TESIS DOCTORAL

Problemas de valor inicial en la construcción de sucesiones mayorizantes para el método de Newton en espacios de Banach

Daniel González Sánchez

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

Problemas de valor inicial en la construcción de sucesiones mayorizantes para el método de Newton en espacios de Banach

Daniel González Sánchez

Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones
2012

Esta tesis doctoral, dirigida por el doctor D. José Antonio Ezquerro Fernández, fue leída el 20 de abril de 2012, y obtuvo la calificación de Sobresaliente Cum Laude.

Edita: Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones

ISBN 978-84-695-4839-4

Problemas de valor inicial en la construcción de sucesiones mayorizantes para el método de Newton en espacios de Banach

Memoria que presenta para optar al título de
Doctor en Matemáticas

Daniel González Sánchez

Dirigida por el Doctor

José Antonio Ezquerro Fernández

UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Departamento de Matemáticas y Computación
Facultad de Ciencias, Estudios Agroalimentarios e Informática

Logroño, enero 2012

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por los proyectos COLABORA 2007/05 y 2009/04 de la CAR y los proyectos $MTM2008-01952/MTM$ y $EGI11/56$ del Ministerio de Educación y Ciencia y de la Universidad de La Rioja.

A Tomasa, mi madre

Si he logrado ver más lejos ha sido porque
he subido a hombros de gigantes

Sir Isaac Newton, 1676

Agradecimientos

Tras estos años como doctorando me siento obligado a mencionar en esta memoria a diferentes personas e instituciones que sin su apoyo, hubiera sido imposible el desarrollo de esta tesis. Por ello:

Agradezco a mi director de tesis, José Antonio, todo el esfuerzo realizado y el haberme prestado toda su atención. A Michel, quien ha estado detrás de toda mi labor investigadora. A Guti, por iniciarme en mis estudios de tercer ciclo. A los demás miembros del grupo PRIENOL por la confianza que me han prestado. A todos los componentes del Departamento de Matemáticas y Computación por su apoyo.

Agradezco a mis compañeros y amigos de doctorado, de este departamento y de otros, así como de otras universidades, Claudia, Alberto, Mara, Fran, Jónathan, Clara, Martín, Sara y Yolima nuestras reuniones científicas o lúdicas y nuestros ratos de café, sin ellos hubiera sido más difícil el día a día.

Agradezco a mis amistades más íntimas su atención y el haber sabido soportar todo lo soportado.

Agradezco finalmente, con especial énfasis, a Tomasa, su ánimo en mis épocas más difíciles y el haberme acompañado celebrando las mejores. A mis abuelas, a mis tíos y a mis primas su interés incondicional en todo lo que he hecho.

A todos ellos, agradecido quedo.

Índice

Índice de figuras

Índice de Tablas

Introducción

El problema de resolver una ecuación no lineal ha interesado a los matemáticos desde siempre. Generalmente no es posible determinar explícitamente las soluciones de estas ecuaciones. Basándonos en el trabajo de Knill, [77], parece ser que ya las civilizaciones mesopotámicas, casi dos mil años antes de Cristo, conocían algoritmos, como la famosa fórmula de Herón, para aproximar la raíz cuadrada de un número real positivo. Más de trescientos años han pasado desde que un procedimiento para resolver una ecuación algebraica fue propuesto por Newton en 1669 y más tarde por Raphson en 1690 [26]. El método es ahora llamado método de Newton o método de Newton-Raphson, siendo una técnica central hoy en día para resolver ecuaciones no lineales. Esta segunda denominación para el método de Newton es consecuencia de la contribución de Joseph Raphson a la técnica ya propuesta por Newton, aportando la idea de iteración y simplificando el aspecto operacional. Es por esta razón por la que muchos autores denominan el proceso dado por Newton como método de Newton-Raphson, que es actualmente el método iterativo más conocido y empleado para aproximar soluciones de ecuaciones no lineales. Es bien sabido que este método iterativo bautizado por Fourier ([55]) como *la méthode newtonniene* tiene convergencia cuadrática.

Con la notación

$$f(x) = 0,$$

englobamos el problema de encontrar una incógnita x, que puede ser un número real o complejo, un vector, una función, etc., a partir de los datos que nos proporciona la función f, que puede ser, por ejemplo, una función escalar, un sistema de ecuaciones, una ecuación diferencial, una ecuación integral, etc. Incluso en el caso de que f sea una función de variable real es bien conocido que, en general, no es posible resolver de forma exacta la ecuación. Es por ello que se recurre a técnicas iterativas para obtener aproximaciones de la solución.

La técnica iterativa más simple consiste en aplicar un algoritmo o un esquema iterativo de la forma $x_{n+1} = G(x_n)$ a partir de una aproximación inicial x_0, de manera que se genera una sucesión $\{x_n\}$ de aproximaciones a una solución de la ecuación a resolver. Así, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$, donde x^* es una solución de la ecuación considerada.

Dos de los más importantes problemas en el estudio de técnicas iterativas son: ¿cuándo la iteración convergerá? y ¿cómo de rápido es esa convergencia?

Una vez que el algoritmo está propiamente formulado, el siguiente objetivo que se plantea es conocer exactamente cuáles son las condiciones bajo las que el esquema iterativo aproxima una solución del problema considerado; esto es, bajo qué condiciones la sucesión de aproximaciones generadas es convergente a una solución de la ecuación correspondiente. Los resultados de convergencia que se establecen pueden ser de tres tipos: local, semilocal y global, dependiendo de cuáles son las condiciones que se impongan: sobre la solución, sobre la aproximación inicial x_0 o simplemente sobre la función que define la ecuación, respectivamente.

También cuando una sucesión $\{x_n\}$ converge a x^*, a veces, es relativamente fácil sacar conclusiones sobre el comportamiento asintótico del error $\|x_n - x^*\|$, esto es, sobre su comportamiento cuando n tiende a $+\infty$, mientras que, habitualmente, poco se puede decir sobre ello cuando n es pequeño. Análogamente, es frecuentemente mucho más simple afirmar la convergencia para un proceso iterativo si suponemos que las aproximaciones iniciales están cerca del límite deseado x^* que si permitimos que varíen en algún dominio más grande. Así, los resultados de teoremas locales son de considerable importancia no solo porque proporcionen la convergencia, sino, y más importante, porque caracterizan el comportamiento asintótico de ciertos procesos iterativos en la proximidad de la solución.

Con el objetivo de aproximar una solución α de una ecuación no lineal $f(x) = 0$, el método de Newton consiste en construir, a partir de una aproximación inicial x_0 de α, una sucesión de la forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0.$$

Bajo condiciones adecuadas, la sucesión anterior converge a la solución buscada α.

En 1818, Fourier probó la convergencia del método en $\mathbb{R}$ [55]. En 1829, Cauchy probó primero la convergencia del método suponiendo la no existencia de ninguna solución [34].

En 1916, Fine [54] fue el primero que estableció un teorema de convergencia semilocal para el método de Newton en $\mathbb{R}^m$ o en $\mathbb{C}^m$ con $m \geq 1$. Se puede ver una comparación entre las condiciones de Cauchy y las de Fine y Ostrowski para el caso de una sola ecuación ($m = 1$) en una nota histórica del libro de Ostrowski [96].

Más generalmente, el método ha sido considerado en espacios lineales topológicos, Hirasawa [67]. El método de Newton ha sido estudiado extensamente en espacios de Banach por muchos autores, el más notable L. Kantorovich[1] y sus colegas [75], así como L. Collatz [35] y R. Bellman y sus asociados bajo el nombre de cuasilinealización [23]. Esos resultados afirman que si x_0 satisface ciertas condiciones, entonces, la ecuación

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

donde F es un operador no lineal diferenciable definido entre dos espacios de Banach X e Y, tiene una solución y la iteración

$$\text{dado } x_0, \quad x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0,$$

siendo $F'(x_n)$ la derivada de Fréchet del operador $F(x)$ en el punto x_n y $[F'(x_n)]^{-1}$ su operador inverso, tiene convergencia cuadrática a la solución.

La técnica más utilizada para abordar el estudio de la convergencia de un proceso iterativo en espacios de Banach se basa en el conocido principio de la mayorante (véanse [7, 8, 90, 131]), idea que surge a partir de la de sucesión mayorizante introducida por Kantorovich ([69, 72, 75]) para demostrar la convergencia semilocal del método de Newton en estos espacios.

Inicialmente, Kantorovich [70] publicó en 1939 un artículo sobre métodos iterativos para ecuaciones funcionales en un espacio de tipo Banach y aplicó su teoría desarrollada allí para obtener un resultado de convergencia para el método de Newton sobre la base del principio de asignación de contracción de Banach. Más tarde, en 1948, Kantorovich [72] estableció un teorema de convergencia semilocal para el método de Newton en un espacio de Banach, el cual es ahora conocido como el teorema de Kantorovich o de Newton-Kantorovich. La demostración de dicho resultado de Kantorovich se basa en el estudio de sucesiones recurrentes. Tres años después, Kantorovich [73] introdujo el principio de la mayorante para dar una

[1] Además de sus aportaciones al estudio del método de Newton, Kantorovich es conocido por sus trabajos sobre asignación óptima de recursos escasos, por los cuales fue galardonado con el Premio Nobel en Economía en 1975, compartido con Tjalling Koopmans.

nueva demostración de la convergencia semilocal del método de Newton. Así, combinando técnicas de análisis funcional y de análisis numérico, la teoría de Kantorovich permite abordar numerosos problemas no lineales tales como la resolución de ecuaciones integrales, ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, o problemas de cálculo variacional.

Para ecuaciones en una dimensión, la convergencia cuadrática del método de Newton fue establecida por Cauchy [34]. Para ecuaciones en $\mathbb{R}^m$, un teorema de punto de atracción fue dado por Runge [112], el cual también recalcó la convergencia cuadrática. Independientemente, un resultado para $m = 2$ fue dado por Blutel [27].

Bennett [24] formuló resultados relacionados con operadores en espacios de dimensión infinita, pero en las demostraciones se remitía a Fine. Veinte años después Ostrowski [95] presentó, de manera independiente, nuevos teoremas de convergencia y también planteó estimaciones del error. Al mismo tiempo, Willerts [119] también probó similares teoremas de convergencia. Aunque estos autores observaron que sus resultados se extendían inmediatamente al caso general m, solo lo probaron para $m = 2$ y $m = 3$. Bussmann [29], en un trabajo no publicado, probó esos resultados y alguna extensión general para m. Los teoremas de Bussmann son citados por Rehbock [109]. Luego Kantorovich [71, 72] dio su ahora famoso resultado de convergencia semilocal para el método de Newton en espacios de Banach. Un año después Kantorovich [69] presentó una nueva demostración usando por primera vez el principio de la mayorante (ver también [73, 74] y [75]). Esto llevó a una nueva demostración de la convergencia para el método de Newton por Ortega [93] y la teoría general de convergencia para procesos relacionados con Newton por Rheinboldt [110]. Ambos resultados y sus demostraciones se dan en espacios de Banach con operadores lineales acotados definidos en todo el rango del espacio.

El método de Newton ha sido aplicado en varias ecuaciones funcionales y es imposible dar una lista de publicaciones relevantes aquí. Para un estudio de aplicaciones de ecuaciones integrales, ver Anselone [6] y, en particular, los artículos de Moore [89] y Noble [92]. Para problemas de dos puntos con valores en la frontera, ver, por ejemplo, los libros de Henrici [63], Keller [76], y Lee [80]. Para problemas de valor en la frontera de tipo elíptico, ver Bellman y Kalaba [23] y Collatz [35]. Observamos también que el teorema de Newton-Kantorovich o resultados relacionados han sido frecuentemente usados como herramientas para obtener teoremas de existencia; ver, por ejemplo, Moser [91] y Mamedov [84].

Una característica destacable de los resultados de Kantorovich es que no asumen la existencia de soluciones de la ecuación (1). Así, el teorema de Newton-Kantorovich no es sólo un resultado sobre la convergencia del método de Newton, sino también un resultado sobre existencia de soluciones de la ecuación (1).

Después de la aparición del teorema de Newton-Kantorovich, cotas superiores e inferiores para los errores del método de Newton han sido obtenidas por muchos autores, por ejemplo por Dennis [45], Döring [47], Rall-Tapia [107], Tapia [116], Ostrowski [98], Gragg-Tapia [58], Kornstaedt [78], Miel [85, 86, 87], Potra-Pták [101], Potra [100], Pták [105], Moret [90], etc. En la serie de artículos [125, 126, 127, 128, 129] Yamamoto mostró que sus resultados se seguían del teorema de Kantorovich y se detallaban comparaciones entre las cotas obtenidas, las cuales fueron una parada por la carrera de encontrar cotas del error para el método de Newton.

Muchos tópicos relacionados con el método de Newton todavía atraen la atención de los investigadores. Por ejemplo, la construcción de convergencia global efectiva en métodos iterativos para resolver ecuaciones no diferenciables en $\mathbb{R}^n$ o en $\mathbb{C}^n$ es un importante área de investigación en los campos de Análisis Numérico y Optimización.

Otras cuestiones que se plantean sobre el comportamiento de un método iterativo son la velocidad de convergencia con la que la sucesión converge a una solución y el error cometido al aproximar esa solución. Existen distintos indicadores para medir la velocidad de convergencia de una sucesión como son el orden de convergencia, el Q-orden y el R-orden, que están relacionados estrechamente entré sí (ver [94, 102]). Concretamente, en este trabajo, usaremos para establecer la velocidad de convergencia de una sucesión el R-orden de convergencia, que es el más utilizado.

Con respecto a la estructura de esta memoria, indicaremos que en el capítulo 1 veremos una introducción a los espacios de Banach. La consideración de estos espacios hace que podamos abarcar una gran amplitud de situaciones, tales como ecuaciones en el campo real o complejo, sistemas de ecuaciones reales o complejas, ecuaciones diferenciales o ecuaciones integrales. También añadimos una sección dedicada a la teoría clásica de Kantorovich, cuyas ideas principales pueden encontrarse en [75], aunque desarrolladas de forma un poco diferente, aquí hemos pretendido facilitar su lectura y entendimiento. Presentamos el teorema de Newton-Kantorovich en sus dos versiones, la general y la clásica, esta última garantiza una mayor aplicación.

En el capítulo 2, suavizaremos la condición clásica impuesta por Kantorovich al operador F, dada por

$$\|F''(x)\| \leq k, \quad \text{con} \quad x \in \Omega, \quad k \geq 0, \tag{2}$$

donde Ω es un subconjunto del espacio de Banach X. Esta condición no siempre se verifica, como por ejemplo en las ecuaciones integrales no lineales de tipo Hammerstein mixto

$$x(s) = u(s) + \sum_{i=1}^{m} \int_a^b G_i(s,t) H_i\big(x(t)\big)\, dt, \quad s \in [a,b],$$

donde $-\infty < a < b < +\infty$, G_i, H_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ y u son funciones conocidas y x es una función continua (solución) a determinar. Tampoco es sencillo localizar un dominio donde se cumple (2) y que además contenga una solución. Para solventar la dificultad anterior, una alternativa es prelocalizar la solución en algún dominio $\Omega_0 \subset \Omega$ y buscar en él una cota superior para $\|F''(x)\|$ (véase [52]). Notemos que además tendremos que asegurar que existe una solución en Ω_0. Como veremos, considerando la ecuación de Bratu

$$x(s) = \lambda \int_a^b G(s,t) \mathrm{e}^{x(t)}\, dt, \quad s \in [a,b],$$

donde $-\infty < a < b < \infty$, λ pertenece a un intervalo real para que la ecuación tenga dos soluciones y el núcleo $G(s,t)$ es la función de Green, esta prelocalización la podremos utilizar para aproximar la solución de menor norma, sin embargo en el caso de la solución de mayor norma no es posible fijar Ω_0 sin tener información de ella. Una alternativa mejor y más elegante que la prelocalización, consiste, tal y como se hace en [51], en suavizar la condición anterior (2) exigiendo que la segunda derivada verifique una condición del tipo

$$\|F''(x)\| \leq \omega(\|x\|), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

donde $\omega : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ es una función continua no decreciente, que es lo que aquí hacemos. Notamos que para el caso de la ecuación integral anterior es más fácil encontrar una función ω que verifique (3) que buscar una cota superior para $\|F''(x)\|$ en un dominio apropiado.

La mayoría de los trabajos que han analizado la convergencia semilocal del método de Newton son modificaciones del teorema de Newton-Kantorovich que pasan por suavizar las condiciones de convergencia anteriores, en especial la condición (2), de manera que se le exija menos al operador F. Ahora bien, si exigimos al operador F una condición más suave que la anterior, como puede verse en los trabajos [10, 11, 50, 51, 101, 110, 130], esta condición suele llevar consigo una resolución del dominio de puntos de salida válidos para el método de Newton. En el capítulo 3, el principal objetivo no es exigir al operador F condiciones más suaves que (2), sino más fuertes, que persiguen una modificación, que no una restricción, del dominio de puntos de salida para el método de Newton, de manera que podamos empezar el método de Newton en puntos a partir de los cuales el teorema de Newton-Kantorovich no puede asegurar la convergencia semilocal del método de Newton, así como ofrecer una mejora de los dominios de existencia y unicidad de solución y de las cotas a priori del error. Para ello exigiremos al operador F condiciones centradas para la segunda derivada de F. Al igual que Kantorovich, nuestro planteamiento pasa por obtener un resultado general de convergencia semilocal utilizando el conocido principio de la mayorante que él desarrolló para el método de Newton. A partir de este resultado general, veremos los obtenidos por otros autores [61, 132] como casos particulares de nuestro resultado general.

Finalmente, en el capítulo 4, daremos una alternativa a la situación de prelocalizar las raíces de ecuaciones de la forma

$$x(s) = u(s) + \lambda \int_a^b G(s,t)H(x(t))\,dt, \quad s \in [a,b], \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

donde $-\infty < a < b < +\infty$, la función $u(s)$ es continua en $[a,b]$ y dada, el núcleo $G(s,t)$ es la función de Green y $H(\xi)$ es una función polinómica y que además dé respuesta a situaciones que no resuelve la prelocalización de raíces. Así, la idea consistirá en modificar las hipótesis del teorema de Newton-Kantorovich de forma conveniente.

Para ver todo lo anterior utilizamos el principio de la mayorante desarrollado por Kantorovich, tal y como hemos indicado anteriormente, pero con pequeñas variaciones que se ajustan al tipo de condiciones de convergencia semilocal que se utilicen en cada momento. Todas las variaciones presentadas tienen un elemento común y es que la construcción de las sucesiones mayorizantes que utiliza el principio de la mayorante se obtienen mediante la resolución de problemas de valor inicial. En este caso diferimos de la técnica de construcción dada por Kantorovich, que se basa en ajustes interpolatorios.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios de Banach

El origen de la teoría de los espacios de Banach se encuentra en la publicación en 1932 del clásico “Théorie des opérateurs linéaires” [20] por parte del matemático polaco Stefan Banach (1892–1945). Desde su nacimiento, esta teoría estuvo relacionada con el resto de ramas del análisis.

Tras unos años de auge, la teoría parecía condenada al ostracismo. Sin embargo, durante los años setenta y principios de los ochenta del siglo XX, la teoría tuvo un nuevo periodo de gran actividad, se resolvieron viejos problemas y lo que es más importante, se plantearon otros nuevos y se establecieron nuevas conexiones con otras ramas del análisis, tales como análisis armónico, funciones de variable compleja, series ortonormales, teoría de aproximación o probabilidad. De la bibliografía acerca de los espacios de Banach podemos destacar los textos clásicos de Dunford-Schwarz [48] y Day [42] donde se recogen los principales resultados de la época comprendida entre los años treinta y cincuenta. Resultados más recientes se pueden encontrar en Lindenstrauss-Tzafriri [81], [82] y Beauzamy [22].

Como dice Wojtaszczyk [120] en su introducción, de los espacios de Banach no podemos esperar que nos resuelvan los problemas que estemos tratando, pero sí que nos hagan ver dichos problemas con un nuevo enfoque y nos permitan aislar sus características esenciales. Obtendremos así una gran generalidad en los resultados que obtengamos. Además en muchos casos, el utilizar las técnicas y los teoremas generales de los espacios de Banach nos puede sugerir nuevos problemas.

Al trabajar con espacios de Banach abarcamos una gran amplitud de situaciones, tales como ecuaciones en el campo real o complejo, sistemas de ecuaciones reales o complejas, ecuaciones diferenciales o ecuaciones integrales, etc.

A continuación haremos una introducción, lo más escueta posible de los espacios de Banach. Para un estudio más detallado se puede consultar cualquiera de los numerosos tratados sobre el tema que hay en la bibliografía matemática, entre los que citamos los de Berberian [25], Rudin [111] y Curtain-Pritchard [40].

1.1.1. Espacios lineales normados

La estructura métrica considerada aquí se basa en la generalización de la idea de valor absoluto de un número real o módulo de un número complejo.

Para cada elemento x de un espacio lineal X, se define norma de x al número real no negativo $\|x\|$ que satisface las siguientes tres condiciones:

- $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$, $\|0\| = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $\lambda \in K$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Además, X se llama espacio lineal normado.

A continuación indicamos cómo relacionar las diferentes normas que podemos definir en un espacio lineal. El concepto que las relaciona es el de normas equivalentes. Así, dos normas diferentes $\|x\|$ y $\|x\|'$ de un espacio lineal, se dice que son equivalentes si existen constantes a, b tales que $0 < a < b$ y

$$a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\| \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Es conocido que en un espacio lineal de dimensión finita todas las normas son equivalentes [79].

1.1.2. Operadores lineales y acotados en espacios de Banach. Inversión de operadores

Una clase importante de los espacios lineales normados son los llamados espacios de Banach. En la solución de muchos problemas el asunto a tratar es la existencia de un límite x^* de una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio normado X; situación familiar en el análisis clásico vinculada a la idea de completitud.

Definición 1 *Se dice que un espacio normado X es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un límite que es un elemento de X.*

Definición 2 *Un espacio de Banach es un espacio normado completo.*

En cálculo se trabaja con funciones reales definidas sobre un intervalo real. En análisis funcional, consideramos espacios más generales, tales como espacios métricos o normados y aplicaciones entre dichos espacios. En este caso, a estas aplicaciones se les llama operadores. Diremos que un operador T aplica el espacio X en Y si a un elemento $x \in X$ le hace corresponder un elemento $T(x) \in Y$. En principio T no tiene por qué estar definido sobre todo el espacio X ni recorrer todos los valores de Y. Al conjunto de puntos de X donde está definido T lo llamamos dominio de T, y lo denotaremos $\mathcal{D}(T)$, y al conjunto de valores de Y que toma el operador T lo llamamos rango de T, y lo denotamos $\mathcal{R}(T)$.

De especial interés son aquellos operadores que conservan las operaciones algebraicas de los espacios donde están definidos.

Definición 3 *Un operador L que aplica un espacio lineal X en otro espacio lineal Y, ambos espacios sobre el mismo cuerpo K, se dice lineal si tenemos para todo $x_1, x_2 \in X$*

$$L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2),$$

y para todo $x \in X$ y todo $\lambda \in K$

$$L(\lambda x) = \lambda L(x).$$

Notar que a partir de ahora emplearemos indistintamente la notación $L(x)$ o Lx para denotar al mismo operador lineal.

Definición 4 *Un operador T entre dos espacios normados X e Y se dice acotado si existe un número real c tal que, para todo $x \in \mathcal{D}(T)$, se cumple*

$$\|T(x)\| \leq c\|x\|. \tag{1.1}$$

Observar que la norma de la izquierda es la del espacio Y y la derecha la del espacio X, aunque las hayamos denotado igual.

Notar que en el caso de operadores acotados, la imagen no tiene por qué estar acotada, lo que verifican estos operadores es que transforman conjuntos acotados en conjuntos también acotados.

Al conjunto de los operadores lineales y acotados entre dos espacios lineales X e Y lo denotaremos $\mathcal{L}(X,Y)$. Si $X = Y$, denotaremos simplemente $\mathcal{L}(X)$. Es fácil ver que $\mathcal{L}(X,Y)$ es un espacio lineal sobre el mismo cuerpo K.

A continuación vamos a definir una norma en el conjunto de operadores acotados. Dejando a un lado el caso en que $x = 0$, nos podemos preguntar cuál es el menor número c que verifica (1.1). De aquí surge la idea para definir norma de un operador.

Definición 5 *Sea T un operador acotado. Definimos la norma de T como*

$$\|T\| = \inf\{c; \|T(x)\| \leq c\|x\|,\ x \in \mathcal{D}(T),\ x \neq 0\} = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ x\neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}.$$

Como consecuencia, si T es acotado, entonces

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|.$$

Otra fórmula alternativa, cuando además el operador T es lineal, para la norma anterior es la siguiente:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|x\|=1}} \|T(x)\|. \tag{1.2}$$

Que estas fórmulas son equivalentes y que todas ellas son en efecto normas puede verse en [79]. Además, también se tiene que el espacio $\mathcal{L}(X,Y)$ con Y completo y la norma (1.2) es un espacio completo.

Teorema 1.1.1 *Si un espacio normado X es de dimensión finita, entonces cada operador lineal en X es acotado.*

Definición 6 *Un operador T entre dos espacios normados X e Y se dice continuo en un punto $\tilde{x} \in X$ si para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \tilde{x} \quad \textit{se tiene que} \quad \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(\tilde{x}).$$

Diremos que un operador es continuo si lo es en todos los puntos de su dominio.

Esta definición generaliza la idea de función continua del cálculo. Los operadores lineales tienen la siguiente propiedad:

Teorema 1.1.2 *Sea T un operador lineal entre dos espacios normados. Entonces,*

(i) *T es continuo si y sólo si T es acotado.*

(ii) *Si T es continuo en un punto, entonces T es continuo en todos los puntos de su dominio.*

A continuación introducimos el operador inverso de uno dado, operador fundamental para resolver ecuaciones de la forma $Lx = y$, donde L es un operador lineal.

Definición 7 *Sea L un operador lineal y acotado de X en Y. Si existe un operador L^{-1} que aplica $\mathcal{R}(L)$ en $\mathcal{D}(L)$, de manera que*

$$L^{-1}Lx = x, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(L),$$

$$LL^{-1}y = y, \quad \text{para todo } y \in \mathcal{R}(L),$$

diremos que L es inversible y que L^{-1} es el inverso de L.

Se puede probar que si L^{-1} existe, entonces también es un operador lineal. Necesitaremos entonces una caracterización analítica del concepto de inversión. Para ello, los siguientes resultados son fundamentales [75, 106]. Observar que estos resultados están dados para operadores de un espacio X en X, de manera que sus inversos también son operadores de X en X.

Lema 1.1.3 (Banach) *Sea $L \in \mathcal{L}(X)$ verificando que*

$$\|L\| \leq k < 1.$$

Entonces el operador $I - L$ tiene inverso continuo y además

$$\|(I - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-k}.$$

Unas ligeras variantes del lema anterior son los siguientes dos lemas.

Lema 1.1.4 *Sea $L \in \mathcal{L}(X)$. Existe L^{-1} si y sólo si existe un operador inversible $M \in \mathcal{L}(X)$ tal que*

$$\|I - ML\| < 1.$$

En este caso,

$$L^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(I - ML)^n M \quad y \quad \|L^{-1}\| \leq \frac{\|M\|}{1 - \|I - ML\|}.$$

Lema 1.1.5 *Sea $L \in \mathcal{L}(X)$. Existe L^{-1} si y sólo si existe un operador inversible $M \in \mathcal{L}(X)$ tal que*

$$\|M - L\| < \frac{1}{\|M^{-1}\|}.$$

En este caso,

$$L^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(I - M^{-1}L)^n M^{-1}$$

y

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{\|M^{-1}\|}{1 - \|I - M^{-1}L\|} \leq \frac{\|M^{-1}\|}{1 - \|M^{-1}\|\|M - L\|}.$$

1.1.3. Diferenciación de operadores

En esta sección presentamos algunos de los conceptos y resultados básicos del cálculo diferencial en espacios de Banach. A parte del interés que esta sección pueda tener por sí misma, se establecerá el contexto que permitirá resolver ecuaciones en las que intervengan operadores no lineales.

1.1.3.1. Derivadas primeras

Comenzamos dando una primera definición de derivada para funciones definidas en espacios de Banach.

Definición 8 *Dado $x_0 \in X$, si existe un operador $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ de manera que para todo $x \in X$ se cumple*

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + hx) - F(x_0)}{h} = L(x), \tag{1.3}$$

entonces se dice que F es diferenciable Gateaux (o diferenciable débilmente) en x_0. En esta situación, el operador lineal L es la derivada de F en x_0 y lo denotaremos $L = F'(x_0)$.

Sin embargo, la derivada Gateaux no es una buena generalización del concepto de derivada para funciones escalares, como pone de manifiesto la existencia de funciones derivables Gateaux y no continuas. Para estar seguros de que las funciones diferenciables son continuas, introducimos a continuación un concepto de derivada más fuerte.

Definición 9 *Si el límite de la ecuación (1.3) es uniforme en el conjunto* $\{x \in X; \|x\| = 1\}$*, entonces se dice que* F *es diferenciable Fréchet o, simplemente, diferenciable en* x_0*. En este caso, el operador lineal* $L = F'(x_0)$ *se llama derivada de* F *en* x_0*.*

Equivalentemente, el concepto de diferenciabilidad se puede expresar de la siguiente forma. Si dado $x_0 \in X$, existe un operador lineal y continuo L de X en Y de manera que

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\|F(x_0+v) - F(x_0) - Lv\|}{\|v\|} = 0,$$

entonces F es diferenciable Fréchet en x_0 y el operador $F'(x_0) = L$ se denomina derivada de F en x_0 .

Notar que en el cálculo diferencial en espacios de Banach los operadores lineales acotados juegan un papel similar al de las constantes en el cálculo diferencial real o complejo.

Uno de los resultados que se pierden al pasar de los números reales a espacios más generales es el teorema del valor medio, que asegura que si f es una función diferenciable en un intervalo $[a, b]$ entonces

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a),$$

donde ξ es un número tal que $\xi \in (a, b)$.

Veremos ahora una desigualdad que generaliza al teorema del valor medio. Dados dos puntos x, y en un espacio definimos el segmento que los une

$$[x, y] = \{x + \lambda(y - x); \lambda \in [0, 1]\}.$$

Diremos que un conjunto Ω es convexo si para cualesquiera $x, y \in \Omega$ el segmento $[x, y]$ que los une está contenido en Ω.

Teorema 1.1.6 (Teorema del valor medio) *Sean* X *e* Y *dos espacios de Banach y* $F : X \to Y$ *un operador diferenciable en un conjunto convexo* $\Omega \subseteq X$*. Entonces, si* $x_0, x_1 \in \Omega$*, se tiene*

$$\|F(x_1) - F(x_0)\| \leq \sup_{0<\theta<1} \Big\|F'\Big(x_0 + \theta(x_1 - x_0)\Big)\Big\| \|x_1 - x_0\|.$$

Corolario 1.1.7 *Con la notación anterior se tiene que*

$$\|F(x_1) - F(x_0) - F'(\bar{x})(x_1 - x_0)\|$$

$$\leq \sup_{0<\theta<1} \Big\|F'\Big(x_0 + \theta(x_1 - x_0)\Big) - F'(\bar{x})\Big\| \|x_1 - x_0\| \quad \textit{con} \quad \bar{x} \in [x_0, x_1].$$

1.1.3.2. Derivadas segundas y operadores bilineales

Sea F un operador entre dos espacios de Banach X e Y. Supongamos que F es diferenciable, entonces podemos interpretar F' como un operador de X en $\mathcal{L}(X,Y)$. El espacio $\mathcal{L}(X,Y)$ también es un espacio de Banach con la norma

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|Lx\|.$$

En consecuencia, se puede pensar en derivar el operador F'. El resultado de derivar este operador en un punto x_0 es lo que se conoce como la derivada segunda de F en x_0 y se denota por $F''(x_0)$.

Observar que $F''(x_0) \in \mathcal{L}(X,\mathcal{L}(X,Y))$ y que F'' es un operador de X en $\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(X,Y))$, que también es un espacio de Banach. Si volvemos a derivar este operador en un punto x_0, obtenemos la derivada tercera, $F'''(x_0)$. Continuando este proceso, en el caso de que existan las derivadas que van apareciendo, se obtienen las derivadas de órdenes superiores.

Nos centraremos ahora en la derivada segunda. Para entender un poco mejor cómo son los elementos de $\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(X,Y))$ vamos a introducir un nuevo concepto.

Sea B un operador binario que asigna a cada par de elementos x_1, x_2 de X un elemento y de Y, cumpliendo las siguientes condiciones:

(i) Para todo $x_1, x_1', x_2, x_2' \in X$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$B(\alpha x_1 + \beta x_1', x_2) = \alpha B(x_1,x_2) + \beta B(x_1', x_2)$$

$$B(x_1, \alpha x_2 + \beta x_2') = \alpha B(x_1,x_2) + \beta B(x_1, x_2').$$

(ii) Existe $M > 0$ tal que para todo $x_1, x_2 \in X$,

$$\|B(x_1,x_2)\| \le M\|x_1\|\|x_2\|.$$

En este caso, diremos que B es un operador bilineal acotado. El conjunto de los operadores bilineales con la norma

$$\|B\| = \sup_{\substack{\|x_1\|=1 \\ \|x_2\|=1}} \|B(x_1,x_2)\|$$

es un espacio de Banach, que se denota $\mathcal{B}(X^2,Y)$.

El espacio $\mathcal{B}(X^2,Y)$ que acabamos de introducir está muy relacionado con el espacio $\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(X,Y))$ definido con anterioridad. En concreto se tiene que estos dos espacios son linealmente isométricos [75]. Así, dado $B \in \mathcal{B}(X^2, Y)$ y fijado un elemento $x_1 \in X$, podemos definir el operador lineal

$$L(x_1) = B(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}(X, Y)$$

que actúa de la siguiente manera

$$L(x_1)(x) = B(x_1, x) \in Y.$$

A partir de ahora, y teniendo en cuenta esta isometría, identificaremos los elementos de $\mathcal{B}(X^2, Y)$ y $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$.

Si X e Y son de dimensión finita, podemos representar los elementos de $\mathcal{B}(X^2, Y)$ por una matriz.

Volviendo al concepto de derivada segunda de un operador F, tenemos que si F es diferenciable dos veces en un punto $x_0 \in X$, entonces $F''(x_0) \in \mathcal{B}(X^2, Y)$ y

$$\lim_{h \to 0} \frac{F'(x_0 + hx') - F'(x_0)}{h} = F''(x_0)(x', \cdot). \tag{1.4}$$

En consecuencia para todo $x \in X$ tenemos

$$F''(x_0)(x', x) = \lim_{h \to 0} \frac{F'(x_0 + hx')x - F'(x_0)x}{h} \cdot \tag{1.5}$$

Notar que (1.4) y (1.5) no son equivalentes. Puede suceder que exista un operador $B \in \mathcal{B}(X^2, Y)$ tal que para todo $x, x' \in X$ se cumpla

$$B(x', x) = \lim_{h \to 0} \frac{F'(x_0 + hx')x - F'(x_0)x}{h},$$

y sin embargo no existir $F''(x_0)$. La condición necesaria y suficiente para que exista $F''(x_0)$ es que, para cada $x' \in X$, el límite de la ecuación (1.5) sea uniforme para todo $x \in X$ con $\|x\| = 1$.

En general, dado un operador bilineal $B \in \mathcal{B}(X^2, Y)$, se tiene que $B(x_1, x_2) \neq B(x_2, x_1)$, $x_1, x_2 \in X$. Cuando $B(x_1, x_2) = B(x_2, x_1)$ para todo $x_1, x_2 \in X$, diremos que B es un operador bilineal simétrico. El siguiente resultado señala que $F''(x_0)$ es un operador bilineal simétrico, cuya demostración puede verse en [106].

Teorema 1.1.8 *Si la derivada segunda $F''(x_0)$ de un operador F de X en Y existe en un punto $x_0 \in X$, entonces es un operador bilineal simétrico de X^2 en Y.*

1.1.4. Integral de Riemann

A continuación comentaremos algunos aspectos sobre el cálculo integral en espacios de Banach. En primer lugar, definiremos la integral en el sentido de Riemann para una función de variable real y con valores en un espacio de Banach, para a continuación, apoyándonos en esta definición, definir la integral de una función entre dos espacios de Banach en general.

Definición 10 *Sea F definida en un intervalo real $[a, b]$ y con valores en un espacio de Banach Y. Entonces podemos definir su integral como el límite de las siguientes sumas*

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\tau_k)(t_{k+1} - t_k)$$

donde $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ y $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$, cuando $\max_{(k)}\{t_{k+1} - t_k\}$ tiende a cero. Si el límite dirigido anterior existe, lo llamaremos integral de F y lo denotaremos

$$\int_a^b F(t)\, dt.$$

Evidentemente, si la integral existe, es un elemento de Y. Una condición suficiente para que exista dicha integral es que la función F sea continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Las propiedades de esta integral se deducen de las conocidas para la integral de Riemann en el caso real (ver [75]).

Definición 11 *Supongamos ahora que T es un operador definido en un segmento $[x_0, x_1] \subseteq X$ y con valores en el espacio $\mathcal{L}(X, Y)$. En este caso definimos:*

$$\int_{x_0}^{x_1} T(x)\, dx = \int_0^1 T\Big(x_0 + t(x_1 - x_0)\Big)(x_1 - x_0)\, dt.$$

Notar que la función $T\Big(x_0 + [\cdot](x_1 - x_0)\Big)(x_1 - x_0)$ está en las condiciones de la definición 10 con $[a, b] = [0, 1]$.

Si en la definición anterior se considera el caso particular $T = F'$, donde F es un operador de X en Y que tiene derivada continua en el segmento $[x_0, x_1]$, tenemos el siguiente teorema que generaliza la conocida regla de Barrow del cálculo.

Teorema 1.1.9 *En la situación anterior*

$$\int_{x_0}^{x_1} F'(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0).$$

Es importante recordar el siguiente resultado que permite acotar la integral de un operador que esté acotado por una función real.

Lema 1.1.10 *Sea T un operador en las condiciones de la definición 11 y $\phi(t)$ una función real definida en $[0,1]$ e integrable. Si se verifican*

$$\left\|T\Big(x_0 + \tau(x_1 - x_0)\Big)\right\| \le \phi\Big(t_0 + \tau(t_1 - t_0)\Big), \quad \tau \in [0,1]$$

y

$$\|x_1 - x_0\| \le t_1 - t_0,$$

entonces

$$\left\|\int_{x_0}^{x_1} T(x)\,dx\right\| \le \int_{t_0}^{t_1} \phi(t)\,dt.$$

Como caso particular del lema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.1.11 *Si se cumple la desigualdad*

$$\|T(x)\| \le \phi(t)$$

para x y t verificando

$$\|x - x_0\| \le t - t_0,$$

entonces

$$\left\|\int_{x_0}^{x_1} T(x)\,dx\right\| \le \int_{t_0}^{t_1} \phi(t)\,dt,$$

donde x_1 es un elemento que cumple $\|x_1 - x_0\| \le t_1 - t_0$.

Terminamos esta breve introducción a los espacios de Banach con el conocido teorema de Taylor. Aunque hay varios enunciados similares (ver [33]), hemos elegido el siguiente por su comodidad a la hora de utilizarlo.

Teorema 1.1.12 (Teorema de Taylor) *Supongamos que F es un operador n veces diferenciable en la bola $B(x_0, r)$, $r > 0$, y que $F^{(n)}$ es integrable en el segmento $[x_0, x_1]$ con $x_1 \in B(x_0, r)$. Entonces*

$$F(x_1) = F(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(x_0)(x_1 - x_0)^k + R_n(x_0, x_1)$$

donde

$$R_n(x_0,x_1) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x_1} F^{(n)}(x)(x_1-x)^{n-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 F^{(n)}\Big(x_0+t(x_1-x_0)\Big)(x_1-x_0)^n(1-t)^{n-1}\,dt.$$

Notemos que también podemos considerar

$$R_n(x_0,x_1) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x_1}\Big(F^{(n-1)}(x)-F^{(n-1)}(x_0)\Big)\,(x_1-x)^{n-2}\,dx.$$

1.2. El método de Newton en espacios de Banach: el teorema de Newton-Kantorovich

Recogemos en esta sección alguno de los principales resultados obtenidos por Kantorovich sobre la convergencia del método de Newton en espacios de Banach.

En 1948, Kantorovich [72] estableció, utilizando relaciones de recurrencia, un resultado conocido actualmente como Teorema de Kantorovich y que resume los resultados básicos referentes a convergencia del método, estimación del error y unicidad de soluciones (ver también [75], [94] y [96]). Un año más tarde, utilizando sucesiones mayorizantes, el mismo Kantorovich [69], dio otra demostración del mismo teorema.

La técnica de Kantorovich no es la única forma de abordar el estudio del método de Newton en espacios de Banach. Posteriormente, otros autores han estudiado dicho método en distintos contextos. Así, Rheinboldt [110] obtiene resultados acerca de la convergencia del método de Newton como caso particular de unos resultados sobre ecuaciones en diferencias. Destacamos también el estudio realizado por Pták [104], [105] y en colaboración con Potra [101], a partir del método llamado inducción no discreta o inducción continua. La aplicación de este método a los procesos iterativos [102] abrió nuevas vías de estudio, sobre todo en lo relativo al análisis del error [7], [8], [90], [131]. Por último, citamos también los trabajos de Alefeld-Herzberger [2] y Moore [88], en los que se aplican las herramientas del análisis de intervalos para probar la convergencia de procesos iterativos (método de Newton y similares) para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

En esta sección nos ocuparemos del conocido teorema de Newton-Kantorovich. Empezamos introduciendo el concepto de sucesión mayorizante y viendo cómo se emplea para probar la convergencia de sucesiones en espacios de Banach.

Definición 12 *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión en un espacio de Banach* X *y* $\{t_n\}$ *una sucesión de números reales. Diremos que la sucesión* $\{t_n\}$ *mayoriza a* $\{x_n\}$ *si se verifica la condición*

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Observar que del hecho de ser mayorizante se sigue que la sucesión $\{t_n\}$ debe ser creciente. El interés de las sucesiones mayorizantes es que de su convergencia se puede deducir la convergencia de la sucesión en el espacio de Banach. En efecto, si $\{t_n\}$ converge a $t^* < \infty$, entonces existe $x^* \in X$ tal que la sucesión $\{x_n\}$ converge a x^* y además

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

La desigualdad anterior nos permite también obtener cotas del error para la sucesión definida en espacios de Banach en términos de su correspondiente mayorizante.

Introducimos ahora la siguiente notación que utilizaremos a lo largo de toda la memoria:

$$B(x_0, r) = \{x \in X; \|x - x_0\| < r\} \quad \text{y} \quad \overline{B(x_0, r)} = \{x \in X; \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Una vez introducido el concepto de sucesión mayorizante, ya estamos en condiciones de exponer la teoría de Kantorovich para el método de Newton en espacios de Banach. En [75], Kantorovich y Akilov establecen la convergencia del método de Newton exigiendo condiciones al punto de salida de la sucesión y acotando la derivada segunda del operador. Sea F una aplicación entre dos espacios de Banach X e Y de clase $\mathcal{C}^{(2)}(\Omega_0)$ con $\Omega_0 = \overline{B(x_0, r_0)} \subseteq X$. Dichos autores aproximan la solución de la ecuación

$$F(x) = 0 \tag{1.6}$$

mediante el método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n), \quad n \geq 0. \tag{1.7}$$

Para ello, consideran una función real auxiliar f de clase $\mathcal{C}^{(2)}([t_0, t'])$ con $t' - t_0 \leq r_0$, y prueban, bajo las hipótesis descritas a continuación (que llamaremos condiciones generales de Kantorovich), que la convergencia de la sucesión de Newton está garantizada en el espacio de Banach X.

