecha por u, L_u° y R_u°, vienen dados por $\mathrm{diag}(1, \zeta, \zeta, \zeta, \zeta, \zeta, \zeta, \zeta)$ y $\mathrm{diag}(1, \eta, \eta, \eta, \eta, \eta, \eta, \eta)$. Con el nuevo producto $x \diamond y = (R_u^\circ)^{-1}(x) \circ (L_u^\circ)^{-1}(y)$ obtenemos, respecto de la base $\{u\} \bigcup \{\frac{e_i}{\zeta^{-1}\eta^{-1}}\}_i$, una tabla similar en la que $\zeta = 1 = \eta$ y $\beta > 0$. Este producto se puede recuperar desde el producto xy de los octoniones mediante $x \diamond y = xy - \frac{1-\beta}{2} t(xy_0)$ donde $y_0 = y - \frac{1}{2}t(y)$.

Proposición 4.3.9. *Si* $\mathrm{Tder}(A)$ *contiene una subálgebra de tipo* G_2 *entonces* A *es isótopa a* $\mathbb{O}$ *con el producto dado por*

$$x \circ y = xy - \frac{1-\beta}{2} t(xy_0),$$

donde xy *denota el producto de los octoniones,* $y_0 = y - \frac{1}{2}t(y)$ *y* $\beta > 0$. *Además, si* $\beta = 1$ *entonces* $\mathrm{Tder}(A) = D_4 \oplus \mathcal{Z}_0$ *y si* $\beta \neq 1$ *entonces* $\mathrm{Tder}(A) = G_2 \oplus \mathcal{Z}_0$.

Demostración. La demostración completa es una serie de cálculos no muy iluminadores, por lo que daremos solamente un esquema. Primero observamos que la involución en los octoniones, $x \mapsto \bar{x}$, induce una involución en A. A su vez tenemos un automorfismo $(d_1, d_2, d_3) \mapsto (\bar{d}_1, \bar{d}_3, \bar{d}_2)$ en $\mathrm{Tder}(A)$ donde

$$\bar{d}(x) = \overline{d(\bar{x})}.$$

Este automorfismo descompone $\mathrm{Tder}(A)$ como suma directa de los espacios propios $S(1)$ y $S(-1)$ correspondientes a los valores propios 1 y -1. Notar que

$$\begin{aligned} S(1) &= \{(d_1, d_2, \bar{d}_2) \in \mathrm{Tder}(A) \mid \bar{d}_1 = d_1\}, \text{ y} \\ S(-1) &= \{(d_1, d_2, -\bar{d}_2) \in \mathrm{Tder}(A) \mid \bar{d}_1 = -d_1\}. \end{aligned}$$

Cualquier derivación, d, de $\mathbb{O}$ induce una derivación en A, luego $G_2 \cong \{(d, d, d) \mid d \in \mathrm{Der}(\mathbb{O})\} \subseteq S(1)$. Probaremos que si $\beta \neq 1$ entonces $S(-1) = \langle (0, \mathrm{Id}, -\mathrm{Id}) \rangle$ y $S(1) = \{(d, d, d) \mid d \in \mathrm{Der}(\mathbb{O})\} + \langle (2\,\mathrm{Id}, \mathrm{Id}, \mathrm{Id}) \rangle$.

Dada $(d_1, d_2, -\bar{d}_2) \in S(-1)$, $\bar{d}_1 = -d_1$ implica que $d_1(1) \in \mathbb{O}_0$ y $d_1(\mathbb{O}_0) \subseteq \mathbb{R}1$. Usando la definición de derivación ternaria con $x \in \mathbb{O}_0$ e $y = x$ obtenemos que

$$-\beta n(x) d_1(1) = d_2(x)x - \overline{d_2(x)x},$$

donde $n(x)$ es la norma usual de $\mathbb{O}$. Como $2y = (y - \bar{y}) + t(y)$, entonces tenemos que $2d_2(x)x = (-\beta n(x) d_1(1)) + t(d_2(x)x)$. Dividiendo por x en caso de que $x \neq 0$ obtenemos $d_2(x) = \frac{1}{2}\beta d_1(1)x - \frac{1}{2}\frac{t(d_2(x)x)}{n(x)}x$ para todo $x \in \mathbb{O}_0$. En particular, la aplicación $x \mapsto -\frac{1}{2}\frac{t(d_2(x)x)}{n(x)}x$ tiene que ser lineal, luego $-\frac{1}{2}\frac{t(d_2(x)x)}{n(x)}$ es una constante, digamos α, independiente de x. La aplicación d_2 queda $d_2(x) = \frac{1}{2}\beta d_1(1)x + \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{O}_0$. Restando $(0, \alpha\,\mathrm{Id}, -\alpha\,\mathrm{Id})$ podemos suponer que $\alpha = 0$, luego

$$d_2(x) = ax \text{ y } d_3(x) = xa \text{ si } x \in \mathbb{O}_0,$$

con $a = \frac{1}{2}\beta d_1(1)$, $t(a) = 0$. Veamos ahora que estas fórmulas se extienden a todo A. Con $x, y \in \mathbb{O}_0$ y lo que sabemos de d_1, d_2 y d_3, como $(ax)y + x(ya) = a(xy) + (xy)a$, no es difícil probar que $d_1(xy) = a(xy) + (xy)a + \frac{1-\beta}{2}(t(xy)d_1(1) - t(a(xy) + (xy)a))$. Como cada elemento de $\mathbb{O}$ es combinación lineal de elementos xy con $x, y \in \mathbb{O}_0$ entonces $d_1(z) = az + za + \frac{1-\beta}{2}(t(z)d_1(1) - t(az + za))$. Como $\beta \neq 0$ tenemos

$$d_1(z) = \frac{1}{\beta}t(z)a - 2\beta(a, z).$$

Con $y = 1$ y $x \perp 1, a, d_2(1)_0$ la definición de derivación ternaria implica $d_2(1) = -\bar{a} = a$, luego

$$d_2 = L_a \text{ y } d_3 = R_a.$$

Imponiendo la condición de derivación ternaria y nuestras fórmulas a d_1, d_2, d_3 y comparando escalares y partes vectoriales tenemos que $\beta = 1$ o $a = 0$. Por lo tanto $S(-1) = \langle (0, \mathrm{Id}, -\mathrm{Id}) \rangle$.

Sea $(d_1, d_2, \bar{d}_2) \in S(1)$. Como $\bar{d}_1 = d_1$ entonces $d_1(1) \in \mathbb{R}1$. Restando un múltiplo escalar de $(2\,\mathrm{Id}, \mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ podemos suponer que $d_1(1) = 0$, luego $d_1(\mathbb{O}) \subseteq \mathbb{O}_0$. La condición de derivación ternaria con $x = y = 1$ y $x = y \in \mathbb{O}_0$ implica que $d_2(1) \in \mathbb{O}_0$ y $(d_2(x), y) + (x, d_2(y)) = 0$ para todo $x, y \in \mathbb{O}_0$. La misma condición con $y = 1$ implica que $d_1(x) = d_2(x) - xd_2(1) + \frac{1-\beta}{2}t(xd_2(1))$. Tomando trazas, también obtenemos $t(d_2(x)) = \beta t(xd_2(1))$ para todo $x \in \mathbb{O}$. Ahora escribimos $d_2|_{\mathbb{O}_0} \colon \mathbb{O}_0 \to \mathbb{O}$ como $x \mapsto f(x) + \alpha(x)1$, con $f(x) \in \mathbb{O}_0$ y $\alpha(x) \in \mathbb{R}$. La antisimetría de d_2 hace que f sea antisimétrica, por lo tanto

