UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

Título
Analisis de Fourier en el toro infinito-dimensional
Autor/es
Emilio Fernández Moral
Director/es
Luz Roncal Gómez y Oscar Ciaurri Ramírez
Facultad
Facultad de Ciencia y Tecnología
Titulación
Departamento
Matemáticas y Computación
Curso Académico

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

PROGRAMA (782D) DE DOCTORADO
EN MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

ESCUELA DE MÁSTER Y DOCTORADO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

ANÁLISIS DE FOURIER EN EL TORO INFINITO-DIMENSIONAL

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR:

Emilio Fernández Moral

CODIRECTORES DE TESIS:

Dra. **Luz Roncal Gómez** (IKERBASQUE-BCAM)

Dr. **Óscar Ciaurri Ramírez** (UR)

LOGROÑO, 2019

quæ sera tamen respexit inertem
candidior postquam tondenti barba cadebat
respexit tamen et longo post tempore uenit

Virgilio, *Bucólicas*, Égloga I

a *Merche, Manuel y Blanca*
a *Joaquín* in memoriam

Agradecimientos

Cuando uno tiene ya “casi toda la vida por detrás”, es imposible dar cuenta, como sería de justicia, de todas y cada una de las personas a las que debe agradecer una influencia más o menos directa que haya resultado esencial, necesaria o simplemente (y nada menos que eso) beneficiosa para la consecución de su trabajo. Lamentablemente algunas, o muchas, de ellas se habrán ido ya. Es mi caso en lo que respecta al trabajo que presento aquí.

El tiempo de cada uno empieza dentro del de sus padres, así mis primeros nombres serán los suyos, Antonio (1919–1988) y María Luisa (1920–2011), que más que ser honrados en esta página, la honran al encabezarla. A mi tío Emilio Fernández Murias (1920–1937), que en casa en la niñez fue una fotografía y unas notas de Bachillerato enmarcadas, un recuerdo sagrado, algún libro de la editorial Labor firmado por su nombre y apellidos enlazados por una caligrafía perfecta, le debo el nombre y el mandamiento paterno de la dedicación al estudio como recurso (único) para la promoción en la vida. Mi hermano mayor Antonio (Willy) abrió los caminos del compromiso con la cultura. Él y José Juan, nuestro hermano pequeño, son los siguientes destinatarios de mi agradecimiento.

Al profesor Hno. Antonio Martínez y a las buenas clases que recibí de él, de Matemáticas y Física y Química en quinto y sexto de Bachillerato y de Matemáticas y Física en Preu, le debo haber entrado en su día a la Facultad de Ciencias de Zaragoza a estudiar Matemáticas y haber orientado después mi vida profesional a su enseñanza. Recuerdo hoy con agradecimiento a los profesores que tuve en Zaragoza y a los compañeros de curso de entonces.

Quiero añadir una nota de gratitud para mi paisano Javier Ruiz Fernández de Pinedo, matemático logroñés tempranamente fallecido. En Madrid en el verano de 1976 hizo que conociera a Miguel de Guzmán y me informó de la apertura de la comisión pública de contratación de PNN’s por cuya resolución pude entrar aquel mismo otoño en el Departamento de Teoría de Funciones de la Universidad Complutense donde él trabajaba (se iba a trasladar entonces a la UNED) y donde había leído hacía poco su tesis doctoral, dirigida por D. Baltasar Rodríguez-Salinas.

Recuerdo también con agradecimiento a la gente que conocí en la Complutense los dos cursos que trabajé allí de Ayudante de clases de problemas. La amistad con Concha, con Jesús, Javier y Joaquín, las tutorías amigables de Alberto Ruiz, Manolo Morales y otras personas, el contacto amistoso en el Departamento con Ignacio, Paco Luis, Mª Fernanda, Sole y Paco Domingo, y la suerte de poder asistir a cursos de doctorado impartidos por Guzmán, José Luis Rubio de Francia, Mariano Martínez y Antonio Córdoba, mejoraron mucho la formación matemática adquirida en Zaragoza.

Durante el curso 1977-78, D. Baltasar dió las clases de la *Teoría de la Medida* de 5° y yo era su ayudante. Para cada día de clase él preparaba dos o tres folios de apuntes manuscritos por ambas caras, de los que me daba fotocopias cuando acudía a su despacho para acompañarlo al aula. El primer día de clase después de las vacaciones de Navidad, recién nacido mi hijo Manuel, fue D. Baltasar quien se adelantó y vino a buscarme a mí, me dio la enhorabuena un poco emocionado y me dijo que como él no tenía hijos se sentía en cierta forma abuelo. Hacia el mes de febrero o marzo de 1978 los PNN’s de la Facultad de Matemáticas comenzamos una huelga indefinida, “PNN’s de Universidad por el Contrato Laboral”, que se mantuvo intermitentemente hasta final de curso. En algún momento dejé de ir a clase con D. Baltasar, pero él en cambio no dejó de entregarme cada semana, y siempre con ilusión, sus nuevas fotocopias.

Después de "repetir" tres o cuatro veces el Bachillerato, en los 90's se puede decir que volví a estudiar la carrera de Matemáticas, junto con Manuel Benito (Manolo) y Javier Escribano, ya que los tres nos matriculamos y asistimos durante dos años a (todos) los primeros cursos de Doctorado que se impartieron en la recién estrenada Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Rioja que en su día habían soñado Luis Español, Chicho Guadalupe y Mari Carmen Mínguez y que por fin llegaba a ser una realidad. Además de ellos tres, Pilar Benito, Ignacio Extremiana, José Antonio Ezquerro, Luis Javier Hernández, Miguel Ángel Hernández, José Manuel Gutiérrez, Jesús Laliena, Víctor Lanchares, Tere Rivas y Juan Luis Varona, a todos les considero amigos hoy, fueron entonces nuestros excelentes y esforzados profesores a quienes debo reconocimiento agradecido.

Más cercanamente a quienes debo en primer lugar haberme metido en este lío es a mi amigo Manolo recién citado, indesmayable matemático, catedrático de Bachillerato y durante más de treinta años compañero en el Instituto Sagasta de Logroño —*tienes que hacer la tesis. ¿Qué vas a hacer si no, ahora que te has jubilado? En el tiempo que te cueste por lo menos mantendrás la cabeza ocupada y la mente un poco en forma, ese es el objetivo fundamental*— ¡gracias, Manolo!, a Pilar Benito y Manuel Bello, profesores de Álgebra y Análisis respectivamente del Departamento de Matemáticas de la UR, por su amable insistencia y su aliento infinito, a Luz Roncal y Óscar Ciaurri, que aceptaron ser mis directores de tesis en octubre de 2014 y seguir siéndolo tras el viraje al proyecto definitivo después de un año por otros cauces, por la paciencia que han mostrado conmigo, sus ajustadas orientaciones, su ánimo y constante ayuda, y a Juan Luis Varona, que se ha mantenido siempre discreta pero muy próximamente "al margen" mientras no hiciera falta, por estar siempre dispuesto a echar una mano.

Gracias a los demás colegas y amigos de los Institutos de La Rioja con los que he trabajado y que me han animado a completar esta tarea. Que sirva y baste el nombre de Mariano Banzo para representarles. Esta tesis se ha escrito entre todos. Debo un homenaje al recuerdo de Julita Centeno, de Jesús Luezas y de Miguel Ángel Martín. Gracias también a mis alumnos de todas las épocas.

Gracias de nuevo a José Manuel Gutiérrez, y que su nombre represente ahora, como Director, el de todos los profesores o investigadores predoctorales del Departamento de Matemáticas y Computación. El Departamento ha puesto a mi disposición, durante estos cinco años en que jubilado de la docencia he estado matriculado del Doctorado en la UR, un lugar de trabajo completamente equipado y rodeado de amistad y simpatía en un despacho del propio Departamento, primero en el edificio Vives y luego en el CCT, dándonos así a Luz, a Óscar y a mí la oportunidad de llevar nuestro proyecto adelante. Gracias a Esther Santolaya por resolver todas las dificultades, arreglar todos los papeles, y por los caramelos. Gracias a Tesi, Ana y todo el equipo que pone cada día desde primerísima hora con mucha dedicación profesional y añadiendo gotas de cariño todas las cosas del Departamento en su sitio.

Gracias a las personas que trabajan en los Servicios de Biblioteca y Acceso al Documento, de Informática y de Gestión Académica (Doctorado) de la UR por la esmerada y eficaz atención dispensada, tanto personal como a través de los distintos servicios electrónicos que ponen a disposición de los usuarios, como por ejemplo el de MATHSCINET: `https://mathscinet.ams.org/mathscinet/` También citaré aquí, como puede ser obligado por derechos de uso, los diversos portales de Internet (BnF Gallica: `https://gallica.bnf.fr/`, EuDML: `https://eudml.org/`, SUB Göttingen: `https://gdz.sub.uni-goettingen.de/`, EMIS: `https://www.emis.de/`, Math-Net.Ru: `http://www.mathnet.ru/eng/agreement`, Biblioteca Digital FCEN-UBA: `http://digital.bl.fcen.uba.ar/`, etc.) que ofrecen acceso libre a librería y documentación científica digitalizada y que he podido utilizar.

Gracias a Mario Pérez y a Francisco J. (Pacho) Ruiz, que escanearon para nosotros en Zaragoza muy amablemente la Tesis Doctoral [98] de José Luis Rubio de Francia y nos enviaron en 2017 copia electrónica íntegra, Óscar y Juan Luis actuando de intermediarios en esta ocasión. Gracias a Paweł Mleczko, Secretario del comité editorial de la revista *Commentationes Mathematicae*[1] por la copia escaneada del artículo [99] que me envió personalmente: (11/04/2017) —*Dear Emilio, enclosed please find a scanned copy of the paper, the copy is of not very good quality, but I hope you find it useful / all the best / Paweł*—, y estas palabras amables.

Gracias a Alberto Arenas y Edgar Labarga, que han sido compañeros de doctorado durante los últimos cinco años y además compañeros de despacho desde la mudanza del Vives al ala nueva del edificio del CCT. Les deseo lo mejor, muy largo recorrido y mucho éxito en su futura vida profesional. Las discusiones con ellos me han mantenido joven y me han motivado a seguir adelante en momentos de cierto desánimo. La presentación final de la Memoria debe mucho a Edgar. Carla, la compañera de Alberto, fue clave para mejorar la traducción del artículo del Anexo 1 final.

Gracias a los amigos que para mi suerte han formado parte de mi vida. A los madrileños del Orfeo, que me llevaron con ellos a Gloucester, Urbino, Nueva York, El Cairo y Alejandría. En particular a Luis, también por el regalo de sus libros. A Merche, Marisa y Teresa por su amistad permanente. A Tomás por su amistad inolvidable. A Mª José y Mariano. A los más cercanos ahora, Concha y Ángel, Manolo y Cillas. A todos los que me quedan sin nombrar.

A mis primos José Emilio (profesor de Instituto igual que yo) y Carmen Fernández, Carmela y Antonio Moral, su mujer Carmen y sus hijos Andoni (doctor en Ingeniería), Gorka y Josu. A mis cuñadas Elisa, Begoña (cercana desde los tiempos madrileños cuando compartimos la casa de Écija) y Eguzkiñe, y a mis sobrinos Ricardo, Javier (doctor en Medicina), Amaya (también matemática), Íñigo y Asier.

A Merche y a nuestros hijos Manuel y Blanca, que ya son doctores, por quererme y, como dirían ellos, estar siempre ahí. Gracias también a Rebeca y a Fabien. A Elisa con mucho cariño, por todos los carros llenos de corazones que recibimos de ella volando por encima del charco. Gracias a Manuel he podido conocer México D.F., Urbana-Champaign y Chicago, La Plata y Buenos Aires. Y gracias a Blanca he conocido mejor Oviedo y Santiago de Compostela, he estado en Oslo, y este verano conoceré Helsinki, donde vive ahora, y San Petersburgo.

Gracias finalmente a Juan Luis Varona de nuevo (UR), a Javier Duoandikoetxea (UPV/EHU) y a Francisco Luis Hernández (UCM) también de nuevo, por haber aceptado formar parte del tribunal calificador de esta Memoria.

Logroño, julio de 2019

[1] *Annals of the Polish Mathematical Society, series I*, Collegium Mathematicum, Adam Mickiewicz University in Poznań, Umultowska 87, 61–614 Poznań, Poland.

Presentación

...pero mañana yo también habré muerto y se confundirán nuestros tiempos
y la cronología se perderá en un orbe de símbolos y de algún modo
será justo afirmar que yo le he traído este libro y que usted lo ha aceptado
JORGE LUIS BORGES, El Hacedor

El curso 1976-77, después de dos años de estancia postdoctoral en Princeton, José Luis Rubio de Francia (será casi siempre JLR desde aquí) tomó posesión de su plaza de Agregado de Universidad en la Complutense de Madrid, en el Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Matemáticas. El que escribe, recién terminada la licenciatura, tuvo la suerte de entrar, por acuerdo de una Comisión de contratación, como Ayudante de clases prácticas en el mismo Departamento con Concha Artola, Jesús García-Gual, Javier Gómez y Joaquín Hernández, de dar junto con Concha los problemas de la asignatura Análisis II, dos de cuyos grupos estuvieron a cargo de José Luis, y de acabar siendo amigo de todos ellos.

Fui además alumno de JLR ese año en Madrid del curso de doctorado que impartió sobre "Análisis no-estándar" conjuntamente con Mariano Martínez, y asistí también como aprendiz al Seminario de Análisis Armónico "Técnicas de variable real" de Miguel de Guzmán al que JLR acudía como experto.

De modo que de una manera natural, avanzado el curso le pedí a José Luis hacer la tesis doctoral bajo su supervisión. Enseguida me propuso un tema: *Series de Fourier de infinitas variables*, tema con el que él había entrado en contacto en su tesis doctoral [98] y que, como perteneciente al análisis armónico en grupos, estaba también presente en el artículo [99] que estaría entonces en prensa, o guardaba relación con él. JLR de vez en cuando me explica cosas personalmente, me escribe algún papel más en limpio, ...(v. por ej. las Figuras 2.1 y 2.2).

Para el siguiente curso académico 1977-78 JLR se trasladó a Zaragoza. En las navidades del año 77 me escribe a Madrid una carta que conservo (al final de esta presentación reproduzco una copia escaneada íntegra; consta de una página de contenido científico y más personal, y dos Hojas de contenido puramente científico, todas ellas escritas por ambas caras, (r)ecto y (v)erso). Como se puede ver, aunque seguramente escrito a vuela pluma, contiene un plan bastante detallado de lo que podría ser la tesis, con las principales pautas a seguir en la investigación. Según aquel plan original de JLR, el guión principal del estudio era el siguiente:

1. Propiedades básicas del análisis armónico en el toro infinito $\mathbb{T}^\omega$:
   a) Explicar $\mathbb{T}^\omega$, $\mathbb{Z}^\infty$, notación, ...
   b) Relación entre derivación parcial en $\mathbb{T}^\omega$ y coeficientes de Fourier: La implicación
   $$f \in C^{(\infty}(\mathbb{T}^\omega) \implies \text{la serie de Fourier de } f \text{ es absolutamente convergente.}$$
   c) Resultados inmediatos de convergencia de las series de Fourier en $\mathbb{T}^\omega$ mediante $\lim_n \lim_m S_m^n f$ (en casi todo punto y en norma) por aplicación de los teoremas de Jessen [64, §22], siendo S_m^n la suma m-ésima en $\mathbb{T}^n$.
   d) Descomposición de Calderón-Zygmund (pero fallo de la diferenciación de integrales) en $\mathbb{T}^\omega$.

2. Los espacios $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ de norma mixta, $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots)$, $1 \leq p_i \leq \infty$ (estudio generalizable a espacios producto cartesiano de infinitos espacios de medida finita):
   a) Definición apropiada y primeras propiedades. Dualidad. Espacios interpolados.
   b) Espacios $L^{\bar{p}}$-débiles en $\mathbb{T}^\omega$. Teorema de interpolación de Marcinkiewicz.
   c) Teorema de tipo Stein-Sawyer: acotación $(\bar{p}, \bar{p})$-débil para el maximal de una familia de operadores en $\mathbb{T}^\omega$ invariantes por traslaciones.
3. Teoremas de Marcel Riesz en $\mathbb{T}^\omega$ ("casi todo valdrá para $\prod_{j=1}^{\infty} G_j$ con G_j compactos abelianos conexos"):
   a) Estudio de la convergencia en norma de las sumas parciales de series de Fourier para funciones de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$.
   b) Estudio de la convergencia en norma de las sumas parciales de series de Fourier para funciones de $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$, $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots)$.
   c) Estudio de acotaciones $(\bar{p}, \bar{q})$-fuertes con normas mixtas, y de convergencia en probabilidad.
4. Otros problemas y extensiones:
   a) Algo sobre multiplicadores en general, incluyendo algo de teoría de Littlewood-Paley.
   b) Si fuese posible, algo sobre la convergencia a.e. de las series de Fourier en $\mathbb{T}^\omega$.

Mi trayectoria personal pronto se alejó de la vía universitaria. El curso 1978-79 comencé a trabajar en el I. B. Sagasta de Logroño, y hacia 1980 renuncié a proseguir con la tesis propuesta por JLR. Él quedó libre para proponerle el tema a otro estudiante de doctorado, como así fue. Pero la cosa nunca llegó a término, esa tesis, como tal, nunca se escribió. En 1980, JLR publicaba [101], donde establecía, dando un toque a los puntos 3(a)-(b) y 4(b) del guión anterior, resultados de convergencia en norma y a.e. en $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ y $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$, $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots)$ pero sin detallar completamente las demostraciones, dando quizás una oportunidad a sus futuros estudiantes. Y en la sección final especificaba cuatro grandes direcciones de problemas abiertos en el Análisis de Fourier en $\mathbb{T}^\omega$, la primera de las cuales se relacionaba con el punto 4.*a*) anterior:

A) Desarrollar una teoría de Littlewood-Paley en $\mathbb{T}^\omega$ o (casi equivalentemente) dar versiones no triviales de los multiplicadores de Marcinkiewicz-Hörmander.

No conocemos ninguna otra publicación en nuestro país que esté estrechamente relacionada con estudios de Análisis Armónico en $\mathbb{T}^\omega$ en los que JLR estaba interesado (en la URSS a mediados de los años 80 podemos citar los trabajos de A. D. Bendikov, I. V. Pavlov y A. V. Skorikov [92] y [6], de los que hablaremos más en el capítulo 3, sobre espacios de norma mixta en el toro infinito y, en general, en productos infinitos de espacios de probabilidad).

Miguel Ángel Triana, que fue profesor asociado en la Universidad de Zaragoza, hizo en 1979 su Tesina de Licenciatura [116], dirigida por JLR, sobre cierta interpreetación de los espacios L^P de norma mixta en productos finitos de espacios de medida, y presentó un resumen de su trabajo en [117]. Miguel Ángel, a quien también perdimos prematuramente, fue seguramente el segundo dedicatario de la sugerencia magistral de JLR. Tal vez aquella primera investigación estuviera dirigida hacia una posible definición de espacios $L^{\bar{p}}$ de norma mixta en $\mathbb{T}^\omega$. Triana presentó en 1983-84 su Tesis Doctoral *Espacios F-normados de funciones y sucesiones vectoriales* en la UNIZAR bajo la supervisión de Bienvenido Cuartero.

Un tercer adjudicatario del tema fue Domingo Pestana (Universidad Carlos III de Madrid), quien en 2017 le comunicó personalmente a Francisco J. (Pacho) Ruiz (Universidad de Zaragoza) que tampoco él había proseguido aquel estudio después del fallecimiento de José Luis. Agradecemos a Pacho que nos enviara una copia del siguiente mensaje de correo electrónico que reproducimos aquí con su permiso:

> Sobre lo que me preguntas sobre las series de Fourier [en $\mathbb{T}^\omega$], nunca llegué a hacer una Tesina. Me presenté a oposiciones de Instituto y para cuando logré acercarme a Madrid, José Luis falleció. Al poco tiempo empecé una nueva Tesis con Josechu. Así que lamento tener malas noticias en ese sentido. Ya hablé hace un tiempo con Óscar sobre eso. No sé dónde puedo tener las notas que tenía sobre el tema. Hace ya 30 años de ello!!! Pero si las encontrara os las haría llegar (7/6/2017).

Han pasado más de cuarenta años. Con la inestimable ayuda de mis directores Luz Roncal y Óscar Ciaurri he tratado de escribir alguna parte al menos de aquella tesis que JLR imaginó. Con que haya prendido en ellos una llamita de curiosidad por el tema $\mathbb{T}^\omega$ yo habré cumplido, *sera tamen*, con una vieja e inolvidable obligación amistosa. Creo que Chicho Guadalupe, que fue tan gran amigo de JLR, y que tan benévolamente propició en su día mi incorporación a la Facultad de Matemáticas de la UR como asociado, habría estado feliz pasando estas páginas.

El trabajo consta de cuatro capítulos. En el primero estudiamos los puntos 1.a) y 1.b) del guión principal antes expuesto. En el segundo los puntos 1.c) y 1.d). En el tercero se desarrollan los puntos 2.a) y 2.b) siguiendo el camino que marca la Hoja 1 de carácter científico (Figuras 3 y 4) de la carta de JLR. Y en el cuarto capítulo los puntos 3.a), 3.b) siguiendo las indicaciones de la Hoja 2 (Figuras 5 y 6). Añadimos ahí una revisión del trabajo que hizo el propio JLR sobre el punto 4.b) en [101] y finalmente un poco sobre el punto 2.c) (Figura 4, PROBLEMA 2). Salvo otra mención, las pruebas de todos los Lemas y Proposiciones son propias. Quedan aún sin tocar muchas de las cosas que abría al estudio JLR en aquella carta. En la Conclusión final se enumeran varios problemas que deja abiertos este trabajo.

Justificando el estudio específico del análisis armónico en $\mathbb{T}^\omega$ como pieza separada del análisis abstracto en grupos topológicos, en la Introducción de [101] JLR escribía:

> El Análisis de Fourier en $\mathbb{T}^\omega$ ha sido poco tratado. Su interés puede justificarse de un lado por constituir una extensión lógica del Análisis de Fourier n-dimensional, pero obteniendo acotaciones que no dependan de la dimensión n. Por otro lado, $\{e^{2\pi i x_k} : k = 1, 2, \ldots\}$ es un sistema de variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en la circunferencia unidad compleja (i.e. una versión complexificada de las funciones de Rademacher), cuya completación natural en L^2 es el sistema trigonométrico sobre $\mathbb{T}^\omega$, por lo que resultan ser las series de Fourier de infinitas variables el análogo complejo de las series de Walsh. Las series de Fourier en $\mathbb{T}^\omega$ tienen también conexión con las series de Dirichlet (v. [17])[2] y con la Teoría de la Predicción (v. [62]). ...

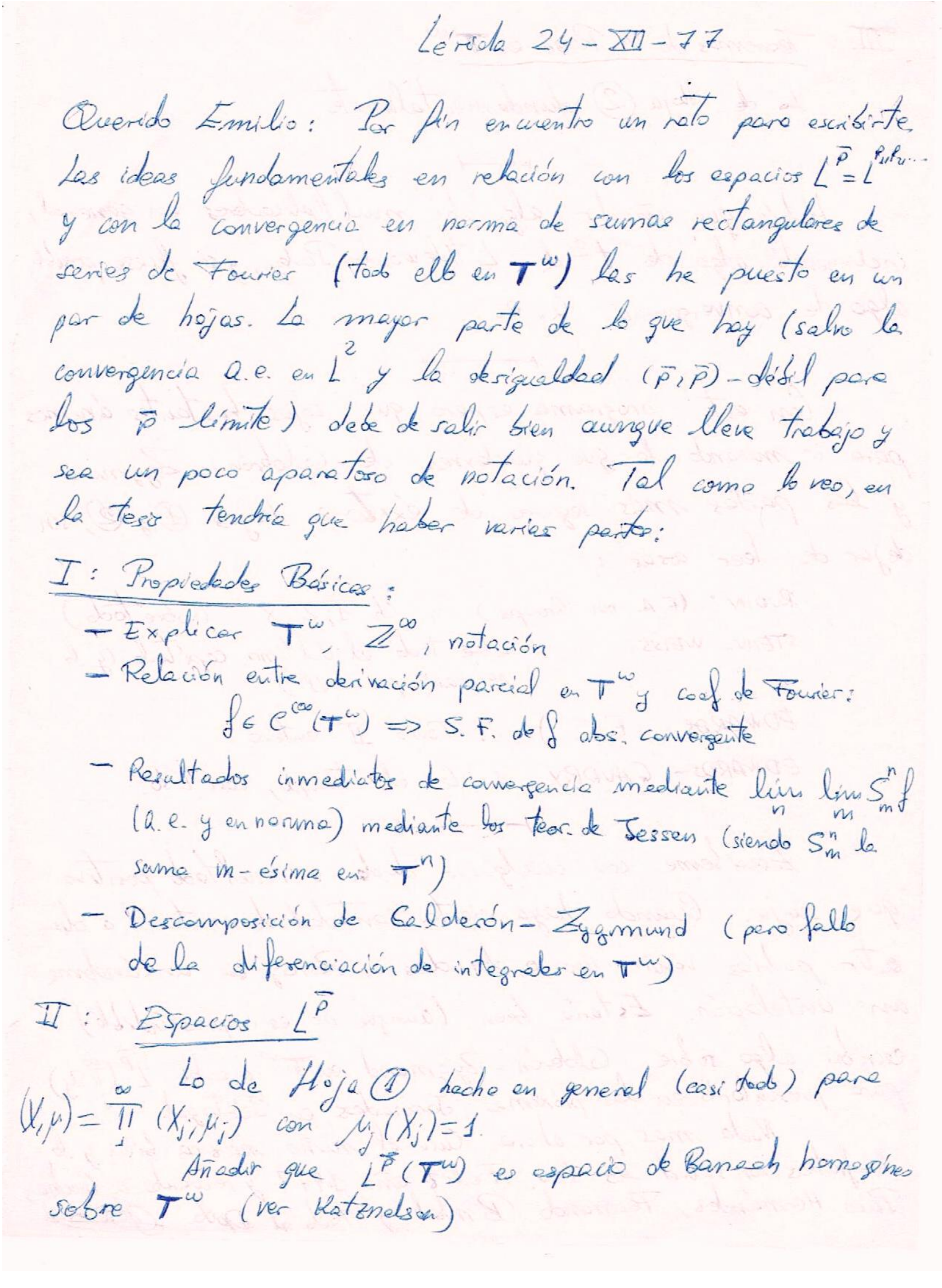
Por otra parte, hay mucho interés en el toro infinito desde el punto de vista de la Teoría del Potencial, v. por ejemplo [13, 3, 7, 8, 4]. Aparte de esto, algunos problemas de la Teoría de Aproximación en $\mathbb{T}^\omega$ se han analizado por ejemplo en [94].

No hace falta subrayar que toda la Memoria está escrita, desde el respeto que todavía hoy pervive en mí hacia su figura, en honor y memoria de José Luis Rubio de Francia, y ya quisiera que no fuera ese su único valor. Acabaré estas líneas de presentación reproduciendo una traducción castellana del fragmento clásico con el que Hans Reiter cerraba el prefacio a la 1ª edición (1967) de su libro *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*, [96]. Que resuenen así en honor de JLR, que las escuchó en su día como puede atestiguar el apunte que recoge la Figura 1.1, aquellas antiguas palabras del dios Apolo:

> *También te ordeno esto: hollar por donde no pasan los carros; llevar el tuyo no por rodadas comunes al resto de las gentes, no por camino llano sino por sendas sin trillar, aun cuando tengas que conducir por una más angosta.*[3]

[2] Presentamos una traducción castellana fragmentaria de esta referencia en el Anexo 2 final.

[3] CALÍMACO, *Aitía*, Prólogo, Fragmento 1, *ll.* 25–28. En *Himnos, epigramas y fragmentos*, Gredos, Madrid, 1980, p. 139 (trad. de Máximo Brioso Sánchez).



Lérida 24 - XII - 77

Querido Emilio: Por fin encuentro un rato para escribirte. Las ideas fundamentales en relación con los espacios $L^{\bar{p}} = L^{p_1 p_2 \ldots}$ y con la convergencia en norma de sumas rectangulares de series de Fourier (todo ello en $\mathbf{T}^\omega$) las he puesto en un par de hojas. La mayor parte de lo que hay (salvo la convergencia a.e. en L^2 y la desigualdad $(\bar{p}, \bar{p})$-débil para los $\bar{p}$ límite) debe de salir bien aunque lleve trabajo y sea un poco aparatoso de notación. Tal como lo veo, en la tesis tendría que haber varias partes:

I: Propiedades Básicas:

- Explicar $\mathbf{T}^\omega$, $\mathbb{Z}^\infty$, notación
- Relación entre derivación parcial en $\mathbf{T}^\omega$ y coef. de Fourier:
  $f \in C^{(\infty)}(\mathbf{T}^\omega) \Rightarrow$ S. F. de f abs. convergente
- Resultados inmediatos de convergencia mediante $\lim\limits_n \lim\limits_m S_m^n f$ (a.e. y en norma) mediante los teor. de Jessen (siendo S_m^n la suma m-ésima en $\mathbf{T}^n$)
- Descomposición de Calderón - Zygmund (pero fallo de la diferenciación de integrales en $\mathbf{T}^\omega$)

II: Espacios $L^{\bar{p}}$

Lo de Hoja ① hecho en general (casi todo) para $(X, \mu) = \prod\limits_j^\infty (X_j, \mu_j)$ con $\mu_j(X_j) = 1$.

Añadir que $L^{\bar{p}}(\mathbf{T}^\omega)$ es espacio de Banach homogéneo sobre $\mathbf{T}^\omega$ (ver Katznelson)

Figura 1: Carta de JLR, diciembre de 1977. Página personal(r).

III : Teoremas de M. Riesz en $\mathbb{T}^\omega$

Lo de Hoja (2) fundamentalmente

Habría que añadir algo sobre multiplicadores en general, incluyendo algo de t.ª de Littlewood-Paley, y si fuese posible, algo de convergencia a. e.

Con este programa espero que cojas bastantes ánimos para ir mirando lo que quedamos de Calderón-Zygmund y las partes más seguras de éxito en Hojas (1) y (2), sin dejar de leer cosas:

RUDIN (F.A. on Groups), Ch. 1, 2, 8 (sobre todo)

STEIN-WEISS : Sobre todo el último capítulo (y lo necesario para él)

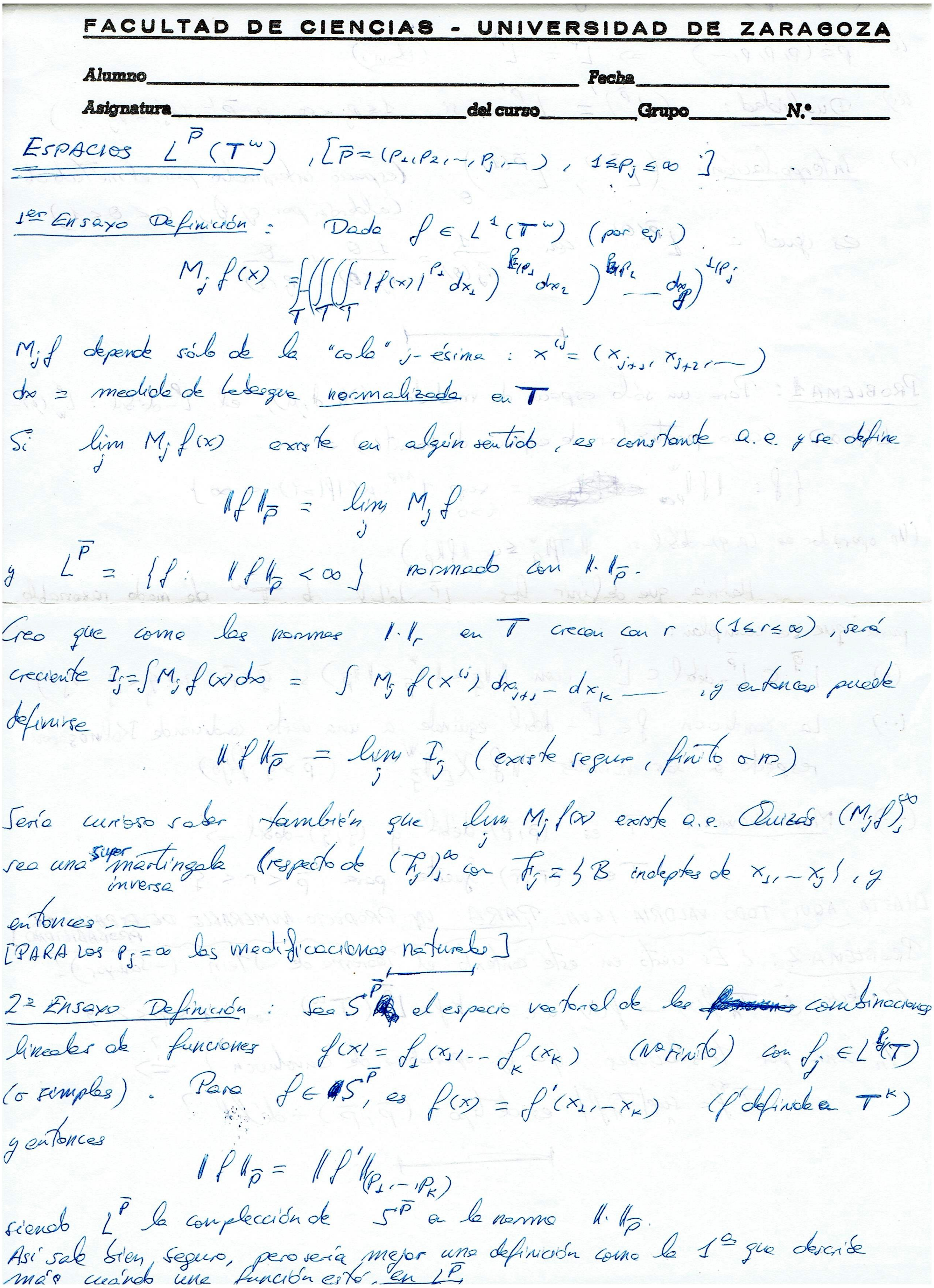
EDWARDS (F.S.) : Tomo II entero

EDWARDS-GAUDRY : Con el tiempo, casi todo.

Escríbeme con cualquier duda o resultado positivo que surja. Cuando haya cierta cantidad de material a discutir podrías venir uno o dos días a Zaragoza avisándome con antelación. Estaría bien (aunque no es imprescindible) escribir algo sobre Calderón-Zygmund en $\mathbb{T}^\omega$ o sobre $L^p(\prod_j^\infty \Omega_j)$ para presentarlo en las próximas Jornadas en Portugal.

Nada más por ahora. Que el niño nazca bien y lo disfrutéis con salud los tres. Feliz año 1978 y recuerdos a Concha, Paco Hernández, Fernando Bombal y todo el Dpto. José Luis

Figura 2: Carta de JLR, diciembre de 1977. Página personal(v).



FACULTAD DE CIENCIAS - UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Alumno ______ Fecha ______

Asignatura ______ del curso ______ Grupo ______ N.º ______

ESPACIOS $L^{\bar P}(T^\omega)$, [$\bar P = (p_1, p_2, \dots, p_j, \dots)$, $1 \le p_j \le \infty$]

1er Ensayo Definición: Dada $f \in L^1(T^\omega)$ (por ej.)

$$M_j f(x) = \left(\int_T \left(\int_T \left(\int_T |f(x)|^{p_1} dx_1\right)^{p_2/p_1} dx_2\right)^{p_3/p_2} \dots dx_j\right)^{1/p_j}$$

$M_j f$ depende sólo de la "cola" j-ésima: $x^{(j)} = (x_{j+1}, x_{j+2}, \dots)$

dx = medida de Lebesgue normalizada en T

Si $\lim_j M_j f(x)$ existe en algún sentido, es constante a.e. y se define

$$\|f\|_{\bar P} = \lim_j M_j f$$

y $L^{\bar P} = \{f : \|f\|_{\bar P} < \infty\}$ normado con $\|\cdot\|_{\bar P}$.

Creo que como las normas $\|\cdot\|_r$ en T crecen con r ($1 \le r \le \infty$), será creciente $I_j = \int M_j f(x)dx = \int M_j f(x^{(j)}) dx_{j+1} \dots dx_k \dots$, y entonces puede definirse

$$\|f\|_{\bar P} = \lim_j I_j \quad \text{(existe seguro, finito o } \infty)$$

Sería curioso saber también que $\lim_j M_j f(x)$ existe a.e. Quizás $(M_j f)_1^\infty$ sea una supermartingala inversa (respecto de $(\mathcal{F}_j)_1^\infty$ con $\mathcal{F}_j = \{B$ indeptes de $x_1, \dots x_j\}$, y entonces —

[PARA LOS $p_j = \infty$ las modificaciones naturales]

2º Ensayo Definición: Sea $S^{\bar P}$ el espacio vectorial de las ~~funciones~~ combinaciones lineales de funciones $f(x) = f_1(x_1) \dots f_k(x_k)$ (Nº FINITO) con $f_j \in L^{p_j}(T)$ (o simples). Para $f \in S^{\bar P}$, es $f(x) = f'(x_1, \dots x_k)$ (f' definida en T^k) y entonces

$$\|f\|_{\bar P} = \|f'\|_{(p_1, \dots, p_k)}$$

siendo $L^{\bar P}$ la compleción de $S^{\bar P}$ en la norma $\|\cdot\|_{\bar P}$.

Así sale bien, seguro, pero sería mejor una definición como la 1ª que describe más cuándo una función está en $L^{\bar P}$.

Figura 3: Carta de JLR, diciembre de 1977. Hoja 1(r).

Propiedades a probar (supongo que fáciles)

i) $(L^{\bar p}, \|\cdot\|_{\bar p})$ es Banach y $S^{\bar p}$ denso en $L^{\bar p}$ (con la DEF. 1ª)

ii) $\bar p = (p, p, p, \dots) \Rightarrow L^{\bar p} = L^p$ (obvio)

iii) Dualidad: $(L^{\bar p})' = L^{\bar p'}$ si $1 \le p_j < \infty$ y $\bar p' = (p_1', \dots, p_j', \dots)$

iv) Interpolación: $(L^{\bar p(0)}, L^{\bar p(1)})_\theta$ (espacio intermedio por el método de Calderón por ej. θ; $0 < \theta < 1$)

es igual a $L^{\bar p(\theta)}$ con $\dfrac{1}{p_j(\theta)} = \dfrac{1-\theta}{p_j(0)} + \dfrac{\theta}{p_j(1)}$

PROBLEMA 1: Para un sólo espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, el L^p-débil: $L^p_w(\mu) = L(p, \infty)$ (caso particular de espacio de Lorentz) es

$$\{ f : \|f\|^w_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{1/p} \mu(|f|>t) < \infty \}$$

(Un operador es (p,q)-débil si $\|Tf\|^w_q \le C \|f\|_p$)

Habría que definir los $L^{\bar p}$-débil de T^ω de modo razonable para que se cumplan:

(·) $L^{\bar q} \subset L^{\bar p}$-débil $\subset L^{\bar p}$ (con $\|\cdot\|_{\bar q} \le \|\cdot\|^w_{\bar p} \le \|\cdot\|_{\bar p}$) si $\bar q < \bar p$ (i.e. $q_j < p_j \ \forall j$)

(··) La condición $f \in L^{\bar p}$-débil equivale a una cierta condición de Kolmogorov respecto a las normas $\|f \cdot \chi_E\|^w_{\bar q}$ ($\bar p > \bar q$ fijo)

(···) Marcinkiewicz: T es $(\bar p, \bar p)$-débil y $(\bar q, \bar q)$-débil $\Rightarrow$ T es $(\bar r, \bar r)$ fuerte para $\bar p < \bar r < \bar q$

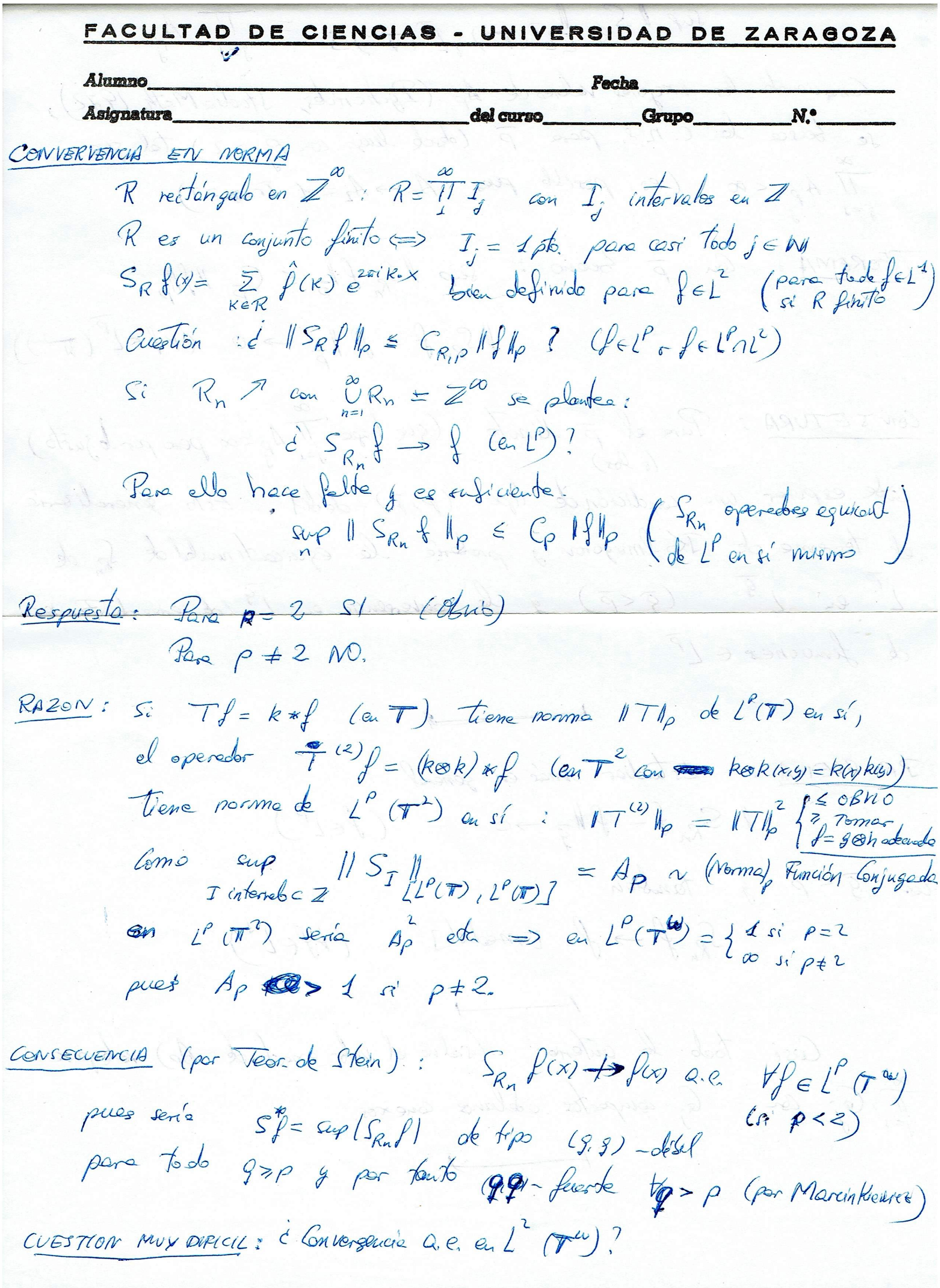
[HASTA AQUÍ, TODO VALDRÍA IGUAL PARA UN PRODUCTO NUMERABLE DE ESPACIOS DE PROBABILIDAD]

PROBLEMA 2: ¿Es cierto en este contexto el teorema de Stein (-Sawyer)?

Es decir: ¿$T_n f(x) \to f(x)$ a.e. $\forall f \in L^{\bar p}(T^\omega)$ con $1 \le \bar p \le 2$ y T_n inv. por traslaciones (por ej. operadores de convolución) $\overset{?}{\Rightarrow}$

$T^* f = \sup_n |T_n f|$ es de tipo $(\bar p, \bar p)$-débil?

Figura 4: Carta de JLR, diciembre de 1977. Hoja 1(v).



FACULTAD DE CIENCIAS - UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Alumno ____ Fecha ____

Asignatura ____ del curso ____ Grupo ____ N.º ____

CONVERGENCIA EN NORMA

R rectángulo en $\mathbb{Z}^\infty$: $R = \prod_1^\infty I_j$ con I_j intervalos en $\mathbb{Z}$

R es un conjunto finito $\iff$ $I_j = 1$ pto. para casi todo $j \in \mathbb{N}$

$S_R f(x) = \sum_{k \in R} \hat{f}(k) e^{2\pi i k \cdot x}$ bien definido para $f \in L^2$ (para todo $f \in L^1$ si R finito)

Cuestión: ¿ $\|S_R f\|_p \leq C_{R,p} \|f\|_p$? ($f \in L^p$ o $f \in L^p \cap L^2$)

Si $R_n \nearrow$ con $\bigcup_{n=1}^\infty R_n = \mathbb{Z}^\infty$ se plantea:

¿ $S_{R_n} f \longrightarrow f$ (en L^p)?

Para ello hace falta y es suficiente:

$\sup_n \|S_{R_n} f\|_p \leq C_p \|f\|_p$ (S_{R_n} operadores equicont. de L^p en sí mismo)

Respuesta: Para $p = 2$ SI (Obvio)

Para $p \neq 2$ NO.

RAZON: Si $Tf = k * f$ (en $\mathbb{T}$) tiene norma $\|T\|_p$ de $L^p(\mathbb{T})$ en sí,

el operador $T^{(2)} f = (k \otimes k) * f$ (en $\mathbb{T}^2$ con $k \otimes k(x,y) = k(x)k(y)$)

tiene norma de $L^p(\mathbb{T}^2)$ en sí: $\|T^{(2)}\|_p = \|T\|_p^2$ $\left\{\begin{array}{l} \leq \text{OBVIO} \\ \geq \text{Tomar } f = g \otimes h \text{ adecuada} \end{array}\right.$

Como $\sup_{I \text{ intervalo} \subset \mathbb{Z}} \|S_I\|_{[L^p(\mathbb{T}), L^p(\mathbb{T})]} = A_p \sim$ (Norma)$_p$ Función Conjugada

en $L^p(\mathbb{T}^2)$ sería A_p^2 etc. $\Rightarrow$ en $L^p(\mathbb{T}^\omega) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } p = 2 \\ \infty \text{ si } p \neq 2 \end{array}\right.$

pues $A_p > 1$ si $p \neq 2$.

CONSECUENCIA (por Teor. de Stein): $S_{R_n} f(x) \not\to f(x)$ a.e. $\forall f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$ (si $p < 2$)

pues sería $S^* f = \sup |S_{R_n} f|$ de tipo (q, q)-débil

para todo $q \geq p$ y por tanto q, q-fuerte $\forall q > p$ (por Marcinkiewicz)

CUESTION MUY DIFICIL: ¿ Convergencia a.e. en $L^2(\mathbb{T}^\omega)$?

Figura 5: Carta de JLR, diciembre de 1977. Hoja 2(r).

(2) De nuevo con $\bigcup_n R_n = \mathbb{Z}^\infty$ pero ahora con espacios $L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)$

$$\sup_n \|S_{R_n}\|_{[L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega),\, L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)]} = \prod_{j=1}^{\infty} A_{p_j}$$

Conociendo los mejores valores de A_p (Pychorides, Studia Math. 1972), se busca la c.n.s. para $\bar p$ (desde luego con $p_j \to 2$) tal que $\prod_{j=1}^{\infty} A_{p_j} < \infty$ (es posible pues $A_r \to A_2 = 1$ $[r \to 2]$)

TEOREMA: Con $\bar p$ bueno: $\sup_n \|S_{R_n} f\|_{\bar p} \leq C_{\bar p} \|f\|_{\bar p}$

$$\|S_{R_n} f - f\|_{\bar p} \to 0 \quad (\forall f \in L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega))$$

CONJETURA: Para el $\bar p$ (o los) límite (que haga $\prod_{j=1}^{\infty} A_{p_j} = \infty$ pero por lo justo) cabe esperar una condición de tipo $(\bar p, \bar p)$-débil. Esto generalizaría el teorema de Kolmogorov y probaría la equicontinuidad de S_{R_n} de $L^{\bar p}$ en $L^{\bar q}$ $(\bar q < \bar p)$ y la convergencia en $L^{\bar q}$ de series de Fourier de funciones $\in L^{\bar p}$

PROBLEMA: Estudiar más en general

$$\|S_{R_n} f - f\|_{\bar q} \to 0 \qquad (f \in L^{\bar p})$$

con $\bar q < \bar p$ y también

$$S_{R_n} f \to f \ [\text{medida}] \qquad (\forall f \in L^1)$$

Casi todo lo anterior (salvo el valor exacto de A_p) vale para $\prod_{j=1}^{\infty} G_j$ con G_j compactos abelianos conexos.

Figura 6: Carta de JLR, diciembre de 1977. Hoja 2(v).

Índice general

Índice de figuras

1

Propiedades básicas del análisis armónico en $\mathbb{T}^\omega$. Primera parte

1.1. El toro infinito $\mathbb{T}^\omega$. Generalidades

Sea $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ el toro unidimensional, identificado de modo natural con el intervalo $[0, 1)$ a través del isomorfismo entre grupo multiplicativo y grupo aditivo $e^{2\pi it} \longleftrightarrow t$. También podemos identificar $\mathbb{T}$ con el grupo cociente aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Designamos por $\mathbb{T}^\omega$ el grupo abeliano compacto constituido por el producto cartesiano de una infinidad numerable de copias de $\mathbb{T}$ (*suma directa completa* [102, B7., p. 254]). Lo llamaremos abreviadamente *toro infinito* si no hay lugar a confusión. La operación del grupo $\mathbb{T}^\omega$ es la suma usual, módulo 1, de sucesiones de números reales del intervalo $[0, 1)$, con elemento neutro $0 = (0, 0, \ldots)$.

En general, una función compleja γ sobre un grupo localmente compacto abeliano G se llama un *carácter* de G si $|\gamma(x)| = 1$ para todo $x \in G$ y $\gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y)$ $(x, y \in G)$. El conjunto de los caracteres *continuos* de G forma un grupo $\Gamma = \widehat{G}$ llamado *grupo dual* de G, definida la suma de caracteres por

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x) \qquad (x \in G;\ \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma).$$

El *teorema de dualidad de Pontryagin* [102, p. 28] establece que $\widehat{\Gamma} = G$, lo que permite escribir simétricamente $\langle x, \gamma\rangle$ en lugar de $\gamma(x)$.

Los caracteres continuos del grupo $\mathbb{T}$ son las aplicaciones $\chi_n(t) = e^{2\pi int}$ donde $n \in \mathbb{Z}$, de modo que se puede considerar $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$. El carácter 0 es el χ_0; se tiene $0(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Vamos a probar a continuación nuestra particularización al grupo $\mathbb{T}^\omega$ del resultado más general [102, 2.2.3]:

1.1 Proposición. *El grupo dual de $\mathbb{T}^\omega$, que designaremos por $\mathbb{Z}^\infty$, es la suma directa de una infinidad numerable de copias de $\mathbb{Z}$, es decir, el subgrupo de $\mathbb{Z}^\omega$ que está formado únicamente por las sucesiones finitamente no nulas de números enteros, es decir, aquellas en las que todos los términos salvo un número finito son cero:*

$$\mathbb{Z}^\infty = \{\bar{n} = (n_1, n_2, \ldots) \in \mathbb{Z}^\omega \mid n_k = 0 \quad \forall k > k_0, \quad k_0 \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. En efecto: por un lado, cada sucesión $\bar{n} \in \mathbb{Z}^\infty$ actúa como carácter continuo en $\mathbb{T}^\omega$ de forma obvia, a saber,

$$\langle x, \bar{n}\rangle = e^{2\pi i\bar{n}\cdot x} = e^{2\pi i\sum_{k=1}^{\infty} n_k x_k} \qquad (x \in \mathbb{T}^\omega),$$

ya que la convergencia para todo $x \in \mathbb{T}^\omega$ de la serie que aparece en el exponente está asegurada por ser $\bar{n}$ una sucesión finitamente no nula.

Para probar que, recíprocamente, estos son los únicos caracteres continuos en $\mathbb{T}^\omega$, hay que recordar por ejemplo que la topología producto en $\mathbb{T}^\omega$ es aquella para la cual los conjuntos $\prod_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j$, donde Ω_j es un abierto de $\mathbb{T}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y $\Omega_j = \mathbb{T}$ para casi todo j (es decir, para todo j salvo a lo sumo un número finito de ellos) forman una base de abiertos. Y considerar también que si γ es un carácter en $\mathbb{T}^\omega$, $\langle x, \gamma\rangle = \prod_{j=1}^{\infty} \langle x_j, \chi_j\rangle$ donde $x = (x_1, x_2, \ldots)$ y χ_j es un carácter en $\mathbb{T}$ para cada $j \in \mathbb{N}$, de hecho $\chi_j(t) = e^{2\pi i n_j t}$ con $n_j \in \mathbb{Z}$.

Supongamos que fueran distintos de 0 infinitos de estos χ_j, y sea U un entorno cualquiera de 0 en $\mathbb{T}^\omega$. La definición de la topología en $\mathbb{T}^\omega$ implica que U restringe a lo sumo un número finito de las coordenadas x_k de los puntos $x = (x_1, x_2, \ldots)$ pertenecientes a él, dejando al resto de coordenadas recorrer libremente sus correspondientes toros coordenados. Luego existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que la proyección de U en la coordenada x_{k_0}, $U_{k_0} = \{(0, \ldots, 0, x_{k_0}, 0, \ldots)\}$, es el toro coordenado $\mathbb{T}_{k_0}$ y $\chi_{k_0} \neq 0$. Entonces

$$\langle U, \gamma\rangle \supset \langle U_{k_0}, \gamma\rangle = \langle \mathbb{T}_{k_0}, \chi_{k_0}\rangle = \mathbb{T}$$

y, por ejemplo, $\langle U, \gamma\rangle \not\subseteq V = \{z \,|\, z = e^{2\pi i x}, |x| < 1/3\}$. De modo que para este entorno V del 1 de $\mathbb{C}$ no hay ningún entorno U del 0 de $\mathbb{T}^\omega$ tal que $\gamma(U) \subset V$, y el homomorfismo γ no sería continuo en 0. $\square$

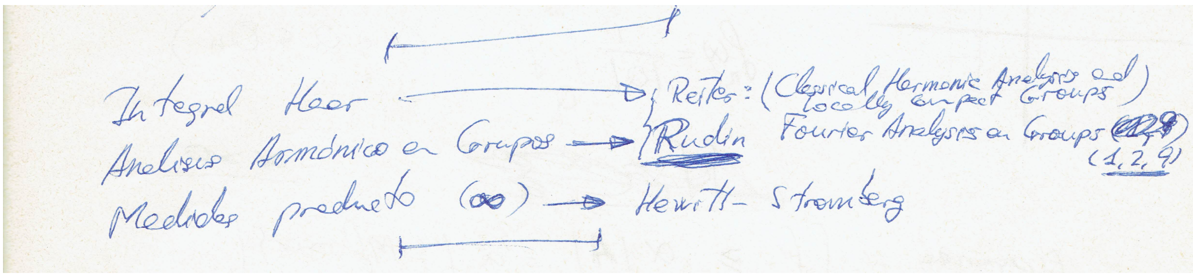


Figura 1.1: Apunte bibliográfico de JLR (Madrid 1977).

En las notaciones $\mathbb{T}^\omega$ para el toro infinito (ω es el primer ordinal numerable) y $\mathbb{Z}^\infty$ para su grupo dual estamos siguiendo a Walter Rudin [102, p. 38]. Era la notación que usaba JLR ya desde su tesis doctoral [98], y se encuentra en los trabajos pioneros del análisis de funciones de infinitas variables [47] y [33]. Jessen [69] y Saks [105, p. 157] denotan Q_ω al toro infinito. Otras notaciones son $\mathbb{T}^{\aleph_0}$ [63, II, p. 676] o $\mathbb{T}^\infty$ [13, p. 64]; en este caso, el grupo dual se denota $\mathbb{Z}^{(\infty)}$, o $\mathbb{Z}^{<\infty}$ [48]. El grupo $\mathbb{Z}^\infty$ es un conjunto numerable (en general, cuando el grupo G es compacto, su dual Γ es discreto). El espacio $\mathbb{T}^\omega$ es metrizable. Por ejemplo, la función

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \quad (x, y \in \mathbb{T}^\omega) \tag{1.1}$$

[105, p. 157], [35, III.20 Probl. 7], define una métrica en $\mathbb{T}^\omega$ que denominaremos *métrica de Saks* (en la Sección 2.3 trabajamos también con la *métrica de Edwards-Saks* (2.23)).

Las funciones (reales o, en general, complejas) definidas en $\mathbb{T}^\omega$ se pueden considerar como funciones periódicas con sistema de períodos $(1, 1, \ldots)$ en infinitas (de cardinal numerable) variables reales. Denotamos por $L^1(\mathbb{T}^\omega)$ el espacio formado por las funciones de módulo integrable respecto de la *medida de Haar* (v. [96, 3.3], [57, XI, §58]) que denotaremos por dx en el grupo $\mathbb{T}^\omega$, normalizada de modo que $\int_{\mathbb{T}^\omega} dx = 1$. Esta medida coincide con la medida producto de una infinidad numerable de copias de la medida de Lebesgue $|\cdot|$ en $\mathbb{T}$ [64, 16, §22], de modo que los conjuntos medibles básicos de $\mathbb{T}^\omega$ son los *cilindros* (dependiendo del contexto los denominaremos también *intervalos*), denominándo así a los subconjuntos de $\mathbb{T}^\omega$ de la forma $I = \prod_{j\in\mathbb{N}} I_j$, donde I_j es un intervalo de $\mathbb{T}$ para todo j y $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $I_j = \mathbb{T}$ para todo $j > N$. La *medida* del cilindro I es $m(I) = \int_{\mathbb{T}^\omega} \chi_I(x)\, dx = \prod_{j=1}^{N} |I_j|$.

La σ-álgebra de los conjuntos de Borel en $\mathbb{T}^\omega$, que es la mínima σ-álgebra que contiene a los intervalos abiertos, coincide con la mínima σ-álgebra que contiene las bolas abiertas con respecto a la métrica (1.1) [108, II §2.4].

En general, para $1 \le p < \infty$, ponemos

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{\mathbb{T}^\omega} |f(x)|^p \; dx \right\}^{1/p},$$

lo que define una norma en el espacio, que denotamos por $L^p(\mathbb{T}^\omega)$, formado por las funciones f tales que $\|f\|_p < \infty$. Para $p = 2$, $L^2(\mathbb{T}^\omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}^\omega} f(x)\overline{g(x)}\, dx$.

Por otra parte se define del modo usual [64, 20.11] el espacio $L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$ de las funciones esencialmente acotadas, normado con

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f| = \text{ínf}\big\{\alpha \colon m(\{x \colon f(x) > \alpha\}) = 0\big\}.$$

Como $\mathbb{T}^\omega$ es un espacio de medida finita, se verifican las inclusiones $L^p(\mathbb{T}^\omega) \subset L^q(\mathbb{T}^\omega)$ y las desigualdades $\|f\|_q \le \|f\|_p$ si $1 \le q \le p \le \infty$.

Ya que la medida de Haar es invariante por traslaciones se verifica, para todo $y \in \mathbb{T}^\omega$ y toda $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$,

$$\int_{\mathbb{T}^\omega} f(x+y)\, dx = \int_{\mathbb{T}^\omega} f(x)\, dx.$$

Para $f, g \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ se define la *convolución* $f * g$ por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{T}^\omega} f(y) g(x-y)\, dy.$$

Del teorema de Fubini [64, (21.13)] se sigue, por el siguiente cálculo usual, que $f * g$ queda definida a.e. en $\mathbb{T}^\omega$, y además es $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^\omega} \left| \int_{\mathbb{T}^\omega} f(y) g(x-y)\, dy \right| dx &\le \int_{\mathbb{T}^\omega} \left(\int_{\mathbb{T}^\omega} |f(y)|\, |g(x-y)| \; dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{T}^\omega} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{T}^\omega} |g(x-y)| \; dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{T}^\omega} |f(y)| \; dy \int_{\mathbb{T}^\omega} |g(x)| \; dx \\
&= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Si $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$, entonces la función $\widehat{f}$ definida en $\mathbb{Z}^\infty$ por

$$\widehat{f}(\bar{n}) = \int_{\mathbb{T}^\omega} f(x) e^{-2\pi i \bar{n}\cdot x}\, dx \qquad (\bar{n} \in \mathbb{Z}^\infty)$$

es la *transformada de Fourier* de f. Los números complejos $\widehat{f}(\bar{n})$ son los *coeficientes de Fourier* de f, y la *serie de Fourier* de f es la serie formal

$$\sum_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^\infty} \widehat{f}(\bar{n}) e^{2\pi i \bar{n}\cdot x}.$$

La notación $f(x) \sim \sum_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^\infty} c_{\bar{n}} e^{2\pi i \bar{n}\cdot x}$ equivale a decir que $\widehat{f}(\bar{n}) = c_{\bar{n}}$ para toda $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots) \in \mathbb{Z}^\infty$. Es obvio que $|\widehat{f}(\bar{n})| \leq \|f\|_1$ para toda $\bar{n} \in \mathbb{Z}^\infty$. Y, si $f, g \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$, se verifica $\widehat{f * g}(\bar{n}) = \widehat{f}(\bar{n})\widehat{g}(\bar{n})$.

La medida de Haar normalizada en el grupo discreto $\mathbb{Z}^\infty$ dual de $\mathbb{T}^\omega$ es la *medida de contar.* Entonces, por ejemplo, decir que $\widehat{f}(\bar{n}) \in L^1(\mathbb{Z}^\infty)$ significa [104, 4.15, p. 83] que

$$\|\widehat{f}\,\|_{L^1(\mathbb{Z}^\infty)} := \sum_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^\infty} |\widehat{f}(\bar{n})| := \sup_{\substack{\Delta\subset\mathbb{Z}^\infty \\ \Delta \text{ finito}}} \sum_{\bar{n}\in\Delta} |\widehat{f}(\bar{n})| < \infty. \tag{1.2}$$

1.1.1. Polinomios trigonométricos. Núcleos de Dirichlet y de Fejér

Un *polinomio trigonométrico* en $\mathbb{T}^\omega$ es una función de la forma

$$P(x) = \sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty} a_{\bar{p}} e^{2\pi i \bar{p}\cdot x} \quad (x \in \mathbb{T}^\omega), \tag{1.3}$$

donde $\{a_{\bar{p}}\}_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty}$ es una familia de números complejos, o una secuencia, *finitamente soportada* en $\mathbb{Z}^\infty$ (es decir, tal que $a_{\bar{p}} = 0$ salvo para un número finito de $\bar{p} \in \mathbb{Z}^\infty$). El *grado* del polinomio $P(x)$ es el número

$$\deg(P) := \max_{\substack{\bar{p}=(p_1,p_2,\dots)\in\mathbb{Z}^\infty \\ a_{\bar{p}}\neq 0}} \sum_{k=1}^{\infty} |p_k|. \tag{1.4}$$

Para $P(x)$ dado por (1.3) se tiene $\widehat{P}(\bar{p}) = a_{\bar{p}}$. Si $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ y P es un polinomio trigonométrico, es evidente que $(f * P)(x) = \sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty} \widehat{P}(\bar{p})\widehat{f}(\bar{p}) e^{2\pi i \bar{p}\cdot x}$.

Un polinomio trigonométrico está en $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ para todo p tal que $1 \leq p < \infty$. Probaremos que igual que ocurre en el caso de dimensión finita, para estos valores de p el conjunto de los polinomios trigonométricos es un subespacio vectorial denso en $L^p(\mathbb{T}^\omega)$.

Vamos a recordar primeramente aquí alguna notación, nomenclatura y conceptos que sirven para desarrollar esta cuestión en el toro finito-dimensional $\mathbb{T}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) y, ya de paso, alguna cosa complementaria que necesitaremos más adelante (v. [123, Ch. XVII], [52, Ch. 3]).

Dado un entero N no negativo, el *núcleo cuadrado de Dirichlet* de orden N en $\mathbb{T}^n$ es la función

$$D_{n,N}(x) = \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n \\ |m_j|\leq N}} e^{2\pi i m\cdot x} \quad (x \in \mathbb{T}^n),$$

y el polinomio trigonométrico

$$S_{n,N}f(x) := (f * D_{n,N})(x) = \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n \\ |m_j|\leq N}} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m\cdot x}$$

es la *suma parcial cuadrada* N-ésima de la serie de Fourier (s.F.) de $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$. Se tiene

$$D_{n,N}(x_1, \dots, x_n) = D_N(x_1) \cdots D_N(x_n),$$

donde

$$D_N(t) = \sum_{|m|\leq N} e^{2\pi i m t} = \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}, \quad t \in [0, 1],$$

es el núcleo de Dirichlet 1-dimensional. Si la sumación se extendiera, por ejemplo, sobre las n-tuplas de $\mathbb{Z}^n$ que cumplen $\sum m_j^2 \leq R^2$, podríamos hablar de núcleos, sumas parciales, etc., *esféricos.* También, si $N_1, \dots N_n$ son enteros no negativos, se pueden definir los núcleos de Dirichlet *rectangulares*

$$D_{n;N_1,\dots,N_n}(x_1,\dots,x_n) = D_{N_1}(x_1)\cdots D_{N_n}(x_n)$$

y, dada $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$, las *sumas parciales rectangulares* de la s.F. de f como

$$S_{n;N_1,\dots,N_n}f(x) := (f * D_{n;N_1,\dots,N_n})(x) = \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n \\ |m_j|\le N_j}} \widehat{f}(m)e^{2\pi i m\cdot x}.$$

Las medias aritméticas (medias de Cesàro) de los núcleos de Dirichlet en $\mathbb{T}$ son los *núcleos de Fejér* 1-dimensionales,

$$\begin{aligned} F_N(t) &= \frac{1}{N+1}\big\{D_0(t) + D_1(t) + \ldots + D_N(t)\big\} \\ &= \sum_{|k|\le N}\left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right)e^{2\pi i k t} \\ &= \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(\pi(N+1)t)}{\sin(\pi t)}\right)^2. \end{aligned}$$

Para $n \ge 2$, el *núcleo cuadrado de Fejér n-dimensional* $F_{n,N}(x)$ de orden N en $\mathbb{T}^n$ se define como la media aritmética de los productos (o lo que es lo mismo, el producto de las medias aritméticas) de los núcleos cuadrados de Dirichlet de orden menor o igual que N en cada variable,

$$\begin{aligned} F_{n,N}(x_1,\dots,x_n) &= \frac{1}{(N+1)^n}\sum_{j_1=0}^{N}\cdots\sum_{j_n=0}^{N} D_{j_1}(x_1)\cdots D_{j_n}(x_n) = \prod_{j=1}^{n} F_N(x_j) \\ &= \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n \\ |m_j|\le N}}\left(1 - \frac{|m_1|}{N+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{|m_n|}{N+1}\right)e^{2\pi i m\cdot x} \\ &= \frac{1}{(N+1)^n}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\sin(\pi(N+1)x_j)}{\sin(\pi x_j)}\right)^2, \end{aligned}$$

y es un polinomio trigonométrico de grado nN. Los polinomios trigonométricos

$$\sigma_{n,N}f(x) := (f * F_{n,N})(x) = \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n \\ |m_j|\le N}}\left(1 - \frac{|m_1|}{N+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{|m_n|}{N+1}\right)\widehat{f}(m)e^{2\pi i m\cdot x}$$

son las *medias cuadradas de Cesàro, o de Fejér*, de la serie de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$. De manera similar se pueden definir las medias de Cesàro *rectangulares*

$$\sigma_{n;N_1,\dots,N_n}f(x) := (f * F_{n;N_1,\dots,N_n})(x) = \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n \\ |m_j|\le N_j}}\left(1 - \frac{|m_1|}{N_1+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{|m_n|}{N_n+1}\right)\widehat{f}(m)e^{2\pi i m\cdot x},$$

donde los *núcleos de Fejér rectangulares* $F_{n;N_1,\dots,N_n}(x)$ se definen como

$$F_{n;N_1,\dots,N_n}(x_1,\dots,x_n) := \prod_{j=1}^{n} F_{N_j}(x_j).$$

La familia de los núcleos cuadrados de Fejér $F_{n,N}$ es una *aproximación de la identidad* en $\mathbb{T}^n$ cuando $N \to \infty$ [52, Prop. 3.1.10], lo que quiere decir que las $F_{n,N}(x)$ son funciones no negativas de $L^1(\mathbb{T}^n)$ que verifican $\|F_{n,N}\|_1 = 1$ para todo N y $\int_{V^c} |F_{n,N}(x)|\, dx \to 0$ cuando $N \to \infty$, siendo V un entorno cualquiera del origen de $\mathbb{T}^n$ (es bien conocido, en cambio, que los núcleos de Dirichlet $D_{n,N}$ no constituyen una aproximación de la identidad cuando $N \to \infty$). Esto permite probar, para $1 \le p < \infty$,

$$f \in L^p(\mathbb{T}^n) \implies f * F_{n,N} \to f \text{ en } L^p, \text{ es decir, } \|f * F_{n,N} - f\|_p \to 0 \text{ cuando } N \to \infty \qquad (1.5)$$

(v. Teorema 2.2 más adelante para la convergencia a.e.), deduciéndose de ahí, por ejemplo, que el conjunto de los polinomios trigonométricos es denso en $L^p(\mathbb{T}^n)$, y también el *teorema de unicidad* de los coeficientes de Fourier, es decir, que si f y g son dos funciones de $L^1(\mathbb{T}^n)$ tales que $\widehat{f}(m) = \widehat{g}(m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}^n$, entonces $f = g$ [52, p. 183-185].

1.1.2. Los teoremas de Jessen

Para generalizar estos resultados de $\mathbb{T}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) a $\mathbb{T}^\omega$ vamos a necesitar unos resultados de convergencia que vienen a ser unas notables extensiones del teorema de Fubini en el caso del toro infinito, y que fueron presentados y probados en primer lugar por Børge C. Jessen en 1934 [69, §13-15]. En algunos de los párrafos que siguen a continuación antes de llegar a su enunciado estamos transcribiendo literalmente el texto original de Jessen.

Para un $n \in \mathbb{N}$ fijo podemos considerar el toro infinito $\mathbb{T}^\omega$ de puntos $(x_1, x_2, \ldots)$ como producto cartesiano $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^{n,\omega}$ de un toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ de puntos $x_{(n} = (x_1, \ldots, x_n)$ y de una copia del propio toro infinito denotada $\mathbb{T}^{n,\omega}$, de puntos $x^{(n} = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$. Los puntos $x_{(n}$ y $x^{(n}$ son las *proyecciones* de x sobre los toros $\mathbb{T}^n$ y $\mathbb{T}^{n,\omega}$, respectivamente. Más formalmente, $x_{(n} = \pi_n(x)$ y $x^{(n} = \pi_{n,\omega}(x)$ donde, para cada $n \in \mathbb{N}$ las aplicaciones $\pi_n \colon \mathbb{T}^\omega \to \mathbb{T}^n$ y $\pi_{n,\omega} \colon \mathbb{T}^\omega \to \mathbb{T}^{n,\omega}$ están definidas, respectivamente, por $\pi_n(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\pi_{n,\omega}(x) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$.

Si A_j es un intervalo de $\mathbb{T}$ para cada $j = 1, 2, \ldots$, las proyecciones del cilindro $I = \prod_{j\in\mathbb{N}} A_j$ sobre $\mathbb{T}^n$ y $\mathbb{T}^{n,\omega}$ son los conjuntos

$$I_{(n} = \pi_n(I) = \prod_{j=1}^{n} A_j \quad \text{e} \quad I^{(n} = \pi_{n,\omega}(I) = \prod_{j\in\mathbb{N}} A_{n+j},$$

de modo que $I = I_{(n} \times I^{(n}$. Si n es suficientemente grande será $I^{(n} = \mathbb{T}^{n,\omega}$ ya que, por ser I un cilindro, será $A_{n+j} = \mathbb{T}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por otra parte, para un conjunto arbitrario en $\mathbb{T}^\omega$ no es cierto en general que $A = \pi_n(A) \times \pi_{n,\omega}(A)$.

La teoría de funciones en el espacio $\mathbb{T}^\omega$ contiene a la teoría en el espacio $\mathbb{T}^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Pues la función compleja $g(x_1, \ldots, x_n)$ definida en $\mathbb{T}^n$ se puede identificar si se quiere con la función $\tilde{g}(x) = (g \circ \pi_n)(x)$, definida en $\mathbb{T}^\omega$ y que no depende de las variables x_{n+1}, x_{n+2}, …; y a cada conjunto $A_{(n} \subset \mathbb{T}^n$ le corresponde, en $\mathbb{T}^\omega$, el cilindro $A_{(n} \times \mathbb{T}^{n,\omega} = \pi_n^{-1}(A_{(n}) = \{x \in \mathbb{T}^\omega | \pi_n(x) \in A_{(n}\}$.

En general, si $X \subseteq \mathbb{T}^\omega$ y $f \colon X \to \mathbb{C}$, decimos que f depende solo de las n primeras variables cuando $\exists\, g \colon \pi_n(X) \to \mathbb{C}$ tal que $f(x) = g(\pi_n(x))\ \forall\, x \in X$. Y diremos que f es una *función cilíndrica* (nuestra nomenclatura es en cierto modo contraria aquí a la de Saks en [105, p. 158]), o que depende solo de un número finito de variables, cuando $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que f depende solo de las N primeras variables [13, p. 81].

Alternativamente, la función compleja $g(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$ definida en $\mathbb{T}^{n,\omega}$ se puede identificar si se quiere con la función $\tilde{g}(x) = (g \circ \pi_{n,\omega})(x)$, definida en $\mathbb{T}^\omega$ y que no depende de las n primeras variables; y, si $X \subseteq \mathbb{T}^\omega$ y $f \colon X \to \mathbb{C}$, decimos que la función f no depende de las n primeras variables cuando $\exists\, g \colon \pi_{n,\omega}(X) \to \mathbb{C}$ tal que $f(x) = g(\pi_{n,\omega}(x))\ \forall\, x \in X$.

El teorema de Fubini nos permite asegurar que, si $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$, entonces

$$\int_{\mathbb{T}^\omega} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{T}^n} dx_{(n} \int_{\mathbb{T}^{n,\omega}} f\big(x_{(n}, x^{(n}\big)\,dx^{(n} = \int_{\mathbb{T}^{n,\omega}} dx^{(n} \int_{\mathbb{T}^n} f\big(x_{(n}, x^{(n}\big)\,dx_{(n}. \tag{1.6}$$

donde las integraciones se llevan a cabo de derecha a izquierda, son siempre posibles a.e. y conducen a funciones integrables de las restantes variables.

1.2 Proposición. (a) *Si $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ es una función que solo depende de las n primeras variables, es decir, $\exists\, g\colon \pi_n(X) \to \mathbb{C}$ tal que $f(x) = g(\pi_n(x)) = g(x_1, \ldots, x_n)\ \forall\, x \in \mathbb{T}^\omega$, entonces, para cada $\bar{p} \in \mathbb{Z}^\infty$*

$$\widehat{f}(\bar{p}) = \begin{cases} \widehat{g}(p_1, \ldots, p_n) & \textit{si } p_{n+j} = 0\ \forall\, j \in \mathbb{N}, \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

(b) *Si $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ es una función que no depende de las n primeras variables, es decir, $\exists\, g\colon \pi_{n,\omega}(X) \to \mathbb{C}$ tal que $f(x) = g(\pi_{n,\omega}(x)) = g(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\ \forall\, x \in X$, entonces, para cada $\bar{p} \in \mathbb{Z}^\infty$*

$$\widehat{f}(\bar{p}) = \begin{cases} \widehat{g}(p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots) & \textit{si } p_1 = \ldots = p_n = 0, \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. (a) Es de aplicación el teorema de Fubini en el siguiente cálculo. Se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\bar{p}) &= \int_{\mathbb{T}^\omega} f(x) e^{-2\pi i \bar{p}\cdot x}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} g(x_1, \ldots, x_n) e^{-2\pi i (p_1x_1 + \ldots + p_nx_n)}\,dx_{(n} \int_{\mathbb{T}^{n,\omega}} e^{-2\pi i (p_{n+1}x_{n+1} + p_{n+2}x_{n+2} + \ldots)}\,dx^{(n} \\ &= \widehat{g}(p_1, \ldots, p_n) \cdot \int_{\mathbb{T}^{n,\omega}} e^{-2\pi i (p_{n+1}x_{n+1} + p_{n+2}x_{n+2} + \ldots)}\,dx^{(n}. \end{aligned}$$

Esta última integral es igual a 1 si $p_{n+j} = 0\ \forall\, j \in \mathbb{N}$. Y en otro caso (solo un número finito de los p_{n+j} , para $j = j_1, \ldots, j_m$, podrán ser no nulos, ya que $\bar{p} \in \mathbb{Z}^\infty$),

$$\int_{\mathbb{T}^{n,\omega}} e^{-2\pi i (p_{n+1}x_{n+1} + p_{n+2}x_{n+2} + \ldots)}\,dx^{(n} = \prod_{j=j_1}^{j_m} \int_0^1 e^{-2\pi i p_{n+j}x_{n+j}}\,dx_{n+j} = 0,$$

ya que cada una de las integrales de este producto vale cero.

(b) En este caso se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\bar{p}) &= \int_{\mathbb{T}^\omega} f(x) e^{-2\pi i \bar{p}\cdot x}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i (p_1x_1 + \ldots + p_nx_n)}\,dx_{(n} \int_{\mathbb{T}^{n,\omega}} g(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) e^{-2\pi i (p_{n+1}x_{n+1} + p_{n+2}x_{n+2} + \ldots)}\,dx^{(n} \\ &= \widehat{g}(p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots) \cdot \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i (p_1x_1 + \ldots + p_nx_n)}\,dx^{(n}. \end{aligned}$$

La última integral es igual a 1 si $p_1 = \ldots = p_n = 0$, y 0 en otro caso. □

1.3 Definiciones. Sea $f(x) \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$; para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, del teorema de Fubini en $\mathbb{T}^n$ se sigue que la integral

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x)\,dx_{(n} = \int_{\mathbb{T}} dx_n \ldots \int_{\mathbb{T}} dx_2 \int_{\mathbb{T}} f(x_1, x_2, \ldots)\,dx_1$$

es una función integrable $g_{n,\omega}(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$ definida a.e. en $\mathbb{T}^{n,\omega}$, y también se sigue de Fubini que la integral de esta función sobre $\mathbb{T}^{n,\omega}$ es igual a la integral de $f(x)$ sobre $\mathbb{T}^{\omega}$.

Es más conveniente identificar esta función $g_{n,\omega}$ con la función que resulta al componerla con la proyección $\pi_{n,\omega}$, quedando definida entonces en todo $\mathbb{T}^{\omega}$ como una función que no depende de las n primeras variables x_1, ..., x_n; denotamos esta función por $f_{n,\omega}(x)$, es decir,

$$f_{n,\omega}(x) = (g_{n,\omega} \circ \pi_{n,\omega})(x) = g_{n,\omega}\big(x^{(n}\big) := \int_{\mathbb{T}^n} f\big(x_{(n}, x^{(n}\big)\, dx_{(n}, \tag{1.7}$$

y la denominamos *cola n-ésima de Jessen* para la función $f(x)$. Por (1.6) tenemos, para todo n,

$$\int_{\mathbb{T}^{\omega}} f_{n,\omega}(x)\, dx = \int_{\mathbb{T}^{n,\omega}} g_{n,\omega}\big(x^{(n}\big)\, dx^{(n} = \int_{\mathbb{T}^{n,\omega}} \left(\int_{\mathbb{T}^n} f\big(x_{(n}, x^{(n}\big)\, dx_{(n} \right) dx^{(n} = \int_{\mathbb{T}^{\omega}} f(x)\, dx$$

así como

$$\begin{aligned} \|f_{n,\omega}\|_1 &= \int_{\mathbb{T}^{\omega}} |f_{n,\omega}(x)|\ dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^{n,\omega}} \left|g_{n,\omega}\big(x^{(n}\big)\right|\ dx^{(n} \\ &= \int_{\mathbb{T}^{n,\omega}} \left(\left| \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\, dx_{(n} \right| \right)\ dx^{(n} \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^{n,\omega}} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|\ dx_{(n} \right)\ dx^{(n} \\ &= \int_{\mathbb{T}^{\omega}} |f(x)|\ dx = \|f\|_1 . \end{aligned}$$

Del teorema de Fubini también se sigue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la integral

$$\int_{\mathbb{T}^{n,\omega}} f\big(x_{(n}, x^{(n}\big)\, dx^{(n}$$

es una función integrable $g_n(x_1, \ldots, x_n)$ definida a.e. en $\mathbb{T}^n$.

Es también conveniente identificar esta función con la función que resulta al componerla con la proyección π_n, quedando definida entonces en todo $\mathbb{T}^{\omega}$ como una función que solo depende de las n primeras variables; denotaremos esta función, que no depende de las variables x_{n+1}, x_{n+2}, ..., por $f_n(x)$, es decir,

$$f_n(x) = (g_n \circ \pi_n)(x) = g_n\big(x_{(n}\big) := \int_{\mathbb{T}^{n,\omega}} f\big(x_{(n}, x^{(n}\big)\, dx^{(n}, \tag{1.8}$$

y la denominaremos *sección n-ésima de Jessen* de la función $f(x)$. Se tiene

$$\|f_n\|_1 = \|g_n\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \leq \|f\|_1 .$$

Se verifican los siguientes resultados de convergencia a.e. y en norma:

1.4 Teoremas de Jessen. [69, §13-15] *Si, dada $f(x) \in L^p(\mathbb{T}^{\omega})$ $(1 \leq p < \infty)$, se definen para cada $n \in \mathbb{N}$ las funciones $f_{n,\omega}(x)$ y $f_n(x)$ por* (1.7) *y* (1.8) *respectivamente, se verifica*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n,\omega}(x) = \int_{\mathbb{T}^{\omega}} f(x)\, dx$ *a.e. en* $\mathbb{T}^{\omega}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n,\omega}(x) = \int_{\mathbb{T}^{\omega}} f(x)\, dx$ *en* L^p*, es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \left\|f_{n,\omega} - \textstyle\int_{\mathbb{T}^{\omega}} f\right\|_p = 0.$$

No presentaremos las demostraciones de esos resultados. Ver para ello el trabajo original antes citado[1]. Por otra parte, Jessen también demuestra que si $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$ con $1 < p < \infty$, entonces $\|H(x)\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$, donde $H(x) = \sup_n |h_n(x)|$ y $h_n(x)$ es una cualquiera de las sucesiones de funciones $f_n(x)$ o $f_{n,\omega}(x)$, así como el teorema maximal de Hardy y Littlewood [64, (21.76)].

Se puede probar como corolario del Teorema 1.4(1) (v. [69, §11], [64, (22.21)]) la denominada en la Teoría de Probabilidad *Ley cero-uno*. Saks [105, (16.1)] prueba un resultado similar sobre el que volveremos en el Capítulo 2.

1.1.3. Propiedades fundamentales de las transformadas de Fourier

Volvamos a las series de Fourier de infinitas variables. En esta subsección vamos a recordar y a probar las propiedades básicas de las transformadas de Fourier en $\mathbb{T}^\omega$ sin usar la teoría general del Análisis Armónico en los grupos localmente compactos [102, 96], usando solo y básicamente los teoremas de convergencia de Jessen. Así, a partir de la convergencia en $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ de la secciones n-ésimas de Jessen podremos probar en primer lugar el *teorema de unicidad*, que se cumple igual que en el caso de un número finito de variables: la transformada de Fourier (en nuestro caso, el conjunto de coeficientes de la serie de Fourier), determina unívocamente la función salvo en un conjunto de medida nula.

Pero aún vamos a ver antes cuáles son los coeficientes de las series de Fourier de $f_n(x)$ y $f_{n,\omega}(x)$ cuando $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$.

1.5 Lema. Sea $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ y $f(x) \sim \sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty} c_{\bar{p}} e^{2\pi i \bar{p}\cdot x}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean, como arriba, las funciones definidas en $\mathbb{T}^\omega$

$$f_n(x) = g_n(x_1, \ldots, x_n) := \int_{\mathbb{T}^{n,\omega}} f\big(x_1, \ldots, x_n, x^{(n}\big)\, dx^{(n}$$

(la sección n-ésima de Jessen), dependiente solo de las n primeras variables, y

$$f_{n,\omega}(x) = g_{n,\omega}(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) := \int_{\mathbb{T}^n} f\big(x_{(n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\big)\, dx_{(n},$$

(la cola n-ésima de Jessen), que no depende de las n primeras variables. Entonces,

$$\widehat{f_n}(\bar{p}) = \begin{cases} \widehat{f}(\bar{p}) = c_{\bar{p}} & \text{si } p_{n+j} = 0 \ \forall\, j \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \text{y} \quad \widehat{f_{n,\omega}}(\bar{p}) = \begin{cases} \widehat{f}(\bar{p}) = c_{\bar{p}} & \text{si } p_1 = \ldots = p_n = 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. En primer lugar consideramos la sección n-ésima de Jessen $f_n(x)$. Sea $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots) \in \mathbb{Z}^\infty$. Usamos la Proposición 1.2 y el teorema de Fubini. Si $p_{n+j} = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} \widehat{f_n}(\bar{p}) = \widehat{g_n}(p_1, \ldots, p_n) &= \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)}\, dx_1 \cdots dx_n \int_{\mathbb{T}^{n,\omega}} f\big(x_1, \ldots, x_n, x^{(n}\big)\, dx^{(n} \\ &= \int_{\mathbb{T}^\omega} f(x) e^{-2\pi i \bar{p}\cdot x}\, dx = c_{\bar{p}}. \end{aligned}$$

Y si no todos los p_{n+j} ($j \in \mathbb{N}$) son nulos se tendrá $\widehat{f_n}(\bar{p}) = 0$ ya que la función f_n solo depende de las n primeras variables.

[1]Jessen [69, §14] prueba la convergencia a.e. de $f_n(x)$ a $f(x)$ a partir del Teorema 2.26 de diferenciación de integrales. A partir del mismo teorema Saks [105, (16.3)] prueba la convergencia a.e. de $f_{n,\omega}(x)$ a $\int f$, que Jessen [69, §13] prueba de otro modo. V. también [64, (22.17) y (22.22)], donde las pruebas, como la que presenta Doob en [36, VII.7] para el caso $p = 1$, usan los teoremas de convergencia de martingalas.

De modo similar, para la cola n-ésima de Jessen, si $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots) \in \mathbb{Z}^\infty$ y $p_1 = \ldots = p_n = 0$, entonces

$$\begin{aligned}\widehat{f_{n,\omega}}(\bar{p}) &= \widehat{g_{n,\omega}}(p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots) \\ &= \int_{\mathbb{T}^{n,\omega}} e^{-2\pi i(p_{n+1}x_{n+1}+p_{n+2}x_{n+2}+\ldots)}\, dx^{(n} \int_{\mathbb{T}^n} f\big(x_{(n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\big)\, dx_{(n} \\ &= \int_{\mathbb{T}^\omega} f(x) e^{-2\pi i \bar{p}\cdot x}\, dx = c_{\bar{p}},\end{aligned}$$

mientras que si alguno de los componentes p_j de $\bar{p}$ con $1 \leq j \leq n$ es no nulo, entonces de nuevo aplicando la Proposición 1.2 se sigue que $\widehat{f_{n,\omega}}(\bar{p}) = 0$ ya que la función $f_{n,\omega}$ no depende de las n primeras variables. □

1.6 Teorema (***Unicidad de*** $\widehat{f}$ **).** *Si* $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ *y* $\widehat{f}(\bar{p}) = 0$ *para toda* $\bar{p} \in \mathbb{Z}^\infty$*, entonces* $f(x) = 0$ *a.e..*

Demostración. [69, p. 284] Este teorema se reduce al correspondiente para una función de $L^1(\mathbb{T}^n)$ usando el primero de los resultados de convergencia a.e. establecido en los Teoremas de Jessen.

Supongamos así $f(x) \sim \sum_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^\infty} c_{\bar{n}} e^{2\pi i \bar{n}\cdot x}$ donde, para cada $\bar{n} \in \mathbb{Z}^\infty$, $c_{\bar{n}} = \int_{\mathbb{T}^\omega} f(x) e^{-2\pi i \bar{n}\cdot x}\, dx$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, como ha quedado probado en el Lema 1.5, podemos obtener la s.F. de la sección n-ésima de Jessen $f_n(x)$ de la función $f(x)$ a partir de la s.F. de la propia $f(x)$ sustituyendo por 0 cada $c_{\bar{p}}$ correspondiente a una sucesión $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots)$ tal que sus términos componentes p_{n+1}, p_{n+2}, $\ldots$ a partir del n-ésimo no sean todos cero. En particular, la s.F. de $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{T}^n$ es

$$\sum_{(p_1,\ldots,p_n)\in\mathbb{Z}^n} c_{\bar{p}} e^{2\pi i(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)},$$

donde $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{Z}^\infty$, y $c_{\bar{p}}$ es el correspondiente coeficiente de la s.F. de $f(x)$.

Si, por hipótesis, $c_{\bar{p}} = 0$ para todo $\bar{p} \in \mathbb{Z}^\infty$, se deduce que, para cada n, los coeficientes de la s.F. de la función $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{T}^n$ son todos cero. Entonces, por el correspondiente resultado de unicidad para las series de Fourier en $\mathbb{T}^n$ (v. [52, p. 184]), se sigue que $f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$ salvo en un conjunto Z de medida nula en $\mathbb{T}^n$, lo que implica que $f_n(x) = 0$ salvo en el conjunto $Z \times \mathbb{T}^{n,\omega}$, que tiene medida cero en $\mathbb{T}^\omega$. Entonces, a.e. en $\mathbb{T}^\omega$ se tiene, por Jessen, que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. □

1.7 Nota. Aunque de momento no nos sea de utilidad, vamos a dejar aquí consignado también que, similarmente, la serie de Fourier de la función $f_{n,\omega}(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ en $\mathbb{T}^\omega$ es

$$\sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty} c_{\bar{p}} e^{2\pi i(p_{n+1}x_{n+1}+p_{n+2}x_{n+2}+\ldots)},$$

donde $\bar{p} = (0, \overset{(n}{\ldots}, 0, p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots) \in \mathbb{Z}^\infty$, y $c_{\bar{p}} = \widehat{f}(\bar{p})$.

El siguiente corolario es también de Jessen[2]. De hecho, en la situación siguiente, $(a_k) \in \ell_2(\mathbb{N})$ (ver 1.16 un poco más adelante).

1.8 Corolario. [69, §18] *Sea* $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ *y supongamos que*

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i x_k} \quad (x \in \mathbb{T}^\omega),$$

[2] El propio Jessen indica (*loc. cit.*) que la convergencia de una serie trigonométrica general de la forma que aquí aparece fue estudiada por Steinhaus en [114] en base a un resultado más general de Kolmogoroff.

es decir, que $\widehat{f}(\bar{p}) = 0$ para todo $\bar{p} \in \mathbb{Z}^\infty$ distinto de un $\bar{e}_i = (\delta_{ji})_{j=1}^\infty$ (deltas de Kronecker). *Entonces, la serie converge a.e. en $\mathbb{T}^\omega$ a la suma $f(x)$, de modo que se puede escribir*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i x_k}.$$

Demostración. Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es la sección n-ésima de Jessen de la función f, sabemos por el Lema 1.5 que

$$f_n(x) \sim \sum_{k=1}^{n} a_k e^{2\pi i x_k}$$

y, por consiguiente, del Teorema 1.6 (formalmente; de hecho solo se usa el teorema de unicidad para funciones definidas en $\mathbb{T}^n$), y dado que una suma trigonométrica finita es su propia serie de Fourier, deducimos que

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{2\pi i x_k}.$$

Esto prueba el resultado, ya que $f_n(x) \to f(x)$ a.e. cuando $n \to \infty$ según el Teorema 1.4(1). $\square$

Un corolario más general del Teorema 1.6 es el teorema de inversión de la transformada de Fourier: si la serie de Fourier de una función integrable es absolutamente convergente, entonces la función queda representada por la serie. Pero antes de verlo, y a propósito de la convergencia absoluta de la s.F. de una función integrable f, es decir, de la convergencia de la serie $\sum_{\bar{m}\in\mathbb{Z}^\infty} \big|\widehat{f}(\bar{m})\big|$, además de la definición dada antes en 1.2, la definición y la proposición siguientes pueden ser aclaratorias.

1.9 Definición. Dado $\bar{p} \in \mathbb{Z}^\infty$, sean $p_{j_1}, \ldots, p_{j_m}$, con $1 \le j_1 < \cdots < j_m$, los elementos no nulos de $\bar{p}$. Podemos decir, entonces, que j_m es el *máximo índice no nulo de $\bar{p}$*, y escribir $\operatorname{mind}(\bar{p}) := j_m$. Si denotamos, para cada entero $\ell \ge 0$, por

$$\mathbb{Z}^{(\ell)} = \{\bar{p} \in \mathbb{Z}^\infty | \operatorname{mind}(\bar{p}) \le \ell\}$$

(notemos que los $\mathbb{Z}^{(\ell)}$ son subgrupos de $\mathbb{Z}^\infty$), tenemos que $\mathbb{Z}^{(\ell)} \subset \mathbb{Z}^{(\ell+1)}$ y también que $\mathbb{Z}^\infty = \bigcup_{\ell=1}^\infty \mathbb{Z}^{(\ell)}$. Esta es, por cierto, una manera de probar que $\mathbb{Z}^\infty$ es un conjunto numerable. Pues

$$\operatorname{card}\big(\mathbb{Z}^{(\ell)}\big) = \operatorname{card}\big(\mathbb{Z}^{\ell}\big) = \aleph_0^\ell = \aleph_0 \quad \text{para cada } \ell = 1, 2, \ldots,$$

y la unión numerable de conjuntos numerables es numerable, así $\operatorname{card}\big(\mathbb{Z}^\infty\big) = \aleph_0\,\aleph_0 = \aleph_0$ (en cambio, el producto cartesiano completo $\mathbb{Z}^\omega$ no es numerable, $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ [59, Ch. II]).

1.10 Proposición. *Sea $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ y supongamos que $\big\|\widehat{f}\,\big\|_{L^1(\mathbb{Z}^\infty)} := \sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty} \big|\widehat{f}(\bar{p})\big| < \infty$. Entonces,*

$$\big\|\widehat{f}\,\big\|_{L^1(\mathbb{Z}^\infty)} = \lim_{n\to\infty} \big\|\widehat{f_n}\,\big\|_{L^1(\mathbb{Z}^\infty)} = \lim_{n\to\infty} \big\|\widehat{g_n}\,\big\|_{L^1(\mathbb{Z}^n)},$$

siendo $f_n = g_n \circ \pi_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, la sección n-ésima de Jessen de la función f.

Demostración. Como $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{Z}^\infty)$, por el teorema de la convergencia dominada en el espacio $\mathbb{Z}^\infty$ con la medida de contar, aplicado a la sucesión de funciones $\big|\widehat{f}\,\big| \cdot \chi_{\mathbb{Z}^{(\ell)}} = \big|\widehat{f}_\ell\,\big|$ $(\ell = 1, 2, \ldots)$ que convergen puntualmente a $\big|\widehat{f}\,\big|$ en $\mathbb{Z}^\infty$, se deduce que

$$\big\|\widehat{f}\,\big\|_{L^1(\mathbb{Z}^\infty)} = \sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty} \big|\widehat{f}(\bar{p})\big| = \lim_{\ell\to\infty} \sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^{(\ell)}} \big|\widehat{f}(\bar{p})\big|.$$

Ahora bien, si $\bar{p} \in \mathbb{Z}^{(\ell)}$, $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_\ell, 0, 0, \ldots)$ y, como hemos visto en el Lema 1.5,

$$\widehat{f}(\bar{p}) = \widehat{f_\ell}(\bar{p}) = \widehat{g_\ell}(p_1, \ldots, p_\ell),$$

es decir, $\widehat{f_\ell} = \widehat{f} \cdot \chi_{\mathbb{Z}^{(\ell)}}$, de modo que

$$\sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^{(\ell)}} \big|\widehat{f}(\bar{p})\big| = \sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^{(\ell)}} \big|\widehat{f_\ell}(\bar{p})\big| = \sum_{(p_1,\ldots,p_\ell)\in\mathbb{Z}^\ell} \big|\widehat{g_\ell}(p_1, \ldots, p_\ell)\big| = \big\|\widehat{g_\ell}\big\|_{L^1(\mathbb{Z}^\ell)}.$$

□

1.11 Nota. Cuando $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{Z}^\infty)$, también podremos escribir

$$\sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty} \big|\widehat{f}(\bar{p})\big| = \big|\widehat{f}(\bar{0})\big| + \sum_{\ell=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty \\ \operatorname{mind}(\bar{p})=\ell}} \big|\widehat{f}(\bar{p})\big|\Big).$$

La misma demostración del teorema de inversión que se lleva a cabo en el caso del toro finito-dimensional $\mathbb{T}^n$ [52, Prop. 3.2.5] sirve para $\mathbb{T}^\omega$:

1.12 Teorema (***Inversión de Fourier***)**.** *Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ y que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{Z}^\infty)$. Entonces*

$$f(x) = \sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty} \widehat{f}(\bar{p}) e^{2\pi i \bar{p}\cdot x} \quad a.e.$$

(en particular, la función f es continua a.e. en $\mathbb{T}^\omega$).

Demostración. [96, Remark 4.4.8] La serie del segundo miembro de la igualdad a probar es absolutamente convergente por hipótesis, luego es uniformemente convergente y por consiguiente converge para todo $x \in \mathbb{T}^\omega$ a una función continua $g(x)$ (v. la Definición 1.21). Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen los mismos coeficientes de Fourier. Aplicando el Teorema 1.6 de unicidad, esas dos funciones son iguales en casi todo punto. □

1.13 Definición. Denotaremos por $A(\mathbb{T}^\omega)$ [73, p. 33], [52, p. 201] el espacio vectorial de las funciones $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ tales que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{Z}^\infty)$. Por el teorema de unicidad, es un espacio normado con

$$\|f\|_{A(\mathbb{T}^\omega)} = \sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty} \big|\widehat{f}(\bar{p})\big|.$$

Por el Teorema 1.12, toda $f \in A(\mathbb{T}^\omega)$ se puede redefinir en un conjunto de medida cero para hacerla continua y que se cumpla la fórmula de inversión en todo punto de $\mathbb{T}^\omega$, de manera que podemos considerar que las funciones del espacio $A(\mathbb{T}^\omega)$ son continuas. Además $A(\mathbb{T}^\omega)$ es un álgebra con la multiplicación de funciones, ya que se verifica el siguiente resultado, cuya demostración puede hacerse exactamente igual que en el caso de $A(\mathbb{T})$.

1.14 Teorema. [73, p. 33] *Suponer que $f, g \in A(\mathbb{T}^\omega)$. Entonces $fg \in A(\mathbb{T}^\omega)$ y*

$$\|fg\|_{A(\mathbb{T}^\omega)} \leq \|f\|_{A(\mathbb{T}^\omega)} \|g\|_{A(\mathbb{T}^\omega)}.$$

En la próxima sección estudiaremos algunas condiciones de suavidad suficientes para la convergencia absoluta de las series de Fourier en $\mathbb{T}^\omega$.

1.15 Nota. Si nos restringimos a la consideración de funciones del espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}^\omega)$, se sigue del Teorema 1.6 que el sistema de funciones $\{e_{\bar{p}}(x) = e^{2\pi i \bar{p}\cdot x}\}$ indexado por $\bar{p} \in \mathbb{Z}^\infty$, que es *ortonormal* pues se verifica

$$\langle e_{\bar{m}}, e_{\bar{n}} \rangle = \int_{\mathbb{T}^\omega} e^{2\pi i \bar{m}\cdot x} e^{-2\pi i \bar{n}\cdot x}\, dx = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{m} = \bar{n} \\ 0 & \text{si } \bar{m} \neq \bar{n} \end{cases} \qquad (\bar{m}, \bar{n} \in \mathbb{Z}^\infty), \tag{1.9}$$

es un sistema *completo* en $\mathcal{H}$. Como $\langle f, e_{\bar{m}} \rangle = \widehat{f}(\bar{m})$ se verifican [64, (16.26)]: la representación de f por su serie de Fourier en el sentido de $L^2(\mathbb{T}^\omega)$

$$f \overset{L^2(\mathbb{T}^\omega)}{=} \sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty} \widehat{f}(\bar{p}) e_{\bar{p}},$$

la ***relación de Parseval***

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}^\omega} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty} \widehat{f}(\bar{p})\, \overline{\widehat{g}(\bar{p})}, \tag{1.10}$$

la ***identidad de Plancherel***

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}^\omega} |f(x)|^2\, dx = \sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty} \left|\widehat{f}(\bar{p})\right|^2, \tag{1.11}$$

(así que, en particular, $f \in L^2 \Rightarrow \widehat{f} \in \ell^2$), y el ***teorema de Riesz-Fischer***: Si $\sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty} |c_{\bar{p}}|^2 < \infty$, existe una única función $f \in \mathcal{H}$ tal que $c_{\bar{p}} = \widehat{f}(\bar{p})$ [123, I, p. 127].

1.16 Corolario. [69, §18] *Si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, entonces la serie trigonométrica $\sum_{k=1}^\infty a_k e^{2\pi i x_k}$ es convergente a.e. en $\mathbb{T}^\omega$.*

Demostración. Por el teorema de Riesz-Fischer, $\sum_{k=1}^\infty a_k e^{2\pi i x_k}$ es la s.F. de una función $f \in L^2(\mathbb{T}^\omega)$. En particular, por el Corolario 1.8, la serie converge a la suma $f(x)$ a.e. en $\mathbb{T}^\omega$. □

También se cumple que $\sum_{k=1}^\infty |a_k|^2$ divergente $\Longrightarrow \sum_{k=1}^\infty a_k e^{2\pi i x_k}$ divergente a.e. en $\mathbb{T}^\omega$, aunque la demostración es más complicada. Jessen da también una prueba en [69, §18].

Veamos a continuación la generalización a $\mathbb{T}^\omega$ del resultado [52, Prop. 3.2.1] que establece la densidad de los polinomios trigonométricos en las clases $L^p(\mathbb{T}^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$. De hecho en esta demostración queda probado un resultado de sumabilidad de las series de Fourier en $\mathbb{T}^\omega$ (v. Proposición 2.3). La técnica de la prueba está ya presente en [63, II, (44.43),(44.53)].

1.17 Teorema. *El conjunto de los polinomios trigonométricos es denso en $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ para todo $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Sea $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$, $f(x) \sim \sum_{\bar{m}\in\mathbb{Z}^\infty} c_{\bar{m}} e^{2\pi i \bar{m}\cdot x}$.

En primer lugar, para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo podemos considerar, por una parte, la sección n-ésima de Jessen $f_n = g_n \circ \pi_n$ de la función f. Vamos a denotar también por f_n la función g_n en lo que sigue por comodidad y sin que haya lugar a error. En el Lema 1.5 ha quedado demostrado que

$$f_n(x) \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} c_m e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n)},$$

con $c_m = c_{\bar{m}}$ si $m = (m_1, \ldots, m_n)$ y $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_n, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{Z}^\infty$.

Por otra parte podemos considerar los *núcleos cuadrados de Fejér parciales*, solo dependientes de las n primeras variables. Con la misma salvedad de notación, escribimos

$$F_{n,N}(x) = F_{n,N}(x_1, \ldots, x_n) = F_N(x_1) \cdots F_N(x_n), \quad N = 0, 1, 2, \ldots.$$

Se tiene, para casi todo $x \in \mathbb{T}^\omega$, $(f * F_{n,N})(x) = (f_n * F_{n,N})(x_1, \ldots, x_n)$ como vemos a continuación:

$$\begin{aligned}(f * F_{n,N})(x) &= \int_{\mathbb{T}^\omega} F_{n,N}(x-y) f(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{T}^\omega} F_{n,N}(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) f(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} F_{n,N}(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)\, dy_1 \cdots dy_n \int_{\mathbb{T}^{n,\omega}} f\big(y_1, \ldots, y_n, y^{(n}\big)\, dy^{(n} \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} F_{n,N}(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) f_n(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \cdots dy_n \\ &= (f_n * F_{n,N})(x_1, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

(de hecho este cálculo se puede generalizar: $(f * \varphi)(x) = (f_n * \varphi)(x_1, \ldots, x_n)$ si φ es una función integrable en $\mathbb{T}^\omega$ que solo depende de las n primeras variables y f_n es la sección n-ésima de Jessen de f).

Entonces, aplicando el resultado citado antes en (1.5), siempre con n fijo, obtenemos

$$\lim_{N\to\infty} (f * F_{n,N})(x) = \lim_{N\to\infty} (f_n * F_{n,N})(x_1, \ldots, x_n) = f_n(x_1, \ldots, x_n) = f_n(x) \tag{1.12}$$

en $L^p(\mathbb{T}^\omega)$.