Teorema 1.2.1 *Sea $F : \Omega_0 \subset X \to Y$ un operador dos veces continuamente diferenciable Fréchet definido en el dominio $\Omega_0 = \overline{B(x_0, r_0)}$ contenido en un espacio de Banach X y con valores en un espacio de Banach Y. Sea $f \in \mathcal{C}^{(2)}([t_0, t'])$ una función escalar. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) Existe el operador inverso $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ para un $x_0 \in \Omega$ y es tal que $\|\Gamma_0\| \leq -\dfrac{1}{f'(t_0)}$,

(ii) $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq -\dfrac{f(t_0)}{f'(t_0)}$,

(iii) $\|F''(x)\| \leq f''(t)$ si $\|x - x_0\| \leq t - t_0 \leq r_0$,

(iv) la ecuación $f(t) = 0$ tiene una raíz en $[t_0, t']$.

Entonces el método de Newton (1.7), empezando en x_0, proporciona una sucesión convergente a una raíz x^* de la ecuación (1.6). Además,

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n, \quad n \geq 0,$$

donde t^* es la menor raíz de

$$f(t) = 0 \tag{1.8}$$

en el intervalo $[t_0, t']$. Finalmente, si $f(t') \leq 0$ y (1.8) tiene una sola raíz en $[t_0, t']$, x^* es la única raíz de (1.6) en Ω_0.

En correspondencia con las condiciones de convergencia, el resultado anterior se conoce como teorema general de convergencia semilocal del método de Newton para operadores con derivada segunda acotada.

En la práctica, la aplicación del teorema anterior resulta complicada, ya que en él aparece una función f desconocida. Por ello el siguiente resultado tiene especial interés, puesto que si el operador F cumple ciertas condiciones, podemos considerar en el teorema 1.2.1 como función f el polinomio de segundo grado

$$p(s) = \frac{k}{2}(s - s_0)^2 - \frac{s - s_0}{\beta} + \frac{\eta}{\beta},$$

y obtener así el teorema clásico de Newton-Kantorovich, que prueba la convergencia semilocal del método de Newton (1.7) a partir de las siguientes condiciones, que llamaremos condiciones clásicas de Kantorovich (no confundir con las condiciones generales de Kantorovich, que son las del teorema anterior 1.2.1):

(C_1) $\|\Gamma_0\| \leq \beta$,

(C_2) $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$,

(C_3) $\|F''(x)\| \leq k, \quad x \in \Omega$,

(C_4) $k\beta\eta \leq \dfrac{1}{2}$,

(C_5) $B(x_0, s^* - s_0) \subseteq \Omega$, siendo $s^* = s_0 + \dfrac{1-\sqrt{1-2k\beta\eta}}{k\beta}$,

donde se supone que el operador $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ y existe para algún $x_0 \in \Omega$.

Teorema 1.2.2 (Teorema clásico de Newton-Kantorovich) *Sea $F : \Omega \subseteq X \to Y$ un operador dos veces continuamente diferenciable Fréchet definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω de un espacio de Banach X y con valores en un espacio de Banach Y. Supongamos que se verifican las condiciones (C_1)–(C_5). Entonces la ecuación (1.6) tiene una solución x^* y la sucesión de Newton dada por (1.7) es convergente a esta solución x^* a partir de x_0, verificándose que $x_n, x^* \in \overline{B(x_0, s^* - s_0)}$, para todo $n \geq 0$. Además, si $k\beta\eta < \frac{1}{2}$, x^* es la única solución de $F(x) = 0$ en $B(x_0, s^{**} - s_0) \cap \Omega$ con $s^{**} = s_0 + \dfrac{1+\sqrt{1-2k\beta\eta}}{k\beta}$; y si $k\beta\eta = \frac{1}{2}$, entonces x^* es única en $\overline{B(x_0, s^* - s_0)}$.*

La demostración de los dos teoremas anteriores puede verse en [75].

Por otra parte, sabemos que las propiedades de convergencia dependen de la elección de la distancia $\|\cdot\|$, pero la velocidad de convergencia de una sucesión $\{z_n\}$, para una distancia dada, se caracteriza por la velocidad de convergencia de la sucesión de números no negativos $\{\|z_n - z^*\|\}$, donde $z^* = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$. Una medida muy utilizada habitualmente de la velocidad de convergencia es el R-orden de convergencia [102] que definimos a continuación.

Sean $\{z_n\}$ una sucesión en espacios de Banach $(X, \|\cdot\|)$ que converge a un punto $z^* \in X$, un número $\tau \geq 1$ y

$$e_n(\tau) = \begin{cases} n & \text{si } \tau = 1, \\ \tau^n & \text{si } \tau > 1, \end{cases} \qquad n \geq 0.$$

(i) Decimos que τ es un R-orden de convergencia de la sucesión $\{z_n\}$ si existen dos constantes $b \in (0,1)$ y $B \in (0,+\infty)$ tales que

$$\|z_n - z^*\| \leq B b^{e_n(\tau)}.$$

(ii) Decimos que τ es el R-orden de convergencia de la sucesión $\{z_n\}$ si existen constantes $a, b \in (0,1)$ y $A, B \in (0,+\infty)$ tales que

$$A a^{e_n(\tau)} \leq \|z_n - z^*\| \leq B b^{e_n(\tau)}, \quad n \geq 0.$$

En general, comprobar la doble acotación de (ii) es complicado, por eso normalmente solo se buscan acotaciones superiores como las de (i). Por tanto, si encontramos un R-orden de convergencia τ de la sucesión $\{z_n\}$, entonces diremos que la sucesión $\{z_n\}$ tiene R-orden de convergencia al menos τ. Este es el argumento utilizado habitualmente para estudiar el orden de convergencia de un método iterativo.

Utilizando la definición anterior de R-orden de convergencia, es conocido que el método de Newton (1.7) tiene R-orden de convergencia al menos dos ([75]).

Capítulo 2

Generalización de las condiciones clásicas de Newton-Kantorovich

2.1. Introducción

Como se ha indicado en la introducción, uno de los objetivos de esta memoria es modificar las condiciones clásicas de Kantorovich; más en concreto la condición (C_3) del teorema 1.2.2 de Kantorovich. En este capítulo suavizaremos dicha condición por la siguiente:

$$\|F''(x)\| \leq \omega(\|x\|), \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

donde $\omega : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+$ es una función continua no decreciente. Obviamente la condición (2.1) generaliza la condición (C_3) del teorema 1.2.2 de Newton-Kantorovich.

A partir de las condiciones (C_1)–(C_3) del teorema 1.2.2 de Newton-Kantorovich, Kantorovich construye su sucesión mayorizante aplicando el método de Newton,

$$\text{dado } s_0, \;\; s_{n+1} = s_n - \frac{f(s_n)}{f'(s_n)}, \quad n \geq 0,$$

a una función escalar f por determinar que verifique:

$$-\frac{1}{f'(s_0)} = \beta, \quad -\frac{f(s_0)}{f'(s_0)} = \eta \quad \text{y} \quad f''(s) = k, \quad s \in [s_0, s'],$$

donde $s_0 \geq 0$, $s' \in \mathbb{R}$ y $s' - s_0 \leq s^* - s_0$, siendo s^* la solución real más pequeña mayor que s_0 de la ecuación $f(s) = 0$.

Para obtener la función escalar f, Kantorovich considera, a partir de (C_3), que ésta es un polinomio de segundo grado y ajusta los coeficientes de este polinomio mediante las tres condiciones anteriores, obteniendo

$$p(s) = \frac{k}{2}(s - s_0)^2 - \frac{s - s_0}{\beta} + \frac{\eta}{\beta}\,. \tag{2.2}$$

Observamos que este problema es un ejercicio de ajuste interpolatorio.

A partir de la convergencia de la sucesión escalar anterior $\{s_n\}$, Kantorovich prueba la convergencia semilocal del método de Newton en espacios de Banach. Así, nuestro siguiente objetivo es construir, a partir de la condición (2.1), una función que nos permita definir una sucesión escalar que mayorice la sucesión de Newton en espacios de Banach. El tratamiento que vamos a hacer del problema que acabamos de plantear es paralelo al realizado por Kantorovich pero con algunas modificaciones.

En primer lugar, observamos que en general ω no será una función constante, como en el caso de Kantorovich, lo que nos lleva a construir una sucesión mayorizante *ad hoc*, adaptándola al problema considerado, ya que la condición (2.1) da más información sobre el operador F que la condición (C_3).

En segundo lugar, mientras Kantorovich construye el polinomio (2.2) mediante ajuste interpolatorio, en nuestro caso, si consideramos (C_1), (C_2) y (2.1) no podemos obtener una función escalar f resolviendo un problema de tipo interpolatorio, tal y como se hace para el polinomio de Kantorovich, ya que (2.1) no permite determinar la clase de funciones a las que podemos aplicar (C_1) y (C_2). Veremos que en nuestro caso podemos obtener las funciones escalares, a partir de las cuales se construyen las sucesiones mayorizantes para el método de Newton, resolviendo problemas de valor inicial. Analizaremos aquí dos situaciones. La primera que sale de forma natural, sección 2.2, y la segunda que se desarrolla para solventar el problema que presenta la primera y que está relacionado con la independencia entre las aproximaciones iniciales del método de Newton en el espacio de Banach X y de su sucesión mayorizante en la recta real, sección 2.3. Veremos que la segunda situación cuando la función ω es constante es precisamente la correspondiente al teorema 1.2.2 de Newton-Kantorovich.

En tercer lugar, utilizaremos el significado teórico del método de Newton para obtener conclusiones acerca de la existencia y unicidad de solución de la ecuación no lineal a resolver. Además, también ajustaremos las cotas a priori del error para el método de Newton siguiendo la técnica de Ostrowski [96]. Asimismo, bajo las nuevas condiciones de convergencia, conseguiremos también un resultado de convergencia local que generaliza el dado por Dennis y Schnabel en [46].

En cuarto lugar, veremos dos aplicaciones del método de Newton que aparecen frecuentemente en problemas de la vida real. En concreto, analizaremos la resolución, mediante el método de Newton, de ecuaciones integrales no lineales de tipo Hammerstein mixto y de la ecuación de Bratu. En ambos casos se utilizará todo lo desarrollado teóricamente a lo largo del capítulo.

2.2. Planteamiento de partida

2.2.1. Resultados principales

Siguiendo la teoría de Kantorovich, necesitamos en primer lugar un resultado general de convergencia semilocal que, bajo la condición (2.1), resulta una modificación del teorema general 1.2.1 de Kantorovich. En nuestro caso, a partir de (2.1), tendremos que

$$\|F''(x)\| \leq \omega(\|x\|) \leq \omega(t) = f''(t),$$

siempre que $\|x\| \leq t$ por ser ω no decreciente.

Comenzamos enunciando el siguiente resultado general de convergencia semilocal.

Teorema 2.2.1 *Sean el operador F definido en las condiciones habituales, $x_0 \in \Omega$ y una función escalar $f \in \mathcal{C}^{(2)}([\|x_0\|, t'])$. Tomamos $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\|x_0\| \leq t_0$ y además se verifican las siguientes condiciones:*

(K_1) *el operador $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1}$ está definido y $\|\Gamma_0\| \leq -\dfrac{1}{f'(t_0)}$,*

(K_2) $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq -\dfrac{f(t_0)}{f'(t_0)}$,

(K_3) $\|F''(x)\| \leq f''(t)$ *si* $\|x\| \leq t$, *con* $x \in \Omega$ *y* $t \in [\|x_0\|, t']$,

(K_4) $f(t) = 0$ *tiene una única raíz* t^* *en* $[\|x_0\|, t']$,

(K_5) $B(x_0, t^* - \|x_0\|) \subseteq \Omega$.

Entonces la ecuación $F(x)=0$ tiene una solución x^* y la sucesión de Newton (1.7) es convergente a esta solución a partir de x_0. Además, $x_n, x^* \in \overline{B(x_0, t^* - \|x_0\|)}$ y

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n, \quad n \geq 0,$$

donde $t_n = t_{n-1} - \dfrac{f(t_{n-1})}{f'(t_{n-1})}$, para todo $n \geq 1$.

Demostración. En primer lugar, probaremos que la sucesión $\{t_n\}$ es creciente y converge a t^*. Para ello, comenzamos viendo que la sucesión $\{t_n\}$ es monótona y acotada.

Es fácil probar por inducción que $t_n \leq t^*$ para todo n. Como $f(t_0) > 0$, tenemos que $t_0 - t^* \leq 0$. Además,

$$t_1 - t^* = N_f(t_0) - N_f(t^*) = N_f'(\xi_0)(t_0 - t^*), \quad \xi_0 \in (t_0, t^*),$$

y $N_f(t) = t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}$. Notemos que $N_f'(t) = \dfrac{f(t)f''(t)}{f'(t)^2} > 0$ en $[t_0, t^*)$, puesto que f decrece en $[t_0, t^*)$ por ser $f'(t_0) < 0$ y $f'(t) < 0$ en $[t_0, t^*)$, como consecuencia de que f' es creciente al ser $f''(t) \geq 0$ en $[\|x_0\|, t']$. En consecuencia, $t_1 \leq t^*$. Suponemos ahora que $t_j \leq t^*$, para $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Como

$$t_n - t^* = N_f(t_{n-1}) - N_f(t^*) = N_f'(\xi_{n-1})(t_{n-1} - t^*), \quad \xi_{n-1} \in (t_{n-1}, t^*),$$

se sigue análogamente al caso $j = 1$ que $t_n \leq t^*$.

Por otra parte, observamos que

$$t_n - t_{n-1} = -\frac{f(t_{n-1})}{f'(t_{n-1})} \geq 0,$$

ya que $f(t) > 0$ y $f'(t) < 0$ en $[t_0, t^*)$. Luego la sucesión $\{t_n\}$ es creciente.

En consecuencia, $\{t_n\}$ es convergente por ser monótona y acotada. Por tanto, existe $u \in [\|x_0\|, t']$, $u \leq t^*$, tal que $u = \lim_{n \to +\infty} t_n$. Tomando ahora límites en $t_{n+1} = N_f(t_n)$, $n \geq 0$, obtenemos que $f(u) = 0$. Como t^* es la única raíz de $f(t) = 0$ en $[\|x_0\|, t']$, se sigue que $u = t^*$.

En segundo lugar, probaremos por inducción que $x_n \in \Omega$, para todo n. Observamos que x_1 está bien definido porque $x_1 = x_0 - \Gamma_0 F(x_0)$ y Γ_0 existe. Además, como

$$\|x_1 - x_0\| = \|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq -\frac{f(t_0)}{f'(t_0)} = t_1 - t_0 \leq t^* - t_0 \leq t^* - \|x_0\|,$$

es claro que $x_1 \in B(x_0, t^* - \|x_0\|) \subset \Omega$.

A continuación, notamos que

$$\begin{aligned}
\|I - \Gamma_0 F'(x_1)\| &\leq \|\Gamma_0\| \|F'(x_1) - F'(x_0)\| \leq \|\Gamma_0\| \left\| \int_{x_0}^{x_1} F''(x)\, dx \right\| \\
&\leq \|\Gamma_0\| \left\| \int_0^1 F''\Big(x_0 + t(x_1 - x_0)\Big)(x_1 - x_0)\, dt \right\| \\
&\leq -\frac{1}{f'(t_0)} \int_0^1 f''\Big(t_0 + t(t_1 - t_0)\Big)(t_1 - t_0)\, dt \\
&\leq -\frac{1}{f'(t_0)} \int_{t_0}^{t_1} f''(t)\, dt = -\frac{1}{f'(t_0)}\Big(f'(t_1) - f'(t_0)\Big) \\
&= 1 - \frac{f'(t_1)}{f'(t_0)} < 1,
\end{aligned}$$

ya que $f'(t_1) > f'(t_0)$, por ser $f''(t) \geq 0$ en $[\|x_0\|, t']$, y $0 < \dfrac{f'(t_1)}{f'(t_0)} < 1$, por ser $f'(t_1) < 0$,

$$\|x_0 + t(x_1 - x_0)\| \leq \|x_0\| + t\|x_1 - x_0\| \leq t_0 + t(t_1 - t_0) \quad \text{si} \quad \|x_0\| \leq t_0 \tag{2.3}$$

y $\|x_1 - x_0\| \leq t_1 - t_0$. Luego existe Γ_1 y por el lema de Banach sobre inversión de operadores [75],

$$\|\Gamma_1\| \leq \frac{\|\Gamma_0\|}{1 - \|I - \Gamma_0 F'(x_1)\|} \leq \frac{-\frac{1}{f'(t_0)}}{\frac{f'(t_1)}{f'(t_0)}} = -\frac{1}{f'(t_1)}.$$

Además, utilizando (1.7), observamos que

$$\begin{aligned}
F(x_1) &= F(x_0) + F'(x_0)(x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} F''(x)(x_1 - x)\, dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} F''(x)(x_1 - x) dx \\
&= \int_0^1 F''\Big(x_0 + t(x_1 - x_0)\Big)(1 - t)(x_1 - x_0)^2\, dt
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|F(x_1)\| &= \int_0^1 \left\|F''\Big(x_0 + t(x_1 - x_0)\Big)\right\|(1 - t)\|x_1 - x_0\|^2\, dt \\
&\leq \int_0^1 f''\Big(t_0 + t(t_1 - t_0)\Big)(1 - t)(t_1 - t_0)^2\, dt = \int_{t_0}^{t_1} f''(t)(t_1 - t)\, dt \\
&= f(t_1),
\end{aligned}$$

por cumplirse (2.3), tenemos que $\|x_2-x_1\| = \|\Gamma_1 F(x_1)\| \leq \|\Gamma_1\|\|F(x_1)\| \leq -\dfrac{f(t_1)}{f'(t_1)} = t_2 - t_1$.

Por tanto, $\|x_2 - x_0\| \leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq t_2 - t_1 + t_1 - t_0 = t_2 - t_0 \leq t^* - t_0 \leq t^* - \|x_0\|$ y $x_2 \in B(x_0, t^* - \|x_0\|) \subset \Omega$.

Si suponemos ahora que existe Γ_j con

$$\|\Gamma_j\| \leq -\frac{1}{f'(t_j)}, \quad \|F(x_j)\| \leq f(t_j), \quad \|x_{j+1} - x_j\| \leq t_{j+1} - t_j$$

y $x_{j+1} \in B(x_0, t^* - \|x_0\|) \subset \Omega$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n-1$, probamos por inducción y análogamente al caso $j = 1$ que $x_{n+1} \in B(x_0, t^* - \|x_0\|) \subset \Omega$, para todo n.

Como $\|x_n - x_{n-1}\| \leq t_n - t_{n-1}$, observamos que

$$\begin{aligned}
\|I - \Gamma_{n-1}F'(x_n)\| &\leq \|\Gamma_{n-1}\|\|F'(x_n) - F'(x_{n-1})\| \\
&\leq \|\Gamma_{n-1}\| \left\| \int_{x_{n-1}}^{x_n} F''(x)\, dx \right\| \\
&\leq \|\Gamma_{n-1}\| \left\| \int_0^1 F''\Big(x_{n-1} + t(x_n - x_{n-1})\Big)(x_n - x_{n-1})\, dt \right\| \\
&\leq -\frac{1}{f'(t_{n-1})} \int_0^1 f''\Big(t_{n-1} + t(t_n - t_{n-1})\Big)\, dt \|x_n - x_{n-1}\| \\
&\leq -\frac{1}{f'(t_{n-1})} \int_{t_{n-1}}^{t_n} f''(t)dt \\
&= -\frac{1}{f'(t_{n-1})} \Big(f'(t_n) - f'(t_{n-1})\Big) \\
&= 1 - \frac{f'(t_n)}{f'(t_{n-1})} < 1,
\end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned}
\|x_{n-1} + t(x_n - x_{n-1})\| &\leq \|x_{n-1} - x_0\| + \|x_0\| + t\|x_n - x_{n-1}\| \\
&\leq t_{n-1} - t_0 + t_0 + t(t_n - t_{n-1}) \leq t_{n-1} \\
&\quad +t(t_n - t_{n-1}).
\end{aligned}$$

Luego, por el lema de Banach sobre inversión de operadores, existe Γ_n y

$$\|\Gamma_n\| \leq \frac{\|\Gamma_{n-1}\|}{1 - \|I - \Gamma_{n-1}F'(x_n)\|} \leq \frac{-\frac{1}{f'(t_{n-1})}}{\frac{f'(t_n)}{f'(t_{n-1})}} = -\frac{1}{f'(t_n)}.$$

Volviendo a utilizar (1.7) para desarrollar

$$
\begin{aligned}
F(x_n) &= F(x_{n-1}) + F'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x_n} F''(x)(x_n - x)\,dx \\
&= \int_{x_{n-1}}^{x_n} F''(x)(x_n - x)\,dx \\
&= \int_0^1 F''\Big(x_{n-1} + t(x_n - x_{n-1})\Big)(1-t)(x_n - x_{n-1})^2\,dt
\end{aligned}
$$

y utilizando (2.3), se sigue que

$$
\begin{aligned}
\|F(x_n)\| &= \int_0^1 \Big\|F''\Big(x_{n-1} + t(x_n - x_{n-1})\Big)\Big\|(1-t)\|x_n - x_{n-1}\|^2\,dt \\
&\leq \int_0^1 f''\Big(t_{n-1} + t(t_n - t_{n-1})\Big)(1-t)(t_n - t_{n-1})^2\,dt \\
&= \int_{t_{n-1}}^{t_n} f''(t)(t_n - t)\,dt = f(t_n),
\end{aligned}
$$

de manera que $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \|\Gamma_n\|\|F(x_n)\| \leq -\dfrac{f(t_n)}{f'(t_n)} = t_{n+1} - t_n$.

En consecuencia, $\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_0\| \leq t_{n+1} - t_n + t_n - t_0 = t_{n+1} - t_0 \leq t^* - t_0 \leq t^* - \|x_0\|$ y $x_{n+1} \in B(x_0, t^* - \|x_0\|) \subset \Omega$.

Por tanto, la sucesión $\{x_n\}$ está bien definida, contenida en Ω y cumple que $\|x_n - x_{n-1}\| \leq t_n - t_{n-1}$, para todo n. Luego, t_n es una sucesión mayorizante de $\{x_n\}$. Entonces, existe $\lim_n x_n = x^*$ y $\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n$, para todo n.

Ahora, a partir de la expresión que tiene el método de Newton, está claro que $F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$, y como $\{\|F'(x_n)\|\}$ es una sucesión acotada, ya que

$$
\begin{aligned}
\|F'(x_n)\| &\leq \|F'(x_0)\| + \sup_{0<\theta<1} \Big\|F''\Big(x_n + \theta(x_n - x_0)\Big)\Big\|\|x_n - x_0\| \\
&\leq \|F'(x_0)\| + \max_{0<\theta<1} \Big|f''\Big(t_n + \theta(t_n - t_0)\Big)\Big|(t^* - t_0),
\end{aligned}
$$

tomando límites en la igualdad anterior, obtenemos $F(x^*) = 0$ por la continuidad del operador F. Por consiguiente, x^* es solución de $F(x) = 0$. ■

Notemos que el anterior teorema general de convergencia (teorema 2.2.1) para el método de Newton se diferencia del establecido por Kantorovich en la dependencia que presenta del valor t_0 y su relación con $\|x_0\|$, lo que se pone de manifiesto posteriormente.

Una vez visto este teorema, vamos a obtener dos resultados de convergencia en función de las condiciones que elijamos para construir la función f. Estos casos dependerán de si $\omega(\|x\|)$ es una función constante o no en (2.1). El caso constante corresponde a la situación considerada por Kantorovich.

En el primer caso acotamos la segunda derivada del operador F por una constante k y mediante interpolación (al igual que hace Kantorovich) obtenemos que la función f es un polinomio, lo que nos lleva al siguiente resultado.

Teorema 2.2.2 *Sea el operador F definido en las condiciones habituales. Supongamos que $\|x_0\| \leq t_0$, con $x_0 \in \Omega$, y que se verifican las siguientes condiciones:*

(C_1) *el operador $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1}$ está definido y $\|\Gamma_0\| \leq \beta$,*

(C_2) $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$,

(C_3) $\|F''(x)\| \leq k$ *en* Ω,

(C_4) $k\beta\eta \leq \dfrac{1}{2}$,

(C_5) $B(x_0, \rho_1 - \|x_0\|) \subseteq \Omega$, *donde ρ_1 es la raíz positiva más pequeña del polinomio*

$$f(t) = \frac{k}{2}(t - t_0)^2 - \frac{t - t_0}{\beta} + \frac{\eta}{\beta} \cdot \tag{2.4}$$

Entonces la ecuación $F(x) = 0$ tiene una solución x^* y la sucesión de Newton dada por (1.7) es convergente a esta solución a partir de x_0. Además, $x_n, x^* \in \overline{B(x_0, \rho_1 - \|x_0\|)}$ y

$$\|x^* - x_n\| \leq \rho_1 - t_n, \quad n \geq 0,$$

donde $t_n = t_{n-1} - \dfrac{f(t_{n-1})}{f'(t_{n-1})}$, para todo $n \geq 1$.

Demostración. La demostración del teorema 2.2.2 se sigue del teorema 2.2.1. Debemos entonces determinar la función f en primer lugar. Observamos que a partir de las condiciones (C_1), (C_2) y (C_3) podemos calcular f mediante el polinomio de interpolación de segundo grado que se ajusta a las siguientes condiciones:

$$-\frac{1}{f'(t_0)} = \beta, \quad -\frac{f(t_0)}{f'(t_0)} = \eta \quad \text{y} \quad f''(t) = k.$$

Así, $f(t) = \dfrac{k}{2}(t-t_0)^2 - \dfrac{t-t_0}{\beta} + \dfrac{\eta}{\beta}$ definido en $[t_0, t']$.

A continuación vemos que el polinomio f obtenido en la línea anterior cumple las condiciones del teorema 2.2.1. Está claro que $f \in \mathcal{C}^{(2)}([t_0, t'])$, siendo $t' \geq \rho_1 = \dfrac{1 + k\beta t_0 + \sqrt{1 - 2k\beta\eta}}{k\beta}$. Las condiciones (K_1) y (K_2) del teorema 2.2.1 se siguen obviamente y la condición (K_3) es trivial, ya que

$$\|F''(x)\| \leq f''(t) = k \quad \text{para} \quad \|x\| \leq t \in [\|x_0\|, t'].$$

Las condiciones (K_4) y (K_5) son inmediatas sin más que tener en cuenta que

$$\rho_1 = \frac{1 + k\beta t_0 + \sqrt{1 - 2k\beta\eta}}{k\beta} \quad \text{y} \quad \rho_2 = \frac{1 + k\beta t_0 - \sqrt{1 - 2k\beta\eta}}{k\beta}.$$

son las raíces reales de $f(t) = 0$, puesto que $k\beta\eta \leq \dfrac{1}{2}$ y $t^* = \rho_1$. Finalmente, tenemos que $\|x^* - x_0\| \leq \rho_1 - \|x_0\|$ por ser $\|x^* - x_0\| \leq t^* - t_0 \leq t^* - \|x_0\|$. ■

Observamos que, a diferencia del teorema clásico de Newton-Kantorovich (teorema 1.2.2), en este caso existe una dependencia entre los puntos de salida t_0 de la sucesión mayorizante y los puntos de salida x_0 de la sucesión en el espacio de Banach X, puesto que necesitamos que $\|x_0\| \leq t_0$.

En el caso anterior, en el que $\omega(\|x\|) = k$, podemos encontrar la función escalar f tal y como lo hace Kantorovich, resolviendo un problema de tipo interpolatorio. Por otra parte, también observamos que el polinomio dado en (2.2) se puede construir de forma diferente, sin utilizar un ajuste interpolatorio, sin más que resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(s) - k = 0, \\ y(s_0) = \dfrac{\eta}{\beta}, \quad y'(s_0) = -\dfrac{1}{\beta}. \end{cases}$$

En efecto, integrando la ecuación diferencial y teniendo en cuenta que $y'(s_0) = -\dfrac{1}{\beta}$, tenemos $y'(s) = k(s - s_0) - \dfrac{1}{\beta}$; e integrando de nuevo y teniendo en cuenta $y(s_0) = \dfrac{\eta}{\beta}$, se sigue

$$y(s) = \frac{k}{2}(s - s_0)^2 - \frac{s - s_0}{\beta} + \frac{\eta}{\beta}\,. \tag{2.5}$$

Obviamente, obtenemos el mismo polinomio (2.2) que Kantorovich.

Este nuevo enfoque para obtener el polinomio de Kantorovich tiene una ventaja: permite generalizar el procedimiento anterior a las condiciones (C_1), (C_2) y (2.1). Para ello, en primer lugar, observamos que

$$\|F''(x)\| \leq \omega(\|x\|) \leq \omega(t),$$

siempre que $\|x\| \leq t$ por ser ω no decreciente. Por tanto, en vez de (2.1), consideramos

$$\|F''(x)\| \leq \omega(t), \text{ para } \|x\| \leq t,$$

con $\omega : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua, no decreciente y tal que $\omega(t_0) \geq 0$. El correspondiente problema de valor inicial a resolver será entonces:

$$\begin{cases} y''(t) - \omega(t) = 0, \\ y(t_0) = \dfrac{\eta}{\beta}, \quad y'(t_0) = -\dfrac{1}{\beta}. \end{cases} \tag{2.6}$$

A partir de los comentarios anteriores enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 2.2.3 *Supongamos que $\omega(t)$ es una función continua para todo $t \in [t_0, t']$. Entonces, para cualesquiera números reales $\beta \neq 0$ y η, existe una única solución $f(t)$ en $[t_0, t']$ del problema de valor inicial (2.6), que es:*

$$f(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\theta} \omega(\xi)\, d\xi\, d\theta - \frac{t - t_0}{\beta} + \frac{\eta}{\beta}, \tag{2.7}$$

donde ω es la función que se define a partir de (2.1).

Observar que (2.7) se reduce al polinomio (2.5) si $\omega(t)$ es una función constante y $t_0 = s_0$.

A partir de ahora supondremos entonces que se verifican las siguientes condiciones:

(A_1) $x_0 \in \Omega$, el operador $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1}$ está definido y $\|\Gamma_0\| \leq \beta$,

(A_2) $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$,

(A_3) $\|F''(x)\| \leq \omega(\|x\|)$, con $x \in \Omega$, donde $\omega : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ es una función continua no decreciente,

(A_4) $f(\alpha) \leq 0$, donde $f(t)$ es la función definida en (2.7) y α es una solución positiva de $W(t) - W(t_0) - \dfrac{1}{\beta} = 0$, siendo $W(t)$ una primitiva de $\omega(t)$,

(A_5) $B(x_0, t^* - \|x_0\|) \subseteq \Omega$, donde t^* es la menor raíz de $f(t) = 0$ en $[t_0, +\infty)$.

Como se puede ver en el teorema 1.2.2 de Kantorovich, la sucesión mayorizante $\{s_n\}$ que allí se construye, a partir del método de Newton y utilizando el polinomio (2.2) con $s_0 = 0$, converge a la menor raíz positiva s^* de la ecuación $p(s) = 0$. Esta convergencia es evidente debido a que el polinomio $p(s)$ es una función decreciente y convexa en $[s_0, s']$. Por tanto, si queremos aplicar la técnica de las sucesiones mayorizantes a nuestra situación particular, por analogía con Kantorovich, la ecuación $f(t) = 0$ tendrá que tener al menos una raíz mayor que t_0 a la cual tendremos que asegurar la convergencia de la sucesión escalar

$$t_{n+1} = N_f(t_n) = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}, \quad n \geq 0, \tag{2.8}$$

a partir de t_0, para poder obtener así una sucesión mayorizante bajo las condiciones (C_1), (C_2) y (2.1). Resulta evidente que lo primero que necesitamos es estudiar la función f dada en (2.7) con el objetivo de que esto nos conduzca al correspondiente resultado de convergencia semilocal para el método de Newton bajo las condiciones (A_1)–(A_5). Comenzamos obteniendo algunas propiedades de la función (2.7).

Lema 2.2.4 *Sean f la función definida en (2.7) y ω la función dada en (A_3).*

a) Si W es una primitiva de la función ω en $\mathbb{R}_+$ y existe una solución $\alpha > 0$ de la ecuación

$$W(t) - W(t_0) - \frac{1}{\beta} = 0,$$

entonces α es el único mínimo de f en $\mathbb{R}_+$.

b) $t_0 < \alpha$ y la función f decrece en (t_0, α).

c) Si $f(\alpha) \leq 0$, entonces la ecuación $f(t) = 0$ tiene al menos una solución en $\mathbb{R}_+$. Si denotamos por t^* a la raíz positiva más pequeña de $f(t) = 0$, se tiene además que $t_0 < t^* \leq \alpha$.

Demostración.

a) Como $f'(\alpha) = W(\alpha) - W(t_0) - \dfrac{1}{\beta} = 0$ y $f''(t) = \omega(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, entonces α es un mínimo de f en $\mathbb{R}_+$. Además, al ser f convexa en $\mathbb{R}_+$, α es el único mínimo de f en $\mathbb{R}_+$.

b) Sabemos que f es convexa, luego f' es creciente. Como $f'(t_0) = -\dfrac{1}{\beta} < 0$ y $f'(\alpha) = 0$, entonces $t_0 < \alpha$ y $f'(t) < 0$ en (t_0, α). Luego f decrece en (t_0, α).

c) Si $f(\alpha) < 0$, como $f(t_0) = \dfrac{\eta}{\beta} > 0$ y $f(\alpha) < 0$, entonces f tiene al menos una raíz en $\mathbb{R}_+$ por ser una función continua. Como f es decreciente en (t_0, α), entonces t^* es raíz de f y $t_0 < t^* < \alpha$. Si $f(\alpha) = 0$, entonces α es una raíz doble de f y tomamos $t^* = \alpha$. ■

Enunciamos ahora el resultado de convergencia semilocal para la sucesión de Newton (1.7) en el espacio de Banach X.

Teorema 2.2.5 *Sea el operador F definido en las condiciones habituales. Supongamos que $\|x_0\| \leq t_0$, con $x_0 \in \Omega$, y que se verifican las condiciones (A_1)–(A_5). Entonces, la ecuación $F(x) = 0$ tiene una solución x^* y la sucesión de Newton (1.7) es convergente a esta solución a partir de x_0. Además, $x_n, x^* \in \overline{B(x_0, t^* - \|x_0\|)}$, para todo n, y*

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n, \quad n \geq 0,$$

donde $t_n = t_{n-1} - \dfrac{f(t_{n-1})}{f'(t_{n-1})}$, para todo $n \geq 1$, y f definida en (2.7).

Demostración. Demostramos el teorema 2.2.5 a partir del teorema 2.2.1. Para ello, tenemos que ver que la función (2.7) cumple las condiciones del teorema 2.2.1. Está claro que $f \in \mathcal{C}^{(2)}([t_0, t'])$, con $t' \geq t^*$. El cumplimiento de (K_1) y (K_2) es obvio y el de (K_3) se sigue de forma inmediata, ya que

$$\|F''(x)\| \leq \omega(\|x\|) \leq \omega(t) = f''(t) \quad \text{para} \quad \|x\| \leq t, \quad \text{con} \quad t \in [\|x_0\|, t'].$$

Para que se cumplan las condiciones (K_4) y (K_5), basta tener en cuenta que $f(\alpha) \leq 0$. Para terminar vemos que $\|x^* - x_0\| \leq t^* - t_0 \leq t^* - \|x_0\|$. ■

Nota 2.2.6 *Notemos que si $k\beta\eta = \dfrac{1}{2}$ en el teorema 2.2.2 y $f(\alpha) = 0$ en el teorema 2.2.5, entonces las respectivas funciones f tienen una raíz doble.*

2.2.2. Aplicación al cálculo de la raíz n-ésima

Veamos a continuación un ejemplo en el que se pone de manifiesto todo lo estudiado anteriormente. Discutiremos la aplicación del método de Newton a partir de los teoremas 2.2.2 y 2.2.5 cuando se quiere aproximar la raíz n-ésima de un número real positivo a.

Consideramos entonces la ecuación $F(x) = 0$, donde $F : \Omega = (-M, M) \to \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$, y $F(x) = x^n - a$, con $M^n > a$, $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ y $a \in \mathbb{R}_+$. En este caso,

$$\|\Gamma_0\| = \frac{1}{|F'(x_0)|} = \frac{1}{n|x_0|^{n-1}} = \beta, \quad \|\Gamma_0 F(x_0)\| = \left|\frac{F(x_0)}{F'(x_0)}\right| = \frac{|x_0^n - a|}{n|x_0|^{n-1}} = \eta,$$

$$\|F''(x)\| = n(n-1)|x|^{n-2}, \quad k = n(n-1)M^{n-2} \quad \text{y} \quad \omega(t) = n(n-1)t^{n-2}.$$

En primer lugar, analizamos la aplicación del método de Newton a partir del teorema 2.2.2. Por tanto, se tiene que cumplir

$$\frac{1}{2} \geq k\beta\eta = \frac{n-1}{n} M^{n-2} \frac{|x_0^n - a|}{|x_0|^{2n-2}} \Leftrightarrow \frac{|x_0^n - a|}{|x_0|^{2n-2}} \leq \frac{n}{2(n-1)M^{n-2}} \tag{2.9}$$

y que $|x_0| \leq t_0$. Para ver (2.9) consideramos cuatro situaciones diferentes que se pueden dar:

$$x_0 \in (-M, -\sqrt[n]{a}), \quad x_0 \in (-\sqrt[n]{a}, 0), \quad x_0 \in (0, \sqrt[n]{a}), \quad x_0 \in (\sqrt[n]{a}, M). \tag{2.10}$$

Si $x_0 \in (-M, -\sqrt[n]{a})$, hay que distinguir si n es par o impar. Comenzando con el caso en que n es impar, está claro que (2.9) se cumple si

$$n x_0^{2n-2} + 2(n-1)M^{n-2}x_0^n - 2(n-1)M^{n-2}a \equiv g(x_0, M) > 0,$$

puesto que $|x_0^n - a| = a - x_0^n$. Pero la desigualdad anterior no se cumple nunca porque g es creciente en $(-M, M)$ para la primera variable por ser $x_0^{n-2} + M^{n-2} \geq 0$ y

$$\frac{\partial g(x_0, M)}{\partial x_0} = (x_0^{n-2} + M^{n-2})2n(n-1)x_0^{n-1} \geq 0.$$

Si ahora consideramos que n es par, entonces (2.9) se cumple si

$$n x_0^{2n-2} - 2(n-1)M^{n-2}x_0^n + 2(n-1)M^{n-2}a \equiv h(x_0, M) > 0,$$

puesto que $|x_0^n - a| = x_0^n - a$. Como $x_0^{n-2} - M^{n-2} \leq 0$, entonces h es creciente en $(-M, M)$ para la primera variable puesto que

$$\frac{\partial h(x_0, M)}{\partial x_0} = (x_0^{n-2} - M^{n-2})2n(n-1)x_0^{n-1} \geq 0,$$

de manera que

$$h(x_0, M) > h(-M, M) = M^{n-2}\Big((2-n)M^n + 2(n-1)a\Big).$$

Notemos ahora que si $(2-n)M^n+2(n-1)a \geq 0$, entonces $h(x_0, M) > 0$ siempre. En caso contrario, como h es continua, $h(x_0, M)$ se anulará para algún x_0, que denotamos por s^{**} (es decir, $h(s^{**}, M) = 0$). Para que se cumpla que $h(x_0, M) > 0$, es necesario que $x_0 \in (s^{**}, -\sqrt[n]{a})$, puesto que $x_0 < -\sqrt[n]{a}$ y $s^{**} \in (-M, -\sqrt[n]{a})$.

Los otros tres casos se analizan de forma similar y se llega a las siguientes conclusiones. Si n es impar, entonces

$$x_0 \in (r^*, \sqrt[n]{a}) \cup (\sqrt[n]{a}, s^*) \quad \text{si} \quad M \geq \sqrt[n]{\frac{2(1-n)a}{2-n}},$$

$$x_0 \in (r^*, \sqrt[n]{a}) \cup (\sqrt[n]{a}, M) \quad \text{si} \quad M \leq \sqrt[n]{\frac{2(1-n)a}{2-n}},$$

donde r^* es tal que $g(r^*, M) = 0$ y s^* tal que $h(s^*, M) = 0$. Y si n es par, vemos que

$$x_0 \in (s^{**}, -\sqrt[n]{a}) \cup (r^*, -\sqrt[n]{a}) \cup (\sqrt[n]{a}, s^*) \quad \text{si} \quad M \geq \sqrt[n]{\frac{2(1-n)a}{2-n}},$$

$$x_0 \in (-M, -\sqrt[n]{a}) \cup (r^*, \sqrt[n]{a}) \cup (\sqrt[n]{a}, M) \quad \text{si} \quad M \leq \sqrt[n]{\frac{2(1-n)a}{2-n}},$$

$$x_0 \in (-\sqrt[n]{a}, r^{**}) \quad \text{si} \quad M \leq \sqrt[n-2]{\frac{na^{\frac{2n-2}{n}}}{4(n-1)a}},$$

donde r^* y r^{**} son tales que $g(r^*, M) = 0 = g(r^{**}, M)$, y s^* y s^{**} tales que $h(s^*, M) = 0 = h(s^{**}, M)$.

En segundo lugar, analizamos la aplicación del método de Newton a partir del teorema 2.2.5. En este caso, como $\omega(t) = n(n-1)t^{n-2}$, tenemos que

$$W(t) - W(t_0) - \frac{1}{\beta} = nt^{n-1} - nt_0^{n-1} - n|x_0|^{n-1} = 0,$$

de manera que $\alpha = \sqrt[n-1]{t_0^{n-1} + |x_0|^{n-1}} > 0$. Además, como

$$f(t) = t^n - n\Big(t_0^{n-1} + |x_0|^{n-1}\Big)t - \Big(t_0^n - n\Big(t_0^{n-1} + |x_0|^{n-1}\Big)t_0\Big) + |x_0^n - a|,$$

se sigue que

$$f(\alpha) = (1-n)\Big(t_0^{n-1} + |x_0|^{n-1}\Big)^{\frac{n}{n-1}} - t_0^n + n\Big(t_0^{n-1} + |x_0|^{n-1}\Big)t_0 + |x_0^n - a|.$$

Para aplicar el teorema 2.2.5, tenemos que ver cuándo se cumplen $|x_0| \leq t_0$ y $f(\alpha) < 0$. Para ver esto, estudiamos, como en el caso anterior, las cuatro situaciones diferentes que se pueden dar y que aparecen en (2.10).

- Si $x_0 \in (-M, -\sqrt[n]{a})$, hay que distinguir en principio los casos en que n es par o impar. Si n es impar, entonces es fácil ver que no hay región del plano x_0t_0 que satisfaga las desigualdades $f(\alpha) = (1-n)\Big(t_0^{n-1} + |x_0|^{n-1}\Big)^{\frac{n}{n-1}} - t_0^n + n\Big(t_0^{n-1} + |x_0|^{n-1}\Big)t_0 + |x_0^n - a| < 0$ y $t_0 \geq -x_0 = |x_0|$. Por el contrario, si n es par, se puede comprobar que si existe una región del plano x_0t_0 cumpliendo $f(\alpha) < 0$ y $t_0 \geq -x_0 = |x_0|$. Denotando $f(\alpha)$ como

  $$f_1(x_0,t_0) = (1-n)(t_0^{n-1} - x_0^{n-1})^{\frac{n}{n-1}} - t_0^n + n(t_0^{n-1} - x_0^{n-1})t_0 + a - x_0^n \equiv f(\alpha),$$

  es fácil comprobar que las curvas $f_1(x_0,t_0) = 0$ y $t_0 = -x_0$ se cortan en el punto $(x_0, -x_0)$, donde

  $$x_0 = -\sqrt[n]{\frac{a}{(1-n)2^{\frac{n}{n-1}} + 2n}} < -\sqrt[n]{a},$$

  puesto que $(1-n)2^{\frac{n}{n-1}} + 2n > 0$, $\forall n > 2$.