$$f = D + \mathrm{ad}_a$$

con $D \in \mathrm{Der}(\mathbb{O})$ y $\mathrm{ad}_a \colon x \mapsto ax - xa$ para algún $a \in \mathbb{O}_0$. Restando (D, D, D), podemos suponer que $d_2(x) = [a, x] + \alpha(x)1$ para todo $x \in \mathbb{O}$. Calculando la traza de $d_2(x)$ tenemos que $\beta t(xd_2(1)) = 2\alpha(x)$, luego $\alpha(x) = \frac{\beta}{2}t(xd_2(1))$. Una pequeña modificación nos lleva a

$$d_2(x) = [a, x] + \frac{\beta}{2}t(xd_2(1)) + \frac{t(x)}{2}d_2(1)$$

para todo $x \in \mathbb{O}$. Fácilmente también obtenemos que $\bar{d}_2(x) = [a, x] - \frac{\beta}{2}t(xd_2(1)) - \frac{t(x)}{2}d_2(1)$. Con $y = 1$ en la condición de derivación ternaria, obtenemos

$$d_1(x) = [a + \frac{1}{2}d_2(1), x].$$

Después de algunos cálculos, la condición de derivación ternaria implica que

$$\frac{1-\beta}{4}[d_2(1), [x, y]] = (x, y, 3a + \frac{\beta}{2}d_2(1)),$$

donde (x, y, z) representa el asociador usual. Definimos $\tilde{a} = 3a + \frac{\beta}{2}d_2(1) \neq 0$ ($\tilde{a} = 0$ implica que o bien $\beta = 1$ o bien $d_2(1) = 0$, luego $d_1 = d_2 = d_3 = 0$). Para todo $b \perp \tilde{a}$, $b \perp 1$, la subálgebra generada por $\tilde{a}$ y b tiene dimensión ≥ 3, luego es una subálgebra de cuaternios. En particular, $d_2(1)$ debe conmutar con $\tilde{a}$, 1 y todo elemento ortogonal a ellos, luego $d_2(1)$ pertenece al núcleo conmutativo de $\mathbb{O}$. Por lo tanto $d_2(1) = 0$. Esto implica que $(x, y, \tilde{a}) = 0$ para todo x, y, luego $\tilde{a} \in \mathbb{R}$. Como $t(\tilde{a}) = 0$ entonces $\tilde{a} = a = 0$. Esto es, $d_1 = d_2 = d_3 = 0$. □

4.3.3. Caso $su(3)$ y A_i no irreducibles

Los $su(3)$–módulos irreducibles de dimensión ≤ 8 tienen dimensiones $1, 6$ y 8. Al contrario que el módulo de dimensión ocho, el de dimensión seis no es absolutamente irreducible. En el caso de que $su(3) \subseteq \mathrm{Tder}(A)$ entonces, salvo permutaciones, las únicas posibilidades para el trío (A_1, A_2, A_3) son $(8, 8, 8), (8, 1+1+6, 8)$ y $(1+1+6, 1+1+6, 1+1+6)$. En el segundo caso $\{L^\circ_a \,|\, a \in 1+1\} \subseteq \mathrm{End}_{su(3)}(8, 8)$. Sin embargo este espacio tiene dimensión uno, por lo tanto nos quedamos con $(8, 8, 8)$ y $(1+1+6, 1+1+6, 1+1+6)$. En ambos casos, salvo isotopía, $su(3)$ actúa como derivaciones.

Consideramos el caso $(1+1+6, 1+1+6, 1+1+6)$. Una primera aproximación al producto de A viene dada mediante la Tabla 1.6 descrita en [6]. Esta tabla con $\eta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \sigma_1 = \sigma_4 = \tau_1 = 1$, $\eta_4 = \tau_4 = -1$ y $\eta_2 = \eta_3 = \theta_1 = \theta_4 = \sigma_2 = \sigma_3 = \tau_2 = \tau_3 = 0$, nos da los octoniones. La forma bilineal usual $(\ ,\ )$ de $\mathbb{O}$ se obtiene haciendo esta base ortonormal. Denotamos por L°_x el operador multiplicación a izquierda por x correspondiente a esta tabla y por L_x el correspondiente a los

	u	v	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
u	$\eta_1 u+\theta_1 v$	$\eta_2 u+\theta_2 v$	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
v	$\eta_3 u+\theta_3 v$	$\eta_4 u+\theta_4 v$	z_3	z_6	$-z_1$	z_5	$-z_4$	$-z_2$
z_1	z_1	$-z_3$	$-u$	z_4	v	$-z_2$	z_6	$-z_5$
z_2	z_2	$-z_6$	$-z_4$	$-u$	z_5	z_1	$-z_3$	v
z_3	z_3	z_1	$-v$	$-z_5$	$-u$	z_6	z_2	$-z_4$
z_4	z_4	$-z_5$	z_2	$-z_1$	$-z_6$	$-u$	v	z_3
z_5	z_5	z_4	$-z_6$	z_3	$-z_2$	$-v$	$-u$	z_1
z_6	z_6	z_2	z_5	$-v$	z_4	$-z_3$	$-z_1$	$-u$

Tabla 4.3: $su(3)$ actúa como derivaciones de A dejando submódulos triviales.

octoniones. Sea Z el subespacio generado por $\{z_1,\dots,z_6\}$. Claramente, para cada $z\in Z$

$$L_x^{\circ}(z)=L_x(z)+L_{(x,u)((\sigma_1-1)u+\sigma_2 v)}(z)+L_{(x,v)(\sigma_3 u+(\sigma_4-1)v)}(z).$$

Definiendo $\varphi\colon x\mapsto x+(x,u)((\sigma_1-1)u+\sigma_2 v)+(x,v)(\sigma_3 u+(\sigma_4-1)v)$, tenemos $L_x^{\circ}(z)=L_{\varphi(x)}(z)$. En particular, $\varphi(x)$ es biyectiva y podemos definir un nuevo producto

$$x*y=\varphi^{-1}(x)\circ y,$$

tal que $x*z=xz$ para todo $x\in A$, $z\in Z$. Está claro que $z*u=z\circ u=za$ y $z*v=z\circ v=zb$ con $a=\tau_1 u-\tau_2 v$ y $b=\tau_3 u-\tau_4 v$. Esto nos dice que $z*x=zx+(x,u)z(a-u)+(x,v)z(b-v)$. La aplicación $\psi\colon x\mapsto x+(x,u)(a-u)+(x,v)(b-v)$ tiene que ser biyectiva. En consecuencia podemos definir finalmente un nuevo producto $x\diamond y=x*\psi^{-1}(y)$. Este producto verifica

$$z\diamond y=zy \text{ y } x\diamond z=xz$$

y $Z^{\perp}=\langle u,v\rangle$ es una subálgebra de dimensión dos. En otras palabras, salvo isotopía podemos suponer que $\sigma_1=\sigma_4=\tau_1=1$, $\tau_4=-1$ y $\sigma_2=\sigma_3=\tau_2=\tau_3=0$ luego la multiplicación está descrita en la Tabla 4.3. Podemos escribir el producto en A

como

$$x \circ y = xy + \sigma(x, y), \tag{4.6}$$

donde $\sigma\colon \mathbb{O} \times \mathbb{O} \to \mathbb{C}$ es una aplicación bilineal que se anula en $\mathbb{O} \times Z$ y $Z \times \mathbb{O}$ y verifica

$$\begin{aligned} \sigma(u,u) &= (\eta_1 - 1)u + \theta_1 v, & \sigma(u,v) &= \eta_2 u + (\theta_2 - 1)v, \\ \sigma(v,u) &= \eta_3 u + (\theta_3 - 1)v, & \sigma(v,v) &= (\eta_4 + 1)u + \theta_4 v. \end{aligned}$$