En segundo lugar tengamos en cuenta el resultado de Jessen según el cual $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ en $L^p(\mathbb{T}^\omega)$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_{n_0} - f\|_p < \varepsilon/2$. Y, con este n_0 fijo, según (1.12) existe un $N_0(n_0) \in \mathbb{N}$ tal que $\|f * F_{n_0,N_0} - f_{n_0}\|_p < \varepsilon/2$. Aplicando la desigualdad de Minkowski,

$$\|f * F_{n_0,N_0} - f\|_p \le \|f * F_{n_0,N_0} - f_{n_0}\|_p + \|f_{n_0} - f\|_p < \varepsilon,$$

y $f * F_{n_0,N_0}$ es un polinomio trigonométrico; de hecho se tiene a.e.

$$\begin{aligned}(f * F_{n_0,N_0})(x) &= (f_{n_0} * F_{n_0,N_0})(x_1, \ldots, x_{n_0}) \\ &= \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^{n_0} \\ |m_j|\le N_0}} \left(1 - \frac{|m_1|}{N_0+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{|m_{n_0}|}{N_0+1}\right) \widehat{f_{n_0}}(m) e^{2\pi i(m_1x_1 + \ldots + m_{n_0}x_{n_0})},\end{aligned}$$

donde $\widehat{f_{n_0}}(m) = \widehat{f}(\bar{m})$ siendo $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_{n_0}, 0, 0\ldots) \in \mathbb{Z}^\infty$. □

Terminamos esta sección con la generalización al caso de $\mathbb{T}^\omega$ del resultado canónico de *decaimiento* en el infinito de los coeficientes de Fourier de una función integrable en $\mathbb{T}^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Resulta como corolario inmediato del Teorema 1.17 [52, p. 193]:

1.18 Teorema (***Lema de Riemann-Lebesgue***). *Sea $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$. Para $\bar{m} = (m_1, m_2, \ldots) \in \mathbb{Z}^\infty$, pongamos $|\bar{m}| = \max |m_k|$. Entonces, se verifica*

$$\lim_{|\bar{m}|\to\infty} \big|\widehat{f}(\bar{m})\big| = 0.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, por la densidad de los polinomios trigonométricos en $L^1(\mathbb{T}^\omega)$ existe un polinomio trigonométrico P tal que $\|f - P\|_1 < \varepsilon$. Ahora bien, si $|\bar{m}|$ es mayor que el grado de P, entonces $\widehat{P}(\bar{m}) = 0$, porque si $\widehat{P}(\bar{m}) \neq 0$ y $m_{j_1}, \ldots, m_{j_n}$ son las componentes no nulas de $\bar{m}$, entonces

$$\operatorname{grado}(P) \ge |m_{j_1}| + \ldots + |m_{j_n}| \ge |\bar{m}|\,;$$

de manera que

$$\big|\widehat{f}(\bar{m})\big| = \big|\widehat{f}(\bar{m}) - \widehat{P}(\bar{m})\big| = \big|\widehat{(f-P)}(\bar{m})\big| \le \|f - P\|_1 < \varepsilon.$$

□

1.2. Derivación parcial y coeficientes de Fourier

Un resultado estándar que establece una condición de suavidad suficiente para la convergencia absoluta de la serie de Fourier de una función definida en el toro finito-dimensional $\mathbb{T}^n$ $(n \geq 1)$ es el siguiente:

1.19 Teorema. [113, Ch. VII, Cor. 1.9] *Si $f \in C^{(k}(\mathbb{T}^n)$ con $k > n/2$, entonces $\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \left|\widehat{f}(m)\right| < \infty$.*

Una consecuencia inmediata es que $f \in C^{(\infty}(\mathbb{T}^n) \implies f \in A(\mathbb{T}^n)$. Aunque en este caso se verifican resultados más conclusivos, como por ejemplo (v. [103, Th. 7.25]; [52, Prop. 3.3.12]):

1.20 Teorema. *Si $f \in C^{(\infty}(\mathbb{T}^n)$, entonces*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} (1+|m|)^N \left|\widehat{f}(m)\right| < \infty \quad \forall N = 0, 1, \ldots, \quad |m| = \left(\textstyle\sum_{i=1}^n m_i^2\right)^{1/2}.$$

En el caso del toro infinito $\mathbb{T}^\omega$ esta implicación se mantiene para las funciones que solo dependen de un número finito de variables. Pero, como veremos también en la parte final de esta sección mediante unos contraejemplos, hay funciones de la clase $C^{(\infty}(\mathbb{T}^\omega)$ (dependientes de infinitas variables) cuya serie de Fourier diverge absolutamente, lo que establece una diferencia relevante con el caso finito-dimensional.

Comenzaremos presentando unos principios básicos. Una función compleja $f(x)$, definida en $\mathbb{T}^\omega$, es *continua en el punto* $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \ldots)$ si para todo entorno abierto V de $f(x^{(0)})$ existe un cilindro abierto U que contiene a $x^{(0)}$, tal que $f(U) \subset V$. Este cilindro U tendrá restringidas a lo sumo un número finito de coordenadas, de modo que $x \in U \Leftrightarrow \left|x_{j_1} - x_{j_1}^0\right| < \delta_1, \ldots, \left|x_{j_m} - x_{j_m}^0\right| < \delta_m$ donde $1 \leq j_1 < \ldots < j_m$. Pero entonces el cilindro U^* que tiene restringidas todas las j_m primeras coordenadas en torno al punto $x^{(0)}$ por $\delta = \text{mín}_{1\leq k\leq m} \delta_k$ está contenido en U, $x^{(0)} \in U^*$, y se cumple que $f(U^*) \subset f(U) \subset V$. Esto lleva a poder presentar la noción de continuidad de la siguiente forma.

1.21 Definición. [18, p. 130] La función $f\colon \mathbb{T}^\omega \to \mathbb{C}$ es *continua en el punto* $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \ldots)$ si para todo $\varepsilon > 0$ existen un entero positivo m y un número $\delta > 0$ tales que, en cada punto $(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{T}^\omega$ para el que se cumplen las m desigualdades $\left|x_j - x_j^0\right| < \delta$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, se verifica

$$\left|f(x_1, x_2, \ldots) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots)\right| < \varepsilon.$$

Se define $C^{(0}(\mathbb{T}^\omega) = \{f\colon \mathbb{T}^\omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ es continua en todo } x \in \mathbb{T}^\omega\}$. Como $\mathbb{T}^\omega$ es un espacio compacto, toda función continua está acotada en módulo, y el espacio vectorial $C^{(0}(\mathbb{T}^\omega)$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_\infty = \text{máx}_{x\in\mathbb{T}^\omega} |f(x)|$.

1.22 Lema. Si $\varphi(t) \in C^{(0}(\mathbb{T})$ y $\sum_{j=1}^\infty a_j$ es una serie absolutamente convergente de números complejos, entonces la función $\Psi(x) = \sum_{j=1}^\infty a_j \varphi(x_j)$ es continua en $\mathbb{T}^\omega$.

Demostración. Supongamos que $\varphi(t)$ es una función no nula, en otro caso el enunciado es trivial. Fijemos un punto cualquiera $x^{(0)} \in \mathbb{T}^\omega$. Dado $\varepsilon > 0$, por ser convergente la serie $\sum_{j=1}^\infty |a_j|$, $\exists m_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=m_1+1}^{N} |a_j| < \frac{\varepsilon}{4\,\|\varphi\|_\infty}$$

para todo $N > m_1$. Ahora, para cada $j = 1, \ldots, m_1$, la continuidad de φ en $x_j^{(0)}$ asegura la existencia de un número $\delta_j > 0$ tal que, si $\left|x_j - x_j^{(0)}\right| < \delta_j$, entonces

$$\left|\varphi(x_j) - \varphi(x_j^{(0)})\right| < \frac{\varepsilon}{2m_1\,|a_j|}.$$

Sea $\delta = \text{mín}_{1\le j\le m_1} \delta_j$; si $x \in \mathbb{T}^{\omega}$ es tal que $\left|x_j - x_j^{(0)}\right| < \delta$ para $j = 1, \ldots, m_1$, se tiene entonces, para todo $N > m_1$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{N} a_j\varphi(x_j) - \sum_{j=1}^{N} a_j\varphi(x_j^{(0)})\right| &= \left|\sum_{j=1}^{N} a_j\big(\varphi(x_j) - \varphi(x_j^{(0)})\big)\right| \\ &\le \sum_{j=1}^{m_1} |a_j|\left|\varphi(x_j) - \varphi(x_j^{(0)})\right| + \sum_{j=m_1+1}^{N} |a_j|\left|\varphi(x_j) - \varphi(x_j^{(0)})\right| \\ &\le \sum_{j=1}^{m_1} |a_j|\cdot\frac{\varepsilon}{2m_1\,|a_j|} + 2\,\|\varphi\|_{\infty}\sum_{j=m_1+1}^{N} |a_j| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Por otra parte, se verifica $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j\varphi(x_j)| \le \|\varphi\|_{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ para todo $x \in \mathbb{T}^{\omega}$, luego la serie que define la función $\Psi(x)$ es absolutamente convergente, con lo cual la función $\Psi(x)$ queda definida para todo $x \in \mathbb{T}^{\omega}$ y existe $m_2 = m_2(\varepsilon)$ tal que, si $N > m_2$, entonces

$$\left|\Psi(x) - \sum_{j=1}^{N} a_j\varphi(x_j)\right| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{T}^{\omega}.$$

Por consiguiente, tomando $M = \text{máx}\{m_1, m_2\}$, se tiene

$$\begin{aligned}\left|\Psi(x) - \Psi(x^{(0)})\right| &\le \left|\Psi(x) - \sum_{j=1}^{M} a_j\varphi(x_j)\right| \\ &\quad + \left|\sum_{j=1}^{M} a_j\varphi(x_j) - \sum_{j=1}^{M} a_j\varphi(x_j^{(0)})\right| + \left|\Psi(x^{(0)}) - \sum_{j=1}^{M} a_j\varphi(x_j^{(0)})\right| \\ &< 3\varepsilon\end{aligned}$$

si $x \in \mathbb{T}^{\omega}$ es tal que $\left|x_j - x_j^{(0)}\right| < \delta$ para $j = 1, \ldots, M$, luego la función $\Psi(x)$ es continua en $x^{(0)}$. □

Toda función continua en $\mathbb{T}^{\omega}$ es *uniformemente continua*, es decir:

1.23 Proposición. [69, p. 256] *Si la función $f\colon \mathbb{T}^{\omega} \to \mathbb{C}$ es continua, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existen un entero positivo m y un número $\delta > 0$ tales que, si para los puntos x, $x' \in \mathbb{T}^{\omega}$ se cumplen las m desigualdades $\left|x_j - x'_j\right| < \delta$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, entonces se verifica $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.*

A partir de esta proposición podemos demostrar que toda función continua en $\mathbb{T}^{\omega}$ puede aproximarse uniformemente por funciones continuas que solo dependen de un número finito de las variables:

1.24 Proposición. [69, p. 257] *Si la función $f\colon \mathbb{T}^{\omega} \to \mathbb{C}$ es continua, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una función continua $g_m(x)$ dependiente solo de las m primeras variables x_1, …, x_m, tal que $|f(x) - g_m(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{T}^{\omega}$.*

Demostración. Basta considerar, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f_n(x) = f(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ obtenida a partir de $f(x)$ dando a las variables x_{n+1}, x_{n+2}, $\dots$ el valor 0.

Dado $\varepsilon > 0$, de acuerdo con la proposición anterior existen un entero positivo m y un número $\delta > 0$ tales que si x, $x' \in \mathbb{T}^\omega$ cumplen $\left|x_j - x'_j\right| < \delta$ para $j = 1, 2, \dots, m$, se verifica $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Para ese entero positivo m, si $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{T}^\omega$, denotemos con x' al punto de coordenadas $(x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots)$; se cumple $\left|x_j - x'_j\right| = 0 < \delta$ para $j = 1, 2, \dots, m$, y por consiguiente

$$|f(x) - f_m(x)| = \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon,$$

y la función $f_m(x)$ solo depende de las m primeras variables. □

1.25 Definición. Sea $f(x)$ una función definida en $\mathbb{T}^\omega$. Para cada multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ finitamente no nulo de enteros no negativos α_j se define el *operador de derivación parcial* D^α por

$$D^\alpha f = D_{j_1}^{\alpha_{j_1}} \cdots D_{j_m}^{\alpha_{j_m}} f = \frac{\partial^{\alpha_{j_1}}}{\partial x_{j_1}^{\alpha_{j_1}}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_{j_m}}}{\partial x_{j_m}^{\alpha_{j_m}}} f \quad \text{si } \alpha_j = 0 \ \forall j \notin \{j_1, \dots, j_m\}.$$

El *orden total de derivación parcial* del multiíndice α es $|\alpha| = \alpha_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_m}$. Si $|\alpha| = 0$, $D^\alpha f = f$.

Para cada entero positivo k se define $C^{(k}(\mathbb{T}^\omega)$ como la clase de las funciones f que admiten en todo punto *derivadas parciales* continuas hasta el orden k, es decir, tales que $D^\alpha f \in C^{(0}(\mathbb{T}^\omega)$ para todo multiíndice α finitamente no nulo tal que $|\alpha| \leq k$. El espacio vectorial $C^{(k}(\mathbb{T}^\omega)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{(k)} = \sup_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty$$

[40, 2.2.4] donde, por la continuidad supuesta, $\|D^\alpha f\|_\infty = \text{máx}_{x \in \mathbb{T}^\omega} |(D^\alpha f)(x)|$ para cada α fijo.

El espacio de las funciones infinitamente derivables es $C^{(\infty}(\mathbb{T}^\omega) = \bigcap_{k=0}^\infty C^{(k}(\mathbb{T}^\omega)$. Es un espacio de Fréchet, es decir, localmente convexo, metrizable y completo [40, 12.1], [103, p. 208].

1.26 Notación. Por otra parte adoptemos la notación x^α, como es también usual, donde $x \in \mathbb{R}^\omega$ y α es un multiíndice finitamente no nulo, para el producto (finito) $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots$ (con el convenio $0^0 = 1$ en este caso). La siguiente propiedad extiende la que es bien conocida y básica en el caso de dimensión finita.

1.27 Lema. Si $f \in C^{(k}(\mathbb{T}^\omega)$ y $|\alpha| \leq k$, se tiene

$$\widehat{(D^\alpha f)}(\bar{p}) = (2\pi i \bar{p})^\alpha \widehat{f}(\bar{p}) \quad (\bar{p} \in \mathbb{Z}^\infty). \tag{1.13}$$

Demostración. Por inducción sobre el orden del multiíndice finitamente no nulo α. Para $|\alpha| = 0$ es trivialmente cierto. Supuesto cierto para todos los α tales que $|\alpha| = k$ y suponiendo que $f \in C^{(k+1}(\mathbb{T}^\omega)$, se tiene, para cada $j \in \mathbb{N}$, aplicando Fubini, integrando por partes y usando la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}
(\widehat{D_j D^\alpha} f)(\bar{p}) &= \int_{\mathbb{T}^\omega} (D_j D^\alpha f)(x) e^{-2\pi i \bar{p} \cdot x} dx \\
&= \int_{\mathbb{T}^\omega} dx'' \int_{\mathbb{T}} (D_j D^\alpha f)(x) e^{-2\pi i \bar{p} \cdot x} dx_j \\
&= \int_{\mathbb{T}^\omega} dx'' \left(\left[(D^\alpha f)(x) e^{-2\pi i \bar{p} \cdot x} \right]_{x_j=0}^{x_j=1} + (2\pi i p_j) \int_{\mathbb{T}} (D^\alpha f)(x) e^{-2\pi i \bar{p} \cdot x} dx_j \right) \\
&= (2\pi i p_j) \int_{\mathbb{T}^\omega} (D^\alpha f)(x) e^{-2\pi i \bar{p} \cdot x} dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2\pi i p_j)(2\pi i \bar{p})^\alpha \int_{\mathbb{T}^\omega} f(x) e^{-2\pi i \bar{p}\cdot x} dx \\
&= (2\pi i p_j)(2\pi i \bar{p})^\alpha \widehat{f}(\bar{p})
\end{aligned}
$$

(donde x'' indica x con exclusión de la coordenada x_j), ya que los términos integrados se han cancelado por periodicidad. Esto permite establecer (1.13) para $|\alpha| = k+1$. □

1.28 Corolario. *Sea $f \in C^{(\infty}(\mathbb{T}^\omega)$ y $N \geq 0$ un entero tal que $\sup_{|\alpha|\leq N} \|D^\alpha f\|_\infty < \infty$. Dado $\bar{p} \in \mathbb{Z}^\infty$ pongamos $\|\bar{p}\| = \max_{1\leq k\leq m} |p_{j_k}|$ si las componentes no nulas de $\bar{p}$ son $p_{j_1}, \ldots, p_{j_m}$. Se tiene*

$$|\widehat{f}(\bar{p})| = \mathrm{o}\big(\|\bar{p}\|^{-N}\big).$$

Demostración. [52, p. 196] El entero $N \geq 0$ es fijo. Fijemos ahora un $\bar{p} \in \mathbb{Z}^\infty \setminus \{\bar{0}\}$. Sea j_ℓ tal que $|p_{j_\ell}| = \|\bar{p}\|$. Obviamente es $|p_{j_\ell}| \neq 0$. Del lema anterior resulta, en particular,

$$\widehat{f}(\bar{p}) = \frac{1}{(2\pi i p_{j_\ell})^N} \widehat{(D_{j_\ell}^N f)}(\bar{p})$$

de donde tomando módulos se concluye

$$|\widehat{f}(\bar{p})| = \frac{1}{(2\pi)^N |p_{j_\ell}|^N} \left|\widehat{(D_{j_\ell}^N f)}(\bar{p})\right| \leq \frac{1}{(2\pi)^N \|\bar{p}\|^N} \left\|D_{j_\ell}^N f\right\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^N \|\bar{p}\|^N} \cdot \sup_{|\alpha|\leq N} \|D^\alpha f\|_\infty.$$ □

1.2.1. Coeficientes de Fourier de las funciones cilíndricas en $C^{(\infty}(\mathbb{T}^\omega)$

1.29 Definición. Recordemos que $f(x)$ es una *función cilíndrica* en $\mathbb{T}^\omega$ cuando solo depende de un número finito de variables, es decir, cuando $\exists\, g_n \colon \Omega_n \to \mathbb{C}$ ($n \geq 1$), con $\Omega_n \subseteq \mathbb{T}^n$ tal que $f = g_n \circ \pi_n$, siendo $\pi_n \colon \mathbb{T}^\omega \to \mathbb{T}^n$ la proyección canónica. Se define [3, p. 73-75] el espacio vectorial de las funciones cilíndricas de clase $C^{(\infty}$ en $\mathbb{T}^\omega$ por

$$\mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{g_n \circ \pi_n | g_n \in C^{(\infty}(\mathbb{T}^n)\big\},$$

de modo que, si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega)$, $\exists\, p \in \mathbb{N}$ y $g_p \in C^{(\infty}(\mathbb{T}^p)$ tal que $f = g_p \circ \pi_p$. En este caso, para cada $q \geq p$ $\exists\, g_q \in C^{(\infty}(\mathbb{T}^q)$ tal que $f = g_q \circ \pi_q$, basta tomar $g_q = g_p \circ \pi_p^q$, siendo $\pi_p^q \colon \mathbb{T}^q \to \mathbb{T}^p$ la correspondiente proyección canónica [13, p. 80-81].

Por otra parte, si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega)$ se deduce de la Proposición 1.2(a) que el soporte de su transformada de Fourier $\widehat{f}$ está contenido en $\mathbb{Z}^{(\ell)}$ (Definición 1.9) para algún $\ell \geq 1$.

1.30 Comentarios y ejemplos. La tarea de encontrar funciones pertenecientes a la clase $\mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega)$ es inmediata de realizar, ya que los propios caracteres continuos $\chi_{\bar{n}}(x) = e^{2\pi i \bar{n}\cdot x}$, para cada $\bar{n} \in \mathbb{Z}^\infty$ fijo, y también sus partes reales e imaginarias, son funciones de este espacio. Por lo tanto los polinomios trigonométricos son funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega)$. Y todos ellos sirven naturalmente como ejemplos de funciones de clase $C^{(\infty}(\mathbb{T}^\omega)$.

No es tan inmediato mostrar funciones de esta clase que no sean cilíndricas. En primera instancia podríamos pensar en generalizar alguno de los ejemplos clásicos de funciones $C^{(\infty}(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto (v. por ejemplo [113, p. 19]). De este modo, sea

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-t^2/(1-t^2)} & \text{si } |t| < 1, \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases}$$

($t \in \mathbb{R}$). La función $\psi(t) = \varphi(2t-1)$, $t \in [0,1)$, pertenece a la clase $C^{(\infty}(\mathbb{T})$. La primera función que se nos ocurre probar, generalizando de la manera obvia el primer ejemplo de Stein y Weiss en el lugar citado, a saber,

$$\Psi(x) = \prod_{j=1}^{\infty} \psi(x_j) \quad (x \in \mathbb{T}^\omega),$$

falla estrepitosamente, ya que ni siquiera es continua, porque siendo $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right)$,

$$x^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \ldots\right),\ x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots\right), \ldots,\ x^{(n)} = \left(\frac{1}{2}, \overset{(n)}{\ldots}, \frac{1}{2}, 0, \ldots\right), \ldots,$$

se tiene $x^{(n)} \to a$ en $\mathbb{T}^\omega$, pero $\Psi(x^{(n)}) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mientras que $\Psi(a) = 1$.

En cambio, podemos considerar la función

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \psi(x_j) \quad (x \in \mathbb{T}^\omega),$$

donde $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ puede ser cualquier serie absolutamente convergente de números complejos. Aplicando el Lema 1.22 se demuestra inmediatamente que esta función es continua en $\mathbb{T}^\omega$. Por otra parte es obvio que, para cada $j \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi(x) = a_j \psi'(x_j)$, y esta función, solo dependiente de la variable x_j, es infinitamente derivable. Entonces la función no cilíndrica $\Phi(x)$ pertenece a la clase $C^{(\infty}(\mathbb{T}^\omega)$.

Y, de hecho, no hace falta ir "tan lejos". Podemos ir a considerar simplemente que los caracteres continuos del grupo $\mathbb{T}$, es decir, las funciones $\phi_n(t) = e^{2\pi i n t}$, pertenecen a la clase $C^{(\infty}(\mathbb{T})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Usando el Lema 1.22 se deduce entonces que, si $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ es una serie absolutamente convergente de números complejos, la función no cilíndrica $\Upsilon(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \phi_j(x_j)$ pertenece también a la clase $C^{(\infty}(\mathbb{T}^\omega)$ (podríamos aquí tomar, por ejemplo, $n_j = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$).

Usando las ideas de la prueba del Teorema 1.20 se puede probar la proposición siguiente, de la que se deduce en particular que $\mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega) \subset A(\mathbb{T}^\omega)$ (v. [5, Proposition 1]). Anteponemos en un lema la prueba de una desigualdad auxiliar que utiliza Rudin en la referencia citada.

1.31 Lema. Sean $n, r \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $|y| = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}$. Entonces, se cumple la desigualdad

$$(1+|y|)^{2r} < (2n+2)^r \left(1 + y_1^{2r} + \ldots + y_n^{2r}\right).$$

Demostración. Estamos considerando $r \geq 1$. Utilizando en primer lugar la desigualdad entre las medias de órdenes 2 y $2r$ de los números 1, $|y_1|$, ..., $|y_n|$ tenemos

$$\left(\frac{1 + y_1^2 + \ldots + y_n^2}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1 + y_1^{2r} + \ldots + y_n^{2r}}{n+1}\right)^{\frac{1}{2r}} < \left(1 + y_1^{2r} + \ldots + y_n^{2r}\right)^{\frac{1}{2r}},$$

por consiguiente

$$(1+|y|)^2 = 1 + 2|y| + |y|^2 \leq 2(1+|y|^2) < 2(n+1)\left(1 + y_1^{2r} + \ldots + y_n^{2r}\right)^{\frac{1}{r}},$$

y elevando a la potencia r resulta lo que queremos probar. □

1.32 Proposición. *Sea ϕ una función compleja definida en $\mathbb{T}^\omega$ que depende de un número finito de variables. Entonces,*

$$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega) \Longrightarrow \sum_{\bar{p} \in \mathbb{Z}^\infty} (1+|\bar{p}|)^N \left|\widehat{\phi}(\bar{p})\right| < \infty \quad \forall N = 0, 1, \ldots.$$

Y recíprocamente, si se cumplen estas condiciones existe una función $\phi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega)$ tal que $\phi(x) = \phi_0(x)$ a.e. en $\mathbb{T}^\omega$.

Demostración. Supongamos que $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega)$ depende solo de las n ($n \in \mathbb{N}$ fijo en el resto de la demostración) primeras variables. Las derivadas parciales de cualquier orden de ϕ respecto de estas n variables son también funciones (continuas, luego pertenecientes a $L^2(\mathbb{T}^\omega)$) que dependen solo de las mismas n primeras variables. Sea N un entero no negativo fijo en lo que sigue, y sea $r > \frac{n}{2} + N$. La identidad (1.11) aplicada a ϕ, $D_1^r\phi$, $\ldots$, $D_n^r\phi$ (recordemos la abreviatura $D_i^r\phi = \frac{\partial^r\phi}{\partial x_j^r}$) nos da

$$\sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty} \big|\widehat{\phi}(\bar{p})\big|^2 = \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{T}^\omega)} < \infty,$$

$$\sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty} p_k^{2r}\big|\widehat{\phi}(\bar{p})\big|^2 = \frac{1}{(2\pi)^r}\cdot\sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty}\big|\widehat{(D_k^r\phi)}(\bar{p})\big|^2 = \frac{1}{(2\pi)^r}\cdot\|D_k^r\phi\|^2_{L^2(\mathbb{T}^\omega)} < \infty \quad (1 \le k \le n),$$

donde hemos usado que $\widehat{(D_k^r\phi)}(\bar{p}) = (2\pi i p_k)^r\widehat{\phi}(\bar{p})$ para $1 \le k \le n$, de acuerdo con (1.13). Ahora bien, teniendo en cuenta que $\widehat{\phi}$ está soportada en $\mathbb{Z}^{(n)}$ de acuerdo con la Proposición 1.2 (a), se tiene de hecho que

$$\sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty}\big|\widehat{\phi}(\bar{p})\big|^2 = \sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^{(n)}}\big|\widehat{\phi}(\bar{p})\big|^2 = \sum_{(p_1,\ldots,p_n)\in\mathbb{Z}^n}\big|\widehat{\phi}(p_1,\ldots,p_n,0,0,\ldots)\big|^2 = \sum_{(p_1,\ldots,p_n)\in\mathbb{Z}^n}\big|\widehat{g}(p_1,\ldots,p_n)\big|^2,$$

y

$$\sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty} p_k^{2r}\big|\widehat{\phi}(\bar{p})\big|^2 = \sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^{(n)}} p_k^{2r}\big|\widehat{\phi}(\bar{p})\big|^2 = \sum_{(p_1,\ldots,p_n)\in\mathbb{Z}^n} p_k^{2r}\big|\widehat{g}(p_1,\ldots,p_n)\big|^2$$

para $1 \le k \le n$, si $\phi = g \circ \pi_n$.

Para cada $\bar{p} \in \mathbb{Z}^{(n)}$, pongamos $|\bar{p}| = \big(\sum_{k=1}^n p_k^2\big)^{1/2}$. Utilizando la desigualdad del Lema 1.31 se deduce

$$J = \sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^{(n)}}(1+|\bar{p}|)^{2r}\big|\widehat{\phi}(p_1,\ldots,p_n,0,0,\ldots)\big|^2 < (2n+2)^r\left(\|\phi\|_2^2 + \frac{1}{(2\pi)^r}\cdot\sum_{k=1}^n\|D_k^r\phi\|_2^2\right) < \infty.$$

Y, finalmente, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$\left(\sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^{(n)}}(1+|\bar{p}|)^N\big|\widehat{\phi}(p_1,\ldots,p_n,0,0,\ldots)\big|\right)^2 \le J\cdot\sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^{(n)}}(1+|\bar{p}|)^{2N-2r} < \infty,$$

ya que, por hipótesis, $2r - 2N > n$, y entonces

$$\sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^{(n)}}(1+|\bar{p}|)^{2N-2r} = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n}(1+|p|)^{-(2r-2N)} < \infty.$$

Recíprocamente, supongamos que la función ϕ depende de un número finito de variables, y que se cumple

$$\sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty}(1+|\bar{p}|)^N\big|\widehat{\phi}(\bar{p})\big| < \infty \quad \forall\, N = 0,1,\ldots. \tag{1.14}$$

En particular para $N = 0$ esta condición dice que $\widehat{\phi} \in L^1(\mathbb{Z}^\infty)$. Definamos

$$\phi_0(x) = \sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^\infty}\widehat{\phi}(\bar{p})e^{2\pi i\bar{p}\cdot x} \qquad (x \in \mathbb{T}^\omega).$$

Por ser suma de una serie uniformemente convergente de funciones continuas, esta función ϕ_0 es continua en todo punto de $\mathbb{T}^\omega$. Pero el Teorema 1.12 nos asegura que $\phi(x) = \phi_0(x)$ a.e. en $\mathbb{T}^\omega$.

Para $N = k$, la condición (1.14) implica que $\bar{p}^\alpha \widehat{\phi}(\bar{p}) \in L^1(\mathbb{Z}^\infty)$, siendo α un multiíndice finitamente no nulo tal que $|\alpha| \leq k$, ya que (recordar aquí la notación de 1.26)

$$|\bar{p}^\alpha| \leq \big(\text{máx}\,|p_j|\big)^{|\alpha|} \leq \big(\text{máx}\,|p_j|\big)^k < (1 + |\bar{p}|)^k.$$

Para cada $j = 1, 2, \ldots$, sea $e_j = (\delta_{jk})_{k=1}^\infty$ (delta de Kronecker). Si $t \neq 0$, para cada $x \in \mathbb{T}^\omega$ tenemos

$$\frac{\phi_0(x + te_j) - \phi_0(x)}{t} = \sum_{\bar{p} \in \mathbb{Z}^\infty} p_j \widehat{\phi}(\bar{p}) \frac{e^{2\pi i p_j t} - 1}{p_j t} e^{2\pi i \bar{p}\cdot x}.$$

Tomemos límites cuando $t \to 0$. Se pueden tomar límites término a término dentro de la serie en aplicación del teorema de convergencia dominada de Lebesgue (considerando la medida de contar) ya que por hipótesis $p_j \widehat{\phi}(\bar{p}) \in L^1(\mathbb{Z}^\infty)$. Así resulta

$$(D_j \phi_0)(x) = \sum_{\bar{p} \in \mathbb{Z}^\infty} 2\pi i p_j \widehat{\phi}(\bar{p}) e^{2\pi i \bar{p}\cdot x},$$

luego ϕ_0 admite derivada parcial D_j en todo punto de $\mathbb{T}^\omega$. Además esta derivada es continua porque la serie anterior, al ser absolutamente convergente, es una serie de funciones continuas uniformemente convergente. Entonces $\phi_0 \in C^{(1}(\mathbb{T}^\omega)$. Y de este modo la función $\phi(x)$ es igual a.e. a una función de clase $C^{(1}(\mathbb{T}^\omega)$.

Del mismo modo podemos proceder por inducción sobre el orden total de derivación. Supongamos que $\phi_0 \in C^{(k}(\mathbb{T}^\omega)$ $(k \geq 1)$, y que para cada multiíndice finitamente no nulo β de orden $|\beta| = k$ se cumple

$$(D^\beta \phi_0)(x) = \sum_{\bar{p} \in \mathbb{Z}^\infty} (2\pi i \bar{p})^\beta \widehat{\phi}(\bar{p}) e^{2\pi i \bar{p}\cdot x}.$$

Entonces, para cada $j = 1, 2, \ldots$, usando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue se deduce que

$$(D_j D^\beta \phi_0)(x) = \sum_{\bar{p} \in \mathbb{Z}^\infty} 2\pi i p_j (2\pi i \bar{p})^\beta \widehat{\phi}(\bar{p}) e^{2\pi i \bar{p}\cdot x}.$$

y que esta derivada, de grado $\leq k + 1$, es continua, ya que por hipótesis $\bar{p}^{\beta+1} \widehat{\phi}(\bar{p}) \in L^1(\mathbb{Z}^\infty)$. Entonces $\phi_0 \in C^{(k+1}(\mathbb{T}^\omega)$, lo que termina la demostración. □

1.33 Nota. A partir de la implicación directa del resultado anterior se sigue en particular que

$$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega) \Longrightarrow \big|\widehat{\phi}(\bar{p})\big| = \mathrm{o}\big((1 + |\bar{p}|)^{-N}\big) \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

1.2.2. Sobre divergencia absoluta de las series de Fourier en el toro infinito

En una comunicación personal a Luz Roncal en mayo de 2016, el profesor Alexander D. Bendikov conjeturó que la implicación $f \in C^{(\infty}(\mathbb{T}^\omega) \implies f \in A(\mathbb{T}^\omega)$, que se cumple, como acabamos de ver, para funciones que sólo dependen de un número finito de las infinitas variables, y por cuya validez en aquel momento todavía nos estábamos preguntando, es falsa en general. Este hecho establece una diferencia significativa con respecto a lo que ocurre en el caso finito-dimensional.

En la misma comunicación privada, el profesor Bendikov sugirió que se podría encontrar, construyendo una adecuada función Theta de Jacobi en infinitas variables, un contraejemplo, es decir, una función infinitamente derivable en $\mathbb{T}^\omega$ y dependiente de infinitas variables para la cual los módulos de los coeficientes de su serie de Fourier formasen una serie divergente. La construcción vía formas cuadráticas dependientes de las infinitas variables que presentaremos en esta subsección no sigue el camino indicado por Bendikov. En cualquier caso, y hasta donde alcanza nuestro conocimiento, no hay otros contraejemplos en la literatura[3].

La construcción de los contraejemplos nuestros que corroboran la afirmación de Bendikov está basada en resultados clásicos de Toeplitz [115][4], Littlewood [81] y Bohnenblust y Hille [16]. Nuestro resultado principal es, pues, el siguiente:

1.34 Teorema. *Hay funciones de la clase $C^{(\infty}(\mathbb{T}^\omega)$, dependientes de infinitas variables, cuya serie de Fourier diverge absolutamente.*

Aunque aquí nos restringimos al caso del toro infinito, debemos señalar que Bendikov y L. Saloff-Coste han estudiado [7] varias escalas de funciones suaves en el contexto más general de grupos compactos y conexos infinito-dimensionales.

A continuación, en un primer subepígrafe presentamos una exposición detallada de las formas bilineales y cuadráticas que hemos usado para construir nuestros contraejemplos. Los propios contraejemplos y, con ellos, la demostración del Teorema 1.34, están contenidos en un segundo subepígrafe.

Formas bilineales y cuadráticas de infinitas variables

Denotaremos ahora como $\mathcal{S} := \left\{(z_n)_{n=1}^\infty \,|\, z_n \in \mathbb{C},\ |z_n| \le 1\ \forall n \in \mathbb{N}\right\}$ el polidisco infinito-dimensional (o la bola unidad cerrada de $\ell_\infty(\mathbb{N})$). Consideraremos el espacio $\mathcal{S}$ dotado de la topología del producto cartesiano de infinitos círculos unidad del plano complejo. Muy en particular, si $x \in \mathbb{T}^\omega$, entonces

$$z = e^{2\pi i x} := \left(e^{2\pi i x_1}, \ldots, e^{2\pi i x_n}, \ldots\right) \in \mathcal{S},$$

y en este caso es $|z_n| = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Una *forma bilineal en $\mathcal{S}$*, o *forma bilineal en infinitas variables*, se define (en principio solo formalmente) por la expresión

$$Q(x,y) := \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} x_m y_n \qquad (a_{mn} \in \mathbb{C},\ x, y \in \mathcal{S}). \tag{1.15}$$

El carácter bilineal y la propia existencia de la función $Q(x,y)$ dependen de la convergencia de la serie doble que la define, de manera que antes de continuar recordaremos algunas cosas que necesitaremos sobre series dobles.

1.35 Series dobles. Definiciones y notas. [20, p. 72-76], [87] Consideremos la serie doble de números complejos

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}. \tag{1.16}$$

Las sumas parciales *rectangulares* (finitas) de (1.16) son

$$s_{MN} := \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} a_{mn}, \quad (M,N) \in \mathbb{N}^2.$$

Se dice que la serie (1.16) *converge a $s \in \mathbb{C}$ en el sentido de Pringsheim* cuando $\forall \varepsilon > 0\ \exists \mu$ tal que

$$|s_{MN} - s| < \varepsilon \quad \text{si } M, N \ge \mu.$$

[3] Ver nuestra nota al final de la subsección.

[4] Se presenta una traducción propia al castellano de esta referencia en el Anexo 3 final.

Una condición necesaria y suficiente para que la serie (1.16) converja en el sentido de Pringsheim es la siguiente:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\mu \text{ tal que } |s_{PQ} - s_{MN}| < \varepsilon \text{ si } P > M \geq \mu \text{ y } Q > N \geq \mu. \tag{1.17}$$

La necesidad es obvia. La suficiencia se prueba de la siguiente manera: dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis es $|s_{QQ} - s_{NN}| < \varepsilon$ si $Q > N \geq \mu$, de modo que la sucesión $\sigma_n := s_{nn}$ es una sucesión de Cauchy. Sea $s := \lim_{n\to\infty} \sigma_n$, se tendrá que $\exists\mu_1$ tal que $|s - s_{NN}| < \varepsilon/2$ si $N > \mu_1$. Y por otro lado, por hipótesis $\exists\mu_2$ tal que $|s_{PQ} - s_{NN}| < \varepsilon/2$ si $P, Q > N > \mu_2$. Se deduce entonces que $|s_{PQ} - s| < \varepsilon$ si $P, Q > \max\{\mu_1, \mu_2\}$ y por consiguiente la serie (1) converge a s en el sentido de Pringsheim.

Si la serie (1.16) converge en el sentido de Pringsheim, se sigue de la definición que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple

$$\left|\sum_{j=m}^{M}\sum_{k=n}^{N} a_{jk}\right| = |s_{M,N} - s_{m-1,N} - s_{M,n-1} + s_{m-1,n-1}| < 4\varepsilon$$

si $\min\{m, n\} > \mu_1(\varepsilon)$ y $M \geq m$, $N \geq n$. Pero a diferencia de lo que ocurre para series simples, esta condición no es suficiente para la convergencia de (1.16) en el sentido de Pringsheim. Un contraejemplo [87] lo muestra la serie doble en la que

$$a_{1n} = (-1)^{n+1}\ \forall n; \quad a_{m1} = (-1)^{m+1}\ \forall m; \quad a_{mn} = 0 \text{ si } m \neq 1 \text{ y } n \neq 1.$$

Si las series $\sum_{m,n} a_{mn}$ y $\sum_{m,n} a_{mn}$ son convergentes en el sentido de Pringsheim, entonces la serie $\sum_{m,n}(a_{mn} + b_{mn})$ también lo es, y

$$\sum_{m,n}(a_{mn} + b_{mn}) = \sum_{m,n} a_{mn} + \sum_{m,n} b_{mn}. \tag{1.18}$$

Godfrey H. Hardy [58, p. 88] introdujo el concepto más fuerte de *convergencia regular* de una serie doble: se dice que (1.16) *converge regularmente* a la suma $s \in \mathbb{C}$ cuando converge a s en el sentido de Pringsheim y, además, todas las series fila y columna, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ para cada $m = 1, 2, \ldots$, y $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ para cada $n = 1, 2, \ldots$, respectivamente, convergen como series simples. Una serie doble absolutamente convergente es también regularmente convergente, pero la convergencia regular es suficiente [87, Th. 1] para que las sumas iteradas sean también convergentes y se cumpla

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}.$$

1.36 Definición. La serie en (1.15) está *completamente acotada en $\mathcal{S}$* si existe una constante H tal que

$$\left|\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} a_{mn} x_m y_n\right| \leq H \quad \forall x, y \in \mathcal{S},\ \forall M, N \in \mathbb{N}. \tag{1.19}$$

El siguiente teorema se debe a John E. Littlewood. La demostración original es muy esquemática en algunos puntos. Presentamos una versión más prolija en detalles.

1.37 Teorema. [81, p. 166–168] *Si la serie en* (1.15) *está completamente acotada en $\mathcal{S}$ por una constante H, entonces converge en el sentido de Pringsheim, uniformemente en $\mathcal{S}^2$, a una forma bilineal $Q(x, y)$ que verifica $|Q(x, y)| \leq H$ $\forall x, y \in \mathcal{S}$* (se dice, entonces, que la forma bilineal $Q(x, y)$ es *completamente acotada en $\mathcal{S}$*).

Demostración. Aunque en principio solo tenga sentido formal, diremos que la forma $Q(x, y)$ está completamente acotada para abreviar el hecho de que la serie presente en (1.15) está completamente acotada en $\mathcal{S}$. Por claridad señalaremos unos pasos en la demostración del teorema.

Paso I. Veamos en primer lugar que bajo la hipótesis, las series $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ para cada $m \in \mathbb{N}$, y $\sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn}|$ para cada $n \in \mathbb{N}$, son convergentes.

Para $M, N \in \mathbb{N}$ fijos, denotaremos por $Q_{MN}(x, y)$ las sumas (o secciones) rectangulares de $Q(x, y)$, es decir,

$$Q_{MN}(x, y) := \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} a_{mn} x_m y_n, \quad (x, y \in \mathcal{S}). \tag{1.20}$$

En realidad, $Q_{MN}(x, y)$ es función solamente de las M primeras coordenadas de x y de las N primeras coordenadas de y, con lo cual se puede considerar que es una forma bilineal definida en $D^M \times D^N$, denotando por D el disco unidad cerrado del plano complejo. Si ponemos

$$x^{(M)} := \pi_M(x) = (x_1, \ldots, x_M), \quad y^{(N)} := \pi_N(y) = (y_1, \ldots, y_N), \tag{1.21}$$

tenemos por hipótesis que

$$\left|Q_{MN}\big(x^{(M)}, y^{(N)}\big)\right| \leq H \quad \text{si} \quad \big\|x^{(M)}\big\|_\infty, \big\|y^{(N)}\big\|_\infty \leq 1.$$

Sea entonces ahora, por ejemplo, $n_0 \in \mathbb{N}$ fijo (procederíamos de manera análoga en un caso de $m_0 \in \mathbb{N}$ fijo), y consideremos

$$\xi_{n_0} := \Big(\frac{\overline{a_{1n_0}}}{|a_{1n_0}|}, \ldots, \frac{\overline{a_{mn_0}}}{|a_{mn_0}|}, \ldots\Big) \quad \text{y} \quad \eta_{n_0} := (\delta_{1n_0}, \ldots, \delta_{mn_0}, \ldots) \quad \text{con } \delta_{ij} \text{ de Kronecker.}$$

Evidentemente ξ_{n_0} y η_{n_0} pertenecen a $\mathcal{S}$, y para cada $M \in \mathbb{N}$ tal que $M > n_0$ se verifica

$$\sum_{m=1}^{M} |a_{mn_0}| = Q_{MM}\big(\xi_{n_0}^{(M)}, \eta_{n_0}^{(M)}\big) = Q_{MM}(\xi_{n_0}, \eta_{n_0}) = |Q_{MM}(\xi_{n_0}, \eta_{n_0})| \leq H$$

con H independiente de M. Por consiguiente la serie de términos positivos $\sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn_0}|$ converge.

Paso II. De lo probado en el paso I se deduce que, dados $\varepsilon > 0$ y $\nu \in \mathbb{N}$, $\exists \lambda = \lambda(\nu) \in \mathbb{N}$ tal que se verifican a la vez

$$\sum_{n \leq \nu} \sum_{m \geq \lambda} |a_{mn}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{m \leq \nu} \sum_{n \geq \lambda} |a_{mn}| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.22}$$

En efecto, para cada $n = 1, \ldots, \nu$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn}| < \infty \Longrightarrow \exists \lambda_{(n)} \text{ tal que } \sum_{m \geq \lambda_{(n)}} |a_{mn}| < \frac{\varepsilon}{2\nu}$$

y análogamente, para cada $m = 1, \ldots, \nu$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| < \infty \Longrightarrow \exists \lambda^{(m)} \text{ tal que } \sum_{n \geq \lambda^{(m)}} |a_{mn}| < \frac{\varepsilon}{2\nu}.$$

Tomando entonces $\lambda = \text{máx}\{\nu + 1, \lambda_{(1)}, \ldots, \lambda_{(\nu)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(\nu)}\}$, se tiene

$$\sum_{m \geq \lambda} |a_{mn}| < \frac{\varepsilon}{2\nu} \quad \forall n = 1, \ldots, \nu, \quad \text{luego} \quad \sum_{n \leq \nu} \sum_{m \geq \lambda} |a_{mn}| < \sum_{n \leq \nu} \frac{\varepsilon}{2\nu} = \frac{\varepsilon}{2},$$

y

$$\sum_{n\geq\lambda} |a_{mn}| < \frac{\varepsilon}{2\nu} \quad \forall m = 1, \ldots, \nu, \quad \text{luego} \quad \sum_{m\leq\nu}\sum_{n\geq\lambda} |a_{mn}| < \sum_{m\leq\nu} \frac{\varepsilon}{2\nu} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Paso III. Sea H el supremo del conjunto de números reales, acotado superiormente por hipótesis,

$$\{|Q_{MN}(x,y)|\colon M, N \in \mathbb{N},\ x, y \in \mathcal{S}\},$$

y sea $\varepsilon > 0$. Existen entonces $L \in \mathbb{N}$ y $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots), y_0 = (y_{01}, y_{02}, \ldots) \in \mathcal{S}$ (basta considerarlos si queremos en D^L) de modo que $|Q_{LL}(x_0, y_0)| > H - \varepsilon$. De hecho se puede suponer que $Q_{LL}(x_0, y_0)$ es un número real y que se cumple $Q_{LL}(x_0, y_0) > H - \varepsilon$. Porque, si fuera

$$Q_{LL}(x_0, y_0) = \sum_{m=1}^{L}\sum_{n=1}^{L} a_{mn}x_{0m}y_{0n} = Q_{LL}\big(x_0^{(L)}, y_0^{(L)}\big) = \rho e^{2\pi i\theta}$$

con $\theta \in [0, 1)$ y $\rho > H - \varepsilon$ como se está suponiendo, tomaríamos, en lugar de y_0, el punto $y_1 = y_0e^{-2\pi i\theta} \in \mathcal{S}$, y entonces ya tendríamos

$$Q_{LL}(x_0, y_1) = Q_{LL}\big(x_0^{(L)}, y_0^{(L)}e^{-2\pi i\theta}\big) = e^{-2\pi i\theta}Q_{LL}(x_0, y_0) = \rho > H - \varepsilon,$$

como queremos.

Por otra parte sea ahora $\Lambda = \lambda(L)$ (tener en cuenta que es $\lambda(L) > L$). Para $M > \Lambda$ y $N > \Lambda$ se tiene (Figura 1.2):

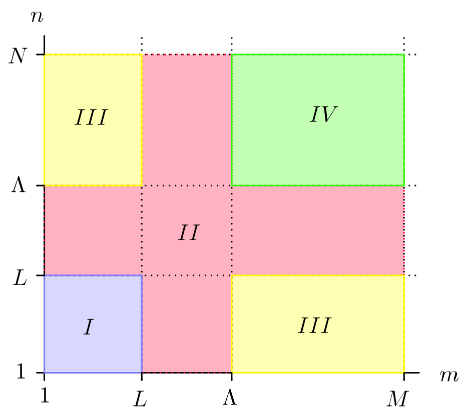


Figura 1.2: Zonas de sumación para $Q_{MN}(x,y)$.

$$\begin{aligned} Q_{MN}(x,y) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} a_{mn}x_my_n &= \sum_{(m,n)\in I} + \sum_{(m,n)\in II} + \sum_{(m,n)\in III} + \sum_{(m,n)\in IV} \\ &= T_I(x,y) + T_{II}(x,y) + T_{III}(x,y) + T_{IV}(x,y), \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} I &= \{1, \ldots, L\} \times \{1, \ldots, L\}, \\ II &= \{L+1, \ldots, \Lambda - 1\} \times \{1, \ldots, N\} \cup \{1, \ldots, M\} \times \{L+1, \ldots, \Lambda - 1\}, \\ III &= \{\Lambda, \ldots, M\} \times \{1, \ldots, L\} \cup \{1, \ldots, L\} \times \{\Lambda, \ldots, N\}, \\ IV &= \{\Lambda, \ldots, M\} \times \{\Lambda, \ldots, N\}. \end{aligned}$$

De acuerdo con (1.22), $\forall x, y \in \mathcal{S}$ se tiene

$$\left|T_{III}(x,y)\right| \le \sum_{n\le L}\sum_{m=\Lambda}^{M}|a_{mn}| + \sum_{m\le L}\sum_{n=\Lambda}^{N}|a_{mn}| \le \sum_{n\le L}\sum_{m\ge\Lambda}|a_{mn}| + \sum_{m\le L}\sum_{n\ge\Lambda}|a_{mn}| < \varepsilon.$$

Si tomamos x e y de modo que

$$x_j = \begin{cases} x_{0j} & \text{si } 1\le j\le L,\\ 0 & \text{si } L+1\le j\le \Lambda-1,\end{cases} \qquad y_j = \begin{cases} y_{0j} & \text{si } 1\le j\le L,\\ 0 & \text{si } L+1\le j\le \Lambda-1,\end{cases}$$

siendo arbitrarios los valores del resto de las variables x_j, y_j para $j \ge \Lambda$, se tiene entonces que

$$T_I(x,y) = Q_{LL}(x_0,y_0) > H-\varepsilon \qquad \text{y} \qquad T_{II}(x,y)=0.$$

Y esto implica que

$$\left|T_{IV}(x,y)\right| = \left|\sum_{m=\Lambda}^{M}\sum_{n=\Lambda}^{N} a_{mn}x_my_n\right| < 2\varepsilon, \tag{1.23}$$

pues de lo contrario, si es $T_{IV}(x,y) = \rho e^{2\pi i\theta}$ con $\theta \in [0,1)$ y $\rho \ge 2\varepsilon$, podemos considerar el punto $y' = (y'_j) \in \mathcal{S}$ definido así:

$$y'_j = \begin{cases} y_j & \text{si } 1\le j\le \Lambda-1,\\ y_je^{-2\pi i\theta} & \text{si } j\ge\Lambda,\end{cases}$$

cumpliéndose que $T_{IV}(x,y') = \rho \ge 2\varepsilon$, con lo cual

$$\Re\big(Q_{MN}(x,y')\big) > H-\varepsilon+\Re\big(T_{III}(x,y')\big)+2\varepsilon > H-\varepsilon-\varepsilon+2\varepsilon = H,$$

lo que implicaría $\left|Q_{MN}(x,y')\right| > H$, absurdo.

La condición (1.23) se cumple, de hecho, $\forall (x,y) \in \mathcal{S}^2$, ya que las variables involucradas en esa sumación, extendida a la zona de índices IV (Figura 1.2), se tomaban arbitrariamente en la consideración anterior. De modo que se tiene

$$\left|\sum_{m=\Lambda}^{M}\sum_{n=\Lambda}^{N} a_{mn}x_my_n\right| < 2\varepsilon \qquad \text{si } \min\{M,N\} > \Lambda. \tag{1.24}$$

Como hemos señalado anteriormente, esta condición (1.24) no implica todavía la convergencia de la serie (1.15) en el sentido de Pringsheim.

Paso IV. Pero sea ahora $\Lambda_1 = \lambda(\Lambda)$. Supongamos $\min\{M_1,N_1\} > \Lambda_1$. Se tiene

$$\begin{aligned} Q_{M_1N_1}(x,y) - Q_{\Lambda_1\Lambda_1}(x,y) &= \sum_{(m,n)\in I'} a_{mn}x_my_n + \sum_{(m,n)\in II'} a_{mn}x_my_n \\ &= T_{I'}(x,y) + T_{II'}(x,y), \end{aligned}$$

donde (ver Figura 1.3)

$$\begin{aligned} I' &= \{\Lambda_1,\dots,M_1\}\times\{\Lambda_1,\dots,N_1\} \cup \{\Lambda,\dots,\Lambda_1\}\times\{\Lambda_1,\dots,N_1\} \cup \{\Lambda_1,\dots,M_1\}\times\{\Lambda,\dots,\Lambda_1\},\\ II' &= \{1,\dots,\Lambda\}\times\{\Lambda_1,\dots,\dots,N_1\} \cup \{\Lambda_1,\dots,\dots,N_1\}\times\{1,\dots,\Lambda\}. \end{aligned}$$

Aplicando (1.22) se tiene, $\forall (x,y) \in \mathcal{S}^2$,

$$\left|T_{II'}(x,y)\right| \le \sum_{n\le\Lambda}\sum_{m=\Lambda_1}^{M_1}|a_{mn}| + \sum_{m\le\Lambda}\sum_{n=\Lambda_1}^{N_1}|a_{mn}| \le \sum_{n\le\Lambda}\sum_{m\ge\Lambda_1}|a_{mn}| + \sum_{m\le\Lambda}\sum_{n\ge\Lambda_1}|a_{mn}| < \varepsilon.$$

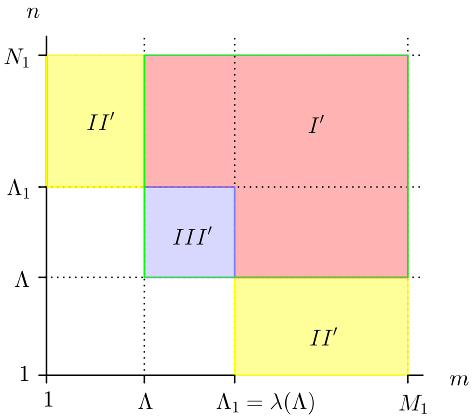


Figura 1.3: Zonas de sumación para estimar $Q_{M_1N_1}(x,y) - Q_{\Lambda_1\Lambda_1}(x,y)$.

Y, por otro lado, aplicando (1.24) obtenemos

$$\begin{aligned}\big|T_{I'}(x,y)\big| &= \Bigg|\sum_{m=\Lambda}^{M_1}\sum_{n=\Lambda}^{N_1} a_{mn}x_my_n - \sum_{m=\Lambda}^{\Lambda_1}\sum_{n=\Lambda}^{\Lambda_1} a_{mn}x_my_n\Bigg| \\ &\leq \Bigg|\sum_{m=\Lambda}^{M_1}\sum_{n=\Lambda}^{N_1} a_{mn}x_my_n\Bigg| + \Bigg|\sum_{m=\Lambda}^{\Lambda_1}\sum_{n=\Lambda}^{\Lambda_1} a_{mn}x_my_n\Bigg| < 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon,\end{aligned}$$

ya que $\min\{M_1, N_1\} > \Lambda_1 > \Lambda$.

De este modo resulta que

$$\big|Q_{M_1N_1}(x,y) - Q_{\Lambda_1\Lambda_1}(x,y)\big| < 5\varepsilon \qquad \forall (x,y) \in \mathcal{S}^2, \tag{1.25}$$

y esta condición es suficiente para la convergencia en el sentido de Pringsheim de la serie de (1.15). Pues sean $M_1 > P_1 > \Lambda_1$ y $N_1 > Q_1 > \Lambda_1$: basta considerar (ver la Figura 1.4) que

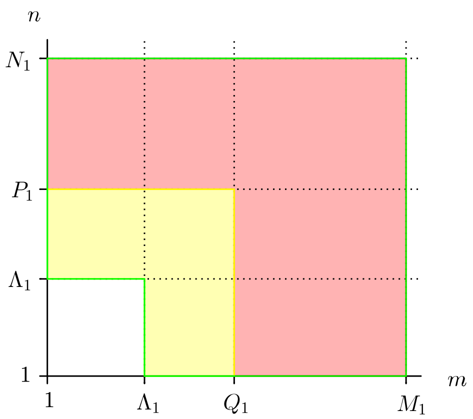


Figura 1.4: Argumentación final del teorema 1.37.

$$Q_{M_1N_1}(x,y) - Q_{Q_1P_1}(x,y) = \big(Q_{M_1N_1}(x,y) - Q_{\Lambda_1\Lambda_1}(x,y)\big) - \big(Q_{Q_1P_1}(x,y) - Q_{\Lambda_1\Lambda_1}(x,y)\big)$$

y así

$$\big|Q_{M_1N_1}(x,y) - Q_{Q_1P_1}(x,y)\big| \leq \big|Q_{M_1N_1}(x,y) - Q_{\Lambda_1\Lambda_1}(x,y)\big| + \big|Q_{Q_1P_1}(x,y) - Q_{\Lambda_1\Lambda_1}(x,y)\big| < 10\varepsilon,$$

que es la condición suficiente de tipo (1.17) para la convergencia en el sentido de Pringsheim de la serie $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}x_m y_n$ para todo $(x,y) \in \mathcal{S}^2$. Como $\Lambda_1 = \Lambda_1(\varepsilon)$ pero no depende de (x,y), la convergencia es uniforme en $\mathcal{S}^2$. Y de hecho, como las series fila y columna son todas absolutamente convergentes, la convergencia es regular. Se sigue denotando por $Q(x,y)$ a la suma de la serie en cada $(x,y) \in \mathcal{S}^2$.

Es obvio que entonces $|Q(x,y)| \leq H \ \forall x, y \in \mathcal{S}$ y, aplicando (1.18), que $Q(x,y)$ es *bilineal*, es decir, que se cumple particularmente

$$Q(x,y{+}y') = Q(x,y){+}Q(x,y') \quad \text{y} \quad Q(x{+}x',y) = Q(x,y){+}Q(x',y) \ \forall x,x',y,y' \in \mathcal{S}. \quad \square \tag{1.26}$$

Cuando la forma bilineal $Q(x,y)$ es completamente acotada en $\mathcal{S}$, en particular se verifica que dado $\varepsilon > 0$, existe $\nu_1 = \nu_1(\varepsilon)$ tal que $\big|Q(x,y) - Q_{\nu\nu}(x,y)\big| < \varepsilon \ \forall (x,y) \in \mathcal{S}^2$ si $\nu \geq \nu_1$. Y de aquí se sigue fácilmente la siguiente consecuencia:

1.38 Corolario. *Una forma bilineal $Q(x,y)$ completamente acotada en $\mathcal{S}$ define una función continua en $\mathcal{S}^2$.*

Demostración. Ya hemos indicado antes que consideramos en $\mathcal{S}$ la topología del producto cartesiano de infinitos discos. La definición de continuidad para una función en $\mathcal{S}^2$ es entonces análoga a la que se ha dado en la Definición 1.21.

Sea $(x_0, y_0) \in \mathcal{S}^2$ fijo y sea $\varepsilon > 0$. En primer lugar, según acabamos de decir, $\exists \nu_1(\varepsilon)$ tal que si $\nu \geq \nu_1$ se verifica

$$\big|Q(x,y) - Q_{\nu\nu}(x,y)\big| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall (x,y) \in \mathcal{S}^2.$$

Consideremos la forma bilineal $Q_{\nu_1\nu_1}\big(x^{(\nu_1)}, y^{(\nu_1)}\big)$ definida en $D^{\nu_1} \times D^{\nu_1}$ por

$$\sum_{m=1}^{\nu_1}\sum_{n=1}^{\nu_1} a_{mn}x_m y_n.$$

Esta es una función (polinómica) continua en cada punto, en particular lo es en $\big(x_0^{(\nu_1)}, y_0^{(\nu_1)}\big)$: luego existe un número $\delta > 0$ (que depende del punto (x_0, y_0), y también de ε a través de ν_1) tal que

$$\big|Q_{\nu_1\nu_1}\big(x^{(\nu_1)}, y^{(\nu_1)}\big) - Q_{\nu_1\nu_1}\big(x_0^{(\nu_1)}, y_0^{(\nu_1)}\big)\big| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si} \quad \max_{1\leq j\leq \nu_1}\big\{|x_j - x_{0j}|, |y_j - y_{0j}|\big\} < \delta.$$

Entonces, para todo $(x,y) \in \mathcal{S}^2$ que cumpla las condiciones $\max\big\{|x_j - x_{0j}|, |y_j - y_{0j}|\big\} < \delta$ para $j = 1, \ldots, \nu_1$, se tiene

$$\begin{aligned}\big|Q(x,y) - Q(x_0,y_0)\big| &\leq \big|Q(x,y) - Q_{\nu_1\nu_1}(x,y)\big| \\ &\qquad + \big|Q_{\nu_1\nu_1}(x,y) - Q_{\nu_1\nu_1}(x_0,y_0)\big| + \big|Q_{\nu_1\nu_1}(x_0,y_0) - Q(x_0,y_0)\big| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

(ya que $Q_{\nu_1\nu_1}(x,y) = Q_{\nu_1\nu_1}\big(x^{(\nu_1)}, y^{(\nu_1)}\big)$ para todo $(x,y) \in \mathcal{S}^2$), y la continuidad de $Q(x,y)$ en (x_0,y_0) queda probada. $\square$

1.39 Definiciones y comentarios. Sea entonces $Q(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}x_m y_n$ una forma bilineal completamente acotada por una constante H en $\mathcal{S}$ y que define, de acuerdo con el Corolario 1.38, una función continua en $\mathcal{S}^2$. En particular sea

$$C(x) = Q(x,x) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}x_m x_n \quad (x \in \mathcal{S}).$$

La forma cuadrática $C(x)$ se dice también *completamente acotada en $\mathcal{S}$*, ya que se verifica

$$|C_M(x)| = \left| \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{M} a_{mn} x_m x_n \right| \le H \quad \forall x \in \mathcal{S},\ \forall M \in \mathbb{N}.$$

Cuando una forma bilineal $Q(x,y)$ es completamente acotada en $\mathcal{S}$ quedan bien definidas sus *derivadas parciales* [66, p. 128]. Poniendo, para cada $p \in \mathbb{N}$, $e_p = (\delta_{pn})_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}$ (deltas de Kronecker), se tiene, aplicando (1.26),

$$\frac{\partial Q}{\partial y_p}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{Q(x, y+te_p) - Q(x,y)}{t} = Q(x, e_p) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mp} x_m,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x_p}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{Q(x+te_p, y) - Q(x,y)}{t} = Q(e_p, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{pn} x_n,$$

y por consiguiente estas derivadas parciales son formas lineales acotadas. Como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{pn}|$ y $\sum_{m=1}^{\infty} |a_{mp}|$ son series convergentes para todo p, las funciones $\frac{\partial Q}{\partial x_p}(x,y)$ y $\frac{\partial Q}{\partial y_p}(x,y)$ son continuas en $\mathcal{S}^2$ en aplicación de un resultado (en $\mathcal{S}^2$) análogo a nuestro anterior Lema 1.22 (en $\mathbb{T}^\omega$).

1.40 Corolario. (a) *Si la forma bilineal $Q(x,y)$ es completamente acotada en $\mathcal{S}$, entonces la forma cuadrática $C(x) = Q(x,x)$ es de clase $C^{(\infty}(\mathcal{S})$.*

(b) *Si la forma cuadrática $C(x) = Q(x,x)$ es completamente acotada en $\mathcal{S}$, entonces es de clase $C^{(\infty}(\mathcal{S})$.*

Demostración. (a) La forma cuadrática $C(x) = Q(x,x)$ es continua en $\mathcal{S}$ según el Corolario 1.38. Para cada $p \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\frac{\partial C}{\partial x_p}(x) = \frac{\partial Q}{\partial x_p}(x,x) + \frac{\partial Q}{\partial y_p}(x,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{pn} x_n + \sum_{m=1}^{\infty} a_{mp} x_m = \sum_{j=1}^{\infty} (a_{pj} + a_{jp}) x_j$$

por la convergencia absoluta de cada serie. Entonces la forma lineal $\frac{\partial C}{\partial x_p}(x)$ es continua en aplicación del Lema 1.22. Y sus derivadas parciales son ya funciones constantes.

(b) De la identidad

$$Q(x,y) = Q\big(\tfrac{1}{2}(x+y), \tfrac{1}{2}(x+y)\big) - Q\big(\tfrac{1}{2}(x-y), \tfrac{1}{2}(x-y)\big)$$

se deduce que la forma bilineal $Q(x,y)$ es también completamente acotada en $\mathcal{S}$. Y entonces se aplica el apartado (a). □

Funciones en $C^{(\infty}(\mathbb{T}^\omega)$ cuya serie de Fourier diverge absolutamente

En este subepígrafe demostramos el Teorema 1.34. En 1913 Otto Toeplitz [115, p. 427] presentó una forma cuadrática en infinitas variables

$$C(z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} z_m z_n \quad (z \in \mathcal{S}), \tag{1.27}$$

simétrica (es decir, tal que $a_{mn} = a_{nm}$), completamente acotada en $\mathcal{S}$ en el sentido antes definido, y tal que la serie $\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ es divergente. Esta forma cuadrática se describirá después. Nosotros simplemente sustituiremos en la forma de Toeplitz $z = e^{2\pi i x}$ (es decir, $z_j = e^{2\pi i x_j}$ para todo j) con $x \in \mathbb{T}^\omega$, y consideraremos entonces la función

$$F(x) = C(e^{2\pi i x}) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} e^{2\pi i (x_m + x_n)}, \quad x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{T}^\omega. \tag{1.28}$$

Del Corolario 1.40 (b) se sigue que $F \in C^{(\infty}(\mathbb{T}^\omega)$. En particular, la función F es integrable.

Calculemos ahora los coeficientes de Fourier de la función F. Vamos a usar para ello que $F(x) = \lim_{M\to\infty} F_M(x)$, donde

$$F_M(x) = \sum_{m,n=1,\dots,M} a_{mn} e^{2\pi i(x_m+x_n)}.$$

Debido a que la forma cuadrática (1.27) es completamente acotada en $\mathcal{S}$, es decir, que se tiene $|C(z)| \le H$ para todo $z \in \mathcal{S}$, se verifica entonces que $|F_M(x)| < H$ para todo $M \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{T}^\omega$. Esto permite aplicar el teorema de convergencia de Vitali para escribir, para cada $\bar p \in \mathbb{Z}^\infty$ fijo:

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(\bar p) &= \int_{\mathbb{T}^\omega} \Big(\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} e^{2\pi i(x_m+x_n)}\Big) e^{-2\pi i \bar p\cdot x}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{T}^\omega} \Big(\lim_{M\to\infty} \sum_{m,n=1,\dots,M} a_{mn} e^{2\pi i(x_m+x_n)}\Big) e^{-2\pi i \bar p\cdot x}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{T}^\omega} \lim_{M\to\infty} \Big(\sum_{m,n=1,\dots,M} a_{mn} e^{2\pi i(x_m+x_n)} e^{-2\pi i \bar p\cdot x}\Big)\, dx \\
&= \lim_{M\to\infty} \sum_{m,n=1,\dots,M} a_{mn} \int_{\mathbb{T}^\omega} e^{2\pi i((x_m+x_n)-\bar p\cdot x)}\, dx \\
&\overset{5}{=} \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \int_{\mathbb{T}^\omega} e^{2\pi i((x_m+x_n)-\bar p\cdot x)}\, dx \\
&= \begin{cases} a_{mn} + a_{nm} = 2a_{mn} & \text{si } \bar p = \bar e_m + \bar e_n,\ m \neq n \\ a_{mm} & \text{si } \bar p = 2\bar e_m, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}
\end{aligned}$$

donde denotamos por $\bar e_q$ el elemento $(\delta_{qj})_{j=1}^{\infty}$ de $\mathbb{Z}^\infty$ (delta de Kronecker).

De esta manera hemos probado que la expresión (1.28) que define $F(x)$ es su propia serie de Fourier, $\sum_{\bar p\in\mathbb{Z}^\infty} \widehat{F}(\bar p) e^{2\pi i \bar p\cdot x}$. Entonces tendremos

$$\sum_{\bar p\in\mathbb{Z}^\infty} \big|\widehat{F}(\bar p)\big| = \sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|$$

y, como va a a ser $\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}| = \infty$, nuestra función F es un contraejemplo que demuestra que la implicación $f \in C^{(\infty}(\mathbb{T}^\omega) \Longrightarrow \sum_{\bar p\in\mathbb{Z}^\infty} |\widehat{f}(\bar p)| < \infty$ es falsa.

Ahora pasamos a describir la forma cuadrática $C(z)$. Primero demostramos un lema auxiliar. Toeplitz lo dio para matrices ortogonales reales [115, p. 423-426]. En lo que sigue, D denota el disco unidad cerrado del plano complejo.

1.41 Lema. (Littlewood, [81, p. 171]. Ver también [16, pág. 609]). Sea $A = (a_{mn})_{N\times N}$ es una matriz unitaria, es decir, una matriz para la que se cumple

$$\sum_{n=1}^{N} a_{rn}\overline{a_{sn}} = \delta_{rs} \quad \forall r, s = 1, \dots, N$$

[5] De hecho, denotando por M_0 el *mayor índice no nulo* de $\bar p$, es decir, el índice tal que $p_j = 0$ para todo $j > M_0$, se tiene

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \int_{\mathbb{T}^\omega} e^{2\pi i((x_m+x_n)-\bar p\cdot x)}\, dx = \sum_{m,n=1,\dots,M_0} a_{mn} \int_{\mathbb{T}^\omega} e^{2\pi i((x_m+x_n)-\bar p\cdot x)}\, dx.$$

(deltas de Kronecker). Se define $Q_{NN}(x) := N^{-1} \sum_{m,n=1}^{N} a_{mn} x_m x_n$ para $x \in D^N$. Entonces, se verifica

$$|Q_{NN}(x)| \leq 1 \quad \forall x \in D^N.$$

Demostración. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\begin{aligned}
|Q_{NN}(x)| &\leq N^{-1} \sum_{n=1}^{N} |x_n| \cdot \left| \sum_{m=1}^{N} a_{mn} x_m \right| \leq N^{-1} \sum_{n=1}^{N} 1 \cdot \left| \sum_{m=1}^{N} a_{mn} x_m \right| \\
&\leq N^{-1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} \left| \sum_{m=1}^{N} a_{mn} x_m \right|^2 \right)^{1/2} \\
&= N^{-1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{r=1}^{N} a_{rn} x_r \right) \left(\sum_{s=1}^{N} \overline{a_{sn}}\, \overline{x_s} \right) \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

de donde, por la hipótesis,

$$\begin{aligned}
N \cdot |Q_{NN}(x)|^2 &\leq \sum_{n=1}^{N} \sum_{r,s=1}^{N} a_{rn} \overline{a_{sn}} x_r \overline{x_s} = \sum_{r,s=1}^{N} x_r \overline{x_s} \sum_{n=1}^{N} a_{rn} \overline{a_{sn}} \\
&= \sum_{r=1}^{N} x_r \overline{x_r} = \sum_{r=1}^{N} |x_r|^2 \leq N,
\end{aligned}$$

y en efecto es $|Q_{NN}(x)| \leq 1 \ \forall x \in D^N$. $\square$

1.42 La forma cuadrática de Toeplitz. Toeplitz define en primer lugar $C_1(z_1, \ldots, z_4)$ como la forma cuadrática en D^4 cuya matriz de coeficientes es

$$C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz real C_1 es simétrica y cumple $C_1^2 = 4I$, luego aplicando el Lema 1.41 resulta

$$\left| C_1(z_1, \ldots, z_4) \right| \leq 4^{3/2} = 8$$

en D^4 (este valor máximo del módulo se alcanza para $z_1 = \ldots = z_4 = 1$).

A continuación define $C_2(z_1, \ldots, z_{4^2})$ como la forma cuadrática en D^{4^2} cuya matriz de coeficientes es

$$C_2 = \begin{pmatrix} -C_1 & C_1 & C_1 & C_1 \\ C_1 & -C_1 & C_1 & C_1 \\ C_1 & C_1 & -C_1 & C_1 \\ C_1 & C_1 & C_1 & -C_1 \end{pmatrix}.$$

Del Lema 1.41 resulta

$$\left| C_2(z_1, \ldots, z_{4^2}) \right| \leq (4^2)^{3/2} = 8^2$$

en D^{4^2} (alcanzándose el módulo máximo para $z_1 = \ldots = z_{4^2} = 1$).

De manera inductiva, a partir de la forma cuadrática de 4^α variables ($\alpha \geq 1$) de matriz C_α, se construye la forma cuadrática de $4^{\alpha+1}$ variables y matriz

$$C_{\alpha+1} = \begin{pmatrix} -C_\alpha & C_\alpha & C_\alpha & C_\alpha \\ C_\alpha & -C_\alpha & C_\alpha & C_\alpha \\ C_\alpha & C_\alpha & -C_\alpha & C_\alpha \\ C_\alpha & C_\alpha & C_\alpha & -C_\alpha \end{pmatrix}.$$

De acuerdo con el Lema 1.41 tenemos que para todo α se cumple

$$\left|C_\alpha(z_1,\dots,z_{4^\alpha})\right| \le (4^\alpha)^{3/2} = 8^\alpha$$

en D^{4^α}. Finalmente, para $x\in\mathcal{S}$ Toeplitz define

$$C(x)=\frac{\mu_1}{8}C_1(x_1,\dots,x_4)+\frac{\mu_2}{8^2}C_2(x_{4+1},\dots,x_{4+4^2})+\frac{\mu_3}{8^3}C_3(x_{4^2+4+1},\dots,x_{4^2+4+4^3})+\cdots \quad (1.29)$$

donde $(\mu_\alpha)_{\alpha=1}^\infty$ es una sucesión de números positivos que se puede determinar después, y demuestra el siguiente lema:

1.43 Lema. [115, p. 426-427] Si se eligen los $\mu_\alpha>0$ de modo que la serie $\sum\mu_\alpha$ sea convergente, entonces la forma cuadrática (1.29) es completamente acotada.

Demostración. El módulo del α-ésimo término de (1.29) es menor o igual que μ_α. La sección parcial $C_M(x)$ de $C(x)$ que trunca esta forma cuadrática de infinitas variables justo al final del α-ésimo término (cuando $M=\frac{4}{3}(4^\alpha-1)$), alcanza el valor máximo de su módulo, $\mu_1+\dots\mu_\alpha$, cuando todas las coordenadas de $x^{(M)}$ valen 1, y por consiguiente está uniformemente acotada en módulo por el número $H=\sum_{j=1}^\infty\mu_j$ independiente de α. Y todas las demás secciones también quedan en módulo uniformemente por debajo de esa cota, ya que para todo $n\in\mathbb{N}$ y todo $x\in\mathcal{S}$ se cumple

$$\text{máx}\,|C(x_1,\dots,x_n,0,0,\dots)|\le\text{máx}\,|C(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},0,\dots)|$$

puesto que el máximo del módulo de la sección parcial $C_{n+1}(x)$ en D^{n+1} se alcanza en la frontera $|x_1|=1,\ \dots,\ |x_{n+1}|=1$ de este dominio. □

Además, la suma de los módulos de todos los coeficientes de la forma cuadrática $C(x)$ de (1.29) es $\sum 2^\alpha\mu_\alpha$. Es fácil elegir los μ_α de modo que $\sum\mu_\alpha<\infty$ y $\sum 2^\alpha\mu_\alpha=\infty$ (v.g., $\mu_\alpha=\frac{1}{\alpha^2}$, $\mu_\alpha=2^{-\alpha}$). Entonces, la función

$$F(x)=C(e^{2\pi ix})\quad (x\in\mathbb{T}^\omega)$$

construida con estos μ_α es nuestro primer contraejemplo. Su serie de Fourier diverge absolutamente.

1.44 Las formas cuadráticas de Littlewood. A partir de [81, p. 171-173] y [16, p. 609-612] se puede conseguir una variedad de contraejemplos que generalizan el precedente, basados en formas cuadráticas en $\mathcal{S}$ en las que no todos los coeficientes son reales.

Por ejemplo, sea $N>2$ un entero fijo y consideremos la colección infinita de matrices

$$M_1=\left(e^{2\pi i\frac{rs}{N}}\right)_{N\times N},\quad r,s=1,\dots,N,$$
$$M_\mu=\left(e^{2\pi i\frac{rs}{N}}\cdot M_{\mu-1}\right)_{N^\mu\times N^\mu},\quad r,s=1,\dots,N,\quad \text{si } \mu>1.$$

Los elementos de la matriz M_μ son raíces N-ésimas de la unidad, y M_μ es unitaria para todo $\mu\in\mathbb{N}$. Denotemos por $M_\mu\big(x_1^{(\mu)},\dots x_{N^\mu}^{(\mu)}\big)$ la forma cuadrática de matriz M_μ y las variables de un elemento genérico $x\in\mathcal{S}$ sobre las que actúa (advirtamos que esta notación no tiene nada que ver con la análoga que hemos usado antes en (1.21), por ejemplo), y entonces definamos la forma cuadrática de infinitas variables

$$\begin{aligned}M(x)&=N^{-3/2}M_1(x_1,\dots,x_N)+\frac{1}{4}N^{-3}M_2(x_{N+1},\dots,x_{N+N^2})\\&\qquad+\frac{1}{9}N^{-9/2}M_3(x_{N+N^2+1},\dots,x_{N+N^2+N^3})+\cdots\\&=\sum_{\mu=1}^\infty\frac{N^{-3\mu/2}}{\mu^2}M_\mu\big(x_1^{(\mu)},\dots x_{N^\mu}^{(\mu)}\big).\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 1.41 se tiene que

$$\left| M_\mu\big(x_1^{(\mu)}, \dots x_{N^\mu}^{(\mu)}\big) \right| \leq N^{3\mu/2},$$

con lo cual ahora se llega a que

$$|M(x)| \leq \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} < \infty.$$

Por consiguiente, $M(x)$ es completamente acotada y, aplicando el Corolario 1.40 (b), pertenece a la clase $C^{(\infty}(\mathcal{S})$. Pero, si se denota $M(x) := \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}x_m x_n$, como los coeficientes a_{mn} no nulos tienen todos módulo 1, se tiene

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}| = N^{-3/2} \cdot N^2 + \frac{1}{4}N^{-3} \cdot N^4 + \frac{1}{9}N^{-9/2} \cdot N^6 + \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{N^{j/2}}{j^2} = \infty,$$

de manera que la serie de Fourier de la función $G(x) = M(e^{2\pi i x})$, $x \in \mathbb{T}^\omega$, diverge absolutamente.

Bohnenblust y Hille [16, p. 608-614] generalizaron a su vez para formas m-icas ($m > 2$) los resultados de Littlewood. Esto permitiría dar nuevos contraejemplos a favor del Teorema 1.34, esta vez basados en formas m-icas ($m > 2$) de infinitas variables.

2

Propiedades básicas del análisis armónico en $\mathbb{T}^\omega$. Segunda parte

2.1. Resultados inmediatos de convergencia y sumabilidad de las series de Fourier en $\mathbb{T}^\omega$

JLR dejó probado en su tesis doctoral [98, III, Corol. 6.2] (v. también [99, Thm. 6, Remarks, ex. (i)]) el teorema con el que vamos a comenzar esta sección. En aquel contexto aparecía como un caso particular de cierto resultado de convergencia relativo a redes monótonas de subgrupos en un grupo localmente compacto, y en su demostración jugaban un papel fundamental los teoremas de convergencia a.e. y en norma de martingalas (v. Teorema 2.9). De una manera alternativa y equivalente, se puede probar usando los teoremas de Jessen, como hacemos a continuación. Hay que recordar la Definición 1.9.

2.1.1. Convergencia de límite doble iterado

2.1 Teorema. [98, Corol. 6.2, p. 80] *Sea $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$, $1 \leq p < \infty$, tal que $\sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^{(\ell)}} \left|\widehat{f}(\bar{p})\right| < \infty$ para cada $\ell \in \mathbb{N}$. Denotemos*

$$f_{(\ell)}(x) := \sum_{\bar{p}\in\mathbb{Z}^{(\ell)}} \widehat{f}(\bar{p}) e^{2\pi i \bar{p}\cdot x}.$$

Entonces se verifica

(1) $\lim\limits_{\ell\to\infty} \left\| f_{(\ell)} - f \right\|_p = 0$,

(2) $\lim\limits_{\ell\to\infty} f_{(\ell)}(x) = f(x)$ *a.e. en* $\mathbb{T}^\omega$.

Demostración. De acuerdo con el Lema 1.5, la función $f_{(\ell)}(x)$ está definida a.e. por la serie de Fourier de la sección ℓ-ésima de Jessen de $f(x)$ que hemos denotado por $f_\ell(x)$ en el capítulo anterior, ecuación (1.8).

Por la hipótesis de convergencia absoluta, usando el teorema de inversión de la transformada de Fourier en $\mathbb{T}^\ell$ [52, Prop. 3.2.5], tenemos que, para cada $\ell \in \mathbb{N}$ se cumple, en norma y a.e.,

$$\lim_{N\to\infty} S_{\ell,N} f_\ell(x) = f_\ell(x), \tag{2.1}$$

siendo $S_{\ell,N} f_\ell$ la suma parcial (cuadrada) N-ésima de la s.F. de f_ℓ considerada como función definida en $\mathbb{T}^\ell$. Pero $S_{\ell,N} f_\ell(x) = S_{\ell,N} f(x)$ para todo ℓ y todo N, si denotamos

$$S_{\ell,N} f(x) := \sum_{\substack{\bar{p}\in\mathbb{Z}^{(\ell)} \\ \max|p_j|\leq N}} \widehat{f}(\bar{p}) e^{2\pi i \bar{p}\cdot x}.$$

Aplicando ahora los teoremas de Jessen 1.4, de (2.1) resulta que, en norma y a.e., se cumple

$$\lim_{\ell\to\infty}\big(\lim_{N\to\infty} S_{\ell,N}f(x)\big)=\lim_{\ell\to\infty}\big(\lim_{N\to\infty} S_{\ell,N}f_\ell(x)\big)=\lim_{\ell\to\infty} f_\ell(x)=f(x). \qquad \square$$

2.1.2. Sumabilidad en norma y casi por todo

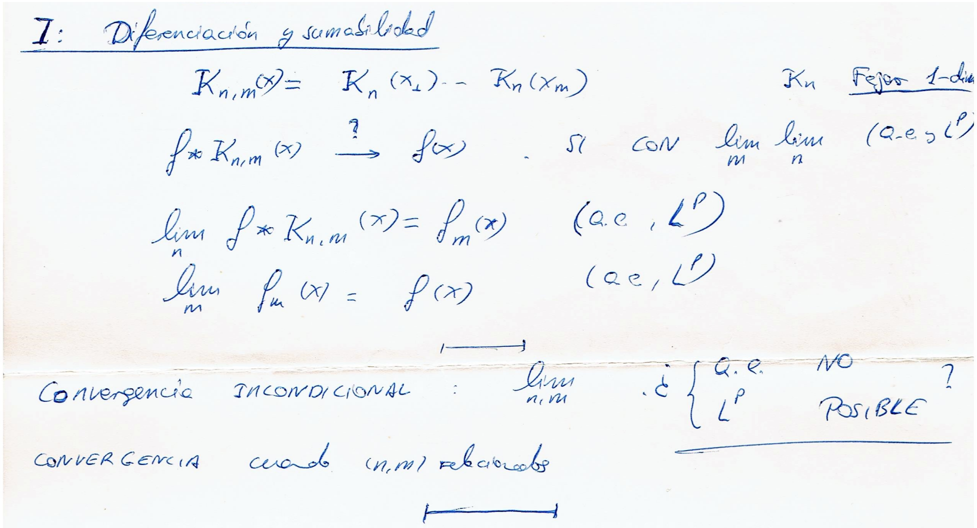


Figura 2.1: Explicación manuscrita de JLR (Madrid, 1977).

Nos vamos a limitar a considerar sumabilidad Cesàro. La sumabilidad Cesàro $(C,1)$ de las series de Fourier viene establecida, como se sabe, por la convergencia de las medias de Fejér. Recordemos la expresión $F_{n,N}(x_1,\ldots,x_n) = F_N(x_1)\cdots F_N(x_n)$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{T}^n$, del núcleo cuadrado de Fejér. Los siguientes resultados de sumabilidad por sumas cuadradas para funciones en $\mathbb{T}^n$ son estándares (recordar (1.5)):

2.2 Teorema.

(a) ([52, Thm. 1.2.19].) *Sea* $1\le p<\infty$. *Si* $f\in L^p(\mathbb{T}^n)$, *entonces* $\lim_{N\to\infty} F_{n,N} * f = f$ *en* L^p, *es decir,* $\|F_{n,N}*f-f\|_p \to 0$ *cuando* $N\to\infty$.

(b) ([52, Thm. 3.4.4 (b)].) *Si* $f\in L^1(\mathbb{T}^n)$ (luego, en particular, *si* $f\in L^p(\mathbb{T}^n)$ *con* $1\le p\le\infty$), *entonces* $\lim_{N\to\infty} F_{n,N}*f=f$ *a.e. en* $\mathbb{T}^n$.

Usando entonces los teoremas de Jessen es inmediata la prueba de los siguientes resultados "de límite doble iterado" para la sumabilidad Cesàro de las sumas parciales cuadradas de las series de Fourier en $\mathbb{T}^\omega$ (v. [63, II, (44.43), (44.53)]):

2.3 Proposición. *Sea* $1\le p<\infty$. *Si* $f\in L^p(\mathbb{T}^\omega)$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{N\to\infty}(F_{n,N}*f)(x)\right)=f(x) \tag{2.2}$$

en $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ *y a.e. en* $\mathbb{T}^\omega$.

Demostración. Tener en cuenta (recordar nuestra demostración del Teorema 1.17) que $F_{n,N}*f = F_{n,N}*f_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, si f_n es la sección n-ésima de Jessen de la función $f\in L^1(\mathbb{T}^\omega)$. De modo que, en primer lugar, para cada n fijo, usando el Teorema 2.2,

$$\lim_{N\to\infty}(F_{n,N}*f)(x)=\lim_{N\to\infty}(F_{n,N}*f_n)(x)=f_n(x_1,\ldots,x_n)=f_n(x) \quad (x\in\mathbb{T}^\omega)$$

en $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ y a.e. en $\mathbb{T}^\omega$. Y en segundo lugar, según los teoremas de Jessen, se verifica, en la norma de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ y a.e. en $\mathbb{T}^\omega$, que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{T}^\omega)$. La conclusión es inmediata. $\square$

Hewitt y Ross [63, II, p. 676-679] (v. también [42, p. 194]) anotan que es concebible, aunque aportan razones para decir que es improbable, que se pueda encontrar una sucesión simple de núcleos de sumabilidad, $\{K_m\}_{m=1}^\infty$, en $\mathbb{T}^\omega$ tal que $\lim_{m\to\infty}(K_m * f)(x) = f(x)$ a.e. para toda $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$. Posiblemente en este contexto JLR dejaba propuestas las siguientes "tareas", que nosotros no hemos llegado a abordar (v. Figura 2.1):

(a) Estudiar si la convergencia establecida en (2.2) se cumple "incondicionalmente" como un límite doble, es decir, si puede ser $\lim_{(n,N)\to(\infty,\infty)} F_{n,N} * f = f$. Parece que a.e. no tiene mucho sentido, pero podría ser posible en $L^p(\mathbb{T}^\omega)$.

(b) Estudiar en todo caso ese límite doble cuando hay alguna relación entre n y N.

2.4 Nota. Antoni Zygmund señala [123, Ch. XVII, §2] que los problemas de sumabilidad de las s.F. guardan estrecha conexión con los problemas de diferenciabilidad de integrales, y su tratamiento, por ejemplo, de la sumabilidad Cesàro $(C, 1)$ de las sumas parciales rectangulares de las series de Fourier múltiples es paralelo al estudio de la diferenciabilidad fuerte (es decir, respecto de la base de intervalos de lados paralelos a los ejes, v. la sección siguiente) de las integrales "indefinidas". La sumabilidad Cesàro $(C, 1)$ de las sumas parciales cuadradas de las series de Fourier múltiples es paralelo al estudio de un caso particular de diferenciabilidad restringida [123, Ch. XVII, §3].

Los resultados análogos a los de la Proposición 2.3 para la sumabilidad $(C, 1)$ de las sumas parciales rectangulares de la s.F. de $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$ $(1 \le p < \infty)$ se siguen de los teoremas de Jessen y el teorema siguiente. En particular, la convergencia a.e. se sigue sólo cuando $p > 1$. En el reciente trabajo [48] de D. Fufaev puede encontrarse una extensión a $\mathbb{T}^\omega$ de la condición (debida a Jessen, Marcinkiewicz y Zygmund) del Teorema 2.5(b) y del correspondiente resultado.

2.5 Teorema. (a) ([123, Ch. XVII, (1.20), (1.23)].) *Sea* $1 \le p \le \infty$. *Si* $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$, *entonces* $\|F_{n;N_1,\dots,N_n} * f - f\|_p \to 0$ *cuando* $N_j \to \infty$ *para todo* $j = 1, \dots, n$.

(b) ([123, Ch. XVII, (2.14)].) *Si* $f \in L(\log^+ L)^{n-1}(\mathbb{T}^n)$ (*luego, en particular, si* $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ *con* $1 \le p \le \infty$), *entonces* $\lim_{\boldsymbol{N}\to\infty} F_{n;N_1,\dots,N_n} * f = f$ *a.e. en* $\mathbb{T}^n$ (*donde* $\boldsymbol{N} = (N_1, \dots, N_n)$, *y* $\boldsymbol{N} \to \infty$ *si y solo si* $N_j \to \infty$ *para todo* $j = 1, \dots, n$).

M. Mahowald [85] describe un análogo de la sumabilidad Abel para $\mathbb{T}^\omega$ usando un límite simple en lugar de uno iterado (v. [42, p. 216]).

2.2. Descomposición de tipo Calderón-Zygmund y diferenciación de integrales en $\mathbb{T}^\omega$

En [99] JLR demostró un resultado de diferenciación de integrales en el contexto de un grupo localmente compacto G, que contenía en particular una descomposición de tipo Calderón–Zygmund (CZ) [27, Ch. I, Lemma 1] bajo ciertas condiciones. Por la fecha de publicación, su estudio pudo ser contemporáneo del que hacen Edwards y Gaudry en [41, Ch. 2]. En esta sección vamos a revisitar estas cosas en su adaptación al caso del grupo compacto y abeliano $\mathbb{T}^\omega$.

En primer lugar abordaremos una descomposición de tipo CZ asociada a cada función $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ que nos dejaba esbozada JLR en una comunicación personal en 1977, en Madrid, como muestra un apunte manuscrito suyo que conservamos (Figura 2.2). El asunto consistía en realidad en seguir fielmente, en el caso $G = \mathbb{T}^\omega$, y con su ayuda, la primera parte de la prueba del resultado principal que JLR presentaba [99, Thm. 8].

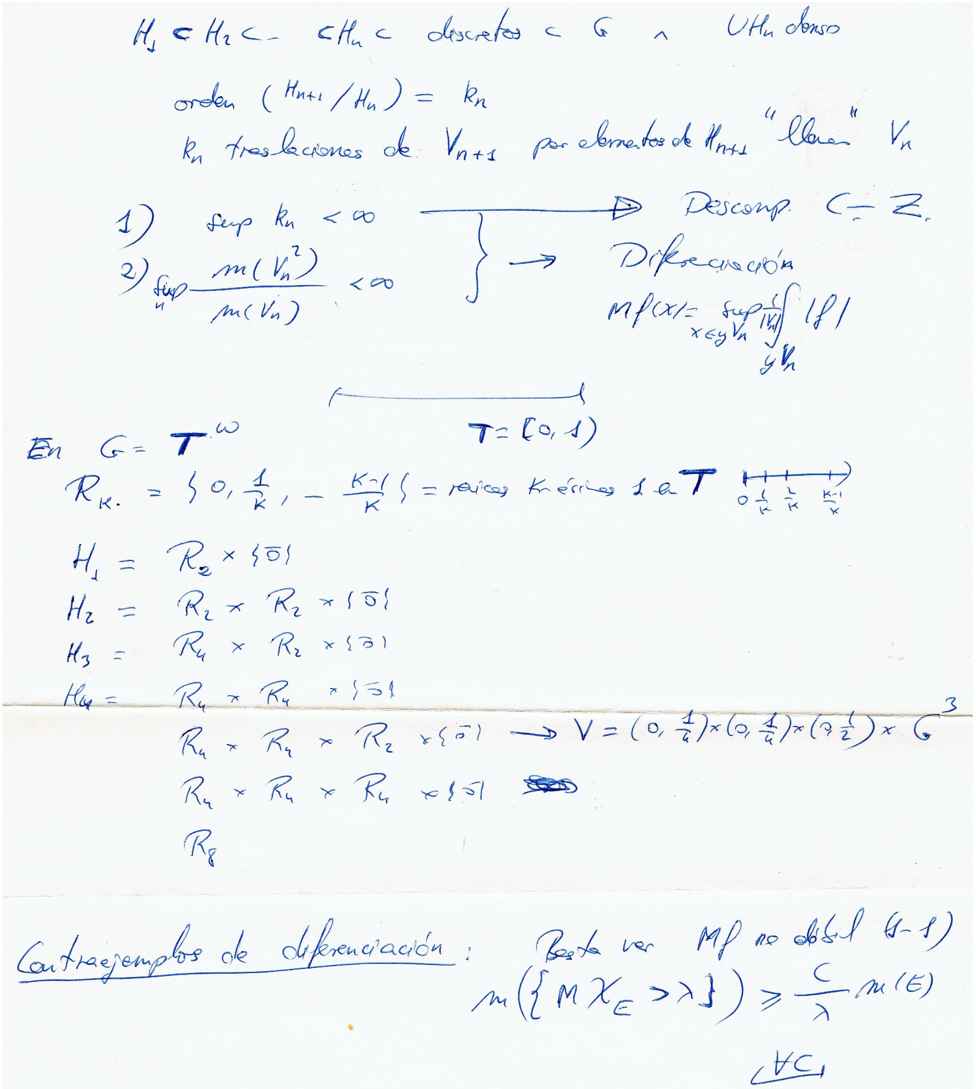


Figura 2.2: Explicación manuscrita de JLR (Madrid, 1977).

2.2.1. Esperanza condicional. Convergencia a.e. de martingalas

Por completitud en nuestra exposición vamos a empezar recordando unos conceptos de la teoría de la Probabilidad que se van a emplear después (v. por ejemplo [91, Ch. II, IV], [110, p. 89–94], [41, Ch. 5], [108, 2.7]). Hay que hacer notar que el teorema de convergencia en casi todo punto de martingalas, que se debe esencialmente a Doob [36, Ch. VII], estaba ya presente en la tesis doctoral [98] de JLR.

2.6 Definición. Supongamos fijado un espacio de medida finita $(X, \mathcal{A}, m)$. Para cada $f \in L^1(m)$ queda definida una medida compleja φ en $(X, \mathcal{A})$ por

$$\varphi(A) := \int_A f \, dm \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Si $m(A) = 0$, entonces se tiene también $\varphi(A) = 0$, por lo que la medida φ es absolutamente continua respecto de m. Supongamos por otra parte que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra contenida en $\mathcal{A}$. Podemos considerar la restricción $m_{\mathcal{B}}$ de m a $\mathcal{B}$, y el espacio de medida finita restringido

$(X, \mathcal{B}, m_{\mathcal{B}})$. La restricción $\varphi_{\mathcal{B}}$ de φ a $\mathcal{B}$ es una medida en el espacio $(X, \mathcal{B})$ que es absolutamente continua respecto de la medida $m_{\mathcal{B}}$ y, en aplicación del teorema de Radon-Nikodým (ver p. ej. [82, I, §8]) existe una única (salvo $m_{\mathcal{B}}$-equivalencias) función (la derivada de Radon-Nikodým $d\varphi_{\mathcal{B}}/dm_{\mathcal{B}}$) $\mathcal{B}$-medible que denotaremos $E^{\mathcal{B}}f$ tal que

$$\varphi(B) = \int_B (E^{\mathcal{B}}f)\, dm_{\mathcal{B}} \quad (\forall\, B \in \mathcal{B}).$$

Esta función se denomina *esperanza condicional de f relativa a $\mathcal{B}$*. Se verifica entonces (v. [120, 5.13])

$$\int_B f\, dm = \int_B (E^{\mathcal{B}}f)\, dm \quad (\forall\, B \in \mathcal{B}). \tag{2.3}$$

De manera que queda definido, por $E^{\mathcal{B}}(f) = E^{\mathcal{B}}f$, un operador $E^{\mathcal{B}} \colon L^1(m) \to L^0(m_{\mathcal{B}})$ (del espacio de clases de equivalencia de funciones $\mathcal{A}$-medibles e integrables en el espacio de clases de equivalencia de funciones $\mathcal{B}$-medibles) que se llama *operador de esperanza condicional relativa a $\mathcal{B}$*.

Supongamos por ejemplo el caso en que el espacio X admite una partición contable $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en conjuntos $\mathcal{A}$-medibles de medida positiva, y $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra engendrada por esa familia de conjuntos disjuntos, es decir, la mínima σ-álgebra que contiene a dicha familia, cosa que representaremos $\mathcal{B} := \sigma(\{B_n\})$. Entonces, se verifica a.e.

$$E^{\mathcal{B}}f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{B_n} \cdot \chi_{B_n}(x), \tag{2.4}$$

(donde $f_B := \frac{1}{m(B_n)} \int_{B_n} f\, dm$) por la unicidad de la esperanza condicional, ya que la función $s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_{B_n} \cdot \chi_{B_n}(x)$ del segundo miembro de (2.4) es $\mathcal{B}$-medible y se cumple $\int_{B_n} s\, dm = f_{B_n} \cdot m(B_n) = \int_{B_n} f\, dm$.

Entre las propiedades inmediatas de la esperanza condicional señalemos la siguiente.

2.7 Propiedad. Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ son sub-σ-álgebras de $\mathcal{A}$, entonces $E^{\mathcal{B}}(E^{\mathcal{C}}f) = E^{\mathcal{B}}f$ *a.e.*.

Demostración. Sea $B \in \mathcal{B}$; por un lado, por definición de $E^{\mathcal{B}}$, $\int_B E^{\mathcal{B}}\, dm = \int_B f\, dm$.

Por otro lado, $B \in \mathcal{C}$, luego por definición de $E^{\mathcal{C}}$, $\int_B f\, dm = \int_B E^{\mathcal{C}} f\, dm$. Ahora, también por definición de $E^{\mathcal{B}}$,

$$\int_B E^{\mathcal{C}} f\, dm = \int_B E^{\mathcal{B}}\big(E^{\mathcal{C}} f\big)\, dm.$$

Se deduce de la unicidad que $E^{\mathcal{B}}f = E^{\mathcal{B}}\big(E^{\mathcal{C}}f\big)$ (a.e.). □

2.8 Definiciones. Sea $(X, \mathcal{A}, m)$ un espacio de medida finita y

$$\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1} \subset \cdots$$

una sucesión creciente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{A}$.

Una *martingala* es una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(m)$ tales que para cada $n \geq 1$, f_n es $\mathcal{B}_n$-medible y se verifica (a.e.) $E^{\mathcal{B}_n} f_{n+1} = f_n$.

Por ejemplo, para toda $f \in L^p(m)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ la sucesión de esperanzas condicionales $f_n := E^{\mathcal{B}_n} f$ $(n \in \mathbb{N})$ forma una martingala, ya que $E^{\mathcal{B}_n} f_{n+1} = E^{\mathcal{B}_n}(E^{\mathcal{B}_{n+1}} f) = E^{\mathcal{B}_n} f$ a.e., de acuerdo con la Propiedad 2.7.

Se define el *operador maximal* $E^* \colon L^1(m) \to L^0(m)$ asociado a la sucesión $\{\mathcal{B}_n\}$ de σ-álgebras mediante $E^* f = f^*$, donde

$$f^*(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|$$

es la *función maximal de la martingala* (f_n).

El siguiente resultado, *teorema de convergencia a.e. para martingalas* es bien conocido; para el caso más simple de $f \geq 0$, v. [91, Ch. II]:

2.9 Teorema. [91, Ch. IV], [110, Ch. IV, §1, Thm. 6 y Rem. 1]

(a) *El operador maximal E^* es de tipo (1,1)-débil, es decir, para $f \in L^1(m)$ y todo $\lambda > 0$,*

$$m\big(\{x\colon E^* f(x) > \lambda\}\big) \leq \frac{C}{\lambda}\, \|f\|_1$$

(Doob's inequality[1].)

(b) *El operador maximal E^* es de tipo (p,p)-fuerte, es decir, para $f \in L^p(m)$ $(1 < p \leq \infty)$ es $\|E^* f\|_p \leq C_p \|f\|_p$.*

(c) *Además, para $f \in L^p(m)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ la sucesión $\{f_n\}$ converge en casi todo punto. De hecho, se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = E^{\mathcal{B}} f,$$

donde $\mathcal{B} := \sigma\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n\big)$.

Una vez probado (a), una argumentación estándar permite probar (c). Por ejemplo, cuando $p = 1$: para las funciones del tipo $s(x) = \sum_{j\in J \text{ finito}} c_j \chi_{S_j}(x)$, donde $c_j \in \mathbb{C}$ y $S_j \in \mathcal{B}_j$, que forman un conjunto denso en $L^1(\mathcal{B}, m)$, se tiene $s_n = s$ a partir de cierto n, luego $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$ (a.e.). Entonces, usando el Teorema 4.19 resulta que $f_n(x) \to g(x)$ (a.e.) para una cierta función $g(x) \in L^1(m)$. Pero el operador $T\colon f \mapsto g$ que queda así definido de $L^1(m)$ en $L^1(m)$ es de tipo $(1,1)$-débil (por serlo E^*) y es la identidad para la clase densa de funciones $s(x)$ anteriores, luego T es la identidad en todo $L^1(\mathcal{B}, m)$.

Por otra parte, como E^* es obviamente (∞,∞)-fuerte, del teorema de interpolación de Marcinkiewicz se deduce (b).

2.2.2. La descomposición CZ en $\mathbb{T}^\omega$ propuesta por JLR

En palabras que son del propio JLR, el interés de la descomposición de Calderón-Zygmund asociada a una función integrable f radica en que, para cada $a > 0$, separa una parte (un conjunto cerrado) del espacio donde la función es "buena" (donde $|f| \leq a$) de una parte (un conjunto abierto) donde la función es "mala" (donde cierta función maximal de medias $Mf > a$), descomponiendo este abierto, cuya medida (finita) va a quedar además controlada, en abiertos disjuntos tales que la media de $|f|$ en cada uno de ellos va a estar uniformemente acotada. Desde otro punto de vista, es entonces la propia función $|f|$ la que puede descomponerse en una suma de dos funciones, $|f| = g + b$, donde la parte "buena", g, está esencialmente acotada (a.e.) y la "mala", b, tiene cierta propiedad integral de cancelación y además también quedan acotadas sus medias sobre cada abierto de la antedicha colección.

JLR sobre descomposición de tipo CZ en un grupo localmente compacto

La definición, lema y teorema que siguen pertenecen al trabajo citado de JLR. En su contexto, G es un grupo localmente compacto (no abeliano en general, se usa notación multiplicativa para la operación del grupo) con unidad e y medida de Haar (invariante por la izquierda) m, y H representa un subgrupo discreto de G.

2.10 Definición. ([99, Section 1]; [19, Ch. 7, § 2.10]) Un subconjunto abierto V de G es un *dominio fundamental* (DF) para el grupo cociente G/H si se cumplen las dos condiciones siguientes:

[1] [36, VII, Thm. 3.2].

(i) $VV^{-1} \cap H = \{e\}$ (o lo que es lo mismo, la restricción $\pi|_V$ es $1-1$, siendo $\pi\colon G \to G/H$ la proyección canónica).

(ii) El conjunto complementario de VH en G es localmente nulo.

EJEMPLOS. (1) El intervalo abierto $(0,1)$ es un DF para $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(2) $G = \mathbb{R}^2$, $H = a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z} = \boldsymbol{p1}$ $(a, b > 0)$, $V = (a,0) \times (0,b)$ (Figure 2.3).

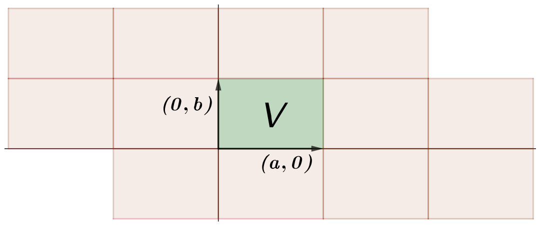


Figura 2.3: Un DF para $\mathbb{R}^2/(a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z})$.

(3) El intervalo $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ es un DF para $\mathbb{T}/R_n$, denotando por $R_n := \left\{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$ el subgrupo de las raíces n-ésimas de la unidad en $\mathbb{T}$.

2.11 Lema. [99, Lemma 2] Supongamos que G contiene una sucesión de subgrupos discretos

$$H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_n \subset \cdots \subset G$$

tales que cada G/H_n es compacto y pongamos $k_n := \operatorname{orden}(H_{n+1}/H_n)$, que es un número finito para cada n. Entonces existe una sucesión de conjuntos abiertos

$$V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_n \supset \cdots$$

tales que V_n es un DF para G/H_n, y que cada V_n es (salvo un conjunto de medida cero) la unión disjunta de k_n trasladados de V_{n+1} por elementos de H_{n+1}.

El resultado principal de JLR en este contexto, inserto en la primera parte de la demostración del *Theorem* 8 citado, era el siguiente.

2.12 Teorema. [99, Thm. 8] *Supongamos adicionalmente que $\bigcup_n H_n$ es densa en G, y que*

$$\sup_n k_n = k < \infty. \tag{2.5}$$

Entonces, para cada $f \in L^1(G)$ y $a > \|f\|_1$ existe una sucesión disjunta de conjuntos abiertos S_j pertenecientes a la familia $\{tV_n \colon t \in H_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, de modo que es $|f(x)| \leq a$ a.e. fuera de $A = \cup_j S_j$, $m(A) \leq C\|f\|_1/a$ para una constante C independiente de f y a, y $a \leq |f|_{S_j} \leq ka$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

JLR (inédito) sobre descomposición de tipo CZ en $\mathbb{T}^\omega$

El subsiguiente Teorema 2.14 mostrará la demostración original de JLR del Teorema 2.12 en el caso $G = \mathbb{T}^\omega$. Antes de su enunciado hay que establecer una apropiada sucesión de subgrupos (es la que el propio JLR nos enseñaba en la comunicación personal ya mencionada), que presentamos a continuación. La descomposición de tipo CZ en $\mathbb{T}^\omega$ resultará estar asociada con una cierta familia $\mathcal{R}_0$ (v. (2.7)) de "intervalos diádicos" de $\mathbb{T}^\omega$. Además, esta familia $\mathcal{R}_0$ va a ser la unión de una *sucesión monótona de redes*, conceptos que definimos con detalle a continuación.

2.13 Definición. ([105, p. 153], [89, VII.43].) Una *red*[2] en $\mathbb{T}^\omega$ es una clase contable de conjuntos medibles disjuntos cuya unión es $\mathbb{T}^\omega$ excepto tal vez un conjunto de medida nula. Sea $\{\mathcal{M}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de redes en $\mathbb{T}^\omega$. Esta sucesión se dice *monótona* si para cada entero positivo n, cada elemento de $\mathcal{M}_{n+1}$ está contenido en alguno de $\mathcal{M}_n$. En este caso, para casi todo punto $x \in \mathbb{T}^\omega$ existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, un único conjunto $I_x^{(n)} \in \mathcal{M}_n$ tal que $x \in I_x^{(n)}$.