- Si $x_0 \in (-\sqrt[n]{a}, 0)$, razonando como en el caso anterior se observa que $f(\alpha) < 0$ y $t_0 \geq |x_0| = -x_0$ solo se cumplen a la vez si n es par. En este caso, denotando $f(\alpha)$ como

  $$f_2(x_0,t_0) = (1-n)(t_0^{n-1} - x_0^{n-1})^{\frac{n}{n-1}} - t_0^n + n(t_0^{n-1} - x_0^{n-1})t_0 + x_0^n - a \equiv f(\alpha),$$

  se comprueba que las curvas $f_2(x_0,t_0) = 0$ y $t_0 = -x_0$ se cortan en el punto $(x_0, -x_0)$, donde

  $$x_0 = -\sqrt[n]{\frac{a}{2n + (1-n)2^{\frac{n}{n-1}}}} > -\sqrt[n]{a},$$

  puesto que $2n + (1-n)2^{\frac{n}{n-1}} > 0$, $\forall n > 2$, de manera que existe una región del plano x_0t_0 donde se cumple que $f(\alpha) < 0$ y $t_0 \geq -x_0 = |x_0|$.

- En los dos casos en que $x_0 > 0$, no hay que distinguir si n es par o impar. En ambos casos se puede ver que existe una región del plano x_0t_0 en la que $f(\alpha) < 0$ y $t_0 \geq x_0 = |x_0|$ a la vez. Si $x_0 \in (0, \sqrt[n]{a})$, las curvas $f_3(x_0, t_0) = 0$, donde

  $$f_3(x_0,t_0) = (1-n)(t_0^{n-1}+x_0^{n-1})^{\frac{n}{n-1}}-t_0^n+n(t_0^{n-1}+x_0^{n-1})t_0+a-x_0^n \equiv f(\alpha),$$

  y $t_0 = x_0$ se cortan en el punto (x_0, x_0) con

  $$x_0 = \sqrt[n]{\frac{a}{2(n-1)\left(2^{\frac{1}{n-1}}-1\right)}} < \sqrt[n]{a}.$$

  Si $x_0 \in (\sqrt[n]{a}, M)$, entonces las curvas $f_4(x_0, t_0) = 0$, donde

  $$f_4(x_0,t_0) = (1-n)(t_0^{n-1}+x_0^{n-1})^{\frac{n}{n-1}}-t_0^n+n(t_0^{n-1}+x_0^{n-1})t_0+x_0^n-a \equiv f(\alpha),$$

  y $t_0 = x_0$ se cortan ahora en el punto (x_0, x_0) con

  $$x_0 = \sqrt[n]{\frac{a}{2n+(1-n)2^{\frac{n}{n-1}}}} > \sqrt[n]{a}.$$

Una vez analizada la aplicación del método de Newton a partir de los teoremas 2.2.2 y 2.2.5, nuestro siguiente paso es comparar gráficamente las situaciones definidas por los dos teoremas. Como esto es difícil de ver desde una situación tan general como la planteada hasta ahora, vamos a particularizarla mediante el ejemplo concreto del cálculo de la raíz cúbica de 2. Para este ejemplo consideramos $F(x) = x^3-2$ y $F : \Omega = (-2, 2) \to \mathbb{R}$. Por tanto,

$$\|\Gamma_0\| = \frac{1}{3x_0^2} = \beta, \quad \|\Gamma_0 F(x_0)\| = \frac{|x_0^3-2|}{3x_0^2}, \quad \|F''(x)\| = 6|x|,$$

$$k = 12 \quad \text{y} \quad \omega(t) = 6t.$$

Las condiciones $k\beta\eta \leq \frac{1}{2}$ y $|x_0| \leq t_0$ del teorema 2.2.2 se reducen ahora a

$$|x_0^3-2| \leq \frac{3}{8}x_0^4 \quad \text{y} \quad |x_0| \leq t_0 \Leftrightarrow x_0 \in [1{,}12085, 2) \quad \text{y} \quad x_0 \leq t_0.$$

Es decir, para los puntos (x_0, t_0) del plano x_0t_0 que cumplen las condiciones anteriores, podemos garantizar la convergencia del método de Newton a $\sqrt[3]{2}$ mediante el teorema 2.2.2. En la figura 2.1, podemos ver la región del plano x_0t_0 en la que se mueven estos puntos.

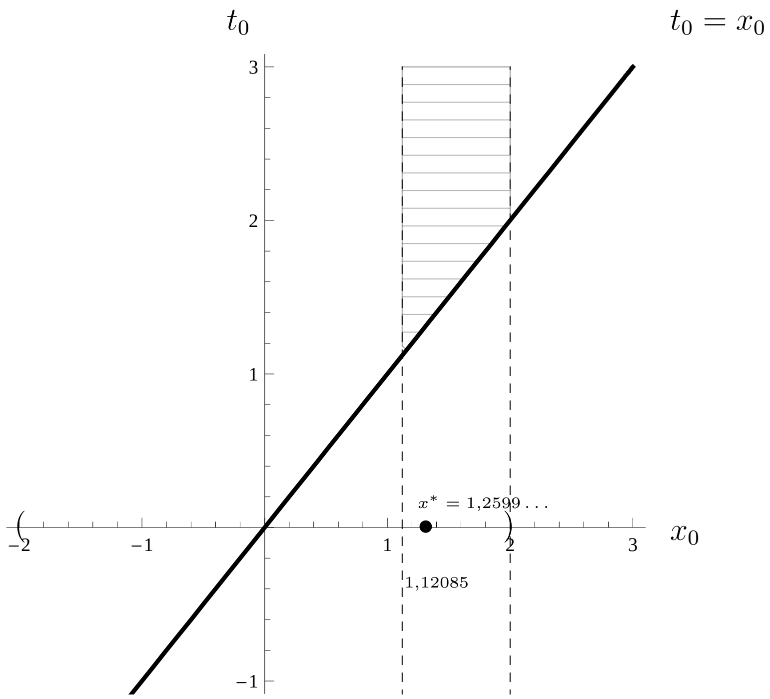

Figura 2.1: Región de puntos de salida correspondiente al teorema 2.2.2

Por otra parte, las condiciones $f(\alpha) < 0$ y $|x_0| \leq t_0$ del teorema 2.2.5 se transforman ahora en:

$$f(\alpha) = -2(t_0^2 + x_0^2)^{\frac{3}{2}} + 2t_0^3 + 3t_0x_0^2 + |x_0^3 - 2| < 0 \quad \text{y} \quad |x_0| \leq t_0.$$

Por tanto, para el conjunto de puntos (x_0, t_0) del plano x_0t_0 que cumplan las dos condiciones anteriores, podemos garantizar la convergencia del método de Newton a $\sqrt[3]{2}$ a partir del teorema 2.2.5. En la figura 2.2 vemos cuál es la región del plano x_0t_0 que se deriva del teorema 2.2.5.

En la figura 2.3 aparece la región de puntos de salida a partir de los cuales podemos asegurar la convergencia del método de Newton a $\sqrt[3]{2}$ mediante el teorema 2.2.5, pero no mediante el teorema 2.2.2.

Si tomamos por ejemplo $x_0 = 1{,}1$, entonces no podemos asegurar la convergencia del método de Newton mediante el teorema 2.2.2, pero sí mediante el teorema 2.2.5, siempre que t_0 esté en la región dada en la Figura 2.3 que está definida por los puntos (x_0, t_0) tales que $x_0 \in [1{,}06475, 1{,}12085]$ y t_0 moviéndose entre las curvas

$$t_0 = x_0 \quad \text{y} \quad -2(t_0^2 + x_0^2)^{\frac{3}{2}} - t_0^3 + 3(t_0^2 + x_0^2)t_0 + 2 - x_0^3 = 0.$$

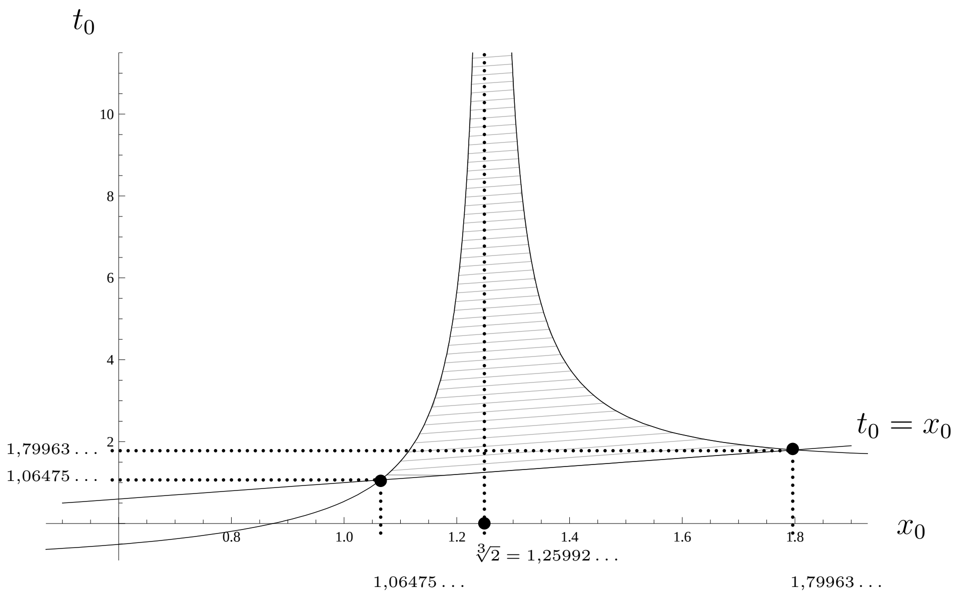

Figura 2.2: Región de puntos de salida correspondiente al teorema 2.2.5

Tomando por ejemplo $t_0 = 1{,}2$, tenemos que $f(t) = t^3 - 7{,}95t + 8{,}481$. En consecuencia, la solución positiva más pequeña de $W(t) - W(t_0) - \dfrac{1}{\beta} = 0$ es $\alpha = 1{,}62788\ldots$, y cumple que $f(\alpha) < 0$. En este caso, la raíz positiva más pequeña de $f(t) = 0$ es $t^* = 1{,}4513\ldots$, que verifica que $t_0 < t^* < \alpha$. En consecuencia, podemos garantizar la convergencia del método de Newton a la raíz $\sqrt[3]{2}$ de la ecuación $F(x) = x^3 - 2 = 0$ a partir del teorema 2.2.5. Utilizando 16 cifras significativas la solución se alcanza después de 5 iteraciones tomando como punto de partida $x_0 = 1{,}1$.

A continuación calculamos las estimaciones del error a priori que se cometen cuando fijamos previamente el valor del punto de partida de x_0 y vamos variando el valor de t_0.

Cuando fijamos el valor $x_0 = 1{,}1$, obtenemos la siguiente función que depende del valor t y del punto de partida t_0

$$f(t) = t^3 - 3(t_0^2 + 1{,}21)t - (t_0^3 - 3(t_0^2 + 1{,}21)t_0) + 0{,}669.$$

Por las condiciones $\|x_0\| \leq t_0$ y $f(\alpha) < 0$, tenemos que $t_0 \in [1{,}1, 1{,}52065]$. Para cada t_0 que elijamos en este intervalo, obtendremos una función $f(t)$ con su correspondiente raíz t^*. Calculando las primeras iteraciones para dicha función mediante el método de Newton, obtenemos la tabla 2.1 con las estimaciones del error cometido.

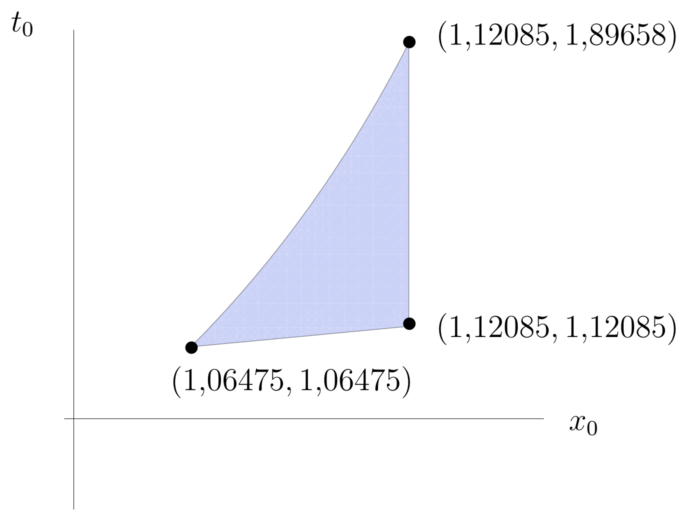

Figura 2.3: Ampliación de la región de puntos de salida cuando se aproxima $\sqrt[3]{2}$

Notar que si $t_0 = \|x_0\|$, obtenemos óptimas estimaciones a priori del error, además de optimizar el dominio de existencia de solución.

n	$t_0 = 1{,}1$	$t_0 = 1{,}14$	$t_0 = 1{,}18$	$t_0 = 1{,}24$
0	$0{,}240911\ldots$	$0{,}244798\ldots$	$0{,}289031\ldots$	$0{,}356191\ldots$
1	$0{,}056613\ldots$	$0{,}060500\ldots$	$0{,}079277\ldots$	$0{,}110288\ldots$
2	$0{,}005420\ldots$	$0{,}006510\ldots$	$0{,}011080\ldots$	$0{,}020927\ldots$
3	$0{,}000061\ldots$	$0{,}000095\ldots$	$0{,}000294\ldots$	$0{,}001136\ldots$
4	$8{,}2137 \times 10^{-9}$	$2{,}1525 \times 10^{-8}$	$2{,}2151 \times 10^{-7}$	$3{,}7695 \times 10^{-6}$

Tabla 2.1: Estimaciones del error $|t_n - t^*|$ a partir de diferentes t_0

Observamos que si fijamos previamente un x_0, cuanto más próximo esté el valor de inicio t_0 a $\|x_0\|$, el error que se comete es menor.

Nota 2.2.7 *Notemos que lo importante es el dominio de los puntos x_0 porque variar t_0 no aporta ninguna mejora en cuanto a los puntos de salida.*

2.2.3. Unicidad de solución

A continuación vemos el resultado de unicidad de solución correspondiente al teorema 2.2.5 anterior.

Notemos que si $\omega(0) > 0$, entonces f' es creciente y $f'(t) > 0$ en $(\alpha, +\infty)$, y por tanto f es estrictamente creciente en $(\alpha, +\infty)$. Lo anterior garantiza que la función f tenga dos ceros reales r_1 y r_2 tales que $t_0 < r_1 \leq r_2$. En el caso en que $\omega(0) = 0$, para que la función f tenga dos ceros reales positivos hay que exigir que ω sea estrictamente creciente. Notemos que esta situación no es restrictiva porque solo elimina el caso lineal.

Teorema 2.2.8 *En las condiciones del teorema 2.2.5, si f tiene dos ceros reales t^* y t^{**} tales que $t_0 < t^* \leq t^{**}$, entonces la solución x^* de $F(x) = 0$ es única en $B(x_0, t^{**} - t_0) \cap \Omega$ si $t^* < t^{**}$ o en $\overline{B(x_0, t^* - t_0)}$ si $t^* = t^{**}$.*

Demostración. Supongamos que $t^* < t^{**}$ y que y^* es otra solución de $F(x) = 0$ en $B(x_0, t^{**} - t_0) \cap \Omega$. Como

$$0 = F(y^*) - F(x^*) = \int_{x^*}^{y^*} F'(x)dx = \int_0^1 F'\Big(x^* + t(y^* - x^*)\Big)(y^* - x^*)dt,$$

es suficiente ver que existe el operador

$$\left[\Gamma_0 \int_0^1 F'\Big(x^* + t(y^* - x^*)\Big)dt\right]^{-1}. \tag{2.11}$$

De hecho, de

$$\begin{aligned} I - \Gamma_0 \int_0^1 F'\Big(x^* + t(y^* - x^*)\Big)dt &= \Gamma_0 \Big[\int_0^1 F'(x_0)dt \\ &\quad - \int_0^1 F'\Big(x^* + t(y^* - x^*)\Big)dt\Big] \\ &= -\Gamma_0 \int_0^1 \Big(\int_{x_0}^{x^*+t(y^*-x^*)} F''(z)dz\Big)dt. \end{aligned}$$

si tomamos normas, se sigue que

$$\begin{aligned} &\left\| I - \Gamma_0 \int_0^1 F'\Big(x^* + t(y^* - x^*)\Big)dt \right\| \leq \|\Gamma_0\| \left\| \int_0^1 \int_{x_0}^{x^*+t(y^*-x^*)} F''(z)dzdt \right\| \\ \leq \;& \beta \int_0^1 \int_0^1 \left\| F''\Big(x_0 + v\Big((x^* - x_0) + t(y^* - x^*)\Big)\Big) \right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \times\Big((x^* - x_0) + t(y^* - x^*)\Big)\Big\| dv dt \\
\leq\ & \beta \int_0^1 \int_0^1 \Big\| F''\Big(x_0 + v\Big((x^* - x_0) + t(y^* - x^*)\Big)\Big)\Big\| \\
& \times \|(x^* - x_0) + t(y^* - x^*)\| dv dt \\
\leq\ & \beta \int_0^1 \|(x^* - x_0) + t(y^* - x^*)\| \\
& \times\Big(\int_0^1 \Big\| F''\Big(x_0 + v\Big((x^* - x_0) + t(y^* - x^*)\Big)\Big)\Big\| dv\Big) dt \\
\leq\ & \beta \int_0^1 \Big((1-t)\|x^* - x_0\| + t\|y^* - x_0\|\Big) \\
& \times\Big(\int_0^1 \omega\Big(\Big\| x_0 + v\Big((x^* - x_0) + t(y^* - x^*)\Big)\Big\|\Big) dv\Big) dt \\
<\ & \beta \int_0^1 \Big((1-t)(t^* - t_0) + t(t^{**} - t_0)\Big) \\
& \times\Big(\int_0^1 \omega\Big(\|x_0\| + \Big\| v\Big((x^* - x_0) + t(y^* + x_0 - x_0 - x^*)\Big)\Big\|\Big) dv\Big) dt \\
\leq\ & \beta \int_0^1 \Big((1-t)(t^* - t_0) + t(t^{**} - t_0)\Big) \\
& \times\Big(\int_0^1 \omega\Big(t_0 + v\Big((t^* - t_0) + t(t^{**} - t^*)\Big)\Big) dv\Big) dt \\
=\ & \frac{\beta}{t^{**} - t^*} \int_{t^* - t_0}^{t^{**} - t_0} \Big(\int_{t_0}^{t_0 + u} \omega(z)\, dz\, du\Big) \\
=\ & f(t^{**}) - f(t^*) + 1 = 1,
\end{aligned}
$$

por el lema de Banach, existe el operador (2.11).

Sea ahora $t^* = t^{**}$ y supongamos que y^* es otra solución de $F(x) = 0$ en $\overline{B(x_0, t^* - t_0)}$. Ya que $\|y^* - x_0\| \leq t^* - t_0$, por inducción matemática, suponemos que $\|y^* - x_k\| \leq t^* - t_k$ para $k = 0, 1, \ldots, n$. Entonces, teniendo en cuenta que $F(y^*) = 0$ y $x_{n+1} = x_n - \Gamma_n F(x_n)$ podemos escribir

$$
y^* - x_{n+1} = -\Gamma_n \int_0^1 F''\Big(x_n + t(y^* - x_n)\Big)(1-t)(y^* - x_n)^2\, dt,
$$

como $\|x_n + t(y^* - x_n)\| \leq t_n + t(y^* - t_n)$, obtenemos

$$
\|y^* - x_{n+1}\| \leq -\frac{M}{f'(t_n)} \|y^* - x_n\|^2, \tag{2.12}
$$

siendo $M = \displaystyle\int_0^1 \omega\Big(t_n + t(y^* - t_n)\Big)(1-t)\, dt$.

De la misma manera para la función f, tenemos

$$t^* - t_{n+1} = -\frac{1}{f'(t_n)} \int_0^1 f''\Big(t_n + t(t^* - t_n)\Big)(1-t)(t^* - t_n)^2\, dt,$$

y por lo tanto, obtenemos

$$t^* - t_{n+1} = -\frac{M}{f'(t_n)}(t^* - t_n)^2. \tag{2.13}$$

Luego, de (2.12) y (2.13) probamos que $\|y^* - x_{n+1}\| \leq t^* - t_{n+1}$. Así $\|y^* - x_n\| \leq t^* - t_n$ para todo n, por lo tanto como $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t^*$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$, se sigue que $y^* = x^*$. ■

Si ahora aplicamos los teoremas 2.2.5 y 2.2.8 al cálculo de $\sqrt[3]{2}$, tenemos que para $x_0 = 1{,}1$ y $t_0 = 1{,}2$, $t^* = 1{,}4513\ldots$ y $t^{**} = 1{,}7983\ldots$. Luego vemos que $t_0 < t^* < t^{**}$. Entonces, los dominios de existencia y unicidad de solución son respectivamente:

$$[0{,}7487\ldots, 1{,}4513\ldots] \text{ y } (0{,}5017\ldots, 1{,}6983\ldots).$$

2.2.4. Aplicación a las ecuaciones integrales de Hammerstein

No podemos analizar la convergencia del método de Newton a una solución de una ecuación donde la segunda derivada del operador en cuestión no está acotada en un dominio, lo que suele ocurrir en algunas ecuaciones integrales no lineales de tipo Hammerstein mixto [56]; i.e.:

$$x(s) = u(s) + \sum_{i=1}^{m} \int_a^b G_i(s,t) H_i\Big(x(t)\Big)\, dt, \quad s \in [a,b],$$

donde $-\infty < a < b < +\infty$, G_i, H_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ y u son funciones conocidas y x es una función continua (solución) a determinar. En particular, para ecuaciones integrales de la forma

$$x(s) = u(s) + \int_a^b G(s,t)\Big(x(t)^{2+p} + \frac{1}{2}x(t)^2\Big)\, dt, \quad s \in [a,b], \tag{2.14}$$

con $p \in [0,1]$, donde u es una función continua y el núcleo G es la función de Green

$$G(s,t) = \begin{cases} \dfrac{(b-s)(t-a)}{b-a}, & t \leq s, \\[2mm] \dfrac{(s-a)(b-t)}{b-a}, & s \leq t. \end{cases}$$

Ecuaciones integrales de este tipo son frecuentes en muchas aplicaciones del mundo real. Por ejemplo, en problemas de modelos dinámicos de reactores químicos [28], así como en problemas de la teoría del tráfico vehicular, la biología y la teoría de colas [44]. Las ecuaciones de Hammerstein aparecen en la dinámica de fluidos electromagnéticos, y en la reformulación de problemas de valores en la frontera de dos puntos con ciertas condiciones de contorno no lineales y análogos multidimensionales que aparecen como reformulaciones de una ecuación en derivadas parciales elíptica con condiciones de contorno no lineales (véase [108] y las referencias que allí aparecen).

Resolver (2.14) es equivalente a resolver $F(x) = 0$, donde

$$F : \Omega \subseteq \mathcal{C}([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b]), \quad \Omega = \{x \in \mathcal{C}([a,b]);\ x(s) > 0,\ s \in [a,b]\},$$

$$[F(x)](s) = x(s) - u(s) - \int_a^b G(s,t)\Big[x(t)^{2+p} + \frac{1}{2}x(t)^2\Big]\,dt, \quad p \in (0,1].$$

Teniendo en cuenta la expresión de F, obtenemos

$$[F'(x)y](s) = y(s) - \int_a^b G(s,t)\Big[(2+p)x(t)^{1+p} + x(t)\Big]y(t)\,dt,$$

$$[F''(x)(yz)](s) = -\int_a^b G(s,t)\Big[(2+p)(1+p)x(t)^p + 1\Big]z(t)y(t)\,dt.$$

Observar que la condición (C_3) del teorema clásico 1.2.2 de Newton-Kantorovich no se verifica ya que $\|F''(x)\|$ no está acotada en todo Ω. Para ver esto, usamos reducción al absurdo. Suponemos que $\|F''(x)\| \leq k$ en Ω con la norma del máximo y denotamos $M = \max_{[a,b]} \int_a^b |G(s,t)|\,dt$. Entonces, si $x(t) = \sqrt[p]{\dfrac{k - M + \epsilon}{M(2+p)(1+p)}}$, con $\epsilon \in (M-k, +\infty)$ si $M > k$ o $\epsilon \in (0, +\infty)$ si $M \leq k$, e $y(t) = z(t) = 1$, se sigue que

$$\begin{aligned} \|[F''(x)(yz)](s)\| &= \left\| \int_a^b G(s,t)\Big[(2+p)(1+p)x(t)^p + 1\Big]\,dt \right\| \\ &= \left\| \frac{k+\epsilon}{M} \int_a^b G(s,t)\,dt \right\| = k + \epsilon > k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, lo último es contradictorio, ya que no existe una constante k tal que $\|F''(x)\| \leq k$ en todo Ω.

Por el contrario, vemos en lo siguiente que la condición alternativa dada por (A_3) en el teorema 2.2.5 se verifica, y como consecuencia la convergencia del método de Newton a una solución de (2.14) queda entonces garantizada por este teorema. De (A_3) deducimos que

$$\omega(z) = M\Big(1 + (2+p)(1+p)z^p\Big). \tag{2.15}$$

Además, fijado $x_0(s)$, tenemos

$$\|I - F'(x_0)\| \leq M\Big((2+p)\|x_0^{1+p}\| + \|x_0\|\Big),$$

y por el lema de Banach, obtenemos

$$\|\Gamma_0\| \leq \frac{1}{1 - M\left((2+p)\|x_0^{1+p}\| + \|x_0\|\right)} = \beta,$$

siempre que $M\left((2+p)\|x_0^{1+p}\| + \|x_0\|\right) < 1$. Además, ya que $\|F(x_0)\| \leq \|x_0 - u\| + M\left(\|x_0^{2+p}\| + \frac{1}{2}\|x_0^2\|\right)$, se sigue que

$$\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \|\Gamma_0\|\|F(x_0)\| \leq \frac{\|x_0 - u\| + M\left(\|x_0^{2+p}\| + \frac{1}{2}\|x_0^2\|\right)}{1 - M\left((2+p)\|x_0^{1+p}\| + \|x_0\|\right)} = \eta.$$

Una vez que los parámetros β y η están calculados y la función (2.15) es conocida, usamos el teorema 2.2.3 para probar la existencia de solución de la ecuación (2.14) y garantizar la convergencia del método de Newton.

Para determinar el dominio de existencia de solución, consideramos la siguiente ecuación particular (2.14):

$$x(s) = 1 + \int_0^1 G(s,t)\left(x(t)^{5/2} + \frac{1}{2}x(t)^2\right)dt, \quad s \in [0,1].$$

Si repetimos lo que se ha hecho para (2.14) con $u(s) = 1$, $p = \dfrac{1}{2}$, $[a,b] = [0,1]$ y elegimos $x_0(s) = \dfrac{1}{2}$, podemos garantizar por el lema de Banach que el operador Γ_0 existe y $\|\Gamma_0\| \leq \dfrac{32}{355}(12 + \sqrt{2})$, ya que

$$\|[(I - F'(x_0))y](s)\| \leq \frac{1}{64}(4 + 5\sqrt{2})\|y\| \quad \text{y} \quad \|I - F'(x_0)\| < 1.$$

Además, $\|F(x_0)\| \leq \dfrac{1}{64}(33 + \sqrt{2})$ y

$$\beta = 1{,}2091\ldots, \quad \eta = 0{,}6501\ldots, \quad \omega(z) = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{z}}{32}.$$

Como $t_0 \geq \|x_0\| = \dfrac{1}{2}$ en el teorema 2.2.3, tomamos $t_0 = \dfrac{1}{2}$, así que la ecuación

$$W(t) - W(t_0) - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{96}(2t\sqrt{t} + 12t - 7\sqrt{2} - 96) = 0,$$

tiene solo una raíz: $\alpha = 5{,}1992\ldots$

Si construimos la función $f(t)$ del teorema 2.2.3, obtenemos

$$f(t) = (0{,}0083\ldots)t^2\sqrt{t} + (0{,}0625\ldots)t^2 - (0{,}8968\ldots)t + (0{,}9690\ldots),$$

así que $f(\alpha) = -1{,}4908\ldots < 0$. La raíz positiva más pequeña de $f(t) = 0$ es $t^* = 1{,}1943\ldots$ y $t^* - t_0 = 0{,}6943\ldots$, así que el dominio de existencia de solución es:

$$\left\{\varphi \in \mathcal{C}([0,1]);\, \left\|\varphi - \frac{1}{2}\right\| \leq 0{,}6943\ldots\right\}.$$

Además, como $t^{**} - t_0 = 8{,}5193\ldots$, entonces, el dominio de unicidad de solución es:

$$\left\{\varphi \in \mathcal{C}([0,1]);\, \left\|\varphi - \frac{1}{2}\right\| < 8{,}5193\ldots\right\} \cap \Omega.$$

Notemos que en la práctica, como ya se ha indicado anteriormente, el dominio de existencia de solución es óptimo cuando $t_0 = \|x_0\|$.

2.3. Mejora del planteamiento de partida

Como hemos visto en la sección anterior, la construcción de sucesiones mayorizantes allí planteada tiene la dificultad importante de la dependencia entre los valores iniciales, los puntos de salida, de la sucesión en el espacio de Banach X y su correspondiente sucesión mayorizante. Hemos visto la necesidad de que $\|x_0\| \leq t_0$, lo que nos lleva, como puede verse en el ensayo numérico realizado, a restringir el dominio de puntos de salida. Esta situación puede evitarse mediante cierta “normalización”, de manera que las condiciones no incluyan ninguna relación directa entre los valores de x_0 y t_0.

2.3.1. Resultados principales

El problema de “normalizar” la situación anterior ya fue resuelto por Kantorovich con el siguiente teorema general de convergencia. Aquí presentamos, de forma diferente a como lo hace Kantorovich, este resultado y su demostración. Kantorovich se apoya en el método de Newton modificado y utiliza el concepto de ecuación mayorizante ([75]). En esencia, ambos resultados y sus demostraciones dicen lo mismo.

Teorema 2.3.1 *Sean el operador F definido en las condiciones habituales y $f \in \mathcal{C}^{(2)}([t_0, t'])$ una función escalar. Si se verifican las siguientes condiciones:*

$(\widetilde{K_1})$ $x_0 \in \Omega$, *existe el operador* $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1}$ *y* $\|\Gamma_0\| \leq -\dfrac{1}{f'(t_0)}$,

$(\widetilde{K_2})$ $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq -\dfrac{f(t_0)}{f'(t_0)}$,

$(\widetilde{K_3})$ $\|F''(x)\| \leq f''(t)$ *si* $\|x - x_0\| \leq t - t_0$,

$(\widetilde{K_4})$ $f(t) = 0$ *tiene una única raíz* t^* *en* $[t_0, t']$,

$(\widetilde{K_5})$ $B(x_0, t^* - t_0) \subseteq \Omega$,

entonces el método de Newton (1.7) empezando en x_0, proporciona una sucesión convergente a una raíz x^* de $F(x) = 0$. Además

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n, \quad n \geq 0,$$

donde t_n está definida en (2.8).

Demostración. Vamos a demostrar este teorema siguiendo un procedimiento análogo al de la demostración del teorema 2.2.1. Empezamos por tanto demostrando que la sucesión $\{t_n\}$ es creciente y converge a t^*. Para ello, vemos de forma totalmente análoga a lo hecho en el teorema 2.2.1 que $t_n \leq t^*$ y $t_{n+1} \leq t_n$, para todo $n \geq 0$. Por tanto, $\{t_n\}$ es convergente por ser monótona y acotada. Entonces existe $u \in [t_0, t']$, $u \geq t^*$, tal que $u = \lim\limits_{n \to +\infty} t_n$. Tomando límites en (2.8), obtenemos $f(u) = 0$. Como t^* es la única raíz de $f(t) = 0$ en $[t_0, t']$, entonces $u = t^*$.

A continuación probamos por inducción que $x_n \in \Omega$, para todo n. La aproximación x_1 está bien definida porque $x_1 = x_0 - \Gamma_0 F(x_0)$ y Γ_0 existe. Además,

$$\|x_1 - x_0\| \leq \|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq -\frac{f(t_0)}{f'(t_0)} = t_1 - t_0 \leq t^* - t_0.$$

Luego $x_1 \in B(x_0, t^* - t_0) \subseteq \Omega$.

Obsérvese ahora que si $x \in [x_0, x_1]$, tenemos que $x = x_0 + s(x_1 - x_0)$ con $s \in [0,1]$, de manera que

$$\|x - x_0\| \leq s\|x_1 - x_0\| \leq s(t_1 - t_0) = t_0 + s(t_1 - t_0) - t_0 = t - t_0, \quad (2.16)$$

con $t = t_0 + s(t_1 - t_0) \in [t_0, t_1]$, y

$$\begin{aligned}
\|I - \Gamma_0 F'(x_1)\| &\leq \|\Gamma_0\|\|F'(x_1) - F'(x_0)\| \leq \|\Gamma_0\| \left\| \int_{x_0}^{x_1} F''(x)\,dx \right\| \\
&\leq \|\Gamma_0\| \left\| \int_0^1 F''\Big(x_0 + s(x_1 - x_0)\Big)(x_1 - x_0)\,ds \right\| \\
&\leq \|\Gamma_0\| \int_0^1 \left\| F''\Big(x_0 + s(x_1 - x_0)\Big)\right\| \|(x_1 - x_0)\|\,ds \\
&\leq -\frac{1}{f'(t_0)} \int_0^1 f''\Big(t_0 + s(t_1 - t_0)\Big)(t_1 - t_0)\,ds \\
&\leq -\frac{1}{f'(t_0)} \int_{t_0}^{t_1} f''(t)\,dt = 1 - \frac{f'(t_1)}{f'(t_0)} < 1,
\end{aligned}$$

puesto que f no puede tener un mínimo a la izquierda de t^*, por ser $f''(\tau) \geq 0$ en $[t_0, t']$ y $f(t_0) \geq 0$, y $f'(t_1) < 0$, por ser $t_1 \leq t^*$ y $f'(t_0) < 0$. Luego, existe Γ_1 y por el lema de Banach sobre inversión de operadores, tenemos

$$\|\Gamma_1\| \leq \frac{\|\Gamma_0\|}{1 - \|I - \Gamma_0 F'(x_1)\|} \leq -\frac{1}{f'(t_1)}.$$

A continuación utilizamos el desarrollo de Taylor y (1.7) para obtener que

$$F(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} F''(x)(x_1 - x)\,dx.$$

Tomando normas en la igualdad anterior, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|F(x_1)\| &= \left\| \int_{x_0}^{x_1} F''(x)(x_1 - x)\,dx \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 F''\Big(x_0 + s(x_1 - x_0)\Big)(1 - s)(x_1 - x_0)^2\,ds \right\|.
\end{aligned}$$

Procediendo como en (2.16), si $x \in [x_0, x_1]$, entonces $\|x - x_0\| \leq t - t_0$, donde $t \in [t_0, t_1]$, y

$$\begin{aligned}
\|F(x_1)\| &= \int_0^1 f''\Big(t_0 + s(t_1 - t_0)\Big)(1 - s)(t_1 - t_0)^2\,ds \\
&= \int_{t_0}^{t_1} f''(t)(t_1 - t)\,dt \\
&= f(t_1),
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|x_2 - x_1\| = \|\Gamma_1 F(x_1)\| \leq \|\Gamma_1\| \|F(x_1)\| \leq -\frac{f(t_1)}{f'(t_1)} = t_2 - t_1.$$

En consecuencia, $\|x_2 - x_0\| \leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq t_2 - t_1 + t_1 - t_0 = t_2 - t_0 \leq t^* - t_0$ y $x_2 \in B(x_0, t^* - t_0) \subset \Omega$.

Si suponemos ahora que existe Γ_j con

$$\|\Gamma_j\| \leq -\frac{1}{f'(t_j)}, \quad \|F(x_j)\| \leq f(t_j), \quad \|x_{j+1} - x_j\| \leq t_{j+1} - t_j$$

y $x_{j+1} \in B(x_0, t^* - \|x_0\|) \subset \Omega$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n-1$, probamos por inducción y análogamente al caso $j = 1$ que $x_{n+1} \in B(x_0, t^* - \|x_0\|) \subset \Omega$, para todo n.

Notemos que si $x \in [x_n, x_{n-1}]$, entonces $x = x_{n-1} + s(x_n - x_{n-1})$ con $s \in [0, 1]$, y

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &\leq \|x_{n-1} + s(x_n - x_{n-1}) - x_0\| \leq \|x_{n-1} - x_0\| + s\|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq (t_{n-1} - t_0) + s(t_n - t_{n-1}) = t - t_0, \end{aligned}$$

con $t = t_{n-1} + s(t_n - t_{n-1}) \in [t_{n-1}, t_n]$. Así,

$$\begin{aligned} \|I - \Gamma_{n-1} F'(x_n)\| &= \left\| \int_{x_{n-1}}^{x_n} \Gamma_{n-1} F''(x)\, dx \right\| \\ &\leq \left\| \int_0^1 \Gamma_{n-1} F''\Big(x_{n-1} + t(x_n - x_{n-1})\Big)(x_n - x_{n-1})\, dt \right\| \\ &\leq \|\Gamma_{n-1}\| \int_0^1 \left\| F''\Big(x_{n-1} + t(x_n - x_{n-1})\Big) \right\| \\ &\quad \times \|x_n - x_{n-1}\|\, dt \\ &\leq -\frac{1}{f'(t_{n-1})} \int_0^1 f''\Big(t_{n-1} + s(t_n - t_{n-1})\Big)(t_n - t_{n-1})\, ds \\ &\leq -\frac{1}{f'(t_{n-1})} \int_{t_{n-1}}^{t_n} f''(t) dt = 1 - \frac{f'(t_n)}{f'(t_{n-1})} < 1, \end{aligned}$$

ya que $f''(t) \geq 0$ en $[t_{n-1}, t']$ y $f(t_{n-1}) \geq 0$, la función f no puede alcanzar un mínimo a la izquierda de t^*, y como $t_n \leq t^*$ y $f'(t_{n-1}) < 0$, tenemos $f'(t_n) < 0$. Entonces, por el lema de Banach sobre inversión de operadores, existe Γ_n y

$$\|\Gamma_n\| \leq \frac{\|\Gamma_{n-1}\|}{1 - \|I - \Gamma_{n-1} F'(x_n)\|} \leq -\frac{1}{f'(t_n)}.$$

Por el desarrollo de Taylor y (1.7), tenemos

$$F(x_n) = \int_{x_{n-1}}^{x_n} F''(x)(x_n - x)\,dx.$$

y

$$\|F(x_n)\| = \left\| \int_{n-1}^{n} F''\Big(x_{n-1} + s(x_n - x_{n-1})\Big)(1-s)(x_n - x_{n-1})^2\,ds \right\|.$$

Procediendo como en el caso $j = 1$, si $x \in [x_{n-1}, x_n]$, entonces $\|x - x_0\| \leq t - t_0$, donde $t \in [t_{n-1}, t_n]$, y

$$\begin{aligned} \|F(x_n)\| &\leq \int_0^1 f''\Big(t_{n-1} + s(t_n - t_{n-1})\Big)(1-s)(t_n - t_{n-1})^2\,ds \\ &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} f''(t)(t_n - t)\,dt = f(t_n), \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \|\Gamma_n\|\|F(x_n)\| \leq -\frac{f(t_n)}{f'(t_n)} = t_{n+1} - t_n,$$

de manera que

$$\|x_{n+1}-x_0\| \leq \|x_{n+1}-x_n\|+\|x_n-x_0\| \leq t_{n+1}-t_n+t_n-t_0 = t_{n+1}-t_0 \leq t^*-t_0$$

y $x_{n+1} \in B(x_0, t^* - t_0) \subset \Omega$.

Por consiguiente, la sucesión $\{x_n\}$ está bien definida, contenida en Ω y cumpliendo que $\|x_n - x_{n-1}\| \leq t_n - t_{n-1}$, para todo n. Luego, t_n es una sucesión mayorizante de $\{x_n\}$. Entonces, existe $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$ y $\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n$, para todo n.

Para terminar, de (1.7) se sigue que

$$F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{2.17}$$

Entonces, para un $x \in \Omega$ arbitrario, por el teorema del valor medio, obtenemos

$$\begin{aligned} \|F'(x) - F'(x_0)\| &\leq \|x - x_0\| \sup_{0<\theta<1} \left\|F''\Big(x_0 + \theta(x - x_0)\Big)\right\| \\ &\leq (t^* - t_0) \max_{[t_0, t']}\{f''(t)\}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que la sucesión $\{\|F'(x_n)\|\}$ está acotada. Por tanto, tomando límites en (2.17), obtenemos $F(x^*) = 0$ por la continuidad de F. Luego, x^* es solución de $F(x) = 0$. ■

Como podemos observar en el resultado anterior no existe dependencia entre los valores x_0 y t_0. Así, en general suele considerarse $t_0 = 0$ para una mayor simplificación. Como aplicación al teorema anterior vamos a considerar, como en la sección anterior, dos situaciones: la correspondiente a las condiciones clásicas de Kantorovich y, posteriormente, la generalización dada por la condición (2.1).

En el primer caso vemos el resultado que dio Kantorovich [75] para demostrar la convergencia semilocal del método de Newton a una solución de $F(x) = 0$.

Teorema 2.3.2 *Sea el operador F definido en las condiciones habituales. Supongamos que $x_0 \in \Omega$ y que se cumplen las siguientes condiciones:*

$(\widetilde{C_1})$ *el operador $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1}$ está definido y $\|\Gamma_0\| \leq \beta$,*

$(\widetilde{C_2})$ $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$,

$(\widetilde{C_3})$ $\|F''(x)\| \leq k$ *en* Ω,

$(\widetilde{C_4})$ $k\beta\eta \leq \dfrac{1}{2}$,

$(\widetilde{C_5})$ $B(x_0, \rho_1 - t_0) \subseteq \Omega$, *donde ρ_1 es la raíz positiva más pequeña del polinomio (2.4)*

Entonces la ecuación $F(x) = 0$ tiene una solución x^* y la sucesión de Newton dada por (1.7) es convergente a esta solución a partir de x_0. Además, $x_n, x^* \in \overline{B(x_0, \rho_1 - t_0)}$ y

$$\|x^* - x_n\| \leq \rho_1 - t_n, \quad n \geq 0,$$

donde $t_n = t_{n-1} - \dfrac{f(t_{n-1})}{f'(t_{n-1})}$, *para todo $n \geq 1$, y f definida en (2.4).*

Demostración. La base de la demostración está en la aplicación del teorema 2.3.1. Luego para poder aplicar el teorema 2.3.1 tenemos que construir la función f. Procedemos entonces como en el teorema 2.2.2 y obtenemos de nuevo que f es el polinomio (2.4), definido en $[t_0, t']$. Veamos que este polinomio verifica las condiciones del teorema 2.3.1.

Obviamente $f \in \mathcal{C}^{(2)}([t_0, t'])$ siendo $t' \geq \rho_1$, con $\rho_1 = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 2k\beta\eta}}{k\beta\eta}\eta$. Además las comprobaciones de $(\widetilde{K_1})$, $(\widetilde{K_2})$ y $(\widetilde{K_3})$ son inmediatas. La condición $(\widetilde{K_4})$ resulta evidente, ya que las raíces del polinomio (2.4) son

$$\rho_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2k\beta\eta}}{k\beta\eta}\eta \qquad \text{y} \qquad \rho_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2k\beta\eta}}{k\beta\eta}\eta.$$

La condición $k\beta\eta \leq \dfrac{1}{2}$ asegura que ρ_1 y ρ_2 son reales y que $t^* = \rho_1 \in [t_0, t']$. Además, $\|x^* - x_0\| \leq \rho_1$, ya que $\|x^* - x_0\| \leq t^* - t_0$ por el teorema 2.3.1. ■

A las condiciones del teorema 2.3.2 las llamaremos a partir de ahora condiciones clásicas de Kantorovich (no confundir con las condiciones generales de Kantorovich, que son las del teorema 2.3.1).