Lema 4.3.10. *$\mathbb{O}$ con el producto $x \circ y$ de (4.6) es un álgebra de división si y sólo si $\sigma(a,b) \neq -\lambda ab$ para cualesquiera $a, b \in Z^\perp$ no nulos y $\lambda \geq 1$.*

Demostración. Dado $x \circ y = 0$ con $x \neq 0$, escribimos $x = x_0 + x_1$ con $x_0 \in Z^\perp$ y $x_1 \in Z$. La igualdad $x \circ y = 0$ implica que $xy = -\sigma(x,y)$ (luego $x_0 \neq 0$). Sea $c = \sigma(x,y) \in Z^\perp$. Tenemos $y = -\frac{\bar{x}}{n(x)}c = -\frac{\bar{x}_0}{n(x)}c - \frac{\bar{x}_1}{n(x)}c$. En particular, $c = \sigma(x,y) = -\frac{1}{n(x)}\sigma(x_0, \bar{x}_0 c)$. Con $a = x_0$ y $b = \frac{\bar{x}_0}{n(x_0)}c$ tenemos que

$$\sigma(a,b) = -\frac{n(x)}{n(x_0)}ab,$$

con $\frac{n(x)}{n(x_0)} \geq 1$. El recíproco es similar. $\square$

Podemos dar un criterio más específico para comprobar si estas álgebras son de división. Por el lema, esto es equivalente a que el álgebra $Z^\perp$ sea de división, con el producto $a \circ b + \lambda ab$, para todo $\lambda \geq 0$. El determinante del operador multiplicación a izquierda por $\alpha u + \beta v$ es una forma cuadrática en α y β con matriz coordenada $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ donde

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} = \lambda^2 + \lambda(\eta_1 + \theta_2) + \eta_1\theta_2 - \eta_2\theta_1, \\ &\alpha_{12} = \alpha_{21} = \tfrac{1}{2}\lambda(-\eta_2 + \eta_3 + \theta_1 + \theta_4) + \tfrac{1}{2}(-\eta_4\theta_1 + \eta_3\theta_2 - \eta_2\theta_3 + \eta_1\theta_4), \\ &\alpha_{22} = \lambda^2 + \lambda(-\eta_4 + \theta_3) + \eta_3\theta_4 - \eta_4\theta_3. \end{aligned}$$

Para ser un álgebra de división, para un λ dado, la forma cuadrática tiene que ser definida positiva o negativa. Como esto se tiene que cumplir para todo $\lambda \geq 0$, y para λ suficientemente grande es definida positiva, debe ser definida positiva para cualquier $\lambda \geq 0$. Esto es equivalente a la no existencia de raíces $\lambda \geq 0$ de los polinomios α_{11} y $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2$. Los polinomios correspondientes a los octoniones son $\alpha_{11} = (\lambda + 1)^2$ y $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = (\lambda + 1)^4$.

4.4. Caso $su(3)$ y A_i irreducibles

Por [6], en este caso el producto en A se puede escribir mediante las matrices complejas anti-hermitianas 3×3 de traza cero como

$$x * y = \alpha'[x, y] + \beta' i(xy + yx - \frac{2}{3}t(xy)I)$$

donde xy denota el producto usual de matrices, I la matriz identidad y $\alpha'\beta' \neq 0$.

Como las derivaciones ternarias se conservan extendiendo escalares, trabajaremos en una situación más general. *Consideramos F un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero* y $A = A_n$ $(n \geq 2)$ el conjunto de las matrices $(n+1) \times (n+1)$ sobre F de traza cero con el producto

$$x * y = \alpha xy + \beta yx - \frac{\alpha + \beta}{n+1}t(xy)I \tag{4.7}$$

donde $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Claramente $\mathrm{ad}_a \colon x \mapsto ax - xa$ es una derivación de A, luego $\mathrm{Der}(A, *)$ contiene la subálgebra $\langle \mathrm{ad}_a \mid a \in A\rangle$, un álgebra de Lie de tipo A_n. El resultado principal de esta sección es

Proposición 4.4.1. *Se verifica una de las siguientes afirmaciones:*

i) $\mathrm{Tder}(A) \cong A_n \oplus \mathcal{Z}_0$.

ii) A es isótopa a un álgebra de octoniones. En este caso $\alpha = -w^2\beta$ con $1 \neq w$ una raíz cúbica de la unidad y $\mathrm{Tder}(A) \cong D_4 \oplus \mathcal{Z}_0$.

iii) A es isótopa a las matrices 4×4 de traza cero con producto

$$x * y = xy + yx - \frac{1}{2}t(xy)I.$$

En este caso $\mathrm{Tder}(A) \cong A_5 \oplus \mathcal{Z}_0$.

Como corolario

Corolario 4.4.2. *Sea A un álgebra de división real de dimensión ocho obtenida de las matrices complejas anti-hermitianas 3×3 de traza cero con el producto dado por*

$$x * y = \alpha'[x,y] + \beta' i(xy + yx - \frac{2}{3}t(xy)I),$$

donde xy denota el producto usual de matrices y $\alpha'\beta' \neq 0$. Entonces, o bien

i) $\mathrm{Tder}(A) \cong su(3) \oplus \mathcal{Z}_0$ *o bien*

ii) $\mathrm{Tder}(A) \cong D_4 \oplus \mathcal{Z}_0$. *En este caso $\beta' = \pm\sqrt{3}\alpha'$ y A es una isótopa de $\mathbb{O}$.*

Demostración. Podemos escribir el producto como $x * y = (\alpha' + \beta' i)xy + (\beta' i - \alpha')yx - \frac{2\beta' i}{3}t(xy)I$. Extendiendo escalares, la proposición previa nos dice que las únicas dos posibilidades son i) y ii). La segunda ocurre si y sólo si $(\alpha' + \beta' i) = -w^2(\beta' i - \alpha')$, esto es, $\beta' = \pm\sqrt{3}\alpha'$. □

4.4.1. Proyecciones de $\mathrm{Tder}(A)$

Como ad_A–módulo, $A \cong A_n \cong V(\lambda_1 + \lambda_n)$. Es sabido [4] que $\mathrm{End}_F(A) \cong A^* \otimes A \cong V(\lambda_1 + \lambda_n) \otimes V(\lambda_1 + \lambda_n)$ se descompone como

$$\mathrm{End}_F(A) \cong \begin{cases} V(4\lambda_1) \oplus V(2\lambda_1) \oplus V(0), \text{ si } n = 1 \\[2em] V(2\lambda_1 + 2\lambda_2) \oplus V(3\lambda_1) \oplus V(3\lambda_2) \oplus 2V(\lambda_1 + \lambda_2) \oplus V(0), \text{ si } n = 2 \\[2em] V(2\lambda_1 + 2\lambda_3) \oplus V(2\lambda_1 + \lambda_2) \oplus V(\lambda_2 + 2\lambda_3) \\ \qquad\qquad \oplus V(2\lambda_2) \oplus 2V(\lambda_1 + \lambda_3) \oplus V(0), \text{ si } n = 3 \\[2em] V(2\lambda_1 + 2\lambda_n) \oplus V(2\lambda_1 + \lambda_{n-1}) \oplus V(\lambda_2 + 2\lambda_n) \\ \qquad\qquad \oplus V(\lambda_2 + \lambda_{n-1}) \oplus 2V(\lambda_1 + \lambda_n) \oplus V(0), \text{ si } n \geq 4 \end{cases}$$

La forma bilineal $(x,y) = t(xy)$ es no degenerada en A, cumple $(x*y,z) = (x, y*z)$ e induce una involución en $\mathrm{End}_F(A)$. Sean $\mathrm{Skew}(A)$ los operadores antisimétricos para (,), y Sym(A) los simétricos. Entonces

$$\mathrm{Skew}(A) \cong \begin{cases} V(2\lambda_1), & \text{si } n = 1 \\ \\ V(3\lambda_1) \oplus V(3\lambda_2) \oplus V(\lambda_1 + \lambda_2), & \text{si } n = 2 \\ \\ V(2\lambda_1 + \lambda_2) \oplus V(\lambda_2 + 2\lambda_3) \oplus V(\lambda_1 + \lambda_3), & \text{si } n = 3 \\ \\ V(2\lambda_1 + \lambda_{n-1}) \oplus V(\lambda_2 + 2\lambda_n) \oplus V(\lambda_1 + \lambda_n), & \text{si } n \geq 4 \end{cases}$$

mientras que Sym(A) es la suma directa de los submódulos restantes. En particular, todo submódulo irreducible no isomorfo a $V(\lambda_1+\lambda_n)$, está formado por aplicaciones simétricas o antisimétricas.