La primera red $\mathcal{N}_1$ está compuesta por los conjuntos abiertos (recordar la notación $\mathbb{T}^{n,\omega}$ de 1.1.2)

$$V_1^{(0)} = (0, \tfrac{1}{2}) \times \mathbb{T}^{1,\omega} \quad \text{and} \quad V_1^{(1)} = (\tfrac{1}{2}, 1) \times \mathbb{T}^{1,\omega}.$$

Recordemos que $R_k := \{0, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}\}$, $k \in \mathbb{N}$. En la tabla siguiente vemos los primeros términos de la sucesión creciente de subgrupos $H_m \subset \mathbb{T}^\omega$ propuesta por JLR, así como algunos de los primeros términos de la sucesión decreciente de DFs asociada (por claridad usamos aquí las notaciones $\bar{0} := (0, 0, \ldots) \in \mathbb{T}^\omega$, $\bar{0}^{(k} := (0, 0, \ldots) \in \mathbb{T}^{k,\omega}$).

m	H_m	V_m
1^2	$H_1 = R_2 \times \{\bar{0}^{(1}\}$	$V_1 = (0, \frac{1}{2}) \times \mathbb{T}^{1,\omega}$
1^2+1	$H_2 = R_2 \times R_2 \times \{\bar{0}^{(2}\}$	$V_2 = (0, \frac{1}{2})^2 \times \mathbb{T}^{2,\omega}$
	$H_3 = R_4 \times R_2 \times \{\bar{0}^{(2}\}$	
2^2	$H_4 = R_4 \times R_4 \times \{\bar{0}^{(2}\}$	$V_4 = (0, \frac{1}{4})^2 \times \mathbb{T}^{2,\omega}$
	$H_5 = R_4 \times R_4 \times R_2 \times \{\bar{0}^{(3}\}$	
2^2+2	$H_6 = R_4 \times R_4 \times R_4 \times \{\bar{0}^{(3}\}$	$V_6 = (0, \frac{1}{4})^3 \times \mathbb{T}^{3,\omega}$
	$H_7 = R_8 \times R_4 \times R_4 \times \{\bar{0}^{(3}\}$	
	$H_8 = R_8 \times R_8 \times R_4 \times \{\bar{0}^{(3}\}$	$V_8 = (0, \frac{1}{8})^2 \times (0, \frac{1}{4}) \times \mathbb{T}^{3,\omega}$
3^2	$H_9 = R_8 \times R_8 \times R_8 \times \{\bar{0}^{(3}\}$	$V_9 = (0, \frac{1}{8})^3 \times \mathbb{T}^{3,\omega}$
	$H_{10} = R_8 \times R_8 \times R_8 \times R_2 \times \{\bar{0}^{(4}\}$	
....	....	....

De hecho, después de considerar $H_1 = R_2 \times \{\bar{0}^{(1}\}$ se definen, para cada $n \geq 1$ (ver nuevamente la Figura 2.2),

$$H_{n^2+j} = \widetilde{H}_{n^2+j} \times \{\bar{0}^{(n+1}\}, \quad (1 \leq j \leq 2n+1),$$

y

$$\widetilde{H}_{n^2+j} := \begin{cases} R_{2^n} \times \overset{(n)}{\cdots} \times R_{2^n} \times R_{2^j} & \text{si } j \in \{1, \ldots, n\}, \\ R_{2^{n+1}} \times \overset{(j-n)}{\cdots} \times R_{2^{n+1}} \times R_{2^n} \times \overset{(2n+1-j)}{\cdots} \times R_{2^n} & \\ & \text{si } j \in \{n+1, \ldots, 2n+1\}. \end{cases}$$

Para cada entero positivo m, H_m es un subgrupo discreto (finito, de orden 2^m) de $\mathbb{T}^\omega$, $H_m \subset H_{m+1}$, y orden $H_{m+1}/H_m = 2$ para todo $m \geq 1$. Además, la unión $\bigcup_m H_m$ es un subconjunto denso de $\mathbb{T}^\omega$, como es fácil de comprobar:

Sea $x \in \mathbb{T}^\omega$; si U_x es un entorno de x, será $U_x = U_{x'} \times \mathbb{T}^{n_0,\omega}$ para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$, siendo $x = (x', x'')$, $x' \in \mathbb{T}^{n_0}$ y $U_{x'}$ un entorno de x' en $\mathbb{T}^{n_0}$. De modo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $U_{x'} \supset x' + B_{n_0,\varepsilon}(0)$, donde $B_{n_0,\varepsilon}(0)$ denota la bola abierta de radio ε y centro en el origen de $\mathbb{T}^{n_0}$. Pero para este número ε existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-m} < \varepsilon$, y entonces $U_x \cap H_{m^2} \neq \emptyset$.

[2]No confundir este concepto de red, definido originalmente por De la Vallée Poussin [118, 10.67] para el caso del espacio euclídeo (*réseau de grillages à mailles carrées*), con el más usual [74, Ch. 2] de conjunto dirigido o sucesión generalizada. Saks lo generalizó a espacios métricos. Cf. también la definición de Jessen [69, §6] en el caso de $\mathbb{T}^\omega$.

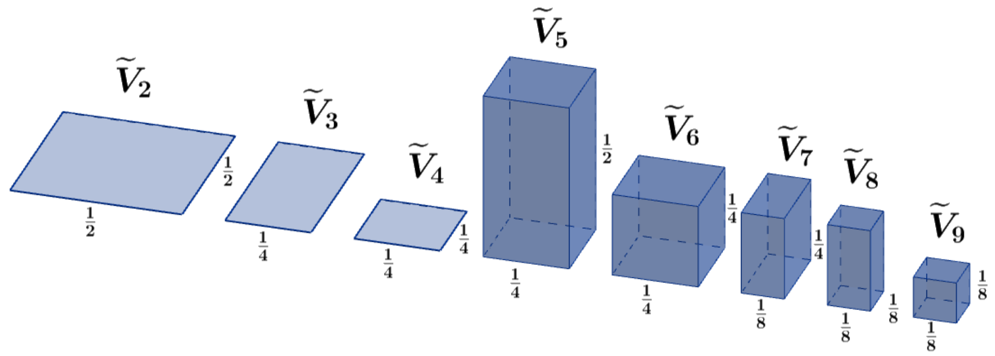


Figura 2.4: Primeros miembros de la sucesión $\{\widetilde{V}_m\}$. V.g., $\widetilde{V}_7 = (0, \frac{1}{8}) \times (0, \frac{1}{4})^2$. Dos traslaciones de V_{m+1} por elementos de H_{m+1} cubren (a.e.) V_m.

La sucesión decreciente de conjuntos abiertos $\{V_m\}$, donde para cada $m \geq 1$, V_m es un DF para $\mathbb{T}^\omega/H_m$, asociada con la sucesión creciente $\{H_n\}$ de subgrupos, queda definida por $V_1 = (0, \frac{1}{2}) \times \mathbb{T}^{1,\omega}$ y, para cada $n \geq 1$ (v. Figura 2.4),

$$V_{n^2+j} = \widetilde{V}_{n^2+j} \times \mathbb{T}^{n+1,\omega} \quad (1 \leq j \leq 2n+1), \tag{2.6}$$

con

$$\widetilde{V}_{n^2+j} := \begin{cases} (0, \frac{1}{2^n})^n \times (0, \frac{1}{2^j}) & \text{si } j \in \{1, \dots, n\}, \\ (0, \frac{1}{2^{n+1}})^{j-n} \times (0, \frac{1}{2^n})^{2n+1-j} & \text{si } j \in \{n+1, \dots, 2n+1\}. \end{cases}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, podemos considerar la red (finita) $\mathcal{N}_m := \{t + V_m \colon t \in H_m\}$. La sucesión $\{\mathcal{N}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es monótona. Nuestra familia final $\mathcal{R}_0$ de intervalos diádicos en $\mathbb{T}^\omega$ es la unión de esta sucesión de redes,

$$\mathcal{R}_0 := \{t + V_m \colon m \in \mathbb{N}, t \in H_m\}\,. \tag{2.7}$$

Se verifica entonces el siguiente resultado, ya anunciado. La colección $\{I_j\}$ sería una descomposición CZ en intervalos de $\mathcal{R}_0$, asociada con la función f *al nivel* a.

2.14 Teorema (José L. Rubio de Francia)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ y sea un número real $a > \|f\|_1$. Entonces existen un conjunto cerrado F_a y un conjunto abierto $\Omega_a = \mathbb{T}^\omega \setminus F_a$ tales que*

(i) *$|f(x)| \leq a$ para casi todo $x \in F_a$.*

(ii) *El conjunto Ω_a es la unión de una sucesión $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ de intervalos de la familia $\mathcal{R}_0$ disjuntos dos a dos y tales que $a \leq |f|_{I_j} \leq 2a$ para todo I_j.*

(iii) *Se verifica $m(\Omega_a) \leq \|f\|_1/a$.*

Demostración. (V. también [37, Thms. 2.10 y 2.11].) Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{B}_m := \sigma(\mathcal{N}_m)$. Consideraremos además la σ-álgebra trivial $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, \mathbb{T}^\omega\}$ (engendrada por el abierto $V_0 := \mathbb{T}^\omega = \bar{0} + \mathbb{T}^\omega$ que tiene también la forma general anterior si se considera el subgrupo trivial $H_0 = \{\bar{0}\}$). Se tiene

$$\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \cdots \mathcal{B}_m \subset \mathcal{B}_{m+1} \subset \cdots .$$

Definimos, para $m = 0, 1, 2, \ldots,$

$$f_m(x) = \sum_{t\in H_m} |f|_{t+V_m} \cdot \chi_{t+V_m}(x). \tag{2.8}$$

La función f_m es $\mathcal{B}_m$-medible para cada m, ya que es constante en cada intervalo $t+V_m$ componente de $\mathcal{N}_m$. Además, $f_m \geq 0$ y

$$\int_{\mathbb{T}^\omega} f_m = \sum_{t\in H_m} |f|_{t+V_m} \cdot m(V_m) = \sum_{t\in H_m} \int_{t+V_m} |f| = \int_{\mathbb{T}^\omega} |f| = \|f\|_1 < \infty$$

por hipótesis (hemos usado que $\mathbb{T}^\omega \setminus (H_m + V_m)$ es un conjunto de medida nula, al ser V_m un DF para $\mathbb{T}^\omega / H_m$ para cada m). Si comparamos (2.8) y (2.4) vemos que f_m es la *esperanza condicional* de $|f|$ relativa a la σ-álgebra $\mathcal{B}_m$.

Aplicando el Teorema 2.9(c) se deduce que $f_m(x) \to (E^{\mathcal{B}}|f|)(x)$ a.e. cuando $m \to \infty$, donde $\mathcal{B}$ es la mínima σ-álgebra que contiene a la unión $\bigcup_{m=0}^\infty \mathcal{B}_m$. En nuestro caso, la densidad de $\bigcup_m H_m$ en $\mathbb{T}^\omega$ hace que la clase $\bigcup_{m=0}^\infty \mathcal{B}_m$ sea la de los conjuntos abiertos en $\mathbb{T}^\omega$, y $\mathcal{B}$ sea entonces la σ-álgebra de los conjuntos de Borel en $\mathbb{T}^\omega$. De modo que el operador $E^{\mathcal{B}}$ de esperanza condicional con respecto a la σ-álgebra $\mathcal{B}$ es la identidad, y entonces, para toda $g \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ se verifica $E^{\mathcal{B}} g = g$ (a.e.). Se concluye que

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = |f(x)| \quad \text{a.e. en } \mathbb{T}^\omega. \tag{2.9}$$

Sea

$$f^*(x) = \sup_{m\in\mathbb{N}} f_m(x).$$

Si $x \in F_a = \{x \colon f^*(x) \leq a\}$, se tiene $f_m(x) \leq a$ para todo m, y aplicando (2.9) resulta $|f(x)| \leq a$ y queda probado el apartado (i).

El conjunto $\Omega_a = \mathbb{T}^\omega \setminus F_a$ del apartado (ii) queda definido como $\Omega_a = \{x \colon f^*(x) > a\}$, y la desigualdad débil $(1,1)$ (parte (a) del Teorema 2.9) del operador maximal[3] $E^* \colon f \mapsto f^*$ da

$$m(\Omega_a) \leq \frac{A}{a} \|f\|_1, \tag{2.10}$$

donde A es una constante independiente de f y a.

Finalmente, hemos supuesto que $\|f\|_1 < a$, de modo que se cumple $f_0(x) \leq a$ para todo x, y podemos reconocer ahora el conjunto Ω_a como la unión disjunta de los conjuntos

$$\Omega_a^{(n)} = \{x \colon f_i(x) \leq a < f_n(x),\ 0 \leq i \leq n-1\}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Para cada $n \geq 1$, el conjunto $\Omega_a^{(n)}$ es evidentemente $\mathcal{B}_n$-medible, luego es una unión disjunta de intervalos de la forma $t + V_n$ con $t \in H_n$. Si $I_j^{(n)}$ es uno de estos intervalos se tiene, por un lado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m\big(I_j^{(n)}\big)} \int_{I_j^{(n)}} |f(x)|\, dx &= \frac{1}{m\big(I_j^{(n)}\big)} \int_{I_j^{(n)}} \big(E^{\mathcal{B}_n}|f|\big)(x)\, dx \\ &= \frac{1}{m\big(I_j^{(n)}\big)} \int_{I_j^{(n)}} f_n(x)\, dx \geq a \end{aligned} \tag{2.11}$$

porque $f_n(x) > a\ \forall x \in I_j^{(n)} \subset \Omega_a^{(n)}$. Por otro lado, $I_j^{(n)}$ está contenido en un intervalo de la forma $s + V_{n-1}$ ($s \in H_{n-1}$) que no está contenido en $\Omega_a^{(n-1)}$ (convenimos en que $\Omega_a^{(0)} = \emptyset$), por lo que es $f_{n-1}(x) \leq a\ \forall x \in s + V_{n-1}$. Usando además que $m\big(I_j^{(n)}\big) = m(V_n) = \frac{1}{2} m(V_{n-1})$, se

[3]Este operador maximal E^* se denotaría $M^{\mathcal{R}_0}$ según la posterior Definición 2.17. De acuerdo entonces con el Teorema 2.9, el operador maximal $M^{\mathcal{R}_0}$ es $(1,1)$-débil y (p,p)-fuerte para $1 < p \leq \infty$.

tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{m\big(I_j^{(n)}\big)}\int_{I_j^{(n)}}|f(x)|\,dx &\leq \frac{2}{m(V_{n-1})}\int_{s+V_{n-1}}|f(x)|\;dx\\ &= \frac{2}{m(V_{n-1})}\int_{s+V_{n-1}}\big(E^{\mathcal{B}_{n-1}}|f|\big)(x)\,dx\\ &= \frac{2}{m(V_{n-1})}\int_{s+V_{n-1}} f_{n-1}(x)\,dx \leq 2a,\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba de (ii). Además, de (2.11) se sigue que $A = 1$ en (2.10). □

2.15 Notas.

(1) El uso estándar de la descomposición CZ del conjunto abierto $\Omega_a = \cup_j I_j$, como ya se ha dicho anteriormente, involucra [27, Ch. I, proof of Lemma 2] una descomposición de la función f, a cada nivel a, en una suma de

$$g(x) := f(x)\chi_{F_a}(x) + \sum_j f_{I_j}\chi_{I_j}(x) \quad \text{ y } \quad b(x) := f(x) - g(x)$$

($f = g + b$, g y b son las partes *buena* y *mala* de f al nivel a), verificando propiedades como, en este caso, las siguientes:

$$|g(x)| \leq 2a \quad \text{(a.e.)}, \qquad \int_{I_j} b(x)\,dx = 0 \;\text{ y }\; |b|_{I_j} \leq 4a \;\text{ para todo } j, \text{ etc.},$$

(v. [52, 5.3.8]).

(2) Hemos visto que JLR [99] usa en su demostración del Teorema 2.12 el Teorema 2.9. El apartado (c) de convergencia a.e. de este teorema juega el papel que una demostración estándar del resultado clásico de este tipo juega el teorema de diferenciación (DT) de Lebesgue. Pero aquí no se trata de una opción de estilo, creemos, porque un DT no está en principio asegurado. De estos asuntos precisamente vamos a tratar en la siguiente subsección.

2.2.3. Sobre la diferenciación de integrales en $\mathbb{T}^\omega$

Para ganar claridad en lo que sigue, comenzamos por establecer una nomenclatura general, relativa al concepto de base de diferenciación, adaptada al caso de $\mathbb{T}^\omega$. Ya recordamos al comienzo de la memoria que la función

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n - y_n|}{2^n} \quad (x, y \in \mathbb{T}^\omega)$$

define en $\mathbb{T}^\omega$ la métrica de Saks. Pongamos $\delta(S) := \sup_{x,y\in S} d(x,y)$ para indicar el *diámetro* del conjunto S en esta métrica.

2.16 Definiciones. ([21, Section 6.1], [53, Ch. 2] .) Para cada $y \in \mathbb{T}^\omega$, sea $\mathcal{B}(y)$ una colección de conjuntos medibles de medida positiva que contienen (o en su caso, cuya clausura topológica contiene) al punto y. Si $\{S_n\}_n \subset \mathcal{B}(y)$ y $\delta(S_n) \to 0$, decimos que *la sucesión S_n se contrae a y*, y escribimos $S_n \Rightarrow y$. Supongamos que existe al menos una sucesión $\{S_n\} \subset \mathcal{B}(y)$ que se contrae a y.

Sea $\mathcal{B} := \bigcup_{y\in\mathbb{T}^\omega} \mathcal{B}(y)$. Decimos que $(\mathcal{B}, \Rightarrow)$ es una *base de diferenciación*, (BD). Como en los espacios euclídeos, cuando cada $B \in \mathcal{B}$ es un conjunto abierto y se cumple que si $x \in B \in \mathcal{B}$ entonces $B \in \mathcal{B}(x)$, se dice que $\mathcal{B}$ es una *base de Busemann-Feller*.

Ejemplos (Las denominaciones son nuestras. Todas ellas son bases de Busemann-Feller):

$$\mathcal{R}_0 := \{t + V_m \colon m \in \mathbb{N},\, t \in H_m\} \quad (\textit{base restringida de Rubio de Francia}),$$

[4]

$$\mathcal{R} := \{y + V_m \colon m \in \mathbb{N},\, y \in \mathbb{T}^\omega\} \quad (\textit{base de Rubio de Francia}),$$

$$\mathcal{J} := \{J \subset \mathbb{T}^\omega \colon J \text{ es un intervalo}\} \quad (\textit{base de Jessen}),\ [70, 71].$$

Si $(\mathcal{B}, \Rightarrow)$ es una BD en $\mathbb{T}^\omega$ y $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$, se definen las *derivadas superior e inferior* de $\int f$ con respecto a $\mathcal{B}$ (y a la medida de Haar m) en el punto $x \in \mathbb{T}^\omega$ por[5]

$$\overline{D}\big(\textstyle\int f, x\big) = \sup_{\substack{\{B_n\}\subset\mathcal{B}\\ B_n\Rightarrow x}} \big\{\limsup_n f_{B_n}\big\} \quad \text{y} \quad \underline{D}\big(\textstyle\int f, x\big) = \inf_{\substack{\{B_n\}\subset\mathcal{B}\\ B_n\Rightarrow x}} \big\{\liminf_n f_{B_n}\big\},$$

respectivamente. Cuando se cumple

$$\overline{D}\Big(\textstyle\int f, x\Big) = \underline{D}\Big(\textstyle\int f, x\Big) = f(x) \quad \text{a.e.} \tag{2.12}$$

se escribe $D\big(\int f, x\big) = f(x)$, se dice que la base $\mathcal{B}$ *diferencia* $\int f$ y que la *derivada* de $\int f$ es f. Una condición necesaria para esto es que

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} f_{B_n} = f(x) \quad \text{a.e.} \tag{2.13}$$

para toda sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(x)$ tal que $B_n \Rightarrow x$.

Cuando se cumple (2.12) para toda $f \in L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$ (resp. $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$), se dice abreviadamente que $\mathcal{B}$ *diferencia* $L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$ (resp. $L^1(\mathbb{T}^\omega)$). Como $\mathbb{T}^\omega$ es un espacio de medida finita, se verifica $L^\infty(\mathbb{T}^\omega) \subset L^1(\mathbb{T}^\omega)$ y por tanto, si la base $\mathcal{B}$ *no* diferencia $L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$, entonces tampoco diferencia $L^1(\mathbb{T}^\omega)$.

2.17 Definición. [54, p. 104] Dada una base $\mathcal{B}$ que cubre $\mathbb{T}^\omega$, para cada $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ se puede definir su *función maximal relativa a* $\mathcal{B}$, $M^{\mathcal{B}} f \colon \mathbb{T}^\omega \to [0, \infty]$, mediante

$$M^{\mathcal{B}} f(x) = \sup_{x\in B\in\mathcal{B}} |f|_B.$$

Cuando ocurre que la función $M^{\mathcal{B}} f$ es medible para toda $f \in L^1(m)$, por ejemplo para una base de Buseman-Feller[6], el operador $M^{\mathcal{B}} \colon L^1(m) \to L^0(m)$ es el *operador maximal asociado a* $\mathcal{B}$.

Miguel de Guzmán y Grant V. Welland establecieron el siguiente resultado[7] para bases en $\mathbb{R}^n$. Su demostración sirve exactamente igual para el caso de bases de Buseman-Feller en $\mathbb{T}^\omega$.

[4] Entendemos que para cada $y \in \mathbb{T}^\omega$, $\mathcal{R}_0(y)$ es la familia de conjuntos de $\mathcal{R}_0$ que contienen, o cuya clausura contiene, al punto y.

[5] Sin perder generalidad suponemos aquí que f es una función real.

[6] Sea $\lambda > 0$ fijo y $x \in E_\lambda := \{x \colon M^{\mathcal{B}} f(x) > \lambda\}$. Existe $B \in \mathcal{B}(x)$ y $t > \lambda$ tales que

$$\int_B |f| > t\, m(B). \tag{2.14}$$

Como por hipótesis B es abierto y $x \in B$, hay un entorno U de x contenido en B. Para todo $y \in U$ se tiene entonces $B \in \mathcal{B}(y)$ y (2.14) implica que $y \in E_\lambda$, luego el conjunto E_λ es abierto.

[7] De hecho, demuestran la doble implicación.

2.18 Teorema. [55, Thm. 1.1, (a)⇒(b)] *Sea $\mathcal{B}$ una base de Buseman-Feller. Si el operador maximal $M^{\mathcal{B}}$ es de tipo débil* $(1,1)$*, entonces la base $\mathcal{B}$ diferencia $L^1(\mathbb{T}^\omega)$.*

Y como corolario, ya que $\mathcal{R}_0$ es una base de Buseman-Feller y el operador maximal $M^{\mathcal{R}_0}$ es de tipo débil $(1,1)$ como hemos dicho anteriormente, se tiene:

2.19 Corolario. *La base $\mathcal{R}_0 = \{t + V_m \colon m \in \mathbb{N}, t \in H_m\}$ (base restringida de Rubio de Francia) diferencia $L^1(\mathbb{T}^\omega)$.*

Un poco más adelante damos otra demostración como consecuencia del Teorema 2.26.

JLR sobre diferenciación en grupos localmente compactos. La base $\mathcal{R}$ en $\mathbb{T}^\omega$

2.20 Teorema. [99, Thm. 8, segunda parte] *Con las hipótesis del* Teorema 2.12*, sea $\mathcal{R}$ la familia formada por todos los conjuntos de la forma yV_n con $y \in G$, $n = 1, 2, \ldots$. Si se cumple la condición*

$$\sup_n \frac{m(V_n V_n^{-1} V_n)}{m(V_n)} < \infty, \tag{2.15}$$

entonces el operador maximal $M^{\mathcal{R}}$ definido por

$$M^{\mathcal{R}} f(x) = \sup_{x \in R \in \mathcal{R}} |f|_R$$

es de tipo débil $(1,1)$ *y* (p,p) *fuerte, para* $1 < p \leq \infty$.

Como consecuencia inmediata JLR da el siguiente resultado donde establece una condición suficiente para que la base $\mathcal{R}$ de su teorema (señalemos que su noción original de contracción de una sucesión $(S_n) \subset \mathcal{R}$ a un punto involucra la condición $m(S_n) \to 0$) diferencie $L^1_{\text{loc}}(G)$.

2.21 Corolario. [99, Corol. 5] *Supongamos, en adición a las hipótesis del* Teorema 2.20*, que se tiene $V_n \subset U_n$ para todo n, donde $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de entornos de e. Entonces,*

$$\lim_{\substack{x \in R \in \mathcal{R} \\ m(R) \to 0}} \frac{1}{m(R)} \int_R f \, dm = f(x) \quad (a.e.)$$

para toda función $f \in L^1_{loc}(G)$.

En el caso nuestro, en que G es el grupo compacto abeliano $\mathbb{T}^\omega$, y $\mathcal{R}$ es la base de Rubio de Francia, la condición (2.15) no se cumple, ya que, por ejemplo, para $n \geq 1$,

$$V_{n^2} = \Big(0, \frac{1}{2^n}\Big)^n \times \mathbb{T}^{n,\omega}$$

y

$$V_{n^2} - V_{n^2} + V_{n^2} = \left(\Big[0, \frac{1}{2^{n-1}}\Big) \cup \Big(\frac{2^n - 1}{2^n}, 1\Big)\right)^n \times \mathbb{T}^{n,\omega},$$

así que

$$\frac{m(V_{n^2} - V_{n^2} + V_{n^2})}{m(V_{n^2})} = \frac{(3/2^n)^n}{(1/2^n)^n} = 3^n$$

y, por consiguiente,

$$\sup_n \frac{m(V_n - V_n + V_n)}{m(V_n)} = \infty.$$

De modo que no se puede asegurar (en principio) ni el resultado del Teorema 2.20 ni el de su Corolario 2.21 para la base $\mathcal{R}$ de Rubio de Francia en $\mathbb{T}^\omega$. La condición suficiente adicional de este corolario sí se cumple, porque por ejemplo, la familia $\{V_n - V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos (simétricos) de 0 en $\mathbb{T}^\omega$.

Sobre la base $\mathcal{R}$ de Rubio de Francia en $\mathbb{T}^\omega$ quedan aquí abiertas las siguientes cuestiones:

- ¿Se cumple la implicación "$\mathcal{R}$ diferencia $L^1(\mathbb{T}^\omega) \Rightarrow M^{\mathcal{R}}$ es de tipo débil (1,1)" (como en el teorema de M. de Guzmán y G. Welland en $\mathbb{R}^n$ cuando la BD es invariante por homotecias)?
- ¿Es[8] de tipo débil (1,1) el operador maximal $M^{\mathcal{R}}$?
- ¿Diferencia $L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$ la base $\mathcal{R}$?

Haciendo una adaptación de la prueba de Jessen para la base $\mathcal{J}$, probaremos un poco más adelante (subsección 2.2.4) que una cierta base $\mathcal{R}^*$, ligeramente más amplia que la base $\mathcal{R}$, no diferencia $L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$.

El contexto del teorema y corolario anteriores puede encontrarse, tal vez, en el artículo [42]. En la segunda sección de este trabajo, Edwards y Hewitt establecen varios conceptos[9] entre los que vamos a destacar aquí el siguiente:

2.22 Definición. [42, Def. (2.1)] Dado un grupo localmente compacto G con medida de Haar por la izquierda λ, se denomina *D'-sucesión en G* a toda sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de G de Borel y de medida finita que verifican:

(i) $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots$;

(ii) Existe un número real positivo C tal que $0 < \lambda(U_n \cdot U_n^{-1}) < C\lambda(U_n)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(iii) Todo entorno de e en G contiene alguno de los U_n.

La condición (2.15) de JLR está en la onda de la (ii) de la Definición 2.22, mientras que la condición adicional del Corolario 2.21 es la (iii).

Esta definición[10] les sirve a los autores para adaptar, en los grupos localmente compactos que admiten D'-sucesiones, los resultados estándar (ver, p. ej., [104, Th. 7.10 y 7.13]) sobre diferenciación, respectivamente, de medidas absolutamente continuas y de medidas singulares respecto de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), probando los siguientes resultados. Usando la terminología de bases de diferenciación, la familia de conjuntos formada por una D'-sucesión y sus trasladadas por los elementos del grupo G es una BD que diferencia $L^1(G)$.

2.23 Teorema. ([42, Thm. (2.5)]; lo mismo en [63, II, (44.18)].) *Sea $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una D'-sucesión en G. Entonces la igualdad*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda(U_k)} \int_{xU_k} f \, d\lambda = f(x)$$

se verifica localmente a.e. para toda $f \in L^1_{loc}(G)$ y a.e. para toda $f \in L^1(G)$.

[8] Debemos esta pregunta a Sheldy J. Ombrosi (Conicet, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina). Recientemente, en junio de 2019, Dariusz Kósz (estudiante pre-doctoral, Politechnika Wrocławska) nos ha mostrado en una comunicación personal que la respuesta es negativa, mediante una ingeniosa construcción.

[9] Se encuentran también en [63, II, (44.10)]; el artículo [42] apareció poco después de la primera edición del volumen I de la obra conjunta de Hewitt y Ross, pero siete años antes que el volumen II de dicha obra, cuya sección §44 es, según indican sus autores, un desarrollo, con correcciones menores, de [42].

[10] Edwards y Gaudry refinan posteriormente el concepto de D'-sucesiones y definen [41, Ch. 2] las *covering families* en un grupo G abeliano y localmente compacto.

2.24 Teorema. ([42, Thm. (2.6)]; [63, II, (44.19)].) *Sea σ una medida compleja en G que es singular con respecto a λ, es decir, existe un conjunto N tal que $\lambda(N) = 0$ y $|\sigma|(G \setminus N) = 0$. Sea $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una D'-sucesión en G. Entonces se tiene*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sigma(xU_k)}{\lambda(U_k)} = 0 \quad \text{a.e. } x \in G.$$

Un poco más adelante, los autores reportan ([42, p. 194]; hemos adaptado las referencias):

> La clase de los grupos localmente compactos que admiten D'-sucesiones no ha sido adecuadamente identificada. El referee nos ha señalado amablemente que un toro infinito-dimensional $\mathbb{T}^{\mathfrak{m}}$ no admite tales sucesiones. Esto se sigue fácilmente del teorema de Minkowski (ver p. ej. [56, p. 187]). La posibilidad de teoremas de diferenciación como 2.23 y 2.24 en $\mathbb{T}^{\mathfrak{m}}$, sin embargo, permanece abierta hasta donde nosotros sabemos. . . .

En el contexto de esta cita $\mathfrak{m}$ designa cualquier cardinal infinito. El teorema de Minkowski (o de Brunn-Minkowski [63, II, p. 679]), al que se hace referencia establece que, en $\mathbb{R}^k$ ($k \in \mathbb{N}$), si A y B son dos conjuntos compactos no vacíos y $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue, se verifica la desigualdad $|A+B| \geq \big(|A|^{1/k}+|B|^{1/k}\big)^k$, siendo $A+B = \{a+b\colon a \in A,\ b \in B\}$. Si $|A|\cdot|B| > 0$, la igualdad se verifica si y solo si los conjuntos A y B son convexos y homotéticos (o congruentes por una traslación). En el caso del toro k-dimensional $\mathbb{T}^k$ la desigualdad, de acuerdo con [23, Ch. 2, 8.4.2], toma la forma

$$|A + B| \geq \min\big\{1, \big(|A|^{1/k} + |B|^{1/k}\big)^k\big\} \tag{2.16}$$

con la suma definida módulo 1 en cada componente.

Si (U_n) fuera una D'-sucesión en $\mathbb{T}^\omega$, podemos suponer sin perder generalidad que se tiene $U_n = \widetilde{U}_n \times \mathbb{T}^{\omega,j_n}$ donde $\widetilde{U}_n$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{T}^{j_n}$ que verifica $\widetilde{U}_n \subset B_n$, siendo $B_n := [0, 1/4]^{j_n}$ y, además, que $j_n < j_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero en el grupo $\mathbb{T}^{j_n}$ se tiene

$$B_n - B_n = \big([0, 1/4] \cup [3/4, 1)\big)^{j_n},$$

$|B_n| = 1/4^{j_n}$, y entonces según (2.16),

$$|\widetilde{U}_n - \widetilde{U}_n| \geq 2^{j_n}|\widetilde{U}_n|, \tag{2.17}$$

ya que $2^{j_n}|\widetilde{U}_n| \leq 2^{j_n}/4^{j_n} < 1$. Pero (2.17) está en contradicción con la condición (ii) de la Definición 2.22.

Más sobre las bases $\mathcal{R}_0$ y $\mathcal{J}$

2.25 Definiciones. ([105, p. 153], [89, VII.43].) Sea $\{\mathcal{M}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de redes en $\mathbb{T}^\omega$, y $\mathcal{M} := \bigcup_n \mathcal{M}_n$. Para cada $y \in \mathbb{T}^\omega$ y cada k, sea $I_y^{(k)}$ (recordar la Definición 2.13) el único elemento de $\mathcal{M}_k$ que contiene a y. Se dice que la sucesión de redes es *indefinidamente fina* si para todo $x \in \mathbb{T}^\omega$ todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\delta\big(I_x^{(n_0)}\big) < \varepsilon$. Entonces $I_x^{(n)} \Rightarrow x$ y $\mathcal{M}$ es una BD.

Cuando la sucesión de redes es monótona e indefinidamente fina, se cumple que para todo $\varepsilon > 0$ y todo conjunto medible E existe una sucesión $\{I_n\}$ de conjuntos de $\mathcal{M}$ disjuntos dos tal que

$$m\Big(E \setminus \bigcup_n I_n\Big) = 0 \quad \text{y} \quad m\Big(\bigcup_n I_n \setminus E\Big) \leq \varepsilon$$

(*propiedad fuerte de Vitali*), que es una condición suficiente [95, Núm. 14] para que una base diferencie L^1, obteniéndose así el siguiente resultado:

2.26 Teorema. ([89, 43.7], v. también [105, 15.7], [69, §9].) *Si $\{\mathcal{M}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de redes monótona e indefinidamente fina, entonces la base $\mathcal{M}$ diferencia $L^1(\mathbb{T}^\omega)$.*

Por ejemplo, la base $\mathcal{R}_0$ es la unión, para $m \in \mathbb{N}$, de la sucesión monótona de redes $\{\mathcal{N}_m\}$ donde $\mathcal{N}_m = \{t + V_m : t \in H_m\}$. Esta sucesión es indefinidamente fina, ya que si $I \in \mathcal{N}_m$ y $(n-1)^2 < m \leq n^2$ $(n \geq 2)$, es sencillo ver que

$$\delta(I) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^{n-1+j}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{7}{2^{n+1}}.$$

Entonces, de acuerdo con el Teorema 2.26, la base $\mathcal{R}_0$ diferencia $L^1(\mathbb{T}^\omega)$, y acabamos de ver con esto una segunda demostración del Corolario 2.19.

Al final de [99] JLR señalaba, en el contexto de un grupo localmente compacto G, que si $\mathcal{R}$ se define como consistente solamente de los conjuntos tV_n $(t \in H_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces la conclusión del Teorema 2.20 es válida sin las hipótesis (2.5) y (2.15).

Toda subfamilia de una BD que diferencia L^1 y que es a su vez una BD, también diferencia L^1 [95, p. 405]. En particular, la subfamilia de intervalos cúbicos de la base $\mathcal{R}_0$ que ya consideró Saks [105, p. 158] (v. [21, p. 28])

$$\mathcal{S} := \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{S}_m \quad \text{donde} \quad \mathcal{S}_m := \{t + V_{m^2} : t \in H_{m^2}\},$$

diferencia también $L^1(\mathbb{T}^\omega)$.

La cuestión (planteada por Zygmund, v. [70, p. 55]) de la diferenciación de integrales en $L^1(\mathbb{T}^\omega)$ relativa a la base $\mathcal{J}$ formada por todos los *intervalos* fue respondida negativamente hacia 1950 por Jessen [70], [71]. No deja de ser un fenómeno curioso, ya que la base formada por los *intervalos* (es decir, los paralelepípedos de aristas paralelas a los ejes coordenados) de $\mathbb{T}^n$ diferencia $L^1(\mathbb{T}^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ([24, §2.A][11], [53, p. 74]).

2.2.4. Un resultado negativo de diferenciación en $\mathbb{T}^\omega$: la base $\mathcal{R}^*$

Como ya hemos adelantado anteriormente, la construcción ideada por Jessen [71] nos va a permitir proporcionar un contraejemplo que demuestra que una cierta extensión $\mathcal{R}^*$ de la base $\mathcal{R}$ de Rubio de Francia no diferencia $L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$. Comenzamos con unas cuestiones de nomenclatura y notación para representar abreviadamente ciertos intervalos diádicos de $\mathbb{T}^\omega$.

2.27 Definiciones. Para $m, q \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, y $q \leq m$, escribimos $\widetilde{\square}_{m,q} := \left(0, \frac{1}{2^m}\right)^q$ y

$$\square_{m,q} := \widetilde{\square}_{m,q} \times \mathbb{T}^{q,\omega}.$$

Llamamos a $\square_{m,q}$ el *(m,q)-cubo.* V.g., $V_{m^2} = \square_{m,m} = \widetilde{\square}_{m,q} \times \left(0, \frac{1}{2^m}\right)^{m-q} \times \mathbb{T}^{m,\omega}$, para todo $m \geq q$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$ consideremos la traslación τ_j^m que suma $\frac{1}{2^m}$ a la coordenada x_j. Definimos los conjuntos (los denominamos las *capas* de los correspondientes cubos)

$$S(\square_{m,q}) := \square_{m,q} \cup \left(\cup_{j=1}^{q} \tau_j^m(\square_{m,q})\right)$$

y, para $y \in \mathbb{T}^\omega$, $S(y + \square_{m,q}) = y + S(\square_{m,q})$.

[11] Como un pequeño homenaje personal a Miguel de Guzmán y a su libro [53] presentamos en el Anexo 4 final una versión castellana completa de esta referencia.

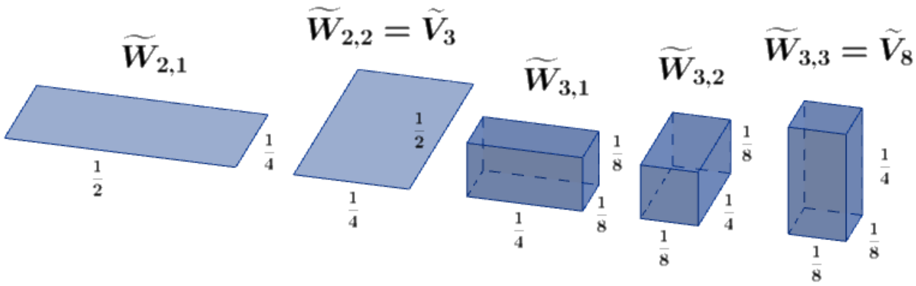


Figura 2.5: Los primeros miembros de la familia $\widetilde{W}_{m,r}$.

Por otra parte, escribamos $W_{m,r} := \square_{m,m} \cup \tau_r^m(\square_{m,m})$ $(1 \leq r \leq m)$. Llamamos a $W_{m,r}$ un *doble* (m,m)*-cubo*. Tenemos $W_{m,r} = \widetilde{W}_{m,r} \times \mathbb{T}^{m,\omega}$, donde

$$\widetilde{W}_{m,r} := \prod_{j=1}^{m} (1+\delta_{rj}) \cdot \left(0, \tfrac{1}{2^m}\right) \qquad \text{(delta de Kronecker).}$$

V.g., $W_{m,m} = V_{m^2-1}$, pero $W_{m,j} \notin \mathcal{R}$ cuando $1 \leq j \leq m-1$ (v. Figura 2.5).

Denominamos *base extendida de Rubio de Francia* a la colección de conjuntos

$$\mathcal{R}^* := \mathcal{R} \cup \{y + W_{m,r} \colon y \in \mathbb{T}^\omega,\ m \in \mathbb{N},\ m \geq 2,\ 1 \leq r \leq m\}. \tag{2.18}$$

2.28 Lema. Sea $Q \in \{y + \square_{m,q} \colon y \in \mathbb{T}^\omega\}$. Para cada punto $x \in S(Q)$ hay un intervalo $I_x \in \mathcal{R}^*$ tal que

$$\frac{m(I_x \cap Q)}{m(I_x)} \geq \frac{1}{2}.$$

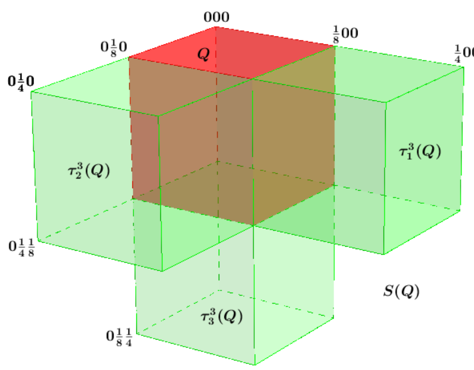


Figura 2.6: La *capa* del cubo $Q = \square_{3,3}$.

Demostración. Consideremos primero el caso en que $y = \bar{0}$, $Q = \square_{m,q}$. Entonces, si $x \in Q$, podemos tomar el intervalo $I_x^0 = \widetilde{\square}_{m,q} \times \left(0, \frac{1}{2^m}\right)^{m-q} \times \mathbb{T}^{m,\omega} = V_{m^2} \in \mathcal{R}$. Tenemos que $I_x^0 \subset Q$, y

$$\frac{m(I_x^0 \cap Q)}{m(I_x^0)} = 1.$$

En otro caso, si $x \in \tau_r(Q)$ para un cierto r, $1 \le r \le q$, definamos (δ_{rj} de Kronecker)

$$D^q_{m,r} := \prod_{j=1}^{q} (1+\delta_{rj}) \cdot \big(0, \tfrac{1}{2^m}\big) \subset \mathbb{T}^q.$$

Entonces, podemos tomar el intervalo $I^0_x = D^q_{m,r} \times \big(0, \frac{1}{2^m}\big)^{m-q} \times \mathbb{T}^{m,\omega}$. Se tiene $I^{(0)}_x = W_{m,r} \in \mathcal{R}^*$, $I^0_x \cap Q = \widetilde{\square}_{m,q} \times \big(0, \frac{1}{2^m}\big)^{m-q} \times \mathbb{T}^{m,\omega} = \square_{m,m}$, y

$$\frac{m(I^0_x \cap Q)}{m(I^0_x)} = \frac{m(\square_{m,m})}{m(W_{m,r})} = \frac{1}{2}.$$

En un caso general con $y \neq \overline{0}$, podemos tomar el intervalo $I_x = y + I^0_x$, lo que prueba el lema. $\square$

2.29 Lema. Sea $n \ge 2$ un entero fijo. Existe en $\mathbb{T}^\omega$ una familia numerable de intervalos cúbicos abiertos disjuntos dos a dos $\{Q^{(n)}_\alpha\}_{\alpha \in A_n}$, $Q^{(n)}_\alpha = y(\alpha) + \square_{m(\alpha),n}$ ($y(\alpha) \in \mathbb{T}^\omega$, $m(\alpha) \ge n$), con los conjuntos $S(Q^{(n)}_\alpha)$ también disjuntos dos a dos, y además:

(1) Siendo $C_n := \bigcup_{\alpha \in A_n} Q^{(n)}_\alpha$ y $N_n := \mathbb{T}^\omega \setminus \Big(\bigcup_{\alpha \in A_n} S(Q^{(n)}_\alpha)\Big)$, se tiene $m(C_n) = \frac{1}{n+1}$ y $m(N_n) = 0$.

(2) Para todo punto $x \notin N_n$ existe un intervalo $I^n_x \in \mathcal{R}^*$ (cuyas n primeras aristas son $\le 1/2^{n-1}$; de hecho, I^n_x es un trasladado, o bien de un cubo V_{n^2}, o bien de un doble cubo $W_{n^2-1,r}$), tal que

$$\frac{m(I^n_x \cap C_n)}{m(I^{(n)}_x)} \ge \frac{1}{2}.$$

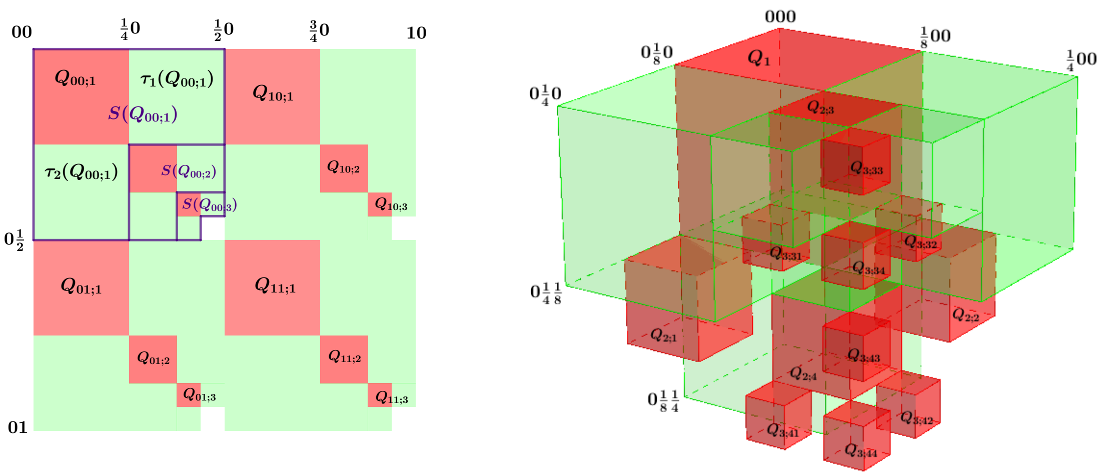


Figura 2.7: Construcción del Lema 2.29, $n = 2$ y 3.

Demostración. (Con la notación $\boldsymbol{t_1 \ldots, t_n \overline{0}}$ indicamos en lo que sigue el punto $\big(t_1, \ldots, t_n, 0^{(n)}\big) \in \mathbb{T}^\omega$.) En general, para cada $n \ge 2$, consideramos la división of $\mathbb{T}^\omega$ en $2^{n(n-1)}$ intervalos cúbicos abiertos (los llamaremos 0-*celdas*) de arista $1/2^{n-1}$ por los $n2^{n-1}$ "hiperplanos"

$$x_i = \frac{j}{2^{n-1}} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1).$$

Las 0-celdas tienen la forma

$$I^{(n)}_{i_1\dots i_n} = \tfrac{\boldsymbol{i_1}}{\boldsymbol{2^{n-1}}} \cdots \tfrac{\boldsymbol{i_n}}{\boldsymbol{2^{n-1}}}\overline{\mathbf{0}} + \big(0, \frac{1}{2^{n-1}}\big)^n \times \mathbb{T}^{n,\omega},$$

donde $(i_1,\dots,i_n) \in \{0,1,\dots,2^{n-1}-1\}^n$.

En cada una de ellas llevaremos a cabo la misma subdivisión sucesiva que vamos a explicar para la 0-celda $I^{(n)}_{0\dots0}$. Primero se subdivide en 2^n intervalos cúbicos de arista $1/2^n$ (1-*celdas*). Las 1-celdas tienen la forma

$$\tfrac{\boldsymbol{j_1}}{\boldsymbol{2^n}} \cdots \tfrac{\boldsymbol{j_n}}{\boldsymbol{2^n}}\overline{\mathbf{0}} + \square_{n,n},$$

donde $(j_1,\dots,j_n) \in \{0,1\}^n$. De las 1-celdas, a $\mathbf{0\dots0}\overline{\mathbf{0}} + \square_{n,n}$ la denominamos 1-*celda principal*, y la denotamos por $Q^{(n)}_{0\dots0;1}$ (abreviadamente, por $Q^{(n)}_1$). La capa de $Q^{(n)}_1$ es

$$S(Q^{(n)}_1) = Q^{(n)}_1 \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{n}\Big(\tfrac{\boldsymbol{\delta_{1j}}}{\boldsymbol{2^n}} \cdots \tfrac{\boldsymbol{\delta_{nj}}}{\boldsymbol{2^n}}\overline{\mathbf{0}} + Q^{(n)}_1\Big)\Big) \quad \text{donde } \delta_{ij} \text{ son deltas de Kronecker,}$$

y tenemos que $m(S(Q^{(n)}_1)) = (n+1)\cdot m(Q^{(n)}_1)$.

En la 0-celda $I^{(n)}_{0\dots0}$, además de las $(n+1)$ 1-celdas que forman la capa $S(Q^{(n)}_1)$, quedan otras $2^n-(n+1)$ 1-celdas. En cada uno de estas se lleva a cabo una subdivisión en 2^n cubos de arista $1/2^{n+1}$ (2-*celdas*), una de los cuales es la 2-celda principal (una en cada una, de modo que en total hay $2^n-(n+1)$ 2-celdas principales por cada 1-celda principal) $Q^{(n)}_{2;\beta} = \boldsymbol{y_\beta} + \square_{n+1,n}$, con un adecuado $\boldsymbol{y_\beta} \in \mathbb{T}^\omega$. Ahora prescindamos de las capas de todas las 2-celdas principales, y en las restantes 2-celdas procedamos inductivamente.

La familia numerable de cubos $\{Q^{(n)}_\alpha\}_{\alpha\in A_n}$ del enunciado del lema es la que forman todas las k-celdas principales ($k \geq 1$) de esta construcción. Podemos definirla explícitamente, como sigue. Primero, para $n=2$, consideramos el conjunto indicial

$$A_2 := \Big\{(i,j;m)\colon (i,j)\in\{0,1\}^n;\ m\in\mathbb{N}\Big\},$$

y definimos (v. Figura 2.7, donde hemos evitado escribir los superíndices por todo)

$$\begin{aligned}
Q^{(2)}_{00;1} &:= (0,\tfrac{1}{2^2})\times(0,\tfrac{1}{2^2})\times\mathbb{T}^{2,\omega} = \square_{2,2} = V_4,\\
Q^{(2)}_{00;m} &:= \boldsymbol{y_m} + \square_{m+1,2} \quad \text{si } m\geq 2, \text{ donde } \boldsymbol{y_m} = \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^2}}\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^2}}\overline{\mathbf{0}} + \ldots + \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^m}}\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^m}}\overline{\mathbf{0}},\\
Q^{(2)}_{ij;m} &:= \tfrac{\boldsymbol{i}}{\mathbf{2}}\tfrac{\boldsymbol{j}}{\mathbf{2}}\overline{\mathbf{0}} + Q_{00;m} \quad \text{para } (i,j)\in\{0,1\}^2\setminus\{(0,0)\} \text{ and } m\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Para $n\geq 3$, consideramos el conjunto indicial

$$\begin{aligned}
A_n :=& \Big\{(i_1,\dots,i_n;1)\colon (i_1,\dots,i_n)\in\{0,1,\dots,2^{n-1}-1\}^n\Big\}\\
&\cup\Big\{(i_1,\dots,i_n;m;j_1,\dots,j_{m-1})\colon (i_1,\dots,i_n)\in\{0,1,\dots,2^{n-1}-1\}^n;\\
&\qquad m\in\mathbb{N};\ m\geq 2;\ (j_1,\dots,j_{m-1})\in\{1,2,\dots,2^n-(n+1)\}^{m-1}\Big\},
\end{aligned}$$

y definimos

$$Q^{(n)}_{i_1\dots i_n;\nu} := \tfrac{\boldsymbol{i_1}}{\boldsymbol{2^{n-1}}} \cdots \tfrac{\boldsymbol{i_n}}{\boldsymbol{2^{n-1}}}\overline{\mathbf{0}} + Q^{(n)}_{0\dots0;\nu}$$

para $(i_1,\dots,i_n)\in\{0,1,\dots,2^{n-1}-1\}^n\setminus\{(0,\dots,0)\}$ y todo índice ν, donde

$$Q^{(n)}_{0\dots0;1} := \square_{n,n}$$

y, para $m > 1$,

$$Q^{(n)}_{0\ldots 0;m;j_1\ldots j_{m-1}} := \boldsymbol{y_{j_1\ldots j_{m-1}}} + \square_{n+m-1,n},$$

donde

$$\boldsymbol{y_{j_1\ldots j_{m-1}}} = \tfrac{1}{2^n}\boldsymbol{\gamma_{j_1}} + \cdots + \tfrac{1}{2^{n+m-2}}\boldsymbol{\gamma_{j_{m-1}}},$$

siendo $\boldsymbol{\gamma_r}$ $(r = 1, \ldots, 2^n - (n+1))$ los elementos del conjunto

$$\Gamma = \big\{\varepsilon_1\boldsymbol{\overline{e}_1} + \cdots + \varepsilon_n\boldsymbol{\overline{e}_n} \colon (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n\big\} \setminus \{\boldsymbol{\overline{0}}, \boldsymbol{\overline{e}_1}, \ldots, \boldsymbol{\overline{e}_n}\},$$
$$\boldsymbol{\overline{e}_j} = (\delta_{ij})_{i=1}^\infty \quad (j = 1, \ldots, n;\ \delta_{ij} \text{ de Kronecker})$$

en un cierto orden prefijado. Por ejemplo (v. Figura 2.7 para $n = 3$), podemos adoptar en Γ el orden inducido por el orden lexicográfico en $\{0,1\}^n$.

A partir de la construcción inductiva es inmediato que

$$Q^{(n)}_\alpha \cap Q^{(n)}_\beta = \emptyset \quad \text{y} \quad S(Q^{(n)}_\alpha) \cap S(Q^{(n)}_\beta) = \emptyset \quad \text{para todo } \alpha \neq \beta\ (n \in \mathbb{N};\ \alpha, \beta \in A_n).$$

(1) Sea ahora $C_n := \bigcup_{\alpha\in A_n} Q^{(n)}_\alpha$. Entonces,

$$m(C_n) = \sum_{\alpha\in A_n} m(Q^{(n)}_\alpha) = \frac{2^{n(n-1)}}{2^{n^2}} \sum_{k=0}^\infty \Big(\frac{2^n - (n+1)}{2^n}\Big)^k = \frac{1}{n+1},$$

y

$$m\Big(\bigcup_{\alpha\in A_n} S(Q^{(n)}_\alpha)\Big) = \sum_{\alpha\in A_n} m(S(Q^{(n)}_\alpha)) = (n+1)\sum_{\alpha\in A_n} m(Q^{(n)}_\alpha) = (n+1)m(C_n) = 1,$$

luego denotando $N_n = \mathbb{T}^\omega \setminus \Big(\bigcup_{\alpha\in A_n} S(Q^{(n)}_\alpha)\Big)$, es $m(N_n) = 0$.

(2) Sea $x \notin N_n$. Entonces, existe $\alpha_0 \in A_n$ tal que $x \in S(Q^{(n)}_{\alpha_0})$. Aplicando el Lema 2.28, existe un intervalo $I_x \in \mathcal{R}^*$ (de hecho, un cubo de arista no mayor que $1/2^n$, o un doble cubo) tal que

$$\frac{m(I_x \cap Q^{(n)}_{\alpha_0})}{m(I_x)} \geq \frac{1}{2}$$

y, como $I_x \cap Q^{(n)}_{\alpha_0} = I_x \cap C_n$ (ya que los $Q^{(n)}_\alpha$ son disjuntos dos a dos), tal que

$$\frac{m(I_x \cap C_n)}{m(I_x)} \geq \frac{1}{2},$$

como se requería. $\square$

2.30 Teorema. *La base extendida de Rubio de Francia $\mathcal{R}^*$ no diferencia $L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$.*

Demostración. (Esta argumentación está tomada de Jessen [71].)

Elijamos una sucesión creciente $(n_p)_{p=1}^\infty$ de enteros positivos $(n_1 \geq 2)$ tal que $\sum_p 1/(n_p + 1)$ sea una serie convergente con suma menor o igual que $3/4$, por ejemplo. Entonces la unión $C := \bigcup_{p=1}^\infty C_{n_p}$ es un conjunto medible cuya medida cumple $0 < \frac{1}{n_1+1} \leq m(C) \leq 3/4$, y la unión $N := \bigcup_{p=1}^\infty N_{n_p}$ es un conjunto medible de medida nula, ya que para cada p el conjunto N_{n_p} es medible y $m(N_{n_p}) = 0$.

Si $x \notin N$, entonces $x \in \bigcup_\alpha S(Q^{(n_p)}_\alpha)$ para todo p, luego existe una sucesión de índices $(\alpha_p)_{p=1}^\infty$ tal que $x \in S(Q^{(n_p)}_{\alpha_p})$ para cada p. Entonces, aplicando el Lema 2.29(2), para cada p existe un intervalo $I_x^{(p)}$ de $\mathcal{R}^*$ tal que $\delta(I_x^{(p)}) \leq \delta(W_{n_p,1}) < 3/2^{n_p}$ (por consiguiente estos intervalos $I_x^{(p)}$ forman una sucesión de $\mathcal{R}^*$ que se contrae al punto x), y

$$\frac{m(C \cap I_x^{(p)})}{m(I_x^{(p)})} \geq \frac{1}{2}.$$

Consideremos la función característica del conjunto C, χ_C. Para todo $x \in \mathbb{T}^\omega \setminus N$ (es decir, en casi todo punto de $\mathbb{T}^\omega$), tenemos

$$\limsup_{p\to\infty} \frac{1}{m(I_x^{(p)})} \int_{I_x^{(p)}} \chi_C(y)\, dy = \limsup_{p\to\infty} \frac{m(C \cap I_x^{(p)})}{m(I_x^{(p)})} \geq \frac{1}{2},$$

lo que implica inmediatamente que $\overline{D}\big(\int \chi_C, x\big) \geq \frac{1}{2}$ en casi todo punto de $\mathbb{T}^\omega$. Pero $\chi_C(x) = 0 < \frac{1}{2}$ para todo $x \in C^c$, un conjunto de medida $\geq 1/4$. Se sigue que la base $\mathcal{R}^*$ no diferencia $\int \chi_C$. $\square$

2.31 Notas.

(1) La demostración del Teorema 2.30 de hecho prueba que la subfamilia extraída de $\mathcal{R}^*$ que está formada por los cubos $\{y + V_{m^2} : y \in \mathbb{T}^\omega,\ m \geq 2\}$ y los dobles cubos $\{y + W_{m,r} : y \in \mathbb{T}^\omega,\ m \geq 2,\ 1 \leq r \leq m\}$ (esta subfamilia no está contenida en la base $\mathcal{R}$ de Rubio de Francia) no diferencia $L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$.

(2) La cuestión interesante[12] de si la base de diferenciación formada sólo por los cubos $\{y + V_{m^2} : y \in \mathbb{T}^\omega,\ m \geq 2\}$ diferencia $L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$ (con nuestra noción de contracción de una sucesión de conjuntos a un punto) está abierta para nosotros de momento.

(3) Como señala Andrew Bruckner [21, p. 28], Jean Dieudonné [34] también prueba que la base de intervalos en $\mathbb{T}^\omega$ (de hecho, la subfamilia de los intervalos cúbicos en $[0,1]^\omega$), no diferencia L^∞. Trabaja con el concepto particular de contracción a un punto para sucesiones generalizadas $\{S_\alpha\}_{\alpha\in D} \subset \mathcal{B}(y)$ en el sentido de Moore-Smith, siendo D un conjunto *dirigido* [74, p. 81-86], que exponemos a continuación.

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Para cada $J \in \mathcal{F}$ consideremos la identificación

$$\mathbb{T}^\omega = \mathbb{T}^J \times \mathbb{T}^{J,\omega}$$

de modo que, si $x \in \mathbb{T}^\omega$, $x = (x_J, x_{J'})$ con $x_J \in \mathbb{T}^J$ y $x_{J'} \in \mathbb{T}^{J,\omega}$. Dieudonné considera la base de diferenciación $\mathcal{D} = \bigcup_{x\in\mathbb{T}^\omega} \mathcal{D}(x)$ donde $\mathcal{D}(x)$ es la red (según el conjunto $\mathbb{N} \times \mathcal{F}$ dirigido por la relación de orden $(n_1, J_1) \leq (n_2, J_2)$ si y solo si $n_1 \leq n_2$ y $J_1 \subseteq J_2$) formada por los intervalos cúbicos

$$V_{n,J}(x) = \widetilde{V}_{n,J}(x_J) \times \mathbb{T}^{J,\omega}, \quad (n \in \mathbb{N};\ J \in \mathcal{F}), \tag{2.19}$$

donde $\widetilde{V}_{n,J}(x_J) \subset \mathbb{T}^J$ el cubo de centro x_J y lado $1/n$.

Dieudonné define un cierto conjunto medible para cuya función característica f, las medias $f_{V_{n,J}(x)}$ no pueden converger a.e. to $f(x)$ según el conjunto dirigido $\mathbb{N} \times \mathcal{F}$.

[12]Cuya autoría es de Yannis Parissis (Ikerbasque-Univ. del País Vasco UPV/EHU, Bilbao).

2.3. Un complemento: $(\mathbb{T}^{\omega}, m, d)$ no es de tipo homogéneo

Nos planteamos responder la siguiente pregunta:

> —¿Es el toro infinito $\mathbb{T}^{\omega}$ con la medida de Haar y alguna métrica, tal vez con la de Saks, un espacio de tipo homogéneo en el sentido de M. Christ [30]?

2.32 Definiciones. ([30, p. 88]) Una *cuasimétrica* ρ en un conjunto X es una función $\rho\colon X \times X \mapsto [0, \infty]$ que satisface

(i) $\rho(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ para todo x, y.

(iii) $\rho(x, y) \leq C_0(\rho(x, z) + \rho(z, y))$ para todo x, y, z

para alguna constante $C_0 < \infty$. Toda cuasimétrica define una topología para la cual las bolas

$$B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$$

(no necesariamente abiertas cuando $C_0 > 1$) forman una base.

Un *espacio de tipo homogéneo* (X, ρ, μ) (v. [53, p. 17]) es un conjunto X junto con una cuasimétrica ρ y una medida positiva μ en X tal que $\mu(B(x, r)) < \infty$ para todo $x \in X$, $r > 0$, y tal que existe $C < \infty$ tal que para todo $x \in X$ y $r > 0$ se cumple

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r)). \tag{2.20}$$

Se supone que μ está definida en una σ-álgebra que contiene a todos los conjuntos de Borel y a todas las bolas $B(x, r)$.

Nosotros estamos considerando el grupo compacto $\mathbb{T}^{\omega} = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{T}_k$, $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$ para todo k. La medida de Haar en $\mathbb{T}^{\omega}$ es $m = \otimes_{k=1}^{\infty} \mu_k$, siendo $\mu_k = |\cdot|$ la medida de Lebesgue en el toro $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx [0, 1)$ para todo k. Tenemos que $m(\mathbb{T}^{\omega}) = 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, un punto $x \in \mathbb{T}^{\omega}$ lo estamos denotando como $x = (x_{(n}, x^{(n})$, donde $x_{(n} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{T}^n$ y $x^{(n} \in \mathbb{T}^{n,\omega} = \prod_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{T}_k$, $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$ para todo k. Si (A_k) es una familia de conjuntos de Borel en $\mathbb{T}$ se verifica, como sabemos,

$$m\Big(\prod_{k=1}^{n} A_k \times \mathbb{T}^{n,\omega}\Big) = \prod_{k=1}^{n} |A_k|.$$

Sean $x, y \in \mathbb{T}^{\omega}$, es decir, $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$, $y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$ y $0 \leq x_k, y_k < 1$ para todo k. Stanisław Saks define en $\mathbb{T}^{\omega}$, como ya hemos dicho anteriormente, la métrica

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}. \tag{2.21}$$

Por ejemplo, si denotamos $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots)$ y $\mathbf{\frac{3}{4}} = \big(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \ldots\big)$, se tiene $d\big(\mathbf{0}, \mathbf{\frac{3}{4}}\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3/4}{2^k} = \frac{3}{4}$.

También podemos considerar en $\mathbb{T}$ la métrica adaptada a la estructura tórica que da Edwards en [40, I, 2.1]:

$$d^{\circ}(x_k, y_k) = \operatorname{ínf}\{|x_k - y_k + n| : n \in \mathbb{Z}\} \quad (x_k, y_k \in \mathbb{T}), \tag{2.22}$$

y definir en $\mathbb{T}^{\omega}$ la métrica, que denominaremos *de Edwards-Saks*,

$$\delta(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^{\circ}(x_k, y_k)}{2^k}. \tag{2.23}$$

Ahora tendríamos $\delta\big(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1/4}{2^k} = \frac{1}{4}$. Las bolas abiertas en la métrica (2.23) de Edwards-Saks tienen la misma forma, independientemente de su centro, cosa que no ocurre con la métrica (2.21). Ambas distancias son acotadas, $d < 1$ y $\delta \leq 1/2$.

De manera natural surge en este contexto la pregunta inicial: ¿Es $\mathbb{T}^\omega$ con la medida m de Haar y la métrica δ de Edwards-Saks un espacio de tipo homogéneo? Nuestra respuesta es negativa[13].

2.33 Proposición. *El espacio* $(\mathbb{T}^\omega, m, \delta)$ *no es de tipo homogéneo.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^N < \varepsilon$. Consideramos la proyección

$$\begin{aligned} \pi_{(N}\colon \mathbb{T}^\omega &\longrightarrow \mathbb{T}^N \\ x &\longmapsto x_{(N} = (x_1, \dots, x_N) \end{aligned}$$

Para $r > 0$, $r \leq \frac{1}{2^{N+2}}$, consideramos la bola $B(\mathbf{0}, r)$ respecto de la métrica (2.23), y sean

$$B_N(0_{(N}, r) := \pi_{(N}(B(\mathbf{0}, r)) \subset \mathbb{T}^N, \quad C_N(\mathbf{0}, r) := B_N(0_{(N}, r) \times \mathbb{T}^{N,\omega} \subset \mathbb{T}^\omega$$

(estamos denotando con $0_{(N}$ el punto $(0, \dots, 0) \in \mathbb{T}^N$). El conjunto $B_N(0_{(N}, r)$ es, de hecho, la bola de centro $0_{(N}$ y radio r respecto de la métrica

$$\delta_N(x_{(N}, y_{(N}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{d^\circ(x_k, y_k)}{2^k}$$

en $\mathbb{T}^N$. Al ser $r \leq \frac{1}{2^{N+1}}$, el conjunto $B_N(0_{(N}, r)$ es *geométricamente congruente* con la bola $\beta_N(0_{(N}, r)$ de centro $0_{(N}$ y radio r respecto de la métrica

$$d_N(x_{(N}, y_{(N}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}$$

en $\mathbb{R}^N$. Con esto queremos decir que la restricción a la bola $\beta_N(0_{(N}, r)$ de la aplicación

$$\begin{aligned} \phi_N\colon \mathbb{R}^N &\longrightarrow [0,1)^N \\ (x_1, \dots, x_N) &\longmapsto \big(x_1 \ (\text{mód } 1), \dots, x_N \ (\text{mód } 1)\big), \end{aligned}$$

en la cual se tiene $\phi_N(\beta_N(0_{(N}, r)) = B_N(0_{(N}, r)$, es inyectiva.

Por ejemplo (Figura 2.8), $\beta_2((0,0), \frac{1}{8})$ y $B_2((0,0), \frac{1}{8})$ son geométricamente congruentes, pero $\beta_2((0,0), r)$ y $B_2((0,0), r)$ no lo son si $r > \frac{1}{8}$. Cuando $r \leq \frac{1}{2^{N+2}}$ también son geométricamente congruentes $B_N(0_{(N}, 2r)$ y $\beta_N(0_{(N}, 2r)$. Si $\beta_N(0_{(N}, s)$ y $B_N(0_{(N}, s)$ son geométricamente congruentes se tiene en particular

$$\mu_N\big(B_N(0_{(N}, s)\big) = \big|\beta_N(0_{(N}, s)\big|. \tag{2.24}$$

Es de sencilla comprobación que la bola $\beta_N(0_{(N}, s)$ es el politopo *cross* [32, p. 121] (es decir, la generalización N-dimensional del rombo bidimensional o del octaedro tridimensional) de vértices

$$(\pm 2s, 0, 0 \dots, 0),\ (0, \pm 2^2 s, 0, \dots, 0),\ \dots,\ (0, 0, 0, \dots, \pm 2^N s).$$

[13] Y la misma respuesta vale si se considera la métrica (2.21) de Saks. Va a servir nuestra misma demostración si se consideran en este otro caso bolas que estén centradas en el punto $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\big)$. Las métricas (2.21) y (2.23) no son equivalentes: la bola de centro $\mathbf{0}$ y radio $1/4$ respecto de la métrica (2.21) no contiene ninguna bola de centro $\mathbf{0}$ y radio positivo respecto de la métrica (2.23).

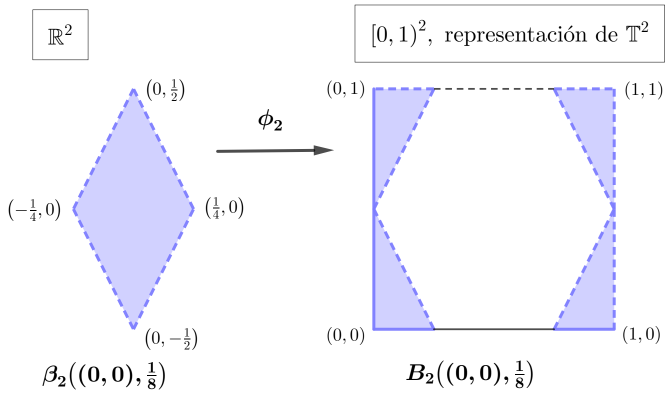


Figura 2.8: Bolas geométricamente congruentes en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{T}^2$.

Su medida de Lebesgue N-dimensional es (v. [32, p. 159])

$$\left|\beta_N(0_{(N}, s)\right| = 2^N \cdot \frac{1}{N!} \cdot \begin{vmatrix} 2s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2^2 s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2^N s \end{vmatrix} = \frac{s^N}{N!} 2^{\frac{N(N+3)}{2}}.$$

En particular, se cumple

$$\left|\beta_N(0_{(N}, 2r)\right| = 2^N \left|\beta_N(0_{(N}, r)\right|. \tag{2.25}$$

Por otra parte: es obvio en primer lugar que se verifica la inclusión

$$C_N(\mathbf{0}, r) \supset B(\mathbf{0}, r),$$

ya que si $z \in B(\mathbf{0}, r)$, entonces $z_{(N} \in B_N(0_{(N}, r)$ y así $z = (z_{(N}, z^{(N)}) \in C_N(\mathbf{0}, r)$. De manera que se tiene

$$m(C_N(\mathbf{0}, r)) = \mu_N(B_N(0_{(N}, r)) \geq m(B(\mathbf{0}, r)), \tag{2.26}$$

donde hemos denotado con μ_N la medida de Lebesgue en $\mathbb{T}^N$.

En segundo lugar veamos que se cumple

$$m(C_N(\mathbf{0}, r)) \leq m(B(\mathbf{0}, r + \varepsilon)). \tag{2.27}$$

En efecto, sea $y = (y_{(N}, y^{(N)}) \in C_N(\mathbf{0}, r)$; existe entonces $x \in B(\mathbf{0}, r)$ tal que $y_{(N} = \pi_{(N}(x) = x_{(N}$. Se tiene

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{0}, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^{\circ}(y_k, 0)}{2^k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{x_k}{2^k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{y_k}{2^k} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{x_k}{2^k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|y_k - x_k + x_k|}{2^k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|y_k - x_k|}{2^k} \\ &< r + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = r + \frac{1}{2^N} < r + \varepsilon, \end{aligned}$$

luego $y \in B(\mathbf{0}, r+\varepsilon)$ y resulta (2.27).

Entonces finalmente,

$$\begin{aligned} m(B(\mathbf{0}, 2r+\varepsilon)) &\overset{(2.27)}{\geq} \mu(C_N(\mathbf{0}, 2r)) = \mu_N(B_N(0_{(N}, 2r)) \\ &\overset{(2.24)}{=} \left|\beta_N(0_{(N}, 2r)\right| \\ &\overset{(2.25)}{=} 2^N\left|\beta_N(0_{(N}, r)\right| = 2^N\mu_N\big(B_N(0_{(N}, r)\big) = 2^N\, m(C_N(\mathbf{0}, r)) \\ &\overset{(2.26)}{\geq} 2^N\, m(B(\mathbf{0}, r)) > \frac{1}{\varepsilon}\, m(B(\mathbf{0}, r)). \end{aligned}$$

La arbitrariedad de ε lleva a contradicción con la hipótesis de que exista $C < \infty$ tal que $m(B(\mathbf{0}, 2r)) \leq C\, m(B(\mathbf{0}, r))$. □

2.34 Nota. Bendikov define explícitamente [3, Rem. 5.4.6] una familia general de métricas intrínsecas $d_A(x,y)$ en $\mathbb{T}^\omega$ por:

$$d_A(x,y)^2 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} d^\circ(x_k, y_k)^2, \quad (a_k) \in \mathbb{R}^\omega.$$

Se podría extender a estas métricas la pregunta que abría esta sección. No lo hemos estudiado:

- ¿Es posible dar una condición sobre la sucesión de coeficientes (a_k) de modo que el toro infinito $\mathbb{T}^\omega$ con la medida de Haar y la correspondiente métrica de Bendikov d_A sea un espacio de tipo homogéneo?

3

Espacios $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ de norma mixta

En el artículo [101], JLR expone:

> ...en búsqueda de resultados positivos [sobre convergencia en norma de sumas parciales de series de Fourier de funciones definidas en $\mathbb{T}^\omega$] definimos los espacios
>
> $$L^{\overline{p}}(\mathbb{T}^\omega) = L^{p_1,p_2,\ldots,p_k,\cdots}(\mathbb{T} \times \mathbb{T} \ldots \times \mathbb{T} \times \ldots)$$
>
> (con $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots)$, $1 \le p_k \le \infty$) de manera análoga a los espacios de norma mixta de Benedek-Panzone (v. [10]) con un paso al límite.

Y a continuación ofrece un resultado [101, Teorema 1] relativo a la acotación uniforme en $L^{\overline{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ de cierta familia de operadores de suma parcial de series de Fourier de infinitas variables. Sobre ese resultado en concreto hablaremos con más detalle en el capítulo siguiente.

Agnes Benedek y Rafael Panzone en efecto, en el contexto del espacio producto

$$(X, \mathcal{S}, \mu) = \Big(\prod_{i=1}^{n} X_i, \prod_{i=1}^{n} \mathcal{S}_i, \prod_{i=1}^{n} \mu_i\Big)$$

de un número finito de espacios de medida totalmente σ-finita $(X_i, \mathcal{S}_i, \mu_i)$ [57, II, §7] (y donde $\mathcal{S}_i$ no es la σ-álgebra trivial $\{\emptyset, X_i\}$ para ningún i), para $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $1 \le p_i \le \infty$, y f medible en $(X, \mathcal{S}, \mu)$, definen $\|f\|_P$ como el número, finito o no, obtenido tomando sucesivamente, y en este orden, la p_1-norma de f en la variable x_1, después la p_2-norma en la variable x_2 de la función de $(x_2, \ldots, x_n)$ obtenida, ..., y finalmente la p_n-norma en la variable x_n. La medibilidad de estas sucesivas p_i-normas ya había sido probada por Adriaan C. Zaanen en [121, III, Ch. 13, §4, Thm. 1]. Cuando es $1 \le p_i < \infty$ para todo i se tiene, en particular,

$$\|f\|_P = \left(\int_{X_n} \cdots \left(\int_{X_2} \left(\int_{X_1} |f(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^{p_1}\, d\mu_1\right)^{p_2/p_1} d\mu_2\right)^{p_3/p_2} \ldots\, d\mu_n\right)^{1/p_n}, \tag{3.1}$$

y para los $p_j = \infty$ se introducen las modificaciones naturales. Por ejemplo, para f medible en $\mathbb{T}^2$ y $p_1 < \infty$ sería

$$\|f\|_{(p_1,\infty)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x_2 \in \mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x_1, x_2)|^{p_1}\, dx_1\right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Cuando $\|f\|_P < \infty$ se escribe $f \in L^P(X)$, y $\|\cdot\|_P$ define una norma (*mixta*)[1] en $L^P(X)$ que lo hace espacio de Banach [10, I, Theorem 1.b)] (v. también [15, 1.1]). Cuando $p_i = p$ para todo i se recuperan los espacios de Banach habituales, $L^P(X) = L^p(X)$. Además, por ejemplo, en general será $\|f\|_{(p_1,p_2)} \neq \|f\|_{(p_2,p_1)}$.

[1] Tal vez la primera aparición de una norma mixta (*double-norm*) y el estudio de un espacio de norma mixta se deba a Zaanen en [121, II, Ch. 7, §15, Ex. B y Ch. 9, §10]. Como indica L. V. Kantorovich [72, p. 312], los espacios de norma mixta juegan un papel importante para las representaciones integrales de operadores. V. [72, Ch. XI, §1]; también [15].

3.1. Definiciones. Propiedades. Dualidad

Para extender a $\mathbb{T}^\omega$ una noción de norma mixta, en los 80s, I. V. Pavlov y A. V. Skorikov [92], A. Bendikov y Pavlov [5] (reproducido íntegramente en el capítulo 6 del libro [3] de Bendikov) retoman, para $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$, la sucesión de sus secciones de Jessen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (1.8), y definen, si $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots)$ y para cada n se escribe $\bar{p}^n := (p_1, \ldots, p_n)$:

$$\|f\|_{\bar{p}} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{\bar{p}^n}, \tag{3.2}$$

donde

$$\|f_n\|_{\bar{p}^n} := \left\| \cdots \left\| \|f_n(x_1, \ldots, x_n)\|_{p_n,x_n} \right\|_{p_{n-1},x_{n-1}} \cdots \right\|_{p_1,x_1}, \tag{3.3}$$

denotando en general por $\|g(x_1, \ldots, x_k)\|_{p_k,x_k}$ a la función medible que está definida para cada $(x_1, \ldots, x_{k-1}) \in \mathbb{T}^{k-1}$ por

$$\|g(x_1, \ldots, x_k)\|_{p_k,x_k} := \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{T}} |g(x_1, \ldots, x_k)|^{p_k}\, dx_k\right)^{\frac{1}{p_k}} & \text{si } p_k < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x_k\in\mathbb{T}} |g(x_1, \ldots, x_k)| & \text{si } p_k = \infty. \end{cases}$$

Advierte Bendikov que la definición (3.3) solo difiere de la (3.1) de [10] en el orden en que se toman las normas, que es el que le va a convenir para la transferencia al caso infinito-dimensional, ya que se va a cumplir [3, Prop. 6.1.2]

$$\|f_n\|_{\bar{p}^n} \le \|f_{n+1}\|_{\bar{p}^{n+1}} \tag{3.4}$$

y así [3, Corol. 6.1.1],

$$\|f\|_{\bar{p}} = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{\bar{p}^n}. \tag{3.5}$$

El conjunto de las funciones $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ para las que $\|f\|_{\bar{p}} < \infty$ forma el espacio (lo llamaremos cuando sea preciso el BPS-espacio) de norma mixta $L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$.

La presentación de Bendikov es muy elegante[2]: en primer lugar, él se da cuenta de que, para cada n, la sección n-ésima de Jessen f_n de la función integrable f es la esperanza condicional $E^{\mathcal{B}_n} f$ (recordar la Definición 2.6) de la función f respecto de la σ-álgebra $\mathcal{B}_n$ de conjuntos de Borel de $\mathbb{T}^\omega$ engendrada por los cilindros $A \times \mathbb{T}^{n,\omega}$, donde A es un conjunto de Borel en $\mathbb{T}^n$. La sucesión $(\mathcal{B}_n)_1^\infty$ es creciente, y la unión de la sucesión es la σ-álgebra $\mathcal{A}$ de los conjuntos de Borel de $\mathbb{T}^\omega$.

La sucesión de las secciones de Jessen (f_n) es entonces una martingala respecto de la sucesión creciente de σ-álgebras $\mathcal{B}_n$, y los teoremas de Jessen de convergencia en norma y a.e. de la sucesión (f_n) hacia la función f son consecuencia del Teorema 2.9 de convergencia de martingalas.

De aquí se sigue enseguida la relación (3.4). También es inmediato [3, Corol. 6.1.2] que, cuando $p_k = p$ para todo $k = 1, 2, \ldots$, se tiene $L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega) = L^p(\mathbb{T}^\omega)$. Otra de las primeras propiedades que obtienen Bendikov y sus colaboradores es que el BPS-espacio $L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ es un espacio ideal normado[3], es decir, si $f \in L_{\bar{p}}$, g es medible y $|g| \le |f|$, entonces $g \in L_{\bar{p}}$ y $\|g\|_{\bar{p}} \le \|f\|_{\bar{p}}$.

[2] Y se desarrolla en el contexto de un espacio cualquiera Ω que sea producto cartesiano de una infinidad numerable de espacios de probabilidad. Nosotros seguiremos particularizándola al caso del toro infinito.

[3] Sea $(T, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y sea $S = S(T, \mathcal{M}, \mu)$ el espacio de las funciones medibles en $(T, \mathcal{M}, \mu)$, reales o complejas. Para $x, y \in S$, la notación $|x| \ge |y|$ significa que $|x(t)| \ge |y(t)|$ μ-a.e. Un *espacio ideal* es un subespacio X de S tal que

$$x \in X,\ y \in S,\ |y| \le |x| \quad \text{implican} \quad y \in X.$$

Una norma $\|\cdot\|$ en un espacio ideal X se llama *monótona* si $x, y \in X$, $|x| \le |y|$ implican $\|x\| \le \|y\|$. Un *espacio ideal normado* (*espacio normado de Köthe* [122, 15.63]; *espacio pre-ideal* [119, p.8]) es un espacio ideal equipado con una norma monótona [72, p. 95]. A. P. Calderón denomina [26, 13.1] *retículo de Banach* (Banach lattice) a un espacio ideal normado y completo respecto de la norma.

3.1.1. Primer ensayo de definición de norma mixta por JLR

Tras la exposición anterior, de la que tomaremos una parte de la notación, vamos a diverger por nuestra parte de Bendikov, siguiendo en cambio la primera de las ideas, o primer ensayo de definición, que escribió JLR en la carta citada en la presentación de esta memoria (v. Figura 3) en orden a extender al espacio $\mathbb{T}^\omega$ los espacios de norma mixta de Benedek y Panzone.

Repartido entre las dos caras de 1a Hoja 1 (Figuras 3 y 4 al final de la Presentación) de su carta de 1977 JLR escribió un guión para el estudio de espacios de norma mixta en $\mathbb{T}^\omega$ o en general en un producto infinito de espacios de probabilidad, tal y como él lo contemplaba entonces, comenzando por lo que debía ser el proceso de "paso al límite", a partir de espacios (productos cartesianos finitos) con $(p_1, \ldots, p_n)$-norma mixta de Benedek y Panzone [10], que diera lugar a una definición análoga de una $\bar{p}$-norma mixta para funciones medibles, siendo ahora $\bar{p} = (p_k)_{k=1}^\infty$, $1 \leq p_k \leq \infty$.

Nuestro estudio soslaya de entrada el segundo ensayo de definición que allí se propone, con el que seguramente tuvo que ver el trabajo [117] (v. la Definición 3.23 más adelante). Y tenemos que decir en honor a la verdad que sin tener a la vista el modelo de Bendikov *et al.* seguramente no habríamos sabido progresar.

Comenzaremos con una definición y un resultado previo de teoría de la Probabilidad.

3.1 Definición. [91, V-3] Sea $(X, \mathcal{A}, m)$ un espacio de probabilidad y

$$\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{B}_n \supset \mathcal{B}_{n+1} \supset \cdots$$

una sucesión decreciente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{A}$.

Una *supermartingala inversa* (respecto de la sucesión de σ-álgebras $(\mathcal{B}_n)_1^\infty$) es una sucesión de funciones reales $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(m)$ tales que para cada $n \geq 1$, $f_n \geq 0$, f_n es $\mathcal{B}_n$-medible y se verifica (a.e.) $E^{\mathcal{B}_{n+1}} f_n \leq f_{n+1}$.

3.2 Teorema. [91, Proposition V-3-11] *Toda supermartingala inversa (f_n) converge a.e. a una función límite $f \geq 0$ que es medible respecto de la σ-álgebra $\mathcal{B}_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$. Además, $E^{\mathcal{B}_\infty} f_n \uparrow f$ a.e. cuando $n \to \infty$.*

Cuando $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 < \infty$*, la supermartingala inversa (f_n) converge a su límite puntual f en la norma de $L^1(m)$.*

3.3 Definición. [105, p. 158] La función $f(x)$ definida en $\mathbb{T}^\omega$ es *independiente de las m primeras coordenadas $x_{(m} = (x_1, \ldots, x_m)$* si

$$f(x + y) = f(x) \quad \text{para todo par } x, y \in \mathbb{T}^\omega, \text{ con } y = (y_{(m}, 0^{(m}).$$

3.4 Lema. Sea $\mathcal{A}$ la σ-álgebra de los conjuntos de Borel de $\mathbb{T}^\omega$. Para cada número entero $j \geq 1$ consideramos la subfamilia de los *co-cilindros*[4] *de orden j* de $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{F}_j := \{B \subset \mathbb{T}^\omega \colon B = \mathbb{T}^j \times A,\ A \in \mathcal{A}\}$$

(observar que, si $B \in \mathcal{F}_j$, la función característica χ_B es independiente de las j primeras coordenadas).

Se tiene que $\mathcal{F}_j$ es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$, la sucesión $(\mathcal{F}_j)_1^\infty$ es decreciente y $\mathcal{F}_\infty = \{\emptyset, \mathbb{T}^\omega\}$.

Demostración. En primer lugar, para cada $j \geq 1$, $\mathcal{F}_j$ es una σ-álgebra ya que: (i) $\mathbb{T}^\omega = \mathbb{T}^j \times \mathbb{T}^\omega$; (ii) si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$, y $(\mathbb{T}^j \times A)^c = \mathbb{T}^j \times A^c$ (inclusive $\mathbb{T}^j \times \emptyset = \emptyset$); (iii) si $(A_n)_1^\infty \subset \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$, y $\bigcup_{n=1}^\infty (\mathbb{T}^j \times A_n) = \mathbb{T}^j \times (\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$.

Por otra parte, $\mathbb{T}^{j+1} \times A = \mathbb{T}^j \times (\mathbb{T} \times A) \in \mathcal{F}_j$ $(j \geq 1,\ A \in \mathcal{A})$, luego la sucesión $(\mathcal{F}_j)_1^\infty$ es decreciente. También es obvio que, si $E \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_j$ y $E \neq \emptyset$, entonces es necesariamente $E = \mathbb{T}^\omega$. □

[4]En cambio Saks [105, p. 159], es a los conjuntos E de la forma $E = \mathbb{T}^m \times A$ donde $A \subset \mathbb{T}^\omega$ a los que denomina *conjuntos cilíndricos de orden m*.

3.5 Definición. (JLR, Figura 3) Sea $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots)$ con $1 \le p_k \le \infty$ para todo k (lo que abreviaremos escribiendo $\mathbf{1} \le \bar{p} \le \boldsymbol{\infty}$). Dada $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ definimos, para $j \ge 1$, en primer lugar, la función

$$M_j^{(\bar{p})} f(x) = M_j^{(\bar{p})} f(x^{(j}) := \Big\| \cdots \Big\| \|f(x)\|_{p_1,x_1} \Big\|_{p_2,x_2} \cdots \Big\|_{p_j,x_j}, \tag{3.6}$$

donde $\|g(\cdot, x^{(k)})\|_{p_k,x_k}$ es la función medible en $\mathbb{T}^{k,\omega}$ definida en cada $x^{(k} = (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots)$ por

$$\|g(\cdot, x^{(k)})\|_{p_k,x_k} := \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{T}} |g(x_k, x^{(k)})|^{p_k}\, dx_k\right)^{\frac{1}{p_k}} & \text{si } p_k < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x_k \in \mathbb{T}} |g(x_k, x^{(k)})| & \text{si } p_k = \infty. \end{cases}$$

Obviamente es $M_j^{(\bar{p})} f(x) \ge 0$ para todo x. Mientras no haya lugar a confusión omitiremos el superíndice $(\bar{p})$ en la notación. Es claro que $M_j f$ es una función independiente de las j primeras coordenadas, dependiendo solo de la cola j-ésima de coordenadas $x^{(j} = (x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots)$. Así, $M_j f$ es una función $\mathcal{F}_j$-medible, porque para cada $\lambda \ge 0$ el conjunto (perteneciente a $\mathcal{A}$) $E_\lambda = \{x \colon M_j f(x) > \lambda\} \in \mathcal{F}_j$, ya que, como $M_j f$ depende solo de $x^{(j}$, entonces $E_\lambda = \mathbb{T}^j \times \pi_{j,\omega}(E_\lambda)$, y por otra parte tenemos que $\pi_{j,\omega}(E_\lambda) \in \mathcal{A}$.

Además se tiene

$$\|M_j f\|_{L^1(\mathbb{T}^\omega)} = \int_{\mathbb{T}^\omega} M_j f(x)\, dx = \int_{\mathbb{T}^{j,\omega}} M_j f(x^{(j})\, dx^{(j}.$$

3.6 Proposición. *Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ y $\sup_{j\ge 1} \|M_j f\|_1 < \infty$. Entonces, $\|M_j f\|_1 \le \|M_{j+1} f\|_1$ para todo $j \ge 1$.*

Demostración. Sea $j \ge 1$ fijo. Veamos en primer lugar que se cumple

$$\int_{\mathbb{T}} M_j f(x^{(j})\, dx_{j+1} \le M_{j+1} f(x^{(j+1)}). \tag{3.7}$$

En efecto, el primer miembro de (3.7) es igual a $\|M_j f\|_{1,x_{j+1}}$, mientras que el segundo miembro es igual a $\|M_j f\|_{p_{j+1},x_{j+1}}$. La desigualdad (3.7) se sigue de ser $p_{j+1} \ge 1$ y de que $\|\cdot\|_r$ es creciente con r $(1 \le r \le \infty)$.

Por otra parte, aplicando el teorema de Tonelli (lo que es posible por la hipótesis asumida) se tiene

$$\begin{aligned} \|M_j f\|_1 &= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}^{j+1,\omega}} M_j f(x^{(j})\, dx^{(j+1} \right) dx_{j+1} \\ &= \int_{\mathbb{T}^{j+1,\omega}} \left(\int_{\mathbb{T}} M_j f(x^{(j})\, dx_{j+1} \right) dx^{(j+1}, \end{aligned}$$

mientras que

$$\|M_{j+1} f\|_1 = \int_{\mathbb{T}^{j+1,\omega}} M_{j+1} f(x^{(j+1)})\, dx^{(j+1};$$

por consiguiente, de la desigualdad (3.7) se sigue ahora que $\|M_j f\|_1 \le \|M_{j+1} f\|_1$. □

3.7 Proposición. *Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ y $\lim_{j\to\infty} \|M_j f\|_1 < \infty$. Entonces, $(M_j f)_{j=1}^\infty$ es una supermartingala inversa respecto de la sucesión decreciente de σ-álgebras $(\mathcal{F}_j)_1^\infty$.*

Demostración. Por la hipótesis tenemos asegurado que $M_j f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ para todo $j \ge 1$, así que solo queda ver que $E^{\mathcal{F}_{j+1}}(M_j f) \le M_{j+1} f$ (a.e.).

Por definición de esperanza condicional, $E^{\mathcal{F}_{j+1}}(M_j f)$ es una función $G_j(x) = G_j(x^{(j+1})$ tal que

$$\int_B M_j f(x)\,dx = \int_B G_j(x)\,dx \quad \forall\, B \in \mathcal{F}_{j+1} \colon B = \mathbb{T}^{j+1} \times A,\ A \subset \mathbb{T}^{j+1,\omega} \text{ medible},$$

lo que implica que para todo subconjunto medible A de $\mathbb{T}^{j+1,\omega}$ se tiene

$$\int_A M_j f(x^{(j})\,dx^{(j+1} = \int_A G_j(x^{(j+1})\,dx^{(j+1}$$

(de modo que la integral del primer miembro no depende de x_{j+1}). Por otra parte, aplicando el teorema de Tonelli se tiene

$$\begin{aligned}\int_A G_j(x^{(j+1})\,dx^{(j+1} &= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_A G_j(x^{(j+1})\,dx^{(j+1} \right) dx_{j+1} \\ &= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_A M_j f(x^{(j})\,dx^{(j+1} \right) dx_{j+1} \\ &= \int_A \left(\int_{\mathbb{T}} M_j f(x^{(j})\,dx_{j+1} \right) dx^{(j+1},\end{aligned}$$

y esto para todo subconjunto medible A de $\mathbb{T}^{j+1,\omega}$, luego

$$\int_{\mathbb{T}} M_j f(x^{(j})\,dx_{j+1} = G_j(x^{(j+1}) \text{ (a.e.)}$$

de donde, usando (3.7), concluimos. □

3.8 Definición. *JLR*-espacios de norma mixta en $\mathbb{T}^{\boldsymbol{\omega}}$. En las hipótesis de la Proposición 3.7 y de acuerdo con el Teorema 3.2, cuando $j \to \infty$ la sucesión $M_j f$ converge, a.e. y en la norma de L^1, a una función límite que podemos denotar $M_\infty f$, que es $\mathcal{F}_\infty$-medible, es decir, que es constante a.e. (sería un ejemplo de lo que Saks [105, Thm. 16.1] denomina *función cilíndrica de todo orden finito*). Pongamos que sea $M_\infty f(x) = M_f$ a.e.. Definiremos entonces

$$\|f\|_{\bar{p}} := M_f.$$

Notemos que la convergencia en la norma de $L^1(\mathbb{T}^\omega)$ de $M_j f$ a $M_\infty f$, a saber, $\lim_{j\to\infty} \|M_j f - M_\infty f\|_1 = 0$ implica que $\lim_{j\to\infty} \|M_j f\|_1 = \|M_\infty f\|_1 = M_f$ y que por lo tanto se verifica también

$$\|f\|_{\bar{p}} = \lim_{j\to\infty} \|M_j f\|_{L^1(\mathbb{T}^\omega)} \tag{3.8}$$

(y recordemos que de acuerdo con la Proposición 3.6 la sucesión $(\|M_j f\|_1)$ es monótona no decreciente). El conjunto de las funciones $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ para las que $\|f\|_{\bar{p}} < \infty$ forma el espacio de norma mixta $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$. Lo distinguiremos cuando sea necesario del BPS-espacio $L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ denominándolo el JLR-espacio.

Podemos señalar que, si para cada $j \geq 1$ se denota $\bar{p}^j := (p_1, \ldots, p_j)$, entonces se verifica, para cada $x^{(j} \in \mathbb{T}^{j,\omega}$ fijo, $M_j^{(\bar{p})} f(x^{(j}) = \|f(\cdot, x^{(j})\|_{\bar{p}^j}$, donde $\|\cdot\|_{\bar{p}^j}$ es la norma mixta de Benedek y Panzone para las funciones medibles en el toro $\mathbb{T}^j$ con la medida potencia j-ésima de la medida de Lebesgue. Utilizaremos libremente también esta notación desde aquí. Así, por ejemplo, de una desigualdad como

$$\|f(\cdot, x^{(j)})\|_{\bar{p}^j} \leq \|g(\cdot, x^{(j)})\|_{\bar{p}^j},$$

válida para cada $j \geq 1$ y para todo $x^{(j} \in \mathbb{T}^{j,\omega}$, deduciremos "en el límite cuando $j \to \infty$", que $\|f\|_{\bar{p}} \leq \|g\|_{\bar{p}}$.

3.1.2. Primeras propiedades. $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ es un retículo de Banach

3.9 Proposición. *Si* $\mathbf{1} \le \bar{p} \le \boldsymbol{\infty}$*,* $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ *es un espacio normado.*

Demostración. En primer lugar, si no es $f = 0$ a.e., entonces existe j tal que $\|M_j f\|_1 \neq 0$. De $\|f\|_{\bar{p}} \ge \|M_j f\|_1$ se deduce $\|f\|_{\bar{p}} \neq 0$. Luego $\|f\|_{\bar{p}} = 0$ si y solo si $f = 0$ a.e., y también es obvio que $\|cf\|_{\bar{p}} = |c| \cdot \|f\|_{\bar{p}}$ para todo número complejo c.

Por otra parte, sean $f, g \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$. Si $\mathbf{1} \le \bar{p} < \boldsymbol{\infty}$, una aplicación sucesiva de la desigualdad de Minkowski da, para cada $j \ge 1$,

$$M_j(f+g) \le M_j(f) + M_j(g)$$

(y lo mismo, con la oportuna modificación del argumento, cuando algún $p_k = \infty$); de aquí resulta, aplicando también la desigualdad de Minkowski para la norma $\|\cdot\|_1$,

$$\|M_j(f+g)\|_1 \le \|M_j(f) + M_j(g)\|_1 \le \|M_j(f)\|_1 + \|M_j(g)\|_1. \tag{3.9}$$

Tomando en (3.9) límites para $j \to \infty$ se deduce que $f + g \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ y que se verifica la desigualdad $\|f+g\|_{\bar{p}} \le \|f\|_{\bar{p}} + \|g\|_{\bar{p}}$. □

3.10 Proposición. *Sea* $g(x) = g(x_{(N})$ *una función cilíndrica, dependiente solo de las* N *primeras variables* $x_{(N} = (x_1, \dots x_N)$ *para cierto* $N \in \mathbb{N}$*. Entonces se verifica* $\|g\|_{\bar{p}} = \|g\|_{\bar{p}^N}$*.*

Demostración. Suponemos $g(x) = g(x_{(N})$. Entonces, la función

$$M_N^{\bar{p}} g(x) = \left(\int_{\mathbb{T}} \cdots \left(\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |g(x)|^{p_1}\, dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \right)^{p_3/p_2} \dots dx_N \right)^{1/p_N}$$

(con las modificaciones correspondientes si algún $p_j = \infty$) es independiente de todas las variables, luego es igual a.e. a una constante, que podemos denotar $M_N^{\bar{p}} g$, coincidente por otra parte con la norma mixta de Benedek y Panzone $\|g\|_{\bar{p}^N} = \|g\|_{L^{\bar{p}^N}(\mathbb{T}^N)}$.

Y es obvio que $M_k^{\bar{p}} g(x) = M_N^{\bar{p}} g$ para todo $k \ge N$, luego $\lim_{k\to\infty} M_k^{\bar{p}} g(x) = M_N^{\bar{p}} g$ a.e., con lo que se tiene

$$\|g\|_{L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)} = M_N^{\bar{p}} g = \|g\|_{\bar{p}^N}.$$ □

3.11 Proposición. *Cuando* $p_k = p$ *para todo* $k = 1, 2, \dots$*, se tiene* $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega) = L^p(\mathbb{T}^\omega)$*.*

Demostración. El caso $p = \infty$ es inmediato. Supongamos $p < \infty$. En este caso tenemos, para cada $j \ge 1$, aplicando el teorema de Tonelli,

$$M_j f(x^{(j}) = \left(\int_{\mathbb{T}} \cdots \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p\, dx_1\, dx_2 \dots dx_j \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{T}^j} |f(x)|^p\, dx_{(j} \right)^{\frac{1}{p}} = \left((|f|^p)_{j,\omega}(x^{(j}) \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $(|f|^p)_{j,\omega}(x^{(j})$ denota la cola j-ésima de Jessen (1.7) de la función $|f(x)|^p$.

Aplicando el Teorema 1.4 y usando la notación de allí, sabemos que

$$\lim_{j\to\infty} (|f|^p)_{j,\omega}(x^{(j}) = \int_{\mathbb{T}^\omega} |f(x)|^p\, dx = \|f\|_p^p,$$

de modo que usando (3.8) se tiene, en efecto,

$$\|f\|_{\bar{p}} = \lim_{j\to\infty} \|M_j f\|_1 = \|f\|_p.$$ □

3.12 Proposición. $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ *es un espacio ideal normado en el sentido de* [72, p. 95].

Demostración. Con nuestra definición es inmediata la relación

$$\| \, |f| \, \|_{\bar{p}} = \|f\|_{\bar{p}}.$$

Entonces, si $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ y g es una función medible tal que $|g| \leq |f|$, se tiene

$$\|g\|_{\bar{p}} = \| \, |g| \, \|_{\bar{p}} \leq \| \, |f| \, \|_{\bar{p}} = \|f\|_{\bar{p}},$$

luego también es $g \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$. □

3.13 Proposición.

(i) *Sea* $\mathbf{1} \leq \bar{p} \leq \boldsymbol{\infty}$. *Si* $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ *y* $\theta \in (0,1)$, *se tiene que* $f^\theta \in L^{\bar{p}/\theta}(\mathbb{T}^\omega)$ *y*

$$\|f^\theta\|_{\bar{p}/\theta} = \|f\|_{\bar{p}}^\theta. \tag{3.10}$$

(ii) ***(Desigualdad de Hölder)*** *Sea* $\mathbf{1} \leq \bar{p} \leq \boldsymbol{\infty}$ *y* $\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{p}'} = \mathbf{1}$ (es decir, $\frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j'} = 1$ en cada componente). *Sean* $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ *y* $g \in L^{\bar{p}'}(\mathbb{T}^\omega)$. *Entonces* $fg \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$, *y se verifica*

$$\int_{\mathbb{T}^\omega} |f(x)g(x)| \, dx \leq \|f\|_{\bar{p}} \cdot \|g\|_{\bar{p}'}. \tag{3.11}$$

(iii) ***(Desigualdad de Hölder generalizada)*** *Sean* $\mathbf{1} \leq \bar{p}, \bar{q} \leq \boldsymbol{\infty}$ *y* $\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{q}} = \frac{1}{\bar{r}}$ (es decir, $\frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j} = \frac{1}{r_j}$ en cada componente). *Sean* $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ *y* $g \in L^{\bar{q}}(\mathbb{T}^\omega)$. *Entonces* $\|fg\|_{\bar{r}} < \infty$, *y se verifica*

$$\|fg\|_{\bar{r}} \leq \|f\|_{\bar{p}} \cdot \|g\|_{\bar{q}}. \tag{3.12}$$

En particular, si $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ *y* $g \in L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$, *entonces* $fg \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ *y se tiene* $\|fg\|_{\bar{p}} \leq \|f\|_{\bar{p}} \cdot \|g\|_\infty$.[5]

(iv) ***(Desigualdad de Hölder generalizada para*** m ***funciones)*** *Sean* $\mathbf{1} \leq \overline{p_k} \leq \boldsymbol{\infty}$, $k = 1, \ldots, m$, *y* $\sum_{k=1}^m \frac{1}{\overline{p_k}} = \frac{1}{\bar{r}}$. *Sean* $f_k \in L^{\overline{p_k}}(\mathbb{T}^\omega)$, $k = 1, \ldots, m$. *Entonces* $\|f_1 \cdots f_m\|_{\bar{r}} < \infty$, *y se verifica*

$$\|f_1 \cdots f_m\|_{\bar{r}} \leq \|f\|_{\overline{p_1}} \cdots \|f_m\|_{\overline{p_m}}. \tag{3.13}$$

(v) ***(Desigualdad de Littlewood)*** *Sean* $\mathbf{1} \leq \bar{p}, \bar{q} < \boldsymbol{\infty}$ *y* $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega) \cap L^{\bar{q}}(\mathbb{T}^\omega)$. *Entonces para todo* $0 \leq t \leq 1$ *también es* $f \in L^{\bar{r}}(\mathbb{T}^\omega)$, *siendo* $\frac{1}{\bar{r}} = \frac{t}{\bar{p}} + \frac{1-t}{\bar{q}}$, *y se verifica*

$$\|f\|_{\bar{r}} \leq \|f\|_{\bar{p}}^t \cdot \|f\|_{\bar{q}}^{1-t}. \tag{3.14}$$

(vi) *Si* $\mathbf{0} < \bar{r} \leq \bar{s} < \boldsymbol{\infty}$ (es decir, $0 < r_j \leq s_j$ para todo j), *entonces* $L^{\bar{r}}(\mathbb{T}^\omega) \supseteq L^{\bar{s}}(\mathbb{T}^\omega)$ (si $\mathbf{0} < \bar{r} < \mathbf{1}$ la función $\|f\|_{\bar{r}}$ no es una norma en el espacio $L^{\bar{r}}(\mathbb{T}^\omega)$).

Demostración. (i) Es obvio que para cada $n \geq 1$ se tiene $\|f^\theta(\cdot, x^{(n)})\|_{\bar{p}^n/\theta} = \|f(\cdot, x^{(n)})\|_{\bar{p}^n}^\theta$, de donde resulta la desigualdad tomando límites cuando $n \to \infty$.

(ii) Sea $F \in L^{\bar{r}}(\mathbb{T}^\omega)$. De la definición (3.6) se sigue

$$\begin{aligned}
M_1^{(\bar{r})}F(x^{(1)}) &= \left(\int_{\mathbb{T}} |F(x)|^{r_1} \, dx_1 \right)^{1/r_1} = \|F(\cdot, x^{(1)})\|_{r_1, x_1}, \\
M_2^{(\bar{r})}F(x^{(2)}) &= \|M_1^{(\bar{r})}F(\cdot, x^{(2)})\|_{r_2, x_2}, \\
&\cdots\cdots\cdot \\
M_n^{(\bar{r})}F(x^{(n)}) &= \|M_{n-1}^{(\bar{r})}F(\cdot, x^{(n)})\|_{r_n, x_n}, \ldots.
\end{aligned}$$

[5] Así que el espacio $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ es un *espacio pre-ideal** en el sentido de M. Väth [119, Definition 2.1.2].

De manera que, si $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ y $g \in L^{\bar{p}'}(\mathbb{T}^\omega)$, aplicando sucesivamente la desigualdad de Hölder para funciones de una variable se obtiene, para cada $n \geq 1$,

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x)g(x)|\, dx_1 \leq \|f(\cdot, x^{(1)}\|_{p_1,x_1} \cdot \|g(\cdot, x^{(1)}\|_{p_1',x_1} = M_1^{(\bar{p})} f(x^{(1)} \cdot M_1^{(\bar{p}')} g(x^{(1)},$$
$$\int_{\mathbb{T}} M_1^{(\bar{p})} f(x^{(1)} \cdot M_1^{(\bar{p}')} g(x^{(1)}\, dx_2 \leq M_2^{(\bar{p})} f(x^{(2)} \cdot M_2^{(\bar{p}')} g(x^{(2)},$$
$$\cdots\cdots\cdot$$
$$\int_{\mathbb{T}} M_{n-1}^{(\bar{p})} f(x^{(n-1)} \cdot M_{n-1}^{(\bar{p}')} g(x^{(n-1)}\, dx_n \leq M_n^{(\bar{p})} f(x^{(n)} \cdot M_n^{(\bar{p}')} g(x^{(n)}.$$

Aplicando el teorema de Tonelli tenemos entonces, para cada $n \geq 1$:

$$\int_{\mathbb{T}^n} |f(x)g(x)|\, dx_{(n} \leq M_n^{(\bar{p})} f(x^{(n)} \cdot M_n^{(\bar{p}')} g(x^{(n)}. \tag{3.15}$$

Esta sería la desigualdad de Hölder [10, p. 302, (1)] para las normas mixtas conjugadas $\bar{p}^n$ y $\bar{p}'^n$ en $\mathbb{T}^n$. Ahora, cuando $n \to \infty$, el segundo miembro de (3.15) tiende a.e. a $\|f\|_{\bar{p}} \cdot \|g\|_{\bar{p}'}$, según la Definición 3.8, mientras que el primer miembro es la cola n-ésima de Jessen (recordar (1.7)) $|fg|_{n,\omega}$ de la función $|fg|$, que de acuerdo con el Teorema 1.4 tiende a.e. a $\int_{\mathbb{T}^\omega} |f(x)g(x)|\, dx$. La extensión de la desigualdad (3.15) en el límite da entonces la desigualdad (3.11).