En el segundo caso, si queremos aplicar el teorema 2.3.2 suponiendo las condiciones que hemos considerado como una generalización de las condiciones clásicas de Kantorovich, como hicimos en la sección anterior, necesitamos de algunos resultados previos. En este caso, llamado "normalizado", por la forma de la condición $(\widetilde{K_3})$, consideramos

$$\|F''(x)\| \leq \omega(\|x\|) \leq \omega(t - t_0 + \|x_0\|) \equiv \omega(t; t_0), \tag{2.18}$$

siempre que $\|x\| - \|x_0\| \leq \|x - x_0\| \leq t - t_0$ por ser ω no decreciente. Por tanto, en vez de (2.1), consideramos

$$\|F''(x)\| \leq \omega(t; t_0), \text{ para } \|x - x_0\| \leq t - t_0,$$

con $\omega : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua, no decreciente y tal que $\omega(t_0; t_0) \geq 0$. El correspondiente problema de valor inicial a resolver será entonces:

$$\begin{cases} y''(t) - \omega(t; t_0) = 0, \\ y(t_0) = \dfrac{\eta}{\beta}, \quad y'(t_0) = -\dfrac{1}{\beta}. \end{cases} \tag{2.19}$$

A partir de los comentarios anteriores enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 2.3.3 *Supongamos que la función $\omega(t; t_0)$ es continua para todo $t \in [t_0, t']$. Entonces, para cualesquiera números reales $\beta \neq 0$ y η, existe una única solución $\widetilde{f}(t)$ en $[t_0, t']$ del problema de valor inicial (2.19), que es:*

$$\widetilde{f}(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\theta} \omega(\xi; t_0)\, d\xi\, d\theta - \frac{t - t_0}{\beta} + \frac{\eta}{\beta}, \tag{2.20}$$

donde ω es la función que se define a partir de (2.18).

Observar que (2.20) se reduce al polinomio (2.5) si ω es una función constante y $t_0 = s_0$.

En este caso, suponemos que se cumplen las siguientes condiciones:

$(\widetilde{A_1})$ $x_0 \in \Omega$, el operador $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1}$ está definido y $\|\Gamma_0\| \leq \beta$,

$(\widetilde{A_2})$ $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$,

$(\widetilde{A_3})$ $\|F''(x)\| \leq \omega(t; t_0)$, para $\|x - x_0\| \leq t - t_0$, con $\omega : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua no decreciente y tal que $\omega(t_0; t_0) \geq 0$,

$(\widetilde{A_4})$ $\widetilde{f}(\widetilde{\alpha}) \leq 0$, donde $\widetilde{f}$ es la función definida en (2.20) y $\widetilde{\alpha}$ es una solución positiva de $\widetilde{W}(t) - \widetilde{W}(t_0) - \dfrac{1}{\beta} = 0$, siendo $\widetilde{W}(t)$ una primitiva de $\omega(t; t_0)$,

$(\widetilde{A_5})$ $B(x_0, t^* - t_0) \subseteq \Omega$, donde t^* es la menor raíz de $\widetilde{f}(t) = 0$ en $[t_0, +\infty)$.

Si $\omega(t; t_0)$ es una función constante, se reduce al caso anterior y $\widetilde{f}$ es el polinomio (2.5).

Enunciamos a continuación un lema análogo al lema 2.2.4.

Lema 2.3.4 *Sean $\widetilde{f}$ la función definida en (2.20) y $\omega(t; t_0)$ la función dada en $(\widetilde{A_3})$.*

(a) *Si $\widetilde{W}$ es una primitiva de $\omega(t; t_0)$ en $[t_0, +\infty)$ y existe una solución $\widetilde{\alpha} > t_0$ de la ecuación*

$$\widetilde{W}(t) - \widetilde{W}(t_0) - \frac{1}{\beta} = 0,$$

entonces $\widetilde{\alpha}$ es el único mínimo de $\widetilde{f}$ en $[t_0, +\infty)$.

(b) *la función $\widetilde{f}$ decrece en $(t_0, \widetilde{\alpha})$.*

(c) *Si $\widetilde{f}(\widetilde{\alpha}) \leq 0$, entonces la ecuación $\widetilde{f}(t) = 0$ tiene al menos una solución en $[t_0, +\infty)$. Si denotamos por t^* a la menor raíz de $\widetilde{f}(t) = 0$ en $[t_0, +\infty)$, se tiene además que $t_0 < t^* \leq \widetilde{\alpha}$.*

A partir de este resultado, ya podemos enunciar el teorema de convergencia semilocal para el método de Newton en condiciones "generalizadas" de Kantorovich.

Teorema 2.3.5 *Sea el operador F definido en las condiciones habituales. Supongamos que se cumplen las condiciones $(\widetilde{A_1})$–$(\widetilde{A_5})$. Entonces, la ecuación $F(x) = 0$ tiene una solución x^* y la sucesión (1.7) converge a x^* a partir de x_0. Además, $x_n, x^* \in \overline{B(x_0, t^* - t_0)}$, para todo n, y*

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n, \quad n \geq 0,$$

donde $t_n = t_{n-1} - \dfrac{\widetilde{f}(t_{n-1})}{\widetilde{f}'(t_{n-1})}$, *para todo* $n \geq 1$, *y* $\widetilde{f}$ *definida en (2.20).*

Demostración. La demostración de este teorema es análoga a la del teorema 2.2.5, pero aplicando aquí el teorema 2.3.1, en vez del teorema 2.2.1, puesto que la función $\widetilde{f}$ definida en (2.20) satisface todas las condiciones del teorema 2.3.1. ■

Nota 2.3.6 *Notemos que si* $k\beta\eta = \dfrac{1}{2}$ *en el teorema 2.3.2 y* $\widetilde{f}(\widetilde{\alpha}) = 0$ *en el teorema 2.3.5, entonces las respectivas funciones* f *y* $\widetilde{f}$ *tienen una raíz doble.*

2.3.2. Aplicación al cálculo de la raíz n-ésima

Retomamos de nuevo el ejemplo del cálculo de la raíz n-ésima de un número real positivo a. Ahora discutimos la aplicación del método de Newton a partir de los teoremas 2.3.2 y 2.3.5.

Consideramos en primer lugar el teorema 2.3.2. En este caso, observamos que se tienen que cumplir las mismas condiciones que en el teorema 2.2.2 excepto la condición $|x_0| \leq t_0$. Por tanto, vale la discusión vista anteriormente para el teorema 2.2.2, sin más que eliminar $|x_0| \leq t_0$.

Si a continuación consideramos el teorema 2.3.5, vemos que como $\omega(t;t_0) = n(n-1)\Big(t - t_0 + |x_0|\Big)^{n-2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}(t) - \widetilde{W}(t_0) - \frac{1}{\beta} &= n\Big(t - t_0 + |x_0|\Big)^{n-1} - n|x_0|^{n-1} - n|x_0|^{n-1}\\
&= n\Big(t + |x_0|\Big)^{n-1} - 2n|x_0|^{n-1}.
\end{aligned}$$

siempre que $t_0 = 0$. Notemos que podemos tomar $t_0 = 0$, puesto que no supone ninguna restricción en las condiciones del teorema 2.3.5. Por tanto, $\widetilde{\alpha} = \Big(2^{\frac{1}{n-1}} - 1\Big)|x_0| > 0$. Además, si $t_0 = 0$, como

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(t) &= \Big(t - t_0 + |x_0|\Big)^n - |x_0|^n - 2n|x_0|^{n-1}(t - t_0) + |x_0^n - a|\\
&= \Big(t + |x_0|\Big)^n - |x_0|^n - 2n|x_0|^{n-1}t + |x_0^n - a|,
\end{aligned}$$

tenemos que

$$\widetilde{f}(\widetilde{\alpha}) = \Big(2^{\frac{n}{n-1}}(1-n) + (2n-1)\Big)|x_0|^n + |x_0^n - a|.$$

Para poder aplicar el teorema 2.3.5, hay que ver cuándo se cumple $\widetilde{f}(\widetilde{\alpha}) < 0$. Estudiamos entonces las cuatro situaciones diferentes que se pueden dar, las que aparecen en (2.10). Obtenemos que si n es impar, entonces $\widetilde{f}(\widetilde{\alpha}) < 0$ se cumple si

$$x_0 \in \left(\sqrt[n]{\frac{a}{2(n-1)\left(2^{\frac{1}{n-1}}-1\right)}}, \sqrt[n]{a} \right) \cup (\sqrt[n]{a}, m), \quad \text{donde}$$

$$m = \min\left\{ M, \sqrt[n]{\frac{a}{2n+(1-n)2^{\frac{n}{n-1}}}} \right\};$$

y si n es par, entonces $\widetilde{f}(\widetilde{\alpha}) < 0$ se cumple siempre que

$$x_0 \in (-M, -\sqrt[n]{a}) \cup (-\sqrt[n]{a}, 0) \cup \left(\sqrt[n]{\frac{a}{2(n-1)\left(2^{\frac{1}{n-1}}-1\right)}}, \sqrt[n]{a} \right) \cup (\sqrt[n]{a}, m).$$

Comparamos a continuación la aplicación del método de Newton a partir de los teoremas 2.3.2 y 2.3.5 para el ejemplo concreto de la raíz cúbica de 2. Como ahora no tenemos restricción alguna para t_0, podemos garantizar la convergencia del método de Newton a $\sqrt[3]{2}$, a partir del teorema 2.3.2, saliendo desde cualquier punto de la región del plano x_0t_0 que aparece marcada en la figura 2.4.

Si aplicamos el teorema 2.3.5, la condición $\widetilde{f}(\widetilde{\alpha}) < 0$ se reduce ahora a

$$\widetilde{f}(\widetilde{\alpha}) = \left(2^{\frac{3}{2}}(-2)+5\right)|x_0|^3 + |x_0^3 - 2| < 0.$$

De nuevo, como no hay ninguna restricción para t_0, podemos garantizar la convergencia del método de Newton a $\sqrt[3]{2}$, a partir del teorema 2.3.5, saliendo desde cualquier punto de la región del plano x_0t_0 que aparece marcada en la figura 2.5.

En la figura 2.6 marcamos la región de puntos de salida a partir de los cuales podemos garantizar la convergencia del método de Newton a $\sqrt[3]{2}$ mediante el teorema 2.3.5, pero no mediante el teorema 2.3.2. Así, podemos garantizar la convergencia del método de Newton mediante el teorema 2.3.5, pero no mediante el teorema 2.3.2, siempre que $x_0 \in [1{,}06475, 1{,}12085]$. Si tomamos de nuevo $x_0 = 1{,}1$, hemos visto antes que alcanzamos la raíz $\sqrt[3]{2}$ con 16 cifras significativas después de 5 iteraciones del método de Newton.

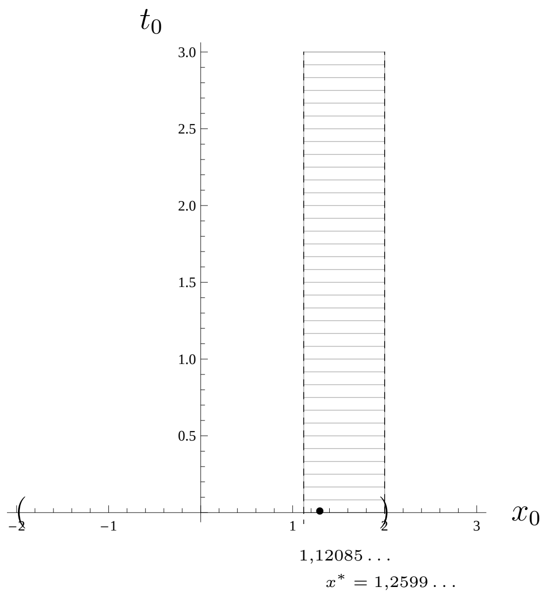

Figura 2.4: Región de puntos de salida correspondientes al teorema 2.3.2

Nota 2.3.7 *Notemos que lo importante es el dominio de los puntos x_0 porque variar t_0 no aporta ninguna mejora en cuanto a los puntos de salida.*

A continuación calculamos las estimaciones del error a priori que se cometen cuando vamos variando el valor de x_0. Obtenemos la tabla 2.2 con las estimaciones del error cometido. Observar que, como es lógico, cuanto más próximo esté el valor de x_0 a $\sqrt[3]{2}$, el error que se comete es menor.

n	$x_0 = 1{,}1$	$x_0 = 1{,}2$	$x_0 = 1{,}3$	$x_0 = 1{,}5$
0	$0{,}019475\ldots$	$0{,}009901\ldots$	$0{,}005688\ldots$	$0{,}001469\ldots$
1	$0{,}070668\ldots$	$0{,}013668\ldots$	$0{,}006937\ldots$	$0{,}042198\ldots$
2	$0{,}076027\ldots$	$0{,}013683\ldots$	$0{,}006938\ldots$	$0{,}044153\ldots$

Tabla 2.2: Estimaciones del error $|x^* - x_n|$ a partir de diferentes x_0

2.3.3. Unicidad de solución

A continuación damos un resultado de unicidad de solución respecto al teorema 2.3.5 anterior. Lo demostraremos de dos formas diferentes. Una,

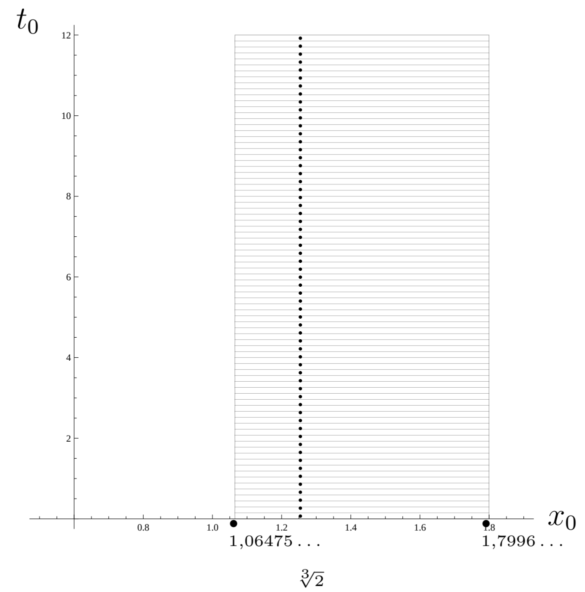

Figura 2.5: Región de puntos de salida correspondientes al teorema 2.3.5

utilizando la misma técnica de demostración que en el teorema 2.2.8; y dos, utilizando una técnica diferente.

Notar que si $\omega(0) > 0$, entonces f' es creciente y $f'(t) > 0$ en $(\alpha, +\infty)$, y por tanto f es estrictamente creciente en $(\alpha, +\infty)$. Lo anterior garantiza que la función f tenga dos ceros reales r_1 y r_2 tales que $t_0 < r_1 \leq r_2$. En el caso en que $\omega(0) = 0$, para que la función f tenga dos ceros reales positivos hay que exigir que ω sea estrictamente creciente. Notemos que esta situación no es restrictiva porque solo elimina el caso lineal.

Teorema 2.3.8 *En las condiciones del teorema 2.3.5, si f tiene dos ceros reales t^* y t^{**} tales que $t_0 < t^* \leq t^{**}$, entonces la solución x^* de $F(x) = 0$ es única en $B(x_0, t^{**} - t_0) \cap \Omega$ si $t^* < t^{**}$ o en $\overline{B(x_0, t^* - t_0)}$ si $t^* = t^{**}$.*

Demostración. Comenzamos con el caso $t^* < t^{**}$. Para probar la unicidad de x^*, supondremos que existe otra solución y^* de $F(x) = 0$ en $B(x_0, t^{**} - t_0) \cap \Omega$ y veremos que $y^* = x^*$. Para ello, basta con probar que el operador $P = \displaystyle\int_0^1 F'\Big(x^* + t(y^* - x^*)\Big)\, dt$ es invertible, puesto que

$$0 = F(y^*) - F(x^*) = \int_{x^*}^{y^*} F'(x)\, dx = \int_0^1 F'\Big(x^* + t(y^* - x^*)\Big)(y^* - x^*)\, dt.$$

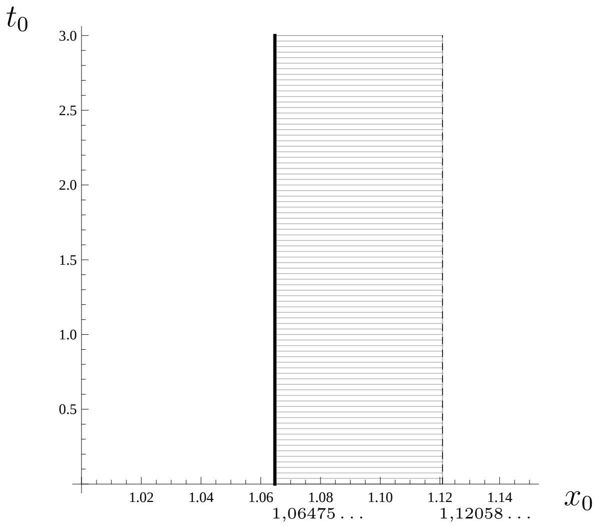

Figura 2.6: Ampliación de la región de puntos de salida cuando se aproxima $\sqrt[3]{2}$

Comenzamos entonces viendo que

$$
\begin{aligned}
& \left\| I - \Gamma_0 \int_0^1 F'\Big(x^* + \tau(y^* - x^*)\Big)\, d\tau \right\| = \left\| -\Gamma_0 \int_0^1 \int_{x_0}^{x^*+\tau(y^*-x^*)} F''(z)\, dz\, d\tau \right\| \\
= \ & \Bigg\| -\Gamma_0 \int_0^1 \int_0^1 F''\Big(x_0 + s\Big((x^* - x_0) + \tau(y^* - x^*)\Big)\Big) \\
& \times \Big((x^* - x_0) + \tau(y^* - x^*)\Big)\, ds\, d\tau \Bigg\| \\
\leq \ & \|\Gamma_0\| \int_0^1 \int_0^1 \left\| F''\Big(x_0 + s\Big((x^* - x_0) + \tau(y^* - x^*)\Big)\Big) \right\| \\
& \times \|x^* - x_0 + \tau(y^* - x^*)\|\ ds\, d\tau \\
< \ & \|\Gamma_0\| \int_0^1 \left(\int_0^1 \left\| F''\Big(x_0 + s\Big((x^* - x_0) + \tau(y^* - x^*)\Big)\Big) \right\| ds \right) \\
& \times \Big((1 - \tau)(t^* - t_0) + \tau(t^{**} - t_0)\Big)\, d\tau \\
\leq \ & \|\Gamma_0\| \int_0^1 \left(\int_0^1 \omega\Big(t_0 + s\Big((1 - \tau)(t^* - t_0) + \tau(t^{**} - t_0)\Big); t_0\Big)\, ds \right) \\
& \times \Big((1 - \tau)(t^* - t_0) + \tau(t^{**} - t_0)\Big)\, d\tau \\
\leq \ & \beta \int_0^1 \left(\int_{t_0}^{t^*+\tau(t^{**}-t^*)} \omega(z; t_0)\, dz \right) d\tau \\
= \ & \frac{\beta}{t^{**} - t^*} \int_{t^*}^{t^{**}} \left(\int_{t_0}^{u} \omega(z; t_0)\, dz \right) du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\beta}{t^{**}-t^*}\int_{t^*-t_0}^{t^{**}-t_0}\Big(\int_{t_0}^{u+t_0}\omega(z;t_0)\,dz\Big)\,du \\
&= f(t^{**})-f(t^*)+1 = 1.
\end{aligned}
$$

Luego, por el lema de Banach, existe el operador

$$
\left[\Gamma_0\int_0^1 F'\Big(x^*+t(y^*-x^*)\Big)\,dt\right]^{-1},
$$

o equivalentemente, P^{-1}.

En segundo lugar, suponemos que $t^* = t^{**}$ y que y^* es otra solución de $F(x)=0$ en $\overline{B(x_0,t^*-t_0)}$. Ya que $\|y^*-x_0\| \le t^*-t_0$, por inducción matemática, suponemos que $\|y^*-x_k\| \le t^*-t_k$ parar $k=0,1,\dots,n$. Entonces, teniendo en cuenta que $F(y^*)=0$ y $x_{n+1}=x_n-\Gamma_n F(x_n)$ podemos escribir

$$
y^*-x_{n+1} = -\Gamma_n\int_0^1 F''\Big(x_n+t(y^*-x_n)\Big)(1-t)(y^*-x_n)^2\,dt,
$$

y como

$$
\begin{aligned}
\|x_n+t(y^*-x_0)-x_0\| &\le \|x_n-x_0\|+t\|y^*-x_n\| \\
&\le t_n-t_0+t(t^{**}-t_n) = t_n+t(t^{**}-t_n)-t_0,
\end{aligned}
$$

obtenemos

$$
\|y^*-x_{n+1}\| \le -\frac{M}{f'(t_n)}\|y^*-x_n\|^2, \tag{2.21}
$$

siendo

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^1 \omega\Big(t_n+t(y^*-t_n)-t_0+\|x_0\|\Big)(1-t)\,dt \\
&= \int_0^1 \omega\Big(t_n+t(t^{**}-t_n);t_0\Big)(1-t)\,dt.
\end{aligned}
$$

De la misma manera para la función f, tenemos

$$
t^*-t_{n+1} = -\frac{1}{f'(t_n)}\int_0^1 f''\Big(t_n+t(t^*-t_n)\Big)(1-t)(t^*-t_n)^2\,dt,
$$

y por lo tanto,

$$
t^*-t_{n+1} = -\frac{M}{f'(t_n)}(t^*-t_n)^2. \tag{2.22}
$$

Luego, de (2.21) y (2.22) probamos que $\|y^*-x_{n+1}\| \le t^*-t_{n+1}$. Así $\|y^*-x_n\| \le t^*-t_n$ para todo n, por lo tanto como $\lim_n t_n = t^*$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$, se sigue que $y^*=x^*$. ■

A continuación, demostramos el resultado anterior utilizando otra técnica.

Teorema 2.3.9 *En las condiciones del teorema 2.3.5, la solución x^* es única en $B(x_0, t^{**} - t_0) \cap \Omega$ si $t^* < t^{**}$ o en $\overline{B(x_0, t^* - t_0))} \cap \Omega$ si $t^* = t^{**}$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que $t^* < t^{**}$ y que y^* es otra solución de $F(x) = 0$ en $B(x_0, t^{**} - t_0) \cap \Omega$. Entonces

$$\|y^* - x_0\| \leq \rho(t^{**} - t_0) \quad \text{con} \quad \rho \in (0, 1).$$

Probaremos por inducción que $\|y^* - x_k\| \leq \rho^{2^k}(t^{**} - t_k)$, $k \geq 0$. Por hipótesis de inducción consideramos que la desigualdad anterior se verifica para $k = 0, 1, \ldots, n$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} y^* - x_{n+1} &= y^* - x_n + \Gamma_n F(x_n) \\ &= -\Gamma_n \Big(F(y^*) - F(x_n) - F'(x_n)(y^* - x_n) \Big) \\ &= -\Gamma_n \int_{x_n}^{y^*} F''(z)(y^* - z)\, dz \\ &= -\Gamma_n \int_0^1 F''\Big(x_n + t(y^* - x_n)\Big)(1 - t)(y^* - x_n)^2\, dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|y^* - x_{n+1}\| \leq \|\Gamma_n\| \int_0^1 \Big\| F''\Big(x_n + t(y^* - x_n)\Big) \Big\| (1 - t) \|y^* - x_n\|^2\, dt.$$

Observamos ahora que

$$\begin{aligned} \|x_n + t(y^* - x_n) - x_0\| &\leq \|x_n - x_0\| + t\|y^* - x_n\| \leq t_n - t_0 + t(t^{**} - t_n) \\ &= t_n + t(t^{**} - t_n) - t_0, \end{aligned}$$

y, como $\|y^* - x_n\| \leq \rho^{2^n}(t^{**} - t_n) < t^{**} - t_n$, se sigue que

$$\begin{aligned} \|y^* - x_{n+1}\| &\leq \frac{-1}{f'(t_n)} \int_0^1 \omega\Big(t_n + t(t^{**} - t_0) - t_0 + \|x_0\|\Big)(1 - t)\, dt \|y^* - x_n\|^2 \\ &= \frac{-M}{f'(t_n)} \|y^* - x_n\|^2, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 \omega\Big(t_n + t(t^{**} - t_n) - t_0 + \|x_0\|\Big)(1 - t)\, dt \\ &= \int_0^1 \omega\Big(t_n + t(t^{**} - t_n); t_0\Big)(1 - t)\, dt. \end{aligned}$$

Por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned}
t^{**}-t_{n+1} &= t^{**}-t_n+\frac{f(t_n)}{f'(t_n)}=\frac{-1}{f'(t_n)}\Big(f(t^{**})-f(t_n)-f'(t_n)(t^{**}-t_n)\Big)\\
&= \frac{-1}{f'(t_n)}\int_{t_n}^{t^{**}} f''(z)(t^{**}-z)\,dz\\
&= \frac{-1}{f'(t_n)}\int_0^1 f''\Big(t_n+t(t^{**}-t_n)\Big)(1-t)(t^{**}-t_n)^2\,dt\\
&= \frac{-1}{f'(t_n)}\int_0^1 \omega\Big(t_n+t(t^{**}-t_n)-t_0+\|x_0\|\Big)(1-t)\,dt(t^{**}-t_n)^2\\
&= \frac{-1}{f'(t_n)}\int_0^1 \omega\Big(t_n+t(t^{**}-t_n);t_0\Big)(1-t)\,dt(t^{**}-t_n)^2\\
&= \frac{-M}{f'(t_n)}(t^{**}-t_n)^2.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\|y^*-x_{n+1}\| &\le \frac{-M}{f'(t_n)}\|y^*-x_n\|^2=\frac{t^{**}-t_{n+1}}{(t^{**}-t_n)^2}\|y^*-x_n\|^2\\
&\le \frac{t^{**}-t_{n+1}}{(t^{**}-t_n)^2}\Big(\rho^{2^n}(t^{**}-t_n)\Big)^2=\rho^{2^{n+1}}(t^{**}-t_{n+1}),
\end{aligned}$$

de manera que $y^*=x^*$, puesto que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x^*$.

Si en segundo lugar consideramos que $t^*=t^{**}$ y que y^* es otra solución de $F(x)=0$ en $\overline{B(x_0,t^{**}-t_0)}\cap\Omega$, entonces $\|y^*-x_0\|\le t^{**}-t_0$. Procediendo de manera análoga al caso anterior, se prueba por inducción que $\|y^*-x_n\|\le t^{**}-t_n=t^*-t_n$. Como $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=t^*=t^{**}$, se sigue fácilmente la unicidad. ∎

Nota 2.3.10 *Notemos que la función $\widetilde{f}$ definida en (2.20) tiene la propiedad de que $\widetilde{f}(t+t_0)=g(t)$, donde*

$$g(t)=\int_0^t\int_0^\theta \omega(\xi;0)\,d\xi\,d\theta-\frac{t}{\beta}+\frac{\eta}{\beta}.$$

Por lo tanto, las sucesiones escalares del método de Newton que se obtienen a partir de f y g se pueden obtener, una a partir de la otra, mediante traslación. Luego los resultados anteriores son independientes del valor de t_0. Por ello, habitualmente tomaremos $t_0=0$, lo que simplifica considerablemente las expresiones utilizadas. Obsérvese que el polinomio de Kantorovich (2.2) también tiene esta misma propiedad, de manera que Kantorovich siempre considera $s_0=0$ [75].

2.3.4. Mejora del dominio de puntos de salida, de los dominios de existencia y unicidad de solución y de las cotas a priori del error

Veamos a continuación un ejemplo en el que se pone de manifiesto que utilizando las condiciones (C_1), (C_2) y (2.1) se puede mejorar el dominio de puntos de salida para el método de Newton y obtener cotas a priori del error más finas con respecto a las condiciones (C_1)–(C_3) del teorema 1.2.2 de Newton-Kantorovich.

Consideramos la ecuación $F(x) = 0$, donde $F : \Omega = (0, a) \to \mathbb{R}$ y $F(x) = x^3 - a$, con $a > 1$. En este caso,

$$\|\Gamma_0\| = \frac{1}{3x_0^2} = \beta, \quad \|\Gamma_0 F(x_0)\| = \frac{|x_0^3 - a|}{3x_0^2} = \eta, \quad \|F''(x)\| = 6|x|,$$

de manera que $k = 6a$ (teorema 1.2.2) y $\omega(t; t_0) = \omega(t; 0) = \omega(t + \|x_0\|) = 6(t + |x_0|)$.

A la hora de analizar el dominio de puntos de salida del método de Newton a partir de los teoremas 1.2.2 y 2.2.5 nos centraremos únicamente en la situación en la que $x_0 \in (0, \sqrt[3]{a})$, puesto que en el otro caso, $x_0 \in (\sqrt[3]{a}, a)$, como la función es creciente y convexa siempre vamos a obtener convergencia del método de Newton para todo $x_0 \in (\sqrt[3]{a}, a)$.

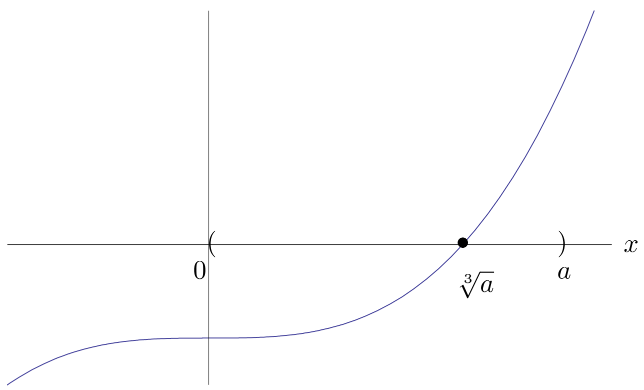

Figura 2.7: Gráfica de $F(x) = x^3 - a$

En primer lugar, estudiamos la aplicación del método de Newton a partir del teorema 1.2.2 de Kantorovich. Para el teorema 1.2.2 se tiene que cumplir que

$$\frac{1}{2} \geq k\beta\eta \quad \Leftrightarrow \quad 4a|x_0^3 - a| \leq 3x_0^4,$$

que es equivalente a que $3x_0^4+4ax_0^3-4a^2 \equiv g(x_0) \geq 0$ por ser $x_0 \in (0, \sqrt[3]{a})$. Entonces vemos que $x_0 \in (r^*, \sqrt[3]{a})$, donde r^* es tal que $g(r^*) = 0$.

En segundo lugar, para aplicar el método de Newton a partir del teorema 2.2.5, se tiene que cumplir que $f(\alpha) \leq 0$ donde α es una solución de $f'(t) = 0$, es decir,

$$0 \geq f(\alpha) = (5-4\sqrt{2})|x_0|^3 + |x_0^3 - a|,$$

que es equivalente a que $4(1-\sqrt{2})x_0^3 + a \leq 0$ por ser $x_0 \in (0, \sqrt[3]{a})$. Por lo tanto, $x_0 \geq \sqrt[3]{\dfrac{a}{4(\sqrt{2}-1)}}$.

Comparamos a continuación los dominios de puntos de salida que se obtienen para el método de Newton a partir de los teoremas 1.2.2 y 2.2.5 para el ejemplo concreto de $\sqrt[3]{2011}$. Si aplicamos el teorema 1.2.2, entonces $x_0 \in (12{,}6026\ldots, \sqrt[3]{2011})$, mientras que si aplicamos el teorema 2.2.5, entonces $x_0 \in (10{,}6670\ldots, \sqrt[3]{2011})$. Por lo tanto, hemos ampliado el dominio de puntos de salida para poder aplicar el método de Newton, mediante el teorema 2.2.5 con respecto al teorema 1.2.2 de Kantorovich, a la hora de calcular $\sqrt[3]{2011}$.

Considerando $x_0 = 12{,}61$ y utilizando el resultado de Kantorovich, teorema 1.2.2, obtenemos los valores de $s^* = 0{,}01520\ldots$ y $s^{**} = 0{,}06387\ldots$ Entonces, los dominios de existencia y unicidad son respectivamente:

$$\{u \in (0, 2011); |u - x_0| \leq 0{,}01520\ldots\} \text{ y } \{u \in (0, 2011); |u - x_0| < 0{,}06387\ldots\}.$$

Para la función f, tenemos que $t^* = 0{,}01229\ldots$ y $t^{**} = 9{,}96796\ldots$ son las raíces reales de $f(t) = 0$. Por los teoremas 2.2.5 y 2.3.9, los dominios de existencia y unicidad son respectivamente:

$$\{u \in (0, 2011); |u - x_0| \leq 0{,}01229\ldots\} \text{ y } \{u \in (0, 2011); |u - x_0| < 9{,}96796\ldots\}.$$

Obsérvese que los dominios de existencia y unicidad que se obtienen respectivamente a partir de los teoremas 2.2.5 y 2.3.9 son menor y mayor que los dados por Kantorovich, así que se obtiene una mejora de ambos dominios.

Además, podemos ver en la siguiente tabla que también obtenemos mejores estimaciones a priori del error mediante la sucesión mayorizante $\{t_n\}$ que se construye a partir de (2.8) con f dada por (2.20), correspondiente al teorema 2.2.5, que las dadas a partir de (2.8) con f siendo el polinomio de Kantorovich dado en (2.2), correspondiente al teorema 1.2.2. Notemos que esta última sucesión la hemos denotado en la tabla 2.3 por $\{s_n\}$ y donde s^* es la raíz positiva más pequeña del polinomio (2.2); hemos tomado $x_0 = 12{,}61$ y $t_0 = s_0 = 0$.

n	$\lvert x^* - x_n\rvert$	$\lvert t^* - t_n\rvert$	$\lvert s^* - s_n\rvert$
0	$0{,}012266\ldots$	$0{,}012290\ldots$	$0{,}015201\ldots$
1	$0{,}000011\ldots$	$0{,}000011\ldots$	$0{,}002922\ldots$
2	$1{,}12905 \times 10^{-11}$	$1{,}14214 \times 10^{-11}$	$0{,}000156\ldots$

Tabla 2.3: Error absoluto y estimaciones a partir del error para $x^* = \sqrt[3]{2011}$, $t^* = 0{,}012290\ldots$ y $s^* = 0{,}015201\ldots$

Observar la precisión de las estimaciones del error que se obtienen a partir de la sucesión mayorizante $\{t_n\}$, así como la amplitud del dominio de unicidad de solución. Notar que son dos hechos destacables.

2.3.5. Resultado de convergencia local y orden de convergencia

A continuación obtenemos un nuevo resultado de convergencia para el método de Newton, que en este caso es local, en el que el operador F verifica la condición (2.1). Para ello, seguiremos las ideas dadas por Dennis y Schnabel en [46].

Teorema 2.3.11 *Sea el operador $F : \Omega \subseteq X \to Y$ dos veces continuamente diferenciable Fréchet definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω de un espacio de Banach X con valores en un espacio de Banach Y, y sea x^* una solución de $F(x) = 0$ tal que existe $[F'(x^*)]^{-1}$, $B(x^*, r) \subseteq \Omega$ y $\|[F'(x^*)]^{-1}\| \le \gamma$ con $r, \gamma > 0$. Supongamos que se cumple (2.1) y que existe $R > 0$, la menor raíz positiva de la ecuación*

$$2\gamma\omega(\|x^*\| + t)t - 1 = 0. \tag{2.23}$$

Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $x_0 \in B(x^*, \varepsilon)$, la sucesión de Newton $\{x_n\}$ está bien definida y converge a x^*. Además,

$$\|x^* - x_n\| < \frac{1}{2\varepsilon}\|x^* - x_{n-1}\|^2, \quad n \ge 1. \tag{2.24}$$

Demostración. Sea $\varepsilon = \min\{r, R\}$. En primer lugar probaremos que, para todo $\widetilde{x} \in B(x^*, \varepsilon)$, existe $[F'(\widetilde{x})]^{-1}$ con $\|[F'(\widetilde{x})]^{-1}\| \leq 2\gamma$. Para ello, consideramos:

$$\begin{aligned}
\|I - [F'(x^*)]^{-1}F'(\widetilde{x})\| &\leq \|[F'(x^*)]^{-1}\|\|F'(x^*) - F'(\widetilde{x})\| \\
&= \|[F'(x^*)]^{-1}\| \left\| \int_{\widetilde{x}}^{x^*} F''(z)\, dz \right\| \\
&\leq \|[F'(x^*)]^{-1}\| \int_0^1 \left\| F''\Big(\widetilde{x} + t(x^* - \widetilde{x})\Big) \right\| dt \|x^* - \widetilde{x}\| \\
&\leq \|[F'(x^*)]^{-1}\| \omega(\|x^*\| + \varepsilon)\|x^* - \widetilde{x}\| \\
&\leq \|[F'(x^*)]^{-1}\| \omega(\|x^*\| + \varepsilon)\varepsilon,
\end{aligned}$$

puesto que $\|\widetilde{x} + t(x^* - \widetilde{x})\| = \|x^* + (1-t)(\widetilde{x} - x^*)\| \leq \|x^*\| + \varepsilon$, y como $\varepsilon \leq R$ y R satisface (2.23), entonces

$$\|I - [F'(x^*)]^{-1}F'(\widetilde{x})\| < \gamma\omega(\|x^*\| + R)R = \frac{1}{2} < 1.$$

Luego, por el lema de Banach, existe $[F'(\widetilde{x})]^{-1}$ y $\|[F'(\widetilde{x})]^{-1}\| < 2\|[F'(x^*)]^{-1}\| \leq 2\gamma$.

Tomando ahora $x_0 \in B(x^*, \varepsilon)$, existe $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1}$ con $\|\Gamma_0\| \leq 2\gamma$ y x_1 está bien definido. Además,

$$\begin{aligned}
x_1 - x^* &= x_0 - \Gamma_0 F(x_0) - x^* = \Gamma_0\Big(F(x^*) - F(x_0) - F'(x_0)(x^* - x_0)\Big) \\
&= \Gamma_0 \int_{x_0}^{x^*} F''(z)(x^* - z)\, dz \\
&= \Gamma_0 \int_0^1 F''\Big(x_0 + t(x^* - x_0)\Big)(1-t)(x^* - x_0)^2\, dt,
\end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x^*\| &\leq \|\Gamma_0\| \int_0^1 \left\| F''\Big(x_0 + t(x^* - x_0)\Big) \right\| (1-t)\, dt \|x^* - x_0\|^2 \\
&\leq \|\Gamma_0\| \int_0^1 \omega\Big(\|x_0 + t(x^* - x_0)\| \Big)(1-t)\, dt \|x^* - x_0\|^2 \\
&\leq \|\Gamma_0\| \omega(\|x^*\| + \varepsilon) \frac{1}{2} \|x^* - x_0\|^2 \\
&\leq \gamma\omega(\|x^*\| + R)\|x^* - x_0\|^2 \\
&< \gamma\omega(\|x^*\| + R)R\|x^* - x_0\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|x_0 - x^*\|.
\end{aligned}$$

A continuación, utilizando los mismos argumentos, se prueba por inducción que

$$\|x_n - x^*\| < \gamma\omega(\|x^*\| + R)\|x_{n-1} - x^*\|^2 < \frac{1}{2}\|x_{n-1} - x^*\|, \quad n \geq 1.$$

En consecuencia, tenemos que

$$\|x_n - x^*\| < \frac{1}{2^n}\|x_0 - x^*\|, \quad n \geq 1.$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$.

Por otra parte, teniendo en cuenta que $\gamma\omega(\|x^*\| + R) = \dfrac{1}{2R}$, se sigue (2.24). ■

Nota 2.3.12 *Notemos que a partir de (2.24) se deduce que el método de Newton tiene Q-orden de convergencia [102] al menos cuadrática. Además, si $\varepsilon < 2$, entonces*

$$\begin{aligned}\|x_n - x^*\| &< \frac{1}{2\varepsilon}\|x_{n-1} - x^*\|^2 \leq \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^{1+2+\cdots+2^{n-1}}\|x_0 - x^*\|^{2^n}\\ &< \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^{\frac{2^n-1}{2}}\varepsilon^{2^n} = \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{2^n}\sqrt{2\varepsilon}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el método de Newton tiene R-orden de convergencia [102] al menos cuadrático.

Nota 2.3.13 *Observemos que en el caso en que ω sea una constante k (caso de Kantorovich), R existe y es $R = \dfrac{1}{2\gamma k}$, lo que generaliza el resultado ya conocido de Dennis y Schnabel en [46].*

Ilustramos el teorema anterior con el siguiente ejemplo, que aparece en [46]. Por simplicidad hemos elegido la norma del máximo en su desarrollo.

Ejemplo 2.3.14 *Dado el sistema no lineal $F(x,y,z) = 0$, donde $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $F(x,y,z) = (x, y^2 + y, e^z - 1)$, está claro que $(0,0,0) = \overline{x}^*$ es solución.*

Denotando $\overline{x} = (x,y,z)$ y teniendo en cuenta la expresión matricial de la derivada primera de F, tenemos que

$$F'(\overline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2y+1 & 0 \\ 0 & 0 & e^z \end{pmatrix} \quad y \quad F'(\overline{x}^*) = diag\{1,1,1\}.$$

Por tanto, $[F'(\overline{x}^*)]^{-1} = diag\{1,1,1\}$ *y* $\gamma = 1$.

Además, como

$$F''(\overline{x}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^z \end{array}\right),$$

entonces $\|F''(\overline{x})\| \leq \max\{2, e^{\|\overline{x}\|}\}$.

Así, se pueden dar dos situaciones. Una, si $\Omega = B(\overline{x}^*, r)$ *con* $r < \ln 2$, *entonces* $\|F''(\overline{x})\| \leq 2$ *y* $\omega(t) = 2$, *de manera que* $R = \dfrac{1}{4}$. *En consecuencia, el método de Newton será convergente si tomamos como punto de salida cualquier* $\overline{x} \in B\left(\overline{x}^*, \dfrac{1}{4}\right)$. *Y dos, si* $\Omega = B(\overline{x}^*, r)$ *con* $r \geq \ln 2$, *entonces* $\|F''(\overline{x})\| \leq e^{\|\overline{x}\|}$, $\omega(t) = e^t$ *y la ecuación (2.23) se reduce a* $2e^t t - 1 = 0$, *cuya única solución es* $R = 0{,}351734\ldots$ *Por lo tanto, el método de Newton será convergente si tomamos como punto de salida cualquier* $\overline{x} \in B(\overline{x}^*, 0{,}351734\ldots)$.

Si comparamos los resultados que hemos obtenido con los de Dennis y Schnabel, podemos destacar dos cosas. La primera, si $r < \ln 2$, *obtenemos el mismo dominio de puntos de salida que Dennis y Schnabel. Y la segunda, si* $r \geq \ln 2$, *nuestro resultado presenta dos ventajas sobre el de Dennis y Schnabel. La primera y más importante es que nuestro resultado es independiente del valor* r, *mientras que el de Dennis y Schnabel no. Y la segunda es que ampliamos el dominio de puntos de salida que obtienen Dennis y Schnabel, puesto que, como* $k = e^r$, *entonces* $\dfrac{1}{2\gamma k} = \dfrac{1}{2e^r} < 0{,}351734\ldots$ *para todo* $r \geq \ln 2$.

2.3.6. Estimaciones a priori del error

Si f tiene dos raíces reales positivas t^* y t^{**} tales que $t^* \leq t^{**}$, entonces podemos escribir

$$f(t) = (t^* - t)(t^{**} - t)g(t) \tag{2.25}$$

con $g(t^*) \neq 0$ y $g(t^{**}) \neq 0$. A continuación, damos un resultado de tipo Ostrowski [96] que proporciona estimaciones del error para el método de Newton. Notemos que antes del segundo teorema de unicidad de solución hemos comentado cómo tiene que ser la función ω para que f tenga dos raíces reales positivas.