Sea S una subálgebra de Lie de $\mathrm{End}_F(A)$ que contenga a ad_A, entonces S se puede escribir como suma directa de submódulos irreducibles y $\mathrm{ad}_A \cong V(\lambda_1 + \lambda_n) \subseteq S$. Como ad_A son operadores antisimétricos, entonces S debe contener las componentes simétrica y antisimétrica de todos sus elementos.

Sea $\pi_i\colon (d_1, d_2, d_3) \mapsto d_i$ y $L_i = \pi_i(\mathrm{Tder}(A))$. L_i es una subálgebra de Lie de $\mathrm{End}_F(A)$ que contiene a ad_A, luego contiene las partes simétrica y antisimétrica de todos sus elementos. Por lo tanto L_i es invariante por la involución $d \mapsto d^*$, inducida por (,). Entonces, dado $(d_1, d_2, d_3) \in \mathrm{Tder}(A)$, como (,) es asociativa, $(-d_2^*, d_3, -d_1^*) \in \mathrm{Tder}(A)$. La aplicación

$$\theta\colon (d_1, d_2, d_3) \mapsto (-d_2^*, d_3, -d_1^*)$$

es un automorfismo de $\mathrm{Tder}(A)$ con $\Theta^3 = \mathrm{Id}$. En particular, $L_1 = L_2^* = L_2 = L_3$.

Nota 4.4.3. *En lo sucesivo estudiaremos el álgebra de Lie*

$$L = [L_i, L_i].$$

Como $\mathrm{ad}_A \subseteq L$ *actúa irreduciblemente en* A*, el trabajo de Dynkin [13] sugiere que sólo hay unas pocas posibilidades para* L*.*

La trasposición de matrices, $x \mapsto x^T$, es una involución de $(A, *)$ luego

$$\tau\colon (d_1, d_2, d_3) \mapsto (\bar{d}_1, \bar{d}_3, \bar{d}_2),$$

donde $\bar{d}(x) = d(x^T)^T$, es un automorfismo con $\tau^2 = \mathrm{Id}$. Ambos automorfismos θ y τ están relacionados mediante

$$\tau\theta\tau = \theta^2. \tag{4.8}$$

Lema 4.4.4. *Tenemos que, o bien* $L \cap \mathrm{Skew}(A) = \mathrm{ad}_A$ *o* $\mathrm{Skew}(A) \subseteq L$.

Demostración. Sea $L_0 = L \cap \mathrm{Skew}(A)$, como $\mathrm{Skew}(A) = V(2\lambda_1 + \lambda_{n-1}) \oplus V(\lambda_2 + 2\lambda_n) \oplus V(\lambda_1 + \lambda_n)$ entonces, bien $L_0 = \mathrm{ad}_A$ o bien L_0 contiene una copia de $V(\lambda_2 + 2\lambda_n)$ o $V(2\lambda_1 + \lambda_{n-1})$. En el caso de que $L_0 = \mathrm{ad}_A \oplus V(\lambda_2 + 2\lambda_n)$, como A es un L_0–módulo irreducible fiel, L_0 debe ser semisimple como álgebra de Lie. La forma de Killing de L_0 será no degenerada e invariante, luego ad_A y $V(\lambda_2 + 2\lambda_n)$ serán ortogonales y $V(\lambda_2 + 2\lambda_n)$ será isomorfo a su módulo dual. En cualquier caso esto es falso. De igual modo podemos descartar la posibilidad $L_0 = \mathrm{ad}_A \oplus V(2\lambda_1 + \lambda_{n-1})$, y nos queda solamente $L_0 = \mathrm{Skew}(A)$. $\square$

Lema 4.4.5. *Tenemos que o bien*

i) L *es* $\{\mathrm{ad}_a \,|a \in A\}$, $\mathrm{Skew}(A)$ *o* $sl(A)$,

o bien

ii) $n = 3$ *y* $L \cong A_5$.

Demostración. En caso de que $L \cap \mathrm{Skew}(A) = \mathrm{Skew}(A)$, como $\mathrm{Sym}(A) \cap sl(A)$ es un $\mathrm{Skew}(A)$–módulo irreducible, entonces $L = \mathrm{Skew}(A)$ o $L = sl(A)$. En lo sucesivo supondremos que $L_0 = L \cap \mathrm{Skew}(A) = \mathrm{ad}_A$. Como ad_A–módulo, $\mathrm{Sym}(A)$ se descompone como

$$\mathrm{Sym}(A) \cong \begin{cases} V(4\lambda_1) \oplus V(0), & \text{si } n = 1 \\ \\ V(2\lambda_1 + 2\lambda_2) \oplus V(\lambda_1 + \lambda_2) \oplus V(0), & \text{si } n = 2 \\ \\ V(2\lambda_1 + 2\lambda_3) \oplus V(2\lambda_2) \oplus V(\lambda_1 + \lambda_3) \oplus V(0), & \text{si } n = 3 \\ \\ V(2\lambda_1 + 2\lambda_n) \oplus V(\lambda_2 + \lambda_{n-1}) \oplus V(\lambda_1 + \lambda_n) \oplus V(0), & \text{si } n \geq 4 \end{cases}$$

Distinguiremos varios casos:

1. $V(2\lambda_1 + 2\lambda_n) \subseteq L \cap \mathrm{Sym}(A)$: Consideramos las aplicaciones $\epsilon_{a,b}\colon x \mapsto (x,a)b + (x,b)a$. Para todo $d \in \mathrm{Skew}(A)$ tenemos $[d, \epsilon_{a,b}] = \epsilon_{d(a),b} + \epsilon_{a,d(b)}$. Entonces $\epsilon_{E_{1,n+1},E_{1,n+1}}$ es un vector de peso máximo, de peso $2\lambda_1 + 2\lambda_n$ y $V(2\lambda_1 + 2\lambda_n)$ es el submódulo generado por $\epsilon_{E_{1,n+1},E_{1,n+1}}$. El peso mínimo de $V(2\lambda_1 + 2\lambda_n)$ es $-(2\lambda_1 + 2\lambda_n)$ y un vector peso asociado es $\epsilon_{E_{n+1,1},E_{n+1,1}}$.

Sea $\delta_{a,b}\colon x \mapsto (x,a)b - (x,b)a$. Claramente, $\delta_{a,b} \in \mathrm{Skew}(A)$. Además, dado un $f \in \mathrm{Sym}(A)$ tenemos que $[f, \epsilon_{a,b}] = -\delta_{f(a),b} + \delta_{a,f(b)}$. En particular el elemento $[\epsilon_{E_{1,n+1},E_{1,n+1}}, \epsilon_{E_{n+1,1},E_{n+1,1}}] = -4\delta_{E_{1,n+1},E_{n+1,1}}$ pertenece a L_0. Conmutando este elemento con $\mathrm{ad}_{E_{ij}}$ $i \neq j$ obtenemos que $\mathrm{Skew}(A) = \delta_{A,A} \subseteq L_0$, contradiciendo nuestra suposición.