(iii) De la desigualdad de Hölder generalizada para normas mixtas [10, p. 302] tenemos, para cada $n \geq 1$,

$$\|fg(\cdot, x^{(n)}\|_{\bar{r}^n} \leq \|f(\cdot, x^{(n)}\|_{\bar{p}^n} \cdot \|g(\cdot, x^{(n)}\|_{\bar{q}^n}, \quad \text{para todo } x^{(n} \in \mathbb{T}^{n,\omega},$$

de donde se sigue (3.12) en el límite cuando $n \to \infty$.

(iv) Resulta de una argumentación similar, por aplicación sucesiva de la desigualdad generalizada de Hölder para m funciones de una variable.

(v) Para cada $0 \leq t \leq 1$ se tiene, usando (3.12) y (3.10):

$$\|f\|_{\bar{r}} = \|f^{t+1-t}\|_{\bar{r}} = \|f^t \cdot f^{1-t}\|_{\bar{r}} \leq \|f^t\|_{\bar{p}/t} \cdot \|f^{1-t}\|_{\bar{q}/(1-t)} = \|f\|_{\bar{p}}^t \cdot \|f\|_{\bar{q}}^{1-t}.$$

(vi) Según el resultado correspondiente al (iii) de esta proposición para normas mixtas de Benedek-Panzone en $\mathbb{T}^n$ (que sale de una aplicación sucesiva de la propiedad 1-dimensional [64, (13.17)] en cada variable), para cada $n \geq 1$ se tiene

$$\|f\|_{\bar{r}^n} \leq \|f\|_{\bar{s}^n},$$

y de aquí se concluye nuevamente tomando límites para $n \to \infty$. □

El siguiente teorema generaliza [10, §2, Thm. 1] en el caso $\mathbb{T}^\omega$.

3.14 Teorema. *Sea* $\mathbf{1} \leq \bar{p} \leq \boldsymbol{\infty}$ *y* $\bar{p}'$ *tal que* $\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{p}'} = \mathbf{1}$. *Si* $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$, *entonces*

$$\|f\|_{\bar{p}} = \sup_{\|g\|_{\bar{p}'}=1} \left| \int_{\mathbb{T}^\omega} fg\, dx \right| = \sup_{\|g\|_{\bar{p}'}=1} \int_{\mathbb{T}^\omega} |fg|\, dx. \tag{3.16}$$

Demostración. Por la desigualdad (3.11) se cumple

$$\|f\|_{\bar{p}} \geq \sup_{\|g\|_{\bar{p}'}=1} \left| \int_{\mathbb{T}^\omega} fg\, dx \right|,$$

y queda probar la desigualdad contraria.

Para cada n fijo, aplicando el citado Teorema [10, §2, Thm. 1] se tiene ($1 \leq p_k \leq \infty$ para $k \leq n$)

$$\|f(\cdot, x^{(n)})\|_{\bar{p}^n} \leq \sup_{\|h\|_{\bar{p}'^n}=1} \int_{\mathbb{T}^n} |fh|\, dx_{(n}$$

(donde este supremo, que será una función medible de las variables $x^{(n}$, se puede restringir a estar tomado sobre las funciones $h = h(x_{(n})$ que no dependen de $x^{(n)}$). Por consiguiente, para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $h_\varepsilon(x_{(n})$ de norma $\|h_\varepsilon\|_{\bar{p}'^n} = 1$ tal que

$$\|f(\cdot, x^{(n)})\|_{\bar{p}^n} \leq \int_{\mathbb{T}^n} |fh_\varepsilon|\, dx_{(n} + \varepsilon.$$

Entonces,

$$\Big\| \, \|f(\cdot, x^{(n)})\|_{\bar{p}^n} \Big\|_{L^1(\mathbb{T}^{n,\omega})} \leq \int_{\mathbb{T}^{n,\omega}} \left(\varepsilon + \int_{\mathbb{T}^n} |fh_\varepsilon|\, dx_{(n} \right) dx^{(n} = \varepsilon + \int_{\mathbb{T}^\omega} |fh_\varepsilon|\, dx,$$

de donde se deduce

$$\Big\| \, \|f(\cdot, x^{(n)})\|_{\bar{p}^n} \Big\|_{L^1(\mathbb{T}^{n,\omega})} \leq \sup_{\substack{h \in L^{\bar{p}'^n}(\mathbb{T}^n) \\ \|h\|_{\bar{p}'^n}=1}} \int_{\mathbb{T}^\omega} |fh|\, dx \leq \sup_{\substack{h \in L^{\bar{p}'}(\mathbb{T}^\omega) \\ \|g\|_{\bar{p}'}=1}} \int_{\mathbb{T}^\omega} |fg|\, dx \tag{3.17}$$

y de aquí,

$$\|f\|_{\bar{p}} = \lim_{n\to\infty} \Big\| \, \|f(\cdot, x^{(n)})\|_{\bar{p}^n} \Big\|_{L^1(\mathbb{T}^{n,\omega})} \leq \sup_{\|g\|_{\bar{p}'}=1} \int_{\mathbb{T}^\omega} |fg|\, dx,$$

como queríamos probar. □

Como una consecuencia de este teorema se obtiene el siguiente resultado, que asegura que los espacios ideales normados $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ cumplen las condiciones (B) y (C) de Kantorovich[6]. Nos ayudamos en este momento de la lectura de [92][7], y de una parte de la gran cantidad de información que se encuentra al respecto en [3, 6.1].

3.15 Proposición. *Sea* $\mathbf{1} \leq \bar{p} \leq \boldsymbol{\infty}$. *Si la sucesión* $(f_n) \subset L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$, $f_n \geq 0$ *es monótona creciente a.e. y se tiene* $\sup_n \|f_n\|_{\bar{p}} < \infty$, *entonces existe una función* $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ *tal que* $f_n \uparrow f$ *a.e., y se tiene* $\sup_n \|f_n\|_{\bar{p}} = \|f\|_{\bar{p}}$.

Demostración. (V. [72, Thm. 7, p. 105].) Sea $f := \sup_n f_n$. Por la hipótesis se tiene $f = \lim_n f_n$ a.e.. Usando el Teorema 3.14, dada cualquier $g \in L^{\bar{p}'}(\mathbb{T}^\omega)$ tal que $\|g\|_{\bar{p}'} = 1$ se tiene, aplicando en primer lugar el teorema de convergencia monótona,

$$\int_{\mathbb{T}^\omega} f|g|\, dx = \sup_n \int_{\mathbb{T}^\omega} f_n|g|\, dx \leq \sup_n \|f_n\|_{\bar{p}} < \infty$$

[6]Un espacio ideal normado X se dice que tiene una norma monótona *completa*, o que *satisface la condición* (B) [72, p. 99], si

$$0 \leq x_n \uparrow, \ x_n \in X \ (n \in \mathbb{N}), \ \sup \|x_n\| < \infty$$

implican $x_n \uparrow x$, para un cierto $x \in X$.

Por otra parte, un espacio ideal normado X se dice que tiene una norma *semicontinua respecto del orden*, o que *satisface la condición* (C) [72, p. 98], si

$$0 \leq x_n \uparrow x \in X \quad \text{implica } \|x_n\| \to \|x\|.$$

[7]Presentamos una versión castellana de esta referencia en el Anexo 5 final.

también por hipótesis, y entonces aplicando nuevamente el Teorema 3.14 tenemos

$$\|f\|_{\bar{p}} \leq \sup_n \|f_n\|_{\bar{p}}, \tag{3.18}$$

luego $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$.

Por otra parte, ahora es inmediato que $\|f_n\|_{\bar{p}} \leq \|f\|_{\bar{p}}$ implica $\sup_n \|f_n\|_{\bar{p}} \leq \|f\|_{\bar{p}}$. Esta desigualdad, junto con (3.18), da $\|f\|_{\bar{p}} = \sup_n \|f_n\|_{\bar{p}}$. □

El resultado del próximo Corolario 3.16 quedaba establecido ya en [10] para normas mixtas en $\mathbb{T}^n$, con la indicación de que se puede obtener por inducción en n. Así lo hace M. A. Triana, en su caso de dimensión finita, en [116, 1.2]. Se corresponde con el teorema de convergencia monótona de Lebesgue (v. [89, 26.1, 32.3]). Desde la perspectiva de la Proposición 3.15, este Corolario establece la condición (C) de Kantorovich para $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$.

3.16 Corolario. *Sea* $\mathbf{1} \leq \bar{p} \leq \boldsymbol{\infty}$. *Si* (f_m) *es una sucesión no decreciente de funciones reales medibles no negativas y* $f_m \to f$ *a.e., entonces* $\|f_m\|_{\bar{p}} \to \|f\|_{\bar{p}}$ *cuando* $m \to \infty$.

Demostración. Si $(f_m) \subset L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ y $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$, entonces aplicando la Proposición 3.15 resulta $\|f_m\|_{\bar{p}} \to \|f\|_{\bar{p}}$ cuando $m \to \infty$, ya que, por la monotonía de la norma, tenemos que $\text{lím}_n \|f_m\|_{\bar{p}} = \sup_n \|f_m\|_{\bar{p}}$.

En otro caso el resultado es trivial. Si, por ejemplo, $f_{m_0} \notin L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$, siempre podemos suponer que $\|f_{m_0}\|_{\bar{p}} = \infty$. Entonces, $\|f_m\|_{\bar{p}} = \infty$ para todo $m \geq m_0$, y también es $\|f\|_{\bar{p}} = \infty = \text{lím}_m \|f_m\|_{\bar{p}}$. □

Para el siguiente corolario v. [83, Lemma 1(e), p. 4], [72, Lemma 4, p. 98].

3.17 Corolario. ***(Lema de Fatou)*** *Sea* $\mathbf{1} \leq \bar{p} \leq \boldsymbol{\infty}$. *Si* $f_n, f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ *y* $f_n \to f$ *a.e., entonces*

$$\|f\|_{\bar{p}} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{\bar{p}}.$$

Demostración. Escribamos

$$h_n(x) := \inf_{k=0,1,\ldots} |f_{n+k}(x)|.$$

Entonces, $h_n \geq 0$ y $h_n(x) \uparrow |f(x)|$ a.e., luego aplicando el Corolario 3.16, y también que $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ es un espacio ideal normado, resulta

$$\|f\|_{\bar{p}} = \lim_n \|h_n\|_{\bar{p}} = \sup_n \|h_n\|_{\bar{p}} \leq \liminf_n \|f_n\|_{\bar{p}}. \qquad \square$$

Una vez en posesión de los resultados anteriores, la demostración del siguiente teorema sigue una técnica estándar.

3.18 Teorema. *Sea* $\mathbf{1} \leq \bar{p} \leq \boldsymbol{\infty}$. *El espacio* $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ *es completo respecto de la norma* $\|\cdot\|_{\bar{p}}$.

Demostración. (Seguimos la prueba de [83, Thm I.1]. V. también [72, Thm. 4, p. 99], donde la argumentación es diferente). Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$. Hay que probar que existe una (unívocamente determinada a.e.) función $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ tal que $\|f_n - f\|_{\bar{p}} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal que para $m, n \geq N$ se tiene $\|f_m - f_n\|_{\bar{p}} < \varepsilon$. Entonces, en primer lugar, existe una subsucesión (basta considerar por ejemplo $n_k = N(1/2^k)$) $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$, y vamos a escribir desde aquí $g_k := f_{n_k}$, tal que $\sum_{k=1}^\infty \|g_{k+1} - g_k\|_{\bar{p}} < \infty$.

Sea ahora

$$g(x) := |g_1(x)| + \sum_{n=1}^\infty |g_{n+1}(x) - g_n(x)|.$$

Aplicando el Corolario 3.16,

$$\|g\|_{\bar{p}} \leq \|g_1\|_{\bar{p}} + \sum_{n=1}^{\infty} \|g_{n+1} - g_n\|_{\bar{p}} < \infty.$$

(Esto implica en particular que el conjunto Z donde $g(x) = \infty$ es de medida nula.) Definimos entonces la función f de la siguiente manera:

$$f(x) := \Big(g_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \big(g_{n+1}(x) - g_n(x) \big) \Big) \cdot \chi_{Z^c}(x).$$

Se tiene $|f(x)| \leq g(x)$ para todo x, luego $\|f\|_{\bar{p}} \leq \|g\|_{\bar{p}} < \infty$, así que $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$, y $f - g_j \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como entonces es $f(x) = \lim_{j \to \infty} g_j(x)$ a.e., aplicando el Corolario 3.17 se tiene $\|f - g_j\|_{\bar{p}} \leq \liminf_{\ell \to \infty} \|g_\ell - g_j\|_{\bar{p}}$, por lo tanto

$$\|f - g_j\|_{\bar{p}} \to 0 \quad \text{cuando } j \to \infty,$$

y finalmente de

$$\|f - f_n\|_{\bar{p}} \leq \|f - g_j\|_{\bar{p}} + \|f_n - g_j\|_{\bar{p}},$$

haciendo tender n y j a ∞, deducimos que

$$\|f - f_n\|_{\bar{p}} \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Además, la unicidad (a.e.) de la función límite f es trivial (si hubiera dos, $f_1 \neq f_2$, de $\|f_1 - f_2\|_{\bar{p}} \leq \|f_n - f_1\|_{\bar{p}} + \|f_n - f_2\|_{\bar{p}}$ para todo n se seguiría una contradicción). □

3.1.3. La $L^{\bar{p}}$-convergencia dominada

Abordamos ahora la cuestión de cuándo se cumple en el espacio $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ la siguiente propiedad, que para los espacios de norma mixta en $\mathbb{T}^n$ es válida cuando $p_j < \infty$ para todo j ([10, p. 302]; M. A. Triana da una demostración en [116, 1.2]).

(CD):[8] Si (f_n) es una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq g$ a.e. para todo n, con $g \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ y $f_n \to f$ a.e., entonces $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$, y $\|f_n - f\|_{\bar{p}} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Comenzaremos probando la equivalencia entre esta condición y la siguiente:

(CA):[9] Si $f_n \in L^{\bar{p}}$ y $f_n \downarrow 0$ a.e., entonces $\|f_n\|_{\bar{p}} \downarrow 0$.

3.19 Proposición. *Sea* $\mathbf{1} \leq \bar{p} \leq \boldsymbol{\infty}$. *Las condiciones (CD) y (CA) son equivalentes en* $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$.

Demostración. $(CA) \Rightarrow (CD)$ (v. [78, Ch. 11, Thm. 5.8]; [122, 15.72, Thm. 2]). Suponemos que (f_n) es una sucesión de funciones medibles tales que $f_n \to f$ a.e. y existe una función $g \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ tal que $|f_n| \leq g$ a.e. para todo n. Para cada $k \geq 1$ sea

$$g_k = \sup_{m,n \geq k} |f_m - f_n|.$$

La sucesión (g_k), de funciones no negativas, es una sucesión no creciente. Se tiene $|f_m - f_n| \leq 2g$, entonces $g_k \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ en aplicación del Corolario 3.16. Como (f_n) es convergente a.e. por hipótesis, se tiene $g_k \downarrow 0$ a.e. y entonces por (CA) es $\|g_k\|_{\bar{p}} \downarrow 0$.

[8] Propiedad de convergencia dominada. Es la condición C.4) de [3, 6.1.2].

[9] Condición (A) de Kantorovich [72, p. 98], a saber: un espacio ideal normado X se dice que tiene una norma *continua respecto del orden*, o que *satisface la condición* (A), si $x_n \downarrow \mathbf{0}$ implica $\|x_n\| \to 0$. Es la condición C.1) de [3, 6.1.2]. En la terminología de Zaanen [122, 15.72], toda función de $L^{\bar{p}}$ es de *norma absolutamente continua*.

Entonces, (f_n) es una sucesión de Cauchy en el espacio completo $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$, luego converge en la norma de este espacio a una función $h \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$. Se sabe que, entonces, hay una subsucesión (f_{n_k}) que converge a.e. a h. Pero esta subsucesión también converge a f. Entonces, $h = f$ a.e., y $\|f_n - f\|_{\bar{p}} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

$(CD) \Rightarrow (CA)$ (v. [3, Prop. 6.1.7]). Supongamos $(f_k) \subset L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ y $f_n \downarrow 0$ a.e.. Para cada k definimos $g_k = f_1 - f_k$. La sucesión no decreciente de funciones no negativas (g_k) converge a.e. a f_1, luego aplicando (CD) se tiene $\|g_k - f_1\|_{\bar{p}} \downarrow 0$, es decir, $\|f_k\|_{\bar{p}} \downarrow 0$. □

La condición (CA), y por consiguiente la condición (CD), **no se cumple si** $\sup_k p_k = \infty$ (v. [92, Thm. 2]). Supongamos en primer lugar que sea infinito alguno de los p_k, por ejemplo y sin perder generalidad, que sea $p_1 = \infty$. Sea $A_n := \left(0, \frac{1}{2}\right)^n \times \mathbb{T}^{n,\omega}$ para cada $n \geq 1$ y consideremos la sucesión de funciones indicadoras $f_n := \chi_{A_n}$. Se tiene $f_n \downarrow 0$ a.e., pero $\|f_n\|_{\bar{p}} = 1$ para todo n, porque $\|f_n(\cdot, x^{(1)})\|_{\infty, x_1} = 1$ para todo $x^{(1} \in \mathbb{T}^{1,\omega}$.

En otro caso, si $p_k < \infty$ para todo k pero siendo $\limsup_k p_k = \infty$, tampoco se cumple en general la condición (CA). Vale el mismo contraejemplo que aportan Pavlov y Skorikov en [92] y revisitamos aquí en nuestro caso de los JLR-espacios. Supongamos por ejemplo que la serie $\sum_{k=1}^\infty 1/p_k$ sea convergente, y que $p_k > 1$ para todo k, de modo que el producto infinito $\prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ sea convergente a un número $\ell > 0$.

Sea entonces $a_k := \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{p_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, y $(A_k)_{k=1}^\infty$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{T}$ de modo que $|A_k| = a_k$ para cada k. Sea $B_n := \prod_{k=1}^n A_k \times \mathbb{T}^{n,\omega}$ para cada $n \geq 1$ y consideremos la sucesión de funciones indicadoras $f_n := \chi_{B_n}$. Se tiene $f_n \downarrow 0$ a.e. ya que $m(B_n) \to 0$ al ser $\lim_k a_k = 1/e < 1$. Por otro lado, $f_n(x) = \chi_{A_1}(x_1)\chi_{A_2}(x_2) \cdots \chi_{A_n}(x_n)\chi_{\mathbb{T}^{n,\omega}}(x^{(n})$ para $n \geq 1$ y, considerando n fijo, para cada $m \geq n$ se tiene

$$\|f_n(\cdot, x^{(m)})\|_{\bar{p}^m} = \left(\int_{\mathbb{T}} \overset{(m)}{\cdots} \left(\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} \chi_{A_1 \times \cdots A_n}(x_{(n)}) \chi_{\mathbb{T}^{n,\omega}}(x^{(n}) \, dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \ldots \, dx_m \right)^{\frac{1}{p_m}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{T}} \chi_{A_n}(x_n) \overset{(n)}{\cdots} \left(\int_{\mathbb{T}} \chi_{A_2}(x_2) \left(\int_{\mathbb{T}} \chi_{A_1}(x_1) \, dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \ldots \, dx_n \right)^{\frac{1}{p_n}} \cdot \chi_{\mathbb{T}^{m,\omega}}(x^{(m})$$

$$= |A_1|^{1/p_1} \cdots |A_n|^{1/p_n} \cdot \chi_{\mathbb{T}^{m,\omega}}(x^{(m}),$$

de modo que $\|f_n\|_{\bar{p}} = \prod_{k=1}^n a_k^{1/p_k} > \ell$. Entonces $\|f_n\|_{\bar{p}} \not\to 0$ cuando $n \to \infty$.

Por otro lado, en el camino a probar que, si $\sup_k p_k < \infty$, entonces sí se cumple la condición (CD),[10] seguimos los pasos e indicaciones de Bendikov [3, 6.1.2]. El siguiente resultado es fundamental y se cumple también para nuestros JLR-espacios de norma mixta en $\mathbb{T}^\omega$.

3.20 Teorema. ([3, Thm. 6.1.2]) *Si* $\sup_k p_k < \infty$, *entonces en el espacio* $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ *se cumple la siguiente propiedad* (condición C.6) de [3, 6.1.2])*:*

Para toda $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ *se verifica* $\|f \cdot \chi_{\{|f|>N\}}\|_{\bar{p}} \downarrow 0$ *cuando* $N \to \infty$.

Demostración. No hacemos más que trasladar a nuestro caso la prueba de Bendikov.

Sea $r = \sup_k p_k < \infty$. Considerando que para $g, h \in L^p(\mathbb{T})$ con $1 \leq p < \infty$ se cumple la desigualdad $\| |g| + |h| \|_p^p \geq \|g\|_p^p + \|h\|_p^p$, que para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo el espacio $L^{\bar{p}^n}(\mathbb{T}^n)$ se puede identificar con el espacio de Lebesgue-Bochner[11] $L^{p_n}\left(\mathbb{T}; L^{p_1,\ldots,p_{n-1}}(\mathbb{T}^{n-1})\right)$, y cierto lema

[10] Y, por consiguiente, $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ es un *espacio regular* en el sentido de [77, p. 45] y [119, Definition 3.3.1].

[11] Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de probabilidad, X un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$. El *espacio de Lebesgue-Bochner* $L^p(\Omega, X)$ está formado por todas las funciones medibles $f\colon \Omega \to X$ tales que $\left(\int_\Omega \|f(\omega)\|_X^p \, d\mu(\omega)\right)^{1/p} < \infty$, y es otro espacio de Banach. Para la identificación $L^{p_1,\ldots,p_n} = L^{p_n}(L^{p_1,\ldots,p_{n-1}})$, v. [10, §9] (y [67, pp. 71–83]).

auxiliar[12], se deduce por inducción que si $g, h \in L^{\overline{p}}(\mathbb{T}^\omega)$, $g, h \geq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\left\|g(\cdot, x^{(n)}) + h(\cdot, x^{(n)})\right\|_{\overline{p}^n}^r \geq \left\|g(\cdot, x^{(n)})\right\|_{\overline{p}^n}^r + \left\|h(\cdot, x^{(n)})\right\|_{\overline{p}^n}^r$$

para todo $x^{(n} \in \mathbb{T}^{n,\omega}$, y de aquí, pasando al límite cuando $n \to \infty$, que

$$\|g + h\|_{\overline{p}}^r \geq \|g\|_{\overline{p}}^r + \|h\|_{\overline{p}}^r. \tag{3.19}$$

Sea entonces $f \in L^{\overline{p}}(\mathbb{T}^\omega)$, $f \geq 0$ sin perder generalidad. Para cada $N \in \mathbb{N}$ consideramos la descomposición $f = g_N + h_N$ con $g_N = f \cdot \chi_{\{f \leq N\}}$ y $h_N = f \cdot \chi_{\{f > N\}}$. Por (3.19) se tiene

$$\|h_N\|_{\overline{p}}^r \leq \|f\|_{\overline{p}}^r - \|g_N\|_{\overline{p}}^r.$$

Pero $\|g_N\|_{\overline{p}}^r \uparrow \|f\|_{\overline{p}}^r$ según el Corolario 3.16. Luego $\lim_N \|h_N\|_{\overline{p}} = 0$. □

3.21 Corolario. *Si* $\sup_k p_k < \infty$, *entonces el subespacio* $L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$ *es denso en el espacio* $L^{\overline{p}}(\mathbb{T}^\omega)$.

Demostración. Sea $f \in L^{\overline{p}}(\mathbb{T}^\omega)$. Para cada $N \in \mathbb{N}$ se considera la función $g_N := f \cdot \chi_{\{|f| \leq N\}}$. Obviamente es $g_N \in L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$, y aplicando el Teorema 3.20 se tiene

$$\|f - g_N\|_{\overline{p}} = \|f \cdot \chi_{\{|f| > N\}}\|_{\overline{p}} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$ □

3.22 Proposición. *Si* $\sup_k p_k < \infty$, *entonces en el espacio* $L^{\overline{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ *se cumple la propiedad* (CD) *de convergencia dominada.*

Demostración. Suponemos que (f_n) es una sucesión de funciones medibles tales que $f_n \to f$ a.e. y existe una función $g \in L^{\overline{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ tal que $|f_n| \leq g$ a.e. para todo n. En primer lugar, aplicando el Corolario 3.17 resulta $\|f\|_{\overline{p}} \leq \|g\|_{\overline{p}}$, luego $f \in L^{\overline{p}}(\mathbb{T}^\omega)$.

En segundo lugar se puede demostrar que se verifica la condición siguiente[13]:

($\star$) Si h es una función cualquiera de $L^{\overline{p}}(\mathbb{T}^\omega)$, entonces para toda sucesión (A_k) de conjuntos medibles de $\mathbb{T}^\omega$ cumpliendo $\lim_{k\to\infty} m(A_k) = 0$ se verifica $\lim_{k\to\infty} \|h \cdot \chi_{A_k}\|_{\overline{p}} = 0$.

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, aplicando el Corolario 3.21 existe $h_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$ tal que $\|h - h_\varepsilon\|_{\overline{p}} < \varepsilon$ y entonces, usando los apartados (iii) y (vi) de la Proposición 3.13 se tiene

$$\begin{aligned}
\|h \cdot \chi_{A_k}\|_{\overline{p}} &\leq \|(h - h_\varepsilon) \cdot \chi_{A_k}\|_{\overline{p}} + \|h_\varepsilon \cdot \chi_{A_k}\|_{\overline{p}} \\
&\leq \|h - h_\varepsilon\|_{\overline{p}} + \|h_\varepsilon\|_\infty \cdot \|\chi_{A_k}\|_{\overline{p}} \\
&\leq \|h - h_\varepsilon\|_{\overline{p}} + \|h_\varepsilon\|_\infty \cdot \|\chi_{A_k}\|_r \\
&< \varepsilon + \|h_\varepsilon\|_\infty \cdot \big[m(A_k)\big]^{\frac{1}{r}} < (1 + \|h_\varepsilon\|_\infty)\varepsilon
\end{aligned}$$

si se toma k suficientemente grande de modo que sea $\big[m(A_k)\big]^{\frac{1}{r}} < \varepsilon$.

Terminamos la demostración siguiendo ahora a Väth en [119, Thm. 3.3.5]. Volviendo a la sucesión (f_n) de partida, hay que probar que $\|f_n - f\|_{\overline{p}} \to 0$. Para cada número dado $\varepsilon > 0$ fijo se define la sucesión de conjuntos

$$E_n := \{x \colon |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon \cdot g(x)\}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Por hipótesis $f_n \to f$ a.e., y como el espacio $\mathbb{T}^\omega$ es de medida finita se tiene también que $f_n \to f$ en medida. Entonces se puede probar, como detallamos a continuación, que $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = 0$.

[12] Si X es un retículo normado, $1 \leq q < \infty$, $L^q(\Omega, X)$ un espacio de Lebesgue-Bochner, y se supone que se cumple $\|x + y\|_X^p \geq \|x\|_X^p + \|y\|_X^p$ para un cierto $1 \leq p < \infty$ para todo par $x, y > 0$, entonces, siendo $r = \max\{p, q\}$, para todo par $f, g \in L^q(\Omega, X)$ se verifica $\|f + g\|_{L^q(\Omega,X)}^r \geq \|f\|_{L^q(\Omega,X)}^r + \|g\|_{L^q(\Omega,X)}^r$ [3, Lemma 6.1.3].

[13] Condición C.3) de [3, 6.1.2]. Es también equivalente a la condición (CA), v. [122, Ch. 15, §72, Thm. 1].

En efecto, denotemos $G_k := \{x\colon 0 < g(x) \leq 1/k\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Se comprueba inmediatamente que

$$E_n \subseteq \{x\colon |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon/k\} \cup G_k,$$

así que se verifica

$$m(E_n) \leq m\big(\{x\colon |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon/k\}\big) + m\big(G_k\big)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots$, se tiene $m(G_k) \to m\big(\bigcap_k G_k\big) = 0$ cuando $k \to \infty$, luego dado $\lambda > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m(G_k) < \lambda$ para todo $k \geq k_0$. Y, como $f_n \to f$ en medida, para este k_0 existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m\big(\{x\colon |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon/k_0\}\big) < \lambda$ si $n \geq n_0$. Con lo cual, $m(E_n) \leq 2\lambda$ si $n \geq n_0$, y queda visto que $m(E_n) \to 0$.

Entonces, de acuerdo con la condición ($\star$) de arriba, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|g \cdot \chi_{E_n}\|_{\bar{p}} < \varepsilon$ si $n \geq N_1$. Y por consiguiente se tiene, para todo $n \geq N_1$,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\bar{p}} &= \big\|(f_n - f)\chi_{E_n} + (f_n - f)\chi_{E_n^c}\big\|_{\bar{p}} \\ &\leq 2\|g \cdot \chi_{E_n}\|_{\bar{p}} + \|\varepsilon \cdot g\|_{\bar{p}} \leq (2 + \|g\|_{\bar{p}})\varepsilon, \end{aligned}$$

luego $\|f_n - f\|_{\bar{p}} \to 0$ cuando $n \to \infty$. □

3.1.4. Dualidad. Espacios $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ homogéneos

Funciones elementales en $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$

3.23 Definición. (JLR, v. Figura 3.) Para cada $1 \leq \bar{p} \leq \infty$ llamaremos *subespacio de las funciones elementales de* $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ al subespacio vectorial $S^{\bar{p}} \subset L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ engendrado por las funciones que tienen la forma $f(x) = f_1(x_1) \cdots f_k(x_k)$ para un cierto $k \in \mathbb{N}$, donde $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{T})$ para cada $j = 1, \ldots, k$. Por ejemplo pertenecen a $S^{\bar{p}}$ las funciones simples de la forma $f(x) = \sum_{\nu=1}^m c_\nu \chi_{B_\nu}$ con $B_\nu = \prod_{j=1}^k A_{\nu_j} \times \mathbb{T}^{k,\omega}$, $A_{\nu_j} \subset \mathbb{T}$ medible para $j = 1, \ldots, k$, $c_\nu \in \mathbb{C}$ para $\nu = 1, \ldots, m$, y los conjuntos B_ν disjuntos dos a dos.

Si $f(x) = f_1(x_1) \cdots f_k(x_k)$, entonces se tiene, de acuerdo con la Proposición 3.10, $\|f\|_{\bar{p}} = \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_k\|_{p_k}$. En general, si $f(x) \in S^{\bar{p}}$, la función f es cilíndrica, $f(x) = \tilde{f}(x_1, \ldots, x_k)$ con $\tilde{f}$ definida en $\mathbb{T}^k$ para cierto k finito, y $\|f\|_{L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)} = \|\tilde{f}\|_{L^{\bar{p}^k}(\mathbb{T}^k)}$.

3.24 Proposición. (JLR, v. Figura 4.) *Si* $\sup_k p_k < \infty$, *entonces el subespacio vectorial* $S^{\bar{p}}$ *es denso en* $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$.

Demostración. (V. [116, Teorema 2.1].) Sea $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de los conjuntos de Borel de $\mathbb{T}^\omega$, engendrada como se sabe [108, II.2.4] por los conjuntos cilíndricos de la forma $B = \prod_{j=1}^n A_j \times \mathbb{T}^{n,\omega}$ con $A_j \subset \mathbb{T}$ de Borel para $j = 1, \ldots, n$, siendo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos por otra parte el álgebra de conjuntos

$$\mathcal{T} := \{T \in \mathcal{B} \,|\, \chi_T \in \overline{S^{\bar{p}}}\}$$

(la clausura se entiende en la topología de la norma de $L^{\bar{p}}$), y veamos en primer lugar que la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{T}$, $\sigma(\mathcal{T})$, es igual a $\mathcal{B}$. Para cada cilindro $B = \prod_{j=1}^n A_j \times \mathbb{T}^{n,\omega}$ se tiene $\chi_B = \big(\prod_{j=1}^n \chi_{A_j}\big)\chi_{\mathbb{T}^{n,\omega}} \in S^{\bar{p}}$, de modo que $B \in \mathcal{T}$, así que bastará [108, II.2 Lemma 2] ver que $\mathcal{T}$ es una familia monótona de conjuntos, es decir, que la unión (respectivamente, la intersección) de una sucesión creciente (decreciente) de conjuntos de $\mathcal{T}$ está también en $\mathcal{T}$.

En el primero de estos casos (de manera similar se concluye en el caso de la sucesión decreciente), sea $(T_n) \subset \mathcal{T}$ tal que $T_n \subseteq T_{n+1}$. Si $T := \bigcup_n T_n$, se tiene que $\chi_{T_n} \to \chi_T$ a.e.; por otro lado es $\chi_{T_n} \leq \chi_{\mathbb{T}^\omega} \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$. Entonces, aplicando la Proposición 3.22 resulta que $\|\chi_{T_n} - \chi_T\|_{\bar{p}} \to 0$

cuando $n \to \infty$. Como se supone $\chi_{T_n} \in \overline{S^{\bar{p}}}$ y $\overline{S^{\bar{p}}}$ es cerrado en $L^{\bar{p}}$, se deduce que también $\chi_T \in \overline{S^{\bar{p}}}$, luego que $T \in \mathcal{B}$. Entonces, en efecto, es $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}$.

Denotemos $\Sigma^{\bar{p}} := \{s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{B_k} \colon c_k \in \mathbb{C},\ B_k \in \mathcal{B},\ n \in \mathbb{N}\}$. La clausura en $L^{\bar{p}}$ de la clase de funciones simples $\Sigma^{\bar{p}}$ es el espacio $L^{\bar{p}}$. Pero por otra parte es $\Sigma^{\bar{p}} \subseteq S^{\bar{p}}$, de donde $\overline{\Sigma^{\bar{p}}} = L^{\bar{p}} \subseteq \overline{S^{\bar{p}}}$ y hemos terminado. □

Un buen resultado a nuestro juicio que consigue la teoría de Bendikov y colaboradores es que si $\sup_k p_k < \infty$, entonces la sucesión (f_n) de secciones de Jessen de la función $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ converge a la función f en la $BPS\,\bar{p}$-norma mixta cuando $n \to \infty$ [3, Thm. 6.1.2]. No hemos conseguido probar (ni refutar) un resultado análogo para nuestras $JLR\,\bar{p}$-normas mixtas. Nuestra única contribución es el siguiente lema, que es sencillo aunque la prueba sea aparatosa de notación.

3.25 Lema. Sea $\mathbf{1} \le \bar{p} < \boldsymbol{\infty}$. Para cada n escribimos $\bar{p}^n = (p_1, \ldots, p_n)$. Sea $F \in S^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ de modo que $F(x) = f_1(x_1) \cdots f_N(x_N)$ para un cierto $N \in \mathbb{N}$, con $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{T})$ para cada $j = 1, \ldots, N$ y además supongamos cada $f_j \ge 0$. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, F_n la sección n-ésima de Jessen (v. ecuación (1.8)) de la función F. Entonces, $F_n \in L^{\bar{p}^n}(\mathbb{T}^n)$ y $\|F_n\|_{\bar{p}^n} \to \|F\|_{\bar{p}}$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. Recordemos (ecuaciones (3.6) y (3.8)) que $\|F\|_{\bar{p}} = \lim_{j\to\infty} \|M_j^{(\bar{p})} F\|_{L^1(\mathbb{T}^\omega)}$ donde, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$M_j^{(\bar{p})} F(x) = M_j^{(\bar{p})} F(x^{(j}) := \left\| \cdots \left\| \|F(x)\|_{p_1,x_1} \right\|_{p_2,x_2} \cdots \right\|_{p_j,x_j}.$$

Como $F \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$, de acuerdo con la Definición 3.8 y la Proposición 3.7 es $M_j^{(\bar{p})} F(x) < \infty$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Y ya que por hipótesis es $F \ge 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|M_j^{(\bar{p})} F\|_{L^1(\mathbb{T}^\omega)} &= \|M_j^{(\bar{p})} F\|_{L^1(\mathbb{T}^{j,\omega})} \\
&= \int_{\mathbb{T}^{j,\omega}} \left(\int_{\mathbb{T}} \cdots \left(\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} F(x)^{p_1}\, dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \right)^{p_3/p_2} \ldots\, dx_j \right)^{1/p_j} dx^{(j}
\end{aligned}$$

(recordemos que $dx^{(j} = dx_{j+1}\, dx_{j+2} \ldots$), mientras que

$$\|F_j\|_{L^{\bar{p}^j}(\mathbb{T}^\omega)} = \left(\int_{\mathbb{T}} \cdots \left(\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}^{j,\omega}} F(x)\, dx^{(j} \right)^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \right)^{p_3/p_2} \ldots\, dx_j \right)^{1/p_j}.$$

Vamos a probar que para todo $j \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\|M_j^{(\bar{p})} F\|_{L^1(\mathbb{T}^{j,\omega})} = \|F_j\|_{L^{\bar{p}^j}(\mathbb{T}^\omega)}. \tag{3.20}$$

Para $1 \le j \le N$ la comprobación de es sencilla: Por un lado,

$$\begin{aligned}
\|M_j^{(\bar{p})} F\|_{L^1(\mathbb{T}^{j,\omega})} &= \int_{\mathbb{T}^{j,\omega}} \left(\int_{\mathbb{T}} \cdots \left(\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} F(x)^{p_1}\, dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \right)^{p_3/p_2} \ldots\, dx_j \right)^{1/p_j} dx^{(j} \\
&= \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_j\|_{p_j} \left(\int_{\mathbb{T}^{j,\omega}} f_{j+1}(x_{j+1}) \cdots f_N(x_N)\, dx^{(j} \right),
\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\|F_j\|_{L^{\bar{p}^j}(\mathbb{T}^\omega)} = \left\| \int_{\mathbb{T}^{j,\omega}} f_1(x_1)\cdots f_N(x_N)\,dx^{(j} \right\|_{L^{\bar{p}^j}(\mathbb{T}^\omega)}$$
$$= \left(\int_{\mathbb{T}} \cdots \left(\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}^{j,\omega}} f_1(x_1)\cdots f_N(x_N)\,dx^{(j} \right)^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} \ldots dx_j \right)^{1/p_j}$$
$$= \left(\int_{\mathbb{T}} \cdots \left(\int_{\mathbb{T}} (f_1(x_1)\cdots f_j(x_j))^{p_1} \left(\int_{\mathbb{T}^{j,\omega}} f_{j+1}(x_{j+1})\cdots f_N(x_N)\,dx^{(j} \right)^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} \ldots dx_j \right)^{1/p_j}$$
$$= \|f_1\|_{p_1}\cdots\|f_j\|_{p_j} \left(\int_{\mathbb{T}^{j,\omega}} f_{j+1}(x_{j+1})\cdots f_N(x_N)\,dx^{(j} \right),$$

luego (3.20) se cumple en este caso,teniéndose de hecho

$$\begin{aligned} \|M_j^{(\bar{p})}F\|_{L^1(\mathbb{T}^{j,\omega})} &= \|F_j\|_{L^{\bar{p}^j}(\mathbb{T}^\omega)} \\ &= \|f_1\|_{p_1}\cdots\|f_j\|_{p_j} \left(\int_{\mathbb{T}^{N-j}} f_{j+1}(x_{j+1})\cdots f_N(x_N)\,dx^{j+1}\,\cdots\,dx^N \right) \\ &= \|f_1\|_{p_1}\cdots\|f_j\|_{p_j}\cdot\|f_{j+1}\|_1\cdots\|f_N\|_1. \end{aligned}$$

Y para $j > N$ (recordemos que N está fijado por la función F) se tiene, de acuerdo con la Proposición 3.10,

$$\|M_j^{(\bar{p})}F\|_{L^1(\mathbb{T}^{j,\omega})} = \|F_j\|_{L^{\bar{p}^j}(\mathbb{T}^\omega)} = \|f_1\|_{p_1}\cdots\|f_N\|_{p_N} = \|F\|_{\bar{p}},$$

con lo que hemos terminado. □

Dualidad en los espacios $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$

A continuación probamos el resultado de dualidad que, como [3, Thm. 6.1.3] en su caso, extiende [10, §3, Thm. 1a)]. Nuestra demostración sigue al pie de la letra las líneas de la de Benedek y Panzone (v. también [89, 35.3], [104, 6.16]).

3.26 Proposición. *Si* $\sup_k p_k < \infty$*, entonces el espacio dual* $(L^{\bar{p}})^* = L^{\bar{q}}$*, siendo* $\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{q}} = \mathbf{1}$.

Demostración. Por un lado, si $h \in L^{\bar{q}}(\mathbb{T}^\omega)$, $\mathbf{1} \le \bar{q} \le \boldsymbol{\infty}$, la aplicación $f \mapsto \int_{\mathbb{T}^\omega} hf\,dx$ define un funcional lineal, que es continuo en $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ en virtud de la desigualdad de Hölder (3.11), ya que para toda sucesión convergente $f_n \to f$ en $L^{\bar{p}}$, se tiene

$$\left| \int_{\mathbb{T}^\omega} hf_n\,dx - \int_{\mathbb{T}^\omega} hf\,dx \right| \le \int_{\mathbb{T}^\omega} |h(f_n - f)|\,dx \le \|f_n - f\|_{\bar{p}}\cdot\|h\|_{\bar{q}} \to 0$$

cuando $n \to \infty$. De modo que es siempre $L^{\bar{q}} \subseteq (L^{\bar{p}})^*$.

Desde el otro lado, supongamos $J \in (L^{\bar{p}})^*$, $\mathbf{1} \le \bar{p} < \boldsymbol{\infty}$ y verificando además la condición $\sup_k p_k < \infty$. Se considera la función de conjunto

$$\nu(E) := J(\chi_E) \quad (E \in \mathcal{B}),$$

definida sobre la σ-álgebra $\mathcal{B}$ de los conjuntos de Borel de $\mathbb{T}^\omega$. Sea $\{E_n\} \subset \mathcal{B}$ una familia numerable de conjuntos disjuntos dos a dos. La función ν es finitamente aditiva porque J es lineal. Además J es continuo. Entonces se tiene

$$\left| \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) - \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\Big) \right| = \left| \nu\Big(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} E_n\Big) \right| = \left| J\Big(\chi_{\bigcup_{N+1}^{\infty} E_n}\Big) \right| \le \|J\|\cdot\left\|\chi_{\bigcup_{N+1}^{\infty} E_n}\right\|_{\bar{p}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

aplicando la condición ($\star$) enunciada en la prueba de la Proposición 3.22 y que se cumple por la hipótesis. De aquí se deduce

$$\nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{N\to\infty} \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\Big) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \nu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n),$$

por tanto la función ν es contablemente aditiva y define una medida compleja de Borel en $\mathbb{T}^\omega$. Esta medida ν es absolutamente continua respecto de la medida m de Haar en $\mathbb{T}^\omega$, porque si $m(E) = 0$, se tiene $\|\chi_E\|_{\bar{p}} = 0$ por ser $\bar{p} < \boldsymbol{\infty}$, y de la continuidad de J resulta que $\nu(E) = 0$, ya que

$$|\nu(E)| \le \|J\| \cdot \|\chi_E\|_{\bar{p}}.$$

Del teorema de Radon-Nikodym [64, (19.24)] se deduce entonces que existe una función m-medible h (única a.e.) tal que

$$\nu(E) = \int_E h\,dx = \int_{\mathbb{T}^\omega} h\chi_E\,dx \quad (\forall\, E \in \mathcal{B}),$$

y por consiguiente, aplicando la linealidad de J, tal que

$$J(f) = \int_{\mathbb{T}^\omega} hf\,dx \tag{3.21}$$

para toda función simple $f = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{B_j}$ ($k \in \mathbb{N}$, $c_j \in \mathbb{C}$ y $B_j \in \mathcal{B}$ para $j = 1, \ldots, k$, con los conjuntos B_j disjuntos dos a dos).

Sea ahora $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ una función real no negativa, y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona no decreciente de funciones simples tal que $f_n \uparrow f$ a.e. cuando $n \to \infty$. Aplicando la Proposición 3.22 se sigue que $\|f_n - f\|_{\bar{p}} \to 0$, de donde resulta

$$\lim_{n\to\infty} J(f_n) = J(f).$$

Pero se puede usar el teorema de convergencia monótona (aplicándolo con las partes positiva y negativa de las partes real e imaginaria de h, v. [89, p. 251]; v. también [86, p. 66]) para obtener entonces que

$$\lim_{n\to\infty} J(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}^\omega} hf_n\,dx = \int_{\mathbb{T}^\omega} hf\,dx,$$

de manera que la representación (3.21) es válida para toda $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ real no negativa y, por tanto, también para toda $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$.

Finalmente, aplicando el Teorema 3.14,

$$\|h\|_{\bar{q}} = \sup_{\substack{f\in L^{\bar{p}}\\ \|f\|_{\bar{p}}=1}} \left|\int_{\mathbb{T}^\omega} hf\,dx\right| = \sup_{\substack{f\in L^{\bar{p}}\\ \|f\|_{\bar{p}}=1}} |J(f)| = \|J\| < \infty,$$

luego $h \in L^{\bar{q}}(\mathbb{T}^\omega)$. □

De las proposiciones 3.24 y 3.26 se deduce (v. [10, §3, Lemma 1]) el siguiente resultado que usaremos más adelante.

3.27 Corolario. *Si* $\sup_k p_k < \infty$ *y* $\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{q}} = \mathbf{1}$, *entonces*

$$\|f\|_{\bar{p}} = \sup_{\substack{h\in S^{\bar{q}}\\ \|h\|_{\bar{q}}=1}} \left|\int_{\mathbb{T}^\omega} hf\,dx\right|.$$

Si $\sup_k p_k < \infty$, entonces $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ es un espacio de Banach homogéneo

Terminamos esta sección añadiendo, como quería JLR (v. Figura 3.1), una nota sobre los espacios $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ como espacios de Banach homogéneos sobre $\mathbb{T}^\omega$ en el sentido de Y. Katznelson [73, I.2.10].[14] Así como todo lo anterior se cumple igual en espacios $L^{\bar{p}}(X,\mu)$ donde $(X,\mu) = \prod_{i=1}^\infty (X_i,\mu_i)$ con $\mu(X_i) = 1$ para todo i, esta última propiedad no, porque se hace esencial ahora la invariancia por traslaciones de la medida de Haar en $\mathbb{T}^\omega$.

3.28 Definición. (Según [73, I.2.10].) Un *espacio de Banach homogéneo sobre* $\mathbb{T}^\omega$ es un subespacio vectorial B de $L^1(\mathbb{T}^\omega)$ que posee una norma $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{T}^\omega)}$ bajo la cual es un espacio de Banach, y que tiene las propiedades siguientes:

(H-1) Si $f \in B$, $y \in \mathbb{T}^\omega$, entonces $f_y \in B$, siendo $f_y(x) := f(x+y)$ para todo $x \in \mathbb{T}^\omega$. Además se verifica $\|f_y\|_B = \|f\|_B$.

(H-2) Si $f \in B$, entonces se verifica

$$\lim_{y\to 0} \|f_y - f\|_B = 0, \tag{3.22}$$

es decir, $\forall \varepsilon > 0$ existe un entorno V de 0 en $\mathbb{T}^\omega$ tal que $\|f_y - f\|_B < \varepsilon$ para todo $y \in V$.

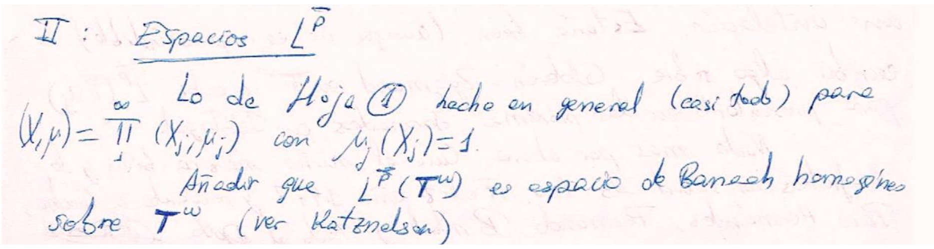

II : Espacios $L^{\bar{p}}$
Lo de Hoja (1) hecho en general (casi todo) para
$(X,\mu) = \prod_j^\infty (X_j,\mu_j)$ con $\mu_j(X_j) = 1$.
Añadir que $L^{\bar{p}}(T^\omega)$ es espacio de Banach homogéneo
sobre T^ω (ver Katznelson)

Figura 3.1: Carta de JLR, diciembre de 1977. Fragmento.

3.29 Proposición. *Sea* $1 \leq \bar{p} < \infty$. *Si* $\sup_k p_k < \infty$, $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ *es un espacio de Banach homogéneo*[15] *sobre* $\mathbb{T}^\omega$.

Demostración. (V. [73, I.2.1], [3, Prop. 6.2.1].) En primer lugar $\|\cdot\|_{\bar{p}} \geq \|\cdot\|_{L^1}$ (Proposición 3.13(vi)) y $L^{\bar{p}}$ es completo (Proposición 3.18). La condición (H-1), y que $\|f_y\|_{\bar{p}} = \|f\|_{\bar{p}}$ si $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ e $y \in \mathbb{T}^\omega$, es una consecuencia inmediata de la invariancia por traslaciones de la medida de Haar en $\mathbb{T}^\omega$.

Para establecer (H-2) se considera en primer lugar que (3.22) es válida para la norma $\|\cdot\|_{\bar{p}}$ si f es una función continua, por la continuidad uniforme (Proposición 1.23). Ahora, según la Proposición 3.24, el subespacio $S^{\bar{p}}$ es denso en $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$. Y por otra parte, la clase $\mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega)$ de las funciones cilíndricas infinitamente derivables (Definición 1.29) es densa en $S^{\bar{p}}$ (condición C.13) de [3, p. 151]).

Fijemos $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $h \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega)$ tal que $\|f - h\|_{\bar{p}} < \varepsilon/3$ y, por la continuidad uniforme de la función h, existe un entorno V de 0 tal que $\|h_y - h\|_{\bar{p}} < \varepsilon/3$ para todo $y \in V$. Finalmente, entonces,

$$\|f_y - f\|_{\bar{p}} \leq \|f_y - h_y\|_{\bar{p}} + \|h_y - h\|_{\bar{p}} + \|h - f\|_{\bar{p}} < \varepsilon$$

para todo $y \in V$. □

[14] Para los espacios $L^P(\mathbb{T}^n)$ de norma mixta la propiedad correspondiente está probada en [10, §10, Thm. 1].

[15] La condición (H-2) en este caso es la condición C.14) de [3, 6.2.1].

3.2. Interpolación. Espacios $L^{\bar{p}}$-débiles en $\mathbb{T}^{\boldsymbol{\omega}}$

En el artículo de curiosa presentación [26], Alberto P. Calderón escribe en el parágrafo $x+20$ las demostraciones de todas las cosas que va dejando enunciadas en el parágrafo x, y eso para cada $1 \leq x \leq 14$. De allí recogemos las definiciones y resultados que siguen ahora. Comenzamos esta sección exponiendo el *primer método complejo de interpolación* entre espacios de Banach de Calderón, introducido originalmente en [25] y después, de forma independiente, por J. L. Lions en [80].[16] La aplicación de este método a los retículos de Banach hace aparecer de una manera natural[17] la que en [77] se denomina *familia de Calderón* de retículos intermedios.

3.2.1. Interpolación

3.30 Definiciones. ([26, §1–3 y 21–23].) Un *par de interpolación*[18] (B^0, B^1) es un par de espacios de Banach complejos (B^i normado con $\|\cdot\|_i$, $i=0,1$), inmersos con continuidad en un espacio vectorial topológico complejo $\mathcal{V}$ (es decir, $B^i \subset \mathcal{V}$ y $\|x_n - x\|_i \to 0$ implica $x_n \to x$ en la topología Hausdorff de $\mathcal{V}$ para $i=0,1$).

El subespacio intersección $B^0 \cap B^1$ admite la norma

$$\|x\|_{B^0 \cap B^1} := \max\bigl(\|x\|_0, \|x\|_1\bigr)$$

que lo hace espacio de Banach también inmerso con continuidad en $\mathcal{V}$.

El subespacio suma (algebraica) $B^0 + B^1 = \{x \in V : x = x_0 + x_1,\ x_0 \in B^0,\ x_1 \in B^1\}$ admite la norma

$$\|x\|_{B^0+B^1} := \inf\bigl\{\|x\|_0 + \|x\|_1 : x = x_0 + x_1,\ x_0 \in B^0,\ x_1 \in B^1\bigr\}$$

y con ella es también un espacio de Banach inmerso con continuidad en $\mathcal{V}$.

Si B es otro espacio de Banach inmerso con continuidad en $\mathcal{V}$ tal que $B^0 \cap B^1 \subset B \subset B^0 + B^1$ y estas inclusiones son continuas, se dice que B es un *espacio intermedio* entre B^0 y B^1, o respecto del par (B^0, B^1).

Sean (B^0, B^1) y (C^0, C^1) dos pares de interpolación. Dos espacios B y C respectivamente intermedios respecto del primero y el segundo par se dicen *espacios de interpolación* respecto de ambos pares si para todo operador lineal $T : B^0 + B^1 \to C^0 + C^1$ tal que $T(B^i) \subseteq C^i$ y $T|_{B^i}$ es continuo ($i=0,1$), la restricción $T|_B$ es también un operador continuo de B en C ([14, Definition 2.4.1]).

El método complejo de construcción de espacios de Banach intermedios de interpolación de Calderón y Lions (primer método complejo de Calderón)

Dado un par de interpolación (B^0, B^1), se denota por $\mathcal{F}(B^0, B^1)$ el espacio vectorial de las funciones $f(\zeta)$, $\zeta = s + it$, definidas en la banda $0 \leq s \leq 1$ del ζ-plano complejo, con valores en $B^0 + B^1$, y que son (a) analíticas[19] en $0 < s < 1$, (b) continuas y acotadas respecto de la norma de $B^0 + B^1$ en $0 \leq s \leq 1$ y (c) tales que $f(it) \in B^0$, y esta restricción $f|_{s=0}$ es continua respecto de la norma de B^0 y tiende a cero cuando $|t| \to \infty$, y análogamente $f(1+it) \in B^1$, y

[16] Los contenidos de [25] habían sido enviados por el autor a la Conferencia sobre Análisis Funcional de Varsovia de agosto de 1960. La comunicación [80] a la Academia de Ciencias de París corresponde a la sesión de 31 de octubre de 1960. Calderón propone un segundo método complejo de interpolación en [26, §5–6] que no vamos a discutir aquí. V. [14, 4.9].

[17] [26, p. 123]. V. también [77, IV.11].

[18] J. Bergh y J. Löfström [14, 2.3] lo denominan *par compatible*.

[19] Es decir, la función compleja de variable compleja $h(z) = \Gamma(f(z))$ es analítica para todo $\Gamma \in (B^0 + B^1)^*$ (v. [67, p. 92]).

esta restricción $f|_{s=1}$ es continua respecto de la norma de B^1 y tiende a cero cuando $|t| \to \infty$. En este espacio se introduce la norma

$$\|f\|_{\mathcal{F}} := \text{máx}\big\{\sup_t \|f(it)\|_0, \sup_t \|f(1+it)\|_1\big\}.$$

Con ella, $\mathcal{F}(B^0, B^1)$ es un espacio de Banach.

Ahora, dado un número real $s \in [0,1]$ se considera el subespacio vectorial de B^0+B^1 denotado B_s o bien $[B^0, B^1]_s$, definido como

$$B_s := \big\{x \in B^0 + B^1 \colon x = f(s),\ f \in \mathcal{F}(B^0, B^1)\big\},$$

y se define

$$\|x\|_s = \|x\|_{B_s} := \inf_{\substack{f(s)=x \\ f\in\mathcal{F}(B^0,B^1)}} \|f\|_{\mathcal{F}}.$$

Esto da una norma en B_s y con ella B_s es un espacio de Banach inmerso con continuidad en $B^0 + B^1$. Por otro lado, $B^0 \cap B^1$ está también inmerso con continuidad en B_s (con *constante de inmersión* (v. [77, p. 1]) igual a 1: $\|x\|_s \le \|x\|_{B^0\cap B^1}$), de modo que $[B^0, B^1]_s$ es un espacio intermedio entre B^0 y B^1. Entre otras propiedades del espacio $[B^0, B^1]_s$ relativas a inclusión y densidad (v. [14, 4.2]), se verifica:

3.31 Teorema. ([14, Thm. 4.2.2].) *El espacio $B^0 \cap B^1$ es denso en $[B^0, B^1]_s$ para todo $0 \le s \le 1$.*

Si $B^0 \cap B^1$ es denso en cada uno de los B^i, entonces $[B^0, B^1]_i = B^i$, $i = 0, 1$ [77, p. 224]. Se debe también a Calderón el siguiente *teorema de interpolación*:

3.32 Teorema. ([26, §4, §24]. V. también [77, p. 221, Thm. 1.2].) *Sean (B^0, B^1) y (C^0, C^1) dos pares de interpolación. Entonces $[B^0, B^1]_s$ y $[C^0, C^1]_s$, $0 \le s \le 1$, son espacios intermedios de interpolación respecto de esos pares. Concretamente, si $T \colon B^0 + B^1 \to C^0 + C^1$ es un operador lineal tal que $T(B^i) \subseteq C^i$ $(i = 0, 1)$, y se tiene*

$$\|T(x)\|_{C^i} \le M_i \|x\|_{B^i}, \quad (i = 0, 1),$$

entonces $T\big([B^0, B^1]_s\big) \subseteq [C^0, C^1]_s$ y se tiene

$$\|T(x)\|_{C_s} \le M_0^{1-s} M_1^s \|x\|_{B_s}.$$

3.33 Ejemplo. (a) Si (Ω, μ) es un espacio de medida positiva, $1 \le p_0, p_1 \le \infty$ y $0 < s < 1$, se tiene $[L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_s = L^p(\mu)$ isométricamente, siendo $\frac{1}{p} = \frac{1-s}{p_0} + \frac{s}{p_1}$ [14, Thm. 5.1.1]. De aquí, como corolario del Teorema 3.32 resulta el teorema de interpolación de Riesz-Thorin [14, Thm. 1.1.1]. V. [77, p. 22]. (b) Extensión a espacios de Lebesgue-Bochner: Si B_0 y B_1 son espacios de Banach, (Ω, μ) un espacio de medida positiva, $1 \le p_0, p_1 < \infty$ y $0 < s < 1$, entonces $[L^{p_0}(\Omega, B_0), L^{p_1}(\Omega, B_1)]_s = L^p(\Omega, [B_0, B_1]_s)$ isométricamente, siendo $\frac{1}{p} = \frac{1-s}{p_0} + \frac{s}{p_1}$ [14, Thm. 5.1.2].

Seguimos ahora con [26, 13.1, 13.2, 13.5 y 33.2, 33.5] (v. también [77, IV.11], [86, Ch. 15, b)]). Si X_0 y X_1 son dos retículos de Banach, es decir, espacios ideales normados completos, sobre un cierto espacio (Ω, μ) de medida σ-finita, ambos están inmersos en el espacio $\mathcal{V}$ de las funciones μ-medibles en Ω, que es un espacio métrico completo con la métrica (acotada)

$$d(x, y) = \int_\Omega \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|}\, d\mu(t), \quad (x, y \in \mathcal{V}).$$

Las inmersiones son continuas, porque $\|x_n - x\|_i \to 0$ implica $d(x_n, x) \to 0$. Se prueba que los subespacios $X_0 \cap X_1$ y $X_0 + X_1$ también son retículos de Banach sobre Ω inmersos con continuidad en $\mathcal{V}$. En este contexto se tiene el siguiente resultado, que Calderón obvia, del que nos parece de interés transcribir también la demostración:

3.34 Proposición. ([77, p. 240].) *El espacio intermedio de interpolación $[X_0, X_1]_s$ es también un retículo de Banach sobre Ω.*

Demostración. Solo vamos a probar la propiedad de ser espacio ideal. Sea $x \in [X_0, X_1]_s$ y supongamos que la función medible y satisface $|y(t)| \leq |x(t)|$ para $t \in \Omega$. Tomamos la función

$$\alpha(t) = \begin{cases} \frac{y(t)}{x(t)} & \text{si } x(t) \neq 0, \\ 0 & \text{si } x(t) = 0, \end{cases}$$

y consideramos el operador lineal $T(v) = \alpha \cdot v$ definido en $\mathcal{V}$. Como $|\alpha(t)| \leq 1$ y $X_0 + X_1$, X_0 y X_1 son espacios ideales, $T(X_0 + X_1) \subset X_0 + X_1$, $T(X_0) \subset X_0$ y $T(X_1) \subset X_1$ y además T es continuo en estos espacios con norma $\|T\| \leq 1$. Aplicando el Teorema 3.32, el operador $T\colon [X_0, X_1]_s \to [X_0, X_1]_s$ y es también un operador continuo con norma menor o igual que 1.

Entonces $y = \alpha \cdot x = T(x) \in [X_0, X_1]_s$ y se tiene

$$\|y\|_{[X_0,X_1]_s} = \|T(x)\|_{[X_0,X_1]_s} \leq \|x\|_{[X_0,X_1]_s}. \qquad \square$$

La familia de Calderón de retículos de Banach intermedios

Sea $0 < s < 1$ y consideremos la clase

$$X_s = X_0^{1-s} X_1^s := \\ \big\{x \in \mathcal{V}\colon |x(t)| \leq \lambda |x_0(t)|^{1-s} \cdot |x_1(t)|^s, \text{ para } \lambda > 0,\ x_i \in X_i, \text{ y } \|x_i\|_i \leq 1\ (i = 1, 2)\big\} \tag{3.23}$$

(la abreviaremos como X_s solo si el contexto hace que no se pueda confundir con $[X_0, X_1]_s$). La función

$$\|x\|_{X_s} := \text{ínf}\, \lambda,$$

donde el ínfimo se toma sobre los λ que verifican para algunos $x_i \in X_i$ la condición especificada en (3.23), es una norma en X_s.

3.35 Proposición. ([77, p. 244].) *El espacio $X_s = X_0^{1-s} X_1^s$ es intermedio entre X_0 y X_1.*

Demostración. Si $x \in X_0 \cap X_1$, se tiene

$$|x(t)| = |x(t)|^{1-s} \cdot |x(t)|^s = \|x\|_0^{1-s} \cdot \|x\|_1^s \cdot \left(\frac{|x(t)|}{\|x\|_0}\right)^{1-s} \cdot \left(\frac{|x(t)|}{\|x\|_1}\right)^s,$$

luego $x \in X_0 \cap X_1$, y

$$\|x\|_{X_s} \leq \|x\|_0^{1-s} \cdot \|x\|_1^s \leq \text{máx}\big\{\|x\|_0, \|x\|_1\big\} = \|x\|_{X_0 \cap X_1}$$

como es sencillo comprobar.

Si $x \in X_0^{1-s} X_1^s$, existen $\lambda > 0$ y $x_i \in X_i$ con $\|x_i\|_i \leq 1$ $(i = 1, 2)$, tales que

$$|x(t)| \leq \lambda |x_0(t)|^{1-s} \cdot |x_1(t)|^s \leq \lambda\big((1-s)|x_0(t)| + s|x_1(t)|\big)$$

(se usa la desigualdad de las medias aritmética y geométrica). Como $\lambda(1-s)|x_0| \in X_0$ y $\lambda s |x_1| \in X_1$, de la propiedad de ideal del espacio $X_0 + X_1$ se sigue que $x \in X_0 + X_1$ y que además se tiene

$$\begin{aligned} \|x\|_{X_0+X_1} &\leq \big\|\lambda(1-s)|x_0| + \lambda s|x_1|\big\|_{X_0+X_1} \\ &\leq \lambda(1-s)\|x_0\|_{X_0+X_1} + \lambda s\|x_1\|_{X_0+X_1} \\ &= \lambda(1-s)\|x_0\|_{X_0} + \lambda s\|x_1\|_{X_1} \\ &\leq \lambda(1-s) + \lambda s = \lambda, \end{aligned}$$

por lo tanto $\|x\|_{X_0+X_1} \leq \|x\|_{X_s}$. $\square$

3.36 Definiciones. Denominaremos[20] a $X_0^{1-s} X_1^s$ $(0 < s < 1)$ *retículo de Banach intermedio de*

[20] La nomenclatura "espacio de exponente s" es la de [14, p. 27].

exponente s. La familia de estos espacios intermedios de exponente s es la *familia de Calderón* que conecta los espacios X_0 y X_1.

El siguiente teorema es un caso particular de un resultado más general [26, 13.6 i)–33.6] de Calderón, y lo consignamos aquí sin demostración.

3.37 Teorema. ([77, IV.11, Thm. 1.14].) *El espacio* $[X_0, X_1]_s$ *está inmerso con continuidad en* $X_0^{1-s}X_1^s$ $(0 < s < 1)$ *y con constante de inmersión menor o igual que* 1. *Si el espacio* $X_0^{1-s}X_1^s$ *cumple la condición* (CA)[21] (y para ello basta que la cumpla al menos uno de los espacios X_0 o X_1), *entonces los espacios* $[X_0, X_1]_s$ *y* $X_0^{1-s}X_1^s$ *coinciden isométricamente.*

3.38 Ejemplo. Si (Ω, μ) es un espacio de medida σ-finita, $1 \le p_0 \ne p_1 \le \infty$ y $0 < s < 1$, se tiene $[L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_s = L^p(\mu) = \big(L^{p_0}(\mu)\big)^{1-s}\big(L^{p_1}(\mu)\big)^s$ isométricamente, siendo $\frac{1}{p} = \frac{1-s}{p_0} + \frac{s}{p_1}$ [77, p. 246].

Aplicación a los espacios de norma mixta

Nuestro objetivo en esta subsección es, siguiendo la propuesta de JLR (v. Figura 4), llegar a demostrar en el contexto de los espacios $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ de norma mixta un teorema de interpolación de tipo Riesz-Thorin.

Sean [86, p. 185] (Ω_i, μ_i) $(i = 1, 2)$ dos espacios de medida σ-finita, $(\Omega, \mu) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$, y sea X_i un retículo de Banach sobre Ω_i para cada $i = 1, 2$. Si X_1 satisface la condición (C) de Kantorovich (de convergencia monótona, recordar el Corolario 3.16), entonces la norma en X_1 es μ_2-medible [84], lo que quiere decir que para toda función $F(t_1, t_2)$ μ-medible, la función $t_2 \mapsto \|F(\cdot, t_2)\|_{X_1}$ definida en Ω_2 es μ_2-medible. Y entonces se puede definir el espacio de norma mixta que se denota por $X_2[X_1]$ como la clase de las funciones medibles F respecto de (Ω, μ) para las cuales
$$\|F\|_{X_2[X_1]} := \big\| \, \|F(\cdot, t_2)\|_{X_1} \big\|_{X_2} < \infty.$$
Se tiene que $\|\cdot\|_{X_2[X_1]}$ es una norma (la norma mixta, o norma doble) en este espacio de funciones. Y en el contexto en que nos encontramos, se prueba el siguiente resultado:

3.39 Teorema. ([22, Thm. 3]. Lo mismo en [86, Thm. 15.12].)

a) *Se cumple la inmersión* $(Y_0[X_0])^{1-\theta}(Y_1[X_1])^\theta \subset Y_0^{1-\theta}Y_1^\theta[X_0^{1-\theta}X_1^\theta]$, *con constante de inmersión menor o igual que* 1.

b) *Si, o bien* X_0 *y* X_1 *cumplen las condiciones* (B) *y* (C) *de Kantorovich*[22], *o bien* X_0 *cumple la condición* (A), *entonces los espacios anteriores son isométricamente iguales.*

Como consecuencia, en el caso de los espacios $L^P(\mathbb{T}^n)$ de norma mixta de Benedek y Panzone podemos probar el resultado siguiente:

3.40 Proposición. *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y, para* $i = 0, 1$, $P(i) = (p_1(i), \ldots, p_n(i))$, *con* $1 \le p_j(0) < \infty$, $1 \le p_j(1) \le \infty$ *para todo* $j = 1, \ldots, n$. *Sea* $0 < \theta < 1$. *Se tiene, isométricamente,*
$$\big(L^{P(0)}(\mathbb{T}^n)\big)^{1-\theta}\big(L^{P(1)}(\mathbb{T}^n)\big)^\theta = \big[L^{P(0)}(\mathbb{T}^n), L^{P(1)}(\mathbb{T}^n)\big]_\theta = L^{P(\theta)}(\mathbb{T}^n),$$
siendo $P(\theta) = (p_1(\theta), \ldots, p_n(\theta))$ *y* $\frac{1}{p_j(\theta)} = \frac{1-\theta}{p_j(0)} + \frac{\theta}{p_j(1)}$ *para cada* $j = 1, \ldots, n$.

[21] Ver la subsección 3.1.3.

[22] Ver la subsección 3.1.3.

Demostración. En primer lugar veamos que, pudiendo ser $1 \leq p_j(i) \leq \infty$ para $j = 1, \ldots, n$, $i = 0, 1$, se tiene

$$\left[L^{P(0)}(\mathbb{T}^n), L^{P(1)}(\mathbb{T}^n)\right]_\theta = L^{P(\theta)}(\mathbb{T}^n).$$

Por inducción. Para $n = 1$ es el Ejemplo 3.33(a). Supongamos cierto que, para $n > 1$,

$$\left[L^{p_1(0),\ldots,p_{n-1}(0)}(\mathbb{T}^{n-1}), L^{p_1(1),\ldots,p_{n-1}(1)}(\mathbb{T}^{n-1})\right]_\theta = L^{p_1(\theta),\ldots,p_{n-1}(\theta)}(\mathbb{T}^{n-1})$$

siendo $\frac{1}{p_j(\theta)} = \frac{1-\theta}{p_j(0)} + \frac{\theta}{p_j(1)}$ para $j = 1,\ldots,\ n-1$. Considerando que, para $i = 0, 1$ y $n > 1$ se tiene

$$L^{p_1(i),\ldots,p_n(i)}(\mathbb{T}^n) = L^{p_n(i)}\left(\mathbb{T}, L^{p_1(i),\ldots,p_{n-1}(i)}(\mathbb{T}^{n-1})\right)$$

(en el sentido de espacios de Lebesgue-Bochner), se puede usar el Ejemplo 3.33(b) y la hipótesis de inducción para obtener, siendo $\frac{1}{p_n(\theta)} = \frac{1-\theta}{p_n(0)} + \frac{\theta}{p_n(1)}$,

$$\begin{aligned}
&\left[L^{p_1(0),\ldots,p_n(0)}(\mathbb{T}^n), L^{p_1(1),\ldots,p_n(1)}(\mathbb{T}^n)\right]_\theta \\
&= \left[L^{p_n(0)}\left(\mathbb{T}, L^{p_1(0),\ldots,p_{n-1}(0)}(\mathbb{T}^{n-1}), L^{p_n(1)}\left(\mathbb{T}, L^{p_1(1),\ldots,p_{n-1}(1)}(\mathbb{T}^{n-1})\right]_\theta\right.\right. \\
&= L^{p_n(\theta)}\Big(\mathbb{T}, \left[L^{p_1(0),\ldots,p_{n-1}(0)}(\mathbb{T}^{n-1}), L^{p_1(1),\ldots,p_{n-1}(1)}(\mathbb{T}^{n-1})\right]_\theta\Big) \\
&= L^{p_n(\theta)}\left(\mathbb{T}, L^{p_1(\theta),\ldots,p_{n-1}(\theta)}(\mathbb{T}^{n-1})\right) \\
&= L^{p_1(\theta),\ldots,p_n(\theta)}(\mathbb{T}^n).
\end{aligned}$$

En segundo lugar veamos que bajo la condición $1 \leq p_j(0) < \infty$ para todo $j = 1, \ldots, n$ se cumple

$$\left(L^{P(0)}(\mathbb{T}^n)\right)^{1-\theta}\left(L^{P(1)}(\mathbb{T}^n)\right)^\theta = L^{P(\theta)}(\mathbb{T}^n).$$

Procedemos de nuevo por inducción. Para $n = 1$, de acuerdo con el Ejemplo 3.38,

$$\left(L^{p_1(0)}(\mathbb{T})\right)^{1-\theta}\left(L^{p_1(1)}(\mathbb{T})\right)^\theta = L^{p_1(\theta)}(\mathbb{T}),$$

siendo $\frac{1}{p_1(\theta)} = \frac{1-s}{p_1(0)} + \frac{s}{p_1(1)}$. Supongamos cierto que, para $n > 1$,

$$\left(L^{p_1(0),\ldots,p_{n-1}(0)}(\mathbb{T}^{n-1})\right)^{1-\theta}\left(L^{p_1(1),\ldots,p_{n-1}(1)}(\mathbb{T}^{n-1})\right)^\theta = L^{p_1(\theta),\ldots,p_{n-1}(\theta)}(\mathbb{T}^{n-1})$$

siendo $\frac{1}{p_j(\theta)} = \frac{1-\theta}{p_j(0)} + \frac{\theta}{p_j(1)}$ para $j = 1,\ldots,\ n-1$. Considerando ([10, §9],[67, pp. 71–83]) que, para $i = 0, 1$ y $n > 1$ se tiene por definición

$$L^{q_1,\ldots,q_n}(\mathbb{T}^n) = L^{q_n}(\mathbb{T})[L^{q_1,\ldots,q_{n-1}}(\mathbb{T}^{n-1})]$$

(como espacio de norma mixta), podemos usar esto y el Teorema 3.39 para obtener

$$\begin{aligned}
&\left(L^{p_1(0),\ldots,p_n(0)}(\mathbb{T}^n)\right)^{1-\theta}\left(L^{p_1(1),\ldots,p_n(1)}(\mathbb{T}^n)\right)^\theta \\
&= \left(L^{p_n(0)}(\mathbb{T})[L^{p_1(0),\ldots,p_{n-1}(0)}(\mathbb{T}^{n-1})]\right)^{1-\theta}\left(L^{p_n(1)}(\mathbb{T})[L^{p_1(1),\ldots,p_{n-1}(1)}(\mathbb{T}^{n-1})]\right)^\theta \\
&= \left(L^{p_n(0)}(\mathbb{T})\right)^{1-\theta}\left(L^{p_n(1)}(\mathbb{T})\right)^\theta\left[\left(L^{p_1(0),\ldots,p_{n-1}(0)}(\mathbb{T}^{n-1})\right)^{1-\theta}\left(L^{p_1(1),\ldots,p_{n-1}(1)}(\mathbb{T}^{n-1})\right)^\theta\right] \\
&= L^{p_n(\theta)}(\mathbb{T})[L^{p_1(\theta),\ldots,p_{n-1}(\theta)}(\mathbb{T}^{n-1})] = L^{p_1(\theta),\ldots,p_n(\theta)}(\mathbb{T}^n),
\end{aligned}$$

si además aplicamos la hipótesis de inducción y que, de nuevo según el Ejemplo 3.38, se tiene $\left(L^{p_n(0)}(\mathbb{T})\right)^{1-\theta}\left(L^{p_n(1)}(\mathbb{T})\right)^\theta = L^{p_n(\theta)}(\mathbb{T})$, siendo $\frac{1}{p_n(\theta)} = \frac{1-\theta}{p_n(0)} + \frac{\theta}{p_n(1)}$. □

Usando el Teorema 3.32 resulta, como corolario de esta proposición, el teorema de interpolación de tipo Riesz-Thorin (v. por ejemplo [12, Ch. 4, Thm 2.2]) para los espacios de norma mixta $L^P(\mathbb{T}^n)$. Benedek y Panzone dan una demostración propia [10, §7, Thm. 2].

Por nuestra parte, vamos a presentar y probar ahora una versión para $\mathbb{T}^\omega$ de la Proposición 3.40:

3.41 Proposición. (JLR, Figura 4). *Sean* $\mathbf{1} \le \bar{p}(0), \bar{p}(1) \le \boldsymbol{\infty}$ *y* $\theta \in (0,1)$ *fijo. Si* $\sup_k p_k(0) < \infty$*, entonces se tiene isométricamente*

$$\left[L^{\bar{p}(0)}(\mathbb{T}^\omega), L^{\bar{p}(1)}(\mathbb{T}^\omega)\right]_\theta = L^{\bar{p}(\theta)}(\mathbb{T}^\omega),$$

siendo $\bar{p}(\theta) = (p_1(\theta), p_2(\theta), \ldots)$ *y* $\frac{1}{p_j(\theta)} = \frac{1-\theta}{p_j(0)} + \frac{\theta}{p_j(1)}$ *para cada* $j = 1, 2, \ldots$ (entendiendo que $p_j(\theta) = \frac{p_j(0)}{1-\theta}$ si $p_j(1) = \infty$).

Demostración. (V. [14, 5.1]; [73, IV, 1.3]; [10, §7].)

Denotaremos abreviadamente $L^{\bar{p}(\theta)} = L^{\bar{p}(\theta)}(\mathbb{T}^\omega)$, $\|f\|_\theta = \|f\|_{[L^{\bar{p}(0)}, L^{\bar{p}(1)}]_\theta}$, $\|f\|_{\bar{p}(\theta)} = \|f\|_{L^{\bar{p}(\theta)}}$. De acuerdo con el Teorema 3.31 basta probar que se tiene $\|f\|_\theta = \|f\|_{\bar{p}(\theta)}$ para $f \in L^{\bar{p}(0)} \cap L^{\bar{p}(1)}$. Y de acuerdo con la Proposición 3.24 bastará de hecho probar eso para $f \in B := S^{\bar{p}(0)} \cap S^{\bar{p}(1)}$.

Sea entonces $f \in B$ y supongamos sin perder generalidad que es $\|f\|_{\bar{p}(\theta)} = 1$. De manera que se tiene $f = \prod_{j=1}^n f_j$ para cierto entero positivo n, con $f_j \in L^{p_j(0)} \cap L^{p_j(1)} \cap L^\infty$ y $\|f_j\|_{p_j(\theta)} = 1$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Consideramos la función definida en la banda $\mathcal{B} := \{z \colon 0 \le \Re z \le 1\}$ del plano complejo y con valores en $L^{\bar{p}(0)} \cap L^{\bar{p}(1)} \cap L^\infty$ dada por

$$G_\varepsilon(z) = e^{\varepsilon(z^2-\theta^2)} \cdot \frac{f}{|f|} \cdot \prod_{j=1}^n |f_j|^{\frac{p_j(\theta)}{p_j(z)}},$$

donde $\frac{1}{p_j(z)} = \frac{1-z}{p_j(0)} + \frac{z}{p_j(1)}$. Se tiene $G_\varepsilon \in \mathcal{F}(L^{\bar{p}(0)}, L^{\bar{p}(1)})$. De hecho veamos que se cumple la condición (c) establecida al final de la página 77, siendo concretamente

$$\|G_\varepsilon(iy)\|_{\bar{p}(0)} = e^{-\varepsilon(y^2+\theta^2)}, \quad \|G_\varepsilon(1+iy)\|_{\bar{p}(1)} = e^{\varepsilon-\varepsilon(y^2+\theta^2)} \quad \text{para todo número real } y. \tag{3.24}$$

Probaremos que se cumple (3.24) por inducción sobre el número n de factores, que es arbitrario, de la descomposición de la función f. Supongamos $n = 1$. Es fácil chequear que $\Re\frac{p_1(\theta)}{p_1(iy)} = \frac{p_1(\theta)}{p_1(0)}$ y entonces, que

$$|G_\varepsilon(iy)| = e^{-\varepsilon(y^2+\theta^2)} |f_1|^{\frac{p_1(\theta)}{p_1(0)}},$$

de donde resulta

$$\|G_\varepsilon(iy)\|_{\bar{p}(0)} = \|G_\varepsilon(iy)\|_{p_1(0)} = e^{-\varepsilon(y^2+\theta^2)} \|f_1\|_{p_1(\theta)}^{\frac{p_1(\theta)}{p_1(0)}} = e^{-\varepsilon(y^2+\theta^2)}.$$

Análogamente se obtiene $\|G_\varepsilon(1+iy)\|_{\bar{p}(1)} = e^{\varepsilon-\varepsilon(y^2+\theta^2)}$ teniendo en cuenta que $\Re\frac{p_1(\theta)}{p_1(1+iy)} = \frac{p_1(\theta)}{p_1(1)}$.

Supongamos que (3.24) se cumple cuando $f = \prod_{j=1}^n f_j$ para cierto $n \ge 1$, con $\|f_j\|_{p_j(\theta)} = 1$, y sea $f = \prod_{j=1}^{n+1} f_j$. Denotemos $H_\varepsilon(z) = e^{\varepsilon(z^2-\theta^2)} \cdot \frac{f}{|f|} \cdot \prod_{j=1}^n |f_j|^{\frac{p_j(\theta)}{p_j(z)}}$, de modo que se tiene $|G_\varepsilon(z)| = |H_\varepsilon(z)| \cdot |f_{n+1}|^{\frac{p_{n+1}(\theta)}{p_{n+1}(z)}}$. Utilizando primero que $\Re\frac{p_{n+1}(\theta)}{p_{n+1}(iy)} = \frac{p_{n+1}(\theta)}{p_{n+1}(0)}$, aplicando la hipótesis de inducción y que se supone $\|f_{n+1}\|_{p_{n+1}(\theta)} = 1$, resulta

$$\begin{aligned} \|G_\varepsilon(iy)\|_{\bar{p}(0)} = \|G_\varepsilon(iy)\|_{\bar{p}^{n+1}(0)} &= \Big\| \, \|H_\varepsilon(iy)\|_{\bar{p}^n(0)} \cdot |f_{n+1}|^{\frac{p_{n+1}(\theta)}{p_{n+1}(0)}} \Big\|_{p_{n+1}} \\ &= \|H_\varepsilon(iy)\|_{\bar{p}^n(0)} \cdot \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}(\theta)}^{\frac{p_{n+1}(\theta)}{p_{n+1}(0)}} = e^{-\varepsilon(y^2+\theta^2)}. \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene $\|G_\varepsilon(1+iy)\|_{\bar{p}(1)} = e^\varepsilon e^{-\varepsilon(y^2+\theta^2)}$ utilizando que $\Re\frac{p_{n+1}(\theta)}{p_{n+1}(1+iy)} = \frac{p_{n+1}(\theta)}{p_{n+1}(1)}$, con lo que la prueba de (3.24) queda concluida.

Entonces $\|G_\varepsilon\|_{\mathcal{F}} = \sup_y\big\{e^{-\varepsilon(y^2+\theta^2)}, e^\varepsilon e^{-\varepsilon(y^2+\theta^2)}\big\} = e^\varepsilon$. Además se cumple $G_\varepsilon(\theta) = f$, de donde por la definición de $\|\cdot\|_\theta$ resulta

$$\|f\|_\theta = \inf_{\substack{G(\theta)=f \\ G\in\mathcal{F}(L^{\bar{p}(0)},L^{\bar{p}(1)})}} \|G\|_{\mathcal{F}} \leq e^\varepsilon,$$

y la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ finalmente da $\|f\|_\theta \leq 1$, es decir, $\|f\|_\theta \leq \|f\|_{\bar{p}(\theta)}$.

A continuación vamos a probar la desigualdad contraria, $\|f\|_{\bar{p}(\theta)} \leq \|f\|_\theta$. Supongamos ahora que $f \in B$ y que $\|f\|_\theta = 1$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por definición de $\|\cdot\|_\theta$, existe $G_\varepsilon \in \mathcal{F}(L^{\bar{p}(0)}, L^{\bar{p}(1)})$ tal que $G_\varepsilon(\theta) = f$ y $\|G_\varepsilon\|_{\mathcal{F}} \leq e^\varepsilon$, y por tanto $\|G_\varepsilon(iy)\|_{L^{\bar{p}(0)}} \leq e^\varepsilon$ y $\|G_\varepsilon(1+iy)\|_{L^{\bar{p}(0)}} \leq e^\varepsilon$ para todo número real y.

Por hipótesis es $\sup_k p_k(0) = r < \infty$, entonces para cada $0 < \theta < 1$ es $\sup_k p_k(\theta) \leq \frac{r}{1-\theta} < \infty$, y por consiguiente (Corolario 3.27, Teorema 3.31) se cumple, siendo $\frac{1}{\bar{p}(\theta)} + \frac{1}{\bar{q}(\theta)} = \mathbf{1}$, $\frac{1}{\bar{p}(i)} + \frac{1}{\bar{q}(i)} = \mathbf{1}$ $(i = 0, 1)$:

$$\|f\|_{\bar{p}(\theta)} = \sup_{\substack{h\in S^{\bar{q}(\theta)} \\ \|h\|_{\bar{q}(\theta)}=1}} \left|\int_{\mathbb{T}^\omega} hf\,dx\right| = \sup_{\substack{h\in S^{\bar{q}(0)}\cap S^{\bar{q}(1)} \\ \|h\|_{\bar{q}(\theta)}=1}} \left|\int_{\mathbb{T}^\omega} hf\,dx\right|. \tag{3.25}$$

Sea entonces $h \in B' := S^{\bar{q}(0)} \cap S^{\bar{q}(1)}$ y supongamos sin perder generalidad que es $\|h\|_{\bar{q}(\theta)} = 1$. De manera que se tiene $h = \prod_{j=1}^m h_j$ para cierto entero positivo m, con $h_j \in L^{q_j(0)} \cap L^{q_j(1)} \cap L^\infty$ y $\|h_j\|_{p_j(\theta)} = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$ arbitrario consideramos la función definida en la banda $\mathcal{B}$ del plano complejo y con valores en $L^{\bar{q}(0)} \cap L^{\bar{q}(1)} \cap L^\infty$ dada por

$$H_\varepsilon(z) = e^{\varepsilon(z^2-\theta^2)} \cdot \frac{h}{|h|} \cdot \prod_{j=1}^m |h_j|^{\frac{q_j(\theta)}{q_j(z)}},$$

siendo $\frac{1}{q_j(z)} = \frac{1-z}{q_j(0)} + \frac{z}{q_j(1)}$. Como hemos visto antes con G_ε, la función $H_\varepsilon \in \mathcal{F}(L^{\bar{q}(0)}, L^{\bar{q}(1)})$ y se verifica $\|H_\varepsilon(iy)\|_{\bar{q}(0)} = e^{-\varepsilon(y^2+\theta^2)}$, $\|H_\varepsilon(1+iy)\|_{\bar{q}(1)} = e^{1-\varepsilon(y^2+\theta^2)}$, de modo que $\|H_\varepsilon\|_{\mathcal{F}} = e^\varepsilon$. Por otra parte se verifica $H_\varepsilon(\theta) = h$.

Consideramos ahora la función (numérica compleja)

$$F_\varepsilon(z) = \langle G_\varepsilon(z), H_\varepsilon(z)\rangle = \int_{\mathbb{T}^\omega} G_\varepsilon(z) H_\varepsilon(z)\,dx$$

bien definida en la banda $\mathcal{B}$ ya que para cada $z \in \mathcal{B}$ las funciones $G_\varepsilon(z)$ y $H_\varepsilon(z)$ pertenecen el espacio $L^1 \cap L^\infty$. Se puede probar además (v. [73, p. 120]) que F_ε es holomorfa en el interior de $\mathcal{B}$ y continua y acotada en $\mathcal{B}$. Aplicando la desigualdad de Hölder de la Proposición 3.13(ii) se tiene, para todo número real y,

$$|F_\varepsilon(iy)| \leq \int_{\mathbb{T}^\omega} |G_\varepsilon(iy)| \cdot |H_\varepsilon(iy)|\,dx \leq \|G_\varepsilon(iy)\|_{\bar{p}(0)} \cdot \|H_\varepsilon(iy)\|_{\bar{q}(0)} = e^\varepsilon \cdot e^{-\varepsilon(y^2+\theta^2)} \leq e^\varepsilon,$$

$$|F_\varepsilon(1+iy)| \leq \|G_\varepsilon(1+iy)\|_{\bar{p}(1)} \cdot \|H_\varepsilon(1+iy)\|_{\bar{q}(1)} = e^{1-\varepsilon(y^2+\theta^2)} e^{1-\varepsilon(y^2+\theta^2)} \leq e^{2\varepsilon}.$$

De aquí, aplicando el teorema de Hadamard de las tres líneas (v. por ejemplo [14, Thm. 1.1.2], [12, Ch. 4, Lemma 2.1]) se sigue que

$$|F(\theta)| \leq e^{\varepsilon(1-\theta)} e^{2\varepsilon\theta} < e^{2\varepsilon}.$$

Por tanto $\left|\int_{\mathbb{T}^\omega} hf\,dx\right| = |F(\theta)| \leq e^{2\varepsilon}$ y aplicando (3.25) y la arbitrariedad de ε resulta finalmente $\|f\|_{\bar{p}(\theta)} \leq 1$. □

Usando el Teorema 3.32 resulta como corolario de esta Proposición 3.41 el teorema de interpolación de tipo Riesz-Thorin para los espacios de norma mixta $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ que buscábamos.

3.42 Teorema. ***(Riesz-Thorin)*** *Sean* $\mathbf{1} \leq \bar{p}(0), \bar{q}(0) \leq \boldsymbol{\infty}$ *verificando* $\sup_k p_k(0) < \infty$ *y* $\sup_k q_k(0) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \bar{p}(1), \bar{q}(1) \leq \boldsymbol{\infty}$, $\theta \in (0,1)$, $\frac{1}{p_j(\theta)} = \frac{1-\theta}{p_j(0)} + \frac{\theta}{p_j(1)}$ *y* $\frac{1}{q_j(\theta)} = \frac{1-\theta}{q_j(0)} + \frac{\theta}{q_j(1)}$.

Supongamos que el operador lineal T*, que lleva funciones medibles en* $\mathbb{T}^\omega$ *en funciones medibles en* $\mathbb{T}^\omega$*, es de tipo fuerte* $(\bar{p}(i), \bar{q}(i))$ *con norma* M_i $(i = 0, 1)$*. Entonces,* T *es también de tipo fuerte* $(\bar{p}(\theta), \bar{q}(\theta))$ *con norma* $M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

3.43 Nota. Benedek y Panzone cierran su trabajo [10, §12, Thm. 1] con la generalización del teorema de Hausdorff-Young que define la transformada de Fourier como un operador lineal continuo y de norma 1 entre los espacios de norma mixta $L^P(\mathbb{R}^n)$ $(\mathbf{1} \leq P \leq \mathbf{2})$ y $L^Q(\mathbb{R}^n)$ $(\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = \mathbf{1})$, en cuya demostración el teorema de Riesz-Thorin es la pieza fundamental. Además prueban mediante contraejemplos que es necesaria una condición de monotonía en los exponentes de partida: si $P = (p_1, \ldots, p_n)$, debe cumplirse $1 \leq p_n \leq p_{n-1} \leq \cdots \leq p_1 \leq 2$.

Por otra parte, el teorema de Hausdorff-Young (v. por ejemplo [73, IV, Thm. 2.1] para el caso 1-dimensional) que define la transformada de Fourier como un operador lineal continuo entre $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ $(1 \leq p \leq 2)$ y $\ell^q(\mathbb{Z}^\infty)$ $(\frac{1}{q} + \frac{1}{q} = 1)$, es decir, la desigualdad

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^\infty)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^\omega)}$$

que por ejemplo Bendikov usa en [3, Thm. 5.2.2, Rem. 6.3.3], se cumple en general en los grupos abelianos localmente compactos ([38, Rem. 10.4.7, p. 729]) y es consecuencia, por interpolación entre $(1, \infty)$ y $(2, 2)$, del *teorema de convexidad* de Riesz [38, 4.24].

Nos hemos preguntado por la posibilidad de extender de forma válida el teorema de Hausdorff-Young a los espacios $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ $(\mathbf{1} \leq \bar{p} \leq \mathbf{2})$ de norma mixta. No tenemos referencias de que esto haya sido hecho ya. El método de Benedek y Panzone permite definir los espacios de norma mixta $\ell^{(p_1, \ldots, p_n)}(\mathbb{Z}^n)$ (considerando la medida σ-finita de contar en $\mathbb{Z}$) para n finito, pero aparece una dificultad ya de entrada para definir los espacios de norma mixta $\ell^{\bar{p}}(\mathbb{Z}^\infty)$ (y después hará falta que sean Banach, etc.). Recordemos que en nuestra definición de los espacios $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ era fundamental un resultado de convergencia de supermartingalas (Teorema 3.2) que en principio solo sirve en un contexto de espacios de medida finita.

Dentro del estilo de ideas que abre JLR en el trabajo [101] del que vamos a hablar con más detalle en el capítulo siguiente, podríamos fijar una sucesión de números positivos $(\varepsilon_n) \downarrow 0$ cuando $n \to \infty$ y considerar en $\mathbb{Z}^\infty$ el *rectángulo* $R = \{n \in \mathbb{Z}^\infty \colon |n_k| < \varepsilon_k\}$ y, en general, los rectángulos

$$\delta R = \{n \in \mathbb{Z}^\infty \colon |n_k| < \delta \varepsilon_k\}, \quad (\delta > 0).$$

Cuando $\delta \uparrow \infty$, la familia de rectángulos $\{\delta R\}$ es una familia creciente de subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^\infty$ cuya unión es todo $\mathbb{Z}^\infty$.

Sea ahora ϕ una función medible en $\mathbb{Z}^\infty$. Para cada $\delta > 0$ podemos definir

$$\|\phi\|_{(\ell^{\bar{p}}(\mathbb{Z}^\infty), R, \delta)} := \|\phi\|_{\ell^{(p_1, \ldots, p_N)}(I_1 \times \cdots \times I_N)}$$

donde $N = N(\delta)$ queda definido por cumplirse la condición $|\delta \varepsilon_k| < 1$ para todo $k > N$, y donde estamos suponiendo además que $\delta R = I_1 \times \cdots \times I_N \times \{0^{(N})\}$, siendo $I_j = I_j(\delta)$ un subconjunto finito de $\mathbb{Z}$ para cada $j = 1, \ldots, N$. Por ejemplo, si $\bar{p} < \boldsymbol{\infty}$ tendríamos

$$\|\phi\|_{(\ell^{\bar{p}}(\mathbb{Z}^\infty), R, \delta)} = \left(\sum_{n_N \in I_n} \cdots \left(\sum_{n_2 \in I_2} \left(\sum_{n_1 \in I_1} |\phi(n_1, n_2, \ldots, n_N, 0^{(N)})|^{p_1} \right)^{p_2/p_1} \right)^{p_3/p_2} \cdots \right)^{1/p_N},$$

sin problemas porque se trata de sumaciones finitas. A partir de esto podríamos definir

$$\|\phi\|_{\ell^{\bar{p}}(\mathbb{Z}^\infty)} := \lim_{\delta \to \infty} \|\phi\|_{(\ell^{\bar{p}}(\mathbb{Z}^\infty), R, \delta)}, \tag{3.26}$$

de modo que cuando este límite exista (seguramente independientemente de la sucesión (ε_n) de partida) se dirá que $\phi \in \ell^{\bar{p}}(\mathbb{Z}^\infty)$. De momento no hemos desarrollado más estas ideas.

3.2.2. Espacios $L^{\bar{p}}$-débiles en $\mathbb{T}^{\omega}$

Trataremos de desarrollar en esta subsección que va a cerrar el capítulo la primera de las dos propuestas que dejaba planteadas JLR en la página 1 adjunta a su carta. Lo hecho con $\mathbb{T}^{\omega}$ valdría igual para un producto numerable de espacios de probabilidad:

> PROBLEMA 1: Para un solo espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ [y $1 \leq p < \infty$], el espacio L^p-débil: $L^p_{\mathrm{w}}(\mu) = L(p,\infty)$ (caso particular de espacio de Lorentz) es [el conjunto de las funciones μ-medibles]
>
> $$\left\{f \colon \|f\|^{\mathrm{w}}_p = \sup_{t>0} t\,\mu\big(\{x \colon |f(x)| > t\}\big)^{1/p} < \infty\right\}$$
>
> [y para $p = \infty$, $L^{\infty}_{\mathrm{w}} := L^{\infty}$].
>
> [Recordemos que] Un operador T es (p,q)-débil si $\|Tf\|^{\mathrm{w}}_q \leq C\|f\|_p$.
>
> Habría que definir los $L^{\bar{p}}$-débil de $\mathbb{T}^{\omega}$ de modo razonable para que se cumplan:
>
> - Si $\bar{q} < \bar{p}$ (i.e. $q_j < p_j$ $\forall j$), entonces $L^{\bar{p}} \subset L^{\bar{p}}$-débil $\subset L^{\bar{q}}$, con $\|\cdot\|_{\bar{q}} \leq \|\cdot\|^{\mathrm{w}}_{p} \leq \|\cdot\|_{\bar{p}}$.
> - La condición $f \in L^{\bar{p}}$-débil equivale a una cierta condición de Kolmogorov respecto de las normas $\|f \cdot \chi_E\|_{\bar{q}}$ ($\bar{p}$ fijo, $\bar{p} > \bar{q}$) [E es un conjunto medible de medida positiva].
> - *Marcinkiewicz*: T es $(\bar{p},\bar{p})$-débil y $(\bar{q},\bar{q})$-débil $\Longrightarrow$ T es $(\bar{r},\bar{r})$-fuerte para $\bar{p} < \bar{r} < \bar{q}$.
>
> [JLR, v. Figura 4.]

Benedek y Panzone no llegaron a considerar en sus trabajos sobre las normas mixtas [10], [11] (éste escrito en colaboración con Calderón) ni tampoco en la tesis doctoral de Benedek [9] dirigida por Alberto González Domínguez la noción de tipo débil con normas mixtas y los posibles resultados de interpolación correspondiente. Concepción Ballester se interesó por este problema —*parece presentar dificultades serias y solo hemos considerado algunos aspectos más simples del mismo*, escribe— que le había sido propuesto por Misha Cotlar, y lo abordó en su tesis doctoral [2], presentada bajo la dirección de Cotlar poco tiempo después de la de Benedek también en la Universidad de Buenos Aires.

En [2, §2, 2.A], Ballester llega a proponer al menos cuatro definiciones naturales diferentes de una “norma de Marcinkiewicz”, o débil, mixta en productos cartesianos de dos[23] espacios de medida, que ella denomina respectivamente semidébil mixta, débil mixta, débil vectorial y magra, y aún dos más que son verdaderas normas, la débil mixta$^{\sharp}$ y la magra$^{\sharp}$. De las primeras, solamente la $\bar{p}$-débil mixta se reduce a la p-débil ordinaria cuando $\bar{p} = (p,p)$. Y para todos los tipos débiles asociados con ellas, salvo para el débil vectorial, prueba o indica extensiones del teorema de interpolación de Marcinkiewicz con tipos en el “triángulo inferior del cuadrado de los tipos”[123, XII, (4.6)] y pertinentes condiciones adicionales.

Más concretamente, si $f(x,y)$ es una función compleja medible definida sobre un espacio $(X \times Y, \mu \times \nu)$ donde $\mu(dx)$ y $\nu(dy)$ son medidas finitas, $1 \leq p_1, p_2 < \infty$, y se denotan $E_{\sigma}(f) = \{(x,y) \colon |f(x,y)| > \sigma\}$ y, para cada $y \in Y$ fijo, $E_{\sigma,y}(f) = \{x \in X \colon |f(x,y)| > \sigma\}$, $m_f(\sigma,y) = \mu(E_{\sigma,y}(f))$, entonces la *“norma” débil mixta* $\bar{p} = (p_1,p_2)$ de f (que no es una norma, lo mismo que la “norma” débil ordinaria tampoco lo es, en general) se define [2, p. 62] como

$$\mathrm{NDM}(f;\bar{p}) := \sup_{\sigma>0}\left(\int_Y \left(\sigma \cdot m_f(\sigma,y)^{1/p_1}\right)^{p_2} dy\right)^{1/p_2} = \sup_{\sigma>0} \sigma \cdot \|\chi_{E_{\sigma}(f)}\|_{L^{\bar{p}}(X\times Y)}, \tag{3.27}$$

donde el espacio de norma mixta $L^{\bar{p}}(X \times Y)$ es el espacio $L^{p_2}(Y)[L^{p_1}(X)]$ de [10].

[23] Ballester dice: “Para evitar notaciones excesivamente cansadoras y para no obscurecer los conceptos, nos hemos limitado al caso de dos variables. Una buena parte de las definiciones y proposiciones que damos se extienden fácilmente a n variables, pero es necesario advertir que algunas de las cuestiones aquí consideradas pueden presentar dificultades inesperadas al pasar a n variables que no hemos examinado aún en detalle” [2, p. 5].

Por su parte, la *"norma" magra* $\bar p = (p_1, p_2)$ de f se define [2, p. 66] como[24]

$$\mathrm{NM}(f;\bar p) := \sup_{\sigma>0,\rho>0} \sigma\rho^{1/p_1}\nu(\{y \in Y : m_f(\sigma, y) > \rho\})^{1/p_2}. \tag{3.28}$$

A propósito de estas definiciones, Ballester escribe en una nota a pie de página: *Sería interesante determinar si la "norma" débil mixta y la magra son equivalentes a normas* [2, p. 67].

Un operador lineal o sublineal $T: L^{\bar r}(X \times Y) \to L^0(X \times Y)$ (donde $L^0(X \times Y)$ denota el espacio de las funciones medibles en $(X \times Y, \mu \times \nu)$) es *de tipo débil mixto* (o, respectivamente, *de tipo magro*) $(\bar r, \bar u)$ si existe una constante C tal que para toda $f \in L^{\bar r}(X \times Y)$ se verifica

$$\mathrm{NDM}(Tf;\bar u) \le C\|f\|_{L^{\bar r}(X\times Y)}, \quad \text{(o, respectivamente, } \mathrm{NM}(Tf;\bar u) \le C\|f\|_{L^{\bar r}(X\times Y)}\text{).}$$

Ballester prueba el siguiente resultado de interpolación para la "norma" débil mixta [2, Corolario 3.B.2]:

Sean $1 \le p_i, q_i < \infty$, $\bar p \le \bar s$, $\bar q \le \bar t$, y además $p_2 \le s_1 \le s_2$, $q_2 \le t_1 \le t_2$, y $t_2/t_1 = s_2/s_1$. Si el operador sublineal T es de tipos débiles mixtos $(\bar p, \bar s)$ y $(\bar q, \bar t)$, entonces T es de tipo fuerte $(\bar r, \bar u)$, donde $1/\bar r = (1-\theta)/\bar p + \theta/\bar q$, $1/\bar u = (1-\theta)/\bar s + \theta/\bar t$ y $\theta \in (0,1)$ es arbitrario.

En el caso de tipos magros hay que suponer la hipótesis en cuatro extremos. Ballester prueba [2, Teorema 3.C.1][25]:

Sean $1 \le p_i, q_i < \infty$, $\bar p \le \bar s$, $\bar q \le \bar t$, y además $p_2 \le s_1$, $q_2 \le t_1$, y $t_2/t_1 > s_2/s_1$. Si el operador sublineal T es simultáneamente de tipos magros $(\bar p, \bar s)$, $(\bar q, \bar t)$, $((p_1, q_2), (s_1, t_2))$ y $((q_1, p_2), (t_1, s_2))$, entonces T es de tipo fuerte $(\bar r, \bar u)$, donde $1/\bar r = (1-\theta)/\bar p + \theta/\bar q$, $1/\bar u = (1-\theta)/\bar s + \theta/\bar t$ y $\theta \in (0,1)$.

La $\bar p$-"norma" débil mixta en $\mathbb{T}^\omega$

Por lo que acabamos de decir, para generalizar a los espacios de norma mixta en productos infinitos de espacios de probabilidad como el toro infinito $\mathbb{T}^\omega$ el concepto de "norma" $\bar p$ débil, nos parece lo más oportuno y sencillo partir de la noción de "norma" débil mixta de Ballester:

3.44 Definición. Sea $\mathbf{1} \le \bar p = (p_1, p_2, \ldots) < \boldsymbol{\infty}$. Definimos el espacio $L^{\bar p}_{\mathrm w}(\mathbb{T}^\omega)$ (o $L^{\bar p}$*-débil*) como el conjunto de las funciones medibles y finitas a.e. tales que

$$\|f\|^{\mathrm w}_{\bar p} := \sup_{\sigma>0} \sigma \cdot \|\chi_{E_\sigma(f)}\|_{L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)} < \infty, \tag{3.29}$$

donde, para cada $\sigma > 0$, $E_\sigma(f) = \{x \in \mathbb{T}^\omega : |f(x)| > \sigma\}$ y $L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)$ es el *JLR*-espacio de norma mixta de la Definición 3.8. Al número $\|f\|^{\mathrm w}_{\bar p}$ lo llamaremos la $\bar p$*-"norma" débil mixta* de f.

3.45 Proposición. *Sea $\mathbf{1} \le \bar p < \boldsymbol{\infty}$. Se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) *En el espacio $L^{\bar p}_{\mathrm w}(\mathbb{T}^\omega)$, la función no negativa $\|\cdot\|^{\mathrm w}_{\bar p}$ es una cuasinorma, verificándose en particular $\|f+g\|^{\mathrm w}_{\bar p} \le 2(\|f\|^{\mathrm w}_{\bar p} + \|g\|^{\mathrm w}_{\bar p})$.*

(ii) *Cuando $p_k = p$ para todo $k = 1, 2, \ldots$ $(1 \le p < \infty)$, se tiene $\|f\|^{\mathrm w}_{\bar p} = \|f\|^{\mathrm w}_{p}$, de modo que la $\bar p$-"norma" débil mixta se reduce en ese caso a la p-"norma" débil ordinaria.*

(iii) *Si $\mathbf{1} \le \bar p \le \bar q < \boldsymbol{\infty}$, entonces $L^{\bar q}_{\mathrm w}(\mathbb{T}^\omega) \subset L^{\bar p}_{\mathrm w}(\mathbb{T}^\omega)$.*

(iv) *Se tiene $\|f\|^{\mathrm w}_{\bar p} \le \|f\|_{\bar p}$, de modo que $L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega) \subset L^{\bar p}_{\mathrm w}(\mathbb{T}^\omega)$.*

[24] V. también [29, p. 5]. Las notaciones $\mathrm{NDM}(f;\bar p)$ y $\mathrm{NM}(f;\bar p)$ son las de [79, p. 139]. La norma magra de Ballester sería similar a la que en [29, p. 5] se llama norma débil iterada.

[25] El requerimiento de la cuádruple hipótesis volvemos a encontrarlo para la interpolación de la norma débil iterada en [29, Thm. 2.19].