Teorema 2.3.15 *Sea la función f definida en (2.20), de manera que tenga dos raíces reales positivas t^* y t^{**}.*

(i) Si $t^* < t^{**}$, entonces

$$\frac{(t^{**}-t^*)\theta^{2^n}}{\sqrt{m_1}-\theta^{2^n}} < t^* - t_n < \frac{(t^{**}-t^*)\Delta^{2^n}}{\sqrt{M_1}-\Delta^{2^n}}, \quad n \geq 0,$$

donde $\theta = \dfrac{t^*}{t^{**}}\sqrt{m_1}$, $\Delta = \dfrac{t^*}{t^{**}}\sqrt{M_1}$, $m_1 = \min\{H_1(t); t \in [0,t^*]\}$, $M_1 = \max\{H_1(t); t \in [0,t^*]\}$, $H_1(t) = \dfrac{(t^{**}-t)g'(t)-g(t)}{(t^*-t)g'(t)-g(t)}$ y siempre que $\theta < 1$ y $\Delta < 1$.

(ii) Si $t^* = t^{**}$, entonces

$$m_2^n t^* \leq t^* - t_n \leq M_2^n t^*,$$

donde $m_2 = \min\{H_2(t); t \in [0,t^*]\}$, $M_2 = \max\{H_2(t); t \in [0,t^*]\}$, $H_2(t) = \dfrac{(t^*-t)g'(t)-g(t)}{(t^*-t)g'(t)-2g(t)}$ y siempre que $m_2 < 1$ y $M_2 < 1$.

Demostración. A partir de (2.25), en el caso de que $t^* < t^{**}$, tenemos que

$$f'(t) = (t^*-t)(t^{**}-t)g'(t) - \Big((t^*-t)+(t^{**}-t)\Big)g(t).$$

Si denotamos $a_n = t^* - t_n$ y $b_n = t^{**} - t_n$ para todo $n \geq 0$, entonces

$$f(t_n) = a_n b_n g(t_n), \quad f'(t_n) = a_n b_n g'(t_n) - (a_n + b_n)g(t_n) \quad \text{y}$$

$$a_{n+1} = t^* - t_{n+1} = t^* - t_n + \frac{f(t_n)}{f'(t_n)} = \frac{{a_n}^2\Big(b_n g'(t_n) - g(t_n)\Big)}{a_n b_n g'(t_n) - (a_n+b_n)g(t_n)}.$$

Como $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \dfrac{a_n^2\Big(b_n g'(t_n) - g(t_n)\Big)}{{b_n}^2\Big(a_n g'(t_n) - g(t_n)\Big)}$, se sigue que

$$m_1\Big(\frac{a_n}{b_n}\Big)^2 \leq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq M_1\Big(\frac{a_n}{b_n}\Big)^2,$$

y en consecuencia,

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq M_1\Big(\frac{a_n}{b_n}\Big)^2 \leq \cdots \leq M_1^{\frac{2^{n+1}-1}{2}}\Big(\frac{a_0}{b_0}\Big)^{2^{n+1}} = \frac{\Delta^{2^{n+1}}}{\sqrt{M_1}}$$

y

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \geq m_1\Big(\frac{a_n}{b_n}\Big)^2 \geq \cdots \geq m_1^{\frac{2^{n+1}-1}{2}}\Big(\frac{a_0}{b_0}\Big)^{2^{n+1}} = \frac{\theta^{2^{n+1}}}{\sqrt{m_1}}.$$

Como $b_{n+1} = (t^{**} - t^*) + a_{n+1}$, obtenemos

$$\frac{(t^{**}-t^*)\theta^{2^{n+1}}}{\sqrt{m_1}-\theta^{2^{n+1}}} < t^* - t_{n+1} < \frac{(t^{**}-t^*)\Delta^{2^{n+1}}}{\sqrt{M_1}-\Delta^{2^{n+1}}}.$$

Si $t^* = t^{**}$, entonces $a_n = b_n$, y por tanto,

$$a_{n+1} = \frac{a_n\Big(a_n g'(t) - g(t)\Big)}{a_n g'(t) - 2g(t_n)}.$$

Por consiguiente, $m_2 a_n \leq a_{n+1} \leq M_2 a_n$ y

$$m_2^{n+1} t^* \leq t^* - t_{n+1} \leq M_2^{n+1} t^*. \quad \blacksquare$$

Nota 2.3.16 *Observamos a partir del teorema anterior que si $t^* < t^{**}$, obtenemos que el R-orden de convergencia del método de Newton es cuadrático, mientras que si $t^* = t^{**}$, obtenemos R-orden de convergencia lineal.*

2.3.7. Aplicación: análisis de la ecuación de Bratu a partir del método de Newton

Ilustramos a continuación la nueva teoría de tipo Kantorovich que hemos desarrollado para la convergencia semilocal del método de Newton bajo las condiciones $(\widetilde{A_1})$–$(\widetilde{A_3})$ con la ecuación integral de Bratu:

$$x(s) = \lambda \int_a^b G(s,t)\mathrm{e}^{x(t)}\,dt, \quad s \in [a,b], \tag{2.26}$$

donde $-\infty < a < b < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ y el núcleo $G(s,t)$ es la función de Green.

La ecuación de Bratu (2.26) también se puede ver como el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + \lambda\,\mathrm{e}^{x(t)} = 0, \\ x(a) = x(b) = 0. \end{cases}$$

Es conocido que la ecuación de Bratu tiene dos soluciones si $\lambda \in (0, \lambda_1)$ con $\lambda_1 = \dfrac{3{,}51375\ldots}{b^2}$ (ver [41]), con lo que a partir de ahora tomaremos λ

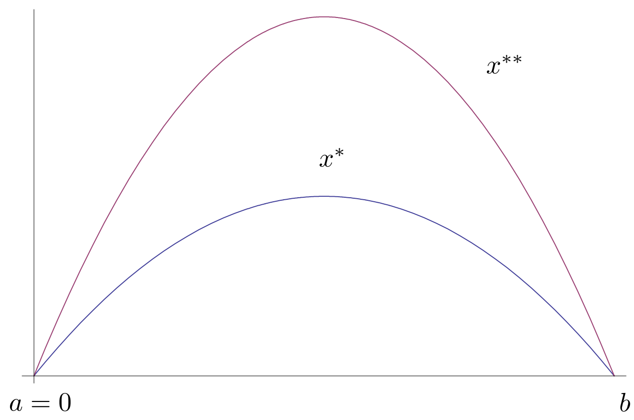

Figura 2.8: Soluciones de la ecuación de Bratu (2.26)

en ese intervalo. Las gráficas de las soluciones son las que aparecen en la figura 2.8.

Problemas de este tipo aparecen habitualmente en las ciencias y las ingenierías para describir complicados modelos físicos y químicos (véase [30] y las referencias que allí aparecen).

Resolver la ecuación (2.26) es equivalente a resolver $F(x) = 0$, donde $F : \Omega \subseteq \mathcal{C}([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$ es un operador definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω del espacio de las funciones continuas en $[a,b]$ y con valores en ese mismo espacio, de manera que

$$[F(x)](s) = x(s) - \lambda \int_a^b G(s,t)\mathrm{e}^{x(t)}\, dt. \tag{2.27}$$

En esta sección aproximaremos las soluciones de $F(x) = 0$, donde F está definido en (2.27), mediante el método de Newton y utilizaremos su significado teórico para obtener resultados de existencia y unicidad de soluciones para esta ecuación.

La condición original $(\widetilde{C_3})$ impuesta por Kantorovich a la segunda derivada del operador F, no se verifica. Para ello, observamos que

$$[F'(x)y](s) = y(s) - \lambda \int_a^b G(s,t)\mathrm{e}^{x(t)}y(t)\, dt$$

y

$$[F''(x)yz](s) = -\lambda \int_a^b G(s,t)\mathrm{e}^{x(t)}z(t)y(t)\, dt,$$

de manera que es fácil ver que $F''(x)$ no está acotada en un dominio general Ω. Tampoco es sencillo localizar un dominio donde lo esté y que además contenga una solución.

Para solventar la dificultad anterior, una alternativa es prelocalizar una solución en algún dominio $\Omega_0 \subset \Omega$ y buscar en él una cota superior para $\|F''(x)\|$ (véase [52]). Notemos que además tendremos que asegurar que existe una solución en Ω_0, que en el caso de querer aproximar x^* puede resultar relativamente sencillo a partir de la prelocalización. Sin embargo, para el caso de querer aproximar x^{**} resulta prácticamente imposible si no tenemos información de esta solución, salvo una cota inferior de su norma.

Como veremos, considerando la ecuación de Bratu, esta prelocalización la podremos utilizar para aproximar la solución de menor norma, sin embargo en el caso de la otra solución no es posible fijar Ω_0 sin tener información de ella.

Una alternativa mejor y más elegante que la prelocalización, consiste, tal y como hemos indicado anteriormente, en suavizar la condición anterior $(\widetilde{C_3})$ exigiendo que la segunda derivada verifique una condición del tipo $(\widetilde{A_3})$. Notamos que para la ecuación integral de Bratu anterior es más fácil encontrar una función ω que verifique $(\widetilde{A_3})$ que buscar una cota superior para $\|F''(x)\|$ en un dominio apropiado. Ahora nuestro problema consistirá en localizar una sucesión mayorizante para esta nueva situación.

Seguiremos un proceso de discretización que transforme la ecuación de Bratu (2.26) en un sistema de ecuaciones no lineales y aplicaremos el método de Newton para obtener aproximaciones numéricas de las soluciones del sistema. Es interesante notar que, para hacer esto, no podremos utilizar los resultados clásicos de convergencia semilocal del método de Newton bajo condiciones de Kantorovich o de tipo Kantorovich, en los que la segunda derivada del operador correspondiente está acotada [75] o suavizaciones habituales de esta condición (ver [50] y [51]).

2.3.7.1. Planteamiento del problema

Cuando queremos aproximar una solución de la ecuación $F(\overline{x}) = 0$, donde el operador F está definido por $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ en un dominio abierto convexo no vacío Ω, mediante el método de Newton lo que hacemos es resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales en cada paso

$$F'(\overline{x}_n)(\overline{x}_{n+1} - \overline{x}_n) = -F(\overline{x}_n). \tag{2.28}$$

En cambio, si el operador es de la forma $F : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$, no podemos utilizar la idea anterior puesto que no sabemos resolver la ecuación integral que correspondería a la ecuación (2.28) a partir de (2.27). Tampoco podemos aplicar directamente el método de Newton ya que no conocemos $[F'(x_n)]^{-1}$. Esto es lo que ocurre cuando buscamos las soluciones de la ecuación de Bratu (2.26).

Entonces, como primer paso, discretizamos la ecuación (2.26) para transformarla en un problema de dimensión finita y aplicamos (2.28) para obtener una solución aproximada. El procedimiento consiste en aproximar la integral que aparece en (2.26) por una fórmula de cuadratura numérica. Usamos la fórmula de Gauss-Legendre para aproximar la integral

$$\int_a^b f(t)\,dt \simeq \sum_{i=1}^m \beta_i f(t_i),$$

donde los nodos t_i y los pesos β_i están determinados.

Si denotamos la aproximación de $x(t_i)$ por x_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), (2.26) es ahora equivalente al siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$x_i = \lambda \sum_{j=1}^m a_{ij} \mathrm{e}^{x_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

donde

$$a_{ij} = \beta_j G(t_i, t_j) = \begin{cases} \beta_j \dfrac{(b-t_i)(t_j-a)}{b-a}, & j \leq i, \\ \beta_j \dfrac{(b-t_j)(t_i-a)}{b-a}, & j > i. \end{cases}$$

El sistema anterior se puede escribir en la forma

$$\bar{x} = \lambda A(\mathrm{e}^{x_1}, \mathrm{e}^{x_2}, \ldots, \mathrm{e}^{x_m})^T \quad \text{con} \quad A = (a_{ij}),$$

o equivalentemente

$$F(\overline{x}) = \overline{x} - \lambda A u(\overline{x}) = 0, \tag{2.29}$$

donde $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T$, $u(\overline{x}) = (\mathrm{e}^{x_1}, \ldots, \mathrm{e}^{x_m})^T$ y

$$F(\overline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - \lambda \sum_{j=1}^m a_{1j}\mathrm{e}^{x_j} \\ x_2 - \lambda \sum_{j=1}^m a_{2j}\mathrm{e}^{x_j} \\ \vdots \\ x_m - \lambda \sum_{j=1}^m a_{mj}\mathrm{e}^{x_j} \end{pmatrix}.$$

En este caso $F'(\overline{x}) = (\alpha_{ij})$, donde

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1-\lambda a_{11}\mathrm{e}^{x_1} & -\lambda a_{12}\mathrm{e}^{x_2} & \cdots & -\lambda a_{1m}\mathrm{e}^{x_m} \\ -\lambda a_{21}\mathrm{e}^{x_1} & 1-\lambda a_{22}\mathrm{e}^{x_2} & \cdots & -\lambda a_{2m}\mathrm{e}^{x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda a_{m1}\mathrm{e}^{x_1} & -\lambda a_{m2}\mathrm{e}^{x_2} & \cdots & 1-\lambda a_{mm}\mathrm{e}^{x_m} \end{pmatrix}.$$

Luego

$$F'(\overline{x}) = I - \lambda A D(\overline{x}) \quad \text{con} \quad D(\overline{x}) = \operatorname{diag}\{\mathrm{e}^{x_1}, \ldots, \mathrm{e}^{x_n}\}.$$

También obtenemos que la segunda derivada del operador F es

$$\begin{aligned} F''(\overline{x})\overline{yz} &= (y_1, \ldots, y_m) F''(\overline{x})(z_1, \ldots, z_m)^T \\ &= -\lambda \begin{pmatrix} a_{11}\mathrm{e}^{x_1} y_1 z_1 + a_{12}\mathrm{e}^{x_2} y_2 z_2 + \cdots + a_{1m}\mathrm{e}^{x_m} y_m z_m \\ \vdots \\ a_{m1}\mathrm{e}^{x_1} y_1 z_1 + a_{m2}\mathrm{e}^{x_2} y_2 z_2 + \cdots + a_{mm}\mathrm{e}^{x_m} y_m z_m \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_m)^T$ y $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_m)^T$. Luego

$$F''(\overline{x})\overline{yz} = -\lambda A(\mathrm{e}^{x_1} y_1 z_1, \ldots, \mathrm{e}^{x_m} y_m z_m)^T.$$

Estudiamos la aplicación del teorema de Kantorovich a este problema. Si el operador F está definido en las condiciones anteriores y $F(\overline{x}) = \overline{x} - \lambda A u(\overline{x})$, entonces tenemos que:

$$\|\Gamma_0\| = \|[F'(\overline{x}_0)]^{-1}\| = \|[I - \lambda A D(\overline{x}_0)]^{-1}\| = \frac{1}{1 - \lambda \|A\| \|D(\overline{x}_0)\|} = \beta, \tag{2.30}$$

siempre que $\lambda\|A\|\|D(\overline{x}_0)\| < 1$, y

$$\|\Gamma_0 F(\overline{x}_0)\| = \|[I - \lambda A D(\overline{x}_0)]^{-1}\big(\overline{x}_0 - \lambda A u(\overline{x}_0)\big)\| = \frac{\|\overline{x}_0 - \lambda A u(\overline{x}_0)\|}{1 - \lambda\|A\|\|D(\overline{x}_0)\|} = \eta, \tag{2.31}$$

donde $u(\overline{x}_0) = (\mathrm{e}^{\widehat{x}_1}, \mathrm{e}^{\widehat{x}_2}, \ldots, \mathrm{e}^{\widehat{x}_m})^T$ con $\overline{x}_0 = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_m)^T$. Además,

$$\|F''(\overline{x})\| = \sup_{\substack{\|\overline{y}\|=1 \\ \|\overline{z}\|=1}} \|F''(\overline{x})\overline{yz}\|,$$

luego

$$\|F''(\overline{x})\overline{yz}\| \leq \lambda\|A\| \left\| \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x_1} y_1 z_1 \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{x_m} y_m z_m \end{pmatrix} \right\|.$$

Si tomamos la norma del máximo, entonces

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{e}^{x_1}y_1z_1,\ldots,\mathrm{e}^{x_m}y_mz_m)^T\|_\infty &= \max_{1\le i\le m}|\mathrm{e}^{x_i}y_iz_i| \le \max_{1\le i\le m}|\mathrm{e}^{x_i}||y_i||z_i| \\ &\le \max_{1\le i\le m}|\mathrm{e}^{x_i}|\|\overline{y}\|_\infty\|\overline{z}\|_\infty \le \mathrm{e}^{\|\overline{x}\|_\infty}\|\overline{y}\|_\infty\|\overline{z}\|_\infty.\end{aligned}$$

Luego $\|F''(\overline{x})\|_\infty \le \lambda\|A\|_\infty \mathrm{e}^{\|\overline{x}\|_\infty}$ y vemos, evidentemente, que $\|F''(\overline{x})\|_\infty$ no está acotado, puesto que $\mathrm{e}^{\|\overline{x}\|_\infty}$ es una función creciente. Luego, no podemos aplicar el resultado de Kantorovich. Incluso aunque F' fuera de tipo Lipschitz, tampoco podríamos utilizar dicho resultado.

Para solventar la dificultad anterior y poder aplicar el teorema de Kantorovich, como ya se ha indicado anteriormente, una alternativa es prelocalizar la raíz en algún dominio y buscar alguna cota superior para $\|F''(x)\|_\infty$ en él (véase [52]). Para ello, si $\overline{x}^*$ es solución de $F(\overline{x}) = 0$, tenemos

$$\overline{x}^* - \lambda A u(\overline{x}^*) = 0$$

y

$$\|\overline{x}^*\|_\infty - \lambda\|A\|_\infty \mathrm{e}^{\|\overline{x}^*\|_\infty} \le 0.$$

La inecuación anterior se verifica si $\|\overline{x}^*\|_\infty \in [0, r_1] \cup [r_2, +\infty]$, siendo $0 < r_1 < r_2$, donde r_1 y r_2 son las dos soluciones reales positivas de la ecuación escalar $t - \lambda\|A\|_\infty \mathrm{e}^t = 0$. Representamos gráficamente esta región en la figura 2.9.

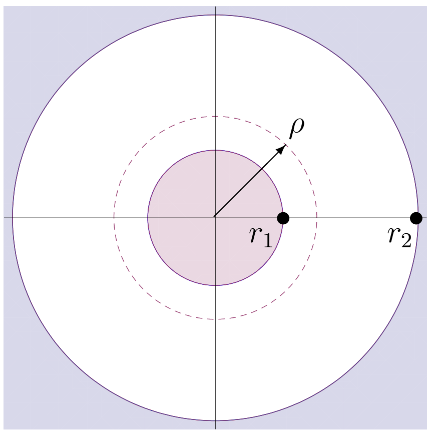

Figura 2.9: $\|\overline{x}^*\|_\infty \in [0, r_1] \cup [r_2, +\infty)$

Mediante las condiciones de Kantorovich solo podemos aproximar la solución del tipo $\|\overline{x}^*\|_\infty \in [0, r_1]$. Para ello tomaremos el punto de salida $\overline{x}_0$ tal que $\overline{x}_0 \in B(0,\rho)$, con $r_1 < \rho < r_2$.

Entonces, si por ejemplo consideramos la ecuación de Bratu (2.26) con $\lambda = 1$, $a = 0$ y $b = 1$, obtenemos los valores de $r_1 = 0{,}14248\ldots$ y $r_2 = 3{,}27839\ldots$ Tomando entonces $\rho = 3$ y eligiendo $m = 8$ y $\overline{x}_0 = \overline{0} = (0,\ldots,0)^T$ como punto de salida, vemos entonces que se cumplen las condiciones del teorema 2.3.2 de Kantorovich con $s_0 = 0$, ya que

$$\|F''(\overline{x})\|_\infty \leq (0{,}123559)\mathrm{e}^{t+\|\overline{x}_0\|_\infty} = 2{,}48175\ldots = k,$$

$$\beta = 1{,}13821\ldots, \quad \eta = 0{,}138214\ldots \quad \text{y} \quad k\beta\eta = 0{,}390423\ldots < \frac{1}{2}.$$

Además, obtenemos también la solución $s^* = 0{,}1882\ldots$ y vemos que $B(\overline{x}_0, s^*) \subseteq \Omega = B(\overline{0}, \rho)$. Luego, el método de Newton converge a una solución $\overline{x}^*$, la dada por el vector $\overline{x}^* = (x_1^*,\ldots,x_8^*)^T$ en la tabla 2.4, después de tres iteraciones.

n	x_n^*	n	x_n^*
1	$0{,}010934\ldots$	5	$0{,}139301\ldots$
2	$0{,}051801\ldots$	6	$0{,}103646\ldots$
3	$0{,}103646\ldots$	7	$0{,}051801\ldots$
4	$0{,}139301\ldots$	8	$0{,}010934\ldots$

Tabla 2.4: Solución numérica de (2.26) con $a = 0$, $b = 1$ y $\lambda = 1$

En este caso hemos considerado el polinomio de Kantorovich (2.2) como función mayorizante para construir la sucesión mayorizante $\{s_n\}$. Observamos que obtenemos $p(s)$ mediante interpolación natural de las condiciones de Kantorovich y que el teorema 2.3.2 de Kantorovich es independiente del valor de s_0. Entonces, mediante el método de Newton y tomando $s_0 = 0$, construimos la sucesión

$$s_{n+1} = s_n - \frac{p(s_n)}{p'(s_n)}, \quad n \geq 0, \tag{2.32}$$

que mayoriza a la sucesión $\{\overline{x}_n\}$, es decir

$$\|\overline{x}_{n+1} - \overline{x}_n\| \leq s_{n+1} - s_n.$$

Además, la sucesión $\{s_n\}$ converge a la raíz $s^* = \dfrac{1-\sqrt{1-2k\beta\eta}}{k\beta}$ del polinomio $p(s)$. Entonces, podemos considerar $\|\overline{x}^* - \overline{x}_n\| \leq |s^* - s_n|$, y considerando el valor $\overline{x}^*$ obtenido como la aproximación a la solución del problema,

n	$\|\overline{x}^* - \overline{x}_n\|$	$\|s^* - s_n\|$
0	$0{,}139301\ldots$	$0{,}188285\ldots$
1	$0{,}001087\ldots$	$0{,}050070\ldots$
2	$7{,}02 \times 10^{-8}$	$0{,}005808\ldots$

Tabla 2.5: Error absoluto y estimaciones a priori del error

comparamos en la tabla 2.5 las estimaciones a priori del error dadas por la sucesión mayorizante y el error absoluto.

Nos quedaría por localizar la otra solución. No sabemos cómo elegir otra bola en la que esté dicha solución, ya que, elegida al azar, la bola podría no contener la solución o cortarla. Por tanto no podemos aproximar una solución $\overline{x}^{**}$ tal que $\|\overline{x}^{**}\| \geq r_2$. Utilizaremos aquí el procedimiento desarrollado en las secciones anteriores, que consiste en suavizar la condición $\|F''(\overline{x})\| \leq k$, $\overline{x} \in \Omega$, exigiendo que la segunda derivada del operador verifique una condición del tipo (2.1). Además, veremos que con este procedimiento, obtenemos también la primera solución, en cuyo caso mejoraremos las estimaciones a priori del error dadas por el resultado de Kantorovich para el polinomio mayorizante $p(s)$.

2.3.7.2. Construcción de la sucesión mayorizante

Realizaremos una construcción *ad hoc* de la sucesión mayorizante. Comenzamos entonces por construir una función mayorizante f. Para ello, consideramos la condición $\|F''(\overline{x})\| \leq \omega(\|\overline{x}\|)$, $\overline{x} \in \Omega$, pero buscando una condición de la forma $\|F''(\overline{x})\| \leq f''(t)$ para $\|\overline{x} - \overline{x}_0\| \leq t - t_0$, que junto con las condiciones $(\widetilde{A_1})$ y $(\widetilde{A_2})$ nos permite construir la correspondiente función mayorizante. Así, como ω es no decreciente, consideramos

$$\|F''(\overline{x})\| \leq \omega(\|\overline{x}\|) \leq \omega(t - t_0 + \|\overline{x}_0\|) \equiv \omega(t; t_0) \quad \text{para} \quad \|\overline{x} - \overline{x}_0\| \leq t - t_0,$$

y planteamos el correspondiente problema de valor inicial (2.19), cuya solución es:

$$f(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\theta} \omega(\xi; t_0)\, d\xi d\theta - \frac{t - t_0}{\beta} + \frac{\eta}{\beta} \cdot \tag{2.33}$$

Para nuestro caso particular tenemos $\omega(t - t_0 + \|\overline{x}_0\|) = \lambda \|A\| \mathrm{e}^{t - t_0 + \|\overline{x}_0\|}$, de manera que (2.33) se reduce a

$$f(t) = \lambda \|A\| \mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\| - t_0} \left(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{t_0}(t_0 - 1 - t)\right) - \frac{t - t_0}{\beta} + \frac{\eta}{\beta} \cdot \tag{2.34}$$

con β y η definidas en (2.30) y (2.31).

A continuación, damos las propiedades de la función (2.34) correspondientes al lema 2.3.4 anterior y que tienen un interés posterior.

Lema 2.3.17 *Sea f la función definida en (2.34) y*

$$\alpha = Ln\left(e^{t_0} + \frac{e^{t_0-\|\overline{x}_0\|}}{\beta\lambda\|A\|}\right). \tag{2.35}$$

Entonces se verifica:

(a) *α es el único mínimo de f en $[t_0,+\infty)$.*

(b) *f es una función no creciente en (t_0,α).*

(c) *Si $\alpha \geq \dfrac{1+t_0+\eta+t_0\beta\lambda\|A\|e^{\|\overline{x}_0\|}}{1+\beta\lambda\|A\|e^{\|\overline{x}_0\|}}$, entonces la función f tiene al menos un cero en $(t_0,+\infty)$. Además, $f(t)=0$ tiene una raíz t^* tal que $t_0 < t^* \leq \alpha$.*

Demostración.

(a) Como $f'(\alpha) = \lambda\|A\|\mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\|-t_0}(\mathrm{e}^{\alpha}-\mathrm{e}^{t_0})-\frac{1}{\beta} = \lambda\|A\|\mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\|-t_0+\alpha}-\lambda\|A\|\mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\|}-\frac{1}{\beta}=0$ y $f''(t)=\lambda\|A\|\mathrm{e}^{t+\|\overline{x}_0\|-t_0}\geq 0$, $\forall t\in[t_0,+\infty)$, entonces α es un mínimo de f en $[t_0,+\infty)$. Además, como f es convexa en $[t_0,+\infty)$, α es el único mínimo de f en $[t_0,+\infty)$.

(b) Como f es convexa, f' es creciente. Además, como $f'(t_0) = -\dfrac{1}{\beta} < 0$ y $f'(\alpha)=0$, entonces $t_0<\alpha$ y $f'(t)<0$ en (t_0,α).

(c) Si $\alpha > \dfrac{1+t_0+\eta+t_0\beta\lambda\|A\|\mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\|}}{1+\beta\lambda\|A\|\mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\|}}$, como $f(t_0)=\dfrac{\eta}{\beta}$, entonces f tiene al menos una raíz en (t_0,α) por ser f continua. Además, como f es decreciente en (t_0,α), entonces f tiene una raíz, t^*, en (t_0,α). En el caso en que $\alpha = \dfrac{1+t_0+\eta+t_0\beta\lambda\|A\|\mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\|}}{1+\beta\lambda\|A\|\mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\|}}$, entonces α es una raíz doble de f y tomamos $t^*=\alpha$. ■

A continuación definimos la sucesión escalar $\{t_n\}$,

$$\begin{cases} \text{dado} \quad t_0, \\ t_{n+1} = t_n - \dfrac{f(t_n)}{f'(t_n)}, \quad n\geq 0, \end{cases} \tag{2.36}$$

donde f está definida en (2.34), y damos algunas propiedades de esta sucesión.

Lema 2.3.18 *Sean f la función definida en (2.34) y α en (2.35). Si*

$$\alpha \geq \frac{1 + t_0 + \eta + t_0\beta\lambda\|A\|e^{\|\overline{x}_0\|}}{1 + \beta\lambda\|A\|e^{\|\overline{x}_0\|}}, \tag{2.37}$$

entonces la sucesión $\{t_n\}$ definida por (2.36) es creciente y converge a t^*.

Demostración. Como $t_1 - t_0 = \eta > 0$, es claro que $t_1 > t_0$.

Como $t_1 - t^* = N(t_0) - N(t^*) = N'(\xi)(t_0 - t^*)$ con $\xi \in (t_0, t^*)$, $N(t) = t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}$ y $t_0 - t^* < 0$, entonces $t_1 < t^*$ si $N'(\xi) > 0$, lo que es cierto porque $f(t) > 0$ ya que $f(t_0) > 0$ y f convexa y además $f''(t) > 0$ en (t_0, t^*).

Suponemos entonces que $t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t^*$. Vemos entonces por inducción que $t_n < t_{n+1} < t^*$.

Como $t_{n+1} - t_n = -\dfrac{f(t_n)}{f'(t_n)}$, $f(t_n) > 0$ porque $t_n \in (t_{n-1}, t^*)$ y $f'(t_n) < 0$ por ser f no decreciente en (t_{n+1}, t^*), se sigue que $t_n < t_{n+1}$.

Por otra parte, $t_{n+1} - t^* = N(t_n) - N(t^*) = N'(\xi_n)(t_{n-1} - t^*)$ con $\xi_n \in (t_n, t^*)$ y por el mismo razonamiento que antes $N'(\xi_n) > 0$, de manera que $t_{n+1} - t^* < 0$ por ser $t_{n-1} < t^*$.

En consecuencia, $\{t_n\}$ es creciente y acotada superiormente por t^*. Luego, existe $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = u^*$. Por tanto, $u^* - \dfrac{f(u^*)}{f'(u^*)} = u^*$ por la continuidad de f y $f(u^*) = 0$. Como t^* es la única raíz de $f(t) = 0$ en (t_0, α), entonces $u^* = t^*$. ■

A continuación probamos que si $B(\overline{x}_0, t^* - t_0) \subseteq \Omega$, la sucesión de Newton $\{\overline{x}_n\}$ está bien definida y es mayorizada por $\{t_n\}$. Comenzaremos viendo que $\overline{x}_1 \in B(\overline{x}_0, t^* - t_0)$:

$$\|\overline{x}_1 - \overline{x}_0\| = \|[F'(\overline{x}_0)]^{-1}F(\overline{x}_0)\| \leq \eta = t_1 - t_0 < t^* - t_0.$$

En el siguiente resultado, veremos que $\overline{x}_n \in B(\overline{x}_0, t^* - t_0)$, para todo $n \geq 1$ y que la sucesión $\{t_n\}$ mayoriza a la sucesión de Newton $\{\overline{x}_n\}$ para todo $n \geq 1$.

Lema 2.3.19 *Sea $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ el operador definido en (2.29), donde Ω es un dominio abierto convexo no vacío. Sean f la función definida en (2.34) y α en (2.35). Si se verifica (2.37), entonces $\overline{x}_n \in B(\overline{x}_0, t^* - t_0)$, $\forall n \geq 1$. Además, $\{t_n\}$ es mayorizante de $\{\overline{x}_n\}$, i. e.:*

$$\|\overline{x}_{n+1} - \overline{x}_n\| \leq t_{n+1} - t_n, \quad n \geq 0.$$

Demostración. Para cada $n \geq 1$, probaremos lo siguiente:

(i) existe $\Gamma_n = [F'(\overline{x}_n)]^{-1}$ y $\|\Gamma_n\| \leq -\dfrac{1}{f'(t_n)}$,

(ii) $\|F(\overline{x}_n)\| \leq f(t_n)$,

(iii) $\|\overline{x}_{n+1} - \overline{x}_n\| \leq t_{n+1} - t_n$,

(iv) $\|\overline{x}_{n+1} - \overline{x}_0\| \leq t^* - t_0$.

Comenzamos con el caso $n = 1$.

(i) Sabemos por el lema de Banach sobre inversión de operadores que si $\|I-\Gamma_0 F'(\overline{x}_1)\| < 1$, entonces existe Γ_1 y probaremos que $\|\Gamma_1\| \leq -\dfrac{1}{f'(t_1)}$. A partir de

$$\begin{aligned}
\|I - \Gamma_0 F'(\overline{x}_1)\| &= \left\| \int_{\overline{x}_0}^{\overline{x}_1} \Gamma_0 F''(\overline{x})\, dx \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 \Gamma_0 F''\Big(\overline{x}_0 + \tau(\overline{x}_1 - \overline{x}_0)\Big)(\overline{x}_1 - \overline{x}_0)\, d\tau \right\| \\
&\leq \|\Gamma_0\| \int_0^1 \left\| F''\Big(\overline{x}_0 + \tau(\overline{x}_1 - \overline{x}_0)\Big) \right\| d\tau \|\overline{x}_1 - \overline{x}_0\| \\
&\leq \beta \|\overline{x}_1 - \overline{x}_0\| \int_0^1 \lambda \|A\| \mathrm{e}^{\|\overline{x}_0 + \tau(\overline{x}_1 - \overline{x}_0)\|}\, d\tau \\
&\leq \beta \|\overline{x}_1 - \overline{x}_0\| \int_0^1 \lambda \|A\| \mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\| + \tau\|\overline{x}_1 - \overline{x}_0\|}\, d\tau \\
&= \beta\lambda\|A\|(\mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\| + \|\overline{x}_1 - \overline{x}_0\|} - \mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\|}) \\
&= \beta\lambda\|A\|\mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\|}(\mathrm{e}^{\|\overline{x}_1 - \overline{x}_0\|} - 1) \\
&\leq \beta\lambda\|A\|\mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\|}(\mathrm{e}^{t_1 - t_0} - 1),
\end{aligned}$$

como $f'(t) = \dfrac{\beta\lambda\|A\|\mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\|}(\mathrm{e}^{t-t_0} - 1) - 1}{\beta}$ y $f'(t_0) = -\dfrac{1}{\beta}$, se sigue que

$$\|I - \Gamma_0 F'(\overline{x}_1)\| \leq 1 - \frac{f'(t_1)}{f'(t_0)} < 1.$$

Entonces por el lema de Banach, podemos garantizar la existencia de Γ_1 y que

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1\| &\leq \|[\Gamma_0 F'(\overline{x}_1)]^{-1}\| \|\Gamma_0\| \leq \frac{\|\Gamma_0\|}{1 - \|I - \Gamma_0 F'(\overline{x}_1)\|} \\ &\leq \frac{f'(t_0)}{f'(t_1)} \frac{-1}{f'(t_0)} = -\frac{1}{f'(t_1)}. \end{aligned}$$

(ii) Sabemos por el desarrollo de la serie de Taylor y (1.7) que

$$\begin{aligned} F(\overline{x}_1) &= F(\overline{x}_0) + F'(\overline{x}_0)(\overline{x}_1 - \overline{x}_0) + \int_{\overline{x}_0}^{\overline{x}_1} F''(\overline{x})(\overline{x}_1 - \overline{x})\, d\overline{x} \\ &= \int_0^1 F''\Big(\overline{x}_0 + \tau(\overline{x}_1 - \overline{x}_0)\Big)(1+\tau)\, d\tau (\overline{x}_1 - \overline{x}_0)^2. \end{aligned}$$

Luego, como $\|\overline{x}_0 + \tau(\overline{x}_1 - \overline{x}_0) - \overline{x}_0\| \leq \tau \|\overline{x}_1 - \overline{x}_0\| \leq \tau(t_1 - t_0) = t_0 + \tau(t_1 - t_0) - t_0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|F(\overline{x}_1)\| &\leq \int_0^1 \lambda \|A\| \mathrm{e}^{t_0 + \tau(t_1 - t_0) - t_0 + \|\overline{x}_0\|}(1+\tau)\, d\tau (t_1 - t_0)^2 \\ &= \lambda \|A\| \mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\| - t_0}\Big(\mathrm{e}^{t_1} - (1 + t_1 - t_0)\mathrm{e}^{t_0}\Big). \end{aligned}$$

Por otra parte, como

$$f(t_1) = \lambda \|A\| \mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\| - t_0}\left(\mathrm{e}^{t_1} + \mathrm{e}^{t_0}(t_0 - 1 - t_1)\right) - \frac{t_1 - t_0}{\beta} + \frac{\eta}{\beta}$$

y

$$-\frac{t_1 - t_0}{\beta} + \frac{\eta}{\beta} = 0,$$

se sigue $\|F(\overline{x}_1)\| \leq f(t_1)$.

(iii) $\|\overline{x}_2 - \overline{x}_1\| = \|\Gamma_1 F(\overline{x}_1)\| \leq -\dfrac{f(t_1)}{f'(t_1)} = t_2 - t_1$.

(iv) $\|\overline{x}_2 - \overline{x}_0\| \leq \|\overline{x}_2 - \overline{x}_1\| + \|\overline{x}_1 - \overline{x}_0\| \leq t_2 - t_1 + t_1 - t_0 = t_2 - t_0 \leq t^* - t_0$. Por tanto $\overline{x}_2 \in B(\overline{x}_0, t^* - t_0) \subset \Omega$.

Aplicamos ahora inducción. Supongamos que se cumplen (i)–(iv) para todo $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Veámoslo para $k = n$.

(i) Procediendo como en el caso $n=1$, si $\|I-\Gamma_{n-1}F'(\overline{x}_n)\|<1$, entonces por el lema de Banach existe Γ_n y $\|\Gamma_n\| \leq -\dfrac{1}{f'(t_n)}$. En efecto, como $\|\overline{x}_{n-1}+\tau(\overline{x}_n-\overline{x}_{n-1})-\overline{x}_0\| \leq t_{n-1}+\tau(t_n-t_{n-1})-t_0$,

$$\begin{aligned}
& \|I-\Gamma_{n-1}F'(\overline{x}_n)\| = \Big\| \int_0^1 \Gamma_{n-1}F''\Big(\overline{x}_{n-1}+\tau(\overline{x}_n-\overline{x}_{n-1})\Big) \\
& \times(\overline{x}_n-\overline{x}_{n-1})\,d\tau\Big\| \\
\leq\ & \|\Gamma_{n-1}\|\|\overline{x}_n-\overline{x}_{n-1}\| \int_0^1 \Big\|F''\Big(\overline{x}_{n-1}+\tau(\overline{x}_n-\overline{x}_{n-1})\Big)\Big\|\,d\tau \\
\leq\ & \|\Gamma_{n-1}\| \int_0^1 \omega\Big(t_{n-1}+\tau(t_n-t_{n-1})-t_0+\|\overline{x}_0\|\Big)(t_n-t_{n-1})\,d\tau \\
=\ & \|\Gamma_{n-1}\| \int_{t_{n-1}}^{t_n} f''(t)\,dt \leq \frac{-1}{f'(t_{n-1})}\Big(f'(t_n)-f'(t_{n-1})\Big) \\
=\ & 1-\frac{f'(t_n)}{f'(t_{n-1})} < 1,
\end{aligned}$$

y por el lema de Banach obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_n\| &\leq \|(\Gamma_{n-1}F'(\overline{x}_n))^{-1}\|\|\Gamma_{n-1}\| \leq \frac{\|\Gamma_{n-1}\|}{1-\|I-\Gamma_{n-1}F'(\overline{x}_n)\|} \\
&\leq \frac{f'(t_{n-1})}{f'(t_n)}\frac{-1}{f(t_{n-1})} = \frac{-1}{f'(t_n)}.
\end{aligned}$$

(ii) Teniendo en cuenta el desarrollo en serie de Taylor, podemos escribir

$$F(\overline{x}_n) = \int_0^1 F''\Big(\overline{x}_{n-1}+\tau(\overline{x}_n-\overline{x}_{n-1})\Big)(1+\tau)\,d\tau(\overline{x}_n-\overline{x}_{n-1})^2,$$

de manera que, como

$$\|\overline{x}_{n-1}+\tau(\overline{x}_n-\overline{x}_{n-1})-\overline{x}_0\| \leq t_n-t_0+\tau(t_n-t_{n-1}) = t_n+\tau(t_n-t_{n-1})-t_0,$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\|F(\overline{x}_n)\| &\leq \int_0^1 \omega\Big(t_{n-1}+\tau(t_n-t_{n-1})-t_0+\|\overline{x}_0\|\Big) \\
&\quad \times(t_n-t_{n-1})\,d\tau(t_n-t_{n-1}) \\
&= \int_{t_{n-1}}^{t_n} f''(t)(t_n-t)\,dt = f(t_{n-1}) \\
&\quad -f'(t_{n-1})(t_n-t_{n-1})+f(t_n) \\
&= f(t_n).
\end{aligned}$$

(*iii*) $\|\overline{x}_{n+1} - \overline{x}_n\| = \|\Gamma_n F(\overline{x}_n)\| \leq \|\Gamma_n\|\|F(\overline{x}_n)\| \leq -\dfrac{f(t_n)}{f'(t_n)} = t_{n+1} - t_n.$

(*iv*) $\|\overline{x}_{n+1} - \overline{x}_0\| \leq \|\overline{x}_{n+1} - \overline{x}_n\| + \|\overline{x}_n - \overline{x}_0\| \leq t_{n+1} - t_n + t_n - t_0 = t_{n+1} - t_0 \leq t^* - t_0.$

■

2.3.7.3. Convergencia semilocal del método de Newton y dominios de existencia y unicidad de soluciones

Una vez vistas las propiedades anteriores, supondremos a partir de ahora que se verifican las siguientes condiciones:

(*i*) $\overline{x}_0 \in \Omega$ tal que existe el operador $\Gamma_0 = [F'(\overline{x}_0)]^{-1}$ y $\|\Gamma_0\| \leq \beta$,

(*ii*) $\|\Gamma_0 F(\overline{x}_0)\| \leq \eta$,

(*iii*) $\|F''(\overline{x})\| \leq \omega(t - t_0 + \|\overline{x}_0\|) \equiv \omega(t; t_0)$ para $\|\overline{x} - \overline{x}_0\| \leq t - t_0$,

(*iv*) $B(\overline{x}_0, t^* - t_0) \subseteq \Omega$.

Además, como $\omega(0) > 0$, entonces f' es creciente y $f'(t) > 0$ en $(\alpha, +\infty)$, y por tanto f es estrictamente creciente en $(\alpha, +\infty)$, lo que garantiza que f tenga dos ceros reales positivos t^* y t^{**} tales que $t^* \leq t^{**}$.

Enunciamos ahora el resultado de convergencia semilocal para la sucesión de Newton $\{\overline{x}_n\}$.

Teorema 2.3.20 *Sea $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ el operador definido en (2.29), donde Ω es un dominio abierto convexo no vacío. Supongamos que se verifican (i)–(iv). Si se verifica (2.37), entonces la ecuación $F(\overline{x}) = 0$ tiene una solución $\overline{x}^*$ y la sucesión de Newton $\{\overline{x}_n\}$ converge a $\overline{x}^*$ empezando en $\overline{x}_0$. Además, $\overline{x}_n, \overline{x}^* \in \overline{B(\overline{x}_0, t^* - t_0)}$, $n \geq 0$, y $\|\overline{x}^* - \overline{x}_n\| \leq t^* - t_n$, para todo $n \geq 0$, donde $\{t_n\}$ está dada en (2.36). Finalmente, la solución $\overline{x}^*$ es única en $B(\overline{x}_0, t^{**} - t_0) \cap \Omega$ si $t^{**} > t^*$.*

Demostración. Como $\{t_n\}$ es una sucesión mayorizante de $\{\overline{x}_n\}$ y converge a t^*, entonces $\{\overline{x}_n\}$ es convergente, de manera que $\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{x}_n = \overline{x}^*$ y $\|\overline{x}^* - \overline{x}_n\| \leq t^* - t_n$. Veamos entonces que $\overline{x}^*$ es solución de $F(\overline{x}) = 0$. Como $\overline{x}^* = \lim\limits_{n\to+\infty} \overline{x}_n$ y $\|F(\overline{x}_n)\| = \|F'(\overline{x}_n)(\overline{x}_{n+1} - \overline{x}_n)\| \leq \|F'(\overline{x}_n)\|\|\overline{x}_{n+1} - \overline{x}_n\|$, por la continuidad del operador F, $F(\overline{x}^*) = 0$, siempre que la sucesión

$\{\|F'(\overline{x}_n)\|\}$ esté acotada, ya que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|\overline{x}_{n+1}-\overline{x}_n\|=0$. Veamos entonces que $\{\|F'(\overline{x}_n)\|\}$ está acotada. Como

$$\begin{aligned}
\|F'(\overline{x}_n)-F'(\overline{x}_0)\| &= \left\|\int_{\overline{x}_0}^{\overline{x}_n} F''(x)dx\right\| \\
&\leq \|x_n-x_0\|\int_0^1 \left\|F''\Big(x_0+\tau(x_n-x_0)\Big)\,d\tau\right\| \\
&\leq \|\overline{x}_n-\overline{x}_0\|\int_0^1 \lambda\|A\|e^{\|\overline{x}\|_0+\tau(\overline{x}_n-\overline{x}_0)}\,d\tau \\
&\leq \|\overline{x}_n-\overline{x}_0\|\lambda\|A\|\frac{e^{\|\overline{x}_0\|+\|\overline{x}_n-\overline{x}_0\|}-e^{\|\overline{x}_0\|}}{\|\overline{x}_n-\overline{x}_0\|} \\
&= \lambda\|A\|e^{\|\overline{x}_0\|}(e^{t_n-t_0}-1)
\end{aligned}$$

y $\|F'(\overline{x}_n)\|\leq\|F'(\overline{x}_n)-F'(\overline{x}_0)\|+\|F'(\overline{x}_0)\|$, es claro que la sucesión $\{\|F'(\overline{x}_n)\|\}$ está acotada.