2. $V(\lambda_1 + \lambda_n) \subseteq L \cap \mathrm{Sym}(A)$: Las aplicaciones $T_a\colon x \mapsto ax + xa - \frac{2}{n+1}t(ax)$ son simétricas y forman un submódulo isomorfo a $V(\lambda_1 + \lambda_n)$. Además,

$$[T_a, T_b](x) = [[a,b],x] + \frac{4}{n+1}t(ax)b - \frac{4}{n+1}t(bx)a.$$

Por tanto $V(\lambda_1 + \lambda_n) \subseteq L \cap \mathrm{Sym}(A)$ implica que $\mathrm{ad}_{[a,b]} + \frac{4}{n+1}\delta_{a,b} \in L_0$, lo que implica que $\delta_{a,b} \in L_0$, luego $L_0 = \mathrm{Skew}(A)$ con lo que llegamos a una contradicción.

Notar que en este momento hemos probado el lema para el caso $n = 2$, luego supondremos que $n \geq 3$.

3. $V(\lambda_2 + \lambda_{n-1}) \subseteq L \cap \mathrm{Sym}(A)$ y $n \geq 3$: La aplicación $\epsilon = \epsilon_{E_{1,n},E_{2,n+1}} - \epsilon_{E_{1,n+1},E_{2,n}}$ es un vector de peso máximo, de peso $\lambda_2 + \lambda_{n-1}$. Entonces $V(\lambda_2 + \lambda_{n-1})$ es el submódulo generado por ϵ. Un vector peso de peso mínimo es $\epsilon_{E_{n,1},E_{n+1,2}} - \epsilon_{E_{n+1,1},E_{n,2}}$. Como $[\epsilon, \epsilon_{E_{n,1},E_{n+1,2}} - \epsilon_{E_{n+1,1},E_{n,2}}] = -\delta_{E_{2,n+1},E_{n+1,2}} + \delta_{E_{n,1},E_{1,n}} - \delta_{E_{2,n},E_{n,2}} + \delta_{E_{n+1,1},E_{1,n+1}} \in L_0$ y $L_0 = \mathrm{ad}_A$ entonces esta aplicación debe ser ad_D para alguna matriz diagonal $D \in A$. Cuando lo aplicamos a $E_{i,j}$ con $(i,j) \notin \{(1,n), (n,1), (2,n+1), (n+1,2), (n+1,1), (1,n+1), (2,n), (n,2)\}$ obtenemos 0. Los elementos $E_{1,n}, E_{2,n+1}, E_{1,n+1}$ y $E_{2,n}$ son vectores propios de valor propio 1, y los elementos $E_{n,1}, E_{n+1,2}, E_{n+1,1}$ y $E_{n,2}$ son vectores propios de valor propio -1. Si denotamos por ϵ_i la aplicación que asocia a D el i–ésimo elemento de su diagonal, entonces $\epsilon_i(D) - \epsilon_j(D) = 0$ si $(i,j) \notin \{(1,n), (n,1), (2,n+1), (n+1,2),$

$(n+1,1)$, $(1,n+1)$, $(2,n)$, $(n,2)\}$, $\epsilon_1(D)-\epsilon_n(D)=1$, $\epsilon_2(D)-\epsilon_{n+1}(D)=1$, $\epsilon_1(D)-\epsilon_{n+1}(D)=1$ y $\epsilon_2(D)-\epsilon_n(D)=1$.

En el caso de que $n>3$ entonces $\epsilon_i(D)=\epsilon_3(D)$, luego $D=\epsilon_3(D)\,\mathrm{Id}$. Como la traza de D es cero entonces $D=0$. Esto contradice la igualdad $\epsilon_1(D)-\epsilon_n(D)=1$.

Para el caso $n=3$ las condiciones anteriores sobre $\epsilon_i(D)$ son compatibles e implican que $D=\mathrm{diag}(1/2,1/2,-1/2,-1/2)$. En este caso $L=\mathrm{ad}_A\oplus V(2\lambda_2)$ será isomorfa a un álgebra de Lie simple de dimensión 35, esto es A_5. □

4.4.2. Demostración de la Proposición 4.4.1

L es un álgebra de Lie simple y A es un L–módulo irreducible, luego $L_1=L_2=L_3=L\oplus F\,\mathrm{Id}$. El núcleo de la proyección $\pi_2\colon\ \mathrm{Tder}(A)\to L_i$ es $\{(d_1,0,d_3)\in\mathrm{Tder}(A)\}$. Dadas dos derivaciones ternarias $(d_1,0,d_3),(d_1',0,d_3')\in\mathrm{Tder}(A)$, entonces $(-d_3^*,-d_1^*,0)$ y $([d_1',d_3^*],0,0)$ están en $\mathrm{Tder}(A)$ también. El producto $A*A$ es un submódulo no nulo de A para la acción de ad_A, luego $A*A=A$ y $[d_1',d_3^*]=0$. Tanto $\pi_1(\ker\pi_2)$ como $\pi_3(\ker\pi_2)^*$ son ideales que conmutan de $L\oplus F\,\mathrm{Id}$, por lo que uno de ellos es $F\,\mathrm{Id}$. En el caso de que $\pi_1(\ker\pi_2)=F\,\mathrm{Id}$ tenemos que $d_1=\lambda\,\mathrm{Id}$ para algún $\lambda\in F$, luego $(-d_3^*,-\lambda\,\mathrm{Id},0)\in\mathrm{Tder}(A)$ y $d_3^*=\lambda\,\mathrm{Id}$, lo que prueba que $\ker\pi_2=F(\mathrm{Id},0,\mathrm{Id})$. Si $\pi_3(\ker\pi_2)=F\,\mathrm{Id}$ entonces $\ker\pi_2=F(\mathrm{Id},0,\mathrm{Id})$ también. Argumentos análogos prueban que $\ker\pi_1=F(0,\mathrm{Id},-\mathrm{Id})$ y $\ker\pi_3=F(\mathrm{Id},\mathrm{Id},0)$. La proyección π_2 nos da un isomorfismo del ideal $\{(d_1,d_2,d_3)\in\mathrm{Tder}(A)\,|\,t(d_2)=t(d_3)=0\}$ en L, luego $\mathrm{Tder}(A)\cong L\oplus\mathcal{Z}_0$.