(v) *Sea* $\mathbf{1} \le \bar q < \bar p < \boldsymbol{\infty}$ *y supongamos* $\inf_k p_k = p > 1$ *y* $\sup_k q_k = Q < p$. *Entonces se tiene* $L^{\bar p}_{\mathrm{w}}(\mathbb{T}^\omega) \subset L^{\bar q}(\mathbb{T}^\omega)$.

Demostración. (i) Sea $f \in L^{\bar p}_{\mathrm{w}}(\mathbb{T}^\omega)$ y $c \in \mathbb{C}$. Dado que $E_\sigma(cf) = \{x\colon |cf(x)| > \sigma\} = E_{\sigma/|c|}(f)$, tenemos

$$\|cf\|^{\mathrm{w}}_{\bar p} = \sup_{\sigma>0} \sigma \cdot \|\chi_{E_\sigma(cf)}\|_{\bar p} = \sup_{\sigma>0} \sigma \cdot \|\chi_{E_{\sigma/|c|}(f)}\|_{\bar p} = |c| \cdot \sup_{\lambda>0} \lambda \cdot \|\chi_{E_\lambda(f)}\|_{\bar p} = |c| \cdot \|f\|^{\mathrm{w}}_{\bar p}.$$

En segundo lugar, $E_\sigma(f+g) \subset E_{\sigma/2}(f) \cup E_{\sigma/2}(g)$ implica, usando que $\|\cdot\|_{\bar p}$ es una norma, que

$$\begin{aligned}\|f+g\|^{\mathrm{w}}_{\bar p} = \sup_{\sigma>0} \sigma \cdot \|\chi_{E_\sigma(f+g)}\|_{\bar p} &\le \sup_{\sigma>0} \sigma \cdot \Big(\|\chi_{E_{\sigma/2}(f)}\|_{\bar p} + \|\chi_{E_{\sigma/2}(g)}\|_{\bar p}\Big) \\ &= 2\left(\sup_{\lambda>0} \lambda \cdot \|\chi_{E_\lambda(f)}\|_{\bar p} + \sup_{\lambda>0} \lambda \cdot \|\chi_{E_\lambda(f)}\|_{\bar p}\right) = 2\big(\|f\|^{\mathrm{w}}_{\bar p} + \|g\|^{\mathrm{w}}_{\bar p}\big).\end{aligned}$$

Finalmente, $\|f\|^{\mathrm{w}}_{\bar p} = 0$ implica que para todo $\sigma > 0$ es $\chi_{E_\sigma(f)} = 0$ a.e. y, por tanto, que $f = 0$ a.e..

(ii) Para cada $\sigma > 0$ se tiene (Proposición 3.11)

$$\|\chi_{E_\sigma(f)}\|_{L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)} = \|\chi_{E_\sigma(f)}\|_{L^p(\mathbb{T}^\omega)} = m(E_\sigma(f))^{1/p},$$

donde m indica la medida de Haar en $\mathbb{T}^\omega$, con lo que

$$\|f\|^{\mathrm{w}}_{\bar p} = \sup_{\sigma>0} \sigma \cdot m(E_\sigma(f))^{1/p} = \|f\|^{\mathrm{w}}_{p}.$$

(iii) Ya que, aplicando la Proposición 3.13(vi), es $\|\chi_{E_\sigma(f)}\|_{\bar p} \le \|\chi_{E_\sigma(f)}\|_{\bar q}$, y esto implica evidentemente que $\|f\|^{\mathrm{w}}_{\bar p} \le \|f\|^{\mathrm{w}}_{\bar q}$.

(iv) Es también inmediato. Supongamos $f \in L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)$. Para cada $\sigma > 0$ fijo sea $h_\sigma(x) := \sigma \cdot \chi_{E_\sigma(f)}(x)$; como $h_\sigma \le f$ y $L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)$ es un espacio ideal normado, se tiene $h_\sigma \in L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)$ y $\|h_\sigma\|_{\bar p} \le \|f\|_{\bar p}$. Tomando supremos en $\sigma > 0$ en esta desigualdad y considerando que $\|\cdot\|_{\bar p}$ es una norma obtenemos

$$\|f\|^{\mathrm{w}}_{\bar p} = \sup_{\sigma>0} \|h_\sigma\|_{\bar p} \le \|f\|_{\bar p} < \infty.$$

(v) Sea $f \in L^{\bar p}_{\mathrm{w}}(\mathbb{T}^\omega)$ a.e. no nula. Por definición se tiene $\sigma \cdot \|\chi_{E_\sigma(f)}\|_{\bar p} \le \|f\|^{\mathrm{w}}_{\bar p}$ para todo $\sigma > 0$, es decir,

$$\|\chi_{E_\sigma(f)}\|_{\bar p} \le \frac{\|f\|^{\mathrm{w}}_{\bar p}}{\sigma}. \tag{3.30}$$

Por otra parte se cumple $m(E_\sigma(f))^{1/p} = \|\chi_{E_\sigma(f)}\|_p \le \|\chi_{E_\sigma(f)}\|_{\bar p}$ y también, trivialmente, $m(E_\sigma(f)) \le 1$. Entonces, en el estilo de [31, p. 110], usando (3.30) tenemos[26], para un $N > 0$ en principio arbitrario,

$$\begin{aligned}\|f\|^Q_{\bar q} \le \|f\|^Q_Q &= Q \int_0^\infty \sigma^{Q-1} m(E_\sigma(f))\, d\sigma \\ &\le Q \int_0^N \sigma^{Q-1}\, d\sigma + Q \int_N^\infty \sigma^{Q-1} \|\chi_{E_\sigma(f)}\|^p_{\bar p}\, d\sigma \\ &\le N^Q + Q \int_N^\infty \sigma^{Q-1} \frac{\big(\|f\|^{\mathrm{w}}_{\bar p}\big)^p}{\sigma^p}\, d\sigma \\ &= N^Q + \frac{Q}{p-Q} \big(\|f\|^{\mathrm{w}}_{\bar p}\big)^p N^{Q-p}.\end{aligned}$$

[26] La identidad que se aplica en la primera línea es bien conocida (*layer cake representation*), v. [123, XII, (4·8)], [52, Proposition 1.1.4].

Tomando $N = \|f\|_{\bar{p}}^{\mathrm{w}}$ resulta finalmente $\|f\|_{\bar{q}}^{Q} \leq \frac{p}{p-Q}\big(\|f\|_{\bar{p}}^{\mathrm{w}}\big)^{Q}$, luego $f \in L^{\bar{q}}(\mathbb{T}^\omega)$ y

$$\|f\|_{\bar{q}} \leq \left(\frac{p}{p-Q}\right)^{1/Q} \|f\|_{\bar{p}}^{\mathrm{w}}. \qquad \square$$

En pos de la 'condición de Kolmogorov' en los espacios de norma mixta en $\mathbb{T}^\omega$

Hemos tratado de contestar, en el caso de los espacios $L_{\mathrm{w}}^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$, a la pregunta de Cotlar-Ballester-JLR: —¿Es $\|f\|_{\bar{p}}^{\mathrm{w}}$ equivalente a una norma?— sin llegar a poder dar una respuesta concluyente.

Para $1 \leq p < \infty$ Cotlar define [31, p. 108]: un operador sublineal $T\colon L^p(X,\mu) \to L^0(X,\mu)$ *verifica la condición* (p,p) *de Kolmogorov*[27] con constante M si para todo $q < p$, $q > 0$, para toda $f \in L^p(X,\mu)$ y todo conjunto medible $E \subset X$ de medida finita se verifica

$$\|Tf \cdot \chi_E\|_q \leq M \left(\frac{p}{p-q}\right)^{1/q} \mu(E)^{1/q-1/p} \|f\|_p. \tag{3.31}$$

Cuando el espacio es de medida finita la condición (p,p) de Kolmogorov implica el tipo (p,q)-fuerte del operador para todo $q < p$. Cotlar prueba además el siguiente resultado [31, III, Teorema 1]:[28]

Es suficiente que se cumpla (3.31) para un solo valor $q < p$ —y entonces se dice que T *verifica la condición* (p,p) *de Kolmogorov para el valor* q—[29] para que el operador T sea (p,p)-débil. Recíprocamente, si T es (p,p)-débil entonces T verifica la condición (p,p) de Kolmogorov. De la misma manera que los operadores de tipo (p,p)-débil son los acotados de $L^p(X,\mu)$ en el espacio $L_{\mathrm{w}}^p(\mu) = L(p,\infty)$ (espacio *de Lorentz*, v. [14, 1.3]; un poco más adelante los vamos a recordar con mejor detalle) de las funciones μ-medibles f tales que

$$\|f\|_p^{\mathrm{w}} := \sup_{\sigma>0} \sigma \cdot \mu\big(\{x\colon |f(x)| > \sigma\}\big)^{1/p} < \infty,$$

los operadores que verifican la condición (p,p) de Kolmogorov[30] son los acotados, para cada $q < p$, $q > 0$, de $L^p(X,\mu)$ en el espacio $\mathcal{N}_{p,q}(X,\mu)$ formado por las funciones μ-medibles f tales que

$$N_{p,q}(f) := \sup_{\substack{E \text{ medible} \\ \mu(E)>0}} \frac{\|f\chi_E\|_q}{\|\chi_E\|_r} < \infty, \quad \text{siendo } \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}. \tag{3.32}$$

Con p fijo, para cada $q \geq 1$, $q < p$, la función $N_{p,q}(\cdot)$ es una norma en el espacio $\mathcal{N}_{p,q}(X,\mu)$ como se comprueba fácilmente. Y en estos términos, el teorema de Cotlar recién citado se puede reformular de la siguiente manera [49, V, Lemma 2.8], [52, ex. 1.1.12]:

Para toda f se cumplen las desigualdades

$$\|f\|_p^{\mathrm{w}} \leq N_{p,q}(f) \leq \left(\frac{p}{p-q}\right)^{1/q} \|f\|_p^{\mathrm{w}},$$

[27] La definición original de Cotlar era más general: Si $s < \infty$, T verifica la condición (p,s) de Kolmogorov con constante M si para todo $q < s$, $q > 0$, para toda $f \in L^p(X,\mu)$ y todo conjunto medible $E \subset X$ de medida finita se verifica

$$\|Tf \cdot \chi_E\|_q \leq M \left(\frac{p}{p-q}\right)^{1/q} \mu(E)^{1/q-1/s} \|f\|_p.$$

[28] Verlo también en [54, Thm. 3.3.1].

[29] La nomenclatura de M. de Guzmán para esto era T *satisface la condición de Kolmogorov para* (p,q).

[30] Observar que si E es un conjunto medible de medida finita, $\mu(E)^{1/q-1/p} = \|\chi_E\|_r$ con $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

es decir: la "norma" débil $\|\cdot\|_p^{\mathrm{w}}$ es equivalente a la norma $N_{p,q}(\cdot)$ para cada $q < p$ (y por consiguiente todos los espacios $\mathcal{N}_{p,q}(X,\mu)$ son iguales al espacio $L^p_{\mathrm{w}}(\mu)$).

La generalización más obvia de la norma (3.32) en el caso $(X,\mu) = (\mathbb{T}^\omega, m)$ sería la siguiente:

3.46 Definición. Sea $\mathbf{1} \leq \bar q < \bar p < \boldsymbol{\infty}$. Para cada $f \in L^0(\mathbb{T}^\omega)$ definimos

$$N_{\bar p,\bar q}(f) := \sup_{\substack{E\subset\mathbb{T}^\omega\\ m(E)>0}} \|f\chi_E\|_{\bar q}\cdot\frac{\|\chi_E\|_{\bar p}}{\|\chi_E\|_{\bar q}}. \tag{3.33}$$

La cuasinorma mixta débil $\|\cdot\|_{\bar p}^{w}$ es más débil que cualquier norma $N_{\bar p,\bar q}(\cdot)$ ($\bar q < \bar p$), como muestra la siguiente proposición.

3.47 Proposición. *Sea $\mathbf{1} \leq \bar q < \bar p < \boldsymbol{\infty}$. Para cada $f \in L^0(\mathbb{T}^\omega)$ se tiene*

$$\|f\|_{\bar p}^{\mathrm{w}} \leq N_{\bar p,\bar q}(f). \tag{3.34}$$

Demostración. Sea f una funcion medible y a.e. no nula. Sea $\sigma > 0$ tal que $m(E_\sigma(f)) > 0$. Tenemos entonces

$$\sigma\|\chi_{E_\sigma(f)}\|_{\bar q} \leq \|f\chi_{E_\sigma(f)}\|_{\bar q} \leq \frac{\|\chi_{E_\sigma(f)}\|_{\bar q}}{\|\chi_{E_\sigma(f)}\|_{\bar p}}\cdot N_{\bar p,\bar q}(f),$$

de donde resulta

$$\sigma\|\chi_{E_\sigma(f)}\|_{\bar p} \leq N_{\bar p,\bar q}(f)$$

y, por consiguiente,

$$\|f\|_{\bar p}^{\mathrm{w}} = \sup_{\sigma>0}\sigma\|\chi_{E_\sigma(f)}\|_{\bar p} \leq N_{\bar p,\bar q}(f). \qquad \square$$

Pero no conseguimos probar una equivalencia completa entre la cuasinorma $\|\cdot\|_{\bar p}^{\mathrm{w}}$ y la norma (3.33). Esto nos lleva a aportar la siguiente definición, restringiendo el ámbito de aplicabilidad:

3.48 Definición. Sea $\mathbf{1} \leq \bar q < \bar p < \boldsymbol{\infty}$ y supongamos ahora que $\inf_k p_k = p > 1$ y $\sup_k q_k = Q < p$. Para cada $f \in L^0(\mathbb{T}^\omega)$ definimos

$$N^\sharp_{\bar p,\bar q}(f) := \sup_{\substack{E\subset\mathbb{T}^\omega\\ m(E)>0}} \|f\chi_E\|_{\bar q}\cdot\left(\frac{\|\chi_E\|_{\bar p}}{\|\chi_E\|_{\bar q}}\right)^{1/p-1/Q}. \tag{3.35}$$

Con las condiciones establecidas para $\bar q$ la función $N^\sharp_{\bar p,\bar q}(\cdot)$ es también una norma por serlo $\|\cdot\|_{\bar q}$, y ahora lo que podemos probar es que esta norma es más débil que la cuasinorma $\|\cdot\|_{\bar p}^{\mathrm{w}}$:

3.49 Proposición. *Sea $\mathbf{1} \leq \bar q < \bar p < \boldsymbol{\infty}$ y supongamos $\inf_k p_k = p > 1$ y $\sup_k q_k = Q < p$. Entonces para cada $f \in L^0(\mathbb{T}^\omega)$ se tiene*

$$N^\sharp_{\bar p,\bar q}(f) \leq \left(\frac{p}{p-Q}\right)^{1/Q}\|f\|_{\bar p}^{\mathrm{w}}. \tag{3.36}$$

Demostración. Sea f una funcion medible y a.e. no nula. Sea $E \subset \mathbb{T}^\omega$ un conjunto medible de medida positiva. Denotemos $\frac{\|\chi_E\|_{\bar p}}{\|\chi_E\|_{\bar q}} = \alpha \geq 1$. De una manera análoga a lo hecho en la demostración de la Proposición 3.45(v), podemos escribir, para un $N > 0$ arbitrario,

$$\begin{aligned}
\|f\chi_E\|_{\bar{q}}^Q \leq \|f\chi_E\|_Q^Q &= Q\int_0^\infty \sigma^{Q-1} m(E\cap E_\sigma(f))\,d\sigma \\
&\leq Q\int_0^N \sigma^{Q-1} m(E)\,d\sigma + Q\int_N^\infty \sigma^{Q-1} m(E_\sigma(f))\,d\sigma \\
&\leq Q\int_0^N \sigma^{Q-1}\alpha\,d\sigma + Q\int_N^\infty \sigma^{Q-1}\|\chi_{E_\sigma(f)}\|_{\bar{p}}^p\,d\sigma \\
&\leq N^Q\alpha + Q\int_N^\infty \sigma^{Q-1}\frac{\left(\|f\|_{\bar{p}}^{\mathrm{w}}\right)^p}{\sigma^p}\,d\sigma \\
&= N^Q\alpha + \frac{Q}{p-Q}\left(\|f\|_{\bar{p}}^{\mathrm{w}}\right)^p N^{Q-p}.
\end{aligned}$$

Tomando ahora $N = \|f\|_{\bar{p}}^{\mathrm{w}}\cdot\alpha^{-1/p}$ (que hace mínimo el último miembro, como se indica en [54, p. 52]) resulta

$$\|f\chi_E\|_{\bar{q}}^Q \leq \frac{p}{p-Q}\left(\|f\|_{\bar{p}}^{\mathrm{w}}\right)^Q\alpha^{1-\frac{Q}{p}},$$

de manera que

$$\|f\chi_E\|_{\bar{q}} \leq \left(\frac{p}{p-Q}\right)^{1/Q}\|f\|_{\bar{p}}^{\mathrm{w}}\,\alpha^{1/Q-1/p}$$

y

$$\|f\chi_E\|_{\bar{q}}\,\alpha^{1/p-1/Q} \leq \left(\frac{p}{p-Q}\right)^{1/Q}\|f\|_{\bar{p}}^{\mathrm{w}},$$

cota superior independiente del conjunto E, lo que deja probada la desigualdad (3.36). □

Por otra parte es evidente la relación $N^\sharp_{\bar{p},\bar{q}}(f) \leq N_{\bar{p},\bar{q}}(f)$ para toda f entre las dos normas que hemos definido. Aunque no hemos sabido probar una equivalencia completa entre la norma mixta débil $\|\cdot\|_{\bar{p}}^{\mathrm{w}}$ y ninguna de estas dos normas, la última Proposición 3.49 no es del todo carente de interés, v. por ejemplo [54, p. 53].

Hacia un 'teorema de Marcinkiewicz' para espacios de norma mixta en $\mathbb{T}^\omega$

Sea (X,μ) un espacio de medida σ-finita. Vamos a recordar en primer lugar, siguiendo en este caso [113, V, §3] (v. también [14, 1.3], [12, 2.1]) cómo se puede definir una verdadera norma en el espacio $L^p_{\mathrm{w}}(X,\mu) = L(p,\infty)$ $(1\leq p<\infty)$, equivalente a la cuasinorma débil $\|\cdot\|_p^{\mathrm{w}}$, con la cual $L^p_{\mathrm{w}}(\mu)$ es un espacio de Banach.

Sea $1\leq p<\infty$. Si $f\in L^0(\mu)$, denotemos $m_f(\sigma) := \mu(E_\sigma(f))$ para cada $\sigma>0$. Se ha definido $L^p_{\mathrm{w}}(\mu) = \{f\colon \|f\|_p^{\mathrm{w}} = \sup_{\sigma>0}\sigma[m_f(\sigma)]^{1/p} < \infty\}$. Sea f^* el *reordenamiento no creciente* de f, es decir, la función definida por

$$f^*(t) := \inf\{\sigma\colon m_f(\sigma)\leq t\},\quad t\in(0,\infty).$$

Se tiene [113, V, Lemma 3.8]

$$\|f\|_p^{\mathrm{w}} = \sup_{t>0} t^{1/p}f^*(t) =: \|f\|_{p\,\infty}^*$$

y la finitud de esta cuasinorma define el *espacio de Lorentz*[31] $L(p,\infty)$ o $L^p_{\mathrm{w}}(\mu)$.

[31] Para todo conjunto medible E de medida finita se tiene $\|\chi_E\|_{p\,\infty}^* = \mu(E)^{1/p}$, y $L(p,\infty)$ es el mayor espacio normado donde se cumple esto [113, V, 3.10].

Sea ahora
$$M_f(t) := \frac{1}{t}\int_0^t f^*(u)\,du, \quad t \in (0,\infty);$$
se tiene $M_f(t) \geq f^*(t)$ para todo $t > 0$ con lo cual, definiendo
$$\|f\|_{p\,\infty} := \sup_{t>0} t^{1/p} M_f(t),$$
se cumple $\|f\|^*_{p\,\infty} \leq \|f\|_{p\,\infty}$. Además esta función es una norma, y se cumple
$$\|f\|_{p\,\infty} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|^*_{p\,\infty}$$
[113, V, Thm. 3.21]. Se sigue de esto que el espacio de las funciones medibles para las que $\|f\|_{p\,\infty}$ es finita es el espacio de Lorentz $L(p,\infty)$ recién definido, que ahora con esta norma $\|\cdot\|_{p\,\infty}$ es un espacio de Banach [113, V, Thm. 3.22].

3.50 Definición. En orden a estudiar posibles extensiones del teorema de interpolación de Marcinkiewicz para espacios de norma mixta en $\mathbb{T}^\omega$, el caso que en principio parece el más sencillo de abordar ocurre si se consideran operadores lineales o sublineales acotados $T\colon L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega) \to L^s_{\mathrm{w}}(\mathbb{T}^\omega)$ ($\bar{p} \geq \mathbf{1}$, $s \geq 1$), es decir, tales que existe una constante M tal que para toda $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ se tiene
$$\|T(f)\|^{\mathrm{w}}_s \leq M\|f\|_{\bar{p}}$$
o bien, tales que
$$m(E_\sigma(f))^{1/s} \leq \frac{M}{\sigma}\|f\|_{\bar{p}}$$
para todo $\sigma > 0$. Vamos a decir, con Ballester [2, p. 69], que un operador T así es *de tipo débil semi-mixto* $(\bar{p}, s)$.

La siguiente proposición, en el estilo del resultado [2, Lema 2.B.1] de Ballester da, por interpolación, tipo débil semi-mixto en los "puntos interiores de un segmento" cuyos extremos son de tipo débil semi-mixto:

3.51 Proposición. *Sean $\mathbf{1} \leq \bar{p}, \bar{q} < \boldsymbol{\infty}$ ($\bar{p} \neq \bar{q}$) con $\sup_k p_k < \infty$ y supongamos $1 \leq P \leq Q < \infty$. Sea $T\colon L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega) + L^{\bar{q}}(\mathbb{T}^\omega) \to L^0(\mathbb{T}^\omega)$ un operador lineal de tipos débiles semi-mixtos $(\bar{p}, P)$ y $(\bar{q}, Q)$, es decir, tal que son continuos $T\colon L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega) \to L^P_{\mathrm{w}}(\mathbb{T}^\omega)$ y $T\colon L^{\bar{q}}(\mathbb{T}^\omega) \to L^Q_{\mathrm{w}}(\mathbb{T}^\omega)$ con normas respectivas M_1 y M_2. Sean, para cada θ, $(0 < \theta < 1)$, $\frac{1}{\bar{r}(\theta)} = \frac{1-\theta}{\bar{p}} + \frac{\theta}{\bar{q}}$ y $\frac{1}{R(\theta)} = \frac{1-\theta}{P} + \frac{\theta}{Q}$. Entonces, T es también de tipo débil semi-mixto $\big(\bar{r}(\theta), R(\theta)\big)$ y su norma es $M \leq M_1^{1-\theta} M_2^\theta$.*

Demostración. Sabemos, de acuerdo con la Proposición 3.41, que
$$\big[L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega), L^{\bar{q}}(\mathbb{T}^\omega)\big]_\theta = L^{\bar{r}(\theta)}(\mathbb{T}^\omega),$$
y por otro lado, ya que los $L^p_{\mathrm{w}}(\mathbb{T}^\omega)$ son espacios de Banach, sabemos también (v. [14, 5.3.1]) que
$$\big[L^P_{\mathrm{w}}(\mathbb{T}^\omega), L^Q_{\mathrm{w}}(\mathbb{T}^\omega)\big]_\theta = L^{R(\theta)}_{\mathrm{w}}(\mathbb{T}^\omega),$$
de manera que la conclusión resulta inmediatamente sin más que aplicar el Teorema 3.32 de interpolación de Calderón. □

Nuestro trabajo en este capítulo va a terminar con el siguiente sencillo resultado de interpolación. Hubiéramos querido alcanzar como conclusión natural[32] el tipo $(\bar{r}, R)$ fuerte semi-mixto en los "puntos interiores de un segmento" cuyos extremos son de tipo débil semi-mixto $(\bar{p}, P)$ y $(\bar{q}, Q)$ respectivamente. Pero no hemos sabido demostrar esto.

[32] Que tiene su antecedente en el Teorema 2.B.2 de [2], y sería interesante poder aplicarla para la prueba de un resultado para espacios de norma mixta análogo a la Proposición 4.21 (v. la sección final del Capítulo 4). Aquí queda como conjetura.

3.52 Proposición. *Sean* $\mathbf{1} \leq \bar{p} < \bar{q} < \boldsymbol{\infty}$ *y supongamos* $\sup_k p_k = P \leq \sup_k q_k = Q < \infty$. *Sea* $T\colon L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega) + L^{\bar{q}}(\mathbb{T}^\omega) \to L^0(\mathbb{T}^\omega)$ *un operador lineal de tipos débiles semi-mixtos* $(\bar{p}, P)$ *y* $(\bar{q}, Q)$. *Para un* θ *fijo* $(0 < \theta < 1)$, *sean* $\frac{1}{\bar{r}} = \frac{1-\theta}{\bar{p}} + \frac{\theta}{\bar{q}}$ *y* $\frac{1}{R} = \frac{1-\theta}{P} + \frac{\theta}{Q}$. *Sea además* $\mathbf{1} \leq \bar{s} < \bar{r}$ *tal que se verifica* $\sup_k s_k = S < \operatorname{ínf}_k r_k = r$. *Entonces el operador* T *es de tipo* $(\bar{r}, \bar{s})$ *fuerte.*

Demostración. Sea $f \in L^{\bar{r}}(\mathbb{T}^\omega)$. Aplicando en primer lugar la Proposición 3.51 se tiene

$$\|T(f)\|_R^{\mathrm{w}} \leq M\|f\|_{\bar{r}}$$

con M independiente de f. Por otra parte, para todo $k = 1, 2, \ldots$ se tiene

$$\frac{1}{r_k} = \frac{1-\theta}{p_k} + \frac{\theta}{q_k} \geq \frac{1-\theta}{P} + \frac{\theta}{Q} = \frac{1}{R},$$

así que $\bar{r} \leq R$ y, por tanto,

$$\|T(f)\|_{\bar{r}}^{\mathrm{w}} \leq \|T(f)\|_R^{\mathrm{w}}$$

de acuerdo con la Proposición 3.45(iii). Y usando finalmente la desigualdad de la Proposición 3.45(v) llegamos a que

$$\|T(f)\|_{\bar{s}} \leq \left(\frac{r}{r-S}\right)^{1/S} \|T(f)\|_{\bar{r}}^{\mathrm{w}} \leq M \left(\frac{r}{r-S}\right)^{1/S} \|f\|_{\bar{r}}. \qquad \square$$

3.53 Nota. En una comunicación personal (24/3/2018) A. Bendikov indicó a Luz Roncal que la acotación $(\bar{p}, \bar{p})$, para $\mathbf{1} < \bar{p} < \boldsymbol{\infty}$, de la transformada de Riesz en espacios $L^{\bar{p}}$ de norma mixta sobre productos infinitos de espacios de probabilidad, que él deja conjeturada en su libro [3, Remark 6.3.4, p. 165], es un problema aún abierto, señalándoselo como otro posible tema de investigación. Se podría estudiar tanto con las BPS $\bar{p}$-normas como con las JLR $\bar{p}$-normas.

4

Teoremas de Marcel Riesz en $\mathbb{T}^{\omega}$. Convergencia a.e.

En este capítulo final vamos a seguir hasta donde nos sea posible las pautas que dejó escritas JLR en la segunda Hoja del guión científico de su carta, v. Figuras 5 y 6 al final de la Presentación. Por otra parte fue su propio trabajo en relación con alguno de los puntos que allí se esbozaban lo que JLR expuso en su artículo [101], donde solamente incorporaba los enunciados de los resultados que había obtenido y alguna idea sobre las líneas de demostración. Nos ha parecido que tal vez no era inoportuno tratar de completar aquellos enunciados con la reconstrucción, o el intento de reconstrucción, de alguna prueba por nuestra parte.

Nuestra exposición va a constar de tres secciones. En la primera el tema principal es el teorema de Marcel Riesz sobre la convergencia en $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ $(1 < p < \infty)$ de ciertas sumas parciales de las series de Fourier en infinitas variables. En la segunda lo mismo en los espacios de norma mixta $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ $(\mathbf{1} < \bar{p} < \boldsymbol{\infty})$. En la última sección comentamos sobre convergencia puntual a.e. de las series de Fourier.

4.1. Convergencia de sumas parciales de las series de Fourier en la norma de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$

El objetivo de esta sección es entonces, como acabamos de decir, desarrollar en la medida de nuestras posibilidades lo que queda expuesto en el texto de la Figura 5) y en el siguiente extracto literal del artículo [101] de JLR:

> Fijada una sucesión (ε_n) de números positivos con $\varepsilon_n \to 0$, definimos en $\mathbb{Z}^\infty$ los *rectángulos*
>
> $$R = \{\bar{n} \colon |n_k| < \varepsilon_k \text{ para todo } k\},$$
> $$\delta R = \{\bar{n} \colon |n_k| < \delta\varepsilon_k \text{ para todo } k\}, \quad 0 < \delta < \infty.$$
>
> Es obvio que $\{\delta R\}$ es una familia creciente de subconjuntos finitos cuya unión es todo $\mathbb{Z}^\infty$. Se trata de estudiar si las sumas
>
> $$S_{\delta R} f(x) = \sum_{\bar{n} \in \delta R} \widehat{f}(\bar{n}) e^{2\pi i \bar{n}\cdot x}$$
>
> de la función $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ convergen en algún sentido a f, cuando $\delta \to \infty$.
>
> *Convergencia en Norma.–* El análogo del teorema de M. Riesz: $\|S_{\delta R} f\|_p \le C_p \|f\|_p$ solo es válido para $p = 2$ según es fácil probar. En L^2 el teorema es trivial.
>
> La acotación uniforme de $(S_{\delta R})$ equivale a la existencia de un operador acotado S_Γ asociado al multiplicador χ_Γ, con $\Gamma = \{\bar{n} \in \mathbb{Z}^\infty \colon n_k > 0\}$ [101, p. 237-239].

4.1 Definición. Un *rectángulo* en $\mathbb{Z}^\infty$ es, en general, un conjunto $R = \prod_{j=1}^\infty I_j$ donde $I_j \subset \mathbb{Z}$ es un intervalo finito no vacío para cada índice j, es decir, $I_j = \{h \in \mathbb{Z}\colon a_j \le h \le b_j\}$ donde $a_j \le b_j$ son números enteros fijos.

La primera proposición de JLR en el texto que leemos en la Figura 5 indica cómo deben estar formados los rectángulos de $\mathbb{Z}^\infty$ que son subconjuntos finitos. En todo lo que sigue ponemos $\#A$ para indicar el número de elementos de un conjunto finito A.

4.2 Proposición. *Sea $R = \prod_{j=1}^\infty I_j$ un rectángulo en $\mathbb{Z}^\infty$. Entonces, R es un conjunto finito $\iff \#I_j = 1$ para casi todo $j \in \mathbb{N}$, es decir, para todo $j \ge j_0$.*

Demostración. $\boxed{\Leftarrow}$ Suponemos que $\#I_j < \infty$ para todo j, y que $\#I_j = 1$ para todo $j \ge j_0$. Se tiene entonces

$$\#R = \prod_{j=1}^{\infty} (\#I_j) = \prod_{j=1}^{j_0-1} (\#I_j) < \infty.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Si no es cierto que $\#I_j = 1$ para casi todo j, como $I_j \neq \emptyset$ para todo j, habrá una subsucesión $(I_{j_n})_{n=1}^\infty$ tal que $\#I_{j_n} \ge 2$ para todo n. En tal caso, para todo $N \in \mathbb{N}$ se tendría

$$\#R > \prod_{n=1}^{N} (\#I_{j_n}) \ge 2^N,$$

luego R no puede ser un conjunto finito. □

4.1.1. Las sumas parciales $S_{\delta R}(f)$ de JLR

4.3 Definición. Vamos a considerar una sucesión fija de aquí en adelante de números positivos (c_k) tal que $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$ y el rectángulo por consiguiente finito también fijo en todo lo que sigue

$$R := \{\bar{n} \in \mathbb{Z}^\infty\colon -c_k \le n_k \le c_k \text{ para todo } k\}. \tag{4.1}$$

Para cada número $\delta > 0$ el rectángulo homotético δR es también un rectángulo finito, y se tiene $\bigcup_{\delta>0} \delta R = \mathbb{Z}^\infty$. Dada una función $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$ queda bien definida puntualmente, ya que es un polinomio trigonométrico, la función *suma parcial*

$$(S_{\delta R}(f))(x) := \sum_{\bar{n}\in\delta R} \widehat{f}(\bar{n}) e^{2\pi i \bar{n}\cdot x}.$$

4.4 Proposición. *Sea $1 \le p < \infty$. Para cada $\delta > 0$ fijo el operador lineal $S_{\delta R}$ es acotado de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ en sí mismo.*

Demostración. Sea $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$. Para un $\delta > 0$ fijo sea $m(R,\delta) := \#(\delta R)$. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|S_{\delta R}(f)\|_p &= \left(\int_{\mathbb{T}^\omega} \left| \sum_{\bar{n}\in\delta R} \widehat{f}(\bar{n}) e^{2\pi i \bar{n}\cdot x} \right|^p dx \right)^{1/p} \\
&\le \left(\int_{\mathbb{T}^\omega} \Big(\sum_{\bar{n}\in\delta R} |\widehat{f}(\bar{n})| \Big)^p dx \right)^{1/p} = \Big(\sum_{\bar{n}\in\delta R} |\widehat{f}(\bar{n})| \Big)^{p\cdot 1/p} \cdot \Big(\int_{\mathbb{T}^\omega} dx \Big)^{1/p} = \sum_{\bar{n}\in\delta R} |\widehat{f}(\bar{n})| \\
&\le m(R,\delta) \|\widehat{f}\|_\infty \le m(R,\delta) \|f\|_1 \le m(R,\delta) \|f\|_p,
\end{aligned}$$

luego el operador $S_{\delta R}$ es acotado de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ en sí mismo con una norma en principio dependiente de δ y de la sucesión (c_k) que define el rectángulo R. □

La siguiente proposición, que establece que, cuando $1 \leq p < \infty$, el hecho de que estos operadores continuos $S_{\delta R}$ sean equicontinuos (es decir, estén acotados uniformemente por una cota independiente de δ) es condición necesaria y suficiente para que la familia de funciones $S_{\delta R}(f)$ converja a la función f en la norma de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ cuando $\delta \to \infty$ para toda $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$, es estándar (v. [52, Thm. 4.1.1], [40, 12.10.1]) pero damos la demostración por completitud.

4.5 Proposición. *Sea $1 \leq p < \infty$. Se tiene $S_{\delta R}(f) \to f$ en la norma de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ cuando $\delta \to \infty$ para toda $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$ si y solo si los operadores $S_{\delta R}$ están uniformemente acotados, es decir, $\iff \sup_{\delta>0} \|S_{\delta R}(f)\|_p \leq c_{p,R}\|f\|_p$ para toda $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$ con una constante $c_{p,R}$ independiente de f.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Suponemos que para toda $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$ se tiene $\lim_{\delta\to\infty} \|S_{\delta R}(f) - f\|_p = 0$. Entonces para una f fija es $\lim_{\delta\to\infty} \|S_{\delta R}(f)\|_p = \|f\|_p$ y, en particular, la familia de números no negativos $\{\|S_{\delta R}(f)\|_p\}_{\delta>0}$ es una familia acotada, es decir, se tiene

$$\|S_{\delta R}(f)\|_p \leq C_{f,R} \tag{4.2}$$

donde la constante $C_{f,R}$ depende de la función $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$ y posiblemente del rectángulo fijo de partida R, pero no depende de δ.

Así que $\{S_{\delta R}\}_{\delta>0}$ es una familia de operadores lineales acotados de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ en sí mismo según la proposición anterior y que verifican (4.2) para cada $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$. Aplicando el *principio de acotación uniforme* (Teorema de Banach–Steinhaus) resulta que existe una constante $c_{p,R}$ tal que

$$\sup_{\delta>0} \|S_{\delta R}\|_{L^p(\mathbb{T}^\omega)\to L^p(\mathbb{T}^\omega)} \leq c_{p,R},$$

es decir, tal que

$$\sup_{\delta>0} \|S_{\delta R}(f)\|_p \leq c_{p,R}\,\|f\|_p \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{T}^\omega).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ (Seguimos los pasos de [52, *loc. cit.*]) Sea $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$ y $\varepsilon > 0$. Aplicando el Teorema 1.17, existe un polinomio trigonométrico $P(x) = \sum_{\bar n\in\Delta} \widehat{P}(\bar n)e^{2\pi i\bar n\cdot x}$ (donde $\Delta \subset \mathbb{Z}^\infty$ es un conjunto finito) definido en $\mathbb{T}^\omega$ tal que $\|f - P\|_p < \varepsilon$. Sea d el grado de P, recordemos que $d := \max_{\bar n\in\Delta} \sum |n_k|$.

Pongamos $a(\bar n, \delta) := \begin{cases} 1 & \text{si } \bar n \in \delta R, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$ Como $\{\delta R\}_{\delta>0}$ es una familia creciente de conjuntos cuya unión es $\mathbb{Z}^\infty$, existe un $\delta_0 > 0$ tal que para todo $\delta > \delta_0$ se tiene

$$\sum_{\substack{\bar n\in\mathbb{Z}^\infty \\ |n_1|+|n_2|+\cdots\leq d}} |a(\bar n, \delta) - 1| \cdot |\widehat{P}(\bar n)| \leq \varepsilon,$$

ya que para todo $\bar n \in \mathbb{Z}^\infty$ tal que $|n_1| + |n_2| + \cdots \leq d$ se tiene $\lim_{\delta\to\infty} a(\bar n, \delta) = 1$.

Deducimos que, para todo $\delta > \delta_0$,

$$\begin{aligned}
\|S_{\delta R}(P) - P\|_p \leq \|S_{\delta R}(P) - P\|_\infty &= \sup_{x\in\mathbb{T}^\omega} \left| \sum_{\bar n\in\delta R} \widehat{P}(\bar n)e^{2\pi i\bar n\cdot x} - \sum_{\bar n\in\Delta} \widehat{P}(\bar n)e^{2\pi i\bar n\cdot x} \right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{T}^\omega} \left| \sum_{\substack{\bar n\in\mathbb{Z}^\infty \\ |n_1|+|n_2|+\cdots\leq d}} \big(a(\bar n, \delta) - 1\big)\widehat{P}(\bar n)e^{2\pi i\bar n\cdot x} \right| \\
&\leq \sum_{\substack{\bar n\in\mathbb{Z}^\infty \\ |n_1|+|n_2|+\cdots\leq d}} |a(\bar n, \delta) - 1| \cdot |\widehat{P}(\bar n)| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Entonces, por hipótesis, para todo $\delta > \delta_0$ se tiene

$$\begin{aligned}\|S_{\delta R}(f) - f\|_p &\le \|S_{\delta R}(f) - S_{\delta R}(P)\|_p + \|S_{\delta R}(P) - P\|_p + \|f - P\|_p \\ &\le \|S_{\delta R}(f - P)\|_p + 2\varepsilon < (c_{p,R} + 2)\varepsilon,\end{aligned}$$

luego $S_{\delta R}(f) \to f$ en la norma de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ cuando $\delta \to \infty$. □

Convergencia en $L^2(\mathbb{T}^\omega)$

En el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{T}^\omega)$, como hemos recordado en la Nota 1.15, la serie de Fourier de una función representa a la función en el sentido del propio espacio, es decir, converge a la función en la norma del espacio. Esto hace que el siguiente resultado sea sencillo de probar.

4.6 Proposición. *Sea $f \in L^2(\mathbb{T}^\omega)$. Entonces se tiene* $\lim_{\delta\to\infty} \|S_{\delta R}(f) - f\|_2 = 0$.

Demostración. Tengamos en cuenta que para cada $\delta > 0$ se tiene

$$\widehat{(S_{\delta R} f)}(\bar n) = \begin{cases} \widehat{f}(\bar n) & \text{si } \bar n \in \delta R, \\ 0 & \text{si } \bar n \in (\delta R)^c. \end{cases}$$

Sea $\varepsilon > 0$; la identidad de Plancherel [104, 4.15, p. 83], [40, I, 8.2.1]

$$\sum_{\bar n \in \mathbb{Z}^\infty} |\widehat{f}(\bar n)|^2 := \sup_{\substack{\Delta \subset \mathbb{Z}^\infty \\ \Delta \text{ finito}}} \Big\{ \sum_{\bar n \in \Delta} |\widehat{f}(\bar n)|^2 \Big\} = \|f\|_2^2 < \infty$$

implica que existe un conjunto finito $\Delta_0 \subset \mathbb{Z}^\infty$ tal que

$$\sum_{\bar n \in \Delta_0} |\widehat{f}(\bar n)|^2 > \|f\|_2^2 - \varepsilon = \sum_{\bar n \in \mathbb{Z}^\infty} |\widehat{f}(\bar n)|^2 - \varepsilon,$$

por consiguiente

$$\sum_{\bar n \in \Delta_0^c} |\widehat{f}(\bar n)|^2 = \sum_{\bar n \in \mathbb{Z}^\infty} |\widehat{f}(\bar n)|^2 - \sum_{\bar n \in \Delta_0} |\widehat{f}(\bar n)|^2 < \varepsilon.$$

Por otra parte existe $\delta_0 > 0$ tal que $\Delta_0 \subset \delta_0 R \subset \delta R$ para todo $\delta > \delta_0$. Entonces, para todo $\delta > \delta_0$ se verifica, volviendo a usar la identidad de Plancherel,

$$\|f - S_{\delta R} f\|_2^2 = \sum_{\bar n \in \mathbb{Z}^\infty} |\widehat{(f - S_{\delta R} f)}(\bar n)|^2 = \sum_{\bar n \in (\delta R)^c} |\widehat{f}(\bar n)|^2 \le \sum_{\bar n \in (\delta_0 R)^c} |\widehat{f}(\bar n)|^2 \le \sum_{\bar n \in \Delta_0^c} |\widehat{f}(\bar n)|^2 < \varepsilon,$$

ya que $(\delta R)^c \subset (\delta_0 R)^c \subset \Delta_0^c$ y los sumandos son no negativos. Esto termina la demostración. □

Fallo de la convergencia en $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ para $p \neq 2$

Los operadores $S_{\delta R}$ no son en cambio equicontinuos de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ en sí mismo cuando $p \neq 2$, por lo que de acuerdo con la Proposición 4.5 existirá una función $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$ tal que las sumas parciales $S_{\delta R}(f)$ divergen cuando $\delta \to \infty$.

Vamos a desarrollar la prueba que deja perfectamente delineada JLR en las líneas 12–17 del texto de la Figura 5, y para ello damos en primer lugar el lema auxiliar que vemos enunciado y prácticamente probado en las líneas 12–14.

4.7 Lema (JLR, 1977)**.** Sea $1 \le p < \infty$ y $T\colon L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$, definido por $T(f) := k * f$ con $k \in L^1(\mathbb{T})$, un operador acotado con norma $\|T\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})} =: \|T\| < \infty$. Consideramos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el operador $T^{(n)}\colon L^p(\mathbb{T}^n) \to L^p(\mathbb{T}^n)$, definido por

$$T^{(n)}(f) := (k \otimes \overset{(n)}{\cdots} \otimes k) * f \text{ donde } (k \otimes \overset{(n)}{\cdots} \otimes k)(x_1, \dots, x_n) = k(x_1) \cdots k(x_n), \quad f \in L^p(\mathbb{T}^n).$$

Entonces, se tiene que $T^{(n)}$ es acotado y tiene norma $\|T^{(n)}\|_{L^p(\mathbb{T}^n)\to L^p(\mathbb{T}^n)} = \|T\|^n$.

Demostración. Lo probamos por inducción. Para $n = 1$ se verifica por hipótesis. De hecho [40, I, 3.1.6] es $\|T\| \leq \|k\|_1$.

Supongamos el lema cierto para $n-1$ con $n \geq 2$. Sea $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$. Consideraremos en lo que sigue la notación $x = (x_1, x')$ para los puntos de $\mathbb{T}^n$, donde $x' = (x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{T}^{n-1}$. Para cada x' fijo denotamos por $f_{x'}$ la función de la variable $x_1 \in \mathbb{T}$ definida por $f_{x'}(x_1) = f(x_1, x')$. Como

$$\int_{\mathbb{T}^n} |f(x_1, x')|^p \, dx = \int_{\mathbb{T}^{n-1}} dx' \int_{\mathbb{T}} |f_{x'}(x_1)|^p \, dx_1,$$

se sigue del teorema de Tonelli que $f_{x'} \in L^p(\mathbb{T})$ para casi todo $x' \in \mathbb{T}^{n-1}$ y por consiguiente, del lema en dimensión 1 se sigue que $T(f_{x'}) = k * f_{x'} \in L^p(\mathbb{T})$ y

$$\|k * f_{x'}\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|T\| \cdot \|f_{x'}\|_{L^p(\mathbb{T})}. \tag{4.3}$$

Abreviemos con $k^{(n-1)}(x') := (k \otimes \overset{(n-1)}{\cdots} \otimes k)(x') = k(x_2) \cdots k(x_n)$. Para cada $x_1 \in \mathbb{T}$ fijo denotemos por f_{x_1} la función de $n-1$ variables $x' \in \mathbb{T}^{n-1}$ definida por $f_{x_1}(x') = f(x_1, x')$. Se tiene

$$(T^{(n-1)} f_{x_1})(x') = (k^{(n-1)} * f_{x_1})(x') = \int_{\mathbb{T}^{n-1}} k^{(n-1)}(y') f(x_1, x' - y') dy',$$

de modo que, aplicando el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
(T^{(n)} f)(x_1, x') &= \big((k \otimes k^{(n-1)}) * f\big)(x_1, x') = \int_{\mathbb{T}^n} k(y_1) k^{(n-1)}(y') f(x_1 - y_1, x' - y') \, dy_1 dy' \\
&= \int_{\mathbb{T}^{n-1}} k^{(n-1)}(y') \left(\int_{\mathbb{T}} k(y_1) f_{x'-y'}(x_1 - y_1) \, dy_1 \right) dy' \\
&= \int_{\mathbb{T}^{n-1}} k^{(n-1)}(y') (k * f_{x'-y'})(x_1) \, dy' = \int_{\mathbb{T}^{n-1}} k^{(n-1)}(y') (T f_{x'-y'})(x_1) \, dy' \\
&= (k^{(n-1)} * G(x_1, \cdot))(x') = \big(T^{(n-1)}(G(x_1, \cdot))\big)(x'),
\end{aligned}$$

donde se ha denotado $(T f_{\xi'})(\xi_1) =: G(\xi_1, \xi')$.

En definitiva se tiene, aplicando Fubini, la hipótesis de inducción y la desigualdad (4.3),

$$\begin{aligned}
\|T^{(n)}(f)\|^p_{L^p(\mathbb{T}^n)} &= \int_{\mathbb{T}^n} \left| (T^{(n)} f)(x_1, x') \right|^p \, dx_1 dx' = \int_{\mathbb{T}} dx_1 \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \left| \big(T^{(n-1)}(G(x_1, \cdot))\big)(x') \right|^p \, dx' \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} \|T\|^{p(n-1)} \cdot \|G(x_1, \cdot)\|^p_{L^p(\mathbb{T}^{n-1})} \, dx_1 \\
&= \|T\|^{p(n-1)} \int_{\mathbb{T}} dx_1 \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \left| G(x_1, x') \right|^p \, dx' \\
&= \|T\|^{p(n-1)} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} dx' \int_{\mathbb{T}} \left| G(x_1, x') \right|^p \, dx_1 = \|T\|^{p(n-1)} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} dx' \int_{\mathbb{T}} |(T f_{x'})(x_1)|^p \, dx_1 \\
&\leq \|T\|^{p(n-1)} \cdot \|T\| \int_{\mathbb{T}^{n-1}} dx' \int_{\mathbb{T}} |f_{x'}(x_1)|^p \, dx_1 = \|T\|^{np} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} dx' \int_{\mathbb{T}} |f(x_1, x')|^p \, dx_1 \\
&= \|T\|^{np} \int_{\mathbb{T}^n} |f(x_1, x')|^p \, dx = \|T\|^{np} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{T}^n)},
\end{aligned}$$

luego se verifica $\|T^{(n)}\|_{L^p(\mathbb{T}^n) \to L^p(\mathbb{T}^n)} \leq \|T\|^n_{L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})}$.

Nos queda ver que también es $\|T^{(n)}\|_{L^p(\mathbb{T}^n) \to L^p(\mathbb{T}^n)} \geq \|T\|^n$, de donde se sigue la igualdad de normas requerida. Estamos aún dentro del proceso de inducción, por lo cual estamos suponiendo también que se cumple

$$\|T^{(n-1)}\|_{L^p(\mathbb{T}^{n-1}) \to L^p(\mathbb{T}^{n-1})} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{g \in L^p(\mathbb{T}^{n-1}) \\ \|g\|_p = 1}} \left\{ \|T^{(n-1)} g\|_p \right\} = \|T\|^{n-1}_{L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})}.$$

Aplicando el lema en dimensión 1 y la hipótesis de inducción, dado $\varepsilon > 0$ existen $f_\varepsilon \in L^p(\mathbb{T})$ y $g_\varepsilon \in L^p(\mathbb{T}^{n-1})$ tales que $\|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|g_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{T}^{n-1})} = 1$, $\|T(f_\varepsilon)\|_{L^p(\mathbb{T})} > \|T\| - \varepsilon$ y $\|T^{(n-1)}(g_\varepsilon)\|_{L^p(\mathbb{T}^{n-1})} > \|T\|^{n-1} - \varepsilon$.

Consideremos entonces la función $F_\varepsilon(x_1, x') = (f_\varepsilon \otimes g_\varepsilon)(x_1, x') = f_\varepsilon(x_1)g_\varepsilon(x')$. Se tiene $\|F_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} = \|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{T})} \cdot \|g_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{T}^{n-1})} = 1$. Además,

$$(T^{(n)}F_\varepsilon)(x_1, x') = \int_{\mathbb{T}^n} k(y_1)k^{(n-1)}(y')f_\varepsilon(x_1 - y_1)g_\varepsilon(x' - y')\, dy_1\, dy' = (Tf_\varepsilon)(x_1) \cdot (T^{(n-1)}g_\varepsilon)(x').$$

Por consiguiente,

$$\|T^{(n)}\|_{L^p(\mathbb{T}^n)\to L^p(\mathbb{T}^n)} \geq \|T^{(n)}(F_\varepsilon)\|_p = \|T(f_\varepsilon)\|_p \cdot \|T^{(n-1)}(g_\varepsilon)\|_p > (\|T\| - \varepsilon)(\|T\|^{n-1} - \varepsilon).$$

De la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ se deduce entonces que $\|T^{(n)}\|_{L^p(\mathbb{T}^n)\to L^p(\mathbb{T}^n)} \geq \|T\|^n_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})}$ y con eso hemos terminado. □

La proposición siguiente es una versión del teorema de Marcel Riesz [123, VII,(2·4)] que establece que la función χ_I, siendo $I \subset \mathbb{Z}$ un intervalo finito, es un *multiplicador* [41, 1.1.3] de $L^p(\mathbb{T})$ en sí mismo. Aunque el resultado sea muy estándar (v. por ej. [40, 12.9], [41, 6.3.2], [52, Prop. 4.1.6], [90, Thm. 3.20]) nosotros vamos a recordar por completitud de lectura las líneas generales de la prueba. Queda como testimonio de nuestro trabajo con el texto de la Figura 5.

4.8 Proposición. *Sea $1 < p < \infty$. Para cada intervalo finito $I \subset \mathbb{Z}$ se considera el operador suma parcial definido por*

$$(S_I f)(x) := \sum_{n\in I} \widehat{f}(n)e^{2\pi inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi_I(n)\widehat{f}(n)e^{2\pi inx} \quad \textit{para } f \in L^2(\mathbb{T}) \cap L^p(\mathbb{T}).$$

Se tiene

$$\sup_{\substack{I\subset\mathbb{Z} \\ I \text{ intervalo finito}}} \|S_I\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})} =: B_p < \infty,$$

y se verifica $B_2 = 1$ y $B_p > 1$ si $p \neq 2$.

Demostración. Sea $I \subset \mathbb{Z}$ un intervalo finito. Se tiene $(S_I f)(x) = (k_I * f)(x)$, donde $k_I(x) = \sum_{n\in I} e^{2\pi inx} \in L^1(\mathbb{T})$ (es un polinomio trigonométrico). El operador S_I es acotado de $L^p(\mathbb{T})$ en sí mismo porque para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$ se verifica $\|S_I(f)\|_p \leq \|k_I\|_1 \cdot \|f\|_p$. Sea $\|S_I\|_p := \|S_I\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})}$ su norma.

Si $I = [a, b]$ con $a, b \in \mathbb{Z}$, se tiene $\chi_I(m) = \chi_{(a-1,\infty)}(m) - \chi_{(b,\infty)}(m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ y, definido el operador *proyección* (de Riesz: [52, Def. 4.1.5]) para $h \in C^{(\infty}(\mathbb{T})$ por

$$(P_+h)(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{h}(n)e^{2\pi inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi_{(0,\infty)}(n)\widehat{h}(n)e^{2\pi inx},$$

en primer lugar se prueba, usando el teorema de Marcel Riesz (v. por ejemplo [52, Prop. 4.1.7]), que P_+ es un operador acotado de $L^p(\mathbb{T})$ en sí mismo. Por otro lado, escribiendo $e_n(x) = e^{2\pi inx}$ ($x \in \mathbb{T}$), se tiene (v. [90, Thm. 3.20])

$$S_I(h) = e_{a-1} \cdot P_+(\overline{e_{a-1}} \cdot h) - e_b \cdot P_+(\overline{e_b} \cdot h) \tag{4.4}$$

y de aquí resulta para toda $h \in C^{(\infty}(\mathbb{T})$, y por densidad, para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$, que

$$\|S_I(f)\|_p \leq 2\|P_+(f)\|_p \leq 2\|P_+\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})} \cdot \|f\|_p < \infty,$$

luego $\|S_I\|_p \leq 2\|P_+\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})}$, y esta cota superior para la norma (p,p)-fuerte del operador S_I no depende del intervalo I. Así que, en efecto,

$$\sup_{\substack{I\subset\mathbb{Z}\\ I \text{ intervalo finito}}} \|S_I\|_p =: B_p \leq 2\|P_+\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})} < \infty.$$

Dado un intervalo finito $I \subset \mathbb{Z}$, sobre cada polinomio trigonométrico P cuyo conjunto de caracteres esté contenido en I se tiene $S_I(P) = P$, de donde se deduce que $B_p \geq 1$ para todo p.

Ahora aplicando el teorema [52, Thm. 4.1.1] a la sucesión $a(n,N) = 1$ para $0 \leq n \leq N$ y $a(n,N) = 0$ en otro caso se concluye que el operador $A\colon L^p(\mathbb{T}) \to H^p(\mathbb{T})$ definido por

$$(Af)(x) = \sum_{n\geq 0} \widehat{h}(n)e_n(x) = \widehat{f}(0) + (P_+f)(x)$$

es acotado y su norma es menor o igual que la constante B_p anterior. El razonamiento es el siguiente:

Para $h \in C^{(\infty}(\mathbb{T})$, como $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{h}(n)| < \infty$, se puede aplicar el teorema de convergencia dominada y obtener

$$\lim_{N\to\infty} (S_{[0,N]}h)(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n,N)\widehat{h}(n)e_n(x) = \sum_{n\geq 0} \widehat{h}(n)e_n(x) = (Ah)(x) \quad \text{a.e. en } \mathbb{T}.$$

A continuación el lema de Fatou da

$$\|A(h)\|_p = \left\| \lim_{N\to\infty} S_{[0,N]}(h) \right\|_p \leq \liminf_{N\to\infty} \|S_{[0,N]}(h)\|_p \leq B_p\|h\|_p$$

por hipótesis, y entonces A se puede extender por densidad a un operador (denotado igualmente por A) acotado en todo $L^p(\mathbb{T})$ con la misma norma.

De modo que se tiene

$$\|A(f)\|_p \leq B_p\|f\|_p \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{T}) \quad \text{y así } \|A\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})} \leq B_p.$$

Ahora, [68, Corollary 2.5][1] (cf. también [51, eq.(6), p. 181]) asegura que

$$\|A\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})} = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{p}\right) \qquad (1 < p < \infty),$$

luego $B_p \geq \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{p}\right)$. En particular es $B_p > 1$ si $p \neq 2$, como queríamos asegurar. Por otra parte, del resultado análogo en dimensión 1 a la Proposición 4.6 se sigue que $B_2 = 1$. □

4.9 Nota. M. Riesz [97, I, §1–8] dio estimaciones para la norma A_p del operador "función conjugada" $H(f) = \tilde{f}$ en $L^p(\mathbb{T})$ $(p > 1)$. Vio que $A_2 = 1$ y que, si $1/p + 1/q = 1$, entonces $A_p = A_q > 1$. Stylianos Pichorides [93] dio el valor exacto $A_p = \tan\left(\frac{\pi}{2p}\right)$ si $1 < p \leq 2$, $A_p = \cot\left(\frac{\pi}{2p}\right)$ si $2 \leq p < \infty$.

Por otra parte, para todo $p > 1$ también se tiene $\|P_+\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})} = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{p}\right)$ [68, Corollary 2.6]. De una representación como la que escribe Duoandikoetxea en [37, (3.9), p. 58] se deduce que $B_p \leq A_p$. Y es de comprobación inmediata que $A_p \leq 2\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{p}\right) = 2\|P_+\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})}$.

Con el Lema 4.7 y la Proposición 4.8 ya tenemos los recursos suficientes para probar el siguiente resultado en el contexto de $\mathbb{T}^\omega$, que establece una nueva diferencia[2] con lo que ocurre en el caso finito-dimensional. La reconstrucción de la prueba es nuestra. Junto con la anterior Proposición 4.6, completa la afirmación $\sup_{\delta>0} \|S_{\delta R}(f)\|_p \leq c_p\|f\|_p$ para toda $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$ si y solo si $p = 2$.

[1] El operador que se denota como P_+ en esta referencia es el que nosotros hemos denotado como A.
[2] V. [39, 2.9.7].

4.10 Proposición (JLR, 1977)**.** *Sea $1 < p < \infty$ y supongamos $p \neq 2$. Entonces,*

$$\sup_{\delta>0} \|S_{\delta R}\|_{L^p(\mathbb{T}^\omega)\to L^p(\mathbb{T}^\omega)} = +\infty.$$

Demostración. En la Proposición 4.8 se acaba de probar que, si $p \neq 2$, entonces

$$\sup_{\substack{I\subset\mathbb{Z} \\ I \text{ intervalo finito}}} \|S_I\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})} = B_p > 1. \tag{4.5}$$

Sea entonces $p \neq 2$ y sea $d := B_p - 1 > 0$. Por (4.5), existe un intervalo finito $I_0 \subset \mathbb{Z}$ tal que $\|S_{I_0}\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})} > 1 + \frac{d}{2}$. Recordemos que, actuando sobre una función f integrable en $\mathbb{T}$,

$$S_{I_0}(f) = k_{I_0} * f \quad \text{donde} \quad k_{I_0}(x) = \sum_{n\in I_0} e^{2\pi i n x} \quad (x \in \mathbb{T}).$$

Vamos a ver que para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|S_{\delta R}\|_{L^p(\mathbb{T}^\omega)\to L^p(\mathbb{T}^\omega)} > M$.

Primeramente consideremos lo siguiente. Sea $n > 1$. Si $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ e $I_0^n = I_0 \times \overset{(n)}{\cdots} \times I_0$,

$$(S_{I_0^n} f)(x) = \sum_{m\in I_0^n} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m\cdot x} = (k_{n,I_0} * f)(x) \quad (x \in \mathbb{T}^n),$$

donde

$$k_{n,I_0}(x) := \sum_{\substack{m=(m_j)\in\mathbb{Z}^n \\ m_j\in I_0}} e^{2\pi i m\cdot x} = \Big(\sum_{m_1\in I_0} e^{2\pi i m_1 x_1}\Big)\cdots\Big(\sum_{m_n\in I_0} e^{2\pi i m_n x_n}\Big)$$

$$= k_{I_0}(x_1)\cdots k_{I_0}(x_n) = \big(k_{I_0} \otimes \overset{(n)}{\cdots} \otimes k_{I_0}\big)(x), \quad (x \in \mathbb{T}^n).$$

Aplicando el Lema 4.7 concluimos que se verifica

$$\|S_{I_0^n}\|_{L^p(\mathbb{T}^n)\to L^p(\mathbb{T}^n)} = \|S_{I_0}\|^n_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})}. \tag{4.6}$$

Ahora, dado $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\big(1 + \frac{d}{2}\big)^{n_0} > M$. Y, de acuerdo con (4.6), para cada $n > n_0$ existe una función $g_{(n)} \in L^p(\mathbb{T}^n)$ con $\|g_{(n)}\|_p = 1$ y tal que

$$\big\|S_{I_0^n}(g_{(n)})\big\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} > \|S_{I_0}\|^n_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})} - \Big(\frac{d}{2}\Big)^n > \Big(1+\frac{d}{2}\Big)^n - \Big(\frac{d}{2}\Big)^n > \Big(1+\frac{d}{2}\Big)^{n-1} \geq \Big(1+\frac{d}{2}\Big)^{n_0}.$$

Pues bien, para cada $n > n_0$ podemos considerar la función definida en $\mathbb{T}^\omega$, sólo dependiente de las n primeras variables,

$$f_{(n)}(x) := g_{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (x \in \mathbb{T}^\omega).$$

Se tiene

$$\|f_{(n)}\|_{L^p(\mathbb{T}^\omega)} = \|g_{(n)}\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} = 1$$

y además se cumple

$$\Big\|S_{I_0^n\times\prod_{j=n+1}^\infty\{0\}}(f_{(n)})\Big\|_{L^p(\mathbb{T}^\omega)} = \big\|S_{I_0^n}(g_{(n)})\big\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} > M.$$

Llamemos $R_0^{(n)}$ al rectángulo finito $I_0^n \times \prod_{j=n+1}^\infty\{0\}$ de $\mathbb{Z}^\infty$. Existe $\delta_0^{(n)} > 0$ tal que $\delta_0^{(n)} R \supset R_0^{(n)}$. Consideremos el polinomio trigonométrico que queda bien definido por

$$\beta_{(n)}(x) := \sum_{\bar{m}\in\mathbb{Z}^\infty} \chi_{R_0^{(n)}}(\bar{m})\widehat{f_{(n)}}(\bar{m}) e^{2\pi i \bar{m}\cdot x} = S_{R_0^{(n)}}(f_{(n)}) \quad (x \in \mathbb{T}^\omega);$$

se verifica

$$S_{\delta_0^{(n)}R}(\beta_{(n)}) = \beta_{(n)} = S_{R_0^{(n)}}(f_{(n)})$$

y, por consiguiente,

$$\left\| S_{\delta_0^{(n)}R}(\beta_{(n)}) \right\|_{L^p(\mathbb{T}^\omega)} = \left\| S_{R_0^{(n)}}(f_{(n)}) \right\|_{L^p(\mathbb{T}^\omega)} > M,$$

lo que termina la demostración. □

4.1.2. El multiplicador del "primer cuadrante" de $\mathbb{T}^\omega$

En primer lugar, en la proposición siguiente, cuyo enunciado es el de [52, Ex. 4.1.3] (v. también [90, Ex. 3.7, p. 68-69]), recordamos un resultado estándar (v. [111, IV, §4], [41, Thm. 6.6.3]). Y vamos a reducir la prueba, haciendo uso de una relación que generaliza (4.4) a dimensión $n \in \mathbb{N}$, a ver que para todo p, $1 < p < \infty$, la función característica del "primer cuadrante" de $\mathbb{T}^n$, $\chi_{(0,+\infty)^n}$, es un multiplicador de $L^p(\mathbb{T}^n)$ en sí mismo.

4.11 Proposición. *Sea $1 < p < \infty$. Para cada $1 \leq j \leq n$ sea $I_j \subset \mathbb{R}$ un intervalo (no necesariamente finito), y sea $R = I_1 \times \cdots \times I_n$. Escribamos $e_m(x) := e^{2\pi i m \cdot x}$, para $m \in \mathbb{Z}^n$ y $x \in \mathbb{T}^n$. Se define el operador* proyección, o suma parcial, rectangular, *para toda $h \in C^{(\infty}(\mathbb{T}^n)$, por*

$$(S_R h)(x) := \sum_{m=(m_j)\in\mathbb{Z}^n} \Big(\prod_{j=1}^{n} \chi_{I_j}(m_j) \Big) \widehat{h}(m) e_m(x) \quad (x \in \mathbb{T}^n).$$

Entonces, este operador admite una extensión a un operador acotado de $L^p(\mathbb{T}^n)$ en sí mismo con norma independiente de los intervalos I_j, es decir, el operador extendido, que se denota de igual modo, verifica

$$\|S_R(f)\|_p \leq c_p \cdot \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mathbb{T}^n).$$

Demostración. Para $h \in C^{(\infty}(\mathbb{T}^n)$ se define el operador *proyección de Riesz*, en versión n-dimensional, por

$$(P_+^{(n)} h)(x) := \sum_{m=(m_j)\in\mathbb{Z}^n} \Big(\prod_{j=1}^{n} \chi_{(0,+\infty)}(m_j) \Big) \widehat{h}(m) e_m(x) = \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n \\ m_j>0 \ \forall j=1,\ldots,n}} \widehat{h}(m) e_m(x) \quad (x \in \mathbb{T}^n).$$

Para $n = 1$, como ya hemos indicado antes en la prueba de la Proposición 4.8, a partir del teorema de Riesz se demuestra que el operador $P_+ := P_+^{(1)}$ es acotado de $L^p(\mathbb{T})$ en sí mismo. Denotemos por $\kappa := \|P_+\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})}$[3]. Procedemos entonces por inducción (v. [52, Thm. 4.1.8]).

Para $n \geq 1$ suponemos que $P_+^{(n-1)}$ es acotado de $L^p(\mathbb{T}^{n-1})$ en sí mismo, con norma $\kappa^{(n-1)} = \kappa^{n-1}$. Sea $f \in C^{(\infty}(\mathbb{T}^n)$. Para cada $x' = (x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{T}^{n-1}$ fijo queda definida una función $g_{x'} \in C^{(\infty}(\mathbb{T})$ por

$$\begin{aligned} g_{x'}(x_1) &= \sum_{m_1\in\mathbb{Z}} \Bigg[\sum_{\substack{m'\in\mathbb{Z}^{n-1} \\ m'=(m_2,\ldots,m_n)}} \chi_{(0,+\infty)^{n-1}}(m') e_{m'}(x') \widehat{f}(m_1, m') \Bigg] e_{m_1}(x_1) \\ &= \sum_{m'\in\mathbb{Z}^{n-1}} \chi_{(0,+\infty)^{n-1}}(m') e_{m'}(x') \Big[\sum_{m_1\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m_1, m') e_{m_1}(x_1) \Big] \end{aligned}$$

[3]Ya hemos dicho antes que $\kappa = \operatorname{cosec}\big(\frac{\pi}{p}\big)$.

$$\begin{aligned}
&\overset{(\bigstar)}{=} \sum_{m'\in\mathbb{Z}^{n-1}} \chi_{(0,+\infty)^{n-1}}(m') e_{m'}(x') \Big[\int_{\mathbb{T}^{n-1}} f(x_1,y') \overline{e_{m'}(y')}\, dy' \Big] \\
&= \sum_{m'\in\mathbb{Z}^{n-1}} \chi_{(0,+\infty)^{n-1}}(m') e_{m'}(x') \cdot \widehat{f_{x_1}}(m') = \big(P_+^{(n-1)} f_{x_1}\big)(x'),
\end{aligned}$$

siendo $f_{x_1} \in C^{(\infty}(\mathbb{T}^{n-1})$ la función definida por $f_{x_1}(x') = f(x_1, x')$.

El paso que hemos señalado aquí arriba con $(\bigstar)$ se justifica como sigue:

$$\begin{aligned}
\sum_{m_1\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m_1,m') e_{m_1}(x_1) &= \sum_{m_1\in\mathbb{Z}} e_{m_1}(x_1) \int_{\mathbb{T}^n} f(y_1,y') \overline{e_{(m_1,m')}(y_1,y')}\, dy_1\, dy' \\
&= \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \overline{e_{m'}(y')}\, dy' \Big(\sum_{m_1\in\mathbb{Z}} e_{m_1}(x_1) \int_{\mathbb{T}} f(y_1,y') \overline{e_{m_1}(y_1)}\, dy_1 \Big) \\
&= \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \overline{e_{m'}(y')}\, dy' \Big(\sum_{m_1\in\mathbb{Z}} e_{m_1}(x_1) \widehat{f(\cdot,y')}(m_1) \Big) \\
&= \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \overline{e_{m'}(y')} f(x_1,y')\, dy',
\end{aligned}$$

esto último por el teorema 1-dimensional de inversión de la transformada de Fourier.

Para $(x_1, x') \in \mathbb{T}^n$ arbitrario se tiene

$$\begin{aligned}
\big(P_+^{(n)} f\big)(x_1,x') &= \sum_{m_1\in\mathbb{Z}} \chi_{(0,\infty)}(m_1) \Bigg[\sum_{\substack{m'\in\mathbb{Z}^{n-1} \\ m'=(m_2,\ldots,m_n)}} \chi_{(0,+\infty)^{n-1}}(m') e_{m'}(x') \widehat{f}(m_1,m') \Bigg] e_{m_1}(x_1) \\
&= \sum_{m_1\in\mathbb{Z}} \chi_{(0,\infty)}(m_1) \widehat{g_{x'}}(m_1) e_{m_1}(x_1) = \big(P_+ g_{x'}\big)(x_1),
\end{aligned}$$

de modo que, entonces, aplicando el teorema de Tonelli, la acotación para $n = 1$ y la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}
\|P_+^{(n)} f\|_p^p &= \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \int_{\mathbb{T}} \Big| \big(P_+^{(n)} f\big)(x_1,x') \Big|^p \, dx_1\, dx' \\
&= \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \int_{\mathbb{T}} \Big| \big(P_+^{(n)} g_{x'}\big)(x_1) \Big|^p \, dx_1\, dx' \\
&\le \kappa^p \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \int_{\mathbb{T}} |g_{x'}(x_1)|^p \, dx_1\, dx' \\
&= \kappa^p \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \Big| \big(P_+^{(n-1)} f_{x_1}\big)(x') \Big|^p \, dx'\, dx_1 \\
&\le \kappa^p \cdot \kappa^{p(n-1)} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \big| f_{x_1}(x') \big|^p \, dx'\, dx_1 \\
&= \kappa^{np} \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^p \, dx \\
&= \big(\kappa^n \|f\|_p\big)^p,
\end{aligned}$$

como queríamos probar. Por densidad, la misma acotación sirve para el operador extendido a todo $L^p(\mathbb{T}^n)$ que se denota también como $P_+^{(n)}$.

Sea $c = (c_j) \in \mathbb{R}^n$. Para $f \in C^{(\infty}(\mathbb{T}^n)$ podemos considerar el operador $P_+^{(n)}$ "desplazado" definido como

$$(T_c f)(x) := \sum_{m=(m_j)\in\mathbb{Z}^n} \Big(\prod_{j=1}^n \chi_{(c_j,+\infty)}(m_j)\Big)\widehat{f}(m)e_m(x) = e_c(x)\cdot\big(P_+^{(n)}(\overline{e_c}\,f)\big)(x).$$

Para cada $j = 1,\dots,n$, sea $I_j = [a_j, b_j]$, con $-\infty \le a_j < b_j \le \infty$, y $R = I_1 \times\cdots\times I_n$. Se verifica

$$\big(S_R f\big)(x) = \sum_{\delta_1=0}^{1}\cdots\sum_{\delta_n=0}^{1}(-1)^{\delta_0+\cdots+\delta_n}\big(T_{(\delta_1(a_1-1)+(1-\delta_1)b_1,\dots,\delta_n(a_n-1)+(1-\delta_n)b_n)}f\big)(x) \quad (x\in\mathbb{T}^n).$$

Y de aquí se sigue ya que, para $1<p<\infty$,

$$\|S_R\|_{L^p(\mathbb{T}^n)\to L^p(\mathbb{T}^n)} \le 2^n\cdot\left\|P_+^{(n)}\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n)\to L^p(\mathbb{T}^n)} \le (2\kappa)^n,$$

cota independiente del rectángulo R. □

La situación en el caso de $\mathbb{T}^\omega$ en cambio es completamente diferente. Sea $\Gamma := \{\bar n = (n_k) \in \mathbb{Z}^\infty\colon n_k \ge 0\}$. De acuerdo con la Proposición 4.10 y con la equivalencia que probamos a continuación, la función característica χ_Γ solo es un multiplicador de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ para $p = 2$.

4.12 Proposición. [101, p. 239] *Sea $1<p<\infty$. Sea $\Gamma = \{\bar n = (n_k)\in\mathbb{Z}^\infty\colon n_k\ge 0\}$. Pongamos $e_{\bar n}(x) = e^{2\pi i\bar n\cdot x}$, $x\in\mathbb{T}^\omega$. Considerar el operador P_Γ definido* (en el sentido de $L^2(\mathbb{T}^\omega)$) *por*

$$P_\Gamma f(x) := \sum_{\bar n\in\mathbb{Z}^\infty}\chi_\Gamma(\bar n)\widehat{f}(\bar n)e_{\bar n}(x) \qquad (f\in L^2(\mathbb{T}^\omega)\cap L^p(\mathbb{T}^\omega)).$$

Entonces, la función característica χ_Γ es un multiplicador *de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$, es decir, el operador P_Γ se extiende a $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ como un operador acotado de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ en sí mismo, si y solo si $\sup_{\delta>0}\|S_{\delta R}\|_{L^p(\mathbb{T}^\omega)\to L^p(\mathbb{T}^\omega)}<\infty$.*

Demostración. $\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que para todo $\delta>0$ se verifica $\|S_{\delta R}\|_{L^p(\mathbb{T}^\omega)\to L^p(\mathbb{T}^\omega)}\le c_p\in\mathbb{R}^+$ donde c_p no depende de δ. Para $h\in\mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega)$ (espacio de las funciones cilíndricas, recordar la Definición 1.29, funciones dependientes de un número finito de variables, y de clase $C^{(\infty}(\mathbb{T}^\omega)$) queda bien definido (puntualmente) el operador P_Γ por

$$(P_\Gamma(h))(x) := \sum_{\bar n\in\mathbb{Z}^\infty}\chi_\Gamma(\bar n)\widehat{h}(\bar n)e_{\bar n}(x) \qquad (x\in\mathbb{T}^\omega),$$

ya que $\sum_{\bar n\in\mathbb{Z}^\infty}|\widehat{h}(\bar n)|<\infty$ como vimos en la Proposición 1.32. Veamos ahora que se tiene

$$\sup_{\substack{h\in\mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega)\\ \|h\|_p=1}}\|P_\Gamma(h)\|_{L^p(\mathbb{T}^\omega)}\le c_p \tag{4.7}$$

y que, por lo tanto, P_Γ se puede extender a un operador acotado de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ en sí mismo (que se seguirá denotando por P_Γ).

Dado $\delta>0$, recordemos la Definición (4.1): $\delta R = \{\bar n\in\mathbb{Z}^\infty\colon -\delta c_k\le n_k\le\delta c_k \quad \text{para todo } k\}$, donde $(c_k)_{k=1}^\infty$ era cierta sucesión fija que tiende a 0. Entonces va a existir un número natural N tal que $\delta c_k<1$ $\forall k>N$ y por lo tanto

$$\delta R = \prod_{j=1}^\infty I_j \quad \text{con } I_j = [-d_j, d_j] = [-\delta c_j, \delta c_j]\cap\mathbb{Z}.$$

Así que va a ser $I_j = \{0\}\ \forall j > N$, y de este modo la sucesión definida como $\bar{d} := (d_j)$ pertenece al grupo $\mathbb{Z}^\infty$ por ser finitamente no nula.

Sea $R^\sharp = \{\bar{n} = (n_k) \in \mathbb{Z}^\infty \colon 0 \le n_k \le 2c_k \quad \text{para todo } k\}$, de manera que $\delta R^\sharp = \{\bar{n} \in \mathbb{Z}^\infty \colon 0 \le n_k \le 2d_k\}$. Veamos que

$$\sup_{\delta>0} \|S_{\delta R}\|_{L^p(\mathbb{T}^\omega)\to L^p(\mathbb{T}^\omega)} < \infty \quad \text{si y solo si} \quad \sup_{\delta>0} \|S_{\delta R^\sharp}\|_{L^p(\mathbb{T}^\omega)\to L^p(\mathbb{T}^\omega)} < \infty. \tag{4.8}$$

Para todo $\bar{d} = (d_1, d_2, \ldots) \in \mathbb{Z}^\infty$ se verifica

$$\sum_{-d_j \le m_j \le d_j} \widehat{h}(\bar{m}) e_{\bar{m}} = \sum_{0\le m_j \le 2d_j} \widehat{h}(\bar{m} - \bar{d}) e_{\bar{m}-\bar{d}} = e_{-\bar{d}} \sum_{0\le m_j\le 2d_j} \widehat{(he_{\bar{d}})}(\bar{m}) e_{\bar{m}}. \tag{4.9}$$

Por consiguiente para cada $\delta > 0$ y con cierto $\bar{d} \in \mathbb{Z}^\infty$ que depende de δ se tiene, aplicando (4.9),

$$(S_{\delta R} h)(x) = e_{-\bar{d}} \cdot \big(S_{\delta R^\sharp}(he_{\bar{d}})\big)(x) \quad (x \in \mathbb{T}^\omega)$$

(notar que, para cada $\delta > 0$, $he_{\bar{d}} \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega)$ por ser $\bar{d} \in \mathbb{Z}^\infty$). De modo que si se supone $\|S_{\delta R}(h)\|_p \le c_p$ para $h \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega)$ con $\|h\|_p = 1$, entonces se tiene, con cierto $\bar{d} \in \mathbb{Z}^\infty$ que depende de δ, $\|S_{\delta R^\sharp}(he_{\bar{d}})\|_p \le c_p$, siendo también $\|he_{\bar{d}}\|_p = 1$. Y recíprocamente.

Definamos ahora

$$a(\bar{n}, \delta) := \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le n_j \le 2d_j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para $h \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega)$ es $S_{\delta R^\sharp} h(x) = \sum_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^\infty} a(\bar{n},\delta)\widehat{h}(\bar{n}) e_{\bar{n}}(x)$. Aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, lo que es posible por ser $\widehat{h}(\bar{n}) \in L^1(\mathbb{Z}^\infty)$, se deduce

$$\lim_{\delta\to\infty} \sum_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^\infty} a(\bar{n},\delta)\widehat{h}(\bar{n}) e_{\bar{n}}(x) = \sum_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^\infty} \chi_\Gamma(\bar{n})\widehat{h}(\bar{n}) e_{\bar{n}}(x) = (P_\Gamma h)(x) \quad \text{a.e.},$$

y finalmente (como en [52, Thm. 4.1.1]) el lema de Fatou da

$$\|P_\Gamma h\|_p = \big\| \lim_{\delta\to\infty} S_{\delta R^\sharp}(h) \big\|_p \le \liminf_{\delta\to\infty} \|S_{\delta R^\sharp}(h)\|_p \le c_p \|h\|_p,$$

que es (4.7).

$\boxed{\Rightarrow}$ Ahora suponemos que χ_Γ es un multiplicador de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$, es decir, que existe una constante κ_p tal que

$$\|P_\Gamma(f)\|_p \le \kappa_p \|f\|_p \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{T}^\omega). \tag{4.10}$$

Para cada función $h \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega)$ fija se tiene, por el teorema de la convergencia dominada en $\mathbb{Z}^\infty$ (medida de contar),

$$\sum_{\bar{n}\in\Gamma} \widehat{h}(\bar{n}) e_{\bar{n}}(x) = \lim_{\delta\to\infty} \sum_{\bar{n}\in\delta R^\sharp} \widehat{h}(\bar{n}) e_{\bar{n}}(x),$$

es decir, $(P_\Gamma h)(x) = \lim_{\delta\to\infty} (S_{\delta R^\sharp} h)(x)$ a.e. $x \in \mathbb{T}^\omega$, donde, como antes,

$$R^\sharp = \{\bar{n} = (n_k) \in \mathbb{Z}^\infty \colon 0 \le n_k \le 2c_k \quad \text{para todo } k\}.$$

Entonces, por convergencia dominada en $\mathbb{T}^\omega$,

$$\lim_{\delta\to\infty} \|S_{\delta R^\sharp} h\|_p = \|P_\Gamma h\|_p \le \kappa_p \|h\|_p.$$

Por tanto $\|S_{\delta R^\sharp} h\|_p \le C^\sharp_{h,p} \|h\|_p$, donde la constante $C^\sharp_{h,p}$ no depende de δ. Aplicando el teorema de Banach-Steinhaus se sigue que se cumple

$$\|S_{\delta R^\sharp} h\|_p \le C^\sharp_p \|h\|_p \qquad \forall h \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega).$$

Teniendo en cuenta (4.8), también se cumple

$$\|S_{\delta R}h\|_p \leq C_p\|h\|_p \qquad \forall h \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega)$$

con otra constante C_p independiente de δ y de h. Por un argumento estándar de densidad[4] se deduce que $\|S_{\delta R}f\|_p \leq C_p\|f\|_p$ para toda $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$ (conservamos la notación para la extensión única del operador), de donde ya se concluye

$$\sup_{\delta>0} \|S_{\delta R}\|_{L^p(\mathbb{T}^\omega)\to L^p(\mathbb{T}^\omega)} < \infty. \qquad \square$$

4.13 Nota. Acabamos de ver que la función característica χ_Γ solo es un multiplicador cuando $p = 2$. Cerraremos esta sección con algún comentario más en este sentido. El grupo $\mathbb{Z}^\infty$ dual de $\mathbb{T}^\omega$ es un grupo *ordenado* en el sentido de [102, 8.1]. De hecho, el semigrupo $P = \Upsilon^+ \cup \{\bar{0}\}$, donde

$$\Upsilon^+ = \{(n_k) \in \mathbb{Z}^\infty : n_1 > 0 \vee (n_1 = 0 \wedge n_2 > 0) \vee \cdots\}$$

induce en $\mathbb{Z}^\infty$ un orden lexicográfico[5]. Una generalización del teorema de M. Riesz debida a S. Bochner [102, Thm. 8.7.2] asegura entonces que en particular la función característica χ_{Υ^+} es un multiplicador de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ para todo p, $1 < p < \infty$, es decir, que si $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$, entonces $\chi_{\Upsilon^+}\widehat{f}$ es la transformada de Fourier de una función $\Phi(f)$ en $\mathbb{T}^\omega$ y se cumple $\|\Phi(f)\|_p \leq A_p\|f\|_p$ con constante A_p independiente de f.

De la misma manera, un subconjunto $S \subset \mathbb{Z}^\infty$ se denomina un *semi-espacio* [61, §3] si (1) $\bar{0} \notin S$, (2) $\bar{n} \in S \Leftrightarrow -\bar{n} \in S$ $(\bar{n} \neq \bar{0})$ y (3) $S + S \subset S$. Si S es un semi-espacio de $\mathbb{Z}^\infty$, S define un orden arquimediano en $\mathbb{Z}^\infty$ si se consideran como elementos positivos los pertenecientes a S, y una nueva aplicación del mismo teorema [102, Thm. 8.7.2] asegura que χ_S es un multiplicador de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ $(1 < p < \infty)$.

4.2. Convergencia de sumas parciales $S_{\delta R}$ en la norma de $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$

En esta sección, repitiendo esencialmente la secuencia principal de resultados de la sección anterior, vamos a tratar de dar una demostración desarrollada del primer apartado[6] del siguiente resultado, un resultado del mismo tipo que el que constituyen conjuntamente las Proposiciones 4.6 y 4.10 de la sección anterior y que JLR establecía "en búsqueda de resultados positivos [de convergencia en norma de series de Fourier de infinitas variables] menos obvios", con unas indicaciones para su prueba, en [101]. En la carta de 1977 (v. Figura 6) ya nos adelantaba este resultado y la manera de probarlo. En su contexto es $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots)$ con $1 \leq p_k \leq \infty$, y nosotros vamos a considerar que los espacios $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ "análogos a los espacios de norma mixta de Benedek-Panzone con un paso al límite" son los JLR-espacios de norma mixta que se han definido y estudiado en el Capítulo 3 de esta memoria. Escribía JLR en [101, p. 238-239]:

> Teorema 1: a) Los operadores $(S_{\delta R})$ son uniformemente acotados en $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ (equivalentemente $\lim_{\delta\to\infty} \|S_{\delta R}f - f\|_{\bar{p}} = 0$ para cada $f \in L^{\bar{p}}$) si y solo si $\sum_k |p_k - 2| < \infty$.
> b) Si $\sum_{p_k<2}(2 - p_k) = \infty$, existe una función $f \in L^{\bar{p}}$ tal que, cuando $\delta \to \infty$, $(S_{\delta R}f)$ es divergente en medida.
>
> La acotación uniforme de $(S_{\delta R})$ equivale a la existencia de un operador acotado S_Γ asociado al multiplicador χ_Γ con $\Gamma = \{\bar{n} \in \mathbb{Z}^\infty : n_k > 0\}$. La primera parte se obtiene expresando la norma de S_Γ como producto de las normas de las transformadas de Hilbert en $L^{p_k}(\mathbb{T})$ (v. [93]). La segunda parte se deduce del mismo argumento junto con una versión adecuada del teorema de Stein (v. [109]).

[4] V. por ejemplo [112, Ch. 1, Proposition 5.4].

[5] Este orden es *no arquimediano*, pues si consideramos por ejemplo $\bar{n}_1 = (1, 0, 0, \ldots)$ y $\bar{n}_2 = (0, 1, 0, \ldots)$, se verifica $\bar{n}_1 > \bar{n}_2$, pero no existe ningún $m \in \mathbb{N}$ tal que sea $m\bar{n}_2 > \bar{n}_1$.

[6] Dejamos el segundo apartado para la siguiente sección.

En primer lugar, el resultado análogo a la Proposición 4.5 en este caso se cumple igual ya que $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ es un espacio de Banach:

4.14 Proposición. *Sea $\mathbf{1} \leq \bar{p} < \boldsymbol{\infty}$. Se tiene $\|S_{\delta R}(f) - f\|_{\bar{p}} \to 0$ cuando $\delta \to \infty$ para toda $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ si y solo si $\sup_{\delta>0} \|S_{\delta R}(f)\|_{\bar{p}} \leq c_{\bar{p},R}\|f\|_{\bar{p}}$ para toda $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ con una constante $c_{\bar{p},R}$ independiente de f.*

Seguimos con un lema análogo al Lema 4.7 en el caso de espacios de norma mixta de Benedek-Panzone:

4.15 Lema. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{1} \leq \bar{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \boldsymbol{\infty}$. Para cada $j = 1, \ldots, n$ supongamos que el operador $T_j \colon L^0(\mathbb{T}) \to L^0(\mathbb{T})$ definido por $T_j(f) := \kappa_j * f$ con $\kappa_j \in L^1(\mathbb{T})$ sea un operador acotado en $L^{p_j}(\mathbb{T})$ con norma $\|T_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{T})\to L^{p_j}(\mathbb{T})} =: \|T_j\|_{p_j} < \infty$.

Consideramos el operador $T^{(n)} \colon L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^n) \to L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^n)$ definido por

$$T^{(n)}(f) := (\kappa_1 \otimes \cdots \otimes \kappa_n) * f, \quad f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^n).$$

Entonces, se tiene que $T^{(n)}$ es acotado y su norma es

$$\|T^{(n)}\|_{L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^n)\to L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^n)} = \prod_{j=1}^{n} \|T_j\|_{p_j}.$$

Demostración. Lo probamos por inducción en n. Para $n = 1$ se verifica por hipótesis y de hecho [40, I, 3.1.6] se tiene $\|T_1\|_{p_1} \leq \|\kappa\|_1$.

Supongamos el lema cierto para $n-1$ con $n \geq 2$. En lo que sigue será entonces $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n)$. Nos vamos a limitar a considerar funciones del subespacio vectorial $S^{\bar{p}}(\mathbb{T}^n) \subset L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^n)$ (recordar la Definición 3.23 en el caso $\mathbb{T}^\omega$) engendrado por las funciones de la forma $f(x) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ con $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{T})$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Este subespacio es denso en $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^n)$ como se deduce de un argumento como el desarrollado en la Proposición 3.24 del capítulo anterior junto con [10, §5, a)].

Sea $f \in S^{\bar{p}}(\mathbb{T}^n)$. Usamos a continuación la notación $x = (x', x_n)$ para los puntos de $\mathbb{T}^n$, donde $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{T}^{n-1}$.

Abreviamos con $\kappa^{(n-1)}(x') := (\kappa_1 \otimes \cdots \otimes \kappa_{n-1})(x') = \kappa_1(x_1) \cdots \kappa_{n-1}(x_{n-1})$. Denotando además $f'(x') = f_1(x_1) \cdots f_{n-1}(x_{n-1})$ se tiene, aplicando el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
(T^{(n)}f)(x', x_n) &= \big((\kappa^{(n-1)} \otimes \kappa_n) * f\big)(x', x_n) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \kappa^{(n-1)}(y')\kappa_n(y_n)f'(x'-y')f_n(x_n-y_n)\,dy'\,dy_n \\
&= \left(\int_{\mathbb{T}^{n-1}} \kappa^{(n-1)}(y')f'(x'-y')\,dy'\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{T}} \kappa_n(y_n)f_n(x_n-y_n)\,dy_n\right) \\
&= (T^{(n-1)}f')(x') \cdot (T_n f_n)(x_n).
\end{aligned}$$

Entonces, aplicando la hipótesis de inducción resulta

$$\begin{aligned}
\|T^{(n)}f\|_{\bar{p}} &= \left(\int_{\mathbb{T}} \|T^{(n-1)}f'\|_{(p_1,\ldots,p_{n-1})}^{p_n} \cdot |T_n f_n(x_n)|^{p_n}\,dx_n\right)^{\frac{1}{p_n}} \\
&= \|T^{(n-1)}f'\|_{(p_1,\ldots,p_{n-1})} \cdot \|T_n f_n\|_{p_n} \\
&\leq \left(\prod_{j=1}^{n-1} \|T_j\|_{p_j}\right) \|f'\|_{(p_1,\ldots,p_{n-1})} \cdot \|T_n\|_{p_n}\|f_n\|_{p_n} \\
&= \left(\prod_{j=1}^{n} \|T_j\|_{p_j}\right) \|f\|_{\bar{p}},
\end{aligned}$$

luego se verifica $\|T^{(n)}\|_{S^{\bar p}(\mathbb{T}^n)\to L^{\bar p}(\mathbb{T}^n)} \le \prod_{j=1}^n \|T_j\|_{p_j}$.

Veamos que también se cumple $\|T^{(n)}\|_{S^{\bar p}(\mathbb{T}^n)\to L^{\bar p}(\mathbb{T}^n)} \ge \prod_{j=1}^n \|T\|_{p_j}$, de donde se sigue la igualdad requerida para la norma del operador restringido al subespacio denso $S^{\bar p}(\mathbb{T}^n)$. A partir de esto, el argumento estándar de densidad ya citado asegura que la extensión única del operador $T^{(n)}$ a todo el espacio $L^{\bar p}(\mathbb{T}^n)$ como operador acotado tiene la misma norma, y el lema quedará probado.

Dentro del proceso de inducción, y abreviando ahora con $\bar p' = (p_1, \dots, p_{n-1})$, estamos suponiendo también que se cumple, en particular,

$$\|T^{(n-1)}\|_{S^{\bar p'}(\mathbb{T}^{n-1})\to L^{\bar p'}(\mathbb{T}^{n-1})} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{g'\in S^{\bar p'}(\mathbb{T}^{n-1})\\ \|g\|_{\bar p'}=1}} \left\{\|T^{(n-1)}g'\|_{\bar p'}\right\} = \prod_{j=1}^{n-1} \|T_j\|_{p_j}.$$

Por el lema para $n = 1$ y esta hipótesis inductiva, dado $\varepsilon > 0$ existen $f'_\varepsilon \in S^{\bar p'}(\mathbb{T}^{n-1})$ y $g_\varepsilon \in L^{p_n}(\mathbb{T})$ tales que $\|f'_\varepsilon\|_{L^{\bar p'}(\mathbb{T}^{n-1})} = \|g_\varepsilon\|_{L^{p_n}(\mathbb{T})} = 1$, $\|T^{(n-1)}(f'_\varepsilon)\|_{\bar p'} > \left(\prod_{j=1}^{n-1}\|T_j\|_{p_j}\right) - \varepsilon$ y $\|T_n(g_\varepsilon)\|_{p_n} > \|T_n\|_{p_n} - \varepsilon$.

Se considera entonces la función $F_\varepsilon(x', x_n) = (f'_\varepsilon \otimes g_\varepsilon)(x', x_n) = f'_\varepsilon(x')g_\varepsilon(x_n)$. Se tiene $\|F_\varepsilon\|_{L^{\bar p}(\mathbb{T}^n)} = \|f'_\varepsilon\|_{L^{\bar p'}(\mathbb{T}^{n-1})} \cdot \|g_\varepsilon\|_{L^{p_n}(\mathbb{T})} = 1$. Además,

$$(T^{(n)}F_\varepsilon)(x', x_n) = (T^{(n-1)}f'_\varepsilon)(x') \cdot (T_n g_\varepsilon)(x_n).$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\|T^{(n)}\|_{S^{\bar p}(\mathbb{T}^n)\to L^{\bar p}(\mathbb{T}^n)} &\ge \|T^{(n)}(F_\varepsilon)\|_{\bar p}\\
&= \|T^{(n-1)}(f'_\varepsilon)\|_{\bar p'} \cdot \|T_n(g_\varepsilon)\|_{p_n}\\
&> \left(\left(\prod_{j=1}^{n-1}\|T_j\|_{p_j}\right) - \varepsilon\right) \cdot \left(\|T_n\|_{p_n} - \varepsilon\right),
\end{aligned}$$

y de la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ se concluye que es

$$\|T^{(n)}\|_{S^{\bar p}(\mathbb{T}^n)\to L^{\bar p}(\mathbb{T}^n)} \ge \prod_{j=1}^{n} \|T_j\|_{p_j}$$

como nos quedaba por demostrar. □

Al tratar de reconstruir por nuestra parte una prueba de [101, Teorema 1: a)] que da, de acuerdo con la Proposición 4.14, una condición necesaria y suficiente para que las sumas parciales $S_{\delta R}(f)$ de la serie de Fourier de toda función $f \in L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)$ converjan a la función f en $L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)$ cuando $\delta \to \infty$ hemos encontrado que debíamos sustituir la condición necesaria $\sum_k |p_k - 2| < \infty$ original por la de menos alcance, y de la que no sabemos asegurar la suficiencia, $\sum_k |p_k - 2|^2 < \infty$.[7] Probaremos entonces:

4.16 Proposición (JLR, 1980). *Sea* $\mathbf{1} \le \bar p = (p_k) < \boldsymbol{\infty}$. *Se tiene*

(a) $\sum_k |p_k - 2| < \infty \Longrightarrow \sup_{\delta>0} \|S_{\delta R}\|_{L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)\to L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)} < \infty$.

(b) $\sup_{\delta>0} \|S_{\delta R}\|_{L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)\to L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)} < \infty \Longrightarrow \sum_k |p_k - 2|^2 < \infty$.

[7] Recordemos la notación $\sup_{\substack{I\subset\mathbb{Z}\\ I \text{ intervalo finito}}} \|S_I\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})} =: B_p$ usada en la Proposición 4.8. No sabemos asegurar la suficiencia de la condición anotada porque solo sabemos que $B_p \ge \operatorname{cosec}(\pi/p)$ $(p > 1)$, de manera que $\prod_{k=1}^\infty \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{p_k}\right) < \infty$, que es equivalente a aquella condición, no implica $\prod_{k=1}^\infty B_{p_k} < \infty$ que es lo que necesitaríamos.

Demostración. (a) La condición $\sum_k |p_k - 2| < \infty$ es equivalente[8] a $\prod_{k=1}^{\infty} A_{p_k} < \infty$, donde A_{p_k} son las constantes de M. Riesz-Pichorides que han quedado definidas en la anterior Nota 4.9). Recordemos también la notación $\sup_{\substack{I \subset \mathbb{Z} \\ I \text{ intervalo finito}}} \|S_I\|_{L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})} =: B_p$ usada en la Proposición 4.8, y que se cumple $B_p \leq A_p$ para todo $p > 1$.

De la condición supuesta se deduce en particular que es $\sup_k p_k < \infty$. Entonces el subespacio $\mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega)$ de las funciones cilíndricas infinitamente derivables es denso en $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$[9].

Sea $f \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega)$. La función f es cilíndrica, dependiente solo de un número finito de variables, de modo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ para todo $x \in \mathbb{T}^\omega$. Sea R un rectángulo finito de $\mathbb{Z}^\infty$ predefinido y sea $\delta > 0$ fijo. Si $(\delta R)_{(n}$ denota la proyección del rectángulo finito $\delta R \subset \mathbb{Z}^\infty$ sobre el grupo $\mathbb{Z}^n$ de las n primeras coordenadas, se tiene $S_{\delta R}(f) = S_{(\delta R)_{(n}}(f)$ y, de acuerdo con el Lema 4.15,

$$\|S_{\delta R}(f)\|_{\bar{p}} \leq \|S_{(\delta R)_{(n}}(f)\|_{\bar{p}^n} \leq \Big(\prod_{j=1}^{n} B_{p_j}\Big)\|f\|_{\bar{p}^n} = \Big(\prod_{j=1}^{n} B_{p_j}\Big)\|f\|_{\bar{p}} \leq \Big(\prod_{j=1}^{\infty} A_{p_j}\Big)\|f\|_{\bar{p}},$$

donde hemos denotado $\bar{p}^n = (p_1, \ldots, p_n)$. De esto se sigue que

$$\sup_{\delta > 0} \|S_{\delta R}\|_{\mathcal{D}(\mathbb{T}^\omega) \to L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)} \leq \prod_{k=1}^{\infty} A_{p_k} < \infty$$

y, por un argumento de densidad, que

$$\sup_{\delta > 0} \|S_{\delta R}\|_{L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega) \to L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)} \leq \prod_{k=1}^{\infty} A_{p_k} < \infty.$$

(b) Supongamos $\sum_{k=1}^{\infty} (p_k - 2)^2 = +\infty$. Equivalentemente[10] será $\prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{cosec}\big(\frac{\pi}{p_k}\big) = +\infty$. Recordando de nuevo la notación $\sup_{\substack{I \subset \mathbb{Z} \\ I \text{ intervalo finito}}} \|S_I\|_{p \to p} =: B_p$ y de acuerdo con la Proposición 4.8, se tendrá entonces también $\prod_{k=1}^{\infty} B_{p_k} = +\infty$, ya que allí vimos que era $B_p \geq \operatorname{cosec}\big(\frac{\pi}{p}\big)$ para todo $p > 1$. Dado $M > 0$ existe entonces $N_0 = N_0(M) \in \mathbb{N}$ tal que $\prod_{k=1}^{N_0} B_{p_k} > M$.

Por otro lado, sean $N \geq 1$ entero y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Para cada $j = 1, \ldots, N$ existe un intervalo finito $I_\varepsilon^{(j)} \subset \mathbb{Z}$ tal que $\|S_{I_\varepsilon^{(j)}}\|_{L^{p_j}(\mathbb{T}) \to L^{p_j}(\mathbb{T})} > B_{p_j} - \varepsilon$. Sea $I_\varepsilon^{(N)} := \prod_{j=1}^{N} I_\varepsilon^{(j)}$, que es un rectángulo finito de $\mathbb{Z}^N$. Aplicando el Lema 4.15 tenemos que se verifica

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{I^{(N)} \subset \mathbb{Z}^N \\ I^{(N)} \text{ rectángulo finito}}} \|S_{I^{(N)}}\|_{L^{\bar{p}^N}(\mathbb{T}^N) \to L^{\bar{p}^N}(\mathbb{T}^N)} &\geq \|S_{I_\varepsilon^{(N)}}\|_{L^{\bar{p}^N}(\mathbb{T}^N) \to L^{\bar{p}^N}(\mathbb{T}^N)} \\ &= \prod_{j=1}^{N} \|S_{I_\varepsilon^{(j)}}\|_{L^{p_j}(\mathbb{T}) \to L^{p_j}(\mathbb{T})} > \prod_{j=1}^{N} (B_{p_j} - \varepsilon).\end{aligned}$$

Por la arbitrariedad de ε se tiene

$$\sup_{\substack{I^{(N)} \subset \mathbb{Z}^N \\ I^{(N)} \text{ rectángulo finito}}} \|S_{I^{(N)}}\|_{L^{\bar{p}^N}(\mathbb{T}^N) \to L^{\bar{p}^N}(\mathbb{T}^N)} \geq \prod_{j=1}^{N} B_{p_j}.$$

[8] [75, VII §28, Thm. 3]. Se tiene $A_p - 1 = \sqrt{2}\sin\big(\frac{\pi|2-p|}{4p}\big) \cdot \text{máx}\big\{\sec(\frac{\pi}{2p}), \operatorname{cosec}(\frac{\pi}{2p})\big\}$ $(p > 1)$.

[9] Es denso en $S^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ (condición C.13) de [3, p. 151]) que a su vez es denso en $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ según la Proposición 3.24.

[10] Por el criterio de comparación por límite $\sum_{k=1}^{\infty} (p_k - 2)^2 < \infty$ si y solo si $\sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\operatorname{cosec}(\frac{\pi}{p_k}) - 1\Big\} = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{cosec}(\frac{\pi}{p_k}) \sin^2\big(\frac{\pi(p_k-2)}{4p_k}\big) < \infty$, que a su vez se cumple si y solo si $\prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{cosec}\big(\frac{\pi}{p_k}\big) < \infty$. Entonces (por reducción al absurdo en cada implicación) $\sum_{k=1}^{\infty} (p_k - 2)^2 = \infty$ si y solo si $\prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{cosec}\big(\frac{\pi}{p_k}\big) = \infty$.

Ahora volviendo arriba, si $N \geq N_0$ se tiene

$$\sup_{\substack{I^{(N)}\subset\mathbb{Z}^N \\ I^{(N)} \text{ rectángulo finito}}} \|S_{I^{(N)}}\|_{L^{\bar{p}^N}(\mathbb{T}^N)\to L^{\bar{p}^N}(\mathbb{T}^N)} \geq \prod_{j=1}^{N} B_{p_j} \geq \prod_{j=1}^{N_0} B_{p_j} > M$$

y por tanto existen un rectángulo finito $I_0^{(N)} \subset \mathbb{Z}^N$ y una función $g_{(N)} \in L^{\bar{p}^N}(\mathbb{T}^N)$ tales que $\|g_{(N)}\|_{\bar{p}^N} = 1$ y $\|S_{I_0^{(N)}}(g_{(N)})\|_{\bar{p}^N} > M$.

Sea $f_{(N)}(x) := g_{(N)}(x_{(N}), x = (x_{(N}, x^{(N)}) \in \mathbb{T}^\omega$ con nuestra notación usual. Se tiene $\|f_{(N)}\|_{\bar{p}} = \|g_{(N)}\|_{\bar{p}^N} = 1$ y, poniendo $R_0^{(N)} := I_0^{(N)} \times \prod_{j=N+1}^{\infty}\{0\}$, que es un rectángulo finito de $\mathbb{T}^\omega$,

$$\|S_{R_0^{(N)}}(f_{(N)})\|_{\bar{p}} = \|S_{I_0^{(N)}}(g_{(N)})\|_{\bar{p}^N} > M.$$

Proseguimos ahora exactamente igual que al final de la prueba de la Proposición 4.10. En el contexto de las sumas parciales de tipo $S_{\delta R}$ donde R es un rectángulo finito de $\mathbb{Z}^\infty$ predefinido y los rectángulos homotéticos δR cubren $\mathbb{Z}^\infty$ cuando $\delta \to \infty$, existirá $\delta_0^{(N)} > 0$ tal que $\delta_0^{(N)} R \supset R_0^{(N)}$. Considerando el polinomio trigonométrico bien definido por

$$\beta_{(N)}(x) := \sum_{\bar{m}\in\mathbb{Z}^\infty} \chi_{R_0^{(N)}}(\bar{m})\widehat{f_{(N)}}(\bar{m})e^{2\pi i\bar{m}\cdot x} = S_{R_0^{(N)}}(f_{(N)}) \quad (x \in \mathbb{T}^\omega);$$

se verifica

$$S_{\delta_0^{(N)}R}(\beta_{(N)}) = \beta_{(N)} = S_{R_0^{(N)}}(f_{(N)})$$

y, por consiguiente,

$$\left\|S_{\delta_0^{(N)}R}(\beta_{(N)})\right\|_{L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)} = \left\|S_{R_0^{(N)}}(f_{(N)})\right\|_{L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)} > M.$$

Se sigue entonces que $\sup_{\delta>0} \|S_{\delta R}\|_{L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)\to L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)} = \infty$, como queríamos probar. □

4.17 Nota. En su carta de 1977 JLR añadía en este contexto la siguiente observación (v. Figura 6):

> *CONJETURA*: Para el (o los) $\bar{p}$ límite (que haga $\prod_{j=1}^{\infty} A_{p_j} = \infty$ pero por lo justo) cabe esperar una condición de tipo $(\bar{p}, \bar{p})$-débil. Esto generalizaría el teorema de Kolmogorov y probaría la equicontinuidad de S_{R_n} [o bien, de los operadores $S_{\delta R}$] de $L^{\bar{p}}$ en $L^{\bar{q}}$ ($\bar{q} < \bar{p}$) y la convergencia en $L^{\bar{q}}$ de series de Fourier de funciones de $L^{\bar{p}}$.

En 1923 Andrei N. Kolmogorov había probado la desigualdad de tipo débil $(1, 1)$ para el operador función conjugada $Hf = \tilde{f}$, $f \in L^1(\mathbb{T})$ [76, Th. I]. En el mismo trabajo Kolmogorov presenta como consecuencias que para cada $0 < q < 1$ fijo se tiene[11] $\|Hf\|_q^q \leq \frac{C}{1-q}\|f\|_1$ donde C es una constante absoluta [76, Th. II] y además que $\|S_n f - f\|_q \to 0$ siendo $S_n f$ la suma parcial n-ésima de la serie de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T})$ [76, Th. III].