Para probar la unicidad de $\overline{x}^*$, supondremos primero que $\overline{y}^*$ es otra solución de $F(\overline{x})=0$ en $B(\overline{x}_0,r)\cap\Omega$. Como

$$0=F(\overline{y}^*)-F(\overline{x}^*)=\int_{\overline{x}^*}^{\overline{y}^*}F'(x)dx=\int_0^1 F'\Big(\overline{x}^*+\tau(\overline{y}^*-\overline{x}^*)\Big)\,d\tau(\overline{y}^*-\overline{x}^*),$$

si el operador $T=\displaystyle\int_0^1 F'\Big(\overline{x}^*+t(\overline{y}^*-\overline{x}^*)\Big)\,dt$ es invertible, obtendremos que $\overline{x}^*=\overline{y}^*$. Para ver que T es invertible, probaremos equivalentemente que existe el operador

$$P=\left[\Gamma_0\int_0^1 F'\Big(\overline{x}^*+\tau(\overline{y}^*-\overline{x}^*)\Big)\,d\tau\right]^{-1}.$$

Así, si denotamos $t^*-t_0=R$ y $t^{**}-t_0=r$, tenemos

$$\begin{aligned}
I-\Gamma_0\int_0^1 F'\Big(\overline{x}^*+\tau(\overline{y}^*-\overline{x}^*)\Big)\,d\tau &= \Gamma_0\int_0^1\Big(F'(\overline{x}_0) \\
&\quad -F'\Big(\overline{x}^*+\tau(\overline{y}^*-\overline{x}^*)\Big)\Big)\,d\tau \\
&= -\Gamma_0\int_0^1\int_{\overline{x}_0}^{\overline{x}^*+\tau(\overline{y}^*-\overline{x}^*)}F''(z)\,dz\,d\tau,
\end{aligned}$$

y

$$\left\|I-\Gamma_0\int_0^1 F'\Big(\overline{x}^*+\tau(\overline{y}^*-\overline{x}^*)\Big)\,d\tau\right\|\leq\|\Gamma_0\|\left\|\int_0^1\int_{\overline{x}_0}^{\overline{x}^*+\tau(\overline{y}^*-\overline{x}^*)}F''(z)\,dz\,d\tau\right\|$$

$$\leq \beta\int_0^1\int_0^1\left\|F''\Big(\overline{x}_0+s\Big((\overline{x}^*-\overline{x}_0)+\tau(\overline{y}^*-\overline{x}^*)\Big)\Big)\right\|$$

$$
\begin{aligned}
& \times \|\overline{x}^* - \overline{x}_0 + \tau(\overline{y}^* - \overline{x}^*)\| \, ds \, d\tau \\
\leq \;& \beta \int_0^1 \int_0^1 \left\| F''\Big(\overline{x}_0 + s\Big((1-\tau)(\overline{x}^* - \overline{x}_0) + \tau(\overline{y}^* - \overline{x}_0)\Big)\Big) \right\| \\
& \times \|(1-\tau)(\overline{x}^* - \overline{x}_0) + \tau(\overline{y}^* - \overline{x}_0)\| \, ds \, d\tau \\
\leq \;& \beta \int_0^1 \Bigg[\Big((1-\tau)\|\overline{x}^* - \overline{x}_0\| + \tau\|\overline{y}^* - \overline{x}_0\|\Big) \\
& \times \int_0^1 \left\| F''\Big(\overline{x}_0 + s\Big((1-\tau)(\overline{x}^* - \overline{x}_0) + \tau(\overline{y}^* - \overline{x}_0)\Big)\Big) \right\| ds \Bigg] d\tau \\
\leq \;& \beta \int_0^1 \Bigg[\Big((1-\tau)\|\overline{x}^* - \overline{x}_0\| + \tau\|\overline{y}^* - \overline{x}_0\|\Big) \\
& \times \int_0^1 \lambda \|A\| \mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\| + s\left((1-\tau)\|\overline{x}^* - \overline{x}_0\| + \tau\|\overline{y}^* - \overline{x}_0\|\right)} \, ds \Bigg] d\tau \\
< \;& \beta \int_0^1 \Bigg[\Big((1-\tau)\|\overline{x}^* - \overline{x}_0\| + \tau\|\overline{y}^* - \overline{x}_0\|\Big) \\
& \times \int_0^1 \lambda \|A\| \mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\| + s\left(R + \tau(r-R)\right)} \, ds \Bigg] d\tau \\
< \;& \beta \int_0^1 \left[\Big(R + \tau(r-R)\Big) \lambda \|A\| \mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\|} \int_0^1 \mathrm{e}^{s\left(R+\tau(r-R)\right)} \, ds \right] d\tau \\
= \;& \beta \int_0^1 \lambda \|A\| e^{\|\overline{x}_0\|} \left(e^{R+\tau(r-R)} - 1 \right) d\tau \\
= \;& \beta \lambda \|A\| e^{\|\overline{x}_0\|} \left(\int_0^1 e^{R+\tau(r-R)} \, dt - 1 \right) \\
= \;& \beta \lambda \|A\| e^{\|\overline{x}_0\|} \left(\frac{e^r - e^R}{r - R} - 1 \right) = f(t^{**}) - f(t^*) + 1 = 1.
\end{aligned}
$$

Luego, por el lema de Banach, está claro que existe el operador P y obtenemos unicidad de solución en $B(\overline{x}_0, t^{**} - t_0) \cap \Omega$. ■

A partir del nuevo resultado de convergencia semilocal obtenido para el método de Newton, veremos a continuación que podemos aproximar ambas soluciones de la ecuación de Bratu mediante el método de Newton, además de mejorar las estimaciones a priori del error dadas por Kantorovich.

2.3.7.4. Caso particular de la ecuación de Bratu

Consideramos de nuevo el caso particular de la ecuación de Bratu (2.26) dado anteriormente por

$$
x(s) = \int_0^1 G(s,t) \mathrm{e}^{x(t)} \, dt, \quad s \in [0,1], \tag{2.38}
$$

donde $\lambda = 1$ y $[a, b] = [0, 1]$ en (2.26). Discretizamos otra vez la ecuación (2.38) y tomamos $m = 8$, de manera que a partir de

$$F(\overline{x}) = \overline{x} - Au(\overline{x}),$$

obtenemos las expresiones de

$$F'(\overline{x}) = I_8 - A\,\mathrm{diag}\{\mathrm{e}^{x_1}, \dots, \mathrm{e}^{x_8}\}$$

y

$$F''(\overline{x})\overline{yz} = -A(\mathrm{e}^{x_1}y_1z_1, \dots, \mathrm{e}^{x_8}y_8z_8)^T.$$

Como $\|F''(\overline{x})\|_\infty \leq \|A\|_\infty \mathrm{e}^{\|\overline{x}\|_\infty}$, $\|F''(\overline{x})\|_\infty$ no está acotada. Para obtener una solución de $F(\overline{x}) = 0$, hemos visto que la solución $\overline{x}^*$ debe cumplir que $\|\overline{x}^*\|_\infty \leq \|A\|_\infty \mathrm{e}^{\|\overline{x}^*\|_\infty}$, obteniendo los valores de $r_1 = 0{,}14248\dots$ y $r_2 = 3{,}27839\dots$ que nos permiten tomar una bola $B(0, \rho)$ con $\rho \in (r_1, r_2)$ tal que $\|F''(\overline{x})\|_\infty$ esté acotada y contenga una solución (figura 2.9). Eligiendo $\rho = 3$, hemos obtenido

$$\|F''(\overline{x})\|_\infty \leq \|A\|_\infty \mathrm{e}^\rho = (0{,}123559)\mathrm{e}^3 = 2{,}48175\dots = k,$$

de manera que podemos utilizar el teorema de Kantorovich para garantizar la convergencia del método de Newton a $\overline{x}^*$.

Por otra parte, si consideramos el teorema 2.3.20 y elegimos $t_0 = 0$, obtenemos

$$\|F''(\overline{x})\|_\infty \leq (0{,}123559)\mathrm{e}^{t+\|\overline{x}_0\|_\infty},$$

y por tanto

$$f(t) = (0{,}123559)\mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\|_\infty}(\mathrm{e}^t - 1 - t) - \frac{t}{1{,}13821} + 0{,}121431,$$

que obviamente no es de tipo polinómico.

Si tomamos $\overline{x}_0 = \overline{0} = (0, \dots, 0)^T$, obtenemos los valores ya calculados de $\beta = 1{,}13821\dots$ y $\eta = 0{,}138241\dots$ Luego la condición de Kantorovich, $k\beta\eta \leq \dfrac{1}{2}$, se verifica. También se verifica la condición (2.37) $\alpha = 2{,}09317\dots \geq \dfrac{1+\eta}{1+\beta\|A\|_\infty} = 0{,}9979\dots$, del teorema 2.3.20. Entonces, tenemos asegurada la convergencia del método de Newton a una solución $\overline{x}^*$ de $F(\overline{x}) = 0$ a partir de los teoremas 2.3.2 de Kantorovich y 2.3.20.

Utilizando el teorema 2.3.2 de Kantorovich obtenemos los valores de $s^* = 0{,}188285\dots$ y $s^{**} = 0{,}519739\dots$ Entonces, los dominios de existencia y unicidad son respectivamente:

$$\{\overline{u} \in \mathbb{R}^8; \|\overline{u}\|_\infty \leq 0{,}188285\dots\} \text{ y } \{\overline{u} \in \mathbb{R}^8; \|\overline{u}\|_\infty \leq 0{,}519739\dots\}.$$

Para la función f, tenemos que $t^* = 0{,}139652\ldots$ es la raíz positiva más pequeña de $f(t) = 0$. Por el teorema 2.3.20, los dominios de existencia y unicidad son respectivamente:

$$\{\overline{u} \in \mathbb{R}^8; \|\overline{u}\|_\infty \leq 0{,}139652\ldots\} \quad \text{y} \quad \{\overline{u} \in \mathbb{R}^8; \|\overline{u}\|_\infty \leq 3{,}28237\ldots\}.$$

Vemos que estos dominios mejoran a los dados por el teorema 2.3.2 de Kantorovich, puesto que el de existencia es menor y el de unicidad mayor. Obsérvese además que el dominio de existencia que obtenemos a partir del teorema 2.3.20 es muy preciso, pues fija hasta tres decimales, y que el de unicidad mejora considerablemente el que se obtendría por Kantorovich.

Una vez garantizada la convergencia del método de Newton, aplicando este proceso iterativo, hemos visto después de tres iteraciones, obtenemos una aproximación de la solución $\overline{x}^*$, la dada por el vector $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_8^*)^T$ en la tabla 2.4. Interpolando estos valores y teniendo en cuenta que la solución de la ecuación de Bratu (2.38) ha de anularse en $t = 0$ y $t = 1$, obtenemos la solución representada en la figura 2.10.

A continuación vemos que la sucesión mayorizante (2.36), obtenida a partir de la función (2.34), proporciona mejores estimaciones a priori del error que las que se obtienen por el teorema 2.3.2 a partir de (2.32). Las estimaciones a priori del error y el error absoluto podemos verlos en la tabla 2.7, donde hemos considerado como solución del problema la solución dada en la tabla 2.4. Observamos en la tabla 2.6 la notable mejora de las estimaciones a priori del error que obtenemos a partir de la nueva sucesión mayorizante que hemos construido.

n	$\|\overline{x}^* - \overline{x}_n\|$	$\|t^* - t_n\|$	$\|s^* - s_n\|$
0	$0{,}139301\ldots$	$0{,}139651\ldots$	$0{,}188285\ldots$
1	$0{,}001087\ldots$	$0{,}001437\ldots$	$0{,}050070\ldots$
2	$7{,}02 \times 10^{-8}$	$1{,}704 \times 10^{-7}$	$0{,}005808\ldots$

Tabla 2.6: Error absoluto y estimaciones a priori del error

Con respecto a la aproximación de la otra solución discreta de (2.38), denotada por $\overline{x}^{**}$, cumpliendo $\|\overline{x}^{**}\|_\infty \geq r_2 = 3{,}27839\ldots$, tomamos como punto de salida para el método de Newton el vector $\overline{x}_0 = \overline{4} = (4, 4, \ldots, 4)^T$, que es un punto que está en el exterior de la corona mostrada en la figura 2.9, puesto que

$$\|\overline{x}_0\|_\infty = 4 > r_2 = 3{,}2783\ldots$$

En este caso recordamos que no podemos aplicar el teorema 2.3.2 de Kantorovich puesto que como no sabemos donde puede estar la segunda solución de (2.38), no podemos coger una bola que la contenga, lo que implica que no podemos acotar $\|F''(\overline{x})\|$. Si intentamos ahora aplicar el teorema 2.3.20, vemos que tampoco se verifican las condiciones de convergencia para este punto de salida, ya que no se cumple la condición (2.37) porque $\alpha = 0{,}61614\ldots < \dfrac{1+\eta}{1+\beta\|A\|_\infty \mathrm{e}^{\|\overline{x}_0\|_\infty}} = 0{,}6798\ldots$ Sin embargo parece claro que mejorando esta aproximación inicial se van a verificar las condiciones del teorema 2.3.20. Así, podemos iterar con el método de Newton hasta la iteración 6 y tomar como nuevo punto de salida

$$\overline{z}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}206543\ldots \\ 1{,}052503\ldots \\ 2{,}411149\ldots \\ 3{,}827142\ldots \\ 3{,}827142\ldots \\ 2{,}411149\ldots \\ 1{,}052503\ldots \\ 0{,}206543\ldots \end{pmatrix},$$

donde ya se verifican las condiciones del teorema 2.3.20 de convergencia semilocal, ya que

$$\beta = 3{,}26003\ldots, \qquad \eta = 0{,}00820\ldots$$

y

$$\alpha = 0{,}05264\ldots > \frac{1+\eta}{1+\beta\|A\|_\infty \mathrm{e}^{\|\overline{z}_0\|_\infty}} = 0{,}051699\ldots$$

Si $t_0 = 0$, construimos para el teorema 2.3.20 la función

$$f(t) = (0{,}123559)\mathrm{e}^{3{,}827142}(\mathrm{e}^t - 1 - t) - \frac{t}{3{,}26003} + 0{,}002515.$$

Para esta función f, tenemos que $t^* = 0{,}00894867\ldots$ es la raíz positiva más pequeña de $f(t) = 0$. Luego los dominios de existencia y unicidad son respectivamente:

$$\{\overline{u} \in \mathbb{R}^8; \|\overline{u} - \overline{z}_0\|_\infty \le 0{,}00894\ldots\} \text{ y } \{\overline{u} \in \mathbb{R}^8; \|\overline{u} - \overline{z}_0\|_\infty \le 0{,}09571\ldots\}$$

Observemos de nuevo la precisión del dominio de existencia que hemos obtenido a partir del teorema 2.3.20, puesto que fija hasta 2 decimales.

Como se ha indicado, tomando ahora como punto de salida $\overline{z}_0$, vemos que $\|\overline{z}_0\|_\infty = 3{,}82714\ldots > r_2 = 3{,}27839\ldots$, y aproximamos la segunda solución de la ecuación de Bratu mediante el método de Newton después de 3 iteraciones, que está dada por el vector $\overline{x}^{**} = (x_1^{**}, x_2^{**}, \ldots, x_8^{**})^T$ que aparece en la tabla 2.7.

n	x_n^{**}	n	x_n^{**}
1	0,206096...	5	3,818891...
2	1,050217...	6	2,405892...
3	2,405892...	7	1,050217...
4	3,818891...	8	0,206096...

Tabla 2.7: Segunda solución numérica de (2.38)

Interpolando de nuevo los valores obtenidos anteriormente y teniendo en cuenta que la solución de la ecuación de Bratu (2.38) ha de anularse en $t = 0$ y $t = 1$, obtenemos la solución $\overline{x}^{**}$ representada en la figura 2.10.

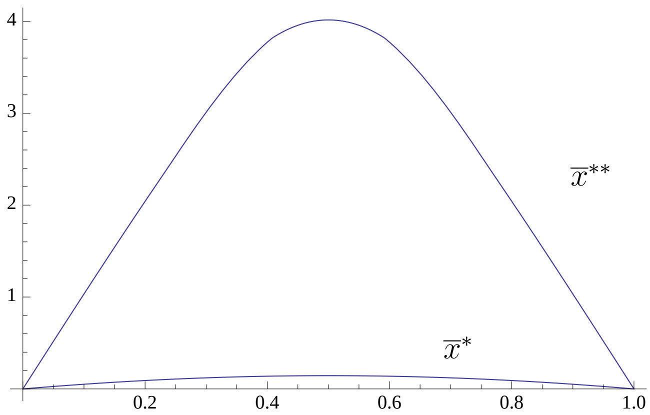

Figura 2.10: Las dos soluciones de la ecuación de Bratu (2.38)

Capítulo 3

Condiciones centradas para el método de Newton

3.1. Introducción

Han aparecido numerosos trabajos que han analizado la convergencia semilocal del método de Newton durante los últimos años [3, 12, 15, 17, 18, 103, 113, 133], la mayoría de ellos son modificaciones del teorema de Newton-Kantorovich que pasan por suavizar las condiciones de convergencia, en especial la condición (C_3), de manera que se le exija menos al operador F. Ahora bien, si exigimos al operador F una condición más suave que (C_3), como puede verse en los trabajos [10, 11, 50, 51, 101, 110, 130], entonces la condición (C_4) se suele cambiar por otra condición más restrictiva, que obligatoriamente nos lleva a que se reduzca el dominio de puntos de salida válidos para el método de Newton.

Nuestro objetivo en este capítulo no es exigir al operador F condiciones más suaves que (C_3), sino más fuertes, que persiguen una modificación, que no una restricción, del dominio de puntos de salida para el método de Newton, de manera que podamos empezar el método de Newton en puntos a partir de los cuales el teorema clásico 1.2.2 de Newton-Kantorovich no puede asegurar la convergencia semilocal del método de Newton, así como ofrecer mejoras de los dominios de existencia y unicidad de solución y de las cotas a priori del error. Para ello exigiremos al operador F condiciones centradas para la segunda derivada de F. Al igual que Kantorovich, nuestro planteamiento pasa por obtener un resultado general de convergencia semilocal utilizando el conocido principio de la mayorante que él desarrolló para el método de Newton. A partir de este resultado general, veremos los resultados obtenidos por otros autores [61, 132] como casos particulares de nuestro resultado general.

Comenzamos en la sección 3.2 introduciendo las nuevas condiciones de convergencia para el caso general y damos un nuevo resultado general de convergencia semilocal para el método de Newton indicando cómo se construyen las nuevas sucesiones mayorizantes. Incluimos también en la misma sección un resultado sobre unicidad de solución junto con otro sobre estimaciones a priori del error que conducen a la convergencia cuadrática del método de Newton bajo las condiciones de convergencia semilocal aquí presentadas. En la sección 3.3 destacamos tres casos particulares de nuestro resultado general dado en la sección 3.2 que han sido estudiados por otros autores. Finalizamos con la sección 3.4, donde se presentan dos aplicaciones del método de Newton cuando se quieren aproximar soluciones de ecuaciones integrales no lineales de tipo Hammerstein mixto. Con ellas se pone claramente de manifiesto las ventajas que pueden presentar las condiciones de convergencia aquí dadas con respecto a las de Kantorovich.

3.2. Convergencia semilocal

Como ya se ha indicado anteriormente, la condición (C_3) limita la aplicación del teorema clásico 1.2.2 de Newton-Kantorovich. En la sección 3.4 se pondrá de manifiesto este hecho con dos ejemplos. Nuestra idea en esta sección consiste en generalizar las hipótesis de Kantorovich, modificando las condiciones (C_3) y (C_4), y, como en el resultado general de Kantorovich, construir una función real f verificando:

(A_1) Existencia de $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1}$, para algún $x_0 \in \Omega$, con $\|\Gamma_0\| \leq -\dfrac{1}{f'(t_0)}$ y $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq -\dfrac{f(t_0)}{f'(t_0)}$, y $\|F''(x_0)\| \leq f''(t_0)$.

(A_2) $\|F''(x) - F''(x_0)\| \leq f''(t) - f''(t_0)$, para $\|x - x_0\| \leq t - t_0$, $x \in \Omega$ y $t \in [t_0, t']$,

siendo $f \in \mathcal{C}^{(2)}([t_0, t'])$ con $t_0, t' \in \mathbb{R}$.

Como vamos a demostrar la convergencia semilocal del método de Newton bajo las condiciones (A_1) y (A_2) utilizando el principio de la mayorante, construiremos una sucesión real $\{t_n\}$ que mayorice a la sucesión de Newton $\{x_n\}$ en el espacio de Banach X. Para obtener la sucesión real mayorizante $\{t_n\}$ utilizaremos una función real $f(t)$ definida en $[t_0, t'] \subset \mathbb{R}$, a partir de la cual construiremos dicha sucesión como:

$$\text{dado } t_0, \quad t_{n+1} = N(t_n) = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

Para construir la sucesión mayorizante $\{t_n\}$ a partir de la función $f(t)$, es bien conocida ([75]) la necesidad de que $f(t)$ tenga al menos un cero t^*, tal que $t^* \geq t_0$, y que la sucesión $\{t_n\}$ converja a t^* de forma creciente. Cuando esto ocurra, tenemos garantizada la convergencia semilocal de la sucesión $\{x_n\}$ dada por el método de Newton en el espacio de Banach X a partir de la convergencia de la sucesión $\{t_n\}$.

Para ello, estudiamos en primer lugar la convergencia de la sucesión escalar $\{t_n\}$ dada en (3.1). Notemos que si se cumplen (A_1), (A_2) y existe una solución $\alpha \in (t_0, t')$ de $f'(t) = 0$ tal que $f(\alpha) \leq 0$, entonces tenemos que la ecuación $f(t) = 0$ tiene una única raíz t^* en (t_0, α). En efecto, si $f(\alpha) < 0$, como $f(t_0) > 0$, entonces $f(t)$ tiene al menos un cero t^* en (t_0, α) por ser continua. Además, como $f''(t_0) \geq 0$, se sigue fácilmente de (A_2) que $f''(t) \geq 0$ para $t \in (t_0, \alpha)$, de manera que $f'(t)$ es creciente y $f'(t) < 0$ para $t \in (t_0, \alpha)$. También, como $f'(t_0) < 0$, tenemos que $f(t)$ es decreciente para $t \in [t_0, \alpha)$. En consecuencia, t^* es la única raíz de $f(t) = 0$ en (t_0, α). Por otra parte, si $f(\alpha) = 0$, entonces α es raíz doble de $f(t) = 0$ y tomamos $t^* = \alpha$.

La convergencia de la sucesión $\{t_n\}$ queda ahora garantizada en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1 *Sea $\{t_n\}$ la sucesión escalar definida en (3.1) con $f \in \mathcal{C}^{(2)}([t_0, t'])$ y cumpliendo (A_1) y (A_2). Supongamos que existe una solución $\alpha \in (t_0, t')$ de $f'(t) = 0$ tal que $f(\alpha) \leq 0$. Entonces, la sucesión $\{t_n\}$ es no decreciente y converge a t^*.*

Demostración. Comenzamos probando que la sucesión $\{t_n\}$ es monótona y acotada. Vemos entonces en primer lugar que $t_n \leq t^*$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ Como $f(t_0) > 0$, tenemos que $t_0 \leq t^*$. Además

$$t_1 - t^* = N(t_0) - N(t^*) = N'(\theta_0)(t_0 - t^*) \quad \text{con} \quad \theta_0 \in (t_0, t^*),$$

y como $N'(t) = \dfrac{f(t)f''(t)}{f'(t)^2} > 0$ en $[t_0, t^*)$, puesto que $f(t) > 0$ y $f''(t) > 0$ en $[t_0, t^*)$, se sigue que $t_1 < t^*$.

Supongamos ahora que $t_k < t^*$, para $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Entonces,

$$t_n - t^* = N(t_{n-1}) - N(t^*) = N'(\theta_{n-1})(t_{n-1} - t^*) \quad \text{con} \quad \theta_{n-1} \in (t_{n-1}, t^*).$$

Luego, como en el caso $k = 1$, se sigue que $t_n < t^*$.

Por otra parte, tenemos que

$$t_n - t_{n-1} = -\frac{f(t_{n-1})}{f'(t_{n-1})} \geq 0,$$

puesto que $f(t) > 0$ y $f'(t) < 0$ en $[t_0, t^*)$. Luego $\{t_n\}$ es no decreciente.

Por tanto, la sucesión $\{t_n\}$ es convergente por ser monótona y acotada. Luego, existe $r = \lim\limits_{n\to+\infty} t_n$ tal que $r \in [t_0, t^*]$. Tomando ahora límites en $t_{n+1} = N(t_n)$, $n \geq 0$, obtenemos que $f(r) = 0$, y como t^* es la única raíz de $f(t) = 0$ en $[t_0, t^*]$, se sigue que $r = t^*$. ■

Antes de ver que la sucesión $\{t_n\}$ dada por (3.1) es mayorizante de la sucesión de Newton $\{x_n\}$ en el espacio de Banach X, probamos un lema técnico que utilizaremos posteriormente. Este lema está basado en el operador

$$L_F(x) = [F'(x)]^{-1}F''(x)[F'(x)]^{-1}F(x) \in \mathcal{L}(X, X),$$

que se conoce como grado de convexidad logarítmico (ver [57, 64, 65, 66]). La idea fundamental que utilizaremos es que si $\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n$, se verifica:

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \left\| \int_{x_{n-1}}^{x_n} L_F(x)\, dx \right\| \leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} L_f(t)\, dt = t_{n+1} - t_n.$$

Comenzamos obteniendo un lema técnico que de información sobre el operador L_F.

Lema 3.2.2 *Sea $f \in \mathcal{C}^{(2)}([t_0, t'])$ con $t_0, t' \in \mathbb{R}$. Supongamos que se cumplen las condiciones (A_1) y (A_2), que existe $\alpha \in (t_0, t')$ tal que $f'(\alpha) = 0$ y que $B(x_0, \alpha - t_0) \subseteq \Omega$. Entonces, para cada $x \in B(x_0, \alpha - t_0)$, existe el operador $L_F(x) = \Gamma F''(x)\Gamma F(x)$, donde $\Gamma = [F'(x)]^{-1}$, y es tal que*

$$\|L_F(x)\| \leq \frac{f''(t)}{f'(t)^2}\|F(x)\| \quad \textit{para} \quad \|x - x_0\| \leq t - t_0. \tag{3.2}$$

Demostración. Comenzamos demostrando que existe $\Gamma = [F'(x)]^{-1}$, para todo $x \in B(x_0, \alpha - t_0)$, y que, para $t \in (t_0, \alpha)$ con $\|x - x_0\| \leq t - t_0$, se cumple además que

$$\|\Gamma F'(x_0)\| \leq \frac{f'(t_0)}{f'(t)}, \tag{3.3}$$

$$\|\Gamma\| \leq -\frac{1}{f'(t)} \,. \tag{3.4}$$

Para ello, consideramos

$$\begin{aligned}
I - \Gamma_0 F'(x) &= \Gamma_0\Big(F'(x_0) - F'(x)\Big) \\
&= -\Gamma_0 \int_{x_0}^{x} F''(z)\, dz \\
&= -\Gamma_0 \int_{x_0}^{x} \Big(F''(z) + F''(x_0) - F''(x_0)\Big)\, dz \\
&= -\Gamma_0 \int_{x_0}^{x} F''(x_0)\, dz - \Gamma_0 \int_{x_0}^{x} \Big(F''(z) - F''(x_0)\Big)\, dz \\
&= -\Gamma_0 F''(x_0)(x - x_0) - \Gamma_0 \int_{x_0}^{x} \Big(F''(z) - F''(x_0)\Big)\, dz,
\end{aligned}$$

y tomando normas vemos que

$$\begin{aligned}
\|I - \Gamma_0 F'(x)\| &\leq \|\Gamma_0\|\|F''(x_0)\|\|x - x_0\| \\
&\quad + \|\Gamma_0\| \left\| \int_{x_0}^{x} \Big(F''(z) - F''(x_0)\Big)\, dz \right\| \\
&\leq -\frac{f''(t_0)}{f'(t_0)}(t - t_0) \\
&\quad + \|\Gamma_0\| \left\| \int_0^1 \Big(F''\Big(x_0 + \tau(x - x_0)\Big) - F''(x_0)\Big)(x - x_0)\, d\tau \right\|.
\end{aligned}$$

Para $z \in [x_0, x]$, es decir, $z = x_0 + \tau(x - x_0)$ con $\tau \in [0,1]$, y $\|x - x_0\| \leq t - t_0$, tenemos

$$\|z - x_0\| = \tau\|x - x_0\| \leq \tau(t - t_0) = t_0 + \tau(t - t_0) - t_0 = u - t_0,$$

con $u = t_0 + \tau(t - t_0) \in [t_0, t]$, de manera que a partir de (A_2) se sigue que

$$\begin{aligned}
\|I - \Gamma_0 F'(x)\| &\leq -\frac{f''(t_0)}{f'(t_0)}(t - t_0) \\
&\quad - \frac{1}{f'(t_0)} \int_0^1 \Big(f''\Big(t_0 + \tau(t - t_0)\Big) - f''(t_0)\Big)(t - t_0)\, d\tau \\
&= -\frac{f''(t_0)}{f'(t_0)}(t - t_0) - \frac{1}{f'(t_0)} \int_{t_0}^{t} \Big(f''(u) - f''(t_0)\Big)\, du \\
&= -\frac{1}{f'(t)}\Big(f'(t) - f'(t_0)\Big) \\
&= 1 - \frac{f'(t)}{f'(t_0)} < 1,
\end{aligned}$$

puesto que $t \in (t_0, \alpha)$ y $f''(t) \geq 0$ para $t \in (t_0, \alpha)$ al ser $f''(t_0) \geq 0$ y cumplirse (A_2), de manera que f' es creciente y $f'(t_0) \leq f'(t) \leq 0$. En consecuencia, por el lema de Banach sobre inversión de operadores, tenemos que existe $\Gamma = [F'(x)]^{-1}$ y es tal que

$$\|\Gamma\| \leq \|[\Gamma_0 F'(x)]^{-1}\| \|\Gamma\| \leq \frac{\|\Gamma_0\|}{1 - \|I - \Gamma_0 F'(x)\|} \leq \frac{-\frac{1}{f'(t_0)}}{\frac{f'(t)}{f'(t_0)}} = -\frac{1}{f'(t)},$$

$$\|\Gamma F'(x_0)\| \leq \frac{1}{1 - \|I - \Gamma_0 F'(x)\|} \leq \frac{f'(t_0)}{f'(t)}.$$

Por tanto, se cumplen (3.3) y (3.4).

Por otra parte, si $x \in B(x_0, \alpha - t_0)$ y $t \in (t_0, \alpha)$ son tales que $\|x - x_0\| \leq t - t_0$, tenemos que

$$\|F''(x)\| \leq \|F''(x_0)\| + \|F''(x) - F''(x_0)\| \leq f''(t_0) + f''(t) - f''(t_0) = f''(t)$$

y (3.2) se sigue de forma inmediata. ■

A continuación, a partir del siguiente lema, vemos que $\{t_n\}$ es una sucesión mayorizante de la sucesión de Newton $\{x_n\}$ en el espacio de Banach X.

Lema 3.2.3 *En las hipótesis de lema anterior se verifican, para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$, las siguientes relaciones:*

(i_n) $x_n \in B(x_0, t^* - t_0)$,

(ii_n) $\|\Gamma_0 F(x_n)\| \leq -\dfrac{f(t_n)}{f'(t_0)}$,

(iii_n) $\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n$.

Demostración. Probamos las tres relaciones (i_n)–(iii_n) por inducción matemática sobre n. En primer lugar, dado x_0, es evidente que x_1 está bien definido y que

$$\|x_1 - x_0\| = \|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq -\frac{f(t_0)}{f'(t_0)} = t_1 - t_0 < t^* - t_0.$$

Luego se cumplen (i_0)–(iii_0).

Supongamos ahora que se cumplen (i_k)–(iii_k) para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Veamos que se cumplen también para $k = n$.

Como $x_n = x_{n-1} - [F'(x_{n-1})]^{-1}F(x_{n-1})$, obviamente x_n está bien definido, puesto que existe $[F'(x_{n-1})]^{-1}$ por el lema anterior. Además,

$$\begin{aligned} \|x_n - x_0\| &\leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \cdots + \|x_1 - x_0\| \\ &\leq t_n - t_{n-1} + t_{n-1} - t_{n-2} + \cdots + t_1 - t_0 \\ &= t_n - t_0 < t^* - t_0. \end{aligned}$$

Luego, $x_n \in B(x_0, t^* - t_0)$ y se cumple (i_n).

A continuación, consideramos $x \in [x_{n-1}, x_n]$, es decir, $x = x_{n-1} + s(x_n - x_{n-1})$ con $s \in [0,1]$, de manera que $\|x - x_{n-1}\| = s\|x_n - x_{n-1}\| \leq s(t_n - t_{n-1})$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &= \|x_{n-1} - x_0\| + s\|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq t_{n-1} - t_0 + s(t_n - t_{n-1}) = t_{n-1} + s(t_n - t_{n-1}) - t_0 = t - t_0, \end{aligned}$$

con $t = t_{n-1} + s(t_n - t_{n-1}) \in [t_{n-1}, t_n]$, y como $\|x - x_0\| \leq t - t_0 < t^* - t_0$, es claro que $x \in B(x_0, t^* - t_0)$ para todo $x \in [x_{n-1}, x_n]$. Aplicando ahora el lema anterior se sigue que existen Γ y $L_F(x)$, así como que

$$\|L_F(x)\| \leq \frac{f''(t)}{f'(t)^2}\|F(x)\| \quad \text{con} \quad t = t_{n-1} + s(t_n - t_{n-1}) \quad \text{y} \quad s \in [0,1].$$

Además,

$$\|L_F(x)\| \leq -\frac{f''(t)}{f'(t)}\frac{f'(t_0)}{f'(t)}\|\Gamma_0 F(x)\|,$$

sin más que escribir $L_F(x) = \Gamma F''(x)\Gamma F'(x_0)\Gamma_0 F(x)$ y aplicar (3.3) y (3.4).

Ahora, teniendo en cuenta la última desigualdad y el desarrollo en serie de Taylor, podemos escribir

$$\begin{aligned} \Gamma_0 F(x) &= \Gamma_0 F(x_{n-1}) + \Gamma_0 F'(x_{n-1})(x - x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x} \Gamma_0 F''(z)(x - z)\,dz \\ &= \Gamma_0 F(x_{n-1}) + s\Gamma_0 F'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \\ &\quad + \int_{x_{n-1}}^{x} \Gamma_0\Big(F''(z) + F''(x_0) - F''(x_0)\Big)(x - z)\,dz \\ &= (1-s)\Gamma_0 F(x_{n-1}) + \frac{1}{2}\Gamma_0 F''(x_0)(x - x_{n-1})^2 \\ &\quad + \int_{x_{n-1}}^{x} \Gamma_0\Big(F''(z) - F''(x_0)\Big)(x - z)\,dz \\ &= (1-s)\Gamma_0 F(x_{n-1}) + \frac{1}{2}\Gamma_0 F''(x_0)(x - x_{n-1})^2 \\ &\quad + \int_0^1 \Gamma_0\bigg(F''\Big(x_{n-1} + \tau(x - x_{n-1})\Big) \\ &\quad - F''(x_0)\bigg)(x - x_{n-1})^2(1 - \tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Como $\|x - x_{n-1}\| = s\|x_n - x_{n-1}\| \leq s(t_n - t_{n-1}) \leq t - t_{n-1}$, para $z = x_{n-1} + \tau(x - x_{n-1})$ con $\tau \in [0,1]$, tenemos que

$$\begin{aligned}\|z - x_0\| &\leq \|x_{n-1} - x_0\| + \tau\|x - x_{n-1}\| \\ &\leq (t_{n-1} - t_0) + \tau s(t_n - t_{n-1}) = t_{n-1} + \tau(t - t_{n-1}) - t_0 = u - t_0,\end{aligned}$$

donde $u = t_{n-1} + \tau(t - t_{n-1})$. Tomando ahora normas en la desigualdad anterior, se sigue que

$$\begin{aligned}\|\Gamma_0 F(x)\| &\leq (1-s)\|\Gamma_0 F(x_{n-1})\| + \frac{1}{2}\|\Gamma_0\|\|F''(x_0)\|\|x - x_{n-1}\|^2 \\ &\quad +\|\Gamma_0\| \int_0^1 \Big\|F''\Big(x_{n-1} + \tau(x - x_{n-1})\Big) \\ &\quad -F''(x_0)\Big\|\|x - x_{n-1}\|^2(1-\tau)\,d\tau \\ &\leq -(1-s)\frac{f(t_{n-1})}{f'(t_0)} - \frac{1}{2}\frac{f''(t_0)}{f'(t_0)}(t - t_{n-1})^2 - \\ &\quad -\frac{1}{f'(t_0)}\int_0^1 \Big(f''\Big(t_{n-1} + \tau(t - t_{n-1})\Big) - \\ &\quad f''(t_0)\Big)(t_n - t_{n-1})^2(1-\tau)\,d\tau \\ &= -\frac{1}{f'(t_0)}\Big[(1-s)f(t_{n-1}) + \frac{1}{2}f''(t_0)(t - t_{n-1})^2 \\ &\quad + \int_{t_{n-1}}^t \Big(f''(u) - f''(t_0)\Big)(t-u)\,du\Big] \\ &= -\frac{1}{f'(t_0)}\left[(1-s)f(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^t f''(u)(t-u)\,du\right] \\ &= -\frac{1}{f'(t_0)}\left[f'(t_{n-1})(t - t_n) + \int_{t_{n-1}}^t f''(u)(t-u)\,du\right] \\ &= -\frac{1}{f'(t_0)}\Big[f(t_{n-1}) + f'(t_{n-1})(t - t_{n-1}) \\ &\quad + \int_{t_{n-1}}^t f''(u)(t-u)\,du\Big] \\ &= -\frac{f(t)}{f'(t_0)}.\end{aligned}$$

Tomando $s = 1$ en lo anterior, obtenemos $x = x_n$, $t = t_n$ y $\|\Gamma_0 F(x_n)\| \leq -\dfrac{f(t_n)}{f'(t_0)}$. Luego, se cumple (ii_n). Además, $\|L_F(x)\| \leq L_f(t)$.

Finalmente, para probar (iii_n), basta ver que

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x_n\| &= \left\|\int_{x_{n-1}}^{x_n} L_F(x)\,dx\right\| \\
&= \left\|\int_0^1 L_F\Big(x_{n-1}+\tau(x_n-x_{n-1})\Big)(x_n-x_{n-1})\,d\tau\right\| \\
&\leq \int_0^1 \left\|L_F\Big(x_{n-1}+\tau(x_n-x_{n-1})\Big)\right\|\|x_n-x_{n-1}\|\,d\tau \\
&\leq \int_0^1 L_f\Big(t_{n-1}+\tau(t_n-t_{n-1})\Big)(t_n-t_{n-1})\,d\tau \\
&= \int_{t_{n-1}}^{t_n} L_f(t)\,dt \\
&= t_{n+1}-t_n,
\end{aligned}$$

puesto que $x = x_{n-1}+\tau(x_n-x_{n-1})$ con $\tau\in[0,1]$ y

$$\begin{aligned}
\|x-x_0\| &\leq \|x_{n-1}-x_0\|+\tau\|x_n-x_{n-1}\| \\
&\leq t_{n-1}-t_0+\tau(t_n-t_{n-1}) = t_{n-1}+\tau(t_n-t_{n-1})-t_0 = t-t_0,
\end{aligned}$$

donde $t = t_{n-1}+\tau(t_n-t_{n-1})$. ■

Una vez visto que la sucesión $\{t_n\}$ mayoriza a la sucesión $\{x_n\}$, ya podemos demostrar la convergencia semilocal de la sucesión de Newton $\{x_n\}$ en el espacio de Banach X.

Teorema 3.2.4 (Teorema general de convergencia semilocal) *Sean $F:\Omega\subseteq X\to Y$ un operador dos veces diferenciable Fréchet definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω de un espacio de Banach X y con valores en un espacio de Banach Y y $f\in\mathcal{C}^{(2)}([t_0,t'])$ con $t_0,t'\in\mathbb{R}$. Supongamos que se verifican las condiciones (A_1) y (A_2), que existe $\alpha\in(t_0,t')$, tal que $f'(\alpha)=0$ y $f(\alpha)\leq 0$, y que $B(x_0,t^*-t_0)\subseteq\Omega$. Entonces la sucesión de Newton dada por $\{x_n\}$ converge a una solución x^* de la ecuación $F(x)=0$, empezando en x_0, y además $x_n,x^*\in\overline{B(x_0,t^*-t_0)}$, para todo $n=0,1,2,\ldots$ También tenemos que*

$$\|x^*-x_n\|\leq t^*-t_n \quad \textit{para todo} \quad n=0,1,2,\ldots$$

Demostración. A partir del lema anterior, de los resultados conocidos sobre sucesiones mayorizantes y del hecho de que la sucesión escalar $\{t_n\}$ dada por (3.1) sea convergente, se sigue que la sucesión $\{x_n\}$ dada por el método de Newton es convergente. Si $x^*=\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\in\overline{B(x_0,t^*-t_0)}$, veamos entonces que x^* es solución de $F(x)=0$.

Por el apartado (ii_n) del lema anterior, tenemos que $\|\Gamma_0 F(x_n)\| \leq -\dfrac{f(t_n)}{f'(t_0)}$, para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$ Entonces, por continuidad y pasando al límite cuando $n \to +\infty$, obtenemos que $F(x^*) = 0$.

Además, para $j > 0$, tenemos que

$$\|x_{n+j} - x_n\| \leq \sum_{i=1}^{j} \|x_{n+i} - x_{n+i-1}\| \leq \sum_{i=1}^{j} \|t_{n+i} - t_{n+i-1}\| = t_{n+j} - t_n,$$

y pasando al límite cuando $j \to +\infty$, obtenemos que $\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n$, para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$ ■

Como ocurría en el capítulo anterior, una vez visto el anterior teorema general de convergencia semilocal tenemos la necesidad de construir la función escalar f, lo que dependerá de las condiciones que elijamos en (A_1) y (A_2). En la sección siguiente estudiamos tres situaciones diferentes.

3.2.1. Unicidad de solución

Damos a continuación un resultado de unicidad de solución cuando estamos en las condiciones del teorema anterior.

Notemos que si f tiene dos ceros reales t^* y t^{**}, tales que $t_0 < t^* \leq t^{**}$, entonces también podemos dar el siguiente resultado de unicidad de solución de la ecuación $F(x) = 0$.