Eliminemos ahora la posibilidad $L=sl(A)$. En caso contrario, como $L=sl(A)$ es simple, las aplicaciones

$$\xi\colon d_1\mapsto d_2 \quad\text{y}\quad \xi'\colon d_1\mapsto d_3,$$

con $(d_1,d_2,d_3)\in\mathrm{Tder}(A)$, inducen automorfismos en L. Por lo tanto, para cada $d\in L$

$$\xi(d)=\begin{cases} PdP^{-1} & \forall d\in L\\ \text{o} & \\ -Pd^TP^{-1} & \forall d\in L\end{cases}$$

para alguna aplicación lineal inversible P. Análogamente $\xi'(d)$ es o bien QdQ^{-1} o bien $-Qd^TQ^{-1}$ para alguna Q inversible. Cambiando por isotopía, obtenemos el producto $\circ$ en A con una de las siguientes propiedades

1. $\{(d,d,d)\,|\,d\in sl(A)\}\subseteq \mathrm{Tder}(A,\circ)$: en este caso $\circ\in \mathrm{Hom}_L(A\otimes A,A)$,

2. $\{(d,-d^T,d)\,|\,d\in sl(A)\}\subseteq \mathrm{Tder}(A,\circ)$: entonces $\circ\in \mathrm{Hom}_L(A^*\otimes A,A)$,

3. $\{(d,d,-d^T)\,|\,d\in sl(A)\}\subseteq \mathrm{Tder}(A,\circ)$: por tanto $\circ\in \mathrm{Hom}_L(A\otimes A^*,A)$,

4. $\{(d,-d^T,-d^T)\,|\,d\in sl(A)\}\subseteq \mathrm{Tder}(A,\circ)$: luego $\circ\in \mathrm{Hom}_L(A^*\otimes A^*,A)$,

donde A^* denota el dual de A. Como módulo para $sl(A)$, A es isomorfa a $V(\lambda_1)$ y $A\otimes A^*\cong V(\lambda_1+\lambda_n)\oplus V(0)$, luego $\mathrm{Hom}_L(A\otimes A^*,A)=0$. Como $\mathrm{Hom}_L(A\otimes A,A)\cong \mathrm{Hom}_L(A,A\otimes A^*)$ entonces $\mathrm{Hom}_L(A\otimes A,A)=\mathrm{Hom}_L(A^*\otimes A^*,A)=0$.

Fijémonos ahora en el caso $L=\mathrm{Skew}(A)$. Sea $w\in F$, con $w^3=1$ una raíz primitiva de la unidad. Como $\theta^3=\mathrm{Id}$, los únicos espacios vectoriales propios (asociados a valores propios) posibles de θ son de la forma $S(w^i)=\{(d,w^id,w^{2i}d)\in \mathrm{Tder}(A)\}$. En el caso de que $S(w)=S(w^2)=0$, $\mathrm{Der}(A)=\mathrm{Skew}(A)$, pero $A\otimes A$ no contiene ningún $\mathrm{Skew}(A)$–submódulo isomorfo a A. En el caso de que $S(w)\neq 0$, cambiando si es preciso w por w^2, podemos suponer que $V(2\lambda_1+\lambda_{n-1})\subseteq S(w)$. Como la aplicación $\varphi=\delta_{E_{1,n+1},E_{1,n}}: x\mapsto (x,E_{1,n+1})E_{1,n}-(x,E_{1,n})E_{1,n+1}$ está en $V(2\lambda_1+\lambda_{n-1})$ entonces

$$(\varphi,w\varphi,w^2\varphi)\in \mathrm{Tder}(A).$$

En particular,

$$\varphi(E_{n,1}*E_{n+1,1})=\begin{cases}0,\\ \\ -wE_{1,n+1}*E_{n+1,1}+w^2E_{n,1}*E_{1,n}=(w^2\beta-w\alpha)E_{11}+\\ +w^2\alpha E_{nn}-w\beta E_{n+1,n+1}+(w-w^2)\frac{\alpha+\beta}{n+1}I.\end{cases}$$

Si $n>2$ entonces $n+1>3$ y $\alpha=0=\beta$. Entonces n ha de ser igual a 1 ó 2. En el caso de que $n=1$, $\mathrm{Skew}(A)=\mathrm{ad}_A$. Si por el contrario $n=2$ entonces tenemos que $\mathrm{diag}(-w\alpha+w^2\beta,w^2\alpha,-w\beta)=\frac{w^2-w}{3}(\alpha+\beta)I$, luego $\alpha=-w^2\beta$ y salvo isotopía A es un álgebra de Okubo, esto es, una isótopa de un álgebra de octoniones [17].

Consideramos ahora el caso excepcional aparecido en el lema previo. El álgebra de Lie L se descompone como $L = A_3 \oplus V(2\lambda_2)$ y el vector peso máximo de $V(2\lambda_2)$ es $\varphi = \epsilon_{E_{1,3},E_{2,4}} - \epsilon_{E_{1,4},E_{2,3}}$. Como por (4.8) el automorfismo τ permuta $S(w)$ y $S(w^2)$, estos dos espacios tienen submódulos de la misma dimensión. Por tanto $S(w) = 0 = S(w^2)$ y

$$\mathrm{Tder}(A) = \{(d, -d^*, -d^*) \,|\, d \in L\} \oplus \mathcal{Z}_0.$$

La condición de derivación ternaria de φ se puede ver como

$$\varphi(x * y) = -\varphi(x) * y - x * \varphi(y).$$

Evaluando en $E_{4,2} * E_{3,1}$ tenemos que

$$\varphi(E_{4,2} * E_{3,1}) = \begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \\ -\varphi(E_{4,2}) * E_{3,1} - E_{4,2} * \varphi(E_{3,1}) = \\ \qquad -\alpha E_{1,1} - \beta E_{2,2} - \beta E_{3,3} - \alpha E_{4,4} + \frac{\alpha+\beta}{2} I \end{cases}$$

luego $\alpha = \beta$ y el álgebra es isótopa a la que aparece en el apartado iii). La existencia de este caso se estudia en la siguiente sección.

4.4.3. El caso excepcional

El álgebra $(A, *)$ correspondiente a $n = 3$ y $0 \neq \alpha = \beta$ es excepcional dentro de la familia de álgebras A_n de la matrices $(n+1) \times (n+1)$ de traza cero con el producto

$$\alpha xy + \beta yx - \frac{\alpha + \beta}{n+1} t(xy) I.$$

En esta sección comprobaremos que $\mathrm{Tder}(A, *) \cong A_5 \oplus \mathcal{Z}_0$. Como hemos probado que si $L = \mathrm{ad}_A$ o bien $(A, *)$ es isótopa a un álgebra de octoniones o bien $L \cong A_5$, entonces se trata de probar que en este caso excepcional $L \neq \mathrm{ad}_A$. La forma mas rápida es comprobando que la aplicación $d = \epsilon_{E_{1,3},E_{2,4}} - \epsilon_{E_{1,4},E_{2,3}}$, descrita anteriormente, nos da una derivación ternaria $(d, -d, -d)$. Esta aplicación, como es simétrica respecto a $(x, y) = t(xy)$ no pertenece a ad_A. De hecho, linealizando dos veces la identidad

$$x^4 - \frac{1}{2}t(x^2)x^2 - \frac{1}{3}t(x^3)x + \frac{1}{4}(\frac{1}{2}t(x^2)^2 - t(x^4))I,$$

cierta para cualquier matriz x de A_3, se prueba fácilmente que las aplicaciones simétricas $x \mapsto \sum_i a_i x b_i + b_i x a_i - (a_i, x)b_i - (b_i, x)a_i$ con $\sum_i a_i b_i + b_i a_i = 0$, $a_i, b_i \in A_3$, dan derivaciones ternarias de $(A, *)$ de la forma $(d, -d, -d)$. La aplicación $\epsilon_{E_{1,3},E_{2,4}} - \epsilon_{E_{1,4},E_{2,3}}$ es un ejemplo. De todos modos veremos otra aproximación.