Del cumplimiento de una condición $(\bar{p}, \bar{p})$-débil como

$$\sup_{\delta>0} \|S_{\delta R}(f)\|_{\bar{p}}^{\mathrm{w}} \leq C_{\bar{p}}\|f\|_{\bar{p}} \tag{4.11}$$

con $C_{\bar{p}}$ independiente de δ para toda $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$, siendo $\bar{p} > \mathbf{1}$, deduciríamos análogamente como indicaba JLR, aplicando en nuestro caso la Proposición 3.45(v) y suponiendo para ello las condiciones que debían satisfacerse allí, a saber $\mathbf{1} \leq \bar{q} < \bar{p} < \boldsymbol{\infty}$ así como $\inf_k p_k = p > 1$ y

[11] Abreviamos a continuación con $\|Hf\|_q^q := \int_{\mathbb{T}} |Hf(x)|^q\, dx$ para $0 < q < 1$.

$\sup_k q_k = Q < p$, la equicontinuidad de los operadores $S_{\delta R}$ de $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ en $L^{\bar{q}}(\mathbb{T}^\omega)$, en concreto que se tiene

$$\sup_{\delta>0} \|S_{\delta R}(f)\|_{\bar{q}} \le C_{\bar{p}} \left(\frac{p}{p-Q}\right)^{1/Q} \|f\|_{\bar{p}}$$

para toda $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$.

Dado que se verifica $A_p = A_q$ para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se podría cambiar en $\bar{p}$ cada $p_k < 2$ por su conjugado sin alterar esa cierta condición de ser un "$\bar{p}$ límite que hace $\prod_{j=1}^\infty A_{p_j} = \infty$ por lo justo", y suponer entonces que $\mathbf{2} \le \bar{p}$. Como podemos suponer también que debe cumplirse $p_k \to 2$ para $k \to \infty$, sería $p = \inf_k p_k = 2$. Con ello las condiciones a suponer podrían reducirse, por ejemplo, a las siguientes: $\mathbf{1} \le \bar{q} < \mathbf{2}$ y $\sup_k q_k = Q < 2$. Y la conclusión se escribiría

$$\sup_{\delta>0} \|S_{\delta R}(f)\|_{\bar{q}} \le C_{\bar{p}} \left(\frac{2}{2-Q}\right)^{1/Q} \|f\|_{\bar{p}}.$$

Con las condiciones anteriores para $\bar{q}$ y $\bar{p}$, la convergencia en $L^{\bar{q}}(\mathbb{T}^\omega)$ para $\delta \to \infty$ de las sumas parciales $S_{\delta R}f$ de la serie de Fourier de una función $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ se seguiría del correspondiente resultado análogo a la Proposición 4.14: $\|S_{\delta R}(f) - f\|_{\bar{q}} \to 0$ *cuando* $\delta \to \infty$ *para toda* $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ *si y solo si* $\sup_{\delta>0} \|S_{\delta R}(f)\|_{\bar{q}} \le c_{\bar{p},\bar{q},R} \|f\|_{\bar{p}}$ *con* $c_{\bar{p},\bar{q},R}$ *independiente de* f.

Quizás para $\bar{p} = (p_k)$ tal que $|p_k - 2| = \frac{1}{k}$ para todo k, que podría ser un ejemplo de lo que JLR pensaba cuando escribía "$\bar{p}$ límite que hace $\prod_{j=1}^\infty A_{p_j} = \infty$ por lo justo", pueda probarse la condición (4.11). Para nosotros el problema sigue estando abierto.

4.3. Convergencia casi por todo de las series de Fourier en $\mathbb{T}^{\boldsymbol{\omega}}$

Volvemos ahora al caso de los espacios $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ usuales ($1 \le p \le \infty$). Como el propio JLR escribía al comienzo de sus notas [100][12], dada una sucesión de operadores lineales T_n definidos en un cierto espacio de Banach $L^p(\nu)$, la existencia en casi todo punto de $\lim_n (T_n f)(x)$ para toda función $f \in L^p(\nu)$ suele estudiarse a partir de una cierta acotación del operador maximal asociado, definido por

$$T^* f(x) := \sup_n |(T_n f)(x)|.$$

Recordemos que estamos denotando con $L^0(\mu)$ el espacio de las funciones medibles en (X, μ). En concreto se tiene el siguiente resultado ([100, p. 5-9], [54, p. 1-12], [50, p. 1-4]):

4.18 Teorema. *Supongamos fijados espacios de medida σ-finitos (Y, ν), (X, μ) y una sucesión de operadores lineales $T_n \colon L^p(\nu) \to L^0(\mu)$ con operador maximal T^*. En el caso de ser finita la medida ν y de existir un subespacio denso en $L^p(\nu)$ tal que existe* $\lim_n (T_n f)(x)$ *a.e. para toda función f del subespacio, las tres condiciones siguientes son equivalentes:*

I) *Se verifica $T^* f(x) < \infty$ a.e. para toda $f \in L^p(\nu)$,*

II) *El operador maximal T^* es acotado en medida, es decir, existe $C(\lambda) \to 0$ ($\lambda \to \infty$) tal que $\mu(\{T^* f > \lambda\}) \le C(\lambda)$ siempre que $\|f\|_p \le 1$,*

III) *Existe* $\lim_n (T_n f)(x)$ *a.e. para toda $f \in L^p(\nu)$.*

En particular, el resultado clave para la prueba de la implicación II) $\Rightarrow$ III) es el siguiente ([100, Teorema B, p. 7]; podemos leer una versión más próxima en [37, Th. 2.2, p. 27]):

[12] Que Miguel de Guzmán calificó como "a very lucid paper" [54, p. 29].

4.19 Teorema. *Si el operador maximal T^* es acotado en medida, entonces el subespacio*

$$S = \{f \in L^p(\nu) \mid \text{existe } \lim_n T_n f(x) \text{ a.e. } \}$$

es cerrado.

Por otra parte, el importante teorema de Elias M. Stein [109, Thm. 1 y Corollaries, p. 148] establece unas condiciones para que sea $C(\lambda) = \mathrm{O}(\lambda^{-p})$ $(1 \leq p < \infty)$, caso en que se dice como sabemos que el operador T^* es de tipo (p,p)-débil. En [100, p. 10] JLR da la siguiente versión de ese resultado (v. también [50, p. 5-6]; [54, p. 24-25]):

4.20 Teorema de Stein. *Sea G un grupo compacto con medida de Haar m, y sean $T_n \colon L^p(m) \to L^0(m)$ operadores lineales, continuos en medida e invariantes por traslaciones, i.e.*

$$T_n(f_t) = (T_n f)_t \qquad \textit{(siendo } f_t(x) = f(tx)\textit{)}.$$

Sea $T^* f = \sup_n |T_n f|$ el operador maximal asociado. Entonces, si $1 \leq p \leq 2$, se tiene:

(i) *Si $T^* f < \infty$ a.e. para toda $f \in L^p(G)$, entonces T^* es de tipo (p,p)-débil, es decir, existe una constante A (que es independiente de λ y de f) tal que para toda $f \in L^p(G)$ y todo $\lambda > 0$ se cumple la desigualdad*

$$\mu\{x \colon T^* f(x) \geq \lambda\} \leq \frac{A}{\lambda^p} \int_G |f|^p \, dm. \tag{4.12}$$

(ii) *Si T^* no es de tipo débil (p,p), existe $f \in L^p$ con $T^* f = +\infty$ a.e..*

Como consecuencia de la Proposición 4.10, si $p < 2$ no cabe esperar resultados positivos de convergencia en casi todo punto para las series de Fourier de funciones de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$. JLR escribía la demostración de este hecho en las líneas finales del texto que se puede leer en la Figura 5.

4.21 Proposición (JLR, 1977)**.** *Si p es tal que $1 < p < 2$, existe una función $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$ tal que cuando $\delta \to \infty$, $(S_{\delta R}(f))$ diverge en un subconjunto de $\mathbb{T}^\omega$ de medida positiva*[13].

Demostración. Sea $p \in (1,2)$. El argumento es por reducción al absurdo. Si $\lim_{\delta\to\infty}(S_{\delta R} f)(x) = f(x)$ a.e. para toda $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$, también sería $\lim_{\delta\to\infty}(S_{\delta R} f)(x) = f(x)$ a.e. para toda $f \in L^q(\mathbb{T}^\omega)$ $\forall q > p$. Luego, por el Teorema 4.20, el operador maximal $S^* f = \sup_{\delta>0} |S_{\delta R} f|$ sería de tipo (q,q)-débil para todo q tal que $p \leq q \leq 2$ y por lo tanto, por el teorema de interpolación de Marcinkiewicz[14], sería de tipo (q,q)-fuerte, es decir, acotado, de $L^q(\mathbb{T}^\omega)$ en sí mismo, para todo q tal que $p < q < 2$. De modo que se cumpliría, para todo $\delta > 0$,

$$\|S_{\delta R} f\|_q \leq \|S^* f\|_q \leq C \|f\|_q$$

para toda $f \in L^q(\mathbb{T}^\omega)$ con la constante C independiente de f y de δ. Pero entonces la familia de operadores $(S_{\delta R})_{L^q \to L^q}$ estaría uniformemente acotada, y eso está en contradicción con la Proposición 4.10. □

[13] En su versión [101, Teorema 1: b)] para espacios de norma mixta de un resultado análogo a éste, JLR no dice “divergente en un conjunto de medida positiva” como nos parece lo más directo a partir del teorema de Stein, sino “divergente en medida”. Es un detalle que nos queda por saber explicar todavía.

[14] V. [123, XII,4]; [40, II, 13.8.1]; en un caso particular de este teorema se demuestra que, si un operador lineal es de tipos débiles (p_1, p_1) y (p_2, p_2), $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$, entonces es de tipo (p,p)-fuerte para todo p, $p_1 < p < p_2$.

4.3.1. JLR sobre convergencia a.e. de $S_{\delta R}(f)$ para $f \in L^2(\mathbb{T}^\omega)$

Limitado entonces a estudiar la convergencia puntual de las sumas parciales $S_{\delta R}f$ para funciones $f \in L^2(\mathbb{T}^\omega)$, JLR [101] informaba de los siguientes resultados que había obtenido:

> Teorema 2: Existe $f \in L^2(\mathbb{T}^\omega)$ tal que
> $$\limsup_{\delta\to\infty} |S_{\delta R}f(x)| = +\infty \quad \text{a.e.}.$$
> En vista de este resultado negativo, buscamos conjuntos A en $\mathbb{Z}^\infty$ tales que haya convergencia casi por todo para las funciones del espacio
> $$L^2_A(\mathbb{T}^\omega) = \{f \in L^2 \colon \widehat{f}(\bar{n}) = 0 \quad \forall \bar{n} \notin A\}.$$
> Teorema 3: Para $\bar{n} = (n_k) \in \mathbb{Z}^\infty$, denotamos $|\bar{n}| = \sup |n_k|$, $\#(\bar{n})$ = número de elementos no nulos de (n_k). Consideremos los subconjuntos de $\mathbb{Z}^\infty$
> $$A(m) = \{\bar{n} = (n_k) \colon |\bar{n}| = \sup_{k\le m} |n_k|\},$$
> $$B(m) = \{\bar{n} = (n_k) \colon \#(\bar{n}) \le m\}.$$
> Para toda $f \in L^2_{A(m)}$ y para toda $f \in L^2_{B(m)}$ se verifica
> $$\lim_{\delta\to\infty} S_{\delta R}f(x) = f(x) \quad \text{a.e.}.$$
> En ambos casos se trata de obtener la acotación
> $$[*] \qquad \|(\sup_\delta |S_{\delta R}f|)\|_2 \le C\|f\|_2 \qquad (f \in L^2_A).$$
> En el caso de $A(m)$ esto se consigue con una adaptación del método de Fefferman (o de Tevzadze) en dos variables [44]. Para $B(m)$ hay que usar inducción sobre m con un cierto argumento combinatorio, comenzando por probarlo para $B(1)$. Las funciones de $L^2_{B(1)}$ son del tipo
> $$f(x) = \sum_{1\le k\le\infty} f_k(x_k) \quad \text{en } \|\cdot\|_2, \text{ con } f_k \in L^2(\mathbb{T}),$$
> y $[*]$ se obtiene a partir de la acotación del operador maximal en una variable [28] y de argumentos de independencia análogos a los de la desigualdad de Kolmogorov para la ley fuerte de los grandes números [101, p. 239-240].

No sabemos dar una demostración del Teorema 2. Este teorema contesta negativamente a la cuestión acerca de la posible convergencia a.e. de las sumas parciales rectangulares de las series de Fourier en $L^2(\mathbb{T}^\omega)$, una cuestión que en 1977 el propio JLR calificaba como "muy difícil" (v. Figura 5, última línea). Parece ser que poco tiempo después ya había conseguido, o bien encontrar directamente una función como la que se estipula en el enunciado, quizás en el estilo de [43] o de [113, p. 268], o bien probar que el operador maximal S^* no es de tipo débil $(2, 2)$, lo que daría la conclusión por contradicción usando el teorema de Stein.

Nos conformaremos con tratar de probar el curioso Teorema 3 siguiendo las instrucciones que dejó su autor. Lo separaremos en dos resultados, comenzando por el caso del conjunto indicial $A(m)$.

4.22 Teorema. *Para cada $\bar{n} = (n_k) \in \mathbb{Z}^\infty$, sea $|\bar{n}| = \max |n_k|$. Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo. Se considera el subconjunto de $\mathbb{Z}^\infty$*
$$A(m) = \{\bar{n} = (n_k) \in \mathbb{Z}^\infty \colon |\bar{n}| = \max_{1\le k\le m} |n_k|\}.$$
Sea $L^2_{A(m)}(\mathbb{T}^\omega) = \{f \in L^2(\mathbb{T}^\omega) \colon \widehat{f}(\bar{n}) = 0 \quad \text{si } \bar{n} \notin A(m)\}$. Sea R un rectángulo finito en $\mathbb{Z}^\infty$ como en (4.1),
$$R = \{\bar{n} \in \mathbb{Z}^\infty \colon -c_k \le n_k \le c_k \ \textit{para todo } k\},$$

siendo (c_k) *una sucesión fija que tiende a cero. Entonces, para toda* $f \in L^2_{A(m)}(\mathbb{T}^\omega)$ *se tiene*

$$\lim_{\delta\to\infty} S_{\delta R} f(x) = f(x) \quad \textit{a.e. en } \mathbb{T}^\omega.$$

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo. Basta probar la desigualdad maximal

$$\Big\|\Big(\sup_{\delta>0} |S_{\delta R} f|\Big)\Big\|_2 \le C\|f\|_2 \quad \forall f \in L^2_{A(m)}(\mathbb{T}^\omega), \tag{4.13}$$

ya que un procedimiento estándar (v. por ejemplo [88, p. 8–10]) asegura la requerida convergencia en casi todo punto de $S_{\delta R} f$ a f cuando $\delta \to \infty$ para toda $f \in L^2_{A(m)}(\mathbb{T}^\omega)$, a partir de (4.13), que permite usar el Teorema 4.19 (si el operador maximal es de tipo (p,p)-fuerte, también cumple la desigualdad (p,p)-débil y en particular es acotado en medida), y de la convergencia en casi todo punto de $S_{\delta R} f(x)$ a $f(x)$ para las f de una clase densa en $L^2_{A(m)}(\mathbb{T}^\omega)$ conveniente, como por ejemplo la de los polinomios trigonométricos soportados en el conjunto indicial $A(m)$.

Sea $f \in L^2_{A(m)}(\mathbb{T}^\omega)$. Tenemos, dado el rectángulo finito inicial R, para cada $\delta > 0$,

$$S_{\delta R} f(x) = \sum_{\bar n \in \delta R} \widehat{f}(\bar n) e_{\bar n}(x) = \sum_{\bar n \in \delta R \cap A(m)} \widehat{f}(\bar n) e_{\bar n}(x),$$

y podemos considerar, sin perder generalidad, que $\max_{1\le k\le m} |c_k| = 1$, de modo que

$$S_{\delta R} f(x) = \sum_{\substack{\bar n \in A(m)\\ |\bar n| \le \delta}} \widehat{f}(\bar n) e_{\bar n}(x).$$

Por otra parte tengamos en cuenta que

$$A(m) = \bigcup_{j=1}^{m} A_j \quad \text{donde} \quad A_j = \{\bar n \in \mathbb{Z}^\infty \colon |\bar n| = |n_j|\},\ j = 1, \dots, m.$$

Podemos aplicar el principio de inclusión-exclusión para escribir

$$\begin{aligned}&\sum_{\bar n \in A(m)} \widehat{f}(\bar n) e_{\bar n}(x)\\ &\quad = \Big(\sum_{j=1}^{m} \sum_{\bar n \in A_j} - \sum_{j<k} \sum_{\bar n \in A_j \cap A_k} + \sum_{j<k<\ell} \sum_{\bar n \in A_j \cap A_k \cap A_\ell} - \cdots + (-1)^m \sum_{\bar n \in \bigcap_{j=1}^m A_j}\Big) \widehat{f}(\bar n) e_{\bar n}(x).\end{aligned}$$

Cada una de las $2^m - 1$ sumas sobre $\bar n$ que tenemos dentro del paréntesis del segundo miembro se extiende a una región "bipiramidal" de índices cuya apariencia dimensional (infinita) es esencialmente semejante (Figura 4.1, v. [1, p. 83–84]), y donde se va a poder aplicar el teorema unidimensional de Carleson en una argumentación como la de Charles Fefferman en [44][15].

De manera que, dada la linealidad de los operadores de suma parcial, podemos limitarnos a probar (4.13) para $m = 1$, es decir, sin pérdida esencial de generalidad podemos limitarnos en principio a considerar

$$S_{\delta R} f(x) := \sum_{\substack{\bar n \in A(1)\\ |n_1| \le \delta}} \widehat{f}(\bar n) e_{\bar n}(x) = \sum_{|\bar n| = |n_1| \le \delta} \widehat{f}(\bar n) e_{\bar n}(x).$$

[15] Cf. [60], un artículo que bebe de [17] (v. nuestro Anexo 2 final) y donde sus autores desarrollan la prueba del teorema citado de Fefferman para N variables.

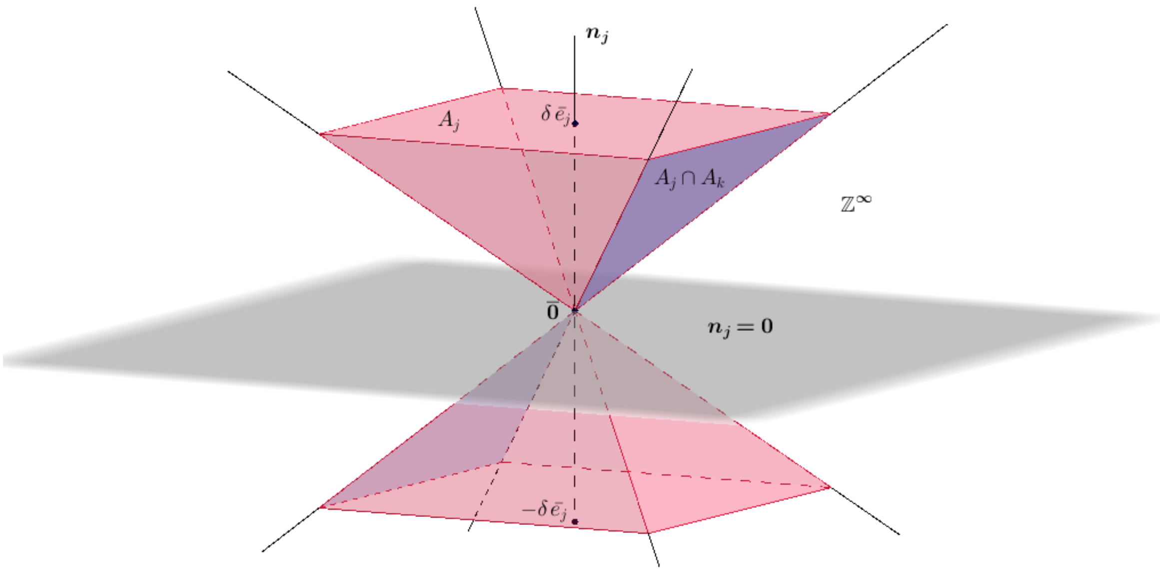


Figura 4.1: Un esquema para visualizar las regiones de sumación A_j, $A_j \cap A_k$, etc. en $\mathbb{Z}^{\infty}$.

Pongamos, para cada $x \in \mathbb{T}^{\omega}$, $x = (x_1, x')$ con $x' = (x_2, x_3, \ldots) \in \mathbb{T}^{1,\omega}$. Análogamente, si $\bar{n} \in \mathbb{Z}^{\infty}$, escribiremos $\bar{n} = (n_1, n')$ con $n' = (n_2, n_3, \ldots) \in \mathbb{Z}^{1,\infty}$. Tenemos

$$S_{\delta R} f(x_1, x') := \sum_{\substack{(n_1, n') \in A(1) \\ |n_1| \le \delta}} \widehat{f}(n_1, n') e_{(n_1, n')}(x_1, x').$$

Tengamos en cuenta que cuando $(n_1, n') \in A(1)$ y $|n_1| \le \delta$ se cumple también $|n'| \le \delta$.

Ahora, para cada $x' \in \mathbb{T}^{1,\omega}$ podemos considerar la función de x_1 definida por

$$f_{x'}(x_1) := f(x_1, x'), \quad (x_1 \in \mathbb{T}).$$

Se tiene $f_{x'} \in L^2(\mathbb{T})$. Para cada $\delta > 0$ la suma parcial 1-dimensional $S_\delta f_{x'}$ está definida por

$$(S_\delta f_{x'})(x_1) = \sum_{|n_1| \le \delta} \widehat{f_{x'}}(n_1) e_{n_1}(x_1), \quad \text{donde} \quad \widehat{f_{x'}}(n_1) = \sum_{\substack{n' \in \mathbb{Z}^{1,\infty} \\ \text{tal que } (n_1, n') \in A(1)}} \widehat{f}(n_1, n') e_{n'}(x').$$

Por el teorema de Carleson [28] el operador maximal $\mathcal{M}_1$ definido sobre las funciones $g \in L^2(\mathbb{T})$ por

$$(\mathcal{M}_1 g)(x_1) = \sup_{\delta > 0} \big| (S_\delta g)(x_1) \big|$$

es de tipo $(2,2)$-fuerte, de modo que, en particular, para cada $x' \in \mathbb{T}^{1,\omega}$ y cada $f \in L^2(\mathbb{T}^{\omega})$,

$$\|\mathcal{M}_1 f_{x'}\|_2 \le C \|f_{x'}\|_2$$

con C independiente de x' y de f, es decir,

$$\int_{\mathbb{T}} \big(\mathcal{M}_1 f_{x'}(x_1)\big)^2 \, dx_1 \le C^2 \int_{\mathbb{T}} |f_{x'}(x_1)|^2 \, dx_1 = C^2 \int_{\mathbb{T}} |f(x_1, x')|^2 \, dx_1. \tag{4.14}$$

Consideremos ahora el operador maximal $\mathcal{M}$ definido sobre las funciones $f \in L^2_{A(1)}(\mathbb{T}^{\omega})$ por

$$\mathcal{M} f(x_1, x') := \sup_{\delta > 0} \big| S_{\delta R} f(x_1, x') \big|.$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}f)(x_1, x') &= \sup_{\delta>0} \Bigg| \sum_{\substack{(n_1,n')\in A(1)\\ |n_1|\le\delta}} \widehat{f}(n_1, n') e_{(n_1,n')}(x_1, x') \Bigg| \\
&= \sup_{\delta>0} \Bigg| \sum_{|n_1|\le\delta} e_{n_1}(x_1) \sum_{\substack{n'\in\mathbb{Z}^{1,\infty}\\ \text{tal que } (n_1,n')\in A(1)}} \widehat{f}(n_1, n') e_{n'}(x') \Bigg| \\
&= \sup_{\delta>0} \Bigg| \sum_{|n_1|\le\delta} e_{n_1}(x_1) \widehat{f_{x'}}(n_1) \Bigg| \\
&= \sup_{\delta>0} \big| S_\delta f_{x'}(x_1) \big| \\
&= \big(\mathcal{M}_1 f_{x'}\big)(x_1)
\end{aligned}$$

para cada $(x_1, x') \in \mathbb{T}^{\omega}$. Aplicando (4.14) y (1.6) dos veces, se tiene entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^\omega} \big(\mathcal{M}f(x_1,x')\big)^2\,dx &= \int_{\mathbb{T}^{1,\omega}} dx' \int_{\mathbb{T}} \big(\mathcal{M}_1 f_{x'}(x_1)\big)^2\,dx_1 \\
&\le C^2 \int_{\mathbb{T}^{1,\omega}} dx' \int_{\mathbb{T}} |f(x_1,x')|^2\,dx_1 \\
&= C^2 \int_{\mathbb{T}^\omega} |f(x_1,x')|^2\,dx \\
&= C^2 \|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^\infty} \big|\widehat{f}(n)\big|^2.
\end{aligned}$$

De modo que $\|\mathcal{M}f\|_2 \le C\|f\|_2$ para toda $f \in L^2_{A(1)}(\mathbb{T}^\omega)$. De aquí ya se sigue que

$$\lim_{\delta\to\infty} S_{\delta R} f(x) = f(x) \quad \text{a.e.} \tag{4.15}$$

para toda $f \in L^2_{A(1)}(\mathbb{T}^\omega)$.

En general, si $f \in L^2_{A(m)}(\mathbb{T}^\omega)$ se concluye $\|\mathcal{M}f\|_2 \le (2^m - 1)C\|f\|_2$, donde C es la constante del teorema de Carleson. □

Terminamos esta subsección con nuestro intento de aproximación a la prueba original del Teorema 3 de [101] para el caso del conjunto indicial $B(m)$.

4.23 Teorema. *Para cada $\bar{n} = (n_k) \in \mathbb{Z}^\infty$, sea $\#(\bar{n})$ = número de elementos no nulos de (n_k). Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo. Se considera el subconjunto de $\mathbb{Z}^\infty$*

$$B(m) = \{\bar{n} \in \mathbb{Z}^\infty \colon \#(\bar{n}) \le m\}.$$

Sea $L^2_{B(m)}(\mathbb{T}^\omega) = \{f \in L^2(\mathbb{T}^\omega) \colon \widehat{f}(\bar{n}) = 0 \;\; \text{si } \bar{n} \notin B(m)\}$. Entonces, para toda $f \in L^2_{B(m)}(\mathbb{T}^\omega)$ se tiene

$$\lim_{\delta\to\infty} S_{\delta R} f(x) = f(x) \quad \textit{a.e. en } \mathbb{T}^\omega.$$

Demostración. Basta probar para cada $m \in \mathbb{N}$, por ejemplo, la acotación $(2,2)$-débil

$$\big|\{x \in \mathbb{T}^\omega \colon \mathcal{M}f(x) > \lambda\}\big| \le \frac{C\|f\|_2^2}{\lambda^2} \qquad (\lambda > 0, \quad \forall f \in L^2_{B(m)}(\mathbb{T}^\omega)) \tag{4.16}$$

del operador maximal $\mathcal{M}f = \sup_{\delta>0} |S_{\delta R} f|$. De aquí, usando el Teorema 4.19 y considerando que los polinomios trigonométricos forman un subespacio denso en $L^2_{B(m)}(\mathbb{T}^\omega)$ en el que hay convergencia a.e., resulta la convergencia en casi todo punto requerida.

Vamos a probar (4.16) por inducción en $m \geq 1$, y así empezamos considerando

$$B(1) = \{\bar{n} \in \mathbb{Z}^\infty \colon \#(\bar{n}) \leq 1\} = \{\bar{0}\} \cup \{\bar{n} \in \mathbb{Z}^\infty \colon \#(\bar{n}) = 1\}.$$

Si $f \in L^2_{B(1)}(\mathbb{T}^\omega)$, entonces se tiene (las siguientes igualdades se entienden en el sentido de la norma $\|\cdot\|_2$, v. nuestra Nota 1.15)

$$f(x) = \sum_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^\infty} \widehat{f}(\bar{n}) e_{\bar{n}}(x) = \sum_{\bar{n}\in B(1)} \widehat{f}(\bar{n}) e_{\bar{n}}(x) = \widehat{f}(\bar{0}) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\neq 0}} \widehat{f}(j\bar{e}_k) e^{2\pi i j x_k}\Big)$$

donde, para cada $k = 1, 2, \ldots$, hemos escrito $\bar{e}_k$ para el elemento de $B(1)$ que tiene un 1 en el lugar k.

Podemos considerar en lo que sigue, sin perder generalidad, que $\widehat{f}(\bar{0}) = 0$. Ya que $f \in L^2_{B(1)}(\mathbb{T}^\omega)$, para cada $k = 1, 2, \ldots$ se tiene

$$\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\neq 0}} \big|\widehat{f}(j\bar{e}_k)\big|^2 < \sum_{\bar{n}\in B(1)} \big|\widehat{f}(\bar{n})\big|^2 < \infty,$$

luego por el teorema de Riesz-Fischer la serie de Fourier

$$\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\neq 0}} \widehat{f}(j\bar{e}_k) e^{2\pi i j t} \quad (t \in \mathbb{T})$$

define una función $f_k(t) \in L^2(\mathbb{T})$, para la que se verifica $\widehat{f_k}(j) = \widehat{f}(j\bar{e}_k)$ si $j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ y $\widehat{f_k}(0) = 0$. Entonces

$$f(x) \overset{L^2}{=} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$$

y se tiene, por Plancherel,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\bar{n}\in B(1)} \big|\widehat{f}(\bar{n})\big|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\neq 0}} \big|\widehat{f}(j\bar{e}_k)\big|^2\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \big|\widehat{f_k}(j)\big|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_2^2.$$

Por el teorema de Carleson, si $\mathcal{M}_1 f_k(t) = \sup_{\delta>0} |S_\delta f_k(t)|$ $(t \in \mathbb{T})$, se verifica

$$\|\mathcal{M}_1 f_k\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C \|f_k\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

para cada $k = 1, 2, \ldots$, donde C es independiente de f. En particular, el operador $\mathcal{M}_1$ es de tipo $(2, 2)$-débil, es decir, para todo $\lambda > 0$

$$\big|\{t \in \mathbb{T} \colon \mathcal{M}_1 f_k(t) > \lambda\}\big| \leq \frac{C\|f_k\|_2^2}{\lambda^2}\,. \tag{4.17}$$

Podemos usar (4.17) para concluir que para todo $\lambda > 0$ se cumple

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big|\{t \in \mathbb{T} \colon \mathcal{M}_1 f_k(t) > \lambda\}\big| \leq \frac{C}{\lambda^2}\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_2^2 = \frac{C}{\lambda^2}\|f\|_2^2. \tag{4.18}$$

Inspirados ahora en la argumentación usual para probar la desigualdad de Kolmogorov (v. por ejemplo [57, IX §46, Thm. A], [82, I, p. 247]), ponemos

$$A(\lambda) := \big\{x \in \mathbb{T}^\omega \colon \mathcal{M} f(x) > \lambda\big\}.$$

Si probamos que

$$\left|A(\lambda)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|\{t \in \mathbb{T} \colon \mathcal{M}_1 f_k(t) > \lambda\}\right|,$$

usando (4.18) habremos terminado.

Definamos para ello

$$A_0(\lambda) := \mathbb{T}^\omega, \quad A_k(\lambda) := \{x \in \mathbb{T}^\omega \colon \max_{1\leq j\leq k} \mathcal{M}_1 f_j(x_j) \leq \lambda\} \quad (k \geq 1).$$

Se tiene $A_0(\lambda) \supset A_1(\lambda) \supset A_2(\lambda) \supset \cdots$. Definamos todavía

$$B_k(\lambda) := A_{k-1}(\lambda) \setminus A_k(\lambda) = \{x \in \mathbb{T}^\omega \colon \mathcal{M}_1 f_1(x_1) \leq \lambda, \ldots, \mathcal{M}_1 f_{k-1}(x_{k-1}) \leq \lambda, \mathcal{M}_1 f_k(x_k) > \lambda\}.$$

Entonces, $A(\lambda) = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k(\lambda)$ (unión disjunta), y evidentemente

$$B_k(\lambda) \subset \{x \in \mathbb{T}^\omega \colon \mathcal{M}_1 f_k(x_k) > \lambda\},$$

luego

$$\left|A(\lambda)\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left|B_k(\lambda)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|\{x_k \in \mathbb{T} \colon \mathcal{M}_1 f_k(x_k) > \lambda\}\right|$$

y (4.16) es cierto para $m = 1$, como queríamos.

Suponemos ahora que (4.16) es cierto para un $m \geq 1$. Sea $f \in L^2_{B(m+1)}(\mathbb{T}^\omega)$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\widehat{f}(\bar{0}) = 0$. En el sentido de $L^2(\mathbb{T}^\omega)$ se tendrá

$$f(x) = \sum_{\bar{n}\in B(m+1)} \widehat{f}(\bar{n}) e_{\bar{n}}(x) = \sum_{\substack{\bar{n}\in B(m+1)\\ \#(\bar{n})=m+1}} + \sum_{\substack{\bar{n}\in B(m+1)\\ \#(\bar{n})\leq m}} = \sum_{k_1=1}^{\infty} F_{k_1}(x) + F_0(x)$$

respectivamente, donde el índice k_1 del primer sumatorio indica la primera posición no nula del índice $\bar{n}$. Para cada $k_1 = 1, 2, \ldots$, la función

$$\begin{aligned} F_{k_1}(x) &:= \sum_{\substack{k'=(k_2,\ldots,k_{m+1})\in\mathbb{N}^m\\ k_1<k_2<\ldots<k_{m+1}}} \Bigg(\sum_{\substack{(m_1,m')\in\mathbb{Z}^{m+1}\\ m_1\neq 0\\ m'=(m_2,\ldots,m_{m+1})}} \widehat{f}(m_1\bar{e}_{k_1} + m_2\bar{e}_{k_2} + \cdots + m_{m+1}\bar{e}_{k_{m+1}}) e^{2\pi i(m_1 x_{k_1} + m' x'_{k'})} \Bigg) \\ &= \sum_{\substack{k'=(k_2,\ldots,k_{m+1})\in\mathbb{N}^m\\ k_1<k_2<\ldots<k_{m+1}}} f_{(k_1,k')}(x_{k_1}, x'_{k'}), \end{aligned}$$

donde hemos puesto $x'_{k'} := (x_{k_2}, \ldots, x_{k_{m+1}})$, es de $L^2_{B(m)}(\mathbb{T}^\omega)$. La función que hemos denotado con $F_0(x)$, que recoge la suma extendida al conjunto de índices con a lo sumo m componentes no nulas, es también obviamente de $L^2_{B(m)}(\mathbb{T}^\omega)$, y se verifica (Plancherel)

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k_1=1}^{\infty} \|F_{k_1}\|_2^2 + \|F_0\|_2^2. \tag{4.19}$$

Para cada $\lambda > 0$ se tiene

$$\left\{x \in \mathbb{T}^\omega \colon \mathcal{M}f(x) > \lambda\right\} \subset \left\{x \in \mathbb{T}^\omega \colon \mathcal{M}F_0(x) > \tfrac{\lambda}{2}\right\} \cup \bigcup_{k_1=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{T}^\omega \colon \mathcal{M}F_{k_1}(x) > \tfrac{\lambda}{2}\right\}.$$

Por consiguiente, aplicando (4.19) y la hipótesis de inducción,

$$\left|\left\{x \in \mathbb{T}^\omega \colon \mathcal{M}f(x) > \lambda\right\}\right| \leq \frac{4C}{\lambda^2}\|F_0\|_2^2 + \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{4C}{\lambda^2}\|F_{k_1}\|_2^2 = \frac{4C}{\lambda^2}\|f\|_2^2,$$

y el teorema queda demostrado. □

4.3.2. El teorema de Stein-Sawyer en espacios $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ de norma mixta

Como ha quedado citado al comienzo de la sección 4.2 y volvemos a recordar ahora, en su versión [101, Teorema 1: b)] para espacios de norma mixta del resultado análogo al de la Proposición 4.21, JLR enunciaba como conclusión la existencia de una función $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ tal que cuando $\delta \to \infty$, la familia de sumas parciales $(S_{\delta R}(f))$ es divergente en medida, y que en la prueba habría que contar con "una versión adecuada del teorema de Stein".

Esa versión adecuada del Teorema 4.20 de la que hablaba JLR sería la respuesta a lo que al final de la primera Hoja de su carta de 1977 dejaba enunciado como problema de estudio:

> *PROBLEMA 2*: "¿Es cierto en este contexto el teorema de Stein (-Sawyer)? Es decir: ¿$T_n f(x) \to f(x)$ a.e. $\forall f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ con $\mathbf{1} \leq \bar{p} \leq \mathbf{2}$ y T_n invariante por traslaciones (por ej. operadores de convolución) $\Rightarrow T^* f = \sup_n |T_n f|$ es de tipo $(\bar{p},\bar{p})$-débil?" (Figura 4).

Hemos intentado este problema[16] y nos hemos tenido que conformar con un resultado similar a la implicación menos obvia del que se conoce como teorema de Sawyer [54, Thm. 2.2.1] para familias de operadores positivos, aunque este resultado no sea de aplicación a la convergencia de operadores de suma parcial de series de Fourier. Stanley Sawyer[17] [106], [107, Thm. 1] extendió en primer lugar el Teorema 4.20 de Stein sacándolo del contexto grupo-teórico a un espacio de probabilidad Ω genérico, considerando solo que los operadores de la sucesión (T_n) conmuten con una familia de transformaciones de Ω en sí mismo que preservan la medida y "barajan" (v. [50, p. 6], [54, p. 19]) los conjuntos medibles de Ω. Sawyer observa después [107, Thm. 2] que el teorema de Stein sigue siendo válido para $p > 2$ si los operadores T_n se suponen positivos.

A continuación, y con ello cerramos esta memoria, presentamos una demostración detallada que sigue prácticamente al pie de la letra los pasos de una prueba estándar de este resultado (cf. por ejemplo [54, *loc. cit.*]).

4.24 Proposición. *Sea* $\mathbf{1} \leq \bar{p} < \boldsymbol{\infty}$ *y supongamos* $\sup_k p_k = P < \infty$*. Sea* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una familia de operadores positivos de* $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ *en* $L^0(\mathbb{T}^\omega)$ *continuos en medida que conmutan con las traslaciones. Supongamos que para toda* $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ *existe* $\lim_{n\to\infty}(T_n f)(x)$ *para casi todo punto* x*, y sea*[18] $(T^*f)(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |(T_n f)(x)|$*. Entonces el operador* T^* *es de tipo débil* $(\bar{p},\bar{p})$*, es decir, existe una constante absoluta* A *tal que* $\|T^*f\|_{\bar{p}}^w \leq A\|f\|_{\bar{p}}$ *para toda* $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$*, o bien tal que*

$$\|\chi_{E_\sigma(T^*f)}\|_{\bar{p}} \leq \frac{A}{\sigma}\|f\|_{\bar{p}} \tag{4.20}$$

para todo $\sigma > 0$ *y* $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$*, donde* $E_\sigma(T^*f) := \{x \in \mathbb{T}^\omega : (T^*f)(x) > \sigma\}$*.*

Demostración. Por reducción al absurdo. Supongamos que no existe una constante absoluta verificando (4.20) para todo $\sigma > 0$ y para toda $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$. Entonces existen sucesiones (σ_n) de números positivos y $(f_n) \subset L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ con $f_n \geq 0$, tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\|\chi_{E_{\sigma_n}(T^*f_n)}\|_{\bar{p}} > \frac{2^n}{\sigma_n}\|f_n\|_{\bar{p}}.$$

Podemos reformular un poco esto: poniendo $g_n := \frac{1}{\sigma_n} f_n$, se tiene $\|g_n\|_{\bar{p}} = \frac{1}{\sigma_n}\|f_n\|_{\bar{p}}$ y

$$E_{\sigma_n}(T^*f_n) = \{x : (T^*f_n)(x) > \sigma_n\} = \{x : (T^*g_n)(x) > 1\} = E_1(T^*g_n).$$

[16] Hemos considerado, por ejemplo, la posibilidad de una conclusión para el operador maximal como "tipo débil semi-mixto $(\bar{p}, P)$", con $P = \sup_k p_k$.

[17] Como explica Adriano Garsia [50, p. 6, 13].

[18] Por la suposición hecha, este operador maximal T^* es finito a.e. y por consiguiente [100, p. 5] acotado en medida.

Así que existe una sucesión de funciones $(g_n) \subset L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^{\omega})$, $g_n \geq 0$, tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\|\chi_{E_1(T^*g_n)}\|_{\bar{p}} > 2^n \|g_n\|_{\bar{p}}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, poniendo $E_1(T^*g_n) =: A_n$ para abreviar, existen entonces $g_n \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^{\omega})$, $g_n \geq 0$ y $A_n \subset \mathbb{T}^{\omega}$ medible tales que

$$(T^*g_n)(x) > 1 \text{ si } x \in A_n \quad \text{ y } \quad \|\chi_{A_n}\|_{\bar{p}} > 2^n \|g_n\|_{\bar{p}}. \tag{4.21}$$

Como $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^{\omega})$ es un espacio ideal normado, se tiene $2^n\|g_n\|_{\bar{p}} < \|\chi_{A_n}\|_{\bar{p}} \leq \|\chi_{\mathbb{T}^{\omega}}\|_{\bar{p}} = 1$ y por tanto $\|g_n\|_{\bar{p}} < 2^{-n}$. Y por otra parte también es $0 < \|\chi_{A_n}\|_{\bar{p}}^P \leq 1$.

Sea h_n el número natural más pequeño para el que se cumple $1 \leq h_n \|\chi_{A_n}\|_{\bar{p}}^P < 2$. Consideremos la familia de conjuntos medibles $\{A_n^j\}$ donde $n \in \mathbb{N}$ y, para cada n fijo, $j = 1, \dots, h_n$ y $A_n^j = A_n$ para todo j. Se tiene entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{h_n} \|\chi_{A_n^j}\|_{\bar{p}}^P = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \|\chi_{A_n}\|_{\bar{p}}^P = \infty.$$

Pero $\|\chi_{A_n}\|_P^P = m(A_n) < 1$ y, usando la Proposición 3.13(vi), $\|\chi_{A_n}\|_{\bar{p}}^P \leq \|\chi_{A_n}\|_P^P = m(A_n)$, luego se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{h_n} m(A_n^j) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{h_n} \|\chi_{A_n^j}\|_{\bar{p}}^P = \infty.$$

Aplicando el *lema de Calderón* [109, p. 146, Lemma 1][19], existe una familia de puntos $\{x_n^j\} \subset \mathbb{T}^{\omega}$ ($n \in \mathbb{N}$ y, para cada n, $j = 1, \dots, h_n$, donde $h_n \in \mathbb{N}$) tal que casi todo punto de $\mathbb{T}^{\omega}$ está en infinitos conjuntos de la familia de conjuntos trasladados $\{x_n^j + A_n^j\}$.

Finalmente se considera [54, p. 22] la función no negativa (empleamos la notación $\tau_y f(x) := f(x-y)$)

$$F(x) := \sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ j=1,\dots,h_n}} 2^{n/2} \tau_{x_n^j} g_n^j(x), \tag{4.22}$$

donde $g_n^j := g_n$ para $j = 1, \dots, h_n$. Se tiene

$$\|F\|_{\bar{p}}^P \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{nP/2} \sum_{j=1}^{h_n} \|\tau_{x_n^j} g_n^j\|_{\bar{p}}^P = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{nP/2} h_n \|g_n\|_{\bar{p}}^P \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{nP/2} h_n \frac{\|\chi_{A_n}\|_{\bar{p}}^P}{2^{nP}} < 2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-nP/2},$$

luego $F \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^{\omega})$. Por la linealidad y la positividad de los operadores T_n se tiene, para cada n, $j = 1, \dots, h_n$ y $x \in \mathbb{T}^{\omega}$,

$$T^*F(x) \geq T^* 2^{n/2} \tau_{x_n^j} g_n^j(x) = 2^{n/2} T^* \tau_{x_n^j} g_n^j(x).$$

La invariancia por traslaciones $T_n(\tau_y f)(x) = \tau_y(T_n f)(x) = (T_n f)(x-y)$ de los operadores T_n se transmite también al operador maximal, resultando que

$$T^*F(x) \geq 2^{n/2} T^* g_n(x - x_n^j).$$

Si $x \in x_n^j + A_n^j$, es decir, si $x - x_n^j \in A_n^j = A_n$, entonces según (4.21) se tiene $T^*g_n(x - x_n^j) > 1$ y por tanto $T^*F(x) > 2^{n/2}$. Pero casi todo $x \in \mathbb{T}^{\omega}$ está en infinitos conjuntos de la familia $\{x_n^j + A_n^j\}$. Por consiguiente $T^*F(x) = \infty$ a.e., lo que está en contradicción con la hipótesis, de acuerdo con el Teorema 4.18. □

[19]Stein presenta ahí una versión generalizada a grupos compactos, y que por tanto sirve para nuestro caso $\mathbb{T}^{\omega}$, del resultado clásico [123, XIII, (1·24)]. Ver [54, Lemma 2.2.2] para la versión más general para operadores que conmutan con transformaciones que preservan la medida y barajan los conjuntos medibles.

Conclusión

Unas líneas finales para recordar los principales resultados originales expuestos en la memoria así como los temas, preguntas o problemas, que han quedado abiertos para el estudio posterior, algunos de ellos ya propuestos por JLR.

Capítulo 1: Después de explicar notaciones y propiedades básicas hemos presentado los Teoremas de Jessen 1.4 y hemos usado, por ejemplo, el Teorema 1.4(b) para probar (Teorema 1.17) que los polinomios trigonométricos forman un subespacio denso en $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ si $1 \leq p < \infty$, generalizando la técnica usual de aproximación por convolución con los núcleos cuadrados de Fejér.

El resultado principal de este primer capítulo es el Teorema 1.34, que probamos constructivamente, presentando funciones de la clase $C^{(\infty}(\mathbb{T}^\omega)$, de hecho formas cuadráticas, dependientes de infinitas variables, cuya serie de Fourier diverge absolutamente. Previamente a la construcción de nuestros ejemplos presentamos una prueba bien detallada (Teorema 1.37) de un resultado de Littlewood [81, p. 166] concerniente a formas bilineales acotadas en $\mathcal{S}^2$, siendo $\mathcal{S}$ el polidisco infinito-dimensional $\{(z_n)_{n=1}^\infty \,|\, z_n \in \mathbb{C},\ |z_n| \leq 1\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

Nosotros estudiábamos la posibilidad de que la implicación $f \in C^{(\infty}(\mathbb{T}^\omega) \Rightarrow f \in A(\mathbb{T}^\omega)$ (v. Definición 1.13), que se cumple para funciones que sólo dependen de un número finito de las infinitas variables (Proposición 1.32), fuera válida en general, y fue Alexander Bendikov quien en mayo de 2016 nos señaló que seguramente podrían encontrarse contraejemplos que mostraran que la implicación es falsa en general. Esto orientó nuestro trabajo, que finalmente ha quedado publicado en el artículo [45].

No hemos llegado a

- *Encontrar una función Theta de Jacobi dependiente de infinitas variables para la cual los módulos de los coeficientes de su serie de Fourier formen una serie divergente*

como la que tenía en mente el profesor Bendikov.

Capítulo 2: Comenzamos, en la primera sección, con una breve reseña sobre convergencia por límite doble iterado de series de Fourier (bajo ciertas hipótesis de convergencia absoluta) y de sumabilidad Cesàro $(C, 1)$. Redemostramos (Teorema 2.1) un resultado de convergencia, en norma y a.e., que JLR presentó ya en su tesis doctoral [98] y un resultado de sumabilidad Cesàro de las sumas parciales cuadradas de las series de Fourier en $\mathbb{T}^\omega$ (Proposición 2.3) implícitamente presente en [63] y también sugerido por JLR.

En este contexto JLR dejaba propuestas las siguientes tareas que no hemos abordado (cf. el reciente trabajo [48]):

- *Estudiar si las convergencias de límite iterado de la* Proposición 2.3 *se cumplen "incondicionalmente" como un límite doble, es decir, si puede ser* $\lim_{(n,N)\to(\infty,\infty)} F_{n,N} * f = f$. *Parece que a.e. no tiene mucho sentido, pero podría ser posible en la norma de* $L^p(\mathbb{T}^\omega)$.

- *Estudiar en todo caso ese límite doble cuando n y N guardan alguna relación entre sí.*

En la segunda sección, en primer lugar abordamos una descomposición de tipo Calderón-Zygmund [27] asociada a cada función $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$, con relación a cierta clase $\mathcal{R}_0$ de "intervalos diádicos" de $\mathbb{T}^\omega$ (v. la ecuación (2.7)) que después denominamos *base* —de diferenciación— *restringida de Rubio de Francia*, que nos dejó esbozada JLR en 1977 en una comunicación personal (Figura 2.2; v. las definiciones de las sucesiones de subgrupos H_n y de dominios fundamentales V_n en las Definiciones 2.13). A partir de esto, el asunto se reduce a seguir fielmente, en el caso $G = \mathbb{T}^\omega$, la primera parte de la prueba del resultado principal [99, Thm. 8] de un trabajo de JLR (que el año 1977 estaría seguramente en estado de prepublicación), un resultado de diferenciación de integrales en el contexto de un grupo localmente compacto G y su medida de Haar.

La prueba original de JLR en [99] usa el teorema de convergencia a.e. de martingalas en lugar de un teorema de diferenciación del que en principio no se dispone. Hemos podido completar la prueba de nuestro resultado particular adaptando al toro infinito lo que, en el estilo de JLR, hace Javier Duoandikoetxea en [37, Ch. 2, §5] en el caso del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

En segundo lugar (Subsección 2.2.3) obtenemos unos resultados de diferenciación de integrales en $\mathbb{T}^\omega$, a partir de [99, Thm. 8, Corol. 5]. Además de $\mathcal{R}_0$, hemos definido otras dos bases de diferenciación, $\mathcal{R}$ (*base de Rubio de Francia*) y $\mathcal{R}^*$ (*base extendida de Rubio de Francia*), cumpliéndose que $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{R}^* \subset \mathcal{J}$, donde $\mathcal{J}$ es la base de diferenciación que forman todos los intervalos de $\mathbb{T}^\omega$ (*base de Jessen*). V. los EJEMPLOS que siguen a las Definiciones 2.16 y la ecuación (2.18) después de las Definiciones 2.27.

En el Corolario 2.19 (también en el Teorema 2.26) probamos que $\mathcal{R}_0$ diferencia $L^1(\mathbb{T}^\omega)$ y, en el que consideramos nuestro resultado principal de este capítulo (Teorema 2.30; v. la Nota 2.31(1)), probamos que $\mathcal{R}^*$ no diferencia $L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$. Nuestra prueba de este resultado negativo sigue muy estrechamente la argumentación de [71], donde Jessen terminó de probar que la base $\mathcal{J}$ no diferencia $L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$, respondiendo así negativamente a una cuestión que había planteado Zygmund (v. [70, p. 55]).

Un extracto bastante completo de nuestro trabajo en la Sección 2.2, en forma de artículo, está sometido a publicación (desde mayo de 2018). Se trata de nuestra referencia [46].

Sobre la base $\mathcal{R}$ de Rubio de Francia en $\mathbb{T}^\omega$ han quedado abiertas las siguientes cuestiones[20] (la notación $M^{\mathcal{B}}$ significa el operador maximal relativo a la base $\mathcal{B}$, v. la Definición 2.17):

- *¿Se cumple la implicación* $\mathcal{R}$ diferencia $L^1(\mathbb{T}^\omega) \Rightarrow M^{\mathcal{R}}$ es de tipo débil $(1, 1)$*?* (como en el teorema de Miguel de Guzmán y Grant Welland [55, Thm. 1.1, (b)⇒(a)] en $\mathbb{R}^n$ cuando la base de diferenciación es invariante por homotecias)

- *¿Diferencia $L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$ la base $\mathcal{R}$?*

- *¿Diferencia $L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$ la base formada sólo por los cubos $\{y + V_{m^2} : y \in \mathbb{T}^\omega,\ m \geq 2\}$?* (Nota 2.31(2). V. la ecuación (2.6).)

En la tercera sección del capítulo respondemos (Proposición 2.33) la siguiente pregunta: ¿Es el toro infinito $\mathbb{T}^\omega$ con la medida de Haar y alguna métrica, tal vez con la de Saks, un espacio de tipo homogéneo [53, p. 17]? Nuestra respuesta es negativa, tanto con la métrica de Saks (2.21) como con la (2.23) de Edwards-Saks.

Bendikov define explícitamente [3, Rem. 5.4.6] una familia general de métricas intrínsecas $d_A(x, y)$ en $\mathbb{T}^\omega$ por (v. ecuación (2.22)):

$$d_A(x, y)^2 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} d^\circ(x_k, y_k)^2, \quad (a_k) \in \mathbb{R}^\omega.$$

Podríamos extender entonces la pregunta anterior, no hemos llegado a estudiar esto:

[20] La tercera pregunta la debemos a Yannis Parissis (IKERBASQUE-Univ. del País Vasco UPV/EHU, Bilbao).

- *¿Se puede dar una condición sobre la sucesión de coeficientes* (a_k) *de modo que el toro infinito* $\mathbb{T}^\omega$ *con la medida de Haar y la correspondiente métrica* d_A *de Bendikov sea un espacio de tipo homogéneo?*

Capítulo 3: Repartido entre las dos caras de la Hoja 1 (Figuras 3 y 4) de su carta de 1977 JLR escribió un guión para el estudio de espacios de norma mixta en $\mathbb{T}^\omega$ o en general en un producto infinito de espacios de probabilidad, tal y como él lo contemplaba entonces, comenzando por lo que debía ser el proceso de "paso al límite", a partir de espacios (productos cartesianos finitos) con $(p_1, \ldots, p_n)$-norma mixta de Benedek y Panzone [10], que diera lugar a una definición análoga de una $\bar{p}$-norma mixta para funciones medibles, siendo ahora $\bar{p} = (p_k)_{k=1}^\infty$, $1 \leq p_k \leq \infty$.

Es muy elegante la presentación que hace Bendikov de su definición de espacios de norma mixta en espacios como el toro infinito [3, 6.1]. En primer lugar se da cuenta de que, para cada n, la sección de Jessen f_n de una función integrable f (v. ecuación (1.8)) no es más que la esperanza condicional de la función f respecto de la σ-álgebra $\mathcal{A}_n$ engendrada por los cilindros $A \times \mathbb{T}^{n,\omega}$, donde A es un conjunto de Borel en $\mathbb{T}^n$. Entonces (f_n) es una martingala respecto de la sucesión creciente $(\mathcal{A}_n)$, y los teoremas de Jessen de convergencia en norma y a.e. de la sucesión (f_n) hacia la función f son consecuencia del teorema de convergencia de martingalas.

A continuación va a definir la $BPS\,\bar{p}$-norma mixta[21] de f, donde $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, como el límite cuando $n \to \infty$ de la sucesión formada por la $(p_n, \ldots, p_1)$-norma mixta de Benedek y Panzone de la sección de Jessen f_n de f en $\mathbb{T}^n$. Un buen resultado que consigue la teoría de Bendikov es tener [3, Thm. 6.1.2] que si $\sup_k p_k < \infty$, entonces la sucesión (f_n) de secciones de Jessen de la función f converge a la función f en la $BPS\,\bar{p}$-norma mixta cuando $n \to \infty$.

Pero esto ocurría a mediados de los años 80. El acercamiento que proponía JLR en 1977 a una definición de norma mixta en el toro infinito (Figura 3, 1$^{\text{er}}$ Ensayo de Definición) para funciones de $L^1(\mathbb{T}^\omega)$ como límite de cierta supermartingala inversa [91, Proposition V-3-11] es más directo, y es el que hemos desarrollado nosotros (Teorema 3.2, Definición 3.5, Proposición 3.7, Definición 3.8) para definir la $JLR\,\bar{p}$-norma mixta.

Otro acercamiento hacia una definición de una $\bar{p}$-norma mixta de f ("desde el otro lado" que Bendikov y colaboradores) podría ser el que queda esbozado en el siguiente problema abierto:

- *Las colas de Jessen* $f_{n,\omega}$, $(n \in \mathbb{N})$ (v. ecuación (1.7)), *de una función* $f \in L^1(\mathbb{T}^\infty)$ *forman una martingala inversa respecto de la sucesión decreciente de* σ*-álgebras engendradas por los co-cilindros* $\mathbb{T}^n \times A$, *siendo* A *de Borel en* $\mathbb{T}^{n,\omega}$, $n \in \mathbb{N}$. *Los teoremas de Jessen sobre convergencia en norma y a.e. de la sucesión* $f_{n,\omega}$ *hacia* $\int_{\mathbb{T}^\omega} f$ *son consecuencia del teorema de convergencia de martingalas inversas. Se definiría la* $\bar{p}$*-norma mixta de* f *como el límite (si existe), cuando* $n \to \infty$, *de la sucesión de las* $JLR\,\bar{p}^{n,\omega}$*-normas mixtas de las* $f_{n,\omega}$ *en* $\mathbb{T}^{n,\omega}$.

  ¿Hay alguna relación esta nueva $\bar{p}$*-norma mixta con la* $BPS\,\bar{p}$*-norma mixta o con nuestra* $JLR\,\bar{p}$*-norma mixta?*

Siguiendo [10] y [3], en la primera sección, probamos entonces (Proposiciones 3.9 y 3.12, Teorema 3.18) que, si $\mathbf{1} \leq \bar{p} \leq \boldsymbol{\infty}$, el espacio vectorial $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ es un espacio ideal normado (en el sentido de [72, p. 95]) y completo (también se denomina un retículo de Banach).

Probamos después que, si $\sup_k p_k < \infty$, entonces en $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ se cumple la condición C.6) de [3, 6.1.2] (Teorema 3.20), el espacio $L^\infty(\mathbb{T}^\omega)$ es denso en el espacio $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ (Corolario 3.21) y en $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ se cumple la propiedad (CD) de convergencia dominada (Proposición 3.22, v. Subsección 3.1.3).

No hemos podido probar (ni refutar) un resultado para las $JLR\,\bar{p}$-normas mixtas del tipo siguiente:

[21] La denominación es nuestra, por Bendikov, Pavlov y Skorikov.

- *Sea $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots)$ con $1 \leq p_k < \infty$ para todo k. Si $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ y, para cada n, f_n es su sección n-ésima de Jessen, entonces $\|f_n - f\|_{\bar{p}} \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

A continuación probamos que bajo la condición $\sup_k p_k < \infty$ se cumplen también las propiedades siguientes:

1. El subespacio $S^{\bar{p}}$ de $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ engendrado por todas las funciones que tienen la forma $f(x) = f_1(x_1) \cdots f_k(x_k)$ para un cierto $k \in \mathbb{N}$, donde $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{T})$ para cada $j = 1, \ldots, k$, es denso en $L^{\bar{p}}$ (Definición 3.23, Proposición 3.24).

2. El espacio dual de $L^{\bar{p}}$ es $L^{\bar{q}}$, siendo $\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{q}} = \mathbf{1}$ (Proposición 3.26).

3. $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ es un espacio de Banach homogéneo (Definición 3.28, Proposición 3.29).

En la segunda sección del capítulo, después de exponer con detalle el *primer método complejo de interpolación* entre espacios de Banach de Calderón [26], llegamos a presentar en primer lugar un resultado de interpolación de tipo Riesz-Thorin para espacios de norma mixta en $\mathbb{T}^\omega$ (Teorema 3.42), basando nuestra prueba en un resultado sobre espacios interpolados (Proposición 3.41) ya previsto por JLR en su carta (Propiedad *iv)* en el texto que muestra la Figura 4).

Benedek y Panzone cierran su trabajo [10, §12, Thm. 1] con la generalización del teorema de Hausdorff-Young que define la transformada de Fourier como un operador lineal continuo y de norma 1 entre los espacios de norma mixta $L^P(\mathbb{R}^n)$ ($\mathbf{1} \leq P \leq \mathbf{2}$) y $L^Q(\mathbb{R}^n)$ ($\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = \mathbf{1}$; además, si $P = (p_1, \ldots, p_n)$, debe cumplirse $1 \leq p_n \leq p_{n-1} \leq \cdots \leq p_1 \leq 2$), en cuya demostración el teorema de Riesz-Thorin es la pieza fundamental.

Nos parece interesante plantear (v. Nota 3.43) la posibilidad de

- *Generalizar a $\mathbb{T}^\omega$ el teorema de Hausdorff-Young a los espacios $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ ($\mathbf{1} \leq \bar{p} \leq \mathbf{2}$) de norma mixta.*

No tenemos referencias de que esto haya sido hecho ya. Aunque para $n \in \mathbb{N}$ el método de Benedek y Panzone permite definir los espacios de norma mixta $\ell^{(p_1,\ldots,p_n)}(\mathbb{Z}^n)$, aparece una dificultad de entrada para definir los espacios de norma mixta $\ell^{\bar{p}}(\mathbb{Z}^\infty)$.

En segundo lugar nos hemos dedicado a trabajar sobre el *PROBLEMA 1*, puntos 1., 2. y 3. que proponía JLR a continuación (Figura 4). En base a la definición de $\bar{p}$-"norma"débil mixta en $\mathbb{T}^\omega$ que nos parece más adecuada, a saber,

$$\|f\|_{\bar{p}}^{\mathrm{w}} := \sup_{\sigma > 0} \sigma \cdot \|\chi_{E_\sigma(f)}\|_{L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)}$$

siendo $\mathbf{1} \leq \bar{p} = (p_1, p_2, \ldots) < \boldsymbol{\infty}$, $E_\sigma(f) = \{x \in \mathbb{T}^\omega \colon |f(x)| > \sigma\}$ (Definición 3.44), llegamos a probar, en relación con el punto 1., la Proposición 3.45. En relación con el punto 2. (condición de Kolmogorov) hemos definido, para $\mathbf{1} \leq \bar{q} < \bar{p} < \boldsymbol{\infty}$, dos nuevas normas $N_{\bar{p},\bar{q}}(f)$ y $N^\sharp_{\bar{p},\bar{q}}(f)$ (Definiciones 3.46 y 3.48). No hemos sabido probar una equivalencia completa entre la norma mixta débil $\| \cdot \|_{\bar{p}}^{\mathrm{w}}$ y ninguna de estas dos normas, aunque hemos conseguido resultados en este sentido (Proposiciones 3.47 y 3.49). Queda abierto el problema

- *¿Se puede dar una norma del tipo de las $N_{\bar{p},\bar{q}}(f)$ y $N^\sharp_{\bar{p},\bar{q}}(f)$ ($\mathbf{1} \leq \bar{q} < \bar{p} < \boldsymbol{\infty}$) equivalente a la cuasinorma débil mixta $\|f\|_{\bar{p}}^{w}$?*

Cerramos el capítulo presentando un pequeño estudio de alcance modesto en relación con el punto 3. (teorema de Marcinkiewicz). Definimos, con Concepción Ballester, operador *de tipo débil semi-mixto* $(\bar{p}, s)$, donde $\bar{p} \geq \mathbf{1}$, $s \geq 1$ (Definición 3.50), y probamos unos resultados de interpolación entre tipos débiles semi-mixtos (Proposiciones 3.51 y 3.52). Queda abierto el punto 3. tal como lo presentaba JLR, es decir, algo así:

- *Sean* $\mathbf{1} \leq \bar{p} < \bar{q} < \boldsymbol{\infty}$. *Sea* $T\colon L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega) + L^{\bar{q}}(\mathbb{T}^\omega) \to L^0(\mathbb{T}^\omega)$ *un operador lineal de tipos débiles* $(\bar{p},\bar{p})$ *y* $(\bar{q},\bar{q})$. *Para un* θ *fijo* $(0 < \theta < 1)$, *sea* $\frac{1}{\bar{r}} = \frac{1-\theta}{\bar{p}} + \frac{\theta}{\bar{q}}$. *Entonces, el operador* T *es de tipo* $(\bar{r},\bar{r})$ *fuerte.*

Por nuestra parte dejamos también abierta, como conjetura, la posibilidad de que se cumpla “al menos” el siguiente resultado, que tampoco hemos sabido demostrar:

- *Sean* $\mathbf{1} \leq \bar{p} < \bar{q} < \boldsymbol{\infty}$ *y supongamos* $\sup_k p_k = P \leq \sup_k q_k = Q < \infty$. *Sea* $T\colon L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega) + L^{\bar{q}}(\mathbb{T}^\omega) \to L^0(\mathbb{T}^\omega)$ *un operador lineal de tipos débiles semi-mixtos* $(\bar{p}, P)$ *y* $(\bar{q}, Q)$. *Para un* θ *fijo* $(0 < \theta < 1)$, *sean* $\frac{1}{\bar{r}} = \frac{1-\theta}{\bar{p}} + \frac{\theta}{\bar{q}}$ *y* $\frac{1}{R} = \frac{1-\theta}{P} + \frac{\theta}{Q}$. *Entonces, el operador* T *es de tipo* $(\bar{r}, R)$ *fuerte.*

Y finalmente informamos del problema abierto de A. Bendikov [3, Rem. 6.3.4] (v. Nota 3.53), que se podría estudiar tanto con las BPS $\bar{p}$-normas como con las JLR $\bar{p}$-normas:

- *Para* $\mathbf{1} < \bar{p} < \boldsymbol{\infty}$, *¿es acotada* $(\bar{p},\bar{p})$ *la transformada de Riesz entre espacios* $L^{\bar{p}}$ *de norma mixta sobre productos infinitos de espacios de probabilidad?*

Estamos elaborando un artículo que presente un resumen de nuestro trabajo en este capítulo.

Capítulo 4: Entre las dos caras de la Hoja 2 (Figuras 5 y 6) de su carta de 1977 JLR escribió un guión para un estudio de la convergencia en la norma de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ $(1 < p < \infty)$, o en la norma mixta $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ $(\mathbf{1} < \bar{p} < \boldsymbol{\infty})$, y algunos resultados de convergencia a.e., de ciertas sumas parciales $S_{\delta R} f$ (v. Definiciones 4.1 y 4.3) de la serie de Fourier de una función f medible en $\mathbb{T}^\omega$. Por otra parte fue su propio trabajo en relación con alguno de los puntos que allí se esbozaban lo que JLR expuso en su artículo [101], donde solamente incorporaba los enunciados de los resultados que había obtenido, con alguna idea sobre las líneas de demostración.

Nuestra exposición en el capítulo, que sigue estos escritos de JLR citados, consta de tres secciones, cuyos temas principales son, respectivamente, el teorema de tipo Marcel Riesz sobre la convergencia en $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ $(1 < p < \infty)$ de las sumas parciales $S_{\delta R} f$, lo mismo en los espacios de norma mixta $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ $(\mathbf{1} < \bar{p} < \boldsymbol{\infty})$ y algún resultado de convergencia a.e..

En la primera sección, para conseguir una presentación autocontenida comenzamos haciendo un repaso de la teoría estándar (Proposiciones 4.5 y 4.6). A continuación mostramos el fallo de la convergencia en $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ de las sumas parciales $S_{\delta R} f$ para todo $p \neq 2$, lo que establece una gran diferencia con lo que ocurre en el caso finito-dimensional, desarrollando (Lema 4.7, Proposición 4.8 y Proposición 4.10) la prueba que deja perfectamente delineada JLR en el texto de la Figura 5. La reconstrucción de la prueba es nuestra. Damos también una prueba independiente (Proposición 4.12) de que la función característica χ_Γ, donde

$$\Gamma := \{\bar{n} = (n_k) \in \mathbb{Z}^\infty \colon n_k \geq 0\},$$

solo es un multiplicador de $L^p(\mathbb{T}^\omega)$ $(1 < p < \infty)$ cuando $p = 2$.

En la segunda sección, repitiendo esencialmente la secuencia principal de resultados de la sección anterior, tratamos de dar una demostración desarrollada del siguiente resultado, un resultado análogo al que constituyen conjuntamente las Proposiciones 4.6 y 4.10 de la sección anterior y que JLR establecía “en búsqueda de resultados positivos [de convergencia en norma de series de Fourier de infinitas variables] menos obvios”, con unas indicaciones para su prueba, en [101]. En la carta de 1977 (v. Figura 6) también nos adelantaba este resultado y la manera de probarlo. En su contexto es $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots)$ con $1 \leq p_k \leq \infty$, y nosotros vamos a considerar que los espacios $L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ “análogos a los espacios de norma mixta de Benedek-Panzone con un paso al límite” son los JLR-espacios de norma mixta que se han definido y estudiado en el Capítulo 3. Escribía JLR:

> TEOREMA 1: a) Los operadores $(S_{\delta R})$ son uniformemente acotados en $L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)$ (equivalentemente $\lim_{\delta\to\infty} \|S_{\delta R} f - f\|_{\bar p} = 0$ para cada $f \in L^{\bar p}$) si y solo si $\sum_k |p_k - 2| < \infty$. [101, p. 238]

Primeramente probamos un lema técnico (Lema 4.15) análogo al Lema 4.7 de la sección anterior. A continuación, al tratar de reconstruir una prueba del anterior TEOREMA 1: a), que da, de acuerdo con la Proposición 4.14, una condición necesaria y suficiente para que las sumas parciales $S_{\delta R}(f)$ de la serie de Fourier de toda función $f \in L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)$ converjan a la función f en $L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)$ cuando $\delta \to \infty$, hemos encontrado que debíamos sustituir la condición necesaria $\sum_k |p_k - 2| < \infty$ original por la de menos alcance, y de la que no sabemos asegurar la suficiencia, $\sum_k |p_k - 2|^2 < \infty$. De modo que nosotros hemos probado:

Proposición 4.16. Sea $\mathbf{1} \le \bar p = (p_k) < \boldsymbol{\infty}$. Se tiene

(a) $\sum_k |p_k - 2| < \infty \Longrightarrow \sup_{\delta>0} \|S_{\delta R}\|_{L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)\to L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)} < \infty$.

(b) $\sup_{\delta>0} \|S_{\delta R}\|_{L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)\to L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)} < \infty \Longrightarrow \sum_k |p_k - 2|^2 < \infty$.

En su carta de 1977 JLR añadía en este contexto la siguiente observación (Figura 6):

> *CONJETURA*: Para el (o los) $\bar p$ límite (que haga $\prod_{j=1}^{\infty} A_{p_j} = \infty$ pero por lo justo) cabe esperar una condición de tipo $(\bar p, \bar p)$-débil. Esto generalizaría el teorema de Kolmogorov y probaría la equicontinuidad de S_{R_n} [o bien, de los operadores $S_{\delta R}$] de $L^{\bar p}$ en $L^{\bar q}$ ($\bar q < \bar p$) y la convergencia en $L^{\bar q}$ de series de Fourier de funciones de $L^{\bar p}$.

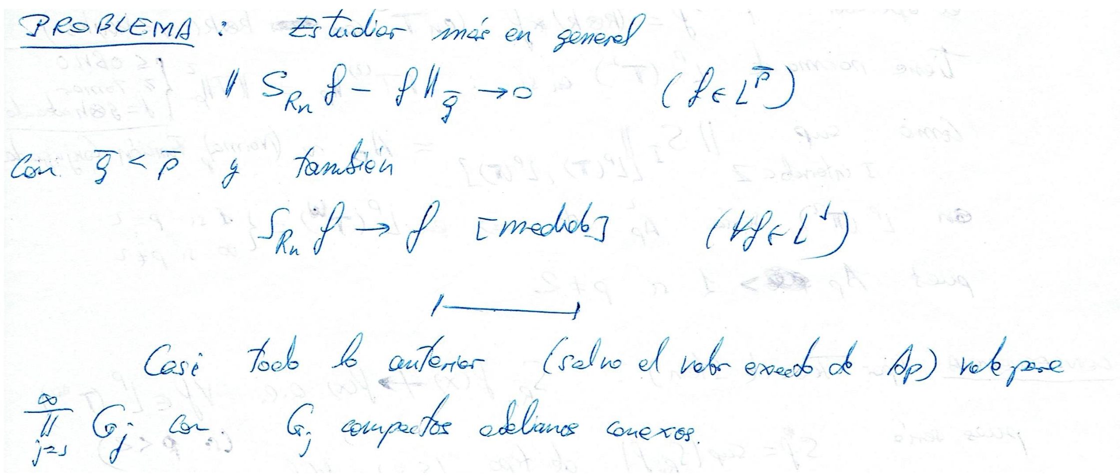
Las constantes A_{p_k} a las que se refiere aquí JLR son las constantes de M. Riesz-Pichorides definidas en la Nota 4.9. Hemos analizado este párrafo en la Nota 4.17. Un primer problema abierto a que da lugar podría plantearse así:

- *Sea $\bar p = (p_k)$ tal que $|p_k - 2| = \frac{1}{k}$ para todo k. Probar que*

$$\sup_{\delta>0} \|S_{\delta R}(f)\|_{\bar p}^{\mathrm{w}} \le C_{\bar p} \|f\|_{\bar p}$$

  con $C_{\bar p}$ independiente de δ para toda $f \in L^{\bar p}(\mathbb{T}^\omega)$, siendo $\bar p > \mathbf{1}$ y donde $\|\cdot\|_{\bar p}^{\mathrm{w}}$ es la cuasinorma débil (3.29).

Por otra parte dejamos sin tocar el *PROBLEMA* final de la Hoja 2 de la carta de JLR (Figura 6). Y también comentar sus dos últimas líneas. En su forma manuscrita original:



PROBLEMA: Estudiar más en general

$\| S_{R_n} f - f \|_{\bar q} \to 0$ $\quad (f \in L^{\bar p})$

con $\bar q < \bar p$ y también

$S_{R_n} f \to f$ [medida] $\quad (\forall f \in L^1)$

Casi todo lo anterior (salvo el valor exacto de A_p) vale para

$\prod_{j=1}^{\infty} G_j$ con G_j compactos abelianos conexos.

-

En la tercera sección vemos en primer lugar que, para $f \in L^p(\mathbb{T}^\omega)$, como consecuencia de la Proposición 4.10 y del teorema de Stein 4.20, si $p < 2$ no cabe esperar resultados positivos de convergencia en casi todo punto para las sumas $S_{\delta R}(f)$. La demostración de la Proposición 4.21 sigue las líneas que JLR escribía en su carta (Figura 5).

Limitado así a estudiar la convergencia puntual de las sumas parciales $S_{\delta R} f$ solamente para funciones $f \in L^2(\mathbb{T}^\omega)$, JLR [101] informaba de los siguientes resultados (v. la Subsección 4.3.1):

TEOREMA 2: Existe $f \in L^2(\mathbb{T}^\omega)$ tal que

$$\limsup_{\delta\to\infty} |S_{\delta R} f(x)| = +\infty \quad \text{a.e..}$$

TEOREMA 3: Para $\bar{n} = (n_k) \in \mathbb{Z}^\infty$, denotamos $|\bar{n}| = \sup |n_k|$, $\#(\bar{n})$ = número de elementos no nulos de (n_k). [Dado $A \subset \mathbb{Z}^\infty$ se denota $L^2_A(\mathbb{T}^\omega) = \{f \in L^2 \colon \widehat{f}(\bar{n}) = 0 \quad \forall \bar{n} \notin A\}$.] Consideremos los subconjuntos de $\mathbb{Z}^\infty$

$$A(m) = \{\bar{n} = (n_k) \colon |\bar{n}| = \sup_{k\le m} |n_k|\},$$
$$B(m) = \{\bar{n} = (n_k) \colon \#(\bar{n}) \le m\}.$$

Para toda $f \in L^2_{A(m)}$ y para toda $f \in L^2_{B(m)}$ se verifica

$$\lim_{\delta\to\infty} S_{\delta R} f(x) = f(x) \quad \text{a.e..}$$

No sabemos cómo sería la prueba de JLR de este TEOREMA 2, que contesta negativamente a la cuestión acerca de la posible convergencia a.e. de las sumas parciales rectangulares de las series de Fourier en $L^2(\mathbb{T}^\omega)$, cuestión que en 1977 el propio JLR calificaba como “muy difícil” (Figura 5, última línea). Pero hemos hecho un intento de aproximarnos a lo que pudieron ser las pruebas originales del curioso TEOREMA 3 siguiendo las instrucciones que dejó su autor (Teoremas 4.22 y 4.23).

Finalmente (Subsección 4.3.2), en relación con el estudio de la convergencia a.e. de las sumas parciales $S_{\delta R}(f)$ para $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ hemos probado un resultado (Proposición 4.24) en la línea del teorema de Stein-Sawyer para familias de operadores positivos. Queda abierto, por un lado, el *PROBLEMA 2* que proponía JLR al final de la Hoja 1 de su carta (Figura 4):

- *¿$T_n f(x) \to f(x)$ a.e. $\forall f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ con $\mathbf{1} \le \bar{p} \le \mathbf{2}$ y T_n invariante por traslaciones $\Rightarrow$ $T^* f = \sup_n |T_n f|$ es de tipo $(\bar{p}, \bar{p})$-débil?*

Y, por otro lado, para nosotros sigue también abierto el TEOREMA 1: b) que enunciaba JLR en [101, p. 238-239]:

- *Si $\sum_{p_k<2}(2 - p_k) = \infty$ existe una función $f \in L^{\bar{p}}(\mathbb{T}^\omega)$ tal que, cuando $\delta \to \infty$, $(S_{\delta R} f)$ es divergente en medida.*

Anexos

Como complemento literario que por supuesto es inesencial para la Memoria, presentamos en orden cronológico unas versiones de trabajo propias al castellano de las siguientes referencias de nuestra bibliografía, cuya presencia en estos anexos ha quedado ya mencionada a lo largo del texto principal.

- [65] (extractos) de David Hilbert (1909), citado por H. Bohr en el artículo [17].
- [17] (extractos) de Harald Bohr (1913), citado por JLR en [101] (v. pág. viii).
- [115] de Otto Toeplitz (1913), también citado por H. Bohr en [17] (antes de su publicación), que ha sido esencial para nuestro trabajo en la subsección 1.2.2 del Capítulo 1 (y en el artículo [45]).
- [24] de Herbert Busemann y William Feller (1934), tal vez uno de los cimientos de la temática de bases de diferenciación de integrales de la que se ha tratado en la Sección 2.2 del Capítulo 2 (v. la nota a pie 11 de dicho capítulo).
- [92] de Igor V. Pavlov y Alexander V. Skorikov (1986), fundamental para nuestro avance en el Capítulo 3 y que pudimos traducir antes de conocer su posterior desarrollo más completo en el libro [3] del profesor Alexander D. Bendikov.

D. Hilbert, Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variablen. *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo* Bd. 27 (1909), p. 59–74. (Es una referencia del artículo [17] de H. Bohr.)

Naturaleza y finalidad de un Análisis de infinitas variables independientes.[1]

Por **David Hilbert** (Göttingen).

En el Álgebra la mayor parte de las veces se consideran como incógnitas —llámense φ_1, φ_2, $\ldots \varphi_n$— un número *finito* de cantidades, y se plantea el problema de determinar este número finito de cantidades φ_1, φ_2, $\ldots \varphi_n$ de modo que se satisfaga un número finito de relaciones dadas.

En comparación, en la mayoría de los problemas del Análisis las incógnitas son *funciones*, y para determinarlas de modo que se satisfagan ciertas relaciones, se requiere que estas relaciones estén en forma de ecuaciones diferenciales, integrales o funcionales, o tal vez en una combinación de estos tipos de ecuaciones. En la idea de fijar uno de estos problemas, podemos considerar que nuestra incógnita es una única función continua $\varphi(s)$ de la sola variable s, para la que se ha dado una única relación

$$R(\varphi(s)) = 0.$$

El recién mencionado problema de análisis y el problema de álgebra al que nos referíamos en primer lugar se funden y quedan englobados en el problema más general y completo que considera como incógnitas *infinitas* cantidades desconocidas y trata de determinarlas de modo que se satisfagan *infinitas* relaciones dadas. De hecho, la función continua $\varphi(s)$ queda determinada si los valores, dependientes de $\varphi(s)$, del sistema de infinitas variables que constituyen por ejemplo sus coeficientes de Fourier

$$x_1 = \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(s)\, ds, \qquad x_2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(s) \cos s\, ds, \qquad x_3 = \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(s) \sin s\, ds,$$

$$x_4 = \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(s) \cos 2s\, ds, \qquad x_5 = \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(s) \sin 2s\, ds, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

son cantidades conocidas, y por otra parte la relación dada (ecuación diferencial, integral o funcional) se deja transformar en infinitas ecuaciones entre estos valores, de modo que estas ecuaciones vienen a ser las infinitas relaciones dadas para la determinación de las infinitas incógnitas x_1, x_2, $\ldots$.

El denominado problema de la determinación de infinitas incógnitas a partir de infinitas ecuaciones parece a primera vista, debido a su generalidad, ingrato e inabordable; además, ocuparnos de él acarrea el peligro de hacer que nos perdamos en unas consideraciones demasiado difíciles, atrevidas o miopes sin obtener ningún beneficio para problemas más profundos. Pero si no nos dejamos confundir por estas consideraciones somos como Sigfrido, ante quien el Fuego mágico por sí mismo se apaga gradualmente, y en recompensa se nos otorga el hermoso premio de *una creación metódicamente uniforme de Álgebra y Análisis.*

Para garantizar el acceso al problema de la determinación de infinitas incógnitas a partir de infinitas ecuaciones, recordemos el modo de proceder en el caso de un número *finito* de variables: consideremos que los primeros miembros de las relaciones dadas son funciones de un número de argumentos, y que la dificultad de la búsqueda de las raices de las ecuaciones dadas depende de la naturaleza de esas funciones. Si son —por empezar con las más sencillas— funciones lineales, cuadráticas o enteras racionales cualesquiera, las ecuaciones que se forman mediante su igualación a cero las enseña a resolver la Teoría de las ecuaciones numéricas. En la Teoría de funciones encontramos en primer lugar el concepto general de la función de un número cualquiera de variables; al especializar este concepto paso a paso por las exigencias de continuidad, después de diferenciabilidad, etc., llegamos finalmente, a través de otra especialización del concepto de función, al concepto de función analítica.

La primera tarea del Análisis de un *número infinito* de variables debe ser la de *trasladar todos estos conceptos, y las primeras propiedades concernientes a los mismos, en la forma apropiada para el caso de*

[1]Tuve previsto exponer las siguientes consideraciones en el IV Congreso Internacional de los Matemáticos de 1908 en Roma. [Finalmente D. Hilbert no acudió a aquel Congreso por problemas de salud, según se informa en las correspondientes Actas, Vol. I, p. 3. *(N. del T.)*]

infinitas variables.[2] Así ahora mismo, en un primer ensayo, para definir el concepto de función lineal de infinitas variables, esto exige la consideración efectiva de que una *expresión* lineal en las infinitas variables x_1, x_2, $\ldots$, como

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots,$$

ciertamente solo puede representar una *función* de aquellas infinitas variables, cuando la serie sea *convergente*, y esto es cierto solo en el caso de que las infinitas variables x_1, x_2, $\ldots$, que provisionalmente podríamos considerar reales, queden limitadas por desigualdades. Estas desigualdades restrictivas se podrían escoger de muchas maneras, pero la arbitrariedad desaparece si se exige —según el principio de dualidad— que los coeficientes a_1, a_2, $\ldots$ de la función lineal sean asimismo el sistema de valores de las infinitas variables que satisface una desigualdad suficientemente restrictiva. La restricción para las infinitas variables x_1, x_2, $\ldots$ puede consistir de una manera muy sencilla en que la suma de sus cuadrados sea finita, la primera restricción que se nos ocurre al hablar de funciones o ecuaciones de infinitas variables reales x_1, x_2, $\ldots$. En particular se enseña que la expresión lineal

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots,$$

define una función lineal de las infinitas variables x_1, x_2, $\ldots$, cuando y solo cuando la suma de los cuadrados de los coeficientes a_1, a_2, $\ldots$ es finita.

Volvamos ahora al tratamiento del *concepto de continuidad.* Decimos que los infinitos sistemas de valores

$$\begin{array}{lcccc}
(x') & = & x'_1, & x'_2, & \ldots \\
(x'') & = & x''_1, & x''_2, & \ldots \\
(x''') & = & x'''_1, & x'''_2, & \ldots \\
\ldots & \vdots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

se convierten *con continuidad* en el [convergen al] sistema de valores

$$(x) = x_1,\ x_2,\ \ldots$$

cuando se cumplen todas las condiciones de límite siguientes

$$\begin{array}{l}
\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = x_1, \\
\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} = x_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Una función $F(x)$ de las infinitas variables x_1, x_2, $\ldots$ se dice *continua* cuando los valores de la función $F(x')$, $F(x'')$, $F(x''')$, $\ldots$ se aproximan siempre al valor $F(x)$ en tanto que los infinitos sistemas de valores (x'), (x''), (x'''), $\ldots$ converjan al sistema de valores (x).

En base a esta definición de continuidad nos daremos cuenta fácilmente que, correspondiendo al caso de un número finito de variables, una función continua de funciones continuas es siempre otra función continua. Pero, sobre todo, que es válido también el hecho de que una función continua de infinitas variables debe alcanzar siempre un mínimo[3] —un teorema que nos parece, a causa de su precisión, su generalidad y su aplicabilidad, como un equivalente del conocido *principio de Dirichlet.*

En lo concerniente a funciones de infinitas variables de un tipo particular, sabemos que *una función lineal siempre es continua.* Para una definición de las funciones cuadráticas, sean a_{pq} $(p, q, = 1, 2, \ldots)$ cantidades cualesquiera, tales que exista el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{(p,q=1,2,\ldots n} a_{pq}x_px_q$$

[2]Ver por ejemplo mis comunicaciones 4ª y 5ª Über die Grundzuge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, 1906, 157–227 y 439–480; o bien *Grundzuge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Leipzig 1912, capítulos 4. y 5.

[3]Ver mi 4ª comunicación, p. 200 y mi 5ª comunicación, p. 440 [Anm. 1, p. 57].

para todos los valores de las variables x_1, x_2, ...; entonces designaremos este límite con

$$Q(x) = \sum_{(p,q=1,2,\dots n} a_{pq}x_px_q$$

y lo llamaremos una *función cuadrática* de las infinitas variablesx_1, x_2, ... Una función cuadrática en general no es continua, sino que solo puede considerarse, en un sentido en cuya discusión no podemos detenernos aquí, como una función "acotadamente continua" de las infinitas variables x_1, x_2, ... Sin embargo, una función cuadrática resulta ser continua cuando lo es para un sistema de valores particular, como por ejemplo para el sistema $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ...

Las recién definidas funciones lineales y cuadráticas tiene carácter homogéneo en las variables x_1, x_2, ... y por ello se llaman también *formas*; nosotros designaremos como funciones lineales o cuadráticas respectivamente también a las sumas de constantes y formas lineales o sumas de funciones lineales y formas cuadráticas respectivamente. Inmediatamente se dejan introducir los correspondientes conceptos de forma bilineal, transformación lineal, ortogonal, invariante, etc., y mediante un desarrollo de estos conceptos y de las propiedades primitivas de los mismos se origina una teoría de las formas en infinitas variables, —un nuevo campo científico en cierto modo intermedio entre el álgebra y el Análisis, ya que si con respecto a sus métodos se apoya en el álgebra, a causa de la naturaleza transcendente de sus resultados en cambio pertenece al Análisis.

Son de importancia los teorema sobre formas cuadráticas y bilineales.[4] Vaya por delante el teorema según el cual, *si la forma cuadrática $Q(x)$ es continua, siempre se puede transformar, mediante una transformación ortogonal, en la suma de los cuadrados de unas nuevas variables x'_1, x'_2, ...*, de modo que se tiene

$$Q(x) = k_1{x'_1}^2 + k_2{x'_2}^2 + \cdots ,$$

donde k_1, k_2, ... es una cierta sucesión de constantes que converge a cero. A este teorema le siguen otros y finalmente un importante teorema sobre las formas bilineales continuas, cuyo contenido esencial viene a decir que *Un sistema de infinitas ecuaciones lineales en infinitas incógnitas que procede de una forma bilineal continua tiene , con respecto a la existencia y número de soluciones, todas las propiedades de un sistema de un número finito de ecuaciones y un número finito de incógnitas.*

En lo que concierne a la argumentación de la necesaria demostración de estos teoremas, decir que se basan fundamentalmente en el teorema mencionado hace un momento de la existencia del mínimo de una función continua de infinitas variables, y el curso posterior es tan simple y natural, que es solo necesario llamar la atención de las personas a que pasen entre las estaciones en el orden correcto, con lo cual todo el mundo adivinará inmediatamente los pasos de conexión: hay que utilizar simplemente las consideraciones oportunas de la teoría de las formas cuadráticas y bilineales con un número finito de variables, como si estas consideraciones celebraran sus mejores triunfos primeramente aquí, en la teoría de las formas con infinitas variables.

No es menos importante la teoría de las formas cuadráticas solo acotadamente continuas. Resulta que estas formas también admiten una representación análoga: solo hay que añadir a la suma infinita de cuadrados de formas lineales, como ocurre ya en la representación de las formas cuadráticas continuas, cierta integral con carácter de suma de cuadrados.[5]

Ahora, si la teoría de funciones de infinitas variables que hemos dado a conocer hasta el momento presenta un interés independiente y su estudio es en sí misma de valor, lo que importa sobre todo para conseguir su objetivo principal es ganar con ella un punto de vista general y un método de demostración uniforme para los conocidos problemas del Análisis que se refieren a la solución de ecuaciones entre funciones.

....

[Ahora (p. 61, segundo párrafo), Hilbert se pone a hablar de *ecuaciones integrales lineales*, *ecuaciones diferenciales lineales*, *cálculo de variaciones*, ..., y prosigue (a partir de p. 64, párrafos finales)]:

[4] Ver mi 4ª comunicación, p. 201 [Anm. 1, p. 57].

[5] Este importante problema aquí señalado, cuyo tratamiento he dejado registrado en mi citada 4ª comunicación de Anm. 1, p. 57, se ha promovido ya esencialmente en los siguientes trabajos:

E. Hellinger y O. Toeplitz, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse* 1906, p. 351–355.

O. Toeplitz, *Ibid.* 1907, p. 101–109.

O. Toeplitz, *Ibid.* 1907, p. 110–115.

E. Hellinger, Inaugural Dissertation Göttingen 1907. D.V. Nr. 41.

E. Schmidt, Rend. Circ. Mat. Palermo 25 (1908), p. 53–77.

Hasta ahora solo hemos tratado de problemas transcendentes lineales y algunos bilineales. En general, para acometer un problema transcendente por medio del método de infinitas variables, es necesario antes desarrollar la teoría de funciones de infinitas variables, y esto se efectua ante todo mediante la introducción del concepto de función *analítica* de infinitas variables.[6]

En el tratamiento que habíamos hecho hasta ahora de las funciones lineales, cuadráticas y bilineales de infinitas variables, los coeficientes eran siempre cantidades *reales* y sobre las variables se imponía la condición de que debían poseer una suma de cuadrados finita; estas restricciones van a ser suprimidas a partie de ahora: por una serie de potencias de infinitas variables vamos a entender una expresión de la forma

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots) = c + \sum_{(p)} c_p x_p + \sum_{(p,q)} c_{pq} x_p x_q + \sum_{(p,q,r)} c_{pqr} x_p x_q x_r + \ldots \tag{H1}$$

$(p, q, r, \ldots = 1, 2, 3, \ldots)$, donde c, c_p, c_{pq}, c_{pqr} son cantidades dadas cualesquiera reales o complejas y x_1, x_2, x_3, ... denotan a las variables, que análogamente pueden tomar valores reales o complejos. Si la expresión (H1) converge absolutamente para un cierto sistema de cantidades reales o complejas ninguna de ellas nula

$$x_1 = \varepsilon_1, \quad x_2 = \varepsilon_2, \quad x_3 = \varepsilon_3, \ldots,$$

asimismo se encuentra convergencia absoluta para la serie $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots)$ para todos los valores reales o complejos de las variables que satisfagan las desigualdades

$$|x_1| \leq |\varepsilon_1|, \quad |x_2| \leq |\varepsilon_2|, \quad |x_3| \leq |\varepsilon_3|, \ldots; \tag{H2}$$

decimos entonces que la serie de potencias $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots)$ representa una función analítica F de las infinitas variables x_1, x_2, x_3, ... en el *entorno* del punto $x_1 = 0$, $x_2 = 0$,... definido por (H2).

Para alcanzar un criterio que permita decidir si una expresión arbitraria que se nos presenta

$$c + \sum_{(p)} c_p x_p + \sum_{(p,q)} c_{pq} x_p x_q + \sum_{(p,q,r)} c_{pqr} x_p x_q x_r + \ldots \tag{H3}$$

$(p, q, r, \ldots = 1, 2, 3, \ldots)$, representa una función analítica de las infinitas variables x_1, x_2, ..., imaginemos que para cada valor de n igualamos a cero la totalidad de las variables x_{n+1}, x_{n+2}, ... en la expresión (H3). La expresión así resultante en las n variables x_1, x_2, ..., x_n se llama la sección n-ésima de (H3); ahora bien, si hay un entorno en el que para cada valor de n la sección n-ésima es una serie de potencias absolutamente convergente de las variables $x_1, \ldots, x_n$, y los valores absolutos de todas estas series quedan por debajo de una cota independiente de n, entonces se dice que la expresión (H3) está *acotada en ese entorno.* Se cumple el teorema de que toda expresión (H3) acotada en un entorno representa una función analítica de las infinitas variables x_1, x_2, x_3, ... En particular cuando los módulos de los términos en una expresión como (H3) queden por debajo de una cota finita, es decir, cuando las sumas de (H3) aparezcan solo en un número finito, la expresión se llama entera y racional. Por el teorema mencionado se deduce que una expresión entera y racional en un cierto entorno siempre representa una función analítica, a la que se llama *función entera racional* de las infinitas variables.

Sigo con algún ejemplo de funciones analíticas de infinitas variables.

El determinante de Hill, que juega un papel en la resolución de ciertos sistemas de ecuaciones con infinitas incógnitas:

$$\begin{vmatrix} 1 + x_{11} & x_{12} & x_{13} & \ldots \\ x_{21} & 1 + x_{22} & x_{23} & \ldots \\ x_{31} & x_{32} & 1 + x_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

es una función analítica de las infinitas variables x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, ...

Obtenemos otro ejemplo si en la ecuación

$$y = x_1 + x_2 y^2 + x_3 y^3 + \ldots$$

calculamos y como una serie de potencias en x_1, x_2, ... como sigue:

$$y = x_1 + x_1^2 x_2 + x_1^3 x_3 + 2x_1^3 x_2^2 + x_1^4 x_4 + \cdots;$$

[6]El concepto de función analítica de infinitas variables viene ya de Helge von Koch: Sur les systèmes d'ordre infini d'équations différentielles, Svenska Vetenskaps-Akad. 56 (1899) p. 395–411.

porque se lleva adelante fácilmente, con ayuda del método de la mayorante, la prueba de que esta serie de potencias converge en cierto entorno del punto $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$, luego y es una función analítica de x_1, x_2, $\ldots$.

Sea, para proporcionar un tercer ejemplo,

$$\mathfrak{P}(x, y) = u_{00} + u_{10}x + u_{01}y + u_{20}x^2 + u_{11}xy + u_{02}y^2 + \cdots$$

una serie de potencias de las variables x e y y u_{00}, u_{10}, u_{01}, u_{20}, $\ldots$ sus coeficientes. La solución y de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \mathfrak{P}(x, y)$$

que se anula para $x = 0$ resulta ser una función analítica de las infinitas variables u_{00}, u_{10}, u_{01}, u_{20}, $\ldots$, así que la integral de una ecuación diferencial analítica con condición adicional analítica resulta ser también una función analítica de la totalidad de los sucesivos coeficientes en consideración.

En lo que sigue vamos a tratar ante todo de trasladar a la teoría de las funciones analíticas de infinitas variables los conceptos y resultados importantes de la teoría de las funciones analíticas de un número finito de variables.

En primer lugar es claro que el bien conocido teorema en la teoría de funciones de un número finito de variables que dice que los coeficientes de la serie de potencias son todos nulos si la función se anula en cada punto de un entorno, en esta teoría sigue siendo correcto; porque las secciones de esta función, que son series de potencias de un número finito de variables, deben igualmente anularse idénticamente; por consiguiente todos sus coeficientes son nulos.

A continuación probamos de trasladar el método de prolongación a una serie de infinitas variables. Sea a_1, a_2, $\ldots$ un punto del entorno (H2) de la serie de potencias $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots)$, y ordenemos entonces

$$\mathfrak{P}(y_1 - a_1, y_2 - a_2, \ldots)$$

según las potencias de y_1, y_2, $\ldots$ del mismo modo que (H3) estaba ordenada según las potencias de x_1, x_2, $\ldots$; la serie de potencias resultante $\mathfrak{Q}(y_1, y_2, \ldots)$ convergerá en todos los puntos de un entorno

$$|y_1| \leq |\eta_1|\,, \quad |y_2| \leq |\eta_2|\,, \quad |y_3| \leq |\eta_3|\,, \ldots;$$

del punto $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $\ldots$. Las funciones representadas por $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ coinciden una con otra en los puntos donde convergen ambas. Para los puntos en los que $\mathfrak{Q}(y_1, y_2, \ldots)$ converge y $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots)$ no, $\mathfrak{Q}$ proporciona la *prolongación* analítica de la función analítica F definida mediante $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots)$.

Aún añadiré una nota a esto. En la teoría de funciones de una variable se demuestra el siguiente teorema: Si $\mathfrak{P}(x)$ es una serie de potencias convergente en un determinado circulo de centro 0 y $f(y)$ una función analítica regular inyectiva e inversible en un entorno del punto $y = 0$, y desarrollamos $\mathfrak{P}(f(y))$ en potencias de y, es posible que esta serie de potencias converja en un punto $y = y_0$ tal que $x_0 = f(y_0)$ caiga fuera del círculo de convergencia de la serie $\mathfrak{P}(x)$. Entonces la serie de potencias $\mathfrak{P}(f(y))$ en el entorno del punto $y = y_0$, considerada como función de x, sirve como prolongación analítica de $\mathfrak{P}(x)$ en el entorno de $x = x_0$. Este teorema, que es válido igualmente para funciones de un número finito de variables, no es ya correcto en la teoría de funciones de infinitas variables, como muestra el siguiente ejemplo: La función lineal

$$L(x_1, x_2, \ldots) = x_1 + x_2 + x_3 \cdots$$

es según la definición antedicha de prolongación analítica, unívoca y no prolongable sobre el dominio de convergencia primitivo [la región $\sum x_i^2 < 1$]. Pero pongamos

$$y_1 = x_1 + x_2,\ y_2 = x_2,\ y_3 = x_3 + x_4,\ y_4 = x_4,\ y_5 = x_5 + y_5,\ \ldots,$$

de modo que

$$L(x) = y_1 + y_3 + \cdots\,,$$

y esta serie converge por ejemplo también para $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$, $\ldots$ y suministra el valor 0, aunque la función original no es prolongable hasta ese punto. Si se quiere tener en cuenta esta circunstancia, al definir el concepto general de prolongación hay que abandonar la univocidad de la función $L(x)$. De hecho, mediante la sustitución

$$z_1 = x_1,\ z_2 = x_2 + x_3,\ z_3 = x_3,\ z_4 = x_4 + x_5,\ z_5 = x_5,\ \ldots,$$

$L(x)$ se transforma en $z_1 + z_2 + z_4 + \ldots$, y suministra para el punto $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$, $\ldots$ el valor 1, cuando antes habíamos obtenido el valor 0.

Para mostrar una aplicación del concepto de prolongación analítica de una función de infinitas variables, daré el ejemplo de una tal función, para la cual su prolongación analítica es capaz incluso de tomar todos los valores de un itervalo de números reales. A saber, la función

$$F(x_1, x_2, \ldots) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x_1} + \frac{1}{2^2}\sqrt{1-x_2} + \frac{1}{2^3}\sqrt{1-x_3} + \frac{1}{2^4}\sqrt{1-x_4} + \ldots$$

es evidentemente desarrollable en una serie de potencias de x_1, x_2, x_3, $\ldots$ que ciertamente es absolutamente convergente en el entorno

$$|x_1| \leq \frac{1}{2}, \quad |x_2| \leq \frac{1}{2}, \quad |x_3| \leq \frac{1}{2}, \ldots$$

Se tiene

$$F(0, 0, \ldots) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1.$$

Dejemos ahora que alguna de las variables complejas x_p recorra un camino que encierre al punto 1, de modo que en la anterior serie infinita, en lugar del término $+\frac{1}{2^p}\sqrt{1-x_p}$, aparezca el valor opuesto $-\frac{1}{2^p}\sqrt{1-x_p}$. La correspondiente prolongación de la función analítica $F(x_1, x_2, \ldots)$ tomará por lo tanto, en el punto $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$, el valor

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots - \frac{1}{2^p} + \ldots.$$

Si dejamos rodear al punto 1 a un sistema cualquiera de las variables complejas, podemos conseguir que la prolongación analítica de la la función $F(x_1, x_2, \ldots)$ pueda alcanzar cualquier valor de la forma

$$\pm\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2^2} \pm \frac{1}{2^3} \pm \cdots,$$

es decir, la función analítica $F(x_1, x_2, \ldots)$ tomará efectivamente, en el punto $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$, todos los valores reales comprendidos entre -1 y 1. Este hecho es notable porque con él se ha mostrado que *una función analítica de infinitas variables puede ser continuo-valuada*, mientras que una función analítica de un número finito de variables, según un conocido teorema demostrado por Volterra y Poincaré, solo puede ser numerablemente-valuada.

Se cumple el teorema de que *una función analítica de infinitas variables es continua en cada punto, relativamente a cada entorno de este punto*; es decir, que si la totalidad de los sistemas de valores

$$a_1^{(p)},\ a_2^{(p)},\ \ldots \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

pertenecientes a un entorno del punto a_1, a_2, $\ldots$, convergen hacia el sistema de valores a_1, a_2, $\ldots$, entonces también los correspondientes valores de la función analítica convergen siempre hacia el valor que posee en el punto a_1, a_2, $\ldots$. En cambio resulta que una función analítica de infinitas variables de ninguna manera es continua relativamente a un entorno cualquiera.

De este teorema se sigue inmediatamente el hecho siguiente: Si la serie de potencias $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots)$ converge en el entorno $|x_1| \leq \varepsilon_1$, $|x_2| \leq \varepsilon_2$, $\ldots$, entonces la función representada en este entorno está *acotada*. De hecho el máximo del módulo de la función proporciona una cota superior para el módulo de sus secciones. Este teorema es un recíproco del teorema posterior al anterior display (H3).

Lo mismo que el planteamiento del concepto de continuidad de una función de infinitas variables requiere esencialmente fijar también la vecindad del punto que deba tenerse en consideración, el *concepto de máximo o mínimo de una función analítica de infinitas variables* también depende en uno esencial de los puntos de comparación a los que hay que hacer caso, de la delimitación de la vecindad, de modo que se llega a que, para una serie de potencias de infinitas variables, el comportamiento de los términos de segundo grado para distinguir entre un máximo o un mínimo no señala ahora en la misma forma que lo hacía para una función de un número finito de variables.

Sirva como ejemplo la serie de potencias

$$\frac{x_1^2}{1^2} + \frac{x_2^2}{2^2} + \frac{x_3^2}{3^2} + \ldots - \frac{x_1^3}{1} - \frac{x_2^3}{2} - \frac{x_3^3}{3} - \ldots,$$

que para todos los sistemas de valores reales que satisfacen la condición

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots \leq 1 \tag{H4}$$

es absolutamente convergente y representa una función continua relativa a esta región (H4). Aunque los términos de segundo grado son definidos positivos y se anulan solamente para

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0, \ldots,$$

en este punto no se alcanza un mínimo que no esté relativamente ligado a un entorno del punto, ya que para

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots\ x_{n-1} = 0,\ x_n = \frac{2}{n},\ x_{n+1} = 0, \ldots$$

la función tiene el valor negativo

$$\frac{2^2}{n^4} - \frac{2^3}{n^4} = -\frac{2^2}{n^4}.$$

Otro ejemplo lo proporciona la función representada en la misma región (H4) por la serie de potencias

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots - 2x_1^3 - 2x_2^3 - 2x_3^3 - \ldots;$$

esta función no tiene un mínimo en el punto

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0, \ldots,$$

relativamente a la región (H4), ya que la sustitución de

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots\ x_{n-1} = 0,\ x_n = 1,\ x_{n+1} = 0, \ldots$$

proporciona un valor negativo. Se encuentra en cambio que en aquel punto tiene lugar un mínimo relativo al entorno

$$|x_1| \leq \frac{1}{2}, \quad |x_2| \leq \frac{1}{2}, \quad |x_3| \leq \frac{1}{2}, \ldots;$$

pues para todos los valores reales de las variables que satisfacen estas desigualdades, dado que

$$x_n^2 - 2x_n^3 > 0,$$

la función resulta ser positiva.

Usando el teorema mencionado hace un momento, según el cual una fución analítica es continua relativamente en cada entorno, se consigue establecer el fundamental resultado de que *una función analítica de infinitas funciones analíticas de infinitas variables es una función de nuevo analítica de estas variables.*

Para demostrar este teorema, consideremos la serie de potencias

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots) = \sum C_{n_1 \ldots n_k} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k},$$

que es absolutamente convergente en algún entorno del punto $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., acaso para el sistema de valores

$$|x_1| \leq 1,\ |x_2| \leq 1, \ldots;$$

sean además

$$x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \ldots),\ x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \ldots),\ \ldots$$

series de potencias de las infinitas variables ξ_1, ξ_2, ... *todas ellas* absolutamente convergentes en el entorno

$$|\xi_1| \leq \alpha_1,\ |\xi_2| \leq \alpha_2,\ \ldots,$$

—donde α_1, α_2, ... se sobrentienden constantes positivas— y cuyo módulo se mantenga menor que 1 en este entorno. Por aplicación de esta sustitución, la función $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots)$ se transforma en una función de ξ_1, ξ_2, ...:

$$\mathfrak{P}(x_1(\xi), x_2(\xi), \ldots) = F(\xi_1, \xi_2, \ldots),$$

y queremos demostrar que esta es una función analítica de ξ_1, ξ_2, ...