Teorema 3.2.5 *Bajo las condiciones del teorema 3.2.4, la solución x^* es única en $B(x_0, t^{**} - t_0) \cap \Omega$ si $t^* < t^{**}$ o en $\overline{B(x_0, t^* - t_0)}$ si $t^* = t^{**}$.*

Demostración. En primer lugar, suponemos que $t^* < t^{**}$ y que y^* es otra solución de $F(x) = 0$ en $B(x_0, t^{**} - t_0) \cap \Omega$. Entonces,

$$\|y^* - x_0\| \leq \rho(t^{**} - t_0) \quad \text{con} \quad \rho \in (0, 1).$$

Probaremos por inducción matemática que $\|y^* - x_k\| \leq \rho^{2^k}(t^{**} - t_k)$, para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$ Por hipótesis de inducción consideramos que la desigualdad anterior se verifica para $k = 0, 1, \ldots, n$. En consecuencia se sigue que

$$\begin{aligned}
\|y^* - x_{n+1}\| &= \Big\| - \Gamma_n\Big(F(y^*) - F(x_n) - F'(x_n)(y^* - x_n)\Big)\Big\| \\
&= \Big\| - \Gamma_n\Big(\int_{x_n}^{y^*} \Big(F''(z) - F''(x_0)\Big)(y^* - z)\, dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}F''(x_0)(y^*-x_n)^2\Big)\Big\| \\
= \quad &\Big\| -\Gamma_n\Big(\int_0^1 \Big(F''\big(x_n+\tau(y^*-x_n)\big) \\
&-F''(x_0)\Big)(1-\tau)(y^*-x_n)^2\,d\tau \\
&+\frac{1}{2}F''(x_0)(y^*-x_n)^2\Big)\Big\|.
\end{aligned}
$$

Como $\|x_n+\tau(y^*-x_n)-x_0\| \leq t_n+\tau(t^{**}-t_n)-t_0$, entonces

$$
\begin{aligned}
\|y^*-x_{n+1}\| \quad \leq \quad & \|\Gamma_0\|\Big(\frac{1}{2}\|F''(x_0)\|+\int_0^1 \Big\|F''\big(x_n+\tau(y^*-x_n)\big) \\
&-F''(x_0)\Big\|(1-\tau)\,d\tau\|y^*-x_n\|^2\Big) \\
\leq \quad & -\frac{1}{f'(t_n)}\Big(\frac{1}{2}f''(t_0)+\int_0^1 \Big(f''\big(t_n+\tau(t^{**}-t_n)\big) \\
&-f''(t_0)\Big)(1-\tau)\,d\tau\Big)\|y^*-x_n\|^2 \\
\leq \quad & -\frac{\mu}{f'(t_n)}\|y^*-x_n\|^2,
\end{aligned}
$$

donde $\mu = \frac{1}{2}f''(t_0)+\int_0^1 \Big(f''\big(t_n+\tau(t^{**}-t_n)\big)-f''(t_0)\Big)(1-\tau)\,d\tau$.

Por otra parte, procediendo de manera análoga, tenemos que

$$
\begin{aligned}
t^{**}-t_{n+1} \quad = \quad & t^{**}-t_n+\frac{f(t_n)}{f'(t_n)} = -\frac{1}{f'(t_n)}\Big(f(t^{**})-f(t_n) \\
&-f'(t_n)(t^{**}-t_n)\Big) \\
= \quad & -\frac{1}{f'(t_n)}\Big(\int_{t_n}^{t^{**}} \Big(f''(t)-f''(t_0)\Big)(t^{**}-t)\,dt \\
&+\frac{1}{2}f''(t_0)(t^{**}-t_n)^2\Big) \\
= \quad & -\frac{1}{f'(t_n)}\Big(\int_0^1 \Big(f''\big(t_n+\tau(t^{**}-t_n)\big)-f''(t_0)\Big)(1-\tau)\,dt \\
&+\frac{1}{2}f''(t_0)\Big)(t^{**}-t_n)^2 = -\frac{\mu}{f'(t_n)}(t^{**}-t_n)^2.
\end{aligned}
$$

Luego, $-\frac{\mu}{f'(t_n)} = \frac{t^{**}-t_{n+1}}{(t^{**}-t_n)^2}$.

Por tanto,

$$\begin{aligned}\|y^* - x_{n+1}\| &= \frac{t^{**} - t_{n+1}}{(t^{**} - t_n)^2}\|y^* - x_n\|^2 \leq \frac{t^{**} - t_{n+1}}{(t^{**} - t_n)^2}\Big(\rho^{2^n}(t^{**} - t_n)\Big)^2 \\ &= \rho^{2^{n+1}}(t^{**} - t_{n+1}).\end{aligned}$$

Consecuentemente, $y^* = x^*$, puesto que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$.

En segundo lugar, si $t^{**} = t^*$, la unicidad de solución se sigue de forma análoga al caso $t^* < t^{**}$, probando ahora por inducción que $\|y^* - x_n\| \leq t^{**} - t_n = t^* - t_n$ y teniendo en cuenta que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t^*$. ■

3.2.2. Convergencia cuadrática del método de Newton

Terminaremos esta sección viendo que la convergencia del método de Newton es cuadrática bajo las condiciones (A_1)–(A_2). Para ello, utilizamos la técnica de Ostrowski [97], a partir de la cual obtenemos el siguiente resultado, cuya demostración omitimos por ser totalmente análoga a la del teorema 2.3.15.

Si f tiene dos raíces reales positivas t^* y t^{**} tales que $t^* \leq t^{**}$, entonces podemos escribir

$$f(t) = (t^* - t)(t^{**} - t)g(t)$$

con $g(t^*) \neq 0$ y $g(t^{**}) \neq 0$. A continuación, damos un resultado que proporciona estimaciones del error para el método de Newton.

Teorema 3.2.6 *Sea la función $f \in \mathcal{C}^{(2)}([t_0, t'])$ con $t_0, t' \in \mathbb{R}$ cumpliendo (A_1) y (A_2). Suponemos que f tiene dos raíces reales positivas t^* y t^{**}.*

(i) Si $t^* < t^{**}$, entonces

$$\frac{(t^{**} - t^*)\theta^{2^n}}{\sqrt{m_1} - \theta^{2^n}} < t^* - t_n < \frac{(t^{**} - t^*)\Delta^{2^n}}{\sqrt{M_1} - \Delta^{2^n}}, \quad n \geq 0,$$

donde $\theta = \dfrac{t^*}{t^{**}}\sqrt{m_1}$, $\Delta = \dfrac{t^*}{t^{**}}\sqrt{M_1}$, $m_1 = \min\{H_1(t); t \in [0, t^*]\}$, $M_1 = \max\{H_1(t); t \in [0, t^*]\}$, $H_1(t) = \dfrac{(t^{**} - t)g'(t) - g(t)}{(t^* - t)g'(t) - g(t)}$ y siempre que $\theta < 1$ y $\Delta < 1$.

(ii) Si $t^* = t^{**}$*, entonces*

$$m_2^n t^* \leq t^* - t_n \leq M_2^n t^*,$$

donde $m_2 = \text{mín}\{H_2(t); t \in [0, t^*]\}$, $M_2 = \text{máx}\{H_2(t); t \in [0, t^*]\}$, $H_2(t) = \dfrac{(t^* - t)g'(t) - g(t)}{(t^* - t)g'(t) - 2g(t)}$ *y siempre que* $m_2 < 1$ *y* $M_2 < 1$.

Nota 3.2.7 *Observamos a partir del teorema anterior que si* $t^* < t^{**}$*, obtenemos que el R-orden de convergencia del método de Newton es cuadrático, mientras que si* $t^* = t^{**}$*, obtenemos R-orden de convergencia lineal.*

3.3. Casos particulares

Para obtener la función escalar, a partir de la cual se define la sucesión escalar $\{t_n\}$, dada por (3.1), que mayoriza a la sucesión de Newton $\{x_n\}$ en el espacio de Banach X, Kantorovich considera que esta función es un polinomio de segundo grado y ajusta los coeficientes del polinomio mediante las condiciones dadas en (C_1)–(C_3), obteniendo como ya sabemos el polinomio:

$$p(s) = \frac{k}{2}(s - s_0)^2 - \frac{s - s_0}{\beta} + \frac{\eta}{\beta}\,. \tag{3.5}$$

En nuestro caso, si consideramos (A_1) y (A_2), no podemos obtener una función escalar f resolviendo un problema de tipo interpolatorio, tal y como se hace en el caso anterior, ya que (A_2) no permite determinar la clase de funciones a las que podemos aplicar las condiciones dadas en (A_1).

Para solventar este problema, podemos proceder de forma diferente. Como ya sabemos, el polinomio (3.5) se puede construir de otra forma, resolviendo el siguiente problema de valor inicial (ver la sección 2.3.1):

$$\begin{cases} p''(s) = k, \\ p(s_0) = \dfrac{\eta}{\beta}, \quad p'(s_0) = -\dfrac{1}{\beta}. \end{cases}$$

Notemos que el polinomio de Kantorovich (3.5) tiene la propiedad de que $p(s + s_0) = \overline{p}(s)$, donde $\overline{p}(s) = \dfrac{k}{2}s^2 - \dfrac{s}{\beta} + \dfrac{\eta}{\beta}$. Por lo tanto, las sucesiones escalares del método de Newton que se obtienen a partir de p y $\overline{p}$ se pueden obtener, una a partir de la otra, mediante traslación. Luego, los resultados anteriores son independientes del valor de s_0. Por ello, siempre se toma $s_0 = 0$, lo que simplifica considerablemente los cálculos.

Este nuevo enfoque para obtener el polinomio tiene la ventaja de que permite generalizar el procedimiento anterior a las condiciones (A_1) y (A_2), y construir así la función real f en las condiciones generales aquí planteadas. Veamos a continuación tres casos distintos (ya conocidos) que se pueden ver como casos particulares de nuestro teorema general de convergencia semilocal probado en la sección anterior.

3.3.1. F'' es Lipschitz-centrada

Supongamos en primer lugar que las condiciones (A_1) y (A_2) se reducen respectivamente a las siguiente condiciones:

$(\widetilde{A_1})$ $\|\Gamma_0\| \leq \beta$, $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$, $\|F''(x_0)\| \leq M$,

$(\widetilde{A_2})$ $\|F''(x) - F''(x_0)\| \leq k\|x - x_0\|$ con $x \in \Omega$.

Observamos fácilmente que la condición $(\widetilde{A_2})$ implica la condición (C_3) del teorema de Newton-Kantorovich. Por otra parte, puede comprobarse fácilmente que para encontrar una función real, a partir de las condiciones $(\widetilde{A_1})$ y $(\widetilde{A_2})$, basta con resolver el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \zeta''(t) = M + k(t - t_0), \\ \zeta(t_0) = \dfrac{\eta}{\beta}, \quad \zeta'(t_0) = -\dfrac{1}{\beta}, \end{cases}$$

cuya solución es el polinomio cúbico

$$\zeta(t) = \frac{k}{6}(t - t_0)^3 + \frac{M}{2}(t - t_0)^2 - \frac{t - t_0}{\beta} + \frac{\eta}{\beta}\cdot \tag{3.6}$$

Notemos que el polinomio (3.6) tiene la propiedad de que $\zeta(t + t_0) = \overline{\zeta}(t)$, donde

$$\overline{\zeta}(t) = \frac{k}{6}t^3 + \frac{M}{2}t^2 - \frac{t}{\beta} + \frac{\eta}{\beta}.$$

Así que como en el caso del polinomio de Kantorovich tomaremos $t_0 = 0$.

Obsérvese que el polinomio $\zeta(t)$ satisface las condiciones del teorema 3.2.4, y por tanto podemos garantizar la convergencia semilocal del método de Newton en el espacio de Banach X. En particular, a partir de nuestro resultado general, se deduce fácilmente el siguiente teorema de convergencia.

Teorema 3.3.1 *Sea $F : \Omega \subseteq X \to Y$ un operador dos veces continuamente diferenciable Fréchet definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω de un espacio de Banach X y con valores en un espacio de Banach Y que satisface las condiciones $(\widetilde{A_1})$ y $(\widetilde{A_2})$. Sea $\zeta(t)$ el polinomio definido en (3.6) con $t_0 = 0$. Supongamos que $\zeta(\alpha) \leq 0$, donde $\alpha = \dfrac{2}{M\beta + \sqrt{\beta(2k + M^2\beta)}}$, y $B(x_0, t^*) \subseteq \Omega$, donde t^* es la raíz positiva más pequeña de $\zeta(t) = 0$ con $t_0 = 0$. Entonces, la sucesión de Newton dada por $\{x_n\}$ converge a una solución x^* de $F(x) = 0$, empezando en x_0, y además $x_n, x^* \in \overline{B(x_0, t^*)}$, para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$*

Notemos que el polinomio (3.6) con $t_0 = 0$ tiene un máximo en

$$t = q = \frac{2}{M\beta - \sqrt{\beta(M^2\beta + 2k)}} < 0$$

y un mínimo en

$$t = \alpha = \frac{2}{M\beta + \sqrt{\beta(M^2\beta + 2k)}} > 0.$$

Notemos también que si el polinomio (3.6) con $t_0 = 0$ verifica $\zeta(\alpha) \leq 0$, entonces tiene una raíz negativa y dos raíces positivas t^* y t^{**}, tales que $t^* \leq \alpha \leq t^{**}$, siendo su gráfica como la que aparece en la figura 3.1.

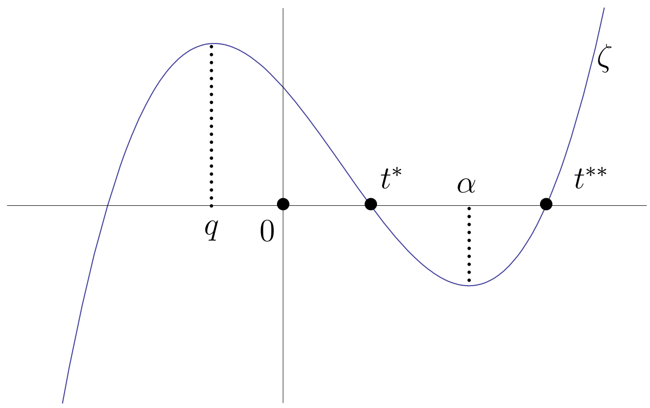

Figura 3.1: Gráfica del polinomio $\zeta(t)$ con $t_0 = 0$

También deducimos del estudio realizado que la solución x^* de $F(x) = 0$ es única en $B(x_0, t^{**}) \cap \Omega$ si $t^* < t^{**}$ o en $\overline{B(x_0, t^*)}$ si $t^* = t^{**}$. Además, siguiendo la técnica de Ostrowski [97], se prueban ciertas estimaciones a priori del error, que conducen a la convergencia cuadrática del método de Newton cuando $t^* < t^{**}$ y a la convergencia lineal del mismo cuando $t^* = t^{**}$, teniendo en cuenta que se satisfagan las condiciones $(\widetilde{A_1})$ y $(\widetilde{A_2})$.

En [61] aparecen estos resultados que se deducen de nuestro resultado general. Además, recordamos que la condición $\zeta(\alpha) \leq 0$ se puede sustituir por otras equivalentes o más fáciles de probar, véase de nuevo [61] y las referencias que allí aparecen.

3.3.2. F'' es Hölder-centrada

En segundo lugar, suponemos que las condiciones (A_1) y (A_2) se reducen respectivamente a:

$(\overline{A_1})$ $\|\Gamma_0\| \leq \beta$, $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$, $\|F''(x_0)\| \leq M$,

$(\overline{A_2})$ $\|F''(x) - F''(x_0)\| \leq k\|x - x_0\|^p$, $x \in \Omega$, $p \in [0, 1]$.

Como en el caso anterior, resulta fácil ver que la condición $(\overline{A_2})$ implica la condición (C_3) del teorema de Newton-Kantorovich. Análogamente a la situación anterior, puede comprobarse fácilmente que para encontrar una función real a partir de las condiciones $(\overline{A_1})$ y $(\overline{A_2})$, basta resolver el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \varphi''(t) = M + k(t - t_0)^p, \\ \varphi(t_0) = \dfrac{\eta}{\beta}, \quad \varphi'(t_0) = -\dfrac{1}{\beta}, \end{cases}$$

cuya solución es la función

$$\varphi(t) = \frac{k}{(p+1)(p+2)}(t - t_0)^{p+2} + \frac{M}{2}(t - t_0)^2 - \frac{t - t_0}{\beta} + \frac{\eta}{\beta} \cdot \qquad (3.7)$$

Obsérvese que si $p = 1$, la función (3.7) de reduce al polinomio (3.6).

Nótese que la función (3.7) tiene la propiedad de que $\varphi(t + t_0) = \overline{\varphi}(t)$, donde

$$\overline{\varphi}(t) = \frac{k}{(p+1)(p+2)} t^{p+2} + \frac{M}{2} t^2 - \frac{t}{\beta} + \frac{\eta}{\beta} \cdot$$

Así que como en el caso del polinomio de Kantorovich tomaremos $t_0 = 0$.

Observamos también que la función $\varphi(t)$ satisface las condiciones del teorema 3.2.4, y por tanto podemos garantizar la convergencia semilocal del método de Newton en el espacio de Banach X. En particular, tenemos el siguiente teorema de convergencia, que aparece en [61].

Teorema 3.3.2 *Sea $F : \Omega \subseteq X \to Y$ un operador dos veces continuamente diferenciable Fréchet definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω de un espacio de Banach X y con valores en un espacio de Banach Y que satisface las condiciones $(\overline{A_1})$ y $(\overline{A_2})$. Sea $\varphi(t)$ la función definida en (3.7). Supongamos que existe una solución $\alpha > 0$ de $\varphi'(t) = 0$, tal que $\varphi(\alpha) \leq 0$, y $B(x_0, t^*) \subseteq \Omega$, donde t^* es la raíz positiva más pequeña de $\varphi(t) = 0$ con $t_0 = 0$. Entonces la sucesión de Newton dada por $\{x_n\}$ converge a una solución x^* de $F(x) = 0$, empezando en x_0, y además, $x_n, x^* \in \overline{B(x_0, t^*)}$, para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$*

Analizando las derivadas de $\varphi(t)$ con $t_0 = 0$, vemos que $\varphi'(t)$ es creciente si $t \geq 0$ y, como $\varphi'(0) < 0$ y $\varphi'(t) > 0$ para t suficientemente grande, la ecuación $\varphi'(t) = 0$ tiene una única raíz positiva α. Luego, α es un mínimo de $\varphi(t)$. La condición necesaria y suficiente para que $\varphi(t)$ tenga raíces positivas es que $\varphi(\alpha) \leq 0$. Además, como φ es estrictamente creciente y $\varphi(0) > 0$ en $(\alpha, +\infty)$, la función φ tiene dos raíces reales positivas t^* y ** tales que $t^* \leq \alpha \leq t^{**}$.

También deducimos del estudio realizado que la solución x^* de $F(x) = 0$ es única en $B(x_0, t^{**}) \cap \Omega$ si $t^* < t^{**}$ o en $\overline{B(x_0, t^*)}$ si $t^* = t^{**}$. Siguiendo otra vez la técnica de Ostrowski [97], se prueban ciertas estimaciones a priori del error, que llevan, suponiendo que se cumplen las condiciones $(\overline{A_1})$ y $(\overline{A_2})$, a la convergencia cuadrática del método de Newton cuando $t^* < t^{**}$ y a la convergencia lineal del mismo cuando $t^* = t^{**}$.

3.3.3. F'' es ω-centrada

En tercer lugar, suponemos que las condiciones (A_1) y (A_2) se reducen respectivamente a:

$(\widehat{A_1})$ $\|\Gamma_0\| \leq \beta$, $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$, $\|F''(x_0)\| \leq M$,

$(\widehat{A_2})$ $\|F''(x) - F''(x_0)\| \leq \omega(\|x - x_0\|)$, para $\|x - x_0\| \leq t - t_0$ y donde $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua no decreciente y tal que $\omega(0) = 0$.

El correspondiente problema de valor inicial a resolver en este caso es:

$$\begin{cases} \phi''(t) = M + \omega(t - t_0), \\ \phi(t_0) = \dfrac{\eta}{\beta}, \quad \phi'(t_0) = -\dfrac{1}{\beta}. \end{cases}$$

En el siguiente resultado calculamos la función solución del problema de valor inicial anterior.

Teorema 3.3.3 *Supongamos que $\omega(t-t_0)$ es una función continua para todo $t \in [t_0, t']$, con $t' > t_0$. Entonces, para cualesquiera números reales $\beta \neq 0$, η y M, existe una única solución $\phi(t)$ en $[t_0, t']$ del problema de valor inicial anterior, que es:*

$$\phi(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} \omega(z-t_0)\,dz\,ds + \frac{M}{2}(t-t_0)^2 - \frac{t-t_0}{\beta} + \frac{\eta}{\beta}, \quad t_0 \geq 0. \quad (3.8)$$

Obsérvese que si $\omega(z) = kz$ o $\omega(z) = kz^p$, la función (3.8) se reduce a las funciones (3.6) o (3.7) respectivamente.

Para poder aplicar el teorema 3.2.4, la ecuación $\phi(t) = 0$ tendrá que tener al menos una raíz mayor que t_0 a la que habrá que asegurar la convergencia de la sucesión escalar $\{t_n\}$, a partir de t_0. Estudiamos entonces la función $\phi(t)$ dada en (3.8).

Teorema 3.3.4 *Sean $\phi(t)$ la función definida en (3.8) y ω la función definida en $(\widehat{A_2})$.*

a) Si existe una solución $\alpha > t_0$ de la ecuación

$$\phi'(t) = \int_{t_0}^{t} \omega(z-t_0)\,dz + M(t-t_0) - \frac{1}{\beta} = 0, \quad (3.9)$$

entonces α es el único mínimo de $\phi(t)$ en $[t_0, +\infty)$ y $\phi(t)$ decrece en $[t_0, \alpha)$.

b) Si $\phi(\alpha) \leq 0$, entonces la ecuación $\phi(t) = 0$ tiene al menos una raíz en $[t_0, +\infty)$. Si denotamos por t^* a la menor raíz de $\phi(t) = 0$ en $[t_0, +\infty)$, se tiene además que $t_0 < t^* \leq \alpha$.

Demostración.

(a)

- Como $\phi'(\alpha) = \displaystyle\int_{t_0}^{\alpha} \omega(\xi; t_0)\,d\xi - \frac{1}{\beta} = 0$ y $\phi''(t) = \omega(t; t_0) \geq 0$ en $[t_0, +\infty)$, entonces α es un mínimo de ϕ en $[t_0, +\infty)$. Además, como ϕ es convexa en $[t_0, +\infty)$, se sigue que α es el único mínimo de ϕ en $[t_0, +\infty)$ y ϕ' es creciente en $[t_0, +\infty)$.
- Por otra parte, como $\phi'(t_0) = -\dfrac{1}{\beta} < 0$, $\phi'(\alpha) = 0$ y ϕ' es creciente en $[t_0, +\infty)$, entonces $\phi'(t) < 0$ en $[t_0, \alpha)$. Luego ϕ es decreciente en $[t_0, \alpha)$.

(b) - Si $\phi(\alpha) < 0$, como $\phi(t_0) = \dfrac{\eta}{\beta} > 0$, entonces ϕ tiene al menos una raíz t^* en (t_0, α) por ser continua. Como ϕ es decreciente en $[t_0, \alpha)$, entonces t^* es la única raíz de ϕ en (t_0, α).

- Si $\phi(\alpha) = 0$, entonces α es raíz doble de ϕ y tomamos $t^* = \alpha$. ■

Teniendo en cuenta las hipótesis del teorema anterior, la función $\phi(t)$ satisface las condiciones del teorema 3.2.4 y garantiza así la convergencia semilocal del método de Newton en el espacio de Banach X. En particular, tenemos el siguiente teorema de convergencia.

Teorema 3.3.5 *Sea $F : \Omega \subseteq X \to Y$ un operador dos veces continuamente diferenciable Fréchet definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω de un espacio de Banach X y con valores en un espacio de Banach Y que satisface las condiciones $(\widehat{A_1})$ y $(\widehat{A_2})$. Sea $\phi(t)$ la función definida en (3.8). Supongamos que $\phi(\alpha) \leq 0$, donde α es una raíz de (3.9) tal que $\alpha > t_0$, y $B(x_0, t^* - t_0) \subseteq \Omega$. Entonces la sucesión de Newton dada por $\{x_n\}$ converge a una solución x^* de $F(x) = 0$, empezando en x_0, y además, $x_n, x^* \in \overline{B(x_0, t^* - t_0)}$, para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$*

Demostración. Demostraremos el teorema 3.3.5 a partir del teorema 3.2.4. Para ello, tenemos que ver que la función $\phi(t)$ definida por (3.8) cumple las condiciones (A_1) y (A_2) del teorema 3.2.4. Está claro que $\phi \in \mathcal{C}^{(2)}([t_0, t'])$ con $t' \geq t^*$. El cumplimiento de (A_1) es obvio y el de (A_2) se sigue inmediatamente, ya que $\|F''(x) - F''(x_0)\| \leq \omega(\|x - x_0\|) \leq \omega(t - t_0) = \phi''(t) - \phi''(t_0)$ para $\|x - x_0\| \leq t - t_0$. ■

Nótese que la función (3.8) tiene la propiedad de que $\phi(t + t_0) = \overline{\phi}(t)$, donde

$$\overline{\phi}(t) = \int_0^t \int_0^s \omega(z)\, dz\, ds + \frac{M}{2}t^2 - \frac{t}{\beta} + \frac{\eta}{\beta}.$$

Así que como en el caso del polinomio de Kantorovich tomaremos $t_0 = 0$.

3.4. Aplicaciones

Como hemos indicado en la introducción, el objetivo principal de este capítulo es exigir condiciones más fuertes que (C_3) al operador F y que permitan una modificación del dominio de puntos de salida para el método de Newton con respecto al dado por Kantorovich bajo las condiciones (C_1)–(C_5) en el teorema de Newton-Kantorovich. Veamos a continuación tres situaciones diferentes en las que por un motivo u otro se mejora lo hecho por Kantorovich a partir de las condiciones $(\widehat{A_1})$ y $(\widehat{A_2})$ aquí presentadas.

Las situaciones contempladas son casos particulares de las conocidas ecuaciones integrales no lineales de tipo Hammerstein mixto, que como ya se ha indicado en el capítulo 2, son frecuentes en muchas aplicaciones del mundo real y son de la forma

$$x(s) = u(s) + \sum_{i=1}^{m} \int_a^b G_i(s,t) H_i\big(x(t)\big)\, dt, \quad s \in [a,b],$$

donde $-\infty < a < b < +\infty$, G, H y u son funciones conocidas y x es una función solución a determinar.

En particular, nosotros consideramos en este capítulo ecuaciones de la forma:

$$x(s) = u(s) + \int_a^b G(s,t)\Big(\lambda x(t)^3 + \delta x(t)^{2+p}\Big)\, dt, \quad s \in [a,b], \tag{3.10}$$

$p \in [0,1]$ y $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$, donde u es una función continua en $[a,b]$ y el núcleo G es la función de Green en $[a,b] \times [a,b]$.

La resolución de la ecuación integral (3.10) es equivalente a resolver la ecuación $F(x) = 0$, donde $F : \Omega \subset \mathcal{C}([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$, $\Omega = \{x \in \mathcal{C}([a,b]); x(s) \geq 0, s \in [a,b]\}$ y

$$[F(x)](s) = x(s) - u(s) - \int_a^b G(s,t)\Big(\lambda x(t)^3 + \delta x(t)^{2+p}\Big)\, dt,$$

$s \in [a,b]$, $p \in [0,1]$ y $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$. En este caso,

$$[F'(x)y](s) = y(s) - \int_a^b G(s,t)\Big(3\lambda x(t)^2 + (2+p)\delta x(t)^{1+p}\Big) y(t)\, dt,$$

$$[F''(x)(yz)](s) = -\int_a^b G(s,t)\Big(6\lambda x(t) + (2+p)(1+p)\delta x(t)^{p}\Big) z(t) y(t)\, dt.$$

Obsérvese que la condición (C_3) del teorema de Newton-Kantorovich no se cumple porque $\|F''(x)\|$ no está acotada en Ω, y además no tiene por qué ser sencillo localizar un dominio donde lo esté y que contenga alguna raíz de $F(x) = 0$. Obsérvese también que no se cumplen ni la condición $(\widetilde{A_2})$ ni la condición $(\overline{A_2})$, puesto que $F''(x)$ no es Lipschitz continua ni Hölder continua en Ω, de manera que tampoco podemos aplicar los resultados presentados en [61] para garantizar la convergencia semilocal del método de Newton a una solución de (3.10).

Como primer paso, discretizamos la ecuación (3.10) para transformarla en un problema de dimensión finita. Para ello, aproximamos la integral que aparece en (3.10) mediante una fórmula de cuadratura numérica, utilizando la fórmula de Gauss-Legendre:

$$\int_a^b h(t)\,dt \simeq \sum_{i=1}^m \varpi_i h(t_i),$$

donde los nodos t_i y los pesos ϖ_i están determinados.

Si denotamos la aproximación de $x(t_i)$ por x_i y la de $u(t_i)$ por u_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), (3.10) es ahora equivalente al siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$x_i = u_i + \sum_{j=1}^m b_{ij}\Big(\lambda x_j^3 + \delta x_j^{2+p}\Big), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

donde

$$b_{ij} = \varpi_j G(t_i, t_j) = \begin{cases} \varpi_j \dfrac{(b - t_i)(t_j - a)}{b - a} & \text{si } j \leq i, \\ \varpi_j \dfrac{(b - t_j)(t_i - a)}{b - a} & \text{si } j > i. \end{cases}$$

El sistema anterior se puede escribir ahora de la forma

$$F(\overline{x}) = \overline{x} - \overline{u} - B(\lambda\widetilde{x} + \delta\widehat{x}) = 0, \tag{3.11}$$

donde $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$, $\overline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^T$, $B = (b_{ij})$, $\widetilde{x} = (x_1^3, x_2^3, \ldots, x_m^3)^T$ y $\widehat{x} = (x_1^{2+p}, x_2^{2+p}, \ldots, x_m^{2+p})^T$. Luego

$$F(\overline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - u_1 - \sum_{j=1}^m b_{1j}\Big(\lambda x_i^3 + \delta x_i^{2+p}\Big) \\ x_2 - u_2 - \sum_{j=1}^m b_{2j}\Big(\lambda x_i^3 + \delta x_i^{2+p}\Big) \\ \vdots \\ x_m - u_m - \sum_{j=1}^m b_{mj}\Big(\lambda x_i^3 + \delta x_i^{2+p}\Big) \end{pmatrix}.$$

A la vista de cuál es el dominio Ω para la ecuación (3.10), consideramos que $F : \Lambda \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, donde $\Lambda = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m; x_i \geq 0 \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, m\}$.

Entonces

$$F'(\overline{x}) = I - B(3\lambda D_1(\overline{x}) + (2 + p)\delta D_2(\overline{x})),$$

donde $D_1(\overline{x}) = \operatorname{diag}\{x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2\}$ y $D_2(\overline{x}) = \operatorname{diag}\{x_1^{1+p}, x_2^{1+p}, \dots, x_m^{1+p}\}$, y

$$\begin{aligned} F''(\overline{x})\overline{yz} &= -B\Big(\Big(6\lambda x_1 + (2+p)(1+p)\delta x_1^p\Big)y_1z_1, \dots, \\ &\quad \Big(6\lambda x_m + (2+p)(1+p)\delta x_m^p\Big)y_mz_m\Big)^T, \end{aligned}$$

donde $\overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ y $\overline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)^T$.

Además, siempre que $\|B\|\Big(3|\lambda|\|D_1(\overline{x}_0)\| + (2+p)|\delta|\|D_2(\overline{x}_0)\|\Big) < 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0\| &= \|[F'(\overline{x}_0)]^{-1}\| = \left\|\Big(I - B\Big(3\lambda D_1(\overline{x}_0) + (2+p)\,\delta D_2(x_0)\Big)\Big)^{-1}\right\| \\ &\le \frac{1}{1 - \|B\|\Big(3|\lambda|\|D_1(\overline{x}_0)\| + (2+p)|\delta|\|D_2(\overline{x}_0)\|\Big)} = \beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0 F(\overline{x}_0)\| &\le \|\Gamma_0\|\|F(\overline{x}_0)\| \\ &\le \frac{\|\overline{x}_0 - \overline{u} - B(|\lambda|\widetilde{x}_0 + \delta\widetilde{x}_0)\|}{1 - \|B\|\Big(3\lambda\|D_1(\overline{x}_0)\| + (2+p)|\delta|\|D_2(\overline{x}_0)\|\Big)} = \eta, \end{aligned}$$

donde $\overline{x}_0 = (\check{x}_1, \check{x}_2, \dots, \check{x}_m)^T$, $\widetilde{x}_0 = (\check{x}_1^3, \check{x}_2^3, \dots, \check{x}_m^3)^T$ y $\widehat{x}_0 = (\check{x}_1^{2+p}, \check{x}_2^{2+p}, \dots, \check{x}_m^{2+p})^T$. También

$$\|F''(\overline{x})\| = \sup_{\|\overline{y}\|=1, \|\overline{z}\|=1} \|F''(\overline{x})\overline{yz}\| \quad \text{con} \quad \|F''(\overline{x})\overline{yz}\| \le \|B\|\|v(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\|,$$

donde $v(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \Big(\Big(6\lambda x_1 + (2+p)(1+p)\delta x_1^p\Big)y_1z_1, \dots, \Big(6\lambda x_m + (2+p)(1+p)\delta x_m^p\Big)y_mz_m\Big)^T$.

Si tomamos la norma del máximo, se sigue que

$$\begin{aligned} \|v(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\|_\infty &= \max_{1\le i\le m} \left|\Big(6\lambda x_i + (2+p)(1+p)\delta x_i^p\Big)y_iz_i\right| \\ &\le \max_{1\le i\le m} \left|6\lambda x_i + (2+p)(1+p)\delta x_i^p\right||y_i||z_i| \\ &\le \left(\max_{1\le i\le m} \Big(6|\lambda||x_i| + (2+p)(1+p)|\delta||x_i^p|\Big)\right) \|\overline{y}\|_\infty\|\overline{z}\|_\infty \\ &\le \Big(6|\lambda|\|\overline{x}\|_\infty + (2+p)(1+p)|\delta|\|x_i\|_\infty^p\Big)\|\overline{y}\|_\infty\|\overline{z}\|_\infty. \end{aligned}$$

Luego,

$$\|F''(\overline{x})\|_\infty \leq \|B\|_\infty \Big(6|\lambda| \|\overline{x}\|_\infty + (2+p)(1+p)|\delta| \|\overline{x}\|_\infty^p\Big).$$

En consecuencia,

$$\|F''(\overline{x}_0)\|_\infty \leq \|B\|_\infty \Big(6|\lambda| \|\overline{x}_0\|_\infty + (2+p)(1+p)|\delta| \|\overline{x}_0\|_\infty^p\Big) = M,$$

$$\|F''(\overline{x}) - F''(\overline{x}_0)\|_\infty \leq \|B\|_\infty \Big(6|\lambda| \|\overline{x} - \overline{x}_0\|_\infty + (2+p)(1+p)|\delta| \|\overline{x} - \overline{x}_0\|_\infty^p\Big)$$

y por tanto $\omega(z) = \|B\|_\infty \Big(6|\lambda| z + (2+p)(1+p)|\delta| z^p\Big)$.

Obsérvese que en este caso $\|F''(\overline{x})\|_\infty$ no está acotada en general, puesto que la función $\xi(t) = 6|\lambda| t + (2+p)(1+p)|\delta| t^p$ es creciente. Luego no se cumple la condición (C_3) del teorema de Newton-Kantorovich.

3.4.1. Aplicación 1

Para solventar la dificultad que presenta la aplicación de las condiciones de Kantorovich, una alternativa común es prelocalizar las soluciones en algún dominio $\Omega \subset \Lambda$ y buscar en él una cota superior para $\|F''(\overline{x})\|_\infty$ ([52]). En el siguiente ejemplo vemos que esta alternativa tampoco la podemos utilizar porque no podemos encontrar a priori un dominio Ω donde exista solución de la ecuación.

Sea la ecuación del tipo (3.10) dada por

$$x(s) = 1 + \int_0^1 G(s,t) \left(x(t)^3 + \frac{1}{4} x(t)^{\frac{5}{2}} \right) dt, \quad s \in [0,1]. \tag{3.12}$$

Una vez discretizada, la solución $\overline{x}^*$ del correspondiente sistema no lineal (3.11) debe verificar que

$$\|\overline{x}^*\|_\infty - 1 - \|B\| \left(\|\overline{x}^*\|_\infty^3 + \frac{1}{4} \|\overline{x}^*\|_\infty^{\frac{5}{2}} \right) \leq 0,$$

que no aporta restricciones para $\|\overline{x}^*\|_\infty$, con lo que no podemos localizar un dominio $\Omega \subset \Lambda$ donde $\|F''(\overline{x})\|_\infty$ esté acotada y que contenga a la solución $\overline{x}^*$. Por lo tanto, no podemos asegurar la convergencia del método de Newton a una solución discretizada de (3.12) a partir de Kantorovich.

Sin embargo, si que lo podemos hacer a partir del teorema 3.3.5, puesto que tomando por ejemplo $m = 8$, $t_0 = 0$ y $\overline{x}_0 = (1, 1, \ldots, 1)^T$, obtenemos $\beta = 1{,}7248\ldots$, $\eta = 0{,}2499\ldots$, $M = 0{,}8571\ldots$, $\alpha = 0{,}5236\ldots$,

$$\phi(t) = (0{,}1449\ldots) - (0{,}5797\ldots)t + (0{,}4285\ldots)t^2 + (0{,}0308\ldots)t^{\frac{5}{2}} + (0{,}1235\ldots)t^3$$

y $\phi(\alpha) = -0{,}0172\ldots \leq 0$. Así, después de 5 iteraciones, obtenemos la aproximación numérica de la solución $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_8^*)^T$ que aparece en la tabla 3.1. Además, como $t^* = 0{,}3596\ldots$ y $t^{**} = 0{,}6822\ldots$, los dominios de existencia y unicidad son respectivamente:

$$\{\bar{l} \in \Lambda; \|\bar{l} - \overline{1}\|_\infty \leq 0{,}3596\ldots\} \quad \text{y} \quad \{\bar{l} \in \Lambda; \|\bar{l} - \overline{1}\|_\infty < 0{,}6822\ldots\}.$$

n	x_n^*	n	x_n^*
1	$1{,}021626\ldots$	5	$1{,}302053\ldots$
2	$1{,}105232\ldots$	6	$1{,}218581\ldots$
3	$1{,}218581\ldots$	7	$1{,}105232\ldots$
4	$1{,}302053\ldots$	8	$1{,}021626\ldots$

Tabla 3.1: Solución numérica de (3.12)

Interpolando los valores de la tabla 3.1 y teniendo en cuenta que las soluciones de (3.12) valen 1 en $s = 0$ y $s = 1$, obtenemos la solución representada en la figura 3.2.

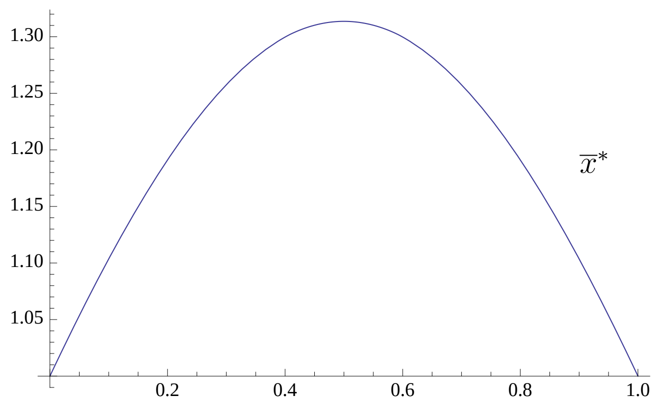

Figura 3.2: Solución aproximada de la ecuación (3.12)

3.4.2. Aplicación 2

Sea ahora la ecuación del tipo (3.10) dada por

$$x(s) = 1 + \int_0^1 G(s,t)\left(x(t)^3 + \frac{1}{5}x(t)^{\frac{5}{2}}\right) dt, \quad s \in [0,1]. \tag{3.13}$$

Una vez discretizada la ecuación (3.13), con $m = 8$, la solución $\overline{x}^*$ del correspondiente sistema no lineal (3.11) debe verificar que

$$\|\overline{x}^*\|_\infty - 1 - \|B\|_\infty \left(\|\overline{x}^*\|_\infty^3 + \frac{1}{5}\|\overline{x}^*\|_\infty^{\frac{5}{2}}\right) \leq 0,$$

que se cumple siempre que $\|\overline{x}^*\|_\infty \leq r_1 = 1{,}38003\ldots$ o $\|\overline{x}^*\|_\infty \geq r_2 = 1{,}69922\ldots$, donde r_1 y r_2 son las dos raíces reales positivas de la ecuación escalar $t - 1 - \|B\|_\infty \left(t^3 + \frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}}\right) = 0$, donde $\|B\|_\infty = 0{,}1235\ldots$ Notemos que mediante las condiciones (C_1)–(C_5) del teorema de Newton-Kantorovich solo podemos aproximar soluciones $\overline{x}^*$ tales que $\|\overline{x}^*\|_\infty \in [0, r_1]$, puesto que podemos considerar $\Omega = B(0, r) \cap \Lambda$, con $r \in (r_1, r_2)$, donde $\|F''(\overline{x})\|_\infty$ esté acotada y tomar como punto de salida para el método de Newton un punto $x_0 \in \Omega$ cumpliendo la condición (C_4). Sin embargo, si queremos aproximar soluciones $\overline{x}^{**}$ tales que $\|\overline{x}^{**}\|_\infty \geq r_2$, no podemos utilizar el teorema de Newton-Kantorovich porque no sabemos cómo elegir una bola en la que esté $\overline{x}^{**}$, ya que elegida al azar, la bola podría no contener la solución o cortarla, en cuyo caso no podemos acotar $\|F''(\overline{x})\|_\infty$. Veremos que utilizando las condiciones $(\widehat{A_1})$ y $(\widehat{A_2})$ y el teorema 3.3.5 podemos considerar ambos casos y que además en el primero, en el que se pueden aplicar las condiciones (C_1)–(C_5) del teorema de Newton-Kantorovich y las condiciones $(\widehat{A_1})$ y $(\widehat{A_2})$ junto con el teorema 3.3.5, mejoramos los dominios de existencia y unicidad de solución, junto con las estimaciones a priori del error que se obtienen a partir de Kantorovich.