Para entender la forma en que A_5 actúa como derivaciones ternarias en A, consideramos el espacio vectorial W ($\dim W \geq 2$) provisto de una forma bilineal simétrica no degenerada $(\, , \,)$. Para todo $\varphi \in \mathrm{End}_F(W)$ denotamos por φ^* el adjunto de φ respecto a $(\, , \,)$, luego $(\varphi(w), w') = (w, \varphi^*(w'))$ para todo $w, w' \in W$. El álgebra de Lie $sl(W)$, de aplicaciones lineales de traza cero sobre W, actúa sobre las aplicaciones antisimétricas $so(W) = \{\delta \in \mathrm{End}_F(W) \mid \delta^* = -\delta\}$ mediante

$$\varphi \cdot \delta = \varphi\delta + \delta\varphi^*. \tag{4.9}$$

El módulo $so(W)$ con esta acción es isomorfo a la segunda potencia exterior $\wedge^2 W$ de W con la acción natural, el isomorfismo viene dado por $w_1 \wedge w_2 \mapsto \delta_{w_1,w_2} \colon w \mapsto (w_1, w)w_2 - (w_2, w)w_1$. La forma bilineal $(\delta_1, \delta_2) = t(\delta_1\delta_2)$ es no degenerada en $so(W)$ y para todo $\varphi \in sl(W)$ tenemos que $(\varphi \cdot \delta_1, \delta_2) = t(\varphi\delta_1\delta_2 + \delta_1\varphi^*\delta_2) = t(\delta_1\delta_2\varphi + \delta_1\varphi^*\delta_2) = (\delta_1, \varphi^* \cdot \delta_2)$.

Consideremos ahora el espacio vectorial V, de dimensión cuatro sobre un cuerpo F algebraicamente cerrado de característica cero, y la acción natural de A_3 en V. La segunda potencia exterior, $W = \wedge^2 V$, tiene dimensión seis y el isomorfismo $\wedge^4 V \cong F$ dado por el determinante respecto a una base fijada, proporciona una forma bilineal simétrica no degenerada $(\, , \,)$ en W, invariante por la acción de A_3, es decir, A_3 actúa en W como aplicaciones antisimétricas respecto a $(\, , \,)$. Como $\dim so(W) = 15$, tenemos que $A_3 \cong so(W)$, luego $A_5 \cong sl(W)$ actúa sobre A_3 mediante (4.9). Esta es la acción que estamos buscando.

Como $\dim W = 6$, entonces $\wedge^6 W \cong F$ determina una forma trilineal simétrica no nula $(\, , \, , \,) \colon so(W) \otimes so(W) \otimes so(W) \cong \wedge^2 W \otimes \wedge^2 W \otimes \wedge^2 W \to \wedge^6 W \cong F$, invariante para $sl(W)$. Las formas bilineal y trilineal en $so(W)$ definen un producto conmutativo $*$ mediante

$$(\delta_1, \delta_2, \delta) = (\delta_1 * \delta_2, \delta)$$

para todo $\delta_1, \delta_2, \delta \in so(W)$. Este producto está relacionado con la acción de $sl(W)$ por

$$\begin{aligned}(\varphi \cdot (\delta_1 * \delta_2), d) &= (\delta_1 * \delta_2, \varphi^* \cdot \delta) = (\delta_1, \delta_2, \varphi^* \cdot \delta) \\ &= -(\varphi^* \cdot \delta_1, \delta_2, \delta) - (\delta_1, \varphi^* \cdot \delta_2, \delta) \\ &= ((-\varphi^* \cdot \delta_1) * \delta_2 + \delta_1 * (-\varphi^* \cdot \delta_2), \delta),\end{aligned}$$

esto es,

$$\varphi \cdot (\delta_1 * \delta_2) = (-\varphi^* \cdot \delta_1) * \delta_2 + \delta_1 * (-\varphi^* \cdot \delta_2). \tag{4.10}$$

De este modo $sl(W)$ actúa como derivaciones ternarias en $(so(W), *)$.

Veamos que, salvo múltiplos escalares, este producto $*$ es precisamente el producto $\delta_1 * \delta_2 = \delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_1 - \frac{1}{2}t(\delta_1\delta_2)\,\mathrm{Id}$. Para esto observamos que en el caso de que $\varphi \in so(W)$, $\varphi^* = -\varphi$ y $\varphi \cdot \delta = \varphi\delta - \delta\varphi$, recuperando por tanto la acción adjunta de $so(W)$. Además, por (4.10), $*$ puede verse como un homomorfismo no nulo, $\mathrm{Sym}(so(W)) \to so(W)$, de $so(W)$–módulos. En general no existen estos homomorfismos. Nuestra situación excepcional proviene del hecho de que $so(W) \cong A_3$, un álgebra de Lie de tipo A, y entonces, salvo múltiplos escalares, existe un único homomorfismo de este tipo: $\delta_1 * \delta_2 = \delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_1 - \frac{1}{2}t(\delta_1\delta_2)\,\mathrm{Id}$.

Como $sl(W)$–módulo, $so(W) \cong \wedge^2 W \cong V(\lambda_2)$ luego $\mathrm{End}_F(so(W)) \cong V(\lambda_2) \otimes V(\lambda_4) \cong V(0) \oplus V(\lambda_1 + \lambda_5) \oplus V(\lambda_2 + \lambda_4)$. Mirando A_5 como incluido en $\mathrm{End}_F(so(W))$ por (4.9), cualquier subálgebra de Lie de $\mathrm{End}_F(so(W))$ que contenga a A_5 y la identidad I es o bien $A_5 \oplus V(0)$ o todo $\mathrm{End}_F(so(W))$. En particular, la proyección de $\mathrm{Tder}(A, *)$ en cada componente es $A_5 \oplus V(0)$ o bien todo $\mathrm{End}_F(so(W))$. Como al principio de la Subsección 4.4.2 podemos eliminar el último caso y obtener $\mathrm{Tder}(A) \cong A_5 \oplus \mathscr{Z}_0$.

En breve.

En este capítulo hemos utilizado el grupo $\mathcal{G} = \mathcal{G}(A)$ presentado en la Sección 1.4, y el álgebra de Lie de derivaciones ternarias de un álgebra A, que es un invariante de la acción de $\mathcal{G}$, para modelizar y clasificar las álgebras de división reales.

Hemos comenzado con algunos resultados sobre la estructura de $\mathrm{Tder}(A)$ y acotando su dimensión y su rango toral. Si $\mathrm{Tder}\, A$ no es abeliana entonces $\mathrm{Tder}\, A = S \oplus \mathcal{Z}$ donde $\mathcal{Z}$ es el centro y S es un álgebra de Lie semisimple compacta, y tenemos que para $\dim A = 4$ la dimensión de $\mathrm{Tder}(A)$ es menor o igual que 11, el rango toral de $\mathrm{Tder}(A) \leq 5$, y si la dimensión de A es 8 entonces $\dim \mathrm{Tder}(A) \leq 30$ y el rango toral de $\mathrm{Tder}(A) \leq 6$. En ambos casos el rango toral de S es menor o igual que 4. Además las cotas superiores se alcanzan únicamente en isótopas de $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$.

Los resultados obtenidos para las distintas dimensiones quedan reflejados en la siguiente tabla:

$\dim A$	$\mathrm{Tder}\, A$	A^σ
1	$\mathcal{Z}$ de dimensión 2	$\mathbb{R}$
2	$\mathcal{Z}$ de dimensión 4	$\mathbb{C}$
4	$su(2) \oplus su(2) \oplus su(2) \oplus \mathcal{Z}$	$\mathbb{H}$
	$su(2) \oplus \mathcal{Z}$	$xy - \frac{(1-\beta)}{2} t(xy_0)1$ con $\beta > 0$
		$xy - t(xcy)1$ con $c \in \mathbb{H}$, $c \notin \mathbb{R}$ y $t(c) \neq 1$
8	contiene a B_2	$xy + (a,x)b(cy)$ con $a,b,c \in \langle 1,i,j \rangle \subseteq \mathbb{O}$ y $(a,bc) \neq -1$
	$D_4 \oplus \mathcal{Z}$ si $\beta = 1$	$xy - \frac{1-\beta}{2} t(xy_0)1$
	$G_2 \oplus \mathcal{Z}$ si $\beta \neq 1$	
	contiene a $su(3)$	$xy + \sigma(x,y)$ con $\sigma(a,b) \neq -\lambda ab$ $0 \neq a,b \in \mathbb{C}$,$\lambda \geq 1$, $\sigma(\mathbb{C}^\perp, \mathbb{O}) + \sigma(\mathbb{O}, \mathbb{C}^\perp) = 0$
	$D_4 \oplus \mathcal{Z}$ si $\beta' = \pm\sqrt{3}\alpha'$	$\alpha'[x,y] + \beta' i(xy + yx - \frac{2}{3} t(xy)I)$
	$su(3) \oplus \mathcal{Z}$ si $\beta' \neq \pm\sqrt{3}\alpha'$	

Bibliografía

[1] P. Alberca Bjerregaard, A. Elduque, C. Martín González, F.J. Navarro Márquez: On the Cartan–Jacobson theorem. J. Algebra **250** (2002), no. 2, 397–407.