Cada término de la serie de potencias $\mathfrak{P}$ es producto de un número finito de factores que son series de potencias de $\xi_1, \xi_2, \ldots$ absolutamente convergentes. Del teorema de multiplicación de series absolutamente convergentes se deduce que cada término de $\mathfrak{P}$ se convierte en una función analítica de ξ_1, ξ_2, $\ldots$ que se mantiene menor que 1 en módulo. En otras palabras, $F(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ es una suma de series de potencias absolutamente convergentes:

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots) = C_1 X_1(\xi_1, \xi_2, \ldots) + C_2 X_2(\xi_1, \xi_2, \ldots) + \cdots ,$$

donde los C_1, C_2, $\ldots$ son los coeficientes de la serie de potencias $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots)$. Según nuestra suposición, la suma de los módulos de estos coeficientes se mantiene finita. Pero de esto se sigue que la función $F(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ está acotada en el entorno considerado $|\xi_p| \leq \alpha_p$. Ahora vamos a considera las secciones n-ésimas de esta función:

$$[F]_n = C_1 [X_1]_n + C_2 [X_2]_n + \cdots .$$

Como los X_1, X_2, $\ldots$ se mantienen en módulo menores que 1, así $[F]_n$, como la suma de una serie uniformemente convergente y cuyos términos son funciones analíticas de ξ_1, $\ldots$, ξ_n, es una función analítica de estas variables. De ahí podemos formar formalmente una serie de potencias de las infinitas variables ξ_1, ξ_2, $\ldots$ constituida de forma que sus secciones coincidan con las secciones de la función $F(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ y además estén acotadas en el entorno $|\xi_1| \leq \alpha_1$, $|\xi_2| \leq \alpha_2$, $\ldots$. Pero de ello se sigue que la serie de potencias así construida es absolutamente convergente en un entorno determinado y representa una función analítica. Para constatar la identidad de esta función analítica con la función $F(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ señalemos que ambas funciones son continuas y por consiguiente coinciden en cada punto con el límite de sus respectivas secciones, que son las mismas funciones en cada caso.

Una de las tareas más importantes de nuestra teoría reside en la resolución de ecuaciones analíticas dadas entre infinitas variables Si estas ecuaciones son lineales, serán de aplicación los teoremas mencionados al comienzo de esta conferencia apropiadamente modificados. Pero también en el caso de ecuaciones no lineales se pueden conseguir teoremas generales. Como ejemplo sirva el siguiente, el teorema concerniente a la inversión de un sistema de ecuaciones:[7]

Nos presentan el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \mathfrak{P}_1(x_1, x_2, \ldots), \\ y_2 &= x_2 + \mathfrak{P}_2(x_1, x_2, \ldots), \\ y_3 &= x_3 + \mathfrak{P}_3(x_1, x_2, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

donde, en general, $\mathfrak{P}_n(x_1, x_2, \ldots)$ es una serie de potencias de las infinitas variables x_1, x_2, $\ldots$ que no contiene ningún término lineal y cuyos coeficientes se mantienen en su totalidad en módulo por debajo de una cota M_n; además se supone que la suma

$$M_1 + M_2 + M_3 + \ldots$$

es finita. Entonces queda unívocamente determinado un sistema de series de potencias absolutamente convergentes de las variables y_1, y_2, $\ldots$ que representan las soluciones analíticas de aquel sistema de ecuaciones.

....

[siguen (p. 71 abajo y p. 72) unas consideraciones generales finales]

[7] Ver Helge von Koch, Sur les fonctions implicites définies par une infinité d'équations simultanées. Bull. Soc. math. France Bd. 27 (1899) 215–227. Este teorema coincide esencialmente con uno probado por E. Schmidt para ecuaciones integrales: Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III Teil. Math. Ann. Bd. 65 (1908) 370–399.

H. Bohr, Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse* 1913, Heft 4, p. 441–488 (citado por JLR entre las referencias de [101]). `http://eudml.org/doc/58885` Extractos de la Introducción y de las Secciones 1 y 2, Secciones 3 y 4 completas y Suplemento (el artículo tiene seis Secciones y un Suplemento final).

Sobre la importancia de las series de potencias en infinitas variables en la teoría de las series de Dirichlet $\sum \frac{a_n}{n^s}$.

Por

Harald Bohr de Copenhague.

Presentado por el sr. D. Hilbert en la sesión de 21 de junio de 1913.

(extracto de la Introducción, p. 444–446):

El parágrafo §3 contiene un estudio sobre las series de potencias de infinitas variables [o con infinito número de variables]. Según el sr. Hilbert,[1] se entiende por *sección m-ésima* de una serie de potencias

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = c + \sum_{\alpha=1,2,\ldots} c_\alpha\, x_\alpha + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,2,\ldots \\ \alpha\le\beta}} c_{\alpha,\beta}\, x_\alpha x_\beta + \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma=1,2,\ldots \\ \alpha\le\beta\le\gamma}} c_{\alpha,\beta,\gamma}\, x_\alpha x_\beta x_\gamma + \ldots \tag{B1}$$

la serie de potencias en las m variables $x_1,\ x_2,\ \ldots x_m$

$$P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = c + \sum_{\alpha=1,2,\ldots m} c_\alpha\, x_\alpha + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,2,\ldots m \\ \alpha\le\beta}} c_{\alpha,\beta}\, x_\alpha x_\beta + \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma=1,2,\ldots m \\ \alpha\le\beta\le\gamma}} c_{\alpha,\beta,\gamma}\, x_\alpha x_\beta x_\gamma + \ldots \tag{B2}$$

que se origina cuando en (B1) se igualan a 0 todas las variables $x_{m+1},\ x_{m+2},\ \ldots$.

Sea (G_m) una sucesión de números reales positivos; decimos que la serie de potencias $P(x_1, x_2, \ldots)$ está *acotada* en la región $|x_1| \le G_1,\ |x_2| \le G_2,\ \ldots |x_m| \le G_m,\ \ldots$, cuando se cumplen las dos condiciones características siguientes:

1. Para cada $m \ge 1$ la sección m-ésima $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es absolutamente convergente en la región $|x_1| \le G_1,\ |x_2| \le G_2,\ \ldots |x_m| \le G_m$.
2. Existe un $K > 0$ independiente de m, tal que para cada $m \ge 1$ se verifica $|P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)| < K$ en la región $|x_1| \le G_1,\ |x_2| \le G_2,\ \ldots |x_m| \le G_m$.

A continuación, en el §3 estudiamos la relación que hay entre la acotación de una serie de potencias en infinitas variables y la convergencia absoluta de la serie. Demostramos el siguiente teorema:

Si la serie de potencias $P(x_1, x_2, \ldots)$ está acotada en la región $|x_1| \le G_1,\ |x_2| \le G_2,\ \ldots |x_m| \le G_m,\ \ldots$, y (ε_m) es una sucesión de números tales que $0 < \varepsilon_m < 1$ para todo $m \ge 1$ y que la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^2$ es convergente, entonces $P(x_1, x_2, \ldots)$ es absolutamente convergente en la región $|x_1| \le \varepsilon_1 G_1,\ |x_2| \le \varepsilon_2 G_2,\ \ldots |x_m| \le \varepsilon_m G_m,\ \ldots$.

Sea $S \le \infty$ el límite superior de los número positivos α que tienen la siguiente propiedad: *Toda serie de potencias $P(x_1, x_2, \ldots)$ acotada en la región $|x_1| \le G_1,\ |x_2| \le G_2,\ \ldots$ es absolutamente convergente en la región $|x_1| \le \varepsilon_1 G_1,\ |x_2| \le \varepsilon_2 G_2,\ \ldots$ cuando $0 < \varepsilon_m < 1$ para todo $m \ge 1$ y la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^{\alpha}$ es convergente.* Este S es una constante absoluta $\le \infty$, y según el teorema anterior se tiene $S \ge 2$.

En la sección §4 enseño el importante papel que juega este número S en el estudio de los problemas de la convergencia absoluta de la serie de Dirichlet

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}. \tag{B3}$$

---

[1] D. Hilbert, Wesen und Ziele einer Analysis der unendlich vielen unabhängigen Variabeln. *Palermo Rendiconti* Bd. 27, 1909, p. 59–74, p. 67.

Sea (B3) una serie de Dirichlet que posee un dominio de convergencia [no vacío], y supongamos que $\sigma = A$ designa la recta de convergencia, $\sigma = B$ la recta de convergencia absoluta y $\sigma = C$ la recta de convergencia uniforme[2] de la serie; se tiene $-\infty \leq A \leq C \leq B < \infty$. Sea además D el número ($-\infty \leq D < \infty$) tal que, para cada $\varepsilon > 0$, la función definida por la serie es regular [e.d., desarrollable en serie de Taylor en un entorno de cada punto de ese dominio] y acotada para $\sigma > D + \varepsilon$ pero no para $\sigma > D - \varepsilon$. Se tiene entonces, como hemos demostrado en otro lugar,[3]

$$C = D.$$

Esto engloba un teorema anterior de Schnee[4] según el cual es $A \leq D$. En base a la conocida relación $B - A \leq 1$ se sigue inmediatamente del Teorema de Schnee que la abscisa de convergencia absoluta B, que evidentemente es $\geq D$, es $\leq D + 1$. En la §4 estudiaré la diferencia $B - C$, es decir, dado que $C = D$, la diferencia $B - D$, que según lo anterior es un número no negativo ≤ 1. Designemos por $T \geq 0$ el extremo inferior de todos los números positivos β que cumplen la siguiente propiedad: Para toda serie de Dirichlet que posea un dominio de convergencia se tiene $B - D \leq \beta$. Con otras palabras, sea T el número ≥ 0 tal que siempre es $B - D \leq T$, mientras que para cada $\delta > 0$ existe una serie de Dirichlet (B3) tal que $B - D > T - \delta$. Entonces yo demostraré: Se tiene

$$T = \frac{1}{S},$$

donde S denota el número definido anteriormente en la teoría de las series de potencias en infinitas variables. A partir del resultado antes mencionado $S \geq 2$ se sigue ahora en particular

$$T \leq \frac{1}{2},$$

por consiguiente: *Toda serie de Dirichlet* (B3) *que posee un dominio de convergencia y para la cual la función $f(s)$ definida por la serie es regular y acotada para $\sigma > \eta$, es absolutamente convergente al menos para $\sigma > \eta + \frac{1}{2}$.*

. . . .

(extracto de la sección 1, p. 447–448):

Supongamos que la serie de Dirichlet (B3) es absolutamente convergente para $\sigma = \sigma_0$, es decir, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}}$$

[2]Por la recta $\sigma = C$ de convergencia uniforme hay que entender la recta tal que para cada $\varepsilon > 0$ la serie (B3) converge uniformemente en el semiplano $\sigma > C + \varepsilon$ pero no en el semiplano $\sigma > C - \varepsilon$. Ver H. Bohr, Über die gleichmässige Konvergenz Dirichletcher Reihen, *Crelles Journal*, 1913, Bd. 143, 203–211.

[3]*Ibid.*, §1. [Tomo de allí una explicación suplementaria]: Supongamos que una serie de Dirichlet general, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ con $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ y $\lambda_n \to \infty$, tiene un dominio no vacío de convergencia. Entonces:

Abscisa de convergencia $\sigma = A$ ($-\infty \leq A < \infty$): la serie converge para $\sigma > A$ y diverge para $\sigma < A$.

Abscisa de convergencia absoluta $\sigma = B$ ($-\infty \leq B \leq \infty$): la serie converge absol. para $\sigma > B$ y no converge absol. para $\sigma < B$. Se tiene $A \leq B$. Se sabe que $\forall \varepsilon > 0$ y $E > 0$ la serie es unif. conv. en la región $\sigma > A + \varepsilon$, $|s| < E$ (no necesariamente en el semiplano completo $\sigma > A + \varepsilon$).

Abscisa de convergencia uniforme $\sigma = C$ ($-\infty \leq C \leq \infty$): $\forall \varepsilon > 0$, la serie converge unif. para $\sigma > C + \varepsilon$ pero no en $\sigma > C - \varepsilon$. Se tiene $A \leq C \leq B$.

Sea $f(s)$ la función definida por la serie de Dirichlet.

Abscisa de regularidad y acotación $\sigma = D$ ($-\infty \leq D \leq \infty$): $\forall \varepsilon > 0$, $f(s)$ es regular y acotada para $\sigma > D + \varepsilon$ pero no en $\sigma > D - \varepsilon$.

Dos resultados de Bohr en el paper citado en la nota anterior:

1) Si $\exists \ell > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ es $1/(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = O(\exp(\lambda_n(\ell + \delta)))$ y la serie tiene dominio de convergencia, entonces $C = D$. Por ejemplo las series de tipo (B3) en que $\lambda_n = \log n$ son un caso particular importante en que se cumple esto.

2) Si $\lim_{n \to \infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0$, entonces $A = B = C = D$.

[4]Ver por ejemplo E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, 1909, Bd. II, pág. 848. El resultado de Schnee mencionado en su texto es de paso un caso particular de un teorema más general de Schnee, donde en vez de la acotación de $f(s)$ sólo se supone que sea $f(s) = O(|t|^{\delta})$ para cada $\delta > 0$.

es convergente. Sea $U = U(\sigma_0)$ el conjunto de todos los valores u que toma la función $f(\sigma_0 + it)$ cuando la variable real t recorre la recta desde $-\infty$ hasta $+\infty$, y sea $V = V(\sigma_0)$ el conjunto de todos los valores v que toma la serie de potencias $P(x_1, x_2, \ldots)$ asociada con (B3)[5] cuando las variables x_1, x_2, ... recorren independientemente una de otra las circunferencias

$$|x_1| = \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \ \cdots |x_m| = \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}, \ \cdots .$$

Teorema I. *El conjunto U está contenido en V y es denso en V, es decir, para cada número $v \in V$ y todo $\varepsilon > 0$ existe un $u \in U$ tal que $|u - v| < \varepsilon$, y por consiguiente un número real t_0 tal que*

$$|f(\sigma_0 + it_0) - v| < \varepsilon.$$

....

(extracto de la sección 2, p. 451):

Supongamos que la serie (B3) posee un dominio de convergencia y sea B, $-\infty \leq B < \infty$, la abscisa de convergencia absoluta de (B3). Se designa, para cada $\sigma_0 > B$, por $W = W(\sigma_0)$ el conjunto de todos los valores w que toma la serie (B3) en un entorno infinitamente próximo de la recta $\sigma = \sigma_0$,[6] y sea $V = V(\sigma_0)$ el mismo conjunto que en la sección §1. Se verifica:

Teorema II. *Para cada número fijo $\sigma_0 > B$ el conjunto W es idéntico al conjunto V.*

....

(sección 3 completa, p. 458–472):

§3

Sea (G_m) una sucesión de números positivos y $P(x_1, x_2, \ldots)$ una serie de potencias como (B1), acotada en la región $|x_1| \leq G_1$, $|x_2| \leq G_2$, $\ldots |x_m| \leq G_m$, ..., es decir, cumpliendo que, para cada $m \geq 1$ la sección m-ésima $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ definida como (B2) es absolutamente convergente para $|x_1| \leq G_1$, $|x_2| \leq G_2$, $\ldots |x_m| \leq G_m$, así como que se puede elegir adecuadamente una constante $K > 0$ independiente de m, tal que para cada $m \geq 1$ se verifica $|P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)| < K$ en la región $|x_1| \leq G_1$, $|x_2| \leq G_2$, $\ldots |x_m| \leq G_m$.[7] En este parágrafo voy a estudiar qué se puede decir entonces sobre la convergencia absoluta de la serie $P(x_1, x_2, \ldots)$.

La primera cuestión abierta en este sentido, evidentemente, es hasta qué punto la acotación de la serie de potencias $P(x_1, x_2, \ldots)$ en la región $|x_m| \leq G_m$ ($m = 1, 2, \ldots$) implica su convergencia absoluta en la misma región, es decir, la convergencia de la serie

$$|c| + \sum_\alpha |c_\alpha| \, G_\alpha + \sum_{\alpha,\beta} |c_{\alpha,\beta}| \, G_\alpha \, G_\beta + \ldots .$$

[5] Es decir [Introducción, pág. 442], la serie

$$P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{n_1}^{\nu_1} \cdots x_{n_r}^{\nu_r} = c + \sum_\alpha c_\alpha \, x_\alpha + \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} \, x_\alpha x_\beta + \cdots ,$$

donde

$$c = a_1, \ c_\alpha = a_{p_\alpha}, \ c_{\alpha,\beta} = a_{p_\alpha \, p_\beta}, \ \ldots$$

y p_m designa el m-ésimo número primo. Al escribir cada número n como el producto de sus factores primos, la serie (B3) se escribe como $P(p_1^{-s}, p_2^{-s}, \ldots, p_m^{-s}, \ldots)$.

[6] Es decir [como Bohr explica en la Introducción], el conjunto de todos los valores w con la siguiente propiedad: la función $f(s)$ toma el valor w en la banda $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ para todo $\delta > 0$.

[7] Anotaré una vez por orientación [del lector] que la acotación o no acotación de una serie de potencias de infinitas variables es una propiedad independiente del orden de sucesión de las variables en la serie, es decir, cuando $P(x_1, x_2, \ldots)$ está acotada en la región $|x_1| \leq G_1$, $|x_2| \leq G_2$, ... y r_1, r_2, ... es una reordenación de la sucesión 1, 2, ..., entonces la serie de potencias $Q(x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots)$ formalmente idéntica con $P(x_1, x_2, \ldots)$, está acotada en la región $|x_{r_1}| \leq G_{r_1}$, $|x_{r_2}| \leq G_{r_2}$, ... Esto se sigue de que, para cada m se puede dar un $M \geq m$ tal que la m-ésima sección $Q_m(x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_m})$ surge de la sección $P_M(x_1, x_2, \ldots, x_M)$ cuando en esta última cierto subconjunto de las variables x_1, x_2, ..., x_M se iguala a 0.

Mostraré mediante un ejemplo que esto no es cierto en general.[8] Y a este propósito procederé como sigue: sabemos que existe una serie de potencias $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ convergente en $|z| < 1$ y con las siguientes propiedades:

1. $f(z)$ está acotada en $|z| < 1$.
2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es divergente, de modo que $\displaystyle\lim_{|z|\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n z^n| = \infty$.

De aquí se sigue inmediatamente la existencia de una sucesión de funciones

$$f_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} z^n \qquad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

con las siguientes propiedades:

1. Para cada $m \geq 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} z^n$ es absolutamente convergente en $|z| < 1$.
2. Para cada $m \geq 1$ se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n^{(m)}\right| > 1$, así como $|f_m(z)| < \frac{1}{2^m}$ para cada $m \geq 1$ y para todo $|z| < 1$.

Entonces considero la serie de potencias de infinitas variables $x_1,\ x_2,\ \dots$

$$P(x_1, x_2, \dots) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n x_1^n + \sum_{n=1}^{\infty} a''_n x_2^n + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} x_m^n + \dots.$$

Evidentemente esta serie es acotada para $|x_1| \leq 1, \dots |x_m| \leq 1, \dots$ porque, para cada $m \geq 1$, su sección m-ésima

$$P(x_1, x_2, \dots, x_m) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_m(x_m) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n x_1^n + \sum_{n=1}^{\infty} a''_n x_2^n + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} x_m^n$$

es absol. conv. para $|x_1| \leq 1, \dots |x_m| \leq 1$, y además, para cada $m \geq 1$, se tiene

$$|P(x_1, x_2, \dots, x_m)| = |f_1(x_1) + \dots + f_m(x_m)| \leq |f_1(x_1)| + \dots + |f_m(x_m)| < \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^m} < 1$$

cuando $|x_1| \leq 1, \dots |x_m| \leq 1$.

Al lado de esto, a causa de la validez de las desigualdades $\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n^{(m)}\right| > 1$ para cada $m \geq 1$, se deduce que la serie de potencias $P(x_1, x_2, \dots)$ no es absol. conv. en la región $|x_m| \leq G_m$ $(m = 1,\ 2,\ \dots)$, es decir, la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n^{(m)}\right|$$

es divergente.[9]

Antes de proceder a un estudio más profundo nos servirá de orientación en primer lugar el siguiente teorema de muy fácil demostración.

[8] La cuestión recíproca es naturalmente de respuesta afirmativa, es decir, cuando $P(x_1, x_2, \dots)$ es absol. conv. en la región $|x_m| \leq G_m$ $(m = 1,\ 2,\ \dots)$, entonces es acotada a fortiori en la misma región.

[9] Sea $P(x_1, x_2, \dots)$ una serie de potencias absol. conv. en la región $|x_m| \leq G_m$ $(m = 1,\ 2,\ \dots)$, donde (G_m) es una sucesión de números positivos; el sr. Hilbert ya expone en su disertación antes citada, p. 67, como declaración firme, que entonces "la serie de potencias $P(x_1, x_2, \dots)$ representa una función F de las infinitas variables $x_1,\ x_2,\ \dots$ en el entorno del punto $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \dots$ definido por $|x_1| \leq G_1,\ |x_2| \leq G_2,\ \dots$". Y añade, sin indicación de la demostración de este hecho: "Se cumple que cada expresión $P(x_1, x_2, \dots)$ acotada en algún entorno representa una función analítica de las infinitas variables $x_1,\ x_2,\ \dots$". Como resulta del texto de arriba, esta frase no puede significar que cuando $P(x_1, x_2, \dots)$ es acotada en la región $|x_m| \leq G_m$ $(m = 1, 2, \dots)$, entonces es absol. conv. en la misma región, sino que, en todo caso, significaría: cuando existe una sucesión (G_m) de números positivos tal que $P(x_1, x_2, \dots)$ es acotada en la región $|x_m| \leq G_m$ $(m = 1, 2, \dots)$, entonces existe una sucesión (H_m) de números positivos tal que $P(x_1, x_2, \dots)$ es absol. conv. en la región $|x_m| \leq H_m$ $(m = 1, 2, \dots)$. Comparar el siguiente teorema del texto.

Sea (G_m) *una sucesión de números positivos y la serie de potencias* $P(x_1, x_2, \ldots)$ *acotada en la región* $|x_1| \leq G_1$, $|x_2| \leq G_2$, $\ldots$ *. Sea además* (ε_m) *una sucesión de números positivos tal que para cada* $m \geq 1$, $0 < \varepsilon_m < 1$ *y además tal que la serie* $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m$ *converge. Entonces* $P(x_1, x_2, \ldots)$ *es absolutamente convergente en la región* $|x_1| \leq \varepsilon_1 G_1$, $|x_2| \leq \varepsilon_2 G_2$, $\ldots$, *es decir, la serie*

$$|c| + \sum_{\alpha} |c_\alpha| \, \varepsilon_\alpha G_\alpha + \sum_{\alpha,\beta} |c_{\alpha,\beta}| \, \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta G_\alpha G_\beta + \ldots$$

es convergente.

Demostración. Se puede suponer sin perder generalidad $G_m = 1$ para todo $m \geq 1$; basta aplicar en otro caso la transformación $x_1 = G_1 x_1'$, $x_2 = G_2 x_2'$, $\ldots$. Por hipótesis se tiene que, para cada $m \geq 1$, la sección m-ésima $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es absol. conv. en $|x_1| \leq G_1, \ldots |x_m| \leq G_m$ y además $|P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)| < K$ en la misma región, con K independiente de m. De esto se sigue inmediatamente para m fijo, mediante una *valoración de Cauchy*,[10] que todos los coeficientes de la serie de potencias $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ son de módulo $< K$. Esto vale para todo $m \geq 1$, luego todos los coeficientes de la serie de potencias tienen módulo $< K$; porque cada término de la serie de potencias $P(x_1, x_2, \ldots)$ involucra solo un número finito de las cantidades $x_1, x_2, \ldots$, así que cada coeficiente de la serie de potencias $P(x_1, x_2, \ldots)$ es un coeficiente de la sección m-ésima $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ para un m suficientemente grande. Pero de aquí ya se sigue la validez del enunciado, puesto que se tiene

$$|c| + \sum |c_\alpha| \, \varepsilon_\alpha + \sum |c_{\alpha,\beta}| \, \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + \ldots < K\Big(1 + \sum \varepsilon_\alpha + \sum \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + \ldots\Big) = K \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \varepsilon_m},$$

y el producto de la derecha converge ya que por hipótesis $0 < \varepsilon_m < 1$ para todo m y la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m$ converge.

Con esto llegamos al más profundo

Teorema III. *Sea* (G_m) *una sucesión de números positivos y la serie de potencias* $P(x_1, x_2, \ldots)$ *acotada en la región* $|x_1| \leq G_1$, $|x_2| \leq G_2$, $\ldots$ *. Sea además* (ε_m) *una sucesión de números positivos tal que para cada* $m \geq 1$, $0 < \varepsilon_m < 1$ *y además tal que la serie* $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^2$ *converge. Entonces* $P(x_1, x_2, \ldots)$ *es absolutamente convergente en la región* $|x_1| \leq \varepsilon_1 G_1$, $|x_2| \leq \varepsilon_2 G_2$, $\ldots$ *.*

Nota previa. Este resultado incluye naturalmente al teorema anterior, ya que cuando $0 < \varepsilon_m < 1$ para todo m y la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m$ converge, la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^2$ converge a fortiori.

Demostración. Como en la demostración anterior, podemos suponer $G_m = 1$ para todo $m \geq 1$. Así que para cada $m \geq 1$ la serie de potencias $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es absol. conv. en la región $|x_1| \leq 1, \ldots |x_m| \leq 1$ y $|P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)| < K$ en la misma región, donde K no depende de m. De aquí se sigue, para m fijo, por un razonamiento usual,

$$\begin{aligned}
K^2 &> \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left| P_m(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \ldots, e^{i\theta_m}) \right|^2 \, d\theta_1 \, d\theta_2 \ldots d\theta_m \\
&= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \Big\{ c + \sum_{\alpha=1,\ldots,m} c_\alpha e^{i\theta_\alpha} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,\ldots,m \\ \alpha \leq \beta}} c_{\alpha,\beta} e^{i\theta_\alpha} e^{i\theta_\beta} + \ldots \Big\} \\
&\qquad \cdot \Big\{ \overline{c} + \sum_{\alpha=1,\ldots,m} \overline{c_\alpha} e^{-i\theta_\alpha} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,\ldots,m \\ \alpha \leq \beta}} \overline{c_{\alpha,\beta}} e^{-i\theta_\alpha} e^{-i\theta_\beta} + \ldots \Big\} \, d\theta_1 \, d\theta_2 \ldots d\theta_m \\
&= |c|^2 + \sum_{\alpha=1,\ldots,m} |c_\alpha|^2 + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,\ldots,m \\ \alpha \leq \beta}} |c_{\alpha,\beta}|^2 + \ldots .
\end{aligned}$$

Esto vale para todo $m \geq 1$. Se sigue que

$$|c|^2 + \sum_{\alpha=1,2,\ldots} |c_\alpha|^2 + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,2,\ldots \\ \alpha \leq \beta}} |c_{\alpha,\beta}|^2 + \ldots \leq K^2.$$

[10] *N. del T.* Si $f(z) = \sum a_n (z-a)^n$ y se tiene $|f(z)| < M$ en $|z-a| < r$, de la fórmula integral de Cauchy se deduce $|a_n| < \frac{M}{r^n}$ para cada $n \geq 0$. Esto debe ser la *Cauchyschen Abschätzung* del texto original.

Pero además, por la hipótesis sobre la sucesión (ε_m), la serie

$$1 + \sum_{\alpha=1,2,\ldots} \varepsilon_\alpha^2 + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,2,\ldots \\ \alpha\le\beta}} \varepsilon_\alpha^2\varepsilon_\beta^2 + \ldots = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-\varepsilon_m^2}$$

es convergente, igual entonces a un número K_1. Aplicando la desigualdad $uv \le \frac{u^2+v^2}{2}$, válida para $u \ge 0$, $v \ge 0$, de la suma término a término de las dos últimas series se deduce que[11]

$$|c| + \sum_{\alpha=1,2,\ldots} |c_\alpha|\,\varepsilon_\alpha + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,2,\ldots \\ \alpha\le\beta}} |c_{\alpha,\beta}|\,\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + \ldots \le \frac{K^2+K_1}{2},$$

de modo que esta serie es convergente, c.q.d.

Sea ahora, como en la Introducción, $S \le \infty$ el límite superior de todos los números $\alpha > 0$ para los cuales el teorema III sigue siendo correcto al sustituir la hipótesis "$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^2$ converge" por "$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^\alpha$ converge". El teorema III asegura que $S \ge 2$ ...... se volverá a este asunto en la §4, ya que tiene una significación esencial para la teoría de la convergencia de las series de Dirichlet ......

Pero vamos a pasar a considerar ahora dos tipos particulares sencillos de series de potencias de infinitas variables para los que se puede obtener un resultado más amplio que el del teorema III.

Teorema IVa. *Sea $P(x_1, x_2, \ldots)$ una serie de potencias en las infinitas variables x_1, x_2, $\ldots$, del tipo particular*

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = c + \sum_{\ell=1}^{\infty} d_{1,\ell}x_1^\ell + \sum_{\ell=1}^{\infty} d_{2,\ell}x_2^\ell + \ldots + \sum_{\ell=1}^{\infty} d_{m,\ell}x_m^\ell + \ldots,$$

que no contiene en ninguno de sus términos dos distintas de las variables. Supongamos que es acotada en la región $|x_m| \le G_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, donde los G_m son números positivos. Sea además (ε_m) una sucesión de números positivos tal que $0 < \varepsilon_m < 1$ para todo $m \ge 1$, y además tal que $\limsup_{m\to\infty} \varepsilon_m < 1$. *Entonces $P(x_1, x_2, \ldots)$ es absolutamente convergente en la región $|x_1| \le \varepsilon_1 G_1$, $|x_2| \le \varepsilon_2 G_2$, $\ldots$.*

Demostración. En base a la hipótesis es evidente que existe un número θ, $0 < \theta < 1$, tal que para cada $m \ge 1$ es $0 < \varepsilon_m < \theta$. El teorema quedará probado si probamos la convergencia absoluta de $P(x_1, x_2, \ldots)$ en la región $|x_m| \le \theta G_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Se puede suponer sin pérdida de generalidad $G_m = 1$ para todo $m \ge 1$. De la supuesta acotación de $P(x_1, x_2, \ldots)$ en la región $|x_m| \le 1$ $(m = 1, 2, \ldots)$ se sigue que para cada $m \ge 1$ la serie $\sum_{\ell=1}^{\infty} d_{m,\ell}x_m^\ell$ es absol.conv. para $|x_m| \le 1$, así como que, para $|x_1| \le 1, \ldots |x_m| \le 1$, se tiene

$$|P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)| = \left| c + \sum_{\ell=1}^{\infty} d_{1,\ell}x_1^\ell + \ldots + \sum_{\ell=1}^{\infty} d_{m,\ell}x_m^\ell \right| < K,$$

donde K no depende de m. Pongamos ahora, en $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$,

$$x_1 = e^{i\varphi_1}t,\ x_2 = e^{i\varphi_2}t,\ \ldots, x_m = e^{i\varphi_m}t,$$

donde φ_1, $\ldots$, φ_m son números reales que se determinarán después y t es una nueva variable compleja. Con esto, $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ se convierte en una serie de potencias absolutamente convergente para $|t| \le 1$,

$$F(t) = c + t\sum_{q=1}^{m} d_{q,1}e^{i\varphi_q} + t^2\sum_{q=1}^{m} d_{q,2}e^{2i\varphi_q} + \ldots + t^\ell\sum_{q=1}^{m} d_{q,\ell}e^{\ell i\varphi_q} + \ldots.$$

Aquí evidentemente es $|F(t)| < K$ para $|t| \le 1$, luego por una valoración de Cauchy se tiene, para cada $\ell \ge 1$,

$$\left|\sum_{q=1}^{m} d_{q,\ell}e^{\ell i\varphi_q}\right| < K.$$

[11]Usando la desigualdad de Schwartz se puede conseguir el resultado más ajustado

$$|c| + \sum |c_\alpha|\,\varepsilon_\alpha + \sum |c_{\alpha,\beta}|\,\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + \ldots \le K\sqrt{K_1},$$

pero es innecesario para nuestro propósito.

Elijamos ahora, para $\ell \geq 1$ fijo, los m números reales $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ de modo que sea

$$\sum_{q=1}^{m} d_{q,\ell} e^{\ell i \varphi_q} = \sum_{q=1}^{m} |d_{q,\ell}|,$$

lo cual es evidentemente posible. Resulta así, para cada $m \geq 1$ y cada $\ell \geq 1$ la valoración

$$\sum_{q=1}^{m} |d_{q,\ell}| < K,$$

es decir que, para cada $\ell \geq 1$ la serie $\sum_{q=1}^{\infty} |d_{q,\ell}|$ es convergente y su suma es $\leq K$. Pero de ahí se sigue inmediatamente que

$$|c| + \sum_{\ell=1}^{\infty} |d_{1,\ell}|\, \theta^\ell + \sum_{\ell=1}^{\infty} |d_{2,\ell}|\, \theta^\ell + \ldots + \sum_{\ell=1}^{\infty} |d_{m,\ell}|\, \theta^\ell + \ldots = |c| + \sum_{\ell=1}^{\infty} \theta^\ell \sum_{q=1}^{\infty} |d_{q,\ell}| \leq |c| + K \sum_{\ell=1}^{\infty} \theta^\ell = |c| + \frac{K\theta}{1-\theta},$$

es decir, la convergencia absoluta de $P(x_1, x_2, \ldots)$ en la región $|x_m| \leq \theta$ $(m = 1, 2, \ldots)$ que habíamos requerido.

Teorema IVb. *Sea $P(x_1, x_2, \ldots)$ una serie de potencias en las infinitas variables x_1, x_2, $\ldots$, del tipo particular*

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} d_{m,\ell} x_m^\ell\right)$$

Supongamos que es acotada en la región $|x_m| \leq G_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, donde los G_m son números positivos. Sea además (ε_m) una sucesión de números positivos tal que $0 < \varepsilon_m < 1$ para todo $m \geq 1$,y además tal que $\limsup_{m\to\infty} \varepsilon_m < 1$. *Entonces $P(x_1, x_2, \ldots)$ es absolutamente convergente en la región $|x_m| \leq \varepsilon_m G_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$.*

La prueba de este teorema va a ir precedida de la muy fácil demostración del siguiente teorema auxiliar:

Sea $f(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} d_\ell x^\ell$ absol. conv. para $|x| \leq 1$, y sea R el valor máximo de $\Re(f(x))$ para $|x| \leq 1$. Sea $0 < \theta < 1$. Entonces existe un número que depende solo de θ, $k = k(\theta)$, tal que para $|x| \leq \theta$ se tiene

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \left|d_\ell x^\ell\right| \leq kR.$$

La exactitud de este teorema auxiliar se ve del siguiente modo: según la conocida *desigualdad de Carathéodory*[12] aplicada a la función $f(x)$ que se anula en el punto 0, y a los círculos de centro 0 y radios $r = 1$, $\rho = \frac{1+\theta}{2}$, se tiene, para $|x| \leq \frac{1+\theta}{2}$,

$$|f(x)| \leq 2R\frac{\rho}{r-\rho} = 2R\frac{1+\theta}{1-\theta},$$

así que por una valoración de Cauchy,

$$|d_\ell| \leq 2R\frac{1+\theta}{1-\theta}\Big(\frac{1+\theta}{2}\Big)^{-\ell} \qquad (\ell = 1, 2, \ldots),$$

es decir que para $|x| \leq \theta$ se tiene

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \left|d_\ell x^\ell\right| \leq 2R\frac{1+\theta}{1-\theta}\sum_{\ell=1}^{\infty}\Big(\frac{2}{1+\theta}\Big)^\ell = \frac{4\theta(1+\theta)}{(1-\theta)^2} = kR,$$

[12] *N. del T.* La desigualdad de Carathéodory, o Teorema de Borel-Carathéodory: Si $f(z)$ es analítica en un disco cerrado de centro 0 y radio r, y $\rho < r$, entonces se tiene (la primera igualdad es por el principio del módulo máximo)

$$\max_{|z|\leq\rho} |f(z)| = \max_{|z|=\rho} |f(z)| \leq \frac{2\rho}{r-\rho} \sup_{|z|\leq r} \Re f(z) + \frac{r+\rho}{r-\rho}\, |f(0)|\,.$$

como se quería demostrar.

Demostración del teorema IVb. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $G_m = 1$ para todo $m \geq 1$. De la hipótesis de acotación de $P(x_1, x_2, \ldots)$ en la región $|x_1| \leq 1$, $|x_2| \leq 1$, … se sigue evidentemente que, para cada $m \geq 1$, la serie $\sum_{\ell=1}^{\infty} d_{m,\ell} x_m^{\ell}$ es absol. conv. para $|x_m| \leq 1$, así como también que, para $|x_1| \leq 1$, …, $|x_m| \leq 1$, se tiene

$$\left|\prod_{q=1}^{m}\left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} d_{q,\ell} x_q^{\ell}\right)\right| < K,$$

donde K no depende de m. Designemos, para cada $q = 1, 2, \ldots$ por R_q al máximo de $\Re\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} d_{q,\ell} x_q^{\ell}\right)$ cuando $|x_q| \leq 1$. A fortiori es $\prod_{q=1}^{m}(1 + R_q) < K$. Esto vale para cada $m \geq 1$; luego $\prod_{q=1}^{\infty}(1 + R_q)$ es convergente y a saber $\leq K$.

Ahora, según el teorema auxiliar anterior, cuando $|x_q| \leq \theta$, donde el número fijo θ se elige de modo que sea $0 < \varepsilon_m < \theta < 1$ para todo $m \geq 1$, se tiene $\sum_{\ell=1}^{\infty} \left|d_{q,\ell} x_q^{\ell}\right| \leq kR_q$, donde $k = k(\theta)$ no depende de q.

De la convergencia de $\prod_{q=1}^{\infty}(1 + R_q)$, es decir, la convergencia de $\sum_{q=1}^{\infty} R_q$, se sigue la convergencia de $\sum_{q=1}^{\infty} kR_q$, es decir la de $\prod_{q=1}^{\infty}(1 + kR_q)$.

A causa de las desigualdades, válidas para cada $q \geq 1$,

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} |d_{q,\ell}|\, \theta^{\ell} \leq kR_q,$$

se deduce a fortiori que $\prod_{q=1}^{\infty}\left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} |d_{q,\ell}|\, \theta^{\ell}\right)$ es convergente, es decir, que la serie de potencias $P(x_1, x_2, \ldots)$ es absol. conv en la región $|x_m| \leq \theta$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Con esto el teorema IVb queda probado.

También se cumple el siguiente resultado, de otro estilo, sobre las series de potencias de infinitas variables de tipo general.

Teorema V. *Sea (G_m) una sucesión de números positivos y supongamos que la serie de potencias* (B1) *está acotada en la región $|x_m| \leq G_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Entonces la serie*

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} |c_\alpha|\, G_\alpha$$

es convergente.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $G_m = 1$ para todo $m \geq 1$. Entonces partimos de que, para cada $m \geq 1$, la sección m-ésima (B2) de la serie (B1) es absol. conv. en la región $|x_1| \leq 1$, $\ldots |x_m| \leq 1$ y además $|P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)| < K$ en la misma región, con K independiente de m. Sean $c_\alpha = |c_\alpha|\, e^{i\theta_\alpha}$ y, para m fijo pongamos en la sección m-ésima $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$,

$$x_1 = e^{-i\theta_1} t,\ x_2 = e^{-i\theta_2} t,\ \ldots, x_m = e^{-i\theta_m} t,$$

donde t es una nueva variable compleja. Esto convierte $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ en una serie de potencias absolutamente convergente para $|t| \leq 1$,

$$F(t) = c + t \sum_{\alpha=1,\ldots,m} c_\alpha e^{-i\theta_\alpha} + t^2 \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,\ldots,m \\ \alpha \leq \beta}} c_{\alpha,\beta} e^{-i\theta_\alpha} e^{-i\theta_\beta} + \ldots.$$

De aquí resulta, para $|t| \leq 1$, que $|F(t)| < K$ y, mediante una valoración de Cauchy, que

$$\sum_{\alpha=1,\ldots,m} c_\alpha e^{-i\theta_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{m} |c_\alpha| < K.$$

Esto vale para cada $m \geq 1$. Luego la serie $\sum_{\alpha=1}^{\infty} |c_\alpha|$ es convergente, c.q.d.

Finalmente se va a probar el siguiente teorema:

Teorema VI. *Supongamos que la sucesión de números* (ε_m), $0 < \varepsilon_m < 1$, *posee la siguiente propiedad: "Toda serie de potencias* $P(x_1, x_2, \ldots)$ *acotada en la región* $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, $\ldots$, [13] *es absol. conv. para* $x_1 = \varepsilon_1$, $x_2 = \varepsilon_2$, $\ldots$*". Sea adicionalmente* (ε'_m), $0 < \varepsilon'_m < 1$, *otra sucesión de números tal que para todos los números enteros* $m \geq 1$ *salvo a lo sumo para un número finito de ellos* m_1, m_2, $\ldots$, m_r, *se tiene* $\varepsilon'_m \leq \varepsilon_m$.

Entonces la sucesión (ε'_m) *tiene la misma propiedad que la sucesión* (ε_m), *es decir, toda serie de potencias* $P(x_1, x_2, \ldots)$ *acotada para* $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, $\ldots$, *es absol. conv. para* $x_1 = \varepsilon'_1$, $x_2 = \varepsilon'_2$, $\ldots$.

Nota previa. Sea (E_m), $0 < E_m < 1$, una sucesión de números tal que existe una serie de potencias $P(x_1, x_2, \ldots)$ acotada para $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, $\ldots$ y que no es absol. conv. para $x_1 = E_1$, $x_2 = E_2$, $\ldots$. Sea adicionalmente (E'_m), $0 < E'_m < 1$, otra sucesión de números tal que para todos los números enteros $m \geq 1$ salvo a lo sumo para un número finito de ellos m_1, m_2, $\ldots$, m_r, se tiene $E'_m \geq E_m$. Del teorema VI se seguirá inmediatamente la existencia de una serie de potencias $Q(x_1, x_2, \ldots)$ acotada para $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, $\ldots$ y que no es absol. conv. para $x_1 = E'_1$, $x_2 = E'_2$, $\ldots$. Esto se va a utilizar más adelante.

Demostración. No se pierde generalidad al suponer $r = 1$, $m_1 = 1$ y $\varepsilon'_m = \varepsilon_m$ para todo $m \geq 2$. Sea

$$P(x_1, x_2, \ldots) = P^{(0)}(x_2, x_3, \ldots) + x_1 P^{(1)}(x_2, x_3, \ldots) + \ldots + x_1^n P^{(n)}(x_2, x_3, \ldots) + \ldots$$

una serie de potencias cualquiera, acotada para $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, $\ldots$, ordenada formalmente en potencias de x_1 y de la que además se puede suponer, lo que puede conseguirse dividiendo por una constante seleccionada adecuadamente, que para todo $m \geq 1$ y $|x_1| < 1$, $\ldots$, $|x_m| < 1$, la sección m-ésima $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es de módulo ≤ 1. Aquí, $P^{(n)}(x_2, x_3, \ldots)$ es una serie de potencias de las infinitas variables x_2, x_3, $\ldots$.

Designemos por s_n la suma de los módulos de los términos de $P^{(n)}(x_2, x_3, \ldots)$ en el punto $x_2 = \varepsilon_2$, $x_3 = \varepsilon_3$, $\ldots$. Si pudiéramos demostrar la afirmación de que para todo $n \geq 0$ se tiene $|s_n| < K$, donde K no depende de n, el teorema, a saber, que la serie $P(x_1, x_2, \ldots)$ es absol. conv. para $x_1 = \varepsilon'_1$, $x_2 = \varepsilon'_2 = \varepsilon_2$, $\ldots$, $x_m = \varepsilon'_m = \varepsilon_m$, $\ldots$, se seguiría de un modo natural, ya que entonces el radio de la serie de potencias

$$F(x_1) = s_0 + s_1 x_1 + \ldots + s_n x_1^n + \ldots$$

es igual a 1.

En primer lugar, de la identidad

$$P_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) = P_m^{(0)}(x_2, x_3, \ldots, x_{m+1}) + \ldots + x_1^n P_m^{(n)}(x_2, x_3, \ldots, x_{m+1}) + \ldots,$$

donde $P_m^{(n)}(x_2, x_3, \ldots, x_{m+1})$ denota la sección m-ésima de $P^{(n)}(x_2, x_3, \ldots)$, se sigue que para cada $n \geq 0$, $m \geq 1$, la sección m-ésima de $P^{(n)}(x_2, x_3, \ldots)$ es absol. conv. en $|x_2| < 1$, $\ldots$, $|x_{m+1}| < 1$, así como que, según una valoración de Cauchy, en la misma región se verifica

$$\left| P_m^{(n)}(x_2, x_3, \ldots, x_{m+1}) \right| \leq 1.$$

La afirmación en cuestión anterior: $|s_n| < K$, quedará probada a fortiori si podemos probar esta otra: existe una constante $K > 0$ que solo depende de la sucesión de números (ε_m) tal que, para toda serie de potencias en las infinitas variables x_2, x_3, $\ldots$, acotada en la región $|x_2| < 1$, $|x_3| < 1$, $\ldots$ y tal que para cada $m \geq 1$ su m-ésima sección es de módulo ≤ 1 en la región $|x_2| < 1$, $\ldots$, $|x_{m+1}| < 1$, la suma de los módulos de los términos en el punto

$$x_2 = \varepsilon_2, \ x_3 = \varepsilon_3, \ \ldots x_m = \varepsilon_m, \ \ldots$$

(en cuyo punto la serie de potencias es evidentemente, según las hipótesis del teorema VI, absol. conv.) es $< K$.

Y, de hecho, si no existiera una tal constante $K = K(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$, habría una sucesión infinita de series de potencias en las infinitas variables x_2, x_3, $\ldots$

$$Q^{(0)}(x_2, x_3, \ldots), \ Q^{(1)}(x_2, x_3, \ldots), \ \ldots, \ Q^{(n)}(x_2, x_3, \ldots), \ \ldots$$

[13] Hemos escrito intencionadamente $|x_m| < 1$ y no $|x_1| \leq 1$. Que $P(x_1, x_2, \ldots)$ está acotada en $|x_1| < G_1$, $|x_2| < G_2$, $\ldots$, donde los G_m son números positivos debe significar: Para cada $m \geq 1$ la sección m-ésima $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es absol. conv. para $|x_1| < G_1$, $\ldots$, $|x_m| < G_m$, y su módulo es $< K$, donde K no depende de m. De nuevo aquí hay que señalar que la acotación de una serie de potencias es una propiedad invariante por reordenamiento de la sucesión de las variables x_1, x_2, $\ldots$ en la serie.

tal que, para cada $n \geq 0$ y $m \geq 1$, la sección m-ésima de $Q^{(n)}(x_2, x_3, \ldots)$ sería absol. conv. y de módulo ≤ 1 en $|x_2| < 1, \ldots, |x_{m+1}| < 1$, mientrar que por otro lado la suma de los módulos de los términos de $Q^{(n)}(x_2, x_3, \ldots)$ sería $> \frac{2^{n+1}}{\varepsilon_1^n}$ en el punto $x_2 = \varepsilon_2$, $x_3 = \varepsilon_3, \ldots, x_m = \varepsilon_m, \ldots$.

Consideraríamos entonces la serie de potencias en las infinitas variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$

$$Q(x_1, x_2, \ldots) = \frac{1}{2} Q^{(0)}(x_2, x_3, \ldots) + \frac{x_1}{2} Q^{(1)}(x_2, x_3, \ldots) + \ldots + \frac{x_1^n}{2^{n+1}} Q^{(n)}(x_2, x_3, \ldots) + \ldots.$$

Esta serie $Q(x_1, x_2, \ldots)$ es acotada para $|x_1| < 1, |x_2| < 1, \ldots$ porque en primer lugar, como se sigue de una valoración de Cauchy, para cada $n \geq 0$ todos los coeficientes de $Q^{(n)}(x_2, x_3, \ldots)$ y así a fortiori todos los coeficientes de $Q(x_1, x_2, \ldots)$ tiene módulo ≤ 1, lo que implica que la sección m-ésima $Q_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es absolutamente convergente para $|x_1| < 1, \ldots |x_m| < 1$, y en segundo lugar se deduce, para cada $m \geq 1$, que para $|x_1| < 1, \ldots |x_m| < 1$ se tiene

$$|Q_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots = 1.$$

Sin embargo, la serie de potencias $Q(x_1, x_2, \ldots)$ no es absol. conv. en el punto $x_1 = \varepsilon_1$, $x_2 = \varepsilon_2, \ldots,$ $x_m = \varepsilon_m, \ldots,$ ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_1^n}{2^{n+1}} \frac{2^{n+1}}{\varepsilon_1^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

es divergente. Esto contradice la hipótesis de que toda serie de potencias acotada para $|x_1| < 1, |x_2| < 1, \ldots$ es absol. conv. en $x_1 = \varepsilon_1$, $x_2 = \varepsilon_2, \ldots$. Con ello el teorema VI queda demostrado.

(sección 4 completa, p. 472–480):

§4

En esta sección voy a estudiar la convergencia absoluta de las series de Dirichlet (B3) con ayuda del resultado de la sección §3 sobre series de potencias en infinitas variables. A este respecto desempeñan un papel importante los dos teoremas siguientes, que presentan una relación entre la convergencia uniforme de una serie de Dirichlet y la acotación de la correspondiente serie de potencias en infinitas variables.

Teorema VII. *Supongamos que la serie de Dirichlet* (B3) *posee un dominio [no vacío] de convergencia y sea* $\sigma = C$ $(-\infty \leq C < \infty)$ *su recta de convergencia uniforme. Entonces la serie de potencias asociada con* (B3)

$$P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{n_1}^{\nu_1} \cdots x_{n_r}^{\nu_r} = c + \sum_{\alpha} c_\alpha \, x_\alpha + \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} \, x_\alpha x_\beta + \cdots$$

es acotada en la región

$$|x_1| \leq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \ |x_2| \leq \frac{1}{p_2^{\sigma_0}}, \ \ldots |x_m| \leq \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}, \ \ldots$$

para cada $\sigma_0 > C$.

Demostración. Se ve inmediatamente que para cada $m \geq 1$ la sección m-ésima

$$P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = c + \sum_{\alpha=1,2,\ldots m} c_\alpha \, x_\alpha + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,2,\ldots m \\ \alpha \leq \beta}} c_{\alpha,\beta} \, x_\alpha x_\beta + \cdots$$

es absolutamente convergente en la región

$$|x_1| \leq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \ |x_2| \leq \frac{1}{p_2^{\sigma_0}}, \ \ldots |x_m| \leq \frac{1}{p_m^{\sigma_0}};$$

porque de la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_1}},$$

donde σ_1 es un número fijo en el intervalo $C < \sigma < \sigma_0$, se sigue la existencia de un número $k_1 > 0$ independiente de n tal que, para todo $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{|a_n|}{n^{\sigma_1}} \leq k_1,$$

y de aquí se sigue inmediatamente que es

$$\begin{aligned} &|c| + \sum_{\alpha=1,2,\ldots m} |c_\alpha| \frac{1}{p_\alpha^{\sigma_0}} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,2,\ldots m \\ \alpha\leq\beta}} |c_{\alpha,\beta}| \frac{1}{p_\alpha^{\sigma_0}} \frac{1}{p_\beta^{\sigma_0}} + \cdots \\ &< k_1 \left(1 + \sum_{\alpha=1,2,\ldots m} \frac{1}{p_\alpha^{\sigma_0-\sigma_1}} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,2,\ldots m \\ \alpha\leq\beta}} \frac{1}{p_\alpha^{\sigma_0-\sigma_1}} \frac{1}{p_\beta^{\sigma_0-\sigma_1}} + \cdots \right) \\ &= k_1 \prod_{\ell=1}^{m} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_\ell^{\sigma_0-\sigma_1}}}, \end{aligned}$$

es decir, que es convergente.

Hay que probar aún la existencia de un número $K > 0$ independiente de m de modo que para todo $m \geq 1$ se cumpla

$$|P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)| \leq K$$

en la región $|x_1| \leq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \ldots |x_m| \leq \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}$.

De la convergencia uniforme de la serie (B3) para $\sigma = \sigma_0$ se sigue la existencia de un número entero $N_1 > 1$ tal que para cada $N_2 \geq N_1$ y cada punto s en la recta $\sigma = \sigma_0$ se tiene

$$\left| \sum_{n=N_1+1}^{N_2} \frac{a_n}{n^s} \right| < 1.$$

Entonces es evidente que para cada entero $N \geq 1$, para cada punto s de la recta $\sigma = \sigma_0$ se tiene

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s} \right| < \sum_{n=1}^{N_1} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}} + 1 = K,$$

donde K no depende de N. Yo digo: este K tiene la propiedad anterior.

Sea $m \geq 1$ un número entero cualquiera fijo. Consideremos para cada $N \geq p_{m+1}$ la serie de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s},$$

es decir, la serie de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

donde $b_n = a_n$ para $1 \leq n \leq N$ y $b_n = 0$ para $n > N$. Sea

$$Q_N(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_{n_1}^{\nu_1} \cdots x_{n_r}^{\nu_r} = \sum_{n=1}^{N} a_n x_{n_1}^{\nu_1} \cdots x_{n_r}^{\nu_r}$$

la correspondiente serie de potencias en las infinitas variables $x_1, x_2, \ldots$. Entonces $Q_N(x_1, x_2, \ldots)$ es un polinomio en las μ variables $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, donde $\mu > m$ es el mayor entero para el cual es $p_\mu \leq N$. Sea M el máximo de $|Q_N(x_1, x_2, \ldots)|$ para $|x_1| \leq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \ldots |x_\mu| \leq \frac{1}{p_\mu^{\sigma_0}}$, es decir, ya que el máximo se alcanza en el borde, el máximo de $|v|$ cuando v recorre todos los valores del conjunto V de valores que toma $Q_N(x_1, x_2, \ldots)$ cuando las variables $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ recorren independientemente una de otra las circunferencias $|x_1| = \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \ldots |x_\mu| = \frac{1}{p_\mu^{\sigma_0}}$. Entonces yo digo: se tiene

$$M \leq K.$$

De hecho, supongamos que fuese $M > K$; entonces habría un número $v \in V$ tal que para todo t, $-\infty < t < \infty$, sería

$$\left| v - \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{\sigma_0 + it}} \right| > M - K,$$

lo que contradice el teorema I de la sección §1 aplicado a la serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s}$, según el cual para cada número $v \in V$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un número real t_0 tal que

$$\left| v - \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{\sigma_0 + it_0}} \right| < \varepsilon.$$

Designemos ahora con $Q_{N,m}(x_1, \dots x_m)$, para cada $N \geq p_{m+1}$, a la sección m-ésima de $Q_N(x_1, x_2, \dots)$, es decir, el polinomio en las m variables $x_1, x_2, \dots x_m$ que se obtiene a partir de $Q_N(x_1, x_2, \dots)$ cuando en este último polinomio se hacen las variables $x_{m+1}, \dots x_\mu$ todas igual a cero. Entonces, a fortiori, para $|x_1| \leq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}$, $\dots |x_m| \leq \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}$ se tiene

$$|Q_{N,m}(x_1, x_2, \dots x_m)| \leq M \leq K.$$

Sean ahora $x_1, x_2, \dots x_m$ números arbitrariamente elegidos en la región $|x_1| \leq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}$, $\dots |x_m| \leq \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}$. Es evidente entonces que

$$\lim_{N \to \infty} Q_{N,m}(x_1, x_2, \dots x_m) = P_m(x_1, x_2, \dots x_m).$$

Y dada la desigualdad, probada para todo $N \geq p_{m+1}$,

$$|Q_{N,m}(x_1, x_2, \dots x_m)| \leq K$$

se sigue, para cada punto $x_1, x_2, \dots x_m$ perteneciente a la región $|x_1| \leq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}$, $\dots |x_m| =\leq \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}$, la estimación

$$|P_m(x_1, x_2, \dots x_m)| \leq K.$$

Esto vale para todo $m \geq 1$. Con ello el teorema VII queda probado.

Teorema VIII. *Sea* (B3) *una serie de Dirichlet y supongamos que la serie de potencias en infinitas variables* $P(x_1, x_2, \dots x_m, \dots)$ *asociada con* (B3) *es acotada en*

$$|x_1| \leq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \ |x_2| \leq \frac{1}{p_2^{\sigma_0}}, \ \dots |x_m| \leq \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}, \ \dots.$$

Entonces para cada $\varepsilon > 0$ *la serie* (B3) *es uniformemente convergente para* $\sigma > \sigma_0 + \varepsilon$*; es decir, la abscisa de convergencia uniforme* C *de la serie es* $\leq \sigma_0$.

Demostración. Es evidente que podemos suponer en la demostración $\sigma_0 = 0$; de no ser así pondríamos $s = \sigma_0 + s'$ y consideraríamos la serie de Dirichlet $\sum \frac{a_n'}{n^{s'}}$, donde $a_n' = \frac{a_n}{n^{\sigma_0}}$. La hipótesis es entonces que para cada $m \geq 1$ la sección m-ésima $P_m(x_1, x_2, \dots x_m)$ es absolutamente convergente en la región $|x_1| \leq 1$, $\dots |x_m| \leq 1$ y de módulo $< K$ donde K es independiente de m. De aquí se deduce primero, mediante una valoración de Cauchy, que todos los coeficientes de la serie $P(x_1, x_2, \dots x_m, \dots)$, es decir, todos los coeficientes de a_n de la serie (B3), son todos de módulo que K. Por consiguiente (B3) es absolutamente convergente para $\sigma > 1$.

Pongamos ahora, para cada $m \geq 1$,

$$f_m(s) = \sum \frac{b_n^{(m)}}{n^s}$$

la serie de Dirichlet que tiene asociada como serie de potencias de infinitas variables $x_1, x_2, \dots$ la sección m-ésima $P_m(x_1, x_2, \dots x_m)$ de nuestra serie de potencias $P(x_1, x_2, \dots x_m, \dots)$; es entonces respectivamente $b_n^{(m)} = a_n$ o $= 0$, según que, respectivamente, n no contenga ninguno o contenga al menos uno, de los factores primos p_{m+1}, p_{m+2}, $\dots$ en su descomposición en factores. Como $P_m(x_1, x_2, \dots x_m)$ es absolutamente convergente para $|x_1| \leq 1$, $\dots |x_m| \leq 1$ y su módulo es $< K$, entonces $f_m(s)$ es absolutamente convergente para $\sigma \geq 0$, y para $\sigma > 0$ es

$$|f_m(s)| < K.$$

Afirmo ahora: Supongamos que para todo $\varepsilon < 1$ la función $f(s)$, definida para $\sigma > 1$ por la serie absolutamente convergente allí (B3), es regular y acotada para $\sigma > \varepsilon$; de aquí entonces se sigue inmediatamente, aplicando un teorema mencionado en la Introducción ($C = D$), que $C \leq 0$.

Obviamente basta probar que, para cada τ real, $f(s)$ es regular y de módulo $\leq K$ en un círculo de centro $2 + i\tau$ y radio $2 - \varepsilon$, donde K es la constante que ha aparecido antes. Pero esto se deduce inmediatamente de que, por un lado, en el círculo más pequeño $|s - (2 + i\tau)| < \frac{1}{2}$, contenido completamente en el interior del semiplano $\sigma > 1$, se tiene uniformemente

$$\lim_{m \to \infty} f_m(s) = f(s),$$

mientras que por otro lado todas las funciones

$$f_1(s),\ f_2(s),\ \ldots f_m(s),\ \ldots$$

son regulares para $|s - (2 + i\tau)| < 2 - \varepsilon$ y en módulo son $< K$. Entonces según un conocido teorema de Stieltjes[14] existe la función $f(s)$ y es regular en todo el círculo $|s - (2 + i\tau)| < 2 - \varepsilon$ y se tiene

$$f(s) = \lim_{m \to \infty} f_m(s)$$

así como

$$|f(s)| \leq K.$$

Con ello el teorema VIII queda demostrado.

Sean S $(2 \leq S \leq \infty)$ y $T \geq 0$ con el significado que se aclaró en la Introducción; ahora ya podemos demostrar fácilmente el siguiente teorema capital que mencionamos allí:

Teorema IX. *Se tiene*

$$T = \frac{1}{S}.$$

Demostración. 1. Se tiene $T \leq \frac{1}{S}$; es decir, cuando la serie de Dirichlet (B3) tiene una recta de convergencia $\sigma = C$ situada en el plano finito, entonces la abscisa de convergencia absoluta B cumple $B \leq C + \frac{1}{S}$, por tanto para cada $\delta > 0$ la serie (B3) es absolutamente convergente para $\sigma \geq C + \frac{1}{S} + \delta$.

De hecho, según el Teorema VII, la serie de potencias $P(x_1, x_2, \ldots)$ asociada con (B3) está acotada para

$$|x_1| \leq p_1^{-(C+\frac{\delta}{3})},\ \ldots\ |x_m| \leq p_m^{-(C+\frac{\delta}{3})},\ \ldots$$

Pongamos

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{S} + \frac{\delta}{3}}, \quad \beta = \frac{1}{S} + \frac{2\delta}{3}$$

y, para todo $m = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\varepsilon_m = \frac{1}{p_m^{\beta}}.$$

Entonces es $\alpha < S$, $0 < \varepsilon < 1$ y, dado que $\alpha\beta > 1$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^{\alpha} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p_m^{\alpha\beta}}$$

[14] Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, Paris, 1905, Bd. II, págs. 369–370. Escribe Stieltjes en 1894:

Sea $f_k(z) = \sum_0^\infty A_j^k z^j$ $(k = 1, 2, \ldots)$ una sucesión de funciones analíticas, siendo las series que las definen convergentes para $|z| < R$ e incluso un poco más allá (es decir, para $|z| = R + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera).

Supongamos además que se sabe que la serie $\sum_1^\infty f_k(z)$ es uniformemente convergente para $|z| \leq R_1$, con $R_1 < R$, y además que en todo el dominio $|z| \leq R$ e incluso un poco más allá las sumas parciales $\sum_1^n f_k(z)$ tiene módulo inferior a un número fijo C (independiente de n).

Entonces yo digo que la serie $\sum_1^\infty f_k(z)$ necesariamente es convergente (e incluso uniformemente convergente) para $|z| \leq R$, y (según un teorema de Weierstrass) la suma de esta serie es una función analítica de z que puede adoptar la forma de una serie convergente $F(z) = \sum c_j z^j$, $|z| \leq R$.

es convergente. Por tanto, según la definición del número S, la serie de potencias $P(x_1, x_2, \ldots)$ es absolutamente convergente para

$$|x_m| \leq \varepsilon_m \, p_m^{-(C+\frac{\delta}{3})} = p_m^{-(\frac{1}{S}+\frac{2\delta}{3})} \cdot p_m^{-(C+\frac{\delta}{3})} = p_m^{-(C+\frac{1}{S}+\delta)} \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

es decir, la serie (B3) es absolutamente convergente para $\sigma \geq C + \frac{1}{S} + \delta$ como había que demostrar.

2. Se tiene $T \geq \frac{1}{S}$. Como $T \geq 0$, en el caso $S = \infty$ no hay nada que demostrar; por lo tanto en la demostración podemos partir de que la constante absoluta $S < \infty$. Entonces la afirmación dice: Para cada $\delta > 0$ existe una serie de Dirichlet (B3) con abscisa de convergencia absoluta B y abscisa de convergencia uniforme C tales que

$$B - C \geq \frac{1}{S} - \delta;$$

aquí obviamente puede suponerse $\delta < \frac{1}{S}$.

De hecho, dado que

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{S} - \frac{\delta}{2}} > S,$$

existe una serie de potencias $Q(x_1, x_2, \ldots)$ acotada para $|x_1| \leq 1$, $|x_2| \leq 1, \ldots$ y una sucesión de números asociada

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_m,\ \ldots \quad (0 < E_m < 1)$$

tales que la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} E_m^{\alpha}$$

converge, mientras que $Q(x_1, x_2, \ldots)$ no es absolutamente convergente para

$$x_1 = E_1,\ x_2 = E_2,\ \ldots,\ x_m = E_m,\ \ldots;$$

podemos aquí suponer obviamente

$$E_1 \geq E_2 \geq \ldots \geq E_m \geq \cdots.$$

Dada la convergencia de la serie $\sum E_m^{\alpha}$ de términos positivos y formando una sucesión monótona decreciente, sabemos que

$$\lim_{m \to \infty} m E_m^{\alpha} = 0,$$

por tanto

$$E_m = o\Big(\frac{1}{m^{\frac{1}{\alpha}}}\Big) = o\Big(\frac{1}{m^{\frac{1}{S}-\frac{\delta}{2}}}\Big),$$

donde la estimación se refiere al entero creciente m.

Pongamos ahora, para todo $m = 1, 2, \ldots$,

$$E'_m = \frac{1}{p_m^{\frac{1}{S}-\delta}};$$

entonces, por la conocida estimación $p_m = O(m \log m)$ se tiene

$$\frac{1}{E'_m} = p_m^{\frac{1}{S}-\delta} = O\Big(m^{\frac{1}{S}-\frac{\delta}{2}}\Big),$$

por tanto

$$\frac{E_m}{E'_m} = o(1).$$

Se sigue que para todo $m = 1, 2, \ldots$ salvo un número finito es

$$E'_m \geq E_m.$$

Según la Nota al Teorema VI existe por lo tanto una serie de potencias $P(x_1, x_2, \ldots)$ acotada para $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, ... y que para

$$x_m = E'_m = \frac{1}{p_m^{\frac{1}{S}-\delta}} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

no es absolutamente convergente. Sea entonces (B3) la serie de Dirichlet que posee como serie de potencias asociada la serie $P(x_1, x_2, \ldots)$; dado $\varepsilon > 0$, según el Teorema VIII la serie (B3) es uniformemente convergente para $\sigma > 2\varepsilon$ ya que la serie de potencias asociada $P(x_1, x_2, \ldots)$ está acotada para

$$|x_m| < \frac{1}{p_m^{\varepsilon}} < 1 \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Por lo tanto la abscisa C de convergencia uniforme de nuestra serie es ≤ 0. Pero como $P(x_1, x_2, \ldots)$ no es absolutamente convergente para $x_m = E'_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, la serie (B3) no es absol. convergente para $\sigma = \frac{1}{S} - \delta$; así que su abscisa de convergencia absoluta B es $\geq \frac{1}{S} - \delta$.

Se tiene por tanto, para la serie (B3) considerada,

$$B - C \geq \frac{1}{S} - \delta - 0 = \frac{1}{S} - \delta.$$

Con esto el Teorema IX queda demostrado.

Dado que $S \geq 2$, se sigue de este Teorema IX que $T \leq \frac{1}{2}$, y por tanto:

Teorema X. *Supongamos que la serie de Dirichlet* (B3) *posee dominio de convergencia, y sea B su abscisa de convergencia absoluta. Sea además $D \leq B$ el extremo inferior de los numeros d para los cuales la función $f(s)$ definida por la serie* (B3) *es regular y acotada en el semiplano $\sigma > d$. Entonces se cumple*

$$B \leq D + \frac{1}{2}.$$

....

(Suplemento, p. 487–488)

Suplemento.

Siendo, por el Teorema IX de la Sección 4,

$$T = \frac{1}{S}$$

tengo un problema importante en la teoría de la convergencia absoluta de las series de Dirichlet (B1) que se acompaña de la determinación de una constante absoluta S en la teoría de las series de potencias de infinitas variables. Sobre el número S puedo probar sin dificultad que es ≥ 2, de donde se sigue que $T \leq \frac{1}{2}$. Pero por el otro lado no puedo decir nada sobre el número S; en particular no puedo contestar a una pregunta muy esencial para mis propósitos, sobre si es $S = \infty$ o $S < \infty$; e. d., si me ayudo del teorema recién mencionado, sobre si es $T = 0$ o $T > 0$.

Pero resulta ahora, después de la presentación de este trabajo, que el Sr. Toeplitz, a quien le planteé por carta recientemente el problema de la determinación de S, ha conseguido demostrar mediante una construcción muy ingeniosa que $S < \infty$, de hecho $S \leq 4$. El Sr. Toeplitz a saber prueba[15] que para cada $s > 0$ existe una serie de potencias $P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ (incluso una forma cuadrática) acotada para

$$|x_1| \leq 1,\ |x_2| \leq 1, \ldots, |x_m| \leq 1, \ldots$$

y una sucesión de números ε_m asociada, $(0 < \varepsilon_m < 1)$ para las que valen las dos propiedades siguientes:

[15] O. Toeplitz: Über eine bei den Dirichletschen Reihen auftretende Aufgabe aus der Theorie der Potenzreihen von unendlichvielen Veränderlichen. Este trabajo aparecerá pronto en estas *Nachrichten.* (*N. del T.*: Ver el siguiente Anexo 3.)

1) La serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^{4+\varepsilon}$$

es convergente.

2) La serie $P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ no es absolutamente convergente para

$$x_1 = \varepsilon_1,\ x_2 = \varepsilon_2, \ldots, x_m = \varepsilon_m, \ldots.$$

Del resultado de Toeplitz se sigue para las series de Dirichlet (B1) que $T > 0$, de hecho que es $T \geq \frac{1}{4}$; por consiguiente: *Una serie de Dirichlet* (B1) *no necesita ser absolutamente convergente para que la función representada por la serie sea regular y permanezca acotada*; más exactamente: *La diferencia $B - D$ puede ser tan próxima a $\frac{1}{4}$ como se quiera.*

De modo que se puede afirmar que es $2 \leq S \leq 4$, y por consiguiente $\frac{1}{4} \leq T \leq \frac{1}{2}$. El problema de determinar el valor exacto de S, e. d. de T, sigue aún abierto.

Otto Toeplitz, Über eine bei den Dirichletschen Reihen auftretende Aufgabe aus der Theorie der Potenzreihen von unendlichvielen Veränderlichen, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse* 1913, Heft 3, 417–432. `http://eudml.org/doc/58883`

Sobre una cuestión relativa a las series de Dirichlet que aparece en la teoría de las series de potencias en infinitas variables.

Por

Otto Toeplitz de Göttingen.

Presentado por D. Hilbert en la sesión de 19 de julio de 1913.

El sr. Bohr, en un trabajo reciente que se acaba de imprimir (estas *Nachrichten*, sesión de 21 de junio de 1913) y cuyos resultados me ha comunicado en una carta, ha convertido un problema de la teoría de las series de Dirichlet

$$f(s) = \frac{a_1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \cdots \tag{T1}$$

en una cuestión sobre series de potencias de infinitas variables complejas

$$P(x_1, x_2, \ldots) = c + \sum_{\alpha} c_\alpha\, x_\alpha + \sum_{\alpha\leq\beta} c_{\alpha\beta}\, x_\alpha x_\beta + \sum_{\alpha\leq\beta\leq\gamma} c_{\alpha\beta\gamma}\, x_\alpha x_\beta x_\gamma + \ldots \tag{T2}$$

Se sabe que en torno al asunto del semiplano de convergencia de una serie de Dirichlet son necesarias unas precisiones sin análogo en la teoría de las series de potencias de una variable compleja: en alguna ocasión el semiplano de convergencia absoluta puede unirse a su izquierda a una banda paralela de convergencia condicional que puede alcanzar hasta 1 unidad de anchura. Pero además no habrá dificultad en reconocer en qué medida el teorema de Weierstrass, que hace llegar el círculo de convergencia de una serie de potencias hasta el punto singular más próximo de la función representada, encuentra su análogo en la teoría de las series de Dirichlet, es decir, si ocurre que el cese de la convergencia absoluta está asociado a la naturaleza de la función representada o bien, como precisa Bohr, si acaso el semiplano de convergencia absoluta puede extenderse tanto como el semiplano de regularidad y acotación de la función representada. Este es más bien un problema, que Bohr ha reducido en el curso de sus sucesivas investigaciones a la siguiente cuestión sobre funciones del tipo (T2):

Una serie de potencias del tipo (T2) *está* limitada [begrentz][1] *cuando la serie de potencias*

$$P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots),$$

para todos los $x_1, \ldots, x_n$ *de módulo* ≤ 1 *es: primero, absolutamente convergente, y segundo,vale la acotación* $|P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leq M$ *con la misma constante fija independiente de* n.

Se ve inmediatamente que P está *limitada* cuando la suma de todos sus coeficientes es absolutamente convergente:

$$|c| + \sum_{\alpha} |c_\alpha| + \sum_{\alpha\leq\beta} |c_{\alpha\beta}| + \ldots \quad \text{converge.} \tag{T3}$$

Lo que es ya menos evidente es que el recíproco de este resultado no es cierto, es decir, que P puede estar limitada sin que la serie en (3) converja, o por decirlo de otra manera, que no es necesario que una serie de potencias P limitada sea absolutamente convergente para todos los sistemas de valores $x_1, x_2, \ldots$ que satisfacen las condiciones

$$|x_1| \leq 1,\ |x_2| \leq 1,\ \ldots. \tag{T4}$$

Bohr ha tenido éxito en probar, mediante una estimación corriente en teoría de funciones, que una P limitada es siempre absolutamente convergente para los $x_1, x_2, \ldots$ que satisfacen la condición

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots \tag{T5}$$

[1]Hilbert usa la palabra *acotada [beschränkt]*. Nosotros preferimos usar la palabra *begrentz* para el caso específico de las series de potencias en infinitas variables que se reducen a formas cuadráticas, justamente aquellas en las que se centrará nuestra atención en este trabajo; este término no coincide con el de la acotación que estableció Hilbert en la teoría de formas cuadráticas en infinitas variables (estos Nach., 1906, 157-227), sino que es esencialmente más restringido [enger].

converge. *Su cuestión consiste ahora en la pregunta de* si, en vez de la convergencia de (T5), no sería suficiente la convergencia de

$$|x_1|^\nu + |x_2|^\nu + \ldots \quad (\nu > 2) \tag{T6}$$

para garantizar la convergencia absoluta de cualquier P limitada, y *cuál es la sección* A *entre los valores de* ν *para los que basta la convergencia de* (T6)*, de modo que para cada sistema de valores para el que* (T6) *sea convergente puede afirmarse la convergencia absoluta de cualquier serie de potencias limitada, y cuál es el mayor valor de* ν *para el que esto ya no se cumple. En particular llegar a saber después de esto si es* $\mathsf{A} = \infty$ *o no; en el último caso llegar a dar, en base a la investigación de Bohr, una serie de Dirichlet para la cual el semiplano de convergencia absoluta no se extienda tanto hacia la izquierda como el semiplano de regularidad y acotación de la función representada.* El valor más exacto de A dará la posible anchura de esta banda sobresaliente que, como muestra Bohr, es igual a $1/\mathsf{A}$. De la observación $\mathsf{A} \geq 2$ Bohr ha podido concluir ya que toda banda puede tener a lo sumo anchura $1/2$. El núcleo del problema es si la anchura de la banda puede reducirse siempre a cero o no.

Esta pregunta se contesta en en el presente trabajo en sentido negativo; *mediante la construcción de un ejemplo se probará que es* $\mathsf{A} \leq 4$*. Y se da también una serie de Dirichlet para la cual existe la banda en cuestión y tiene una anchura arbitrariamente próxima al valor* $1/4$. La pregunta de si hay una serie de Dirichlet en la que la anchura $1/2$ conocida como cota superior se alcanza en realidad o al menos se aproxima arbitrariamente a ella, permanece abierta.

De hecho el ejemplo que se construirá a continuación nos da más que lo que se acaba de decir de él. Pues no se trata de una verdadera serie de potencias de grado infinitamente alto como lo es la expresión (T2) en general, sino de una *forma cuadrática*, es decir, solamente está presente el tercer término de (T2), faltando los dos primeros y el resto desde el cuarto. *Designando con* A_n *la* sección *obtenida cuando se toman en consideración, en vez de funciones limitadas arbitrarias, solamente formas cuadráticas homogéneas de grado n-ésimo, se tiene*

$$\mathsf{A}_1 \geq \mathsf{A}_2 \cdots \geq \mathsf{A}.$$

Porque si F_n es una forma limitada de grado n y para un sistema de valores $x_1, x_2, \ldots$ para el que (T6) converge con un determinado valor de ν, resultase ser F_n no absolutamente convergente, entonces $x_1 F_n$ sería una una forma limitada de grado $n+1$ que se comportaría exactamente igual para ese valor de ν. De ahí se sigue $\mathsf{A}_{n+1} \leq \mathsf{A}_n$. Que además es $\mathsf{A} \leq \mathsf{A}_n$ se entiende por sí mismo.

Además es $\mathsf{A}_1 = \infty$. Porque según la definición, la forma lineal

$$P = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots$$

está limitada cuando, para $|x_1| = 1, \ldots, |x_n| = 1$, es

$$|P_n| = |c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n| \leq M$$

con M independiente de los x_α y de n. Si se asignan al arco de variables $x_1, \ldots, x_n$, que son libremente disponibles, valores tales que cada término $c_\alpha x_\alpha$ sea real y no negativo, se deduce que

$$|c_1| + \cdots + |c_n| \leq M,$$

y a partir de ello la convergencia absoluta de $\sum c_n$. En consecuencia $\sum c_n x_n$ es absolutamente convergente cuando $|x_n|$ es una sucesión acotada, lo cual es seguro si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, y esto se sigue de la convergencia de (T6) en cualquier caso, por grande que pudiera ser el valor ν.

Con esta notación el resultado de nuestro trabajo se puede precisar con mayor exactitud: no sólo es $\mathsf{A} \leq 4$*, sino que es ya* $\mathsf{A}_2 \leq 4$. La relación definitiva es $\mathsf{A}_2 = 4$ como probablemente dé la impresión. En el lenguaje de las series de Dirichlet la naturaleza de mi ejemplo significa, según lo que Bohr atentamente me indicó, que en la expresión (T1) son iguales a cero todos los a_n cuyos índices n se descomponen en menos o más de dos factores primos (iguales o distintos).

La solución de la tarea de Bohr, que se va a dar en lo que sigue, se basa principalmente en la observación de que entre ella y ciertas cuestiones de la teoría de formas cuadráticas de infinitas variables a su vez, como es conocido para mí desde hace tiempo, curiosamente relacionadas entre sí, existe una relación inesperada y no del todo sencilla. La hilación entre tantas tareas diferentes nace de los principios que yo desarrollé en mi tesis de Habilitación (Math. Ann. 70, 351-376). Sin embargo prefiero renunciar de aquí en adelante a esa línea de pensamiento que me ha guiado, porque de este modo se puede dar la respuesta a la cuestión de Bohr en una forma que no requiere ningún conocimiento previo. Para los demás resultados mencionados remito a la segunda parte de de este trabajo.

Primera parte: la cuestión de Bohr.

1. La primera cuestión algebraica. Sustituiré la cuestión de Bohr por la siguiente cuestión algebraica elemental. Sea M_1 el valor máximo del módulo de una forma cuadrática dada en n variables con coeficientes complejos

$$A(x,x) = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} x_p x_q \quad (a_{pq} = a_{qp})$$

bajo las condiciones

$$|x_1| = 1, \dots, |x_n| = 1; \tag{T7}$$

Sea además

$$\mathsf{M}_1 = \sum_{p,q=1}^{n} |a_{pq}| \,.$$

Evidentemente es $M_1 \leq \mathsf{M}_1$, de manera que $\mathsf{M}_1/M_1 \geq 1$. Si ahora hacemos variar la forma cuadrática, es decir, los n^2 coeficientes complejos a_{pq}, de modo que solamente se mantiene fijo el número n de variables, las cantidades M_1 y M_1 irán variando y de hecho, como sale de una consideración fácil, de una manera continua respecto de los a_{pq}. Como M_1/M_1 sólo depende de los a_{pq} como una razón, es permisible limitarse a acotar formas para las cuales sea $\mathsf{M}_1 = 1$; y para todas estas, que ahora forman un dominio acotado finito, como M_1/M_1 es una función continua, debe tener un valor máximo. Este máximo solo puede depender del número n; llamemos $\varphi_1(n)$ a esta función teórico-numérica que resulta. La primera cuestión algebraica estriba en el estudio de esta función $\varphi_1(n)$.

Señalemos aquí que esta primera cuestión algebraica no se modifica cuando las restricciones (T7) se sustituyen por esta otras

$$|x_1| \leq 1, \dots, |x_n| \leq 1. \tag{T8}$$

Porque una función analítica, también si es de más de una variable, pero de un número finito de variables, nunca alcanza el máximo valor de su módulo en el interior de un dominio.

La relación exacta entre esta cuestión y la de Bohr puede ser mejor tratarla después, de la mano de un resultado sobre $\varphi_1(n)$.

2. La segunda cuestión algebraica. Sea M_2 el valor máximo del módulo de una forma cuadrática en n variables complejas con coeficientes reales

$$A(x,x) = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} x_p x_q$$

bajo la condición

$$|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 = 1;$$

Sea M_2 la cantidad análoga para la forma

$$\mathsf{A}(x,x) = \sum_{p,q=1}^{n} |a_{pq}| \, x_p x_q.$$

Aquí es también inmediato que $M_2 \leq \mathsf{M}_2$, luego que $\mathsf{M}_2/M_2 \geq 1$. El máximo valor de este cociente para todas las formas de un número de variables n fijo y con coeficientes reales lo denotaremos por $\varphi_2(n)$. La segunda cuestión algebraica consiste en el estudio de esta función.

3. Tratamiento de la segunda cuestión. Demostraré que $\varphi_2(n) \geq \sqrt{n}$ para todo n que es una potencia de 4 si doy un ejemplo de una forma Π_α de 4^α incógnitas para la cual sea $\mathsf{M}_2/M_2 = 2^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \dots)$. Empezaré definiendo, para $\alpha = 1$, $\Pi_1(x_1, \dots, x_4)$ como la forma cuadrática en $x_1, \dots, x_4$ con matriz de coeficientes

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil determinar M_2 para esta forma, porque todos los coeficientes se sustituyen por sus valores absolutos, así que la forma $\mathsf{A}(x,x)$ es $(x_1+x_2+x_3+x_4)^2$, y su máximo se desprende del muy elemental resultado auxiliar siguiente.

Lema 1. El máximo valor de $\left|(x_1+\cdots+x_n)^2\right|$ *para* $x_1,\ldots,x_n$ *complejos bajo la condición*

$$|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2=1$$

es $\mathsf{M}_2=n$.

Demostración. Como $|x_1+\cdots+x_n|^2 \le (|x_1|+\cdots+|x_n|)^2$, esta forma alcanza su valor máximo para x reales positivos. Es suficiente también estudiar el máximo de $(x_1+\cdots+x_n)^2$ condicionado a $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ para argumentos reales, y la respuesta, según las reglas elementales, es que debe ser

$$\frac{\partial[(x_1+\cdots+x_n)^2+\lambda(x_1^2+\cdots+x_n^2)]}{\partial x_\alpha}=2(x_1+\cdots+x_n)+2\lambda x_\alpha=0,$$

luego $x_1=\cdots=x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$; y aquí la forma tiene el valor n. Por tanto para Π_1 en particular es $\mathsf{M}_2=4$. Para la determinación de M_2 usaremos el siguiente lema.

Lema 2. Una forma ortogonal con coeficientes reales, es decir, una forma cuadrática cuyos coeficientes cumplen

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha p}a_{\alpha q}=\begin{cases}0 & si\ p\neq q,\\ 1 & si\ p=q\end{cases}$$

tiene, para $x_1,\ldots,x_n$ *complejos bajo la condición*

$$|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2=1$$

un valor máximo a lo sumo igual a 1.

Demostración. Denotaremos el conjugado del número complejo z con $\overline{z}$. Escribiendo la forma del siguiente modo:

$$A(x,x)=\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha(a_{\alpha 1}x_1+\cdots a_{\alpha n}x_n),$$

la aplicación de la denominada desigualdad de Schwarz para números complejos, es decir, la desigualdad

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{n}u_\alpha v_\alpha\right|^2\le\sum_{\alpha=1}^{n}u_\alpha\overline{u}_\alpha\ \sum_{\alpha=1}^{n}v_\alpha\overline{v}_\alpha$$

da en el presente caso

$$|A(x,x)|^2\le\sum_{\alpha=1}^{n}x_\alpha\overline{x}_\alpha\ \sum_{\alpha=1}^{n}(a_{\alpha 1}x_1+\cdots a_{\alpha n}x_n)(a_{\alpha 1}\overline{x}_1+\cdots a_{\alpha n}\overline{x}_n).$$

Pero por la ortogonalidad la última suma es igual a

$$\sum_{\alpha,p,q=1}^{n}a_{\alpha p}a_{\alpha q}x_p\overline{x}_q=\sum_{\alpha=1}^{n}x_\alpha\overline{x}_\alpha;$$

como $x\overline{x}=|x|^2$, dada la restricción el segundo miembro de nuestra desigualdad es igual a 1, luego $|A(x,x)|\le 1$ y queda probado el Lema.

Que el máximo es exactamente igual a 1 es fácil de demostrar aunque aquí no lo haremos.

Ahora, la forma $\frac{1}{\sqrt{4}}\Pi_1(x_1,\cdots,x_4)$ es ortogonal por su formación, luego su valor máximo es ≤ 1. Entonces para la propia forma Π_1 se tiene $M_2\le 2$ y como para $x_1=\cdots=x_4=\frac{1}{\sqrt{4}}$ alcanza el valor 2, se tiene $M_2=2$ y con ello $\mathsf{M}_2/M_2=\frac{4}{2}=2=\sqrt{4}$.

A continuación se construye una matriz de coeficientes 16×16 para la forma Π_2 según el esquema

$$\Pi_2=\begin{pmatrix}-\Pi_1 & \Pi_1 & \Pi_1 & \Pi_1\\ \Pi_1 & -\Pi_1 & \Pi_1 & \Pi_1\\ \Pi_1 & \Pi_1 & -\Pi_1 & \Pi_1\\ \Pi_1 & \Pi_1 & \Pi_1 & -\Pi_1\end{pmatrix},$$

donde Π_1 es la matriz anterior, y $-\Pi_1$ dicha matriz con todos los signos cambiados.

Aquí M_2 es el máximo de $|x_1 + \cdots + x_{16}|^2$, luego es $= 16 = 4^2$ por el Lema 1. Además, si se multiplica por un factor conveniente, Π_2 es ortogonal. Porque si se multiplican dos filas de Π_2 cuyas numeraciones no se diferencian en un múltiplo de 4, esas composiciones de 16 términos resultan ser cero dada la ortogonalidad de $\frac{1}{2}\Pi_1$ y cómo se forma cada grupo de cuatro términos consecutivos en ellas. Si las numeraciones se diferencian en un múltiplo de 4, esos grupos de cuatro términos consecutivos no dan cero, sino que dos de ellos dan $+4$ y otros dos -4, resultando así las composiciones iguales a cero de nuevo. Y las composiciones de las filas individuales consigo mismas dan 16, de modo que la forma $\frac{1}{4}\Pi_2(x_1, \cdots, x_{16})$ es ortogonal; de aquí se sigue que para Π_2 es $M_2 \leq 4$, y como para $x_1 = \cdots = x_{16} = \frac{1}{4}$ la forma es igual a $8\Pi_1\big(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\big) = 4$, se sigue que es $M_2 = 4$ y $\mathsf{M}_2/M_2 = \frac{16}{4} = 4 = \sqrt{16}$.

Ahora podemos establecer fácilmente una conclusión, pues a partir de Π_2 se puede formar exactamente del mismo modo una forma $\Pi_3(x_1, \cdots, x_{64})$, a partir de Π_3 una forma Π_4 en 256 variables, y así sucesivamente. Entonces,

Resultado. Existe una forma Π_α en $n = 4^\alpha$ variables, con coeficientes ± 1, para la cual $\mathsf{M}_2 = 4^\alpha$, $M_2 = 2^\alpha$, de modo que $\mathsf{M}_2/M_2 = 2^\alpha = \sqrt{4^\alpha}$. Esta forma alcanza su máximo para

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{4^\alpha}},\ \ldots,\ x_n = \frac{1}{\sqrt{4^\alpha}},$$

es decir, para valores positivos iguales sin excepción.

4. Relación entre ambas cuestiones algebraicas. La conexión entre ambas cuestiones quedará marcada por la breve advertencia preliminar de que para una forma cuadrática, en general su máximo M_2 no se alcanza exactamente para sistemas de valores $x_1, \ldots, x_n$ todos del mismo módulo, pero este es precisamente el caso para las formas Π_α que, como acabamos de demostrar, proporcionan un valor alto para M_2/M_2.

En detalle consiste en lo siguiente. En primer lugar, para la forma Π_α de $n = 4^\alpha$ variables se tiene $\mathsf{M}_1 = n^2$, $\mathsf{M}_2 = 4^\alpha = n$, luego $\mathsf{M}_1 = n\mathsf{M}_2$. Para averiguar la relación entre M_1 y M_2 demos a las variables, por un lado, los valores $x_1, \ldots, x_n$ para los cuales Π_α alcanza su máximo en el sentido de nuestra primera cuestión. Se trata de un sistema de valores todos ellos de módulo 1; si en lugar de ellos sustituimos en Π_α los valores

$$\frac{x_1}{\sqrt{n}},\ \ldots,\ \frac{x_n}{\sqrt{n}},$$

ahora tenemos un sistema de valores para el cual se cumple

$$\left|\frac{x_1}{\sqrt{n}}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right|^2 = \frac{|x_1|^2}{n} + \cdots + \frac{|x_n|^2}{n} = 1,$$

por consiguiente un sistema de valores que satisface la restricción de la segunda cuestión. Entonces el valor de Π_α para este sistema de valores será $\leq M_2$. Pero ese valor, teniendo en cuenta los factores de proporcionalidad, es igual a $\frac{1}{n}M_1$; luego $\frac{1}{n}M_1 \leq M_2$ y $M_1 \leq nM_2$. Esta conclusión no ha usado aún del todo la especificidad de la forma Π_α.

Pero ahora por otra parte demos a $x_1, \ldots, x_n$ un cierto sistema de valores que provea el máximo de Π_α; por ejemplo, en base a las propiedades demostradas de esta forma, el sistema de valores

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{n}},\ \ldots,\ x_n = \frac{1}{\sqrt{n}};$$

para estos es $\Pi_\alpha = M_2$; entonces para el sistema $x_1 = \ldots = x_n = 1$ se obtiene el valor nM_2; pero este sistema de valores de ahora satisface las restricciones de la primera cuestión, ya que son todos ellos valores iguales a 1. Luego $nM_2 \leq M_1$.

Resumiendo, hemos obtenido $M_1 \leq nM_2$ y $nM_2 \leq M_1$, luego con ello $M_1 = nM_2$. Por otra parte, era $\mathsf{M}_1 = n\mathsf{M}_2$. Con esto se tiene, para la forma Π_α:

$$\mathsf{M}_1/M_1 = \mathsf{M}_2/M_2 = \sqrt{4^\alpha} = \sqrt{n} = 2^\alpha.$$

Resultado. Para los n que son potencia de 4 se tiene también $\varphi_1(n) \geq \sqrt{n}$.

5. La cuestión de Bohr. El ejemplo de una forma cuadrática en infinitas variables con ayuda del cual voy a contestar a la pregunta de Bohr lo construyo a continuación a partir de las formas Π_α definidas en el No. 3. Para ello formo

$$\Pi = \frac{\mu_1}{8}\Pi_1(x_1,\ldots,x_4) + \frac{\mu_2}{8^2}\Pi_2(x_{4+1},\ldots,x_{4+4^2}) + \frac{\mu_3}{8^3}\Pi_3(x_{4^2+4+1},\ldots,x_{4^2+4+4^3}) + \cdots,$$

donde he usado siempre diferentes variables en cada Π_α, y tras multiplicación por unos factores positivos constantes que se determinarán después con más detalle las he sumado todas. Como según el No. 4 para Π_α tenemos $M_1 = nM_2$ y esto según el No. 3 es igual a $n \cdot 2^\alpha = 4^\alpha \cdot 2^\alpha = 8^\alpha$, el factor $\frac{1}{8^\alpha}$ sirve para que el máximo del sumando α-ésimo de Π sea $M_1 = \mu_\alpha$. Si ahora

$$((1)) \qquad \mu_1 + \mu_2 + \cdots \qquad \text{es una serie convergente,}$$

entonces Π será una función *limitada* [begrentze] de sus infinitas variables. Porque la sección de la función Π, $\Pi(x_1,\ldots,x_n,0,0,\ldots)$, que la deja cortada exactamente al final de un sumando completo de los que definen la serie de arriba, por ejemplo

$$\frac{\mu_1}{8}\Pi_1 + \cdots + \frac{\mu_\alpha}{8^\alpha}\Pi_\alpha,$$

y tiene el máximo $\mu_1 + \cdots + \mu_n$ para todos los $x_1,\ldots,x_n$ iguales a 1, queda entonces por debajo de la cota fija $M = \sum_{\alpha=1}^{\infty}\mu_\alpha$ que es también independiente de n. Y todas las demás secciones también quedan por debajo de esta misma cota. Porque de la consideración final del No. 1 se sigue que

$$\text{máx}\,|\Pi(x_1,\ldots,x_n,0,0,\ldots)| \leq \text{máx}\,|\Pi(x_1,\ldots,x_{n+1},0,0,\ldots)|\,,$$

y por lo tanto que el máximo del módulo de una sección cualquiera de Π queda por debajo del de la siguiente sección más amplia que ella en la antes considerada subsucesión de secciones.

La suma de los módulos de todos los coeficientes de Π es

$$((a)) \qquad \frac{\mu_1}{8}\,16 + \frac{\mu_2}{8^2}\,16^2 + \cdots = \sum 2^\alpha\mu_\alpha.$$

Es por consiguiente muy fácil elegir los μ_α de modo que se cumpla ((1)) y que esta suma ((a)) diverja. En esto consiste un primer resultado:

Incluso para una forma cuadrática de infinitas variables que es limitada*, no es necesario que la suma de los módulos de todos sus coeficientes sea convergente.*[2]

En lo que se refiere en cambio a la verdadera cuestión de Bohr, voy a formar ahora un sistema de valores para los cuales

$$x_1^{4+\varepsilon} + x_2^{4+\varepsilon} + \cdots$$

converge y sin embargo $\Pi(x_1,x_2,\ldots)$ no es absolutamente convergente. Más específicamente voy a demostrar que, para un ε dado arbitrariamente pequeño se pueden elegir las cantidades aún libres μ_α verificando ((1)) y los x_1, x_2, ..., de forma que se satisfagan los dos requisitos recién propuestos. En otras palabras, por lo tanto, voy a conseguir, no una forma fija Π que cumpla con lo requerido por pequeño que sea ε, sino para cada ε una forma adecuada de tipo Π.

Nos acercamos mucho a ello si optamos por que los x_n que aparecen en la misma Π_α sean iguales, iguales además a un número $h_\alpha > 0$. Las otras dos condiciones que se añaden a ((1)) se reescriben entonces como

$$((2)) \qquad 4h_1^{4+\varepsilon} + 4^2h_2^{4+\varepsilon} + \cdots \qquad \text{es convergente,}$$

y

$$((3)) \qquad \frac{\mu_1}{8}\,16h_1^2 + \frac{\mu_2}{8^2}\,16^2h_2^2 + \cdots = 2\mu_1h_1^2 + 2^2\mu_2h_2^2 + 2^3\mu_3h_3^2 + \cdots \qquad \text{es divergente.}$$

Si tenemos éxito en encontrar números positivos μ_α, h_α que satisfagan estos tres requisitos, con ello habrá quedado probado que es $\mathsf{A}_2 \leq 4$.

[2]Para funciones P de grado infinitamente alto esto ya lo conocía Bohr.

Observemos en primer lugar que h_α debe tener aproximadamente el orden de magnitud $\frac{1}{\sqrt{2^\alpha}}$ para que la divergencia de ((3)), no innecesariamente fuerte, permita también que la convergencia de ((2)) entre en el ámbito de lo posible. Según ello, pongamos por comodidad

$$h_\alpha^2 = \frac{k_\alpha}{2^\alpha}$$

y $\varepsilon = 2\kappa$. Así, los tres requisitos son

$$\begin{aligned} &1) \quad \sum \mu_\alpha \quad \text{convergente,} \\ &2) \quad \sum \frac{k_\alpha^{2+\kappa}}{2^{\alpha\kappa}} \quad \text{convergente,} \\ &3) \quad \sum \mu_\alpha k_\alpha \quad \text{divergente.} \end{aligned}$$

Es suficiente proponer para μ_α y k_α progresiones geométricas. Sean entonces

$$\mu_\alpha = \mu^\alpha, \quad k_\alpha = k^\alpha,$$

de modo que ahora las condiciones ya hay que disponerlas sobre μ y k, quedando

$$\begin{aligned} &1) \quad \sum \mu^\alpha \quad \text{convergente,} \\ &2) \quad \sum 2^{-\alpha\kappa} k^{\alpha(2+\kappa)} \quad \text{convergente,} \\ &3) \quad \sum \mu^\alpha k^\alpha \quad \text{divergente,} \end{aligned}$$

y estas equivalen a su vez a las siguientes:

$$\begin{aligned} &1) \quad \mu < 1, \\ &2) \quad 2^{-\kappa} k^{2+\kappa} < 1, \\ &3) \quad \mu k \geq 1. \end{aligned}$$

La comparación entre 2) y 3) da que debe ser $k > 1$; como por otra parte μ no aparece en 2), para determinar el $k > 1$ es suficiente que se cumpla 2), porque poniendo $\mu = 1/k$ se cumplirán 1) y 3). Resta así determinar k tal que sea

$$k > 1, \quad k^{2+\kappa} < 2^\kappa.$$

Pero como la segunda de estas condiciones,

$$k < 2^{\frac{\kappa}{2+\kappa}},$$

se cumple para todo $\kappa > 0$ suficientemente pequeño dependiendo del número $k > 1$, queda ya completamente demostrado lo que se afirmó en la introducción, a saber, que $\mathsf{A}_2 \leq 4$.

Resultado. Para cada ε existe una forma cuadrática en infinitas variables y un sistema de valores x_1, x_2, $\ldots (0 \leq |x_n| \leq 1)$ de modo que $\sum |x_n|^{4+\varepsilon}$ converge mientras que la forma cuadrática para dicho sistema de valores no es absolutamente convergente. Sirve de hecho la forma Π dada al comienzo de este No. si se eligen los

$$\mu_\alpha = 2^{-\frac{\varepsilon\alpha}{\varepsilon+5}}.$$

Segunda parte: otros resultados.

6. Continuación de la primera cuestión algebraica. Para probar con técnicas de teoría de funciones la estimación servida por Bohr $\mathsf{A} \geq 2$ que mencionamos en la introducción se puede usar, acerca de la función $\varphi_1(n)$, no solo la estimación inferior utilizada hasta aquí, sino también una estimación superior. Aquel método se basaba en el conocido teorema de que la suma de los cuadrados de los módulos de los coeficientes de una serie de potencias, luego en particular también de un polinomio $c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$, es

$$|c_0|^2 + \cdots + |c_n|^2 \leq M^2,$$

siendo M el máximo del módulo del polinomio a lo largo de la circunferencia unidad, y en la observación de que es válido también el teorema análogo para polinomios de varias (en número finito) variables. Al aplicar este teorema a la forma cuadrática $\sum_{p,q=1}^{n} a_{pq}x_px_q$ como en el No. 1, resulta

$$\sum_{p,q=1}^{n} |a_{pq}| \leq M_1^2.$$

Ahora además por la desigualdad de Schwarz (ver Hellinger-Toeplitz, Math. Ann. 69, pág. 293),

$$\left(\sum_{p,q=1}^{n} |a_{pq}|\ |x_p|\ |x_q|\right)^2 \leq \sum_{p,q=1}^{n} |a_{pq}|^2 \sum_{p,q=1}^{n} \left|x_p^2\right| \left|x_q^2\right|,$$

y la segunda suma de la derecha es el cuadrado de $\sum_p \left|x_p^2\right|$. Si ahora cada $|x_p| = 1$, esta suma es igual a n, y la suma del primer miembro es M_1, luego

$$\mathsf{M}_1^2 \leq M_1^2 n^2,$$
$$\frac{\mathsf{M}_1}{M_1} \leq n.$$

Es por lo tanto $\varphi_1(n) \leq n$, mientras que antes se demostró que para los n que son potencias de 4 se tiene $\varphi_1(n) \geq n$.

Con esto la tarea no ha quedado bien terminada. Pero incluso en ese caso, si se hubiera demostrado que $\varphi_1(n) = n$, se podría, como ya mencionamos casualmente en relación con la tarea original de Bohr, no concluir que es $\mathsf{A}_2 = 4$. Al cabo, y considerando que $\varphi_1(2) = \sqrt{2}$, es probable que esto, aunque no sin esfuerzo, se pueda demostrar.

7. Solución de la segunda cuestión algebraica. Con mayor generalidad se puede resolver la segunda cuestión, *en la que se enseña que es*

$$\varphi_2(n) \leq \sqrt{n},$$

y que $\varphi_2(n) = \sqrt{n}$ *para los* n *que son potencias de* 4.

La segunda cuestión difiere de la formulación en la que se presenta muy a menudo, en que las variables pueden también tomar valores complejos. Sin embargo hemos encontrado que esta distinción no es esencial, ya que hemos demostrado el siguiente teorema general:

Si M *es el máximo del módulo de la forma bilineal* $\sum_{p,q=1}^{n} a_{pq}x_py_q$ *con coeficientes complejos arbitrarios y para valores de ambas series de variables sujetos a las condiciones*

$$\sum_{p=1}^{n} |x_p|^2 \leq 1, \quad \sum_{p=1}^{n} |y_q|^2 \leq 1,$$

y M *es el máximo de la forma* $\sum_{p,q=1}^{n} |a_{pq}|\, x_py_q$ *bajo las mismas condiciones, entonces se tiene*

$$\frac{\mathsf{M}}{M} \leq \sqrt{n}.$$

La demostración se basa en considerar, en la notación del cálculo matricial, la forma bilineal $A\overline{A}'$ y notar que $\sum |a_{pq}|^2$ es la suma de los términos diagonales de esta forma hermitiana definida. Si $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ son los n valores propios (positivos) de esta forma hermitiana, entonces es

$$\sum |a_{pq}|^2 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

Ahora bien, M^2 es igual al máximo de la forma $A\overline{A}'$ (ver Hellinger-Toeplitz, Math. Ann. 69, pág. 304 y 306 nota), y esto no es sino el mayor de los números $\lambda_1, \ldots \lambda_n$. Se tiene entonces

$$M^2 \leq \sum |a_{pq}|^2.$$

Además, la media aritmética de las cantidades $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ no es mayor que el mayor de ellos, luego

$$\frac{1}{n}\,|a_{pq}|^2 \leq M^2.$$

Finalmente vale también la misma argumentación para la forma $\sum_{p,q=1}^{n} a_{pq}x_py_q$; pero como para esta, la suma de los cuadrados de los módulos de los coeficientes tiene exactamente el mismo valor que el que tiene para $A(x,x)$, se sigue

$$\mathsf{M}^2 \leq \sum |a_{pq}|^2\,,$$

luego, por división de las dos últimas desigualdades,

$$\frac{\mathsf{M}}{M} \leq \sqrt{n},$$

como queríamos demostrar.

8. Aplicación de la segunda cuestión algebraica a la teoría de formas cuadráticas en infinitas variables.

Las formas Π_α construidas en el No. 3 se pueden usar para dar una contestación muy elemental a la pregunta de si una forma cuadrática en infinitas variables que está acotada está absolutamente acotada, es decir, si con [el módulo de] $\sum a_{pq}x_px_q$ siempre está acotada también $\sum |a_{pq}|\,x_px_q$ (ver Schur, Jour. f. Math. 140, pág. 20). A este fin se construye la forma

$$\mathsf{K} = \frac{1}{2}\Pi_1(x_1,\ldots,x_4) + \frac{1}{2^2}\Pi_2(x_{4+1},\ldots,x_{4+4^2}) + \frac{1}{2^3}\Pi_3(x_{4^2+4+1},\ldots,x_{4^2+4+4^3}) + \cdots.$$

Cada sumando individual tiene, en el sentido de la segunda cuestión, el máximo $M_2 = 1$, mientras que $\mathsf{M}_2 = 2^\alpha$, según el teorema del No. 3. Ahora bien, en general, el máximo M_2 de una suma de dos formas cuadráticas de distintas series de variables,

$$Q_1(x_1,\ldots,x_n) + Q_2(x_{n+1},\ldots,x_{n+\nu})$$

es igual al mayor de los máximos formas individuales Q_1 y Q_2. Por aplicación sucesiva de este principio resulta la acotación de la forma K, pero a la vez también la no-acotación de la forma que resulta de K cuando se sustituyen todos los coeficientes por sus módulos.

Se puede sin embargo, con los mismos medios, despachar una pregunta mucho más nítida, la de si una forma completamente continua debe estar absolutamente acotada. A este efecto se necesita, en lo que concierne a la construcción de K, solo añadir en el sumando α-ésimo un factor μ_α y elegir estos μ_α de modo que sea $\lim_{\alpha\to\infty}\mu_\alpha = 0$ pero sin que converja la serie $\sum \mu_\alpha 2^\alpha$. Los valores $\mu_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ o bien $\mu_\alpha = \frac{1}{2^\alpha}$ por ejemplo, satisfacen este requisito. Entonces esa forma modificada K' es completamente continua pero no está absolutamente acotada.

Existe una forma cuadrática real y ortogonal en infinitas variables, acotada e incluso completamente continua pero que no es absolutamente acotada. Dicha forma completamente continua no necesita entonces originar, para cada sistema de valores de las variables de suma de cuadrados convergente una serie doble absolutamente convergente.

9. Relación con un teorema de determinantes de Hadamard. Aún vamos a presentar una tercera situación algebraica en donde el valor máximo también lo proporcionan las formas Π_α del No. 3. Se trata de la pregunta de para qué determinantes la desigualdad de Hadamard

$$|a_{pq}| \leq \sqrt{n^n},$$

en el caso de ser $|a_{pq}| \leq 1$ [para todo p,q] se convierte en una igualdad. La forma ortogonal $\frac{1}{2^\alpha}\Pi_\alpha$ tiene determinante 1, luego la propia Π_α, cuyos coeficientes son todos ± 1, proporciona el determinante

$$(2^\alpha)^{4^\alpha} = \left(\sqrt{4^\alpha}\right)^{4^\alpha},$$

y así una contestación a la demanda para los n que son potencias de 4.

He mencionado esto solamente para destacar que siempre se pueden utilizar las formas Π_α con motivo de esta cuestión, y que la esencia de esta aplicación ha reposado en la observación de que las misma técnicas que se han usado en las anteriores investigaciones pueden jugar un papel en otras muy distintas.

Busemann, H. y Feller, W., Zur Differentiation der Lebesgueschen Integrale. *Fundamenta Mathematicae* **22.1** (1934), 226–256. http://eudml.org/doc/212688

Sobre la derivación de la Integral de Lebesgue.