[2] P. Alberca Bjerregaard, C. Martín González: Automorphism Groups of Composition Algebras and Quark Models. Hadronic Journal **19** (1996), no. 6, 637–653.

[3] S. C. Althoen, L. D. Kugler: When is $\mathbb{R}^2$ a division algebra? Amer. Math. Monthly **90** (1983), no. 9, 625–635.

[4] G. M. Benkart, J. M. Osborn: Flexible Lie–Admissible Algebras. J. Algebra **71** (1981), no. 1, 11–31.

[5] G. M. Benkart, J. M. Osborn: The derivation algebra of a real division algebra. Amer. J. Math. **103** (1981), no. 6, 1135–1150.

[6] G. M. Benkart, J. M. Osborn: An investigation of real division algebras using derivations. Pacific J. Math. **96** (1981), no. 2, 265–300.

[7] M. R. Bremner, R. V. Moody, J. Patera: Tables of dominant weight multiplicities for representations of simple Lie algebras. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **90** Marcel Dekker, Inc., New York, 1985.

[8] I. Burdujan: Types of nonisomorphic two–dimensional real division algebras. Proceedings of the national conference on algebra (Romanian) (Iaşi, 1984). An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi Secţ. I a Mat. **31** (1985), suppl., 102–105.

[9] A. L. Cali, M. Josephy: Two–dimensional real division algebras. Rev. Un. Mat. Argentina **32** (1985), no. 1, 58–63.

[10] E. Dieterich: Classification, automorphism groups and categorical structure of the two–dimensional real division algebras. J. Algebra Appl. **4** (2005), no. 5, 517–538.

[11] The Dniester notebook: Unsolved problems in the theory of rings and modules. Fourth edition. Compiled by V. T. Filippov, V. K. Kharchenko and I. P. Shestakov, Rossiĭskaya Akademiya Nauk Sibirskoe Otdelenie, Institut Matematiki, Novosibirsk, 1993. (English translation in http://math.usask.ca/~bremner/research/translations/dniester.pdf)

[12] D. Ž. Doković, K. Zhao: Real division algebras with large automorphism group. J. Algebra **282** (2004), no. 2, 758–796.

[13] E. B. Dynkin: Maximal subgroups of the classical groups. Trudy Moskov. Mat. Obšč. **1** (1952), 39–166.

[14] P. Eakin, A. Sathaye: On Automorphisms and Derivations of Cayley–Dickson Algebras. J. Algebra **129** (1990), 263–278.

[15] A. Elduque: On triality and automorphisms and derivations of composition algebra. Linear Algebra Appl. **314** (2000) (1-3), 49–74.

[16] A. Elduque: The magic square and symmetric compositions. Rev. Mat. Iberoamericana **20** (2004), no. 2, 475–491.

[17] A. Elduque: Okubo algebras and twisted polynomials. Recent progress in algebra (Taejon/Seoul, 1997), Contemp. Math., **224**, Amer. Math. Soc., (1999) 101–109.

[18] A. Elduque: Symmetric composition algebras. J. Algebra **196** (1997), no. 1, 282–300.

[19] A. Elduque: Okubo algebras in characteristic 3 and their automorphisms. Comm. Algebra **27** (1999), no. 6, 3009 –3030.

[20] L. Huang, W. So: Quadratic formulas for quaternions. Appl. Math. Lett. **15** (2002), no. 5, 533–540.

[21] M. Hübner, H. P. Petersson: Two–dimensional real division algebras revisited. Beiträge Algebra Geom. **45** (2004), no. 1, 29–36.

[22] J. E. Humphreys: Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Springer–Verlag, New York, 1972.

[23] N. Jacobson: Exceptional Lie algebras. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 1, Marcel Dekker, Inc., New York 1971.

[24] N. Jacobson: Lie Algebras. Dover, New York, 1979.

[25] N. Jacobson: Structure and representations of Jordan algebras. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXIX American Mathematical Society, Providence, R.I. 1968.

[26] N. Jacobson: Composition algebras and their automorphisms. Rend. Circ. Mat. Palermo **2** (1958), no. 7, 55–80.

[27] C. Jiménez–Gestal, J. M. Pérez–Izquierdo: Ternary derivations of generalized Cayley–Dickson algebras, Comm. Algebra **31** (2003), no. 10, 5071–5094.

[28] C. Jiménez–Gestal, J. M. Pérez–Izquierdo: Ternary derivations of finite–dimensional real division algebras, Linear Algebra and its Applications **428** (2008), 2192–2219.

[29] I. Kaplansky: Infinite dimensional quadratic forms permitting composition. Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 775–783.

[30] M. Kervaire: Non–parallelizability of the n sphere for $n > 7$. Proc. Nat. Acad. Sci. **44** (1958), 280–283.

[31] M.A. Knus, A.S. Merkurjev, M. Rost, J.P. Tignol :The Book of Involutions. American Mathematical Society Colloq. Publ. **44**, American Mathematical Society: Providence, RI, 1998.

[32] K. McCrimmon: Nonassociative algebras with scalar involution. Pacific J. Math. **116** (1985), no. 1, 85–109.

[33] K. McCrimmon: Derivations and Cayley derivations of generalized Cayley–Dickson algebras. Pacific J. Math. **117** (1985), no. 1, 163–182.

[34] J. Milnor, R. Bott: On the parallelizability of the spheres, Bull. A.M.S. **64** (1958), 87–89.

[35] P. J. Morandi, J. M. Pérez–Izquierdo, S. Pumplün: On the tensor product of composition algebras, J. Algebra **243** (2001), no. 1, 41–68.

[36] J. Mostovoy, J.M. Pérez–Izquierdo: Ideals in non–associative universal enveloping algebras of Lie triple systems, aceptado en Forum Mathematicum. (http://arxiv.org/abs/math/0506179)

[37] A. L. Onishchik: Lectures on Real Semisimple Lie Algebras and Their Representations, Lectures in Mathematics and Physics, European Mathematical Society, 2004.

[38] J. M. Pérez–Izquierdo, I. P. Shestakov: An Envelope for Malcev Algebras, J. Algebra **272** (2004), no. 1, 379–393.

[39] H. P. Petersson: The structure group of an alternative algebra, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **72** (2002), 165–186.

[40] H. P. Petersson: The classification of two–dimensional nonassociative algebras, Results Math. **37** (2000), no. 1–2, 120–154.

[41] R.D. Schafer: On the algebras formed by the Cayley–Dickson process. Amer. J. Math. **76** (1954), 435–446.

[42] B. Segre: La teoria delle algebre ed alcune questioni di realtà, Univ. Roma. Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. **13** (1954), no.5, 157–188.

[43] K.A. Zhevlakov, A.M. Slinko, I.P. Shestakov, A.I. Shirshov: Rings that are nearly associative, Academic Press: New York, 1982.