Por

H. Busemann y W. Feller (Copenhague).

La siguiente investigación se refiere a la cuestión de saber según qué conjuntos pueden ser derivadas las funciones aditivas de conjunto absolutamente continuas [Carathéodory, p. 477] o, lo que es lo mismo, las integrales indefinidas de Lebesgue, es decir, lo que queda planteado así: Dado un sistema $\mathcal{R}$ de conjuntos medibles de medida positiva tales que para cada punto Q del espacio hay una sucesión $\{\rho_\nu\} \subset \mathcal{R}$ que se contrae a Q, ¿cómo debe ser el sistema $\mathcal{R}$ a fin de que para cada función integrable $f(P)$ y para cada punto Q fuera de un conjunto de medida nula se verifique[1]

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{m(\rho_k)} \int_{\rho_k} f(P)\, dP = f(Q)?$$

Se prueba usualmente[2] con ayuda del teorema de Vitali que el sistema formado por los cubos de lados paralelos a los ejes (o uno equivalente) es de este tipo. Además, un simple corolario muestra que se puede entonces derivar también según los conjuntos de cualquier *familia de conjuntos regular*[3] respecto del sistema manejado en primer lugar. No se sabe si es posible derivar también según algún sistema dado de conjuntos que *no es* regular con respecto a los cubos de lados paralelos a los ejes. En particular, no se sabe nada en este sentido sobre *intervalos*[4] cualesquiera[5]. Para la función

$$F(x,y) = \int_0^x \int_0^y f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

siendo $f(x,y)$ integrable, solo se puede demostrar que el cociente diferencial

$$\frac{1}{hk} \int_x^{x+h} \int_y^{y+k} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = \frac{1}{hk}\big[F(x+h,y+k) - F(x+h,y) - F(x,y+k) + F(x,y)\big]$$

tiende hacia un límite, si h y k tienden a 0 de modo que la razón $\left|\frac{h}{k}\right|$ permanezca acotada entre dos constantes positivas. Y la existencia del correspondiente límite doble no viene implicada por eso.

Cuando se trata la cuestión general acerca de la condición que deben cumplir los sistemas de conjuntos según los cuales se pueda derivar aparece una diferencia, que no ocurría en los resultados anteriores, entre el comportamiento de las integrales de funciones acotadas y el de las no acotadas. En particular se ve que las primeras se pueden derivar según los intervalos, mientras que las últimas no siempre.

El caso de integrando acotado se puede reducir al tratamiento de la integral de las funciones que solo toman los valores 0 y 1. Por lo tanto aquí la validez de la propiedad de densidad relativa a $\mathcal{R}$ es necesaria y suficiente para la diferenciabilidad. Decimos que *para $\mathcal{R}$ vale la propiedad de densidad cuando para cada conjunto medible χ, en casi todos los puntos Q del espacio y para cualquier sucesión $\{\rho_k\}$ de conjuntos de $\mathcal{R}$ que se contrae a Q, existe el límite*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m(\rho_k \cap \chi)}{m(\rho_k)}$$

[1] La notación $m(\cdot)$ significa siempre la medida de Lebesgue.

[2] Cf. por ejemplo C. Carathéodory: [Vorlesungen über] Reelle Funktionen, 2ª ed. [1927], Cap. IX.

[3] La propia definición, así como la demostración del corolario mencionado, se encuentran en la Nota al §1 de este trabajo.

[4] Entendemos aquí por *intervalo* siempre un paralelepípedo de aristas paralelas a los ejes del espacio euclídeo E^r.

[5] Para este sistema no vale el teorema de Vitali, como han demostrado Banach y H. Bohr. Cf. Carathéodory, *op. cit.*, Anhang [Apéndice: Note I., p. 689]. Por cierto que también se deduce ocasionalmente de los resultados del §4 de este trabajo.

y, a saber, es igual a 1 *cuando* $Q \in \chi$ *e igual a* 0 *en otro caso.*

Para la propiedad de densidad se puede dar un criterio, básico para lo que sigue, que es fácil de enunciar cuando se introduce la unión $\sigma_\alpha(\chi)$ de todos los conjuntos ρ de $\mathcal{R}$ en los cuales la "densidad media" de χ es mayor que un número α comprendido entre 0 y 1; es decir, para los que se cumple

$$\frac{m(\rho \cap \chi)}{m(\rho)} > \alpha.$$

Como se verá después (§1), para la validez de la propiedad de densidad resulta ser suficiente que para cada conjunto acotado y medible χ y cada α entre 0 y 1 se satisfaga una relación de la forma

$$m(\sigma_\alpha(\chi)) \leq C(\alpha) m(\chi), \tag{BF1}$$

donde $C(\alpha)$ denota una constante que solo depende de α y de $\mathcal{R}$, pero no de χ. La condición (BF1) no es necesaria en general, pero sí lo es cuando $\mathcal{R}$ contiene con cada conjunto también todos los semejantemente colocados[6]. En este caso (BF1) es equivalente a la exigencia de que, para cada conjunto χ de medida finita, el conjunto $\sigma_\alpha(\chi)$ tenga también medida finita. Resulta ahora curiosamente (§2) que el sistema de los intervalos satisface la condición (BF1) mientras que el sistema de todos los paralelepípedos rectangulares no, de manera que para aquel vale la propiedad de densidad y para este no.

Por consiguiente se pueden (§3) derivar según los intervalos las integrales indefinidas de las funciones medibles $f(x_1, \ldots, x_r)$. De aquí se sigue que la función

$$F(x_1, \ldots, x_r) = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_r} f(\xi_1, \ldots, \xi_r)\, d\xi_1 \cdots d\xi_r$$

posee, para $s \leq r$, salvo en un conjunto de medida nula, la derivada mixta

$$F_{(x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_s})}, \quad \nu_i \neq \nu_k \text{ para } i \neq k$$

en el sentido del límite s-ple (del correspondiente cociente diferencial), y que éste, para cada permutación $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ de los números $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$, es igual a

$$\frac{\partial^s F}{\partial x_{\mu_1} \cdots \partial x_{\mu_s}}.$$

No se requiere así en este caso una demostración particular de la permutabilidad del orden de las sucesivas derivaciones.

Finalmente (§4) proponemos una condición necesaria y suficiente, análoga a (BF1), para que pueda derivarse la integral indefinida de cualquier función integrable, respecto de un sistema que con cada conjunto contiene todos sus homotéticos. Se verá inmediatamente que por ejemplo los cubos y las esferas satisfacen esa condición, mientras que los intervalos no. También se dan ejemplos de funciones aditivas de conjunto absolutamente continuas que no se pueden derivar según los intervalos y para las cuales las derivadas mixtas de las funciones de punto asociadas *no* existen en general en el sentido de límites múltiples. (Cf. la *Adición durante la corrección* al final del trabajo).

§1.
Criterios para la validez de la propiedad de densidad.

Sea $\mathcal{R} = \{\rho\}$ un sistema de conjuntos abiertos acotados del espacio euclídeo r-dimensional E^r tal que para cada punto del espacio hay una sucesión $\{\rho_k\}$ de conjuntos de $\mathcal{R}$ que se contrae a él. La hipótesis de que los conjuntos ρ sean abiertos no supone una restricción esencial, ya que los resultados se transfieren sin mucho esfuerzo a sistemas de conjuntos medibles cualesquiera de medida positiva. Cuando χ es un conjunto medible, entendemos por *densidad media de* χ *en un conjunto* ρ el cociente

$$\frac{m(\chi \cap \rho)}{m(\rho)}.$$

[6]Por semejantemente colocados entendemos aquí y en lo que sigue "semejantes y semejantemente colocados" [es decir, homotéticos].

Compongamos en primer lugar el límite inferior de las densidades medias [de χ en $\{\rho_k\}$] para una sucesión cualquiera $\{\rho_k\}$ de conjuntos de $\mathcal{R}$ que se contrae a un punto dado P. El ínfimo de estos límites inferiores, extendido sobre todas las sucesiones $\{\rho_k\} \subset \mathcal{R}$ que se contraen al punto P, lo designaremos, con Lebesgue, como la *densidad inferior de χ respecto de $\mathcal{R}$ en P*. Correspondientemente llamaremos *densidad superior de χ respecto de $\mathcal{R}$ en P* al supremo de los límites superiores de las mismas sucesiones. Si en un punto estas dos densidades son iguales, hablaremos de la *densidad* [respecto de $\mathcal{R}$ en P] a secas. En particular, la densidad existe en todos aquellos puntos en los que o bien la densidad superior es igual a cero, o bien la densidad inferior es igual a 1.

Decimos entonces que *para el sistema $\mathcal{R}$ vale la propiedad de densidad, cuando para cada conjunto medible la densidad (inferior) es 1 en casi todos los puntos del conjunto, o bien, lo que es lo mismo, cuando para cada conjunto medible la densidad (superior) se anula en casi todos los puntos de su conjunto complementario.*

Introduzcamos ahora algunas notaciones: $d(\lambda)$ significa siempre el diámetro del conjunto de puntos λ; la letra N con o sin subíndice se reserva para conjuntos de medida nula. Sean $0 < \alpha < 1$, $\delta > 0$ y χ un conjunto medible. *Por $\sigma_{\alpha,\delta}(\chi)$ entendemos la unión de todos los conjuntos ρ de $\mathcal{R}$ de diámetro menor que δ en los cuales la densidad media de χ es mayor que α, para los cuales por consiguiente se cumplen las condiciones*

$$
\begin{aligned}
&1) \quad m(\rho \cap \chi) > \alpha \cdot m(\rho),\\
&2) \quad d(\rho) < \delta.
\end{aligned}
$$

Mientras que $\sigma_\alpha(\chi)$ *es*, como se ha declarado en la Introducción, *la unión de todos los conjuntos de $\mathcal{R}$ que están sujetos solo a la primera de las condiciones anteriores.*

A partir de la definición se observa que para la unión de una familia cualquiera de conjuntos medibles λ siempre se tiene

$$\sigma_{\alpha,\delta}\Big(\bigcup \lambda\Big) \supset \bigcup \sigma_{\alpha,\delta}(\lambda), \tag{BF2}$$

y además, que para $\alpha_1 \leq \alpha$, $\delta_1 \geq \delta$ y $\chi_1 \supset \chi$, siempre es

$$\sigma_{\alpha_1,\delta_1}(\chi_1) \supset \sigma_{\alpha,\delta}(\chi). \tag{BF3}$$

Según esto, la intersección $\bigcap_{\delta>0} \sigma_{\alpha,\delta}(\chi)$ para α fijo contiene a todos los puntos del espacio en los cuales la densidad superior de χ es mayor que α, y aparte de ellos, a lo sumo aquellos puntos en los cuales dicha densidad superior es igual a α.

Cuando vale la propiedad de densidad, se sigue de esto

$$\Big(\bigcap_{\delta>0} \sigma_{\alpha,\delta}(\chi)\Big) \cup N_1 = \chi \cup N_2; \tag{BF4}$$

y recíprocamente, cuando se cumple (BF4) para todo α entre 0 y 1, resulta, debido a (BF3),

$$\Big(\bigcap_{0<\alpha<1} \bigcap_{\delta>0} \sigma_{\alpha,\delta}(\chi)\Big) \cup N_3 = \chi \cup N_4,$$

es decir, la densidad superior de χ es igual a 0 en casi todos los puntos de $E^r \setminus \chi$.

Consideremos ahora una sucesión monótona decreciente de conjuntos medibles acotados χ_ν con intersección vacía, y una sucesión monótona decreciente de números positivos δ_ν que tiende a 0. Cuando vale la propiedad de densidad, para cada α entre 0 y 1 se tiene

$$m\big(\sigma_{\alpha,\delta_\nu}(\chi_\nu)\big) \to 0; \tag{BF5}$$

porque según (BF3) es, para $\nu > n$,

$$m\big(\sigma_{\alpha,\delta_\nu}(\chi_\nu)\big) \leq m\big(\sigma_{\alpha,\delta_\nu}(\chi_n)\big)$$

y según (BF4)

$$\lim_{\nu\to\infty} m\big(\sigma_{\alpha,\delta_\nu}(\chi_n)\big) = m(\chi_n),$$

por consiguiente

$$\lim_{\nu\to\infty} m\big(\sigma_{\alpha,\delta_\nu}(\chi_\nu)\big) \leq m(\chi_n)$$

para todo n, de donde se sigue (BF5) dado que $m(\chi_n) \to 0$.

La condición (BF5), necesaria por lo tanto para la validez de la propiedad de densidad, es más débil que (BF4), pero sin embargo es *suficiente*. Para [ver] esto tenemos que demostrar que, para cada conjunto medible acotado Λ, el subconjunto de puntos en los que la densidad respecto de $\mathcal{R}$ no es 1 es de medida nula. Sea λ el subconjunto de Λ en el cual la densidad inferior de Λ respecto de $\mathcal{R}$ es menor que $1-\alpha$. Tenemos que probar que cada subconjunto cerrado φ de λ tiene medida cero. Por hipótesis, a cada punto de φ se contrae una sucesión $\{\rho_i\}$ de conjuntos de $\mathcal{R}$ cumpliéndose

$$m(\varphi \cap \rho_i) \leq m(\lambda \cap \rho_i) < (1-\alpha)m(\rho_i). \tag{BF6}$$

Elegimos de entre estos conjuntos un número finito, denotémosles $\rho_1^1, \ldots, \rho_{s_1}^1$, con diámetros menores que 1, de modo que cubran φ, y pongamos $\bigcup_{i=1}^{s_1} \rho_i^1 = \gamma_1$. Una vez definidos ya $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$, elegiremos un número finito de los conjuntos que satisfacen (BF6), denotémosles $\rho_1^n, \ldots, \rho_{s_n}^n$, que estén contenidos en γ_{n-1}, cuyos diámetros sean menores que $1/n$ y que cubran φ, y pondremos $\bigcup_{i=1}^{s_n} \rho_i^n = \gamma_n$. Se tiene entonces $\gamma_n \subset \gamma_{n-1}$ y además

$$m(\varphi) \leq m(\gamma_n) = m(\varphi) + \varepsilon_n, \quad \text{donde } \varepsilon_n \to 0.$$

Los conjuntos $\chi_n = \gamma_n \setminus \varphi$ forman así una sucesión mononótona decreciente con intersección vacía. Debido a que $\rho_i^n \subset \gamma_n$, se tiene

$$m(\rho_i^n) = m(\chi_n \cap \rho_i^n) + m(\varphi \cap \rho_i^n);$$

además, según (BF6), se cumple

$$m(\varphi \cap \rho_i^n) < (1-\alpha)m(\rho_i^n),$$

luego

$$m(\chi_n \cap \rho_i^n) > \alpha \cdot m(\rho_i^n);$$

de donde se deduce que

$$\varphi \subset \sigma_{\alpha, \frac{1}{n}}(\chi_n).$$

Como los conjuntos χ_n cumplen las hipótesis para (BF5), resulta de (BF5): $m\big(\sigma_{\alpha,\frac{1}{n}}(\chi_n)\big) \to 0$, luego $m(\varphi) = 0$. Con ello hemos probado:

I. *Para el sistema $\mathcal{R}$ vale la propiedad de densidad si y solo si para cada α entre 0 y 1, para cada sucesión monótona decreciente de conjuntos medibles acotados χ_n y cada sucesión monótona decreciente de números positivos $\delta_n \to 0$, se verifica la condición* (BF5).

En particular la propiedad de densidad se cumple cuando para cada conjunto medible acotado χ se verifica la estimación

$$m(\sigma_\alpha(\chi)) \leq C(\alpha) \cdot m(\chi), \tag{BF7}$$

donde $C(\alpha)$ solo depende del sistema $\mathcal{R}$ y de α, pero no de χ. Que la condición (BF7) no tiene por qué ser necesaria en general, es trivial. Por otro lado, lo es cuando el sistema $\mathcal{R}$ contiene con cada conjunto ρ también todos los homotéticos a él. Para la prueba de esta afirmación proponemos previamente el siguiente teorema auxiliar:

Si χ es un conjunto medible acotado de medida positiva, entonces para cada $\varepsilon > 0$, en cada conjunto abierto Γ hay una familia numerable $\chi_1, \chi_2, \ldots$ de conjuntos homotéticos a χ, de modo que

$$\textit{1)} \quad m\Big(\bigcup \chi_\nu\Big) = m(\Gamma),$$

$$\textit{2)} \quad \sum m(\chi_\nu) < m(\Gamma) + \varepsilon.$$

Además los conjuntos χ_ν pueden someterse a la restricción de que sus diámetros sean menores que un número δ dado previamente[7].

Sea I un intervalo abierto que contenga a χ, y sea

$$\frac{m(\chi)}{m(I)} = a;$$

[7] Cuando χ es *nach aussen quadrierbar* [es decir, $m(\overline{\chi} \setminus \chi) = 0$ Carath., p. 289], se puede tomar $\varepsilon = 0$, lo que es un caso especial del teorema de Vitali.

se puede suponer $a < 1$, en caso contrario no hay nada que probar. Señalemos en primer lugar lo siguiente: Sea λ un subconjunto cualquiera de Γ que es unión de conjuntos homotéticos a χ, y pongamos

$$\frac{m(\lambda)}{m(\Gamma)} = q.$$

Entonces, para cada $\eta > 0$ hay en Γ una sucesión de conjuntos χ_ν homotéticos a χ y disjuntos dos a dos tales que para su unión $\Lambda = \bigcup \chi_\nu$ se verifican las dos desigualdades siguientes:

$$\text{a)} \quad \frac{m(\lambda \cup \Lambda)}{m(\Gamma)} > q + a\,\frac{1-q}{2},$$
$$\text{b)} \quad m(\lambda \cap \Lambda) < \eta.$$

Para probar esto cubramos $\Delta = \Gamma \setminus \lambda$ por un conjunto abierto Δ' de modo que sea

$$m(\Delta' \setminus \Delta) > \text{mín}\Big(\eta, a\,\frac{1-q}{2}\,m(\Gamma)\Big).$$

Podemos presentar Δ', salvo un conjunto de medida nula, como la unión de un número finito de intervalos I_ν homotéticos a I y disjuntos dos a dos. La homotecia que lleva I en I_ν, lleva χ sobre χ_ν. Sea $\Lambda = \bigcup \chi_\nu$. Se tiene entonces

$$m(\Lambda) = m\Big(\bigcup \chi_\nu\Big) = \sum m(\chi_\nu) = a \sum m(I_\nu) = a\,m(\Delta')$$

y

$$m(\lambda \cap \Lambda) \le m(\lambda \cap \Delta') < \text{mín}\Big(\eta, a\,\frac{1-q}{2}\,m(\Gamma)\Big).$$

Para probar (a), tengamos en cuenta que

$$m(\lambda \cup \Lambda) = m(\lambda) + m(\Lambda) - m(\lambda \cap \Lambda) \ge m(\lambda) + a\,m(\Delta') - a\,\frac{1-q}{2}\,m(\Gamma).$$

Considerando que $m(\lambda) = q \cdot m(\Gamma)$ y que

$$m(\Delta') \ge m(\Delta) = m(\Gamma) - m(\lambda),$$

resulta

$$m(\lambda \cup \Lambda) > \Big(q + a\,\frac{1-q}{2}\Big) m(\Gamma).$$

A partir de esta observación se deduce el teorema auxiliar como sigue:

Sea χ^1 un subconjunto de Γ homotético a χ. Supongamos por inducción que esté definido ya el conjunto χ^n, y a saber, como la unión de ciertos subconjuntos χ^n_ν de Γ homotéticos a χ, tales que

$$\sum_\nu m(\chi^n_\nu) < m(\chi^n) + \Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big)\varepsilon. \tag{BF8}$$

Sea

$$q_n = \frac{m(\chi^n)}{m(\Gamma)}.$$

Aplicamos el método de la observación anterior a

$$\lambda = \chi^n, \quad q = q_n, \quad \eta = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

De este modo queda determinado un conjunto $\Lambda = \bigcup \chi_\nu$, donde los conjuntos χ_ν son homotéticos a χ, y dado que $\chi_\nu \cap \chi_\mu = \emptyset$ para $\nu \neq \mu$ y (BF8),

$$\sum_\nu m(\chi^n_\nu) + \sum m(\chi_\nu) \le m(\chi^n) + \Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big)\varepsilon + m(\Lambda) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},$$

así que $\chi^{n+1} = \chi^n \cup \Lambda$ cumple la desigualdad (BF8) con $n+1$ y además la relación

$$m(\chi^{n+1}) > \Big(q_n + a\,\frac{1-q_n}{2}\Big) m(\Gamma).$$

Si ponemos de nuevo

$$q_{n+1} = \frac{m(\chi^{n+1})}{m(\Gamma)},$$

entonces por construcción es

$$q_{n+1} > q_n + a\,\frac{1 - q_n}{2}.$$

Los números q_n forman una sucesión monótona creciente que tiende evidentemente a 1. El conjunto límite de los χ^n por lo tanto tiene la misma medida que Γ; es la unión de subconjuntos de Γ homotéticos a χ que, según (BF8), satisfacen también la segunda condición del teorema auxiliar. Finalmente es claro que a lo largo de la construcción completa nos podríamos limitar a considerar conjuntos homotéticos a χ cuyos diámetros fueran menores que δ. Con esto el teorema auxiliar queda demostrado.

Nuestra afirmación acerca de la desigualdad (BF7) consiste en lo siguiente: Cuando el sistema $\mathcal{R}$ contiene con cada conjunto ρ también a todos sus homotéticos, y *no* se satisface la estimación (BF7), entonces la propiedad de densidad *no* vale para $\mathcal{R}$. Veamos que, bajo las hipótesis especificadas, dentro de cada intervalo abierto I se puede dar un conjunto medible χ verificando

$$m(\chi) < \frac{2}{3}\, m(I)$$

que tiene densidad superior positiva respecto de $\mathcal{R}$ en todos los puntos de I.

Como la desigualdad (BF7) no se cumple para $\mathcal{R}$, para cada $\alpha > 0$ fijo y cada número positivo C existe un conjunto medible acotado χ tal que

$$m(\sigma_\alpha(\chi)) > C \cdot m(\chi).$$

Sea $\{\chi_n\}$ una sucesión de tales conjuntos verificando

$$m(\sigma_\alpha(\chi_n)) > 4^n \cdot m(\chi_n).$$

El conjunto $\sigma_\alpha(\chi_n)$ es la unión de los conjuntos ρ del sistema $\mathcal{R}$ en los cuales la densidad media de χ_n es mayor que α. Podemos escoger un número finito de entre ellos de manera que su unión π_n esté acotada y que para su medida se cumpla la desigualdad

$$m(\pi_n) > 4^n \cdot m(\chi_n).$$

Ahora construimos para cada n, según nuestro teorema auxiliar en I, una sucesión de conjuntos π_n^ν homotéticos a π_n, cuyos diámetros sean $d(\pi_n^\nu) < 1/n$ y para los que se verifique

$$m(I) = m\Big(\bigcup_\nu \pi_n^\nu\Big) \leq \sum_\nu m(\pi_n^\nu) < 2 \cdot m(I).$$

Sea ahora χ_n^ν la imagen de χ_n en π_n^ν: y además sean

$$\pi^n = \bigcup_\nu \pi_n^\nu, \quad \chi^n = \bigcup_\nu \chi_n^\nu.$$

Se tiene entonces

$$m(\pi^n) = m(I),$$
$$m(\chi^n) \leq \sum_\nu m(\chi_n^\nu) < \frac{1}{4^n} \sum_\nu m(\pi_n^\nu) < \frac{2}{4^n}\, m(I).$$

Para el conjunto $\chi = \bigcup_n \chi^n$ se tiene por tanto

$$m(\chi) < \frac{2}{3}\, m(I);$$

pero este conjunto tiene densidad superior respecto de $\mathcal{R}$ mayor o igual que α en casi todo punto del intervalo I. Cada conjunto π_n^ν es unión de conjuntos ρ del sistema $\mathcal{R}$ en los cuales χ_n^ν, y dado que $\chi \supset \chi_n \supset \chi_n^\nu$, con mayor razón el conjunto χ, tiene densidad media mayor que α. Ahora, para cada n, casi todos los puntos de I están en algún $\pi_n^{\nu_n}$. Dado que $d(\pi_n^\nu) < 1/n$, de hecho a casi todo punto de I se contrae una sucesión de conjuntos ρ de nuestro sistema, en los cuales la densidad media de χ es mayor que α. Hemos demostrado con ello el siguiente teorema:

II. *Supongamos que con cada conjunto ρ pertenezcan también al sistema $\mathcal{R}$ todos los conjuntos homotéticos a ρ; entonces para la validez de la propiedad de densidad respecto de $\mathcal{R}$ es necesario y suficiente que para cada α entre 0 y 1 y para todo conjunto medible y acotado χ se satisfaga la desigualdad*

$$m(\sigma_\alpha(\chi)) \leq C(\alpha) \cdot m(\chi),$$

donde $C(\alpha)$ solo depende de α y del sistema $\mathcal{R}$, pero no de χ.

Criterio que admite esta otra versión:

II$'$. *Para el sistema $\mathcal{R}$, que contiene con cada conjunto todos los homotéticos a él, es válida la propiedad de densidad si y solo si para cada α entre 0 y 1 y cada conjunto medible χ de medida finita*[8] *también el conjunto $\sigma_\alpha(\chi)$ tiene medida finita.*

Sea χ un conjunto de medida finita y tal que $m(\sigma_\alpha(\chi)) = \infty$. Para un C determinado elegimos, entre los conjuntos ρ que forman $\sigma_\alpha(\chi)$ —es decir, para los que se cumple $m(\rho \cap \chi) > \alpha \cdot m(\rho)$—, un número finito de ellos, $\rho_1, \ldots, \rho_n$, de modo que sea

$$m(\rho_1 \cup \cdots \cup \rho_n) > C \cdot m(\chi),$$

y denotemos por χ' la intersección $\chi \cap \left(\bigcup_{i=1}^n \rho_i\right)$. Entonces χ' está acotado, y por otra parte $\sigma_\alpha(\chi') \supset \rho_1 \cup \cdots \cup \rho_n$, así que

$$m(\sigma_\alpha(\chi')) \geq m(\rho_1 \cup \cdots \cup \rho_n) \geq C \cdot m(\chi) \geq C \cdot m(\chi').$$

Ahora demostramos que la condición es necesaria. Si la propiedad de densidad no es válida respecto de $\mathcal{R}$, entonces existe para cierto α apropiado una sucesión de conjuntos acotados medibles χ_n para los cuales es

$$m(\sigma_\alpha(\chi_n)) > n^2 \cdot m(\chi_n).$$

Vamos a denotar por χ_n' un conjunto homotético a χ_n con $m(\chi_n') = 1/n^2$, y por s_n un subconjunto acotado de $\sigma_\alpha(\chi')$ para el que se verifique igualmente

$$m(s_n) > n^2 \cdot m(\chi_n') = 1.$$

Desplacemos los conjuntos χ_n' de modo que los correspondientes conjuntos s_n sean disjuntos dos a dos. Entonces se tiene

$$m\Big(\bigcup \chi_n'\Big) \leq \sum m(\chi_n') = \sum \frac{1}{n^2},$$

$$m\Big(\bigcup s_n\Big) = \infty$$

y[9]

$$\sigma_\alpha\Big(\bigcup \chi_n'\Big) \supset \bigcup \sigma_\alpha(\chi_n') \supset \bigcup s_n.$$

Nota. Cuando la propiedad de densidad es válida para un sistema $\mathcal{R}$, también es válida, según Lebesgue, para todas las familias de conjuntos regulares respecto del sistema $\mathcal{R}$. La familia de conjuntos

[8]Lo esencial es que ahora χ no se supone acotado.

[9]Existe un sistema $\mathcal{R}$ para el cual se cumple el criterio I, pero no el II. En §2 se mostrará que esto es cierto para el sistema de todos los rectángulos ρ del plano para los que la proporción entre los lados es mayor o igual que $\frac{1}{1+t}$, siendo t la distancia del origen al centro de ρ. Este sistema tiene en efecto la propiedad de satisfacer la condición (BF7) en cada dominio acotado; existen también ejemplos sencillos de sistemas que cumplen (BF5) y donde hay de todos modos un conjunto de medida positiva tal que la condición (BF7) no se cumple en ningún entorno de un punto de este conjunto.

π se denomina *regular* respecto de $\mathcal{R}$ cuando a cada punto P se contrae una sucesión de conjuntos $\{\pi_k\}$ de π con la propiedad de que cada π_k está contenido en un ρ_k de $\mathcal{R}$ y se cumple

$$\frac{m(\pi_k)}{m(\rho_k)} > \theta(P) > 0,$$

donde $\theta(P)$ es una función positiva arbitraria que depende de P pero no de la sucesión particular $\{\pi_k\}$ [que se contraiga a P]. Algo más en general la familia de conjuntos π se denomina *regular en P respecto de $\mathcal{R}$*, cuando para cada sucesión de conjuntos $\{\pi_k\}$ de π que converge hacia P existe una sucesión $\{\rho_k\}$ de $\mathcal{R}$ contrayéndose a P, tal que

$$\rho_k \supset \pi_k, \quad \frac{m(\pi_k)}{m(\rho_k)} > \theta > 0.$$

(A diferencia de antes, ahora no se requiere $P \in \pi_k$).

Cuando para un conjunto medible arbitrario χ y y una sucesión $\{\rho_k\}$ que se contrae a P se cumple

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m(\chi \cap \rho_k)}{m(\rho_k)} = 1,$$

también se cumple

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m(\chi \cap \pi_k)}{m(\pi_k)} = 1.$$

Porque, si C es el conjunto complementario de χ, se tiene

$$1 - \frac{m(\chi \cap \pi_k)}{m(\pi_k)} = \frac{m(C \cap \pi_k)}{m(\pi_k)} \leq \frac{m(C \cap \rho_k)}{m(\rho_k)} \cdot \frac{m(\rho_k)}{m(\pi_k)} \leq \frac{1}{\theta}\Big(1 - \frac{m(\chi \cap \rho_k)}{m(\rho_k)}\Big) \to 0.$$

Por consiguiente, cuando un conjunto medible tiene densidad 0 o 1 en un punto P cualquiera del espacio respecto de $\mathcal{R}$, tendrá en ese punto la misma densidad para toda familia de conjuntos regular respecto de $\mathcal{R}$ en P.

§2.

Sistemas particulares de conjuntos para los que vale, o no vale, la propiedad de densidad.

A. Los intervalos.

Sea $\mathcal{R} = \{\rho\}$ ahora el sistema de todos los intervalos [ver la nota 4) a pie] abiertos de E^r. Según (BF7), la propiedad de densidad vale respecto de los intervalos si podemos demostrar:

Para cada conjunto medible acotado χ de E^r se cumple

$$m(\sigma_\alpha(\chi)) \leq 2^{r^2} \cdot \alpha^{-r} \cdot m(\chi). \tag{BF9}$$

Haremos la demostración por inducción sobre r. Antes señalemos que χ puede considerarse un conjunto *abierto*, porque si (BF9) se cumple para conjuntos abiertos, se deduce la misma relación para conjuntos medibles arbitrarios mediante paso al límite.

1). Sea $r = 1$ y γ un conjunto abierto acotado de la recta E^1. El conjunto $\sigma_\alpha(\gamma)$ es la unión de los intervalos abiertos ρ tales que

$$\alpha \cdot m(\rho) < m(\rho \cap \gamma).$$

De estos ρ elegimos un número finito, pongamos $\rho_1, \ldots, \rho_k$, verificando

$$m(\sigma_\alpha(\gamma)) - m\Big(\bigcup_{i=1}^{k} \rho_i\Big) < \varepsilon.$$

Si tres de estos ρ_i tuvieran una intersección no vacía, al menos uno de ellos estaría contenido en la unión de los otros dos. Según esto podemos suponer $\bigcup_{i=1}^{k} \rho_i$ como la unión de ciertos ρ_i, pongamos que ρ_{i_1},

$\ldots, \rho_{i_s}$, de modo que cada punto de $\sigma_\alpha(\gamma)$ se encuentra a lo sumo en dos de los ρ_{i_k}. Entonces también cada punto de $\gamma \cap \left(\bigcup \rho_i\right)$ pertenece a lo sumo a dos de los conjuntos abiertos $\gamma \cap \rho_{i_k}$; por consiguiente

$$m(\sigma_\alpha(\gamma)) - \varepsilon < m\Big(\bigcup_{i=1}^{k} \rho_i\Big) \leq \sum_{k=1}^{s} m(\rho_{i_k}) \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{s} m(\gamma \cap \rho_{i_k}) \leq \frac{2}{\alpha} m\Big(\bigcup_{k=1}^{s} \gamma \cap \rho_{i_k}\Big) \leq \frac{2}{\alpha} m(\gamma).$$

Una consideración más profunda proporciona[10] la estimación exacta

$$m(\sigma_\alpha(\gamma)) \leq \Big(\frac{2}{\alpha} - 1\Big) m(\gamma),$$

que no necesitamos.

2) Para el resto de la demostración introduciremos unas notaciones: $x_1, \ldots, x_r, z$ serán las coordenadas en E^{r+1}, E^r el $(x_1, \ldots, x_r)$-plano. $m^1(\ )$, $m^r(\ )$, $m^{r+1}(\ )$ designarán respectivamente las medidas lineal, r-dimensional y $(r+1)$-dimensional. Si λ es un conjunto arbitrario de E^{r+1}, λ_t designará la intersección de λ con el plano $z = t$, y λ^P la intersección de λ con la recta paralela al eje z que pasa por el punto P. Si λ_t es m^r-medible y λ^P es m^1-medible, entonces $\sigma^r_\beta(\lambda_t)$ es la unión de todos los intervalos r-dimensionales e del plano $z = t$ tales que

$$m^r(\lambda_t \cap e) > \beta \cdot m^r(e),$$

y $\sigma^1_\beta(\lambda^P)$ la unión de todos los intervalos lineales i de la recta paralela al eje z pasando por P tales que

$$m^1(\lambda^P \cap i) > \beta \cdot m^1(i).$$

3) Supongamos ya demostrado (BF9) para el índice r. Sea γ un conjunto abierto acotado arbitrario de E^{r+1}. Decimos que $\sigma_\alpha(\gamma)$ está contenido en el conjunto Γ construido de la siguiente manera: sustituimos cada γ_t por el conjunto $\sigma^r_{\alpha/2}(\gamma_t)$, y formamos

$$\Gamma_* = \bigcup_{t=-\infty}^{\infty} \sigma^r_{\alpha/2}(\gamma_t).$$

El conjunto Γ_* es abierto[11]. A continuación sustituimos cada sección lineal Γ^P_* de Γ_* por el conjunto $\sigma^1_{\alpha/2}(\Gamma^P_*)$ y definimos

$$\Gamma = \bigcup_{P \in E^r} \sigma^1_{\alpha/2}(\Gamma^P_*).$$

De nuevo el conjunto Γ es abierto. Para ver que en efecto $\sigma_\alpha(\gamma) \subset \Gamma$, hay que probar que cada intervalo $(r+1)$-dimensional ρ que cumple

$$m^{r+1}(\gamma \cap \rho) > \alpha \cdot m^{r+1}(\rho)$$

está contenido en Γ. Sea j el intervalo proyección de ρ en el eje z, sea ξ el conjunto proyección de ρ en E^r, y además sea e cualquier subconjunto del intervalo j para el cual se cumpla

$$m^r(\gamma_t \cap \rho_t) > \frac{\alpha}{2} \cdot m^r(\rho_t) \qquad [t \in e]. \tag{BF10}$$

[10] Cf. por ejemplo H. Lebesgue: Ann. de l'école Norm. sup. (3) **27**, 1910.

[11] A saber, si $Q \in E_t$ es un punto de Γ_*, existe un intervalo r-dimensional ρ_t en E_t tal que

$$m^r(\gamma_t \cap \rho_t) > \frac{\alpha}{2}\, m^r(\rho_t).$$

Ahora bien, $\gamma_t \cap \rho_t$ consta de puntos interiores de γ; para cada punto de $\gamma_t \cap \rho_t$ existe entonces un intervalo $(r+1)$-dimensional que lo contiene y que está contenido en γ. De entre estos intervalos buscamos un número finito de ellos, $I^1, \ldots, I^h$, cuya unión cumpla todavía también la desigualdad

$$m^r(\rho_t \cap (I^1 \cup \cdots \cup I^h)_t) > \frac{\alpha}{2}\, m^r(\rho_t).$$

Las secciones $(I^1 \cup \cdots \cup I^h)_\tau$ son congruentes para $|t - \tau|$ suficientemente pequeño, así que también los correspondientes $\sigma^r_{\alpha/2}((I^1 \cup \cdots \cup I^h)_\tau)$ son congruentes. Por otro lado, todos ellos están contenidos en Γ_*, de manera que entonces, junto con $Q \in \rho_t$, todo un entorno suyo está contenido en Γ_*.

El conjunto e es abierto, y de hecho se verifica

$$m^1(e) > \frac{\alpha}{2} \cdot m^1(j); \tag{BF11}$$

porque, dado que $m^r(\rho_t) = m^r(\xi)$ para $t \in j$ y $m^r(\gamma_t \cap \rho_t) \leq \frac{\alpha}{2}\, m^r(\rho_t)$ para $t \in j \setminus e$, se tiene

$$\begin{aligned}\alpha \cdot m^1(j) \cdot m^r(\xi) = \alpha \cdot m^{r+1}(\rho) < m^{r+1}(\rho \cap \gamma) &= \int_{j\setminus e} m^r(\gamma_t \cap \rho_t)\, dt + \int_e m^r(\gamma_t \cap \rho_t)\, dt \\ &\leq \frac{\alpha}{2} \int_{j\setminus e} m^r(\rho_t)\, dt + \int_e m^r(\rho_t)\, dt \leq m^r(\xi)\Big(\frac{\alpha}{2} m^1(j) + m^1(e)\Big).\end{aligned}$$

Según (BF10), para $t \in e$ se cumple

$$\sigma^r_{\alpha/2}(\gamma_t) \supset \sigma^r_{\alpha/2}(\gamma_t \cap \rho_t) \supset \rho_t,$$

por tanto

$$\bigcup_{t\in e} \rho_t \subset \Gamma_*. \tag{BF12}$$

Cada paralela al eje z por un punto P de ξ corta a $\bigcup_{t\in e} \rho_t$ en un conjunto congruente a e. Por tanto, según (BF11) y (BF12) resulta, entre las secciones ρ^P y $\Gamma^P_* \cap \rho^P$, la relación

$$\frac{\alpha}{2} \cdot m^1(\rho^P) = \frac{\alpha}{2} \cdot m^1(j) < m^1(e) \leq m^1(\Gamma^P_* \cap \rho^P) \quad (P \in \xi).$$

Por lo tanto se tiene

$$\rho^P \subset \sigma^1_{\alpha/2}(\Gamma^P_*) \quad \text{ para } P \in \xi$$

y, con ello,

$$\rho = \bigcup_{P\in\xi} \rho^P \subset \bigcup_{P\in\xi} \sigma^1_{\alpha/2}(\Gamma^P_*) \subset \Gamma,$$

conque también $\sigma_\alpha(\gamma) \subset \Gamma$.

4) Vamos a ver ahora que

$$m^{r+1}(\Gamma) \leq 2^{(r+1)^2} \cdot \alpha^{-(r+1)} \cdot m^{r+1}(\gamma).$$

Por hipótesis de inducción es

$$m^r\big(\sigma^r_{\alpha/2}(\gamma_t)\big) \leq \frac{2^{r^2} \cdot 2^r}{\alpha^r} \cdot m^r(\gamma_t),$$

así que

$$m^{r+1}(\Gamma_*) = \int_{-\infty}^{\infty} m^r\big(\sigma^r_{\alpha/2}(\gamma_t)\big)\, dt \leq 2^{r^2+r} \cdot \alpha^{-r} \cdot m^{r+1}(\gamma).$$

Además se tiene, como se mostró en el paso 1),

$$m^1\big(\sigma^1_{\alpha/2}(\Gamma^P_*)\big) \leq \frac{4}{\alpha}\, m^1(\Gamma^P_*),$$

por tanto

$$m^{r+1}(\sigma_\alpha(\gamma)) \leq m^{r+1}(\Gamma) = \int_{E^r} m^1\big(\sigma^1_{\alpha/2}(\Gamma^P_*)\big)\, dP \leq \frac{4}{\alpha}\, m^{r+1}(\Gamma_*) \leq 2^{(r+1)^2} \cdot \alpha^{-(r+1)} \cdot m^{r+1}(\gamma).$$

Con ello (BF9) queda probado, y hemos demostrado:

Respecto del sistema de todos los paralelepípedos de aristas paralelas a los ejes de E^r es válida la propiedad de densidad.

Aquí no es esencial, como queda de manifiesto en la prueba, que los ejes sean mutuamente perpendiculares, de modo que la propiedad de densidad sigue siendo válida para el sistema de los paralelepípedos que son semejantes a uno fijo.

Más en general, se demuestra fácimente, [lo enunciamos] por ejemplo en el plano, que *la propiedad de densidad es válida para el sistema de todos los polígonos convexos cuyos lados son paralelos a un número finito fijo de direcciones dadas.*

B. Primer ejemplo de un sistema para el que no es válida la propiedad de densidad.

Es muy fácil de manejar el sistema de todos los conjuntos del plano con forma de letra Γ, que están compuestos por dos rectángulos de lados paralelos a los ejes:

$$\rho = \{(x,y)\colon x_0 < x < X_0,\ y_0 < y < Y_0;\ X_0 < x < X_1,\ y_0 < Y_1 < y < Y_0\}.$$

Si se considera el cuadrado unidad W, se ve sin dificultad que para $0 < \alpha < 1$ el conjunto $\sigma_\alpha(W)$ contiene la semibanda completa $0 < y < 1$, $x > 0$. Como nuestro sistema con cada conjunto contiene a todos los homotéticos al mismo, se sigue inmediatamente del criterio II′ que no es válida en él la propiedad de densidad.

C. El sistema de todos los paralelepípedos.

Ahora demostraremos que la propiedad de densidad no es válida para el sistema de todos los rectángulos del plano, de lo cual se deduce inmediatamente el hecho correspondiente para todas las dimensiones superiores.

Como el sistema con cada conjunto contiene también a todos los homotéticos al mismo, según II′ es suficiente dar un conjunto χ de medida finita para el cual se tenga[12]

$$m\big(\sigma_{\frac{1}{2}}(\chi)\big) = \infty$$

1) Sea ABC un triángulo abierto. Duplicamos los lados AB y AC prolongándolos más allá de B y C y obtenemos de esa manera los puntos B' y C'. Entonces, para cada punto Q del triángulo abierto $AB'C'$, más de la mitad del segmento QA está dentro de ABC; entonces hay un rectángulo abierto que contiene Q, un par de cuyos lados es paralelo a QA, la mitad de cuya área [al menos] está cubierta por ABC. Por lo tanto

$$AB'C' \subset \sigma_{\frac{1}{2}}(ABC).$$

La siguiente construcción da una sucesión de triángulos $A_\nu B_\nu C_\nu$ cuya unión tiene medida finita, pero la unión de los correspondientes triángulos $A_\nu B'_\nu C'_\nu$ va a tener medida infinita.

2) Se designa con D el triángulo abierto ABC (ver la Figura), cuya base BC está en el eje x y el vértice A en el semiplano superior. Sea h la longitud de la altura y a la de la base BC; los puntos B' y C' tienen el mismo significado que arriba en 1).

Sea $0 < h' < h$. Cortamos las rectas $y = h + h'$, $y = h - h'$ y $y = -(h + h')$ con las rectas AB y AC. Denominamos los puntos de intersección, en el orden que se muestra en la Figura, P, Q, R, S, B'', C''. Las rectas paralelas PQ y RS cortan los segmentos BC y $B''C''$ en U, V y U'', V'' respectivamente. Designaremos a los triángulos abiertos PUC y SVB como D_1 y D_2.

Haremos el siguiente uso de esta construcción:

La altura de los triángulos D_1 y D_2 es $h+h'$. La longitud del segmento QR es $\frac{h'}{h}\cdot a$. Los dos triángulos SAR y PAQ juntos forman la mitad del paralelogramo $PQRS$, y por lo tanto

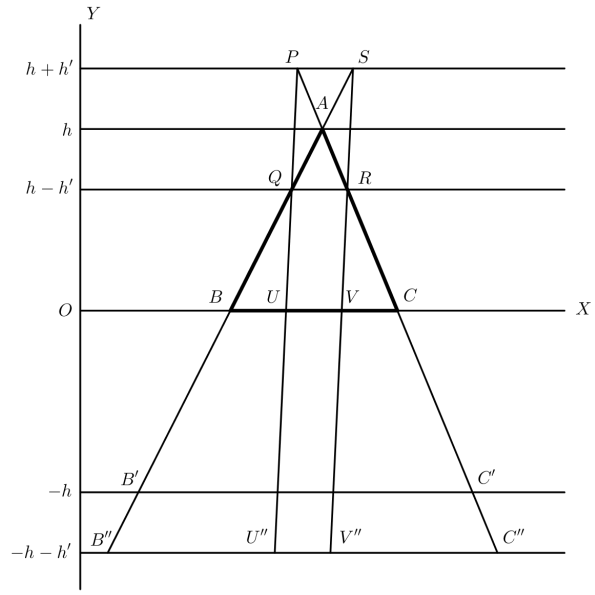
$$m(D_1 \cup D_2) - m(D) = h' \cdot \frac{h'}{h}\, a.$$

La suma de las longitudes de las bases BV y CU de D_1 y D_2 es

$$a + \frac{h'}{h}\, a = \frac{a}{h} \cdot (h + h').$$

La unión de los triángulos $SB''V''$ y $PU''C''$ correspondientes a D_1 y D_2 contiene al $AB''C''$. El área del trapecio $B'C'C''B''$ es mayor que $2a \cdot h'$. Para lo que sigue es esencial la consideración de que esta área crece linealmente con h', mientras que $m(D_1 \cup D_2) - m(D)$ es proporcional a ${h'}^2$.

[12]El siguiente ejemplo es la recreación de una construcción que ha hecho O. Perron para simplificar la solución que dio Besicovitch al problema de Kakeya (ver Math. Zeitschr. **28**, 1928, 383/6). Casualmente la misma sirve también para nuestros propósitos.



3) Comenzamos desde la configuración que acabamos de describir y ponemos, para proceder por inducción (ν en a^ν y otros significa siempre un superíndice):

$$D = \Delta^1 = \chi^1, \quad a = a^1;$$
$$D_1 = \Delta_1^2, \quad D_2 = \Delta_2^2, \quad \Delta_1^2 \cup \Delta_2^2 = \chi^2;$$
$$h = h^1, \quad B' = B^1, \quad C' = C^1, \quad B'' = B^2, \quad C'' = C^2.$$

Además tomemos en particular $h' = \frac{h}{2}$, de modo que sea $h^2 = h + h' = \frac{3}{2}h$. Denotemos la base del triángulo Δ_k^i con a_k^i. Supongamos que se hayan definido ya los triángulos

$$\Delta_k^n, \quad k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}.$$

Se establece que sea $\chi^n = \bigcup_k \Delta_k^n$. La base de Δ_k^n está en el eje x y su longitud es a_k^n. Los triángulos Δ_k^n tiene todos la misma altura h^n y podemos suponer ciertas las siguientes ecuaciones (correctas para $n = 1$ y $n = 2$):

a) $h^n = h^1\Big(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}\Big)$,

b) $a_1^n + a_2^n + \ldots + a_{2^{n-1}}^n = a^1\,\dfrac{h^n}{h^1}$,

c) $m(\chi^n) = m(\Delta_1^n \cup \ldots \cup \Delta_{2^{n-1}}^n) \le a^1 \cdot h^1\Big(1 + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}\Big) - \dfrac{a^1 \cdot h^1}{2}$,

d) El conjunto $\sigma_{\frac{1}{2}}(\chi^n)$ contiene al triángulo AB^nC^n, siendo B^n y C^n los puntos de intersección de las rectas AB y AC con $y = -h^n$.

El paso $(n+1)$-ésimo consiste en lo siguiente: aplicamos la construcción de 2) en cada uno de los triángulos Δ_k^n, tomando ahora $h' = \frac{h^1}{n+1}$. Los dos triángulos D_1 y D_2 se corresponden ahora con Δ_{2k-1}^{n+1} y Δ_{2k}^{n+1}, de bases a_{2k-1}^{n+1} y a_{2k}^{n+1}. Denotamos su altura común por h^{n+1}. Se tiene

$$h^{n+1} = h^n + h' = h^1\Big(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\Big).$$

Vamos a probar que también se cumplen para el índice $n+1$ las relaciones b), c) y d). Pongamos de nuevo $\chi^{n+1} = \bigcup_{k=1}^{2^n} \Delta_k^{n+1}$; se tiene, igual que se demuestra en 2),

$$a_{2k-1}^{n+1} + a_{2k}^{n+1} = \frac{a_k^n}{h^n}\, h^{n+1},$$

por tanto

$$\sum_{k=1}^{2^n} a_k^{n+1} = \frac{h^{n+1}}{h^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_k^n = a^1 \cdot \frac{h^{n+1}}{h^1}.$$

Además es

$$m(\Delta_{2k-1}^{n+1} \cup \Delta_{2k}^{n+1}) - m(\Delta_k^n) = \Big(\frac{h^1}{n+1}\Big)^2 \cdot \frac{a_k^n}{h^n},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} m(\chi^{n+1}) &= m\left(\bigcup_{k=1}^{2^n} \Delta_k^{n+1}\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \Delta_k^n\right) + m\left(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left[(\Delta_{2k-1}^{n+1} \cup \Delta_{2k}^{n+1}) \setminus \Delta_k^n\right]\right) \\ &\leq a^1 \cdot h^1\Big(1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\Big) - \frac{a^1 \cdot h^1}{2} + \Big(\frac{h^1}{n+1}\Big)^2 \cdot \frac{1}{h^n} \cdot \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_k^n \\ &= a^1 \cdot h^1\Big(1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2}\Big) - \frac{a^1 \cdot h^1}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente, sean B^{n+1} y C^{n+1} los puntos de intersección de la recta $y = -h^{n+1}$ con las rectas AB y AC. Es evidente que $\bigcup_{k=1}^{2^n} \sigma_{\frac{1}{2}}(\Delta_k^{n+1})$ contiene al triángulo completo $AB^{n+1}C^{n+1}$, así que también

$$AB^{n+1}C^{n+1} \subset \sigma_{\frac{1}{2}}\left(\bigcup_{k=1}^{2^n} \Delta_k^{n+1}\right) = \sigma_{\frac{1}{2}}(\chi^{n+1}).$$

Con esto los conjuntos χ^n están definidos para todo n y, dado que $\chi^n \subset \chi^{n+1}$, se tiene, para $\chi = \lim \chi^n$,

$$m(\chi) = \lim m(\chi^n) \leq a^1 h^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{a^1 h^1}{2}.$$

Por otra parte se tiene

$$\sigma_{\frac{1}{2}}(\chi^n) \subset \sigma_{\frac{1}{2}}(\chi),$$

y como $\sigma_{\frac{1}{2}}(\chi^n)$ contiene el triángulo AB^nC^n, cuya altura

$$h^1 + h^n = h^1\left(1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\right)$$

tiende a ∞, el sector interior completo del ángulo formado por las semirrectas AB y AC está contenido en $\sigma_{\frac{1}{2}}(\chi)$. Hemos encontrado así:

Para el sistema de todos los paralelepípedos rectangulares de E^r $(r \geq 2)$ no es válida la propiedad de densidad.

Notas.

a) La manera en que concluimos la demostración de la necesidad de la condición (BF7) proporciona un procedimiento para construir, a partir de los conjuntos χ^n, un conjunto medible acotado que tiene densidad positiva respecto del sistema de los rectángulos en un conjunto de medida positiva disjunto con él.

b) Refiriéndonos de nuevo a 1) y 2), nos damos cuenta de que cada punto del triángulo $AB^\nu C^\nu$ está en un rectángulo que tiene dos lados paralelos a uno de los lados del ángulo BAC. Si (W) es un conjunto de rectas que pasan por A que es denso en BAC, este rectángulo también se puede elegir de modo que el par de lados mencionado sea paralelo a una dirección conveniente de (W). Como el ángulo BAC no está sometido a ninguna restricción, vemos que:

La propiedad de densidad no es válida siquiera respecto del sistema de los rectángulos que tienen dos de sus lados paralelos a una cualquiera de las rectas de un conjunto de rectas denso en un sector angular arbitrario.

§3.
La derivación de las integrales indefinidas con integrando acotado.

La función de conjunto $\varphi(\chi)$ se dice derivable en el punto P respecto de $\mathcal{R}$, cuando para cada sucesión $\{\rho_k\}$ de $\mathcal{R}$ que se contrae a P existe el límite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varphi(\rho_k)}{m(\rho_k)}.$$

Suponemos de entrada que para el sistema $\mathcal{R}$ vale la propiedad de densidad, y queremos averiguar qué se puede concluir de ello sobre la derivabilidad de las funciones de conjunto aditivas absolutamente continuas o, lo que es lo mismo[13], de las integrales indefinidas de Lebesgue. La propia propiedad de densidad responde a esa pregunta para las funciones medibles que solo toman los valores 0 y 1.

Sea $f(P)$ una función integrable y $M_{\alpha,\beta}$, $\alpha < \beta$, el conjunto de los puntos para los cuales es $\alpha \leq f(P) < \beta$,

$$M_{\alpha,\beta} = \{P \colon \alpha \leq f(P) < \beta\}.$$

Sea $N_{\alpha,\beta}$ el conjunto de los puntos de $M_{\alpha,\beta}$ en los que la densidad inferior de $M_{\alpha,\beta}$ es menor que 1. $N_{\alpha,\beta}$ tiene medida cero. Pongamos

$$N_f = \bigcup_{\alpha<\beta} N_{\alpha,\beta},$$

donde (α,β) recorre todos los pares de números racionales que cumplen $\alpha < \beta$.

Como una sencilla *consecuencia de la propiedad de densidad* resulta: *Si $f(P)$ es acotada, entonces la integral $\int_\chi f(P)\cdot dP$ es derivable en todo punto Q que no pertenece al conjunto de medida nula N_f, y su derivada allí tiene el valor $f(Q)$.*

Pues sea, a saber, $|f(P)| < C$, $\alpha < \beta$ números racionales, Q un punto de $M_{\alpha,\beta}$ que no pertenece a N_f; sea $M'_{\alpha,\beta}$ el conjunto complementario de $M_{\alpha,\beta}$ y ρ_k una sucesión arbitraria de $\mathcal{R}$ que se contrae a Q. Entonces es

$$-C\cdot m(M'_{\alpha,\beta}\cap\rho_k) + \alpha\cdot m(M_{\alpha,\beta}\cap\rho_k) \leq \int_{\rho_k} f(P)\,dP \leq \beta\cdot m(M_{\alpha,\beta}\cap\rho_k) + C\cdot m(M'_{\alpha,\beta}\cap\rho_k),$$

de lo que sigue

$$\alpha \leq \overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\int_{\rho_k} f(P)\,dP}{m(\rho_k)} \leq \beta.$$

Según esto, la integral de una función acotada es derivable, en particular, respecto de los intervalos. Podemos formular este resultado, en la forma acostumbrada, como un teorema acerca de la función de punto

$$F(x_1,\ldots,x_r) = \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\cdots\int_0^{x_r} f(X)\,dX, \quad |f(x)| < C.$$

Consideremos los cocientes diferenciales mixtos de orden r de la función $F(x_1,\ldots,x_r)$ en el punto $X = (x_1,\ldots,x_r)$; se pueden escribir en la forma integral

$$\frac{\Delta^r F(x_1,\ldots,x_r)}{h_1\cdots h_r} = \frac{1}{h_1\cdots h_r}\int_0^{x_1+h_1}\cdots\int_0^{x_r+h_r} f(X)\,dX;$$

para $r=2$, por ejemplo, es

$$\frac{\Delta^2 F(x_1,x_2)}{h_1\cdot h_2} = \frac{F(x_1+h_1,x_2+h_2) - F(x_1+h_1,x_2) - F(x_1,x_2+h_2) + F(x_1,x_2)}{h_1\cdot h_2}.$$

Para la formación de estos cocientes diferenciales, geométricamente hablando, se utiliza un intervalo del que X es un vértice. Estos intervalos forman, en el punto X, una familia de conjuntos regular (en el sentido anteriormente visto) con respecto al sistema de los intervalos, así que respecto de ella se puede

[13]Para probar esto, como es sabido, solo se necesita la más sencilla derivación según los conjuntos de una red de mallas cuadradas encajadas, cf. de la Vallée Poussin, Intégrales de Lebesgue ..., Paris 1916, p. 61 ss.

derivar. Pero eso significa que *existe en casi todo punto y a saber, en el sentido de los límites r-ples, la derivada mixta de orden r, $F_{(x_{\nu_1},\dots,x_{\nu_s})}$, como valor límite de los cocientes diferenciales considerados.*

La existencia de este límite no resulta del procedimiento habitual, donde se presupone que los intervalos según los cuales se puede derivar son regulares respecto de los cubos, porque para ello las proporciones $h_i : h_k$ deberían estar acotadas.

La existencia del límite doble

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{1}{h_1 h_2}\big[F(x_1+h_1,x_2+h_2)-F(x_1+h_1,x_2)-F(x_1,x_2+h_2)+F(x_1,x_2)\big]$$

hace innecesaria, cuando se conoce la existencia de las derivadas parciales primeras $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$, una demostración particular de la existencia e igualdad de las derivadas parciales cruzadas $\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$ y $\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}$.

Análogamente, en r dimensiones, existen en casi todo punto las derivadas mixtas de orden s ($s \le r$), y se tiene

$$\frac{\partial^s F}{\partial x_{\nu_1}\cdots\partial x_{\nu_s}} = F_{(x_{\nu_1},\dots,x_{\nu_s})}, \quad \nu_i \ne \nu_k \text{ para } i \ne k, \tag{BF13}$$

donde la derivada en el lado derecho está definida como límite s-ple de los correspondientes cocientes diferenciales. (Aquí queda incluida, por supuesto, la permutabilidad entre derivadas por la izquierda sucesivas.)

Cuando se conoce que existen, salvo en un conjunto de medida r-dimensional nula, las derivadas $F_{(x_{\nu_1},\dots,x_{\nu_s})}$ ($\nu_i \ne \nu_k$ para $i \ne k$) para todo $s \le r$, se deduce también de conocidos teoremas sobre límites la existencia de las derivadas iteradas y la igualdad (BF13). Pero además, para probar que $F_{(x_{\nu_1},\dots,x_{\nu_s})}$, para $s < r$, existe en casi todo punto, basta saber que el el conjunto donde $F_{(x_{\nu_1},\dots,x_{\nu_s})}$ no existe es r-dimensional medible. Porque su sección con todos los hiperplanos s-dimensionales paralelos a $(x_{\nu_1},\dots,x_{\nu_s})$, en los que F es absolutamente continua, tiene medida s-dimensional cero. Consideramos los cocientes diferenciales de orden s, a través de cuyo límite queda definida $F_{(x_{\nu_1},\dots,x_{\nu_s})}$, y construimos el conjunto de los puntos en los que el límite superior es distinto del inferior. Obviamente está permitido limitarse a racionales crecientes $h_{\nu_1}, \dots, h_{\nu_s}$. Podemos ordenar todas las combinaciones de racionales $(h_{\nu_1},\dots,h_{\nu_s})$ tales que $\sum_{i=1}^s h_{\nu_i}^2 < \frac{1}{n}$ en una sucesión y formar la correspondiente sucesión de cocientes diferenciales. Sean $L_n(P)$ y $l_n(P)$ sus límites superior e inferior. Como ambas sucesiones $L_n(P)$ y $l_n(P)$ son monótonas, repectivamente decreciente y creciente, existen $L(P) = \lim L_n(P)$ y $l(P) = \lim l_n(P)$. Las funciones $L(P)$ y $l(P)$ son medibles y por consiguiente lo es también el conjunto donde es $L(P) > l(P)$; que consta exactamente de los puntos en los que el cociente diferencial no tiene límite.

§4.
Derivación de una integral indefinida cualquiera.

En este parágrafo va a quedar demostrado que de la propiedad de densidad *no* se sigue la derivabilidad de la integral de una función integrable cualquiera, ya sea por ejemplo respecto del sistema de los intervalos.

Con este objetivo demostramos el siguiente teorema, análogo al criterio II′:

Supongamos que el sistema $\mathcal{R}$ contiene con cada conjunto ρ también todos los conjuntos homotéticos al mismo. Una función de conjunto aditiva absolutamente continua es derivable respecto de $\mathcal{R}$ si y solo si para cualesquiera números positivos $a_1, \dots, a_n$ y cualesquiera conjuntos medibles acotados disjuntos dos a dos $\chi_1, \dots, \chi_n$, el conjunto s, unión de todos los conjuntos ρ de $\mathcal{R}$ tales que

$$\sum_{\nu=1}^n a_\nu \cdot m(\chi_\nu \cap \rho) > m(\rho) \tag{BF14}$$

satisface la condición

$$m(s) < C \cdot \sum_{\nu=1}^n a_\nu \cdot m(\chi_\nu), \tag{BF15}$$

donde C depende solamente del sistema $\mathcal{R}$.

1) Suficiencia. Notemos que (BF15) es esencialmente más fuerte que (BF7), luego la propiedad de densidad es válida para $\mathcal{R}$. Evidentemente basta considerar la integral de una función integrable positiva; sea

$$\varphi(\chi) = \int_\chi f(P)\,dP, \quad f(P) > 0,$$

la función a examinar: sea χ_ν el conjunto de los puntos que cumplen $\nu - 1 \leq f(P) < \nu$,

$$\chi_\nu = \{P \colon \nu - 1 \leq f(P) < \nu\}.$$

Entonces la serie $\sum_{\nu=1}^\infty \nu \cdot m(\chi_\nu)$ es convergente. Sea $s_{n_0,\varepsilon}$ la unión de los conjuntos ρ de $\mathcal{R}$ tales que

$$\sum_{\nu=n_0}^\infty \nu \cdot m(\chi_\nu \cap \rho) > \varepsilon \cdot m(\rho), \quad \varepsilon > 0.$$

Para ε fijo los conjuntos $s_{n_0,\varepsilon}$ decrecen [respecto de la inclusión] monótonamente; la intersección, dado (BF15)[14], es un conjunto de medida nula. Formamos la unión N de estos conjuntos de medida nula para $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$. Sea N_f el conjunto de medida nula correspondiente a f definido en la página 15. Vamos a probar ahora esto: Si $P \notin N_f \cup N$, entonces para cada sucesión $\{\rho_k\}$ de $\mathcal{R}$ que se contrae a P, se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varphi(\rho_k)}{m(\rho_k)} = f(P).$$

Elijamos, para ε fijo, el número n_0 lo suficientemente grande como para que P no pertenezca ya a $s_{n_0,\varepsilon}$. Entonces se tiene

$$\frac{\varphi(\rho_k)}{m(\rho_k)} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n_0-1} \varphi(\rho_k \cap \chi_\nu)}{m(\rho_k)} + \frac{\sum_{\nu=n_0}^\infty \varphi(\rho_k \cap \chi_\nu)}{m(\rho_k)}.$$

La elección de n_0 implica que el segundo sumando del lado derecho es a lo sumo igual a ε. Por otro lado se sigue de la propiedad de densidad que el primer sumando tiende a $f(P)$ cuando k crece.

2) Necesidad. La argumentación es exactamente como en la prueba de la necesidad de II. Si (BF15) no se cumple, entonces para cada n existen ciertos números $a_1^n, \ldots, a_{\nu_n}^n$, que obviamente pueden suponerse mayores que 1, y ciertos conjuntos medibles acotados y disjuntos dos a dos $\chi_1^n, \ldots, \chi_{\nu_n}^n$, tales que existe un conjunto medible y acotado s^n, que es la unión de los conjuntos ρ de $\mathcal{R}$ tales que

$$\sum_i a_i^n \cdot m(\rho \cap \chi_i^n) > m(\rho), \tag{BF16}$$

y satisface la desigualdad

$$m(s^n) > 4^n \cdot \sum_i a_i^n \cdot m(\chi_i^n). \tag{BF17}$$

Sea

$$h(P; s^n) = \begin{cases} a_i^n & \text{para } P \in s^n \cap \chi_i^n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{BF18}$$

Entonces es

$$\int_{s^n} h(P; s^n)\,dP = \sum_i^n a_i^n \cdot m(s^n \cap \chi_i^n) < \frac{1}{4} \cdot m(s^n), \tag{BF19}$$

y cada punto de s^n pertenece a un conjunto ρ de $\mathcal{R}$ tal que

$$\int_\rho h(P; s^n)\,dP > m(\rho). \tag{BF20}$$

Mediante transformaciones de semejanza se define $h(P;\tau)$ para todos los conjuntos τ homotéticos a s^n. Las desigualdades (BF19) y (BF20) se transmiten a $h(P;\tau)$, ya que $\mathcal{R}$ contiene con un conjunto ρ

[14] De la validez de (BF15) para un número finito cualquiera de conjuntos χ_ν se sigue inmediatamente la validez también para una familia χ_ν numerable (eventualmente con "$\leq$" en lugar de "$<$").

a todos los homotéticos a ρ. De acuerdo con el teorema auxiliar de la pág. 5, podemos cubrir el cubo unidad W con conjuntos s_j^n homotéticos a s^n de manera que se cumpla

$$d(s_j^n) < \frac{1}{n}, \quad \sum_j m(s_j^n) \leq 2, \quad m\Big(\bigcup_j s_j^n\Big) = 1.$$

Pongamos además

$$f^n(P) = \sum_j h(P; s_j^n).$$

Como se verifican (BF17) y (BF19), f^n es integrable y

$$\int_W f^n(P)\, dP < \frac{1}{4^n} \sum_j m(s_j^n) \leq \frac{2}{4^n}.$$

Entonces la función $f = \sum_{n=1}^{\infty} f^n$ es también integrable y

$$\int_W f(P)\, dP < 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{2}{3}.$$

Como hemos supuesto que todos los a_i^n eran mayores que 1, la función f tendrá al menos el valor 1 cuando no se anule. Por lo tanto el conjunto de puntos donde $f > 0$ tiene medida a lo sumo 2/3. Por otro lado, a excepción de un conjunto de medida nula, cada punto Q de W para cada n está en un s_j^n, por tanto también en un conjunto ρ de $\mathcal{R}$ tal que (cf. (BF20))

$$\int_\rho f(P)\, dP \geq \int_\rho h(P; s_j^n)\, dP > m(\rho).$$

Como para el diámetro se tiene

$$d(s_j^n) < \frac{1}{n},$$

estos conjuntos ρ se contraen a Q; la derivada superior de la función f respecto de $\mathcal{R}$ es por consiguiente igual a 1 en casi todo punto de W, mientras que f se anula como mínimo en un subconjunto de W de medida 2/3, con lo cual la proposición queda probada.

Es bien conocido que toda función absolutamente continua se puede derivar respecto de $\mathcal{R}$ si para el sistema $\mathcal{R}$ es válida la *propiedad* o teorema *de recubrimiento de Vitali*. De esto debe seguirse por lo tanto la condición (BF15). Entonces la demostración de la necesidad que hemos dado prueba ahora que si no se cumple (BF15), entonces el sistema $\mathcal{R}$ no puede satisfacer la propiedad de Vitali. De los conjuntos ρ análogos a los de aquella demostración se puede extraer una sucesión que se contrae, a saber, a casi todo punto de W. Sin embargo: Como quiera que se elija una familia numerable de conjuntos disjuntos dos a dos de entre los ρ, su unión siempre tendrá medida a lo sumo 2/3. Sean ρ^ν cualesquiera, [mutuamente] disjuntos, de aquellos conjuntos ρ con cuya unión se definió s^n. Para ellos es válida (BF16), de donde según (BF17) se sigue

$$m\Big(\bigcup_\nu \rho^\nu\Big) = \sum_\nu m(\rho^\nu) < \sum_i \sum_\nu a_i^n \cdot m(\rho^\nu \cap \chi_i^n) < \sum_i a_i^n \cdot m(\chi_i^n) < \frac{1}{4^n} \cdot m(s^n).$$

Esta estimación vale para cada sistema de conjuntos ρ en un s_j^n cualquiera. Para un sistema arbitrario de conjuntos ρ disjuntos dos a dos también vale

$$m\Big(\bigcup \rho\Big) < \sum_n \frac{1}{4^n} \sum_j m(s_j^n) = \sum_n \frac{2}{4^n} = \frac{2}{3}.$$

Pero para probar (BF15) no hace falta el desvío a través del teorema de Vitali. Porque se ve muy fácilmente:

Si ρ es un conjunto cualquiera del sistema $\mathcal{R}$, $d(\rho)$ su diámetro, $U(\rho)$ el conjunto de los puntos cuya distancia a ρ es menor que $2 \cdot d(\rho)$, y se cumple

$$\frac{m(U(\rho))}{m(\rho)} < \beta, \tag{BF21}$$

donde β denota un número independiente de ρ, entonces el sistema $\mathcal{R}$ cumple la condición (BF15). Sistemas de este tipo los forman, por ejemplo, las esferas, los cubos y además todos los paralelepípedos rectangulares en los que las proporciones entre las longitudes de las aristas están acotadas.

Sea s la unión, definida como arriba, de los ρ que cumplen (BF14). Probaremos que se cumple (BF15) con $C = \beta$, usando una idea que aparece también en la demostración usual del teorema de Vitali. De entre los ρ que forman s, elegimos una sucesión $\rho'_1, \rho'_2, \ldots$, que cubra s. Tomamos $\rho_1 = \rho'_1$, y designamos con ρ_2 al primer ρ'_ν de la sucesión que no esté contenido en $U(\rho_1)$. En general sea ρ_{n+1} el primer ρ'_j de la sucesión ρ'_ν que no esté contenido en $\bigcup_{\nu=1}^{n} U(\rho_\nu)$. Así obtenemos una sucesión $U(\rho_n)$ cuya unión cubre s. Consideremos que ya hemos eliminado de esta sucesión cada $U(\rho_i)$ que esté contenido completamente en otro. Entonces los ρ_ν serán disjuntos dos a dos. Porque para $n > m$ el conjunto ρ_n contiene un punto que está fuera de $U(\rho_m)$. Si ρ_n contuviera también un punto de ρ_m, se tendría $d(\rho_n) \geq 2 \cdot d(\rho_m)$. Por lo tanto $U(\rho_n)$ contendría todos los puntos que están a menos de $4 \cdot d(\rho_m)$ de distancia de P; pero un punto de $U(\rho_m)$ está a lo sumo a distancia $3 \cdot d(\rho_m)$ de P, con lo que sería $U(\rho_m) \subset U(\rho_n)$. Por lo tanto se tiene

$$m\Big(\bigcup_i \rho_i\Big) = \sum_i m(\rho_i) > \frac{1}{\beta} \sum_i m(U(\rho_i)) \geq \frac{1}{\beta} m\Big(\bigcup_i U(\rho_i)\Big) \geq \frac{1}{\beta}\, m(s).$$

Por otra parte, dado (BF14) y que los ρ_i son disjuntos,

$$\sum_i m(\rho_i) < \sum_\nu \sum_i a_\nu \cdot m(\chi_\nu \cap \rho_i) \leq \sum_\nu a_\nu \cdot m(\chi_\nu),$$

con lo cual queda demostrado que

$$m(s) < \beta \sum_\nu a_\nu \cdot m(\chi_\nu).$$

Generalmente es más fácil determinar que no se cumple la relación (BF15) para un sistema $\mathcal{R}$, por ejemplo es inmediato verlo para el sistema de los rectángulos de lados paralelos a los ejes en el plano. Si W denota un cuadrado de lados paralelos a los ejes, para este sistema se tiene

$$m\big(\sigma_{\frac{1}{n}}(W)\big) = (4n \cdot \log n + 1) \cdot m(W).$$

Así que para $\chi_1 = W$, $a_1 = n$, $\chi_\nu = \emptyset$ para $\nu > 1$, (BF15) no se cumple[15].

Tampoco se pueden derivar respecto del sistema de los rectángulos de lados paralelos a los ejes, en general, las integrales indefinidas de funciones no acotadas, o, en otras palabras: Cuando la función $f(x, y)$ no es acotada, no tiene por qué existir la derivada segunda mixta $F_{(x,y)}$ de la función

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

en el sentido del límite doble.

Adición durante la corrección de pruebas.

Después de completar el trabajo hemos notado que algunas declaraciones de la Introducción quedan desactualizadas por el nuevo libro de S. Saks: Théorie de l'Intégrale, Warzawa 1933. La propiedad de densidad para el sistema de los intervalos ya ha sido probada por el sr. Saks (cf. p. 231 s.). Además el sr. Saks también ha señalado que la integral de integrandos no acotados no tiene por qué ser diferenciable según los intervalos; tenemos que agradecer una prueba, basada en el concepto de categoría de Baire, que refuerza esta declaración, a una amistosa comunicación por carta del Sr. Saks. Finalmente hay que mencionar que también según una nota de O. Nikodym a un ejemplo de A. Zygmund diseñado para otros fines, se puede concluir que la propiedad de densidad no es válida para el sistema de todos los rectángulos del plano (cf. p. 232 del libro citado).

Copenhague, 30 de noviembre de 1933.

[15]Con esto se demuestra de nuevo que para el sistema de los rectángulos de lados paralelos a los ejes no vale la propiedad de Vitali.

Pavlov, I. V. y Skorikov, A. V., $L_{\overline{p}}$ spaces with mixed norm on an infinite-dimensional torus. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* 1986, no. 2, 69—72 (en ruso). Descargado del `all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru`: `http://mi.mathnet.ru/eng/ivm7492` (Todas las notas a pie de página son del traductor.)

UDC 517.518

I. V. Pavlov, A. V. Skorikov

ESPACIOS $L_{\overline{p}}$ CON NORMA MIXTA EN EL TORO INFINITO-DIMENSIONAL

1. *Introducción.* El propósito de este trabajo es presentar el estudio de los espacios $L_{\overline{p}}$ con norma mixta de funciones definidas en un producto cartesiano infinito y por lo tanto dependientes de un número infinito de variables. En el caso de un producto cartesiano finito son bien conocidos los espacios de funciones con norma mixta y sus aplicaciones a los teoremas de inmersión ([PS-1][1]—[PS-4] et al.). Los resultados principales de este estudio establecen las condiciones sobre el comportamiento de las coordenadas p_k cuando $k \to \infty$ en el vector $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots)$ bajo las cuales son válidos los teoremas ordinarios de convergencia monótona en $L_{\overline{p}}$ y la convexidad uniforme de estos espacios.

Como producto cartesiano, elegimos un toro de dimensión infinita $T^\infty = \prod_{k=1}^\infty T_k$, donde $T_k = T$, la circunferencia unidad. En nuestra opinión este es uno de los casos más importantes, porque en T^∞ es natural plantear preguntas acerca de la acotación del operador de Riesz vectorial (introducido por primera vez en [PS-5]), de los teoremas de inmersión (para el espacio ordinario $L_p(T^\infty)$ A. D. Bendikov ha obtenido algunos resultados recientemente) y sobre la conexión con procesos probabilísticos (resultados en esta dirección fueron reportados por los autores en marzo de 1984 al XVIII Coloquio de Probabilidad y Estadística matemática, y serán objeto de otra publicación).

2. *Definición de espacio $L_{\overline{p}}(T^\infty)$ y alguna de sus propiedades.* Sea $T_k = T$ la circunferencia unidad considerada como grupo topológico ($k = 1, 2, 3, \ldots$), $T^n := \prod_{k=1}^n T_k$, $T^\infty := \prod_{k=1}^\infty T_k$, $T^{\infty-n} := \prod_{k=n+1}^\infty T_k$, y dx_k, ν^n, ν, $\nu^{\infty-n}$ las medidas de Haar respectivamente en los grupos T_k, T^n, T^∞, $T^{\infty-n}$.

Mediante $L_p(T^n)$ (o bien $L_p(T^\infty)$) denotaremos el espacio de las funciones definidas en T^n (o respectivamente en T^∞) de p-ésima potencia integrable respecto de la medida ν^n (o bien respecto de ν). Sea ε^n la medida de Dirac en el origen de T^n.[2] Consideremos en T^∞ las medidas

$$\nu_n := \varepsilon^n \otimes \nu^{\infty-n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

singulares respecto de la medida ν. Las medidas ν_n nos permiten construir una aproximación de las funciones de un número infinito de variables mediante funciones que dependen de un número finito de variables.

Proposición 1.

1) *Si* $f \in L_p(T^\infty)$, *entonces* $f * \nu_n \in L_p(T^n) \subset L_p(T^\infty)$ $(1 \le p \le \infty)$.

2) $\|f\|_p = \sup_n \|f * \nu_n\|_p = \overline{\lim}_{n\to\infty} \|f * \nu_n\|_p$ *y* $f * \nu_n \to f$ ν-a.e.

3) $f * \nu_n \to f$ *en* $L_p(T^\infty)$ *si* $1 \le p < \infty$.

Estas circunstancias[3], así como los resultados de [PS-1], conducen a la siguiente definición:

Definición 1. Sea $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots)$ un vector de dimensión infinita donde $1 \le p_k \le \infty$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Denotemos por $\overline{p}^n = (p_1, \ldots, p_n)$ y supongamos que $L_1(T^\infty)$. El conjunto de las funciones f tales que $\|f\|_{\overline{p}} := \sup_n \|f * \nu_n\|_{\overline{p}^n} < \infty$, donde

$$\|f * \nu_n\|_{\overline{p}^n} := \| \cdots \| \, \|f * \nu_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\|_{p_n, x_n} \|_{p_{n-1}, x_{n-1}} \cdots \|_{p_1, x_1},$$

[1]Las citas son a las referencias listadas al final del propio artículo.
[2]Es decir, $\varepsilon^n(A) = 0$ si $0 \notin A$, $\varepsilon^n(A) = 1$ si $0 \in A$.
[3]Son los teoremas de Jessen.

así como

$$\|g(x_1,\dots,x_k)\|_{p_k,x_k} := \begin{cases} \left(\int_{T_k} |g(x_1,\dots,x_k)|^{p_k}\, dx_k\right)^{1/p_k}, & p_k<\infty; \\ \operatorname{ess\,sup}_{x_k\in T_k} |g(x_1,\dots,x_k)|, & p_k=\infty, \end{cases}$$

es el espacio con norma mixta que se denota como $L_{\overline{p}}(T^\infty) = L_{\overline{p}}$.

Se verifica la siguiente:

PROPOSICIÓN 2.

1) *Si $p_k = p$ $(k = 1,2,3,\dots)$, entonces $L_{\overline{p}} = L_p(T^\infty)$.*

2) *Para todo n se cumple la desigualdad $\|f * \nu_n\|_{\overline{p}^n} \le \|f * \nu_{n+1}\|_{\overline{p}^{n+1}}$ y, por lo tanto,*

$$\|f\|_{\overline{p}} = \lim_{n\to\infty} \|f * \nu_n\|_{\overline{p}^n};$$

3) *El espacio $L_{\overline{p}}$ es un espacio ideal normado* ([PS-6], p. 95)*. Es decir, si $f \in L_{\overline{p}}$ y $|g| \le |f|$, entonces $\|g\|_{\overline{p}} \le \|f\|_{\overline{p}}$.*[4]

De acuerdo con el apartado 3) de esta proposición es natural considerar que si $f \notin L_{\overline{p}}$, entonces $\|f\|_{\overline{p}} = \|\,|f|\,\|_{\overline{p}} = \infty$.

TEOREMA 1. *Supongamos que $1 \le p_k \le \infty$, $k = 1,2,3,\dots$, y sea $\overline{q} = (q_1, q_2, \dots)$ el vector tal que $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$, $k = 1,2,3,\dots$. Entonces*

$$\|f\|_{\overline{p}} = \sup_{g\in M_{\overline{q}}} \int_{T^\infty} |fg|\, d\nu = \sup_{g\in M_{\overline{q}}} \int_{T^\infty} fg\, d\nu,$$

donde f es una función medible en T^∞ y $M_{\overline{q}}$ es el conjunto de las funciones finitas y que dependen solo de un número finito de variables y tales que $\|g\|_{\overline{q}} = 1$.

A partir del Teorema 1, aplicando los resultados [PS-6], Thm. IV.3.7 [p. 105] y Lem. IV.3.4 [p. 98], obtenemos:

COROLARIO 1. En el espacio $L_{\overline{p}}$ se cumple la condición (B) ([PS-6], p. 99)[5]: Si la sucesión $(f_n) \subset L_{\overline{p}}$, $f_n \ge 0$ es monótona creciente a.e. y se tiene $\sup_n \|f_n\|_{\overline{p}} < \infty$, entonces existe una función $f \in L_{\overline{p}}$ tal que $f_n \uparrow f$ a.e.

COROLARIO 2. En el espacio $L_{\overline{p}}$ se cumple la condición (C) ([PS-6], p. 98)[6]: Si $0 \le f_n \uparrow f$ a.e. y $f \in L_{\overline{p}}$, entonces $\|f_n\|_{\overline{p}} \to \|f\|_{\overline{p}}$.

COROLARIO 3. En el espacio $L_{\overline{p}}$ se cumple la propiedad de Fatou: Si $f_n, f \in L_{\overline{p}}$ y $f_n \to f$ en medida ν, entonces

$$\|f\|_{\overline{p}} \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{\overline{p}}.$$

Además se sigue de [PS-6], Thm. IV.3.4, p. 99, que $L_{\overline{p}}$ es un espacio de Banach.

[4]Sea $(T, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y sea $S = S(T, \mathcal{M}, \mu)$ el espacio de las funciones medibles en $(T, \mathcal{M}, \mu)$, reales o complejas. Para $x, y \in S$, la notación $|x| \ge |y|$ significa que $|x(t)| \ge |y(t)|$ μ-a.e. Un *espacio ideal* es un subespacio X de S tal que

$$x \in X,\ y \in S,\ |y| \le |x| \quad \text{implican} \quad y \in X.$$

Una norma $\|\cdot\|$ en un espacio ideal X se llama *monótona* si $x, y \in X$, $|x| \le |y|$ implican $\|x\| \le \|y\|$. Un *espacio ideal normado* es un espacio ideal equipado con una norma monótona.

[5]Un espacio ideal normado X se dice que tiene una norma monótona *completa*, o que *satisface la condición* (B), si

$$0 \le x_n \uparrow,\ x_n \in X\ (n \in \mathbb{N}),\ \sup \|x_n\| < \infty$$

implican $x_n \uparrow x$, para un cierto $x \in X$.

[6]Un espacio ideal normado X se dice que tiene una norma *semicontinua respecto del orden*, o que *satisface la condición* (C), si

$$0 \le x_n \uparrow x \in X \quad \text{implica } \|x_n\| \to \|x\|.$$

Consideramos ahora la cuestión de cuándo se cumple en el espacio $L_{\overline{p}}$ la condición (A) [PS-6], p. 98[7], es decir, cuándo, de $f_n \downarrow 0$ a.e., $f_n \in L_{\overline{p}}$, se deduce $\|f_n\|_{\overline{p}} \downarrow 0$.

Teorema 2. *La condición* (A) *se cumple en cada uno de los casos siguientes:*

$$1) \quad \prod_{k=1}^{\infty} p_k < \infty; \qquad 2) \quad \sup_k p_k < \infty \quad y \quad \liminf_{k\to\infty} p_k > 1.$$

Veamos, por otra parte, que si $\sup_k p_k = \infty$ la condición (A) no se cumple en $L_{\overline{p}}$. Si existe un k tal que $p_k = \infty$ eso es trivial. Suponer que $p_k < \infty$ para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$; podemos suponer, sin perder generalidad, que $\prod_{k=1}^{\infty}\bigl(1 - \frac{1}{p_k}\bigr) > 0$. Consideremos subconjuntos $A_k \subset T_k$ cuyas medidas de Haar sean $a_k = \bigl(1 - \frac{1}{p_k}\bigr)^{p_k}$. Sean entonces

$$B_n := \prod_{k=1}^{n} A_k \times \prod_{k=n+1}^{\infty} T_k, \qquad f_n = I_{B_n}.$$

Por un lado, $\nu(B_n) = \prod_{k=1}^{n} a_k \downarrow 0$ ya que $a_k \to e^{-1} < 1$, y por tanto $f_n \downarrow 0$ a.e. Y por otro lado,

$$\|f_n\|_{\overline{p}} = \prod_{k=1}^{n} a_k^{1/p_k} = \prod_{k=1}^{n}\Bigl(1 - \frac{1}{p_k}\Bigr) > \prod_{k=1}^{\infty}\Bigl(1 - \frac{1}{p_k}\Bigr) > 0.$$

Corolario 4. Si se cumple alguna de las condiciones del Teorema 2, entonces $L_{\overline{p}}$ tiene las siguientes propiedades:

1) $L_{\overline{p}}$ es separable.[8]

2) Si $f \in L_{\overline{p}}$, entonces $f * \nu_n \to f$ en $L_{\overline{p}}$.

3) $L_{\overline{p}}^* = L_{\overline{q}}$ (con el mismo vector $\overline{q}$ que en el Teorema 1).

3. *Resultados adicionales*. Son válidas las siguientes afirmaciones:

Teorema 3. *El espacio $L_{\overline{p}}$ es uniformemente convexo*[9] *si y solo si se cumple que*

$$\sup_k p_k < \infty \quad y \quad \inf_k p_k > 1.$$

Teorema 4. *Supongamos que $f_n, f \in L_{\overline{p}}$ y que $\|f_n\|_{\overline{p}} \to \|f\|_{\overline{p}}$. Supongamos que se cumple una de las condiciones siguientes:*

1) $f_n \to f$ *débilmente,* $\sup_k p_k < \infty$ *e* $\inf_k p_k > 1$*;*

2) $f_n \to f$ *a.e.,* $\sup_k p_k < \infty$ *e* $\inf_k p_k > 1$*;*

3) $f_n \to f$ *a.e.,* $\prod_{k=1}^{\infty} p_k < \infty$.

Entonces, $\|f - f_n\|_{\overline{p}} \to 0$.

Teorema 5. *Sea $\mathcal{K}$ un subconjunto de funciones de $L_{\overline{p}}$ y supongamos que se cumplen las dos condiciones siguientes:*

1) $\sup_{f\in\mathcal{K}} \|f\|_{\overline{p}} < \infty$*;*

---

[7]Un espacio ideal normado X se dice que tiene una norma *continua respecto del orden*, o que *satisface la condición* (A), si

$$x_n \downarrow \mathbf{0} \quad \text{implica } \|x_n\| \to 0.$$

[8]V. [PS-6], Thm. IV.3.3, p. 98.

[9]Un espacio de Banach es *uniformemente convexo* si para todo ε, $0 < \varepsilon \le 2$, existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|x - y\| \ge \varepsilon$ implican $\|(x + y)/2\| \le 1 - \delta$ (J. A. Clarkson, Uniformly convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 40(1936), 396–414).

2) *para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un entorno* V *de cero en* T^∞ *tal que*

$$\|f(x+y) - f(x)\|_{\overline{p},x} < \varepsilon \quad \textit{para toda } f \in \mathcal{K}, \textit{ todo } y \in V.$$

Entonces, el conjunto $\mathcal{K}$ *es relativamente compacto en* $L_{\overline{p}}$.

El recíproco es cierto cuando se cumple alguna de las condiciones del Teorema 2.

Para terminar los autores agradecen a S. F. Samko y a A. N. Shiryaev por la atención que ha prestado a nuestro trabajo, y también a A. D. Bendikov por diversas discusiones útiles.

En Rostov del Don Recibido el 07/06/1984

REFERENCIAS

[PS-1] Benedek, A., Panzone, R. The spaces L^p, with mixed norm.– *Duke Math. J.*, **28**(1961), 301–324.

[PS-2] Besov, O. V. Classes of functions with a generalized mixed Hölder condition.– *Investigations in the theory of differentiable functions of many variables and its applications. Part III*, Trudy Mat. Inst. Steklov., 105, 1969, 21–29; Proc. Steklov Inst. Math., 105 (1969), 24–34.

[PS-3] Besov, O. V., Ilin, V. P., Nikolskii, S. M. *Integral Representation of Functions and Imbedding Theorems.*– Nauka, Moscú, 1975.

[PS-4] Bukhvalov, A. V. Spaces with mixed norm.– *Vestnik Leningrad. Univ.*, **19**, *Mat. Meh. Astronom. Vyp.*, **4** (1973), 5–12. English transl. in *Vestn. Leningr. Univ., Math.*, **6** (1979), 303–311.

[PS-5] Bendikov, A.D., Pavlov, I.V. Spaces H^p and BMO on the infinite dimensional torus.– *Proc. of the 3rd International Vilnius Conference on Probability Theory and Math. Statistics*, Vilnius, 1981, t. III, 26–27.

[PS-6] Kantorovich, L. V., Akilov, G. P. *Funktsional'nyi analiz.*– Nauka, Moscow, 1977. Translation: *Functional analysis.* 2nd ed., Pergamon Press, Oxford-New York, 1982.

Bibliografía

[1] Ash, J. M., Multiple Trigonometric Series. *Studies in Harmonic Analysis*, 76–96, MAA Stud. Math. vol. 13. Math. Assoc. of America, Washington, D.C., 1976.

[2] Ballester de Pereyra, Concepción, *Sobre la continuidad débil y magra en $L^p(L^q)$ y su aplicación a operadores potenciales.* Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1963. Recuperado de `http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1168_BallesterUbedadePereyra.pdf`

[3] Bendikov, A. D., *Potential Theory on Infinite-dimensional Abelian Groups.* De Gruyter Stud. Math. 21, de Gruyter, Berlin, 1995.

[4] Bendikov, A., Coulhon, T. y Saloff-Coste, L., Ultracontractivity and embedding into L^∞. *Math. Ann.* **337** (2007), 817–853.

[5] Bendikov, A. D. y Pavlov, I. V., Boundedness of a class of vector-valued multiplier operators in $L_p(T^\infty)$. *Siberian Math. J.* **27** (1986), 1–7.

[6] Bendikov, A. D. y Pavlov, I. V., L_p-spaces with mixed norm on infinite Cartesian product of probabilistic spaces. (En ruso.) *Analysis Mathematica* **13** (1987), 231–250.

[7] Bendikov, A. y Saloff-Coste, L., Spaces of smooth functions and distributions on infinite-dimensional compact groups. *J. Funct. Anal.* **218** (2005), 168–218.

[8] Bendikov, A. y Saloff-Coste, L., Hypoelliptic bi-invariant Laplacians on infinite dimensional compact groups. *Canad. J. Math.* **58** (2006), 691–725.

[9] Benedek de Panzone, Agnes I., *Espacios de norma mixta de funciones diferenciables y de distribuciones.* Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1962. Recuperado de `http://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis_n1146_BenedekdePanzone`

[10] Benedek, A. y Panzone, R., The spaces L^P, with mixed norm. *Duke Math. J.*, **28** (1961), 301–324.

[11] Benedek, A., Calderón, A. P. y Panzone, R., Convolution Operators on Banach Space Valued Functions. *Proc. N. A. S.* **48** (1962), 356–365.

[12] Bennett, C. y Sharpley, R., *Interpolation of Operators.* Pure and applied mathematics vol. 129. Academic Press, Inc., Boston, 1988.

[13] Berg, C., Potential theory on the infinite dimensional torus. *Invent. Math.* **32** (1976), 49–100.

[14] Bergh, J. y Löfström, J., *Interpolation Spaces. An Introduction.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 223. Springer, 1976.

[15] Besov, O. V., Il'in V. P. y Nikol'skii, S. M., *Integral Representations of Functions and Imbedding Theorems,* Volume I. Scripta Series in Mathematics. V. H. Winston & Sons, a division of Scripta Technica, Inc., Washington, D.C., 1978.

[16] Bohnenblust, H. F. y Hille, E., On the absolute convergence of Dirichlet series. *Annals of Mathematics* (2) 32 (1931), 600–622.

[17] Bohr, H., Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse* 1913, Heft 4, 441-488. `http://eudml.org/doc/58885`

[18] Bohr, H., Zur Theorie der fast periodischen Funktionen, II Teil. *Acta Mathematica* **46** (1925), 101–214.

[19] Bourbaki, N., *Intégration.* Hermann, Paris, 1963.

[20] Bromwich, T. J. i'A., *An Introduction to the Theory of Infinite Series.* Macmillan, London, 1908.

[21] Bruckner, A. M., Differentiation of Integrals. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 78, No. 9 Part 2, Nov., 1971 i–iv+1–52.

[22] Bukhvalov, A. V., Interpolation of linear operators in spaces of vector-valued functions and with mixed norm. *Siberian Math. J.* **28** (1987), 24–36.

[23] Burago, Yu. D. y Zalgaller, V. A., *Geometric Inequalities.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 285. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.

[24] Busemann, H. y Feller, W., Zur Differentiation der Lebesgueschen Integrale. *Fundamenta Mathematicae* **22.1** (1934), 226–256. `http://eudml.org/doc/212688`

[25] Calderón, A. P., Intermediate spaces and interpolation. *Studia Math.*, Special Series **1** (1963), 31–34.

[26] Calderón, A. P., Intermediate spaces and interpolation, the complex method. *Studia Math.* **24** (1964), 113–190.

[27] Calderón, A. P. y Zygmund, A., On the existence of certain singular integrals. *Acta Mathematica* **88**, 1952, 85–139.

[28] Carleson, L., On convergence and growth of partial sums of Fourier series. *Acta Mathematica* **116**, 1966, 135–157.

[29] Chen, Ting y Sun, Wenchang, Iterated and Mixed Weak Norms with Applications to Geometric Inequalities. `arXiv:1712.01064v6 [math.FA] 30 Mar 2018`.

[30] Christ, M., *Lectures on Singular Integral Operators.* Regional Conference Series in Mathematics, Number 77. Supported by the National Science Foundation. Conference Board of the Mathematical Sciences by the American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1990.

[31] Cotlar, M., *Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert.* Cursos y Seminarios de Matemática, Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 1959. Reeditado en 2011, Cursos y Seminarios de Matemática - Serie A, Fascículo 2, ISSN 1853-709X (Versión Electrónica).

[32] Coxeter, H. S. M., *Regular Polytopes*, 3rd ed. Dover Publications Inc., New York, 1973.

[33] Daniell, P. J., Integrals in an infinite number of dimensions. *Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 20, No. 4 (Jul., 1919), 281–288.

[34] Dieudonné, J., Sur un théorème de Jessen. *Fund. Mat.* **37**, 1950, 242–248.

[35] Dieudonné, J., *Fundamentos de análisis moderno.* Reverté S. A., Barcelona, 1975. (Versión española de la obra *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.)

[36] Doob, J. L., *Stochastic Processes.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1953.

[37] Duoandikoetxea, J., *Fourier Analysis*, translated and revised by David Cruz-Uribe, SFO. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 29. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.

[38] Edwards, R. E., *Functional Analysis. Theory and Applications.* Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1965.

[39] Edwards, R. E., *Integration and Harmonic Analysis on Compact Groups.* Cambridge University Press, Cambridge, 1972.

[40] Edwards, R. E., *Fourier Series: A Modern Introduction.* Vols. I y II, 2nd ed. Springer-Verlag, New York, 1979 y 1982.

[41] Edwards, R. E. y Gaudry, G. I., *Littlewood-Paley and Multiplier Theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[42] Edwards, R. E. y Hewitt, E., Pointwise limits for sequences of convolution operators. *Acta Mathematica* **113**, 1965, 181–218.

[43] Fefferman, C., On the divergence of multiple Fourier series. *Bulletin of the American Mathematical Society* **77**, 1971, 191–195.

[44] Fefferman, C., On the convergence of multiple Fourier series. *Bulletin of the American Mathematical Society* **77**, 1971, 744–745.

[45] Fernández, E. y Roncal, L., On the absolute divergence of Fourier series in the infinite dimensional torus. *Colloquium Mathematicum*, **157**, 2019, No. 1, 143–156.

[46] Fernández, E. y Roncal, L., A decomposition of Calderón–Zygmund type and some observations on differentiation of integrals on the infinite-dimensional torus. Submitted for publication.

[47] Fréchet, M., Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* Vol. 22, 1906, 1–72.

[48] Fufaev, D. B., Summability of Fourier series on an infinite-dimensional torus. (En ruso.) `arXiv:1703.0385v1 [math.FA] 10 Mar 2017`.

[49] García-Cuerva, J. y Rubio de Francia, J. L., *Weighted Norm Inequalities and Related Topics.* North-Holland Mathematics Studies 116, Notas de Matemática (104). North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1985.

[50] Garsia, A. M., *Topics in almost everywhere convergence.* Markham Pub. Co., Chicago, 1970.

[51] Gokhberg, T. y Krupnik, N., Norm of the Hilbert transformation in the L^p space. *Functional Analysis and its Applications*, translated from *Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya* Vol. 2, No. 2, 1968, 180–181.

[52] Grafakos, L., *Classical Fourier Analysis*, 3rd ed. Springer, New York, 2014.

[53] de Guzmán, M., *Differentiation of Integrals in* $\mathbb{R}^n$. Lecture Notes in Mathematics 481. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[54] de Guzmán, M., *Real Variable Methods in Fourier Analysis.* North-Holland Mathematics Studies 46, Notas de Matemática (75). North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1981.

[55] de Guzmán, M. y Welland G. W., On the differentiation of integrals. *Rev. Un. Mat. Argentina*, **25** (1971), 253–276.

[56] Hadwiger, H., *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* Grundlehren der Math. Wiss. Band 93. Springer-Verlag, Berlin, 1953.

[57] Halmos, P. R., *Measure Theory.* Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1950.

[58] Hardy, G. H., On the convergence of certain multiple series. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **19** (1917), 86–95.

[59] Hausdorff, F., *Set Theory*, 2^{nd} ed. Chelsea Pub. Co., New York, N. Y., 1962.

[60] Hedenmalm, H. y Saksman, E., Carleson's convergence theorem for Dirichlet series. *Pacific Journal of Mathematics*, **208**, No. 1, 2003, 85–109.

[61] Helson, H., Conjugate series and a theorem of Paley. *Pacific Journal of Mathematics*, **8**, No. 3, 1958, 437–446.

[62] Helson, H. y Lowdenslager, D., Prediction theory and Fourier series in several variables. *Acta Mathematica* **99**, 1958, 165–202.

[63] Hewitt, E. y Ross, K., *Abstract Harmonic Analysis*, 2nd ed. Vols. I y II. Grundlehren der Math. Wiss. Band 115 y Band 152, Springer-Verlag, New York, 1979.

[64] Hewitt, E. y Stromberg, K., *Real and Abstract Analysis*, 3rd ed. Springer-Verlag, New York, 1975.

[65] Hilbert, D., Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variablen. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* Vol. 27 (1909), 59–74.

[66] Hilbert, D., *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Fortschritte der Mathematischen Wissenschaften in Monographien Heft 3, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1912.

[67] Hille, E. y Phillips, R. S., *Functional Analysis and Semi-Groups.* Colloquium Publications Volume 31. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1957.

[68] Hollenbeck, B. y Verbitsky, I. E., Best Constants for the Riesz Projection. *Journal of Functional Analysis* **175** (2000), 370–392.

[69] Jessen, B., The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions. *Acta Mathematica* **63**, 1934, 249–323.

[70] Jessen, B., A remark on strong differentiation in a space of an infinite number of dimensions. *Mat. Tidsskr. B.* (1950), 54–57.

[71] Jessen, B., On strong differentiation. *Mat. Tidsskr. B.* (1952), 90–91.

[72] Kantorovich, L. V. y Akilov, G. P., *Functional analysis*, 2nd ed. Pergamon Press, Oxford, 1982.

[73] Katznelson, Y., *An Introduction to Harmonic Analysis*, 3rd ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[74] Kelley, J. L., *Topología general.* Eudeba, Buenos Aires, 1962. (Versión al español de la obra *General Topology*, D. van Norstrand Co. Inc., New York, 1955, reimpresa: Graduate Texts in Mathematics 27, Springer-Verlag, 1975.)

[75] Knopp, K., *Theory and Application of Infinite Series.* Reprint Dover Pub. Inc., New York, 1990.

[76] Kolmogoroff, A., Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier. *Fundamenta Mathematicæ* **7** (1925), 24–29.

[77] Kreĭn, S. G., Petunin, J. I. y Semenov, E. M., *Interpolation of Linear Operators.* Translations of Mathematical Monographs Volume 54. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1982.

[78] Lang, S., *Real Analysis*, 2nd ed. Addison-Wesley Pub., London, 1983.

[79] Lass Fernandez, D., Lorentz Spaces, with Mixed Norms. *Journal of Functional Analysis* **25** (1977), 128–146.

[80] Lions, J. L., Une construction d'espaces d'interpolation. *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris* **83** (1960), 1853–1855.

[81] Littlewood, J. E., On bounded bilinear forms in an infinite number of variables. *Quarterly Journal of Mathematics (Oxford Series)* **1** (1930), 164–174.

[82] Loève, M., *Probability Theory*, 4th ed. Vols. I y II. Graduate Texts in Mathematics 45 y 46. Springer-Verlag, New York, 1977 y 1978.

[83] Luxemburg, W. A. J., *Banach Function Spaces.* (Ph. D. Thesis) Assen, 1955.

[84] Luxemburg, W. A. J., On the measurability of a function which occurs in a paper by A. C. Zaanen. *Indag. Math.* **20** (1958), 259–265.

[85] Mahowald, M., A summability theorem in countable toral groups. *Math. Ann.* **135** (1958), 354–359.

[86] Maligranda, L., *Orlicz Spaces and Interpolation.* Seminários de Matemática 5. Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Campinas SP Brasil, 1989.

[87] Móricz, F., On the convergence of double integrals and a generalized version of Fubini's theorem on successive integration. *Acta Sci. Math. (Szeged)* 78 (2012), 469–487.

[88] MOZZOCHI, C. J., *On the Pointwise Convergence of Fourier Series.* Lecture Notes in Mathematics 199. Springer, 1971.

[89] MUNROE, M. E., *Introduction to Measure and Integration.* Addison-Wesley Pub. Co., Inc., Reading, Mass., U.S.A., 1953.

[90] MUSCALU, C. y SCHLAG, W., *Classical and Multilinear Harmonic Analysis*, Vol. I. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[91] NEVEU, J., *Martingales à temps discret.* Masson et Cie, Paris, 1972.

[92] PAVLOV, I. V. y SKORIKOV, A. V., $L_{\overline{p}}$ spaces with mixed norm on an infinite-dimensional torus. (En ruso.) *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* 1986, no. 2, 69—72. Descargado del `all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru`: `http://mi.mathnet.ru/eng/ivm7492`

[93] PICHORIDES, S. K., On the best values of the constants in the theorems of M. Riesz, Zygmund and Kolmogorov. *Studia Math.* **44** (1972), 165–179.

[94] PLATONOV, S. S., On some problems of the theory of the approximation of functions on an infinite-dimensional torus: analogues of Jackson theorems. (En ruso.) *Algebra i Analiz* **26** (2014), no. 6, 99–120; translation in *St. Petersburg Math. J.* **26** (2015), no. 6, 933–947.

[95] DE POSSEL, R., Sur la dérivation abstraite des fonctions d'ensemble. *J. Math. Pures Appl.*, **15** (1936), 391–409. Source Bibliothèque nationale de France. `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k64565464/f403.image`.

[96] REITER, H. y STEGEMAN, J, D., *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*, 2nd. ed. Clarendon Press, Oxford, 2000.

[97] RIESZ, M., Sur les fonctions conjuguées. *Mathematische Zeitschrift* **27** (1928), 218–244.

[98] RUBIO DE FRANCIA, J. L., *Sobre integración en grupos clásicos y abstractos y aplicación al Análisis de Fourier.* Tesis Doctoral. Publ. Dpto. Teoría de Funciones, Facultad de Ciencias, Univ. de Zaragoza, 1974.

[99] RUBIO DE FRANCIA, J. L., Nets of subgroups in locally compact groups. *Comment. Math. Prace Mat.* **20** (1977/78), no. 2, 453–466.

[100] RUBIO DE FRANCIA, J. L., *Convergencia casi por todo y operadores maximales.* Universidad de Zaragoza, 1979.

[101] RUBIO DE FRANCIA, J. L., Convergencia de series de Fourier de infinitas variables. Proceedings of the seventh Spanish-Portuguese conference on mathematics, Part II (Sant Feliu de Guíxols, 1980). *Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona* No. 21 (1980), 237–241.

[102] RUDIN, W., *Fourier Analysis on Groups.* Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 12. Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York, 1962. (Reimp. Dover, 2017.)

[103] RUDIN, W., *Functional Analysis*, 2nd ed. McGraw-Hill, Inc., Singapore, 1991.

[104] RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*, 3rd ed. McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1987.

[105] SAKS, S., *Theory of the integral*, 2nd revised edition. Monografie Matematyczne, Vol. VII. Warsaw, 1937.

[106] SAWYER, S., On inequalities of weak type. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 637–641.

[107] SAWYER, S., Maximal inequalities of weak type. *Ann. Math.*, **84** (1966), 157–174.

[108] SHIRYAEV, A. N., *Probability*, 2nd edition. Graduate Texts in Mathematics 95 (Readings in Mathematics). Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[109] STEIN, E. M., On Limits of Sequences of Operators. *The Annals of Mathematics* Second Series, Vol. 74, No. 1 (1961), 140–170.

[110] STEIN, E. M., *Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory.* Annals of Mathematics Studies, No. 63. Princeton Univ. Press and University of Tokyo Press. Princeton, New Jersey, 1970.

[111] STEIN, E. M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of the Functions.* Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[112] STEIN, E. M. y SHAKARCHI, R., *Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis.* Princeton Lectures in Analysis IV. Princeton Univ. Press. Princeton and Oxford, 2011.

[113] STEIN, E. M. y WEISS, G., *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1971.

[114] STEINHAUS, H., Sur la probabilité de la convergence de séries. *Studia Math.* **2** (1930), 21–39.

[115] TOEPLITZ, O., Über eine bei den Dirichletschen Reihen auftretende Aufgabe aus der Theorie der Potenzreihen von unendlichvielen Veränderlichen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse* 1913, Heft 3, 417–432. http://eudml.org/doc/58883

[116] TRIANA SANTOS, M. Á., *Espacios L^P con norma mixta.* Tesina de Licenciatura. Publ. Dpto. Teoría de Funciones, Facultad de Ciencias, Univ. de Zaragoza, 1979.

[117] TRIANA SANTOS, M. Á., Espacios L^P con norma mixta. Proceedings of the seventh Spanish-Portuguese conference on mathematics, Part II (Sant Feliu de Guíxols, 1980). *Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona* No. 21 (1980), 257–260.

[118] DE LA VALLÉE POUSSIN, C., Sur l'Intégrale de Lebesgue. *Transactions of the American Mathematical Society*, **16** (1915), 435-501.

[119] VÄTH, M., *Ideal Spaces.* Lecture Notes in Mathematics 1664. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[120] WILLIAMS, D., *Probability with Martingales.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[121] ZAANEN, A. C., *Linear Analysis.* Interscience Publishers Inc., New York; North-Holland Pub. Co., Amsterdam; P. Noordhoff N.V., Groningen, 1953.

[122] ZAANEN, A. C., *Integration.* North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1967.

[123] ZYGMUND, A., *Trigonometric Series I, II*, 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1959. Reimp. 1977.