Comenzamos con el caso en que $\Omega = B(0, r) \cap \Lambda$ con $r \in (r_1, r_2)$. Tomamos por ejemplo $r = \frac{3}{2}$ y elegimos, como se hace habitualmente [50], $\overline{x}_0 = (1, 1, \ldots, 1)^T$ como punto de salida. En este caso

$$\beta = 1{,}6854\ldots, \quad \eta = 0{,}2349\ldots, \quad k = 1{,}2255\ldots, \quad k\beta\eta = 0{,}4853\ldots \leq \frac{1}{2}.$$

Luego, podemos aplicar la teoría de Kantorovich y garantizar la convergencia semilocal del método de Newton a una solución $\overline{x}^*$ en $\Omega = B(0, r) \cap \Lambda$. Teniendo en cuenta lo anterior y que $p(s) = (0{,}1394\ldots) - (0{,}5933\ldots)t + (0{,}6127\ldots)t^2$, $s^* = 0{,}4013\ldots$, $s^{**} = 0{,}5669\ldots$ y $B(\overline{x}_0, s^*) \subseteq \Omega$, obtenemos que los dominios de existencia y unicidad de solución son respectivamente:

$$\{\overline{l} \in \Omega; \|\overline{l} - \overline{1}\|_\infty \leq 0{,}4013\ldots\} \quad \text{y} \quad \{\overline{l} \in \Omega; \|\overline{l} - \overline{1}\|_\infty < 0{,}5669\ldots\}.$$

Por otra parte, si consideramos el teorema 3.3.5 y elegimos $t_0 = 0$, obtenemos $M = 0{,}8340\ldots$, $\alpha = 0{,}5479\ldots$,

$$\phi(t) = (0{,}1394\ldots) - (0{,}5933\ldots)t + (0{,}4170\ldots)t^2 + (0{,}0247\ldots)^{\frac{5}{2}} + (0{,}1235\ldots)t^3$$

y $\phi(\alpha) = -0{,}0346\ldots \leq 0$, de manera que también tenemos garantizada la convergencia semilocal del método de Newton a una solución $\overline{x}^*$ en $\Omega = B(0,r) \cap \Lambda$ a partir del teorema 3.3.5. Teniendo en cuenta lo anterior y que $t^* = 0{,}3119\ldots$ y $t^{**} = 0{,}7729\ldots$, obtenemos que, bajo las condiciones $(\widehat{A_1})$ y $(\widehat{A_2})$, los dominios de existencia y unicidad de solución son respectivamente

$$\{\overline{l} \in \Omega; \|\overline{l} - \overline{1}\|_\infty \leq 0{,}3119\ldots\} \quad \text{y} \quad \{\overline{l} \in \Omega; \|\overline{l} - \overline{1}\|_\infty < 0{,}7729\ldots\}.$$

Vemos que estos nuevos dominios de existencia y unicidad de solución mejoran a los dados por Kantorovich.

Una vez garantizada la convergencia del método de Newton, aplicamos el método y después de 5 iteraciones, obtenemos una aproximación de la solución $\overline{x}^*$, la dada por el vector $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_8^*)^T$ en la tabla 3.2. Interpolando estos valores y teniendo en cuenta que las soluciones de (3.13) valen 1 en $s = 0$ y $s = 1$, obtenemos la solución $\widetilde{x}$ representada en la figura 3.3. Obsérvese que $\|\overline{x}^*\|_\infty = 1{,}2763\ldots \leq \dfrac{3}{2}$.

n	x_n^*	n	x_n^*
1	1,019929 . . .	5	1,276373 . . .
2	1,096786 . . .	6	1,200456 . . .
3	1,200456 . . .	7	1,096786 . . .
4	1,276373 . . .	8	1,019929 . . .

Tabla 3.2: Solución numérica de (3.13)

A continuación, vemos que también obtenemos mejores aproximaciones a priori del error a partir del teorema 3.3.5 que a partir de la teoría de Kantorovich. Las estimaciones a priori del error y el error real podemos verlos en la tabla 3.3, donde hemos considerado como solución real la dada en la tabla 3.2. Observamos en la tabla 3.3 la notable mejora de las estimaciones a priori de error que se obtienen a partir del teorema 3.3.5 con respecto a Kantorovich.

Por otra parte, hemos visto anteriormente que la ecuación (3.13) puede tener una solución discreta $\overline{x}^{**}$ tal que $\|\overline{x}^{**}\|_\infty \geq r_2 = 1{,}6992\ldots$, pero que no podemos garantizar la convergencia del método de Newton a ella mediante el teorema de Newton-Kantorovich, porque no podemos fijar una bola que la contenga y donde $\|F''(\overline{x})\|_\infty$ esté acotada. Veamos a

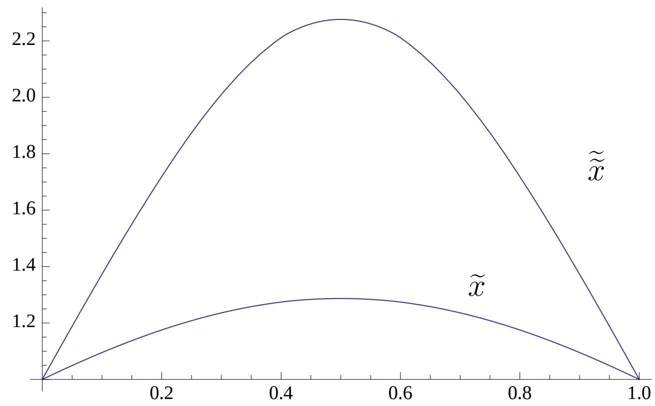

Figura 3.3: Soluciones aproximadas de la ecuación (3.13)

n	$\|\overline{x}^* - \overline{x}_n\|$	$\|t^* - t_n\|$	$\|s^* - s_n\|$
0	$0{,}276373\ldots$	$0{,}311999\ldots$	$0{,}401357\ldots$
1	$0{,}041380\ldots$	$0{,}077005\ldots$	$0{,}166363\ldots$
2	$0{,}001366\ldots$	$0{,}008614\ldots$	$0{,}055542\ldots$
3	$1{,}6157 \times 10^{-6}$	$0{,}000139\ldots$	$0{,}011150\ldots$

Tabla 3.3: Error absoluto y estimaciones a priori del error

continuación que utilizando el teorema 3.3.5 sí que podemos garantizar la convergencia del método de Newton.

Tomamos por ejemplo $\overline{x}_0 = (3, 3, \ldots, 3)^T$ como vector inicial para el método de Newton, que verifica $\|\overline{x}_0\|_\infty = 3 > r_2 = 1{,}6992\ldots$ En un principio, tampoco podemos aplicar el teorema 3.3.5 porque $\phi(\alpha) = 0{,}2910\ldots > 0$ con $\alpha = 0{,}0622\ldots$ y

$$\phi(t) = (0{,}2957\ldots) - (0{,}1507\ldots)t + (1{,}1922\ldots)t^2 + (0{,}0247\ldots)t^{\frac{5}{2}} + (0{,}1235\ldots)t^3,$$

ya que $\beta = 6{,}6347\ldots$, $\eta = 1{,}9620\ldots$ y $M = 2{,}3845\ldots$ Sin embargo, parece claro que mejorando la aproximación inicial se cumplirán las condiciones del teorema 3.3.5. En efecto, iterando tres veces el método de Newton a partir de $\overline{x}_0 = (3, 3, \ldots, 3)^T$, obtenemos el vector

$$\overline{x}_3 = \begin{pmatrix} 1{,}077814\ldots \\ 1{,}392262\ldots \\ 1{,}866018\ldots \\ 2{,}267211\ldots \\ 2{,}267211\ldots \\ 1{,}866018\ldots \\ 1{,}392262\ldots \\ 1{,}077814\ldots \end{pmatrix},$$

que ya si cumple las condiciones del teorema 3.3.5, puesto que tomando como nuevo punto de salida $\widetilde{\overline{x}}_0 = \overline{x}_3$, obtenemos $\beta = 2{,}9176\ldots$, $\eta = 0{,}0423\ldots$, $M = 1{,}8203\ldots$,

$$\phi(t) = (0{,}0145\ldots) - (0{,}3427\ldots)t + (0{,}9107\ldots)t^2 + (0{,}0247\ldots)t^{\frac{5}{2}} + (0{,}1235\ldots)t^3,$$

$\alpha = 0{,}1791\ldots$ y $\phi(\alpha) = -0{,}0166\ldots \leq 0$. Además, como $t^* = 0{,}0487\ldots$ y $t^{**} = 0{,}3071\ldots$, los dominios de existencia y unicidad son respectivamente

$$\{\bar{l} \in \Lambda; \|\bar{l} - \overline{3}\|_\infty \leq 0{,}0487\ldots\} \quad \text{y} \quad \{\bar{l} \in \Lambda; \|\bar{l} - \overline{3}\|_\infty < 0{,}3071\ldots\}.$$

Observamos que el nuevo punto de salida $\widetilde{\overline{x}}_0$ verifica que $\|\widetilde{\overline{x}}_0\| = 2{,}2672\ldots > r_2 = 1{,}6992\ldots$ Realizando cuatro iteraciones más del método de Newton, obtenemos la solución aproximada $\overline{x}^{**} = (x_1^{**}, x_2^{**}, \ldots, x_8^{**})^T$ dada en la tabla 3.4, que es una solución que está fuera del alcance del teorema de Newton-Kantorovich.

n	x_n^{**}	n	x_n^{**}
1	1,075236...	5	2,222620...
2	1,379101...	6	1,836355...
3	1,836355...	7	1,379101...
4	2,222620...	8	1,075236...

Tabla 3.4: Solución numérica de (3.13)

Interpolando una vez más los valores dados en la tabla 3.4 y teniendo en cuenta que las soluciones de (3.13) valen 1 en $s = 0$ y $s = 1$, obtenemos la solución $\widetilde{\overline{x}}$ representada en la figura 3.3.

Capítulo 4

Modificación de las condiciones clásicas de Newton-Kantorovich

4.1. Introducción

La ecuación integral

$$x(s) = u(s) + \lambda \int_a^b G(s,t)H(x(t))\,dt, \quad s \in [a,b], \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

donde $-\infty < a < b < +\infty$, la función $u(s)$ es continua en $[a,b]$ y dada, el núcleo $G(s,t)$ es la función de Green y $H(\xi)$ es una función polinómica, es un caso particular de ecuación de Hammerstein de segunda clase [99]. Como ya hemos indicado, las ecuaciones de Hammerstein tienen un origen físico importante y surgen de la dinámica de fluidos electromagnéticos [108]. Estas ecuaciones aparecieron a principios de los años 30 del siglo XX como modelos generales del estudio de problemas de valores en la frontera semilineales, donde el núcleo $G(s,t)$ se presenta típicamente como la función de Green de un operador diferencial [53]. Así, la ecuación (4.1) se puede reformular como un problema de valores en la frontera de dos puntos con una cierta condición de contorno no lineal [19]. También aparecen análogos multidimensionales de la ecuación (4.1) como reformulaciones de una EDP elíptica con condiciones de contorno no lineales [83]. Ecuaciones integrales como (4.1) aparecen frecuentemente en numerosas aplicaciones del mundo real [21]. Por ejemplo, algunos problemas considerados en la teoría vehicular, la biología y la teoría de colas llevan a ecuaciones integrales de este tipo [44]. Estas ecuaciones también se aplican en la teoría de la transferencia radiactiva, en la teoría del transporte de neutrones y en la teoría cinética de gases (véase [68] entre otros). Destacamos además el papel significativo que juegan en varias aplicaciones [39], como por ejemplo los modelos dinámicos de reactores químicos [28], que están gobernados por ecuaciones de control, justificando así su estudio y resolución [56].

También sabemos que la resolución de la ecuación (4.1) es equivalente a resolver la ecuación $F(x) = 0$, donde $F : \mathcal{C}([a,b]) \longrightarrow \mathcal{C}([a,b])$ y

$$[F(x)](s) = x(s) - u(s) - \lambda \int_a^b G(s,t)H(x(t))\,dt.$$

Además,

$$[F'(x)y](s) = y(s) - \lambda \int_a^b G(s,t)H'(x(t))y(t)\,dt,$$

$$[F''(x)(yz)](s) = -\lambda \int_a^b G(s,t)H''(x(t))z(t)y(t)\,dt.$$

Observamos que la condición (C_3) del teorema de Newton-Kantorovich no se cumple en general porque $\|F''(x)\|$ no está acotada en $\mathcal{C}([a,b])$ salvo que H sea una función polinómica de grado menor o igual que dos. En otro caso, tal y como hemos visto en los capítulos anteriores, no es sencillo encontrar un dominio $\Omega \subseteq \mathcal{C}([a,b])$ donde $\|F''(x)\|$ esté acotada y que contenga una raíz de la ecuación que pretendemos aproximar y no conocemos.

Hemos visto que para solventar el problema anterior una opción común es prelocalizar una raíz $x^*(s)$ de la ecuación (4.1) en algún dominio $\Omega \subseteq \mathcal{C}([a,b])$ y buscar una cota superior para $\|F''(x)\|$ en él ([52]). En este caso, una solución $x^*(s)$ de (4.1) verificará que

$$\|x^*(s)\| - L - |\lambda| N \|H(x^*(s))\| \leq 0, \tag{4.2}$$

donde $L = \|u(s)\|$ y $N = \max\limits_{[a,b]} \displaystyle\int_a^b |G(s,t)|\,dt$. Entonces, a partir de (4.2), se trata de encontrar una región $\Omega \subseteq \mathcal{C}([a,b])$ que contenga a $x^*(s)$. Ahora bien, sabemos que puede ocurrir que la ecuación (4.2), que debe verificar $x^*(s)$, se cumpliese en diferentes regiones del espacio, de manera que si la ecuación (4.1) tuviese más de una solución, solo podríamos prelocalizar aquellas soluciones $x^*(s)$ que cumpliesen que $\|x^*(s)\| \in [0,r]$ o $\|x^*(s)\| \in [r_1, r_2]$, donde r, r_1 y r_2 son soluciones reales positivas de la ecuación escalar $\xi - L - |\lambda| N \|H(\xi)\| = 0$. En otro caso, es decir, cuando las soluciones cumplan $\|x^*(s)\| > r_3$, donde r_3 es una solución real positiva de la ecuación escalar anterior, el problema queda abierto. Notemos que si la ecuación escalar anterior no tiene raíces reales positivas, no obtendremos condiciones para prelocalizar una raíz de la ecuación.

En este capítulo daremos una alternativa a la situación anterior de prelocalizar las raíces de la ecuación (4.1) que además dé respuesta a situaciones que no resuelve la prelocalización de raíces. Notemos que, como hemos indicado, si $H(x(t)) = a_0 + a_1x(t) + \cdots + a_ix(t)^i$, $a_i \in \mathbb{R}$, se pueden aplicar las condiciones dadas por Kantorovich en el caso en que $i \leq 2$, pero en general no es así para $i > 2$. Así, nuestra idea en este capítulo consiste en generalizar las hipótesis del teorema clásico 1.2.2 de Newton-Kantorovich, fundamentalmente modificando las condiciones (C_1)–(C_3) de la siguiente forma:

(I) existencia de $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, para algún $x_0 \in \Omega$, $\|\Gamma_0\| \leq \beta$, $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$, y $\|F^{(i)}(x_0)\| \leq b_i$, con $b_i \in \mathbb{R}_+$ e $i = 2, 3, \ldots, m-1$,

(II) $\|F^{(m)}(x)\| \leq M$ para $x \in \Omega$.

En esta situación, siempre podemos conseguir, sea cual sea el valor de i $(i = 2, 3, \ldots, m)$, que se verifiquen las condiciones anteriores de convergencia, ya que $\|F^{(i)}(x)\|$ estará acotado considerando apropiadamente el valor de m.

Evidentemente esta generalización conduce a una variación en la técnica del principio de la mayorante utilizado por Kantorovich para probar la convergencia semilocal del método de Newton. En concreto, habrá que sustituir el polinomio de segundo grado que obtiene Kantorovich a partir de las condiciones (C_1)–(C_3) del teorema clásico de Newton-Kantorovich, $p(s) = \dfrac{k}{2}s^2 - \dfrac{s}{\beta} + \dfrac{\eta}{\beta}$, para construir la sucesión mayorizante de la sucesión de Newton en el espacio de Banach X, por un polinomio de grado m, y la condición $k\beta\eta \leq \dfrac{1}{2}$, que garantiza la existencia de raíces reales positivas del polinomio de Kantorovich p, por la correspondiente condición que garantice la existencia de raíces reales positivas del polinomio de grado m.

En [9] podemos ver un interesante trabajo en el que se presenta un estudio análogo para ecuaciones polinómicas en espacios de Banach y en el que se utiliza una técnica diferente a la de Kantorovich, que está basada en algunas ideas dadas en [61].

En la sección 4.2, establecemos la convergencia semilocal del método de Newton en espacios de Banach bajo las condiciones (I) y (II). Para ello, utilizaremos el principio de la mayorante construyendo la sucesión mayorizante adecuada a las condiciones (I) y (II). Obtenemos también dominios de existencia y unicidad de solución utilizando el significado teórico del método de Newton y damos un resultado general acerca de las estimaciones a priori del error que conduce a la convergencia cuadrática del método de Newton.

Terminamos el capítulo con la sección 4.3 estudiando dos ecuaciones particulares de (4.1), en las que se pone de manifiesto la desventaja de las condiciones del teorema de Newton-Kantorovich con respecto a las presentadas en este capítulo. Adelantamos que Kantorovich necesita prelocalizar la solución de la ecuación y elegir un buen punto de salida para poder aplicar el método de Newton, mientras que nosotros, bajo las nuevas condiciones, solo necesitamos elegir un buen punto de salida para obtener la convergencia del método de Newton.

4.2. Convergencia semilocal

Vamos a demostrar la convergencia semilocal del método de Newton bajo las condiciones (I) y (II) utilizando el principio de la mayorante tal y como hace Kantorovich en [75] a partir de las condiciones (C_1)–(C_3) del teorema clásico 1.2.2 de Newton-Kantorovich. Para ello, construiremos una sucesión real $\{t_n\}$ que mayorice a la sucesión de Newton $\{x_n\}$ en espacios de Banach. Para obtener la sucesión real mayorizante $\{t_n\}$ definiremos en primer lugar una función real $f(t)$, definida en $[t_0, t'] \subset \mathbb{R}$, a partir de la cual construiremos dicha sucesión como:

$$\text{dado } t_0, \quad t_n = t_{n-1} - \frac{f(t_{n-1})}{f'(t_{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Para obtener la función real $f(t)$, procedemos como hace Kantorovich a la hora de construir, a partir de (C_1)–(C_3) y teniendo en cuenta $s_0 = 0$, su polinomio cuadrático $p(s) = \frac{k}{2}s^2 - \frac{s}{\beta} + \frac{\eta}{\beta}$. Resolvemos el problema de tipo interpolatorio definido por las condiciones (I) y (II), dadas para el operador F, buscando una función real $f(t)$ tal que

$$-\frac{1}{f'(t_0)} = \beta, \quad -\frac{f(t_0)}{f'(t_0)} = \eta, \quad f^{(m)}(t) = M,$$

$$f^{(i)}(t_0) = b_i, \quad \text{con} \quad i = 2, \ldots, m-1.$$

Así, obtenemos que $f(t)$ es el polinomio de grado m dado por

$$f(t) = \frac{M}{m!}(t-t_0)^m + \frac{b_{m-1}}{(m-1)!}(t-t_0)^{m-1} + \cdots + \frac{b_2}{2!}(t-t_0)^2 - \frac{t-t_0}{\beta} + \frac{\eta}{\beta} \cdot \tag{4.4}$$

Evidentemente el polinomio (4.4) satisface todas las condiciones exigidas, que son las condiciones de un problema de interpolación de Taylor.

Nota 4.2.1 *Para seguir con el mismo hilo conductor que hemos marcado a lo largo de esta memoria, notemos que el polinomio $f(t)$ de grado m dado en (4.4) también se puede obtener de forma diferente, sin utilizar un ajuste interpolatorio, sin más que resolver el siguiente problema de valor inicial de orden m:*

$$\begin{cases} y^{(m)}(t) = M, \\ y(t_0) = \dfrac{\eta}{\beta}, \quad y'(t_0) = -\dfrac{1}{\beta}, \\ y''(t_0) = b_2, y'''(t_0) = b_3, \ldots, y^{(m-1)}(t_0) = b_{m-1}. \end{cases}$$

Como es bien conocido [75], necesitamos que este polinomio tenga al menos una raíz real t^* tal que $t^* \geq t_0$ y que la sucesión $\{t_n\}$ definida en (4.3) converja a t^* de forma creciente. La convergencia de $\{t_n\}$ asegurará entonces la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ dada por el método de Newton en el espacio de Banach X. Para ello, comenzamos analizando el polinomio (4.4) en el siguiente resultado. A partir de ahora, denotaremos $q = \min\{t > t_0; f'(t) \geq 0\}$ y $f(t)$ el polinomio definido en (4.4).

Teorema 4.2.2 *Si $f(q) \leq 0$, entonces el polinomio $f(t)$ dado en (4.4) tiene dos raíces reales t^* y t^{**} tales que $t_0 \leq t^* \leq q \leq t^{**}$.*

Demostración. Como $f'(t_0) = -\dfrac{1}{\beta} < 0$, $f''(t) > 0$ y $f'(t) > 0$ cuando $t \to +\infty$, entonces existe una única raíz de $f'(t) = 0$ en $(t_0, +\infty)$, que denotamos por q y, en consecuencia, $f(t) = 0$ tiene dos raíces reales t^* y t^{**} en $[t_0, +\infty)$, tales que $t^* \leq q \leq t^{**}$. ∎

A continuación, probaremos que la sucesión $\{t_n\}$ dada por (4.3) converge a t^* de forma creciente.

Teorema 4.2.3 *Si $f(q) \leq 0$, entonces la sucesión $\{t_n\}$ dada por (4.3) converge de forma creciente a la raíz t^* de la ecuación $f(t) = 0$.*

Demostración. Si definimos $t - \dfrac{f(t)}{f'(t)} = g(t)$, resulta evidente que $g'(t) = \dfrac{f(t)f''(t)}{f'(t)^2} > 0$ en $[t_0, t^*]$. Además, como $t_1 - t_0 = -\dfrac{f(t_0)}{f'(t_0)} \geq 0$, tenemos que $t_1 \geq t_0$. Por otra parte, como

$$t_1 - t^* = g(t_0) - g(t^*) = g'(\theta_0)(t_0 - t^*) \quad \text{con} \quad \theta_0 \in (t_0, t^*),$$

se sigue que $t_1 \leq t^*$. En consecuencia, $t_0 \leq t_1 \leq t^*$.

Procediendo análogamente por inducción, se sigue que la sucesión $\{t_n\}$ es creciente y está acotada por t^*. Luego existe $l = \lim\limits_{n\to+\infty} t_n$. Pasando ahora al límite en la definición de $\{t_n\}$ dada en (4.3), obtenemos que $l = l - \dfrac{f(l)}{f'(l)}$, de donde se sigue que $f(l) = 0$. Por tanto, $l = t^*$. ■

El siguiente paso es ver que $\{t_n\}$ es una sucesión mayorizante de la sucesión de Newton $\{x_n\}$ en el espacio de Banach X. Para ello, probamos las siguientes relaciones de recurrencia.

Lema 4.2.4 *Supongamos que $x_n \in \Omega$, para todo $n \geq 0$, y $f(q) \leq 0$. Entonces, para todo $n \geq 1$, se cumplen:*

(*i*) $\|\Gamma_n\| = \|[F'(x_n)]^{-1}\| \leq -\dfrac{1}{f'(t_n)}$,

(*ii*) $\|F^{(i)}(x_n)\| \leq f^{(i)}(t_n)$, $i = 2, 3, \ldots, m-1$,

(*iii*) $\|F(x_n)\| \leq f(t_n)$,

(*iv*) $\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n$.

Demostración. Demostraremos los items (i)–(iv) por inducción sobre n. El caso $n = 1$ se sigue análogamente a como lo hacemos luego en el paso inductivo. Supongamos entonces que se verifican para $n = 1, 2, \ldots, k-1$ y veamos qué ocurre para $n = k$.

Para probar (i), vemos primero que existe $\Gamma_k = [F'(x_k)]^{-1}$. Para ello, observamos que

$$\begin{aligned} I - \Gamma_{k-1}F'(x_k) &= I - \Gamma_{k-1}\Big(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{(i-1)!} F^{(i)}(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})^{i-1} \\ &\quad + \frac{1}{(m-2)!} \int_{x_{k-1}}^{x_k} F^{(m)}(z)(x_k - z)^{m-2}\, dz \Big), \end{aligned}$$

sin más que tener en cuenta el desarrollo en serie de Taylor. Tomando ahora normas, tenemos que

$$\|I - \Gamma_{k-1}F'(x_k)\| \leq \|\Gamma_{k-1}\| \Big(\sum_{i=2}^{m-1} \frac{1}{(i-1)!} \|F^{(i)}(x_{k-1})\| \|x_k - x_{k-1}\|^{i-1}$$
$$+ \frac{1}{(m-2)!} \int_0^1 \left\| F^{(m)}\big(x_{k-1} + t(x_k - x_{k-1})\big) \right\|$$

$$
\begin{aligned}
&\times(1-t)^{m-2}\|x_k-x_{k-1}\|^{m-1}\,dt\Big)\\
\leq\ & -\frac{1}{f'(t_{k-1})}\left(\sum_{i=2}^{m-1}\frac{1}{(i-1)!}f^{(i)}(t_{k-1})(t_k-t_{k-1})^{i-1}\right.\\
&\left.+\frac{1}{(m-2)!}\int_0^1 f^{(m)}\Big(t_{k-1}+t(t_k-t_{k-1})\Big)(1-t)^{m-2}(t_k-t_{k-1})^{m-1}\,dt\right)\\
=\ & -\frac{1}{f'(t_{k-1})}\left(\sum_{i=2}^{m-1}\frac{1}{(i-1)!}f^{(i)}(t_{k-1})(t_k-t_{k-1})^{i-1}\right.\\
&\left.+\frac{1}{(m-2)!}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f^{(m)}(z)(t_k-z)^{m-2}\,dt\right)\\
=\ & -\frac{1}{f'(t_{k-1})}\Big(f'(t_k)-f'(t_{k-1})\Big)=1-\frac{f'(t_k)}{f'(t_{k-1})}<1,
\end{aligned}
$$

puesto que $\dfrac{f'(t_k)}{f'(t_{k-1})}\in(0,1)$ por ser $t_{k-1}<t_k\leq t^*$ y $f''(t)>0$ en $[t_0,+\infty)$. Por tanto, por el lema de Banach sobre inversión de operadores, existe Γ_k y

$$
\|\Gamma_k\|\leq\frac{-\frac{1}{f'(t_{k-1})}}{1-\left(1-\frac{f'(t_k)}{f'(t_{k-1})}\right)}=-\frac{1}{f'(t_k)}.
$$

Para probar (ii), consideramos cualquier $i\in\{2,3,\ldots,m-1\}$ y por el desarrollo en serie de Taylor vemos que

$$
\begin{aligned}
F^{(i)}(x_k)\ =\ & F^{(i)}(x_{k-1})+F^{(i+1)}(x_{k-1})(x_k-x_{k-1})\\
&+\frac{1}{2!}F^{(i+2)}(x_{k-1})(x_k-x_{k-1})^2\\
&+\cdots+\frac{1}{(m-1-i)!}F^{(m-1)}(x_{k-1})(x_k-x_{k-1})^{m-1-i}\\
&+\frac{1}{(m-1-i)!}\int_{x_{k-1}}^{x_k}F^{(m)}(z)(x_k-z)^{m-1-i}\,dz\\
=\ & \sum_{j=1}^{m-i}\frac{1}{(j-1)!}F^{(i+j-1)}(x_{k-1})(x_k-x_{k-1})^{j-1}\\
&+\frac{1}{(m-1-i)!}\int_{x_{k-1}}^{x_k}F^{(m)}(z)(x_k-z)^{m-1-i}\,dz.
\end{aligned}
$$

Tomando de nuevo normas, se sigue que

$$
\|F^{(i)}(x_k)\|\ =\ \sum_{j=1}^{m-i}\frac{1}{(j-1)!}\|F^{(j+i-1)}(x_{k-1})\|\|x_k-x_{k-1}\|^{j-1}
$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{(m-1-i)!}\int_0^1 \left\|F^{(m)}\Big(x_{k-1}+t(x_k-x_{k-1})\Big)\right\| \\
& \times(1-t)^{m-2}\|x_k-x_{k-1}\|^{m-i}\,dt \\
\leq\ & \sum_{j=1}^{m-i}\frac{1}{(j-1)!}f^{(j+i-1)}(t_{k-1})(t_k-t_{k-1})^{j-1} \\
& +\frac{1}{(m-1-i)!}\int_0^1 f^{(m)}\Big(t_{k-1}+t(t_k-t_{k-1})\Big) \\
& \times(1-t)^{m-2}(t_k-t_{k-1})^{m-i}\,dt \\
=\ & \sum_{j=1}^{m-i}\frac{1}{(j-1)!}f^{(i+j-1)}(t_{k-1})(t_k-t_{k-1})^{j-1} \\
& +\frac{1}{(m-1-i)!}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f^{(m)}(z)(t_k-z)^{m-i-1}\,dz = f^{(i)}(t_k).
\end{aligned}
$$

Para probar (iii), basta con aplicar de nuevo el desarrollo en serie de Taylor:

$$
\begin{aligned}
F(x_k) &= \sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{i}F^{(i)}(x_{k-1})(x_k-x_{k-1})^i \\
&\quad +\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_{k-1}}^{x_k} F^{(m)}(z)(x_k-z)^{m-1}\,dz \\
&= \sum_{i=2}^{m-1}\frac{1}{i!}F^{(i)}(x_{k-1})(x_k-x_{k-1})^i \\
&\quad +\frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 F^{(m)}\Big(x_{k-1}+t(x_k-x_{k-1})\Big) \\
&\quad \times(1-t)^{m-1}(x_k-x_{k-1})^m\,dt,
\end{aligned}
$$

ya que $F(x_{k-1})+F'(x_{k-1})(x_k-x_{k-1})=0$ sin más que utilizar la expresión del método de Newton de forma conveniente. Tomando una vez más normas tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|F(x_k)\| &\leq \sum_{i=2}^{m-1}\frac{1}{i!}\|F^{(i)}(x_{k-1})\|\|x_k-k_{k-1}\|^i \\
&\quad +\frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 \left\|F^{(m)}\Big(x_{k-1}+t(x_k-x_{k-1})\Big)\right\| \\
&\quad \times(1-t)^{m-1}\|x_k-x_{k-1}\|^m\,dt \\
&\leq \sum_{i=2}^{m-1}\frac{1}{i!}f^{(i)}(t_{k-1})(t_k-t_{k-1})^i \\
&\quad +\frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 f^{(m)}\Big(t_{k-1}+t(t_k-t_{k-1})\Big)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\quad \times(1-t)^{m-1}(t_k-t_{k-1})^m\,dt\\
&= \sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{i!}f^{(i)}(t_{k-1})(t_k-t_{k-1})^i\\
&\quad +\frac{1}{(m-1)!}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f^{(m)}(z)(t_k-z)^{m-1}\,dz\\
&= f(t_k)
\end{aligned}$$

sin más que añadir la expresión $f(t_{k-1})+f'(t_{k-1})(t_k-t_{k-1})=0$.

Finalmente, la demostración de (iv) se sigue de manera inmediata, puesto que

$$\|x_{k+1}-x_k\|\leq\|\Gamma_k\|\|F(x_k)\|\leq -\frac{f(t_k)}{f'(t_k)}=t_{k+1}-t_k. \quad \blacksquare$$

Notemos que en los items (i), (ii) y (iv) del lema anterior son triviales para $n=0$ y que el item (iii) no se necesita para probar el ítem (iv), ya que se sigue de la condición inicial $\|\Gamma_0 F(x_0)\|\leq\eta$.

Una vez visto que la sucesión $\{t_n\}$ mayoriza a la sucesión $\{x_n\}$, ya estamos en condiciones de garantizar la convergencia semilocal de la sucesión de Newton $\{x_n\}$ en el espacio de Banach X, lo que hacemos en el siguiente teorema.

Teorema 4.2.5 *Sea $F:\Omega\subseteq X\to Y$ un operador m ($m>2$) veces continuamente diferenciable Fréchet definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω de un espacio de Banach X y con valores en un espacio de Banach Y. Supongamos que se cumplen las condiciones (I) y (II). Si $f(q)\leq 0$, donde $f(t)$ es el polinomio definido en (4.4) y $q=\min\{t>t_0|f'(t)\geq 0\}$, y $B(x_0,t^*-t_0)\subseteq\Omega$, entonces la sucesión de Newton converge a una solución x^* de la ecuación $F(x)=0$, empezando en x_0, y $x_n,x^*\in\overline{B(x_0,t^*-t_0)}$, para todo $n\geq 0$. Además,*

$$\|x^*-x_n\|\leq t^*-t_n,\quad n\geq 0.$$

Demostración. A partir de (I) y (II) es claro que x_1 está bien definido y que

$$\|x_1-x_0\|=\|\Gamma_0F(x_0)\|\leq\eta=-\frac{f(t_0)}{f'(t_0)}=t_1-t_0<t^*-t_0,$$

luego $x_1\in B(x_0,t^*-t_0)\subset\Omega$.

Aplicamos inducción para ver que $x_n \in B(x_0, t^* - t_0)$. Suponemos entonces que x_n esté bien definido, $x_n \in B(x_0, t^* - t_0)$ y $\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n$, para $n = 1, 2, \ldots, k-1$.

Por el lema anterior tenemos que existe Γ_{k-1} y es tal que $\|\Gamma_{k-1}\| \leq -\dfrac{1}{f'(t_{k-1})}$. Luego, x_k está bien definido. Además, como $\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n$ para $n = 1, 2, \ldots, k-1$, entonces

$$\begin{aligned} \|x_k - x_0\| &\leq \|x_k - k_{k-1}\| + \cdots + \|x_1 - x_0\| \\ &\leq (t_k - t_{k-1}) + \cdots + (t_1 - t_0) = t_k - t_0 < t^* - t_0. \end{aligned}$$

Luego $x_k \in B(x_0, t^* - t_0)$. También por el lema anterior tenemos que $\|F(x_k)\| \leq f(t_k)$ y

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|\Gamma_k F(x_k)\| \leq \|\Gamma_k\| \|F(x_k)\| \leq -\frac{f(t_k)}{f'(t_k)} = t_{k+1} - t_k.$$

En consecuencia, la sucesión $\{x_n\}$ está bien definida y $x_n \in B(x_0, t^* - t_0)$ para todo $n \geq 0$. Además, como $\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n$, para todo $n \geq 0$, la sucesión $\{t_n\}$ mayoriza a $\{x_n\}$, y en consecuencia, existe $x^* = \lim_n x_n \in \overline{B(x_0, t^* - t_0)}$. Veamos ahora que x^* es solución de la ecuación $F(x) = 0$. Por el apartado (iii) del lema anterior, tenemos que $\|F(x_n)\| \leq f(t_n)$, para todo $n \geq 0$. Entonces, por continuidad y pasando al límite cuando $n \to +\infty$, obtenemos que $F(x^*) = 0$.

Finalmente, para $j > 0$, tenemos que

$$\|x_{n+j} - x_n\| \leq \sum_{i=1}^{j} \|x_{n+i} - x_{n+i-1}\| \leq \sum_{i=1}^{j} \|t_{n+i} - t_{n+i-1}\| = t_{n+j} - t_n,$$

y pasando al límite cuando $j \to +\infty$, obtenemos que $\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n$, para $n \geq 0$. ■

Notemos que como caso particular del resultado anterior se encuentra el teorema clásico de Newton-Kantorovich.

A continuación, damos un resultado sobre la unicidad de solución. Destacamos que también generaliza el resultado conocido de Kantorovich bajo las condiciones clásicas (C_1)–(C_3). Previamente, damos un resultado necesario para la demostración de la unicidad.

Lema 4.2.6 *En las condiciones del teorema anterior, si* $x \in \overline{B(x_0, t^{**} - t_0)} \cap \Omega$*, se verifica*

$$\|F''(x)\| \leq f''(t) \quad \textit{para} \quad \|x - x_0\| \leq t - t_0.$$

Demostración. Por el desarrollo en serie de Taylor, tenemos que

$$\begin{aligned}
F''(x) &= \sum_{i=2}^{m-1} \frac{1}{(i-2)!} F^{(i)}(x_0)(x-x_0)^{i-2} \\
&\quad + \frac{1}{(m-3)!} \int_{x_0}^{x} F^{(m)}(z)(x-z)^{m-3}\, dz \\
&= \sum_{i=2}^{m-1} \frac{1}{(i-2)!} F^{(i)}(x_0)(x-x_0)^{i-2} \\
&\quad + \frac{1}{(m-3)!} \int_{0}^{1} F^{(m)}\Big(x_0 + t(x-x_0)\Big)(1-t)^{m-3}(x-x_0)^{m-2}\, dt.
\end{aligned}$$

Tomando normas y teniendo en cuenta el lema anterior, $\|F^{(m)}(x)\| \leq M$, para $x \in \Omega$, y $f^{(m)}(t) = M$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|F''(x)\| &\leq \sum_{i=2}^{m-1} \frac{1}{(i-2)!} \|F^{(i)}(x_0)\| \|x-x_0\|^{i-2} \\
&\quad + \frac{1}{(m-3)!} \int_{x_0}^{x} \Big\|F^{(m)}\Big(x_0 + t(x-x_0)\Big)\Big\| \\
&\quad \times (1-t)^{m-3} \|x-x_0\|^{m-2}\, dt \\
&\leq \sum_{i=2}^{m-1} \frac{1}{(i-2)!} f^{(i)}(t_0)(t-t_0)^{i-2} \\
&\quad + \frac{1}{(m-3)!} \int_{0}^{1} f^{(m)}\Big(t_0 + t(t-t_0)\Big)(1-t)^{m-3}(t-t_0)^{m-2}\, dt \\
&= f''(t)
\end{aligned}$$

para $\|x - x_0\| \leq t - t_0$. ■

Ya podemos dar entonces el siguiente resultado de unicidad de solución.

Teorema 4.2.7 *En las condiciones del teorema anterior, la solución* x^* *es única en* $B(x_0, t^{**} - t_0) \cap \Omega$ *si* $t^* < t^{**}$ *o en* $\overline{B(x_0, t^* - t_0)}$ *si* $t^{**} = t^*$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $t^* < t^{**}$ y que y^* es otra solución de $F(x) = 0$ en $B(x_0, t^{**} - t_0) \cap \Omega$. Entonces,

$$\|y^* - x_0\| \leq \rho(t^{**} - t_0) \quad \text{con} \quad \rho \in (0, 1).$$

Probaremos por inducción que $\|y^* - x_k\| \leq \rho^{2^k}(t^{**} - t_k)$, $k \geq 0$. Por hipótesis de inducción consideramos que la desigualdad anterior se verifica para $k = 0, 1, \ldots, n$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} y^* - x_{n+1} &= y^* - x_n - \Gamma_n F(x_n) \\ &= -\Gamma_n \Big(F(y^*) - F(x_n) - F'(x_n)(y^* - x_n) \Big) \\ &= -\Gamma_n \int_{x_n}^{y^*} F''(z)(y^* - z)\, dz \\ &= -\Gamma_n \int_0^1 F''\Big(x_n + t(y^* - x_n)\Big)(1-t)(y^* - x_n)^2\, dt. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|y^* - x_{n+1}\| \leq \|\Gamma_n\| \int_0^1 \Big\| F''\Big(x_n + t(y^* - x_n)\Big)\Big\| (1-t) \|y^* - x_n\|^2\, dt.$$

Observamos ahora que

$$\|x_n + t(y^* - x_n) - x_0\| \leq \|x_n - x_0\| + t\|y^* - x_n\| \leq t_n + t(t^{**} - t_n) - t_0,$$

y por el lema previo se sigue que

$$\int_0^1 \Big\| F''\Big(x_n + t(y^* - x_n)\Big)\Big\| (1-t)\, dt \leq \int_0^1 f''\Big(t_n + t(t^{**} - t_n)\Big)(1-t)\, dt \equiv \mu,$$

de manera que

$$\|y^* - x_{n+1}\| \leq -\frac{\mu}{f'(t_n)} \|y^* - x_n\|^2.$$

Por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned} t^{**} - t_{n+1} &= t^{**} - t_n + \frac{f(t_n)}{f'(t_n)} \\ &= -\frac{1}{f'(t_n)} \Big(f(t^{**}) - f(t_n) - f'(t_n)(t^{**} - t_n) \Big) \\ &= -\frac{1}{f'(t_n)} \int_{t_n}^{t^{**}} f''(z)(t^{**} - z)\, dz \\ &= -\frac{1}{f'(t_n)} \int_0^1 f''\Big(t_n + t(t^{**} - t_n)\Big)(1-t)(t^{**} - t_n)^2\, dt \\ &= -\frac{1}{f'(t_n)} \mu (t^{**} - t_n)^2. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \|y^* - x_{n+1}\| &\leq -\frac{\mu}{f'(t_n)} \|y^* - x_n\|^2 = \frac{t^{**} - t_{n+1}}{(t^{**} - t_n)^2} \|y^* - x_n\|^2 \\ &\leq \frac{t^{**} - t_{n+1}}{(t^{**} - t_n)^2} \Big(\rho^{2^n} (t^{**} - t_n) \Big)^2 = \rho^{2^{n+1}} (t^{**} - t_{n+1}). \end{aligned}$$

Por tanto, $y^* = x^*$, puesto que $\lim\limits_n x_n = x^*$.

Si en segundo lugar consideramos que $t^{**} = t^*$, la unicidad de solución se sigue de forma análoga a lo hecho anteriormente probando ahora por inducción que $\|y^* - x_n\| \leq t^{**} - t_n = t^* - t_n$ y teniendo en cuenta que $\lim\limits_n t_n = t^*$. ■

Nota 4.2.8 *Notemos que el polinomio f definido en (4.4) tiene la propiedad de que $f(t + t_0) = g(t)$, donde*

$$g(t) = \frac{M}{m!}t^m + \frac{b_{m-1}}{(m-1)!}t^{m-1} + \cdots + \frac{b_2}{2!}t^2 - \frac{t}{\beta} + \frac{\eta}{\beta}.$$

Por lo tanto, las sucesiones reales que se obtienen a partir del método de Newton con f y g se pueden obtener, una a partir de la otra, mediante traslación. Luego, los resultados anteriores son independientes del valor t_0. Por ello, habitualmente tomaremos $t_0 = 0$, lo que simplifica considerablemente las expresiones utilizadas hasta ahora. Observamos que el polinomio de Kantorovich también tiene esta propiedad, de manera que Kantorovich siempre toma $t_0 = 0$ [75].

Terminaremos esta sección viendo que la convergencia del método de Newton es cuadrática. Para ello, utilizamos la técnica de Ostrowski a partir de la cual obtenemos el siguiente resultado, cuya demostración es totalmente análoga a la del teorema 2.3.15.

Teorema 4.2.9 *Sea $f(t)$ el polinomio definido en (4.4) cumpliendo que $f(t) = (t^* - t)(t^{**} - t)g(t)$, donde $g(t)$ es un polinomio tal que $g(t^*) \neq 0$ y $g(t^{**}) \neq 0$, y $f(q) \leq 0$.*

(i) Si $t^* < t^{**}$, entonces

$$\frac{(t^{**} - t^*)\theta^{2^n}}{\sqrt{m_1} - \theta^{2^n}} < t^* - t_n < \frac{(t^{**} - t^*)\Delta^{2^n}}{\sqrt{M_1} - \Delta^{2^n}}, \quad n \geq 0,$$

donde $\theta = \dfrac{t^*}{t^{**}}\sqrt{m_1}$, $\Delta = \dfrac{t^*}{t^{**}}\sqrt{M_1}$, $m_1 = \text{mín}\{H_1(t); t \in [0, t^*]\}$, $M_1 = \text{máx}\{H_1(t); t \in [0, t^*]\}$, $H_1(t) = \dfrac{(t^{**} - t)g'(t) - g(t)}{(t^* - t)g'(t) - g(t)}$ y siempre que $\theta < 1$ y $\Delta < 1$.

(*ii*) *Si* $t^* = t^{**}$, *entonces*

$$m_2^n t^* \leq t^* - t_n \leq M_2^n t^*,$$

donde $m_2 = \text{mín}\{H_2(t); t \in [0, t^*]\}$, $M_2 = \text{máx}\{H_2(t); t \in [0, t^*]\}$, $H_2(t) = \dfrac{(t^* - t)g'(t) - g(t)}{(t^* - t)g'(t) - 2g(t)}$ *y siempre que* $m_2 < 1$ *y* $M_2 < 1$.

Notemos que, a partir del teorema anterior, obtenemos que la convergencia del método de Newton es R-cuadrática si $t^* < t^{**}$ y R-lineal si $t^* = t^{**}$.

4.3. Aplicaciones

Ilustramos ahora el estudio anterior con dos ecuaciones integrales no lineales de Hammerstein de segunda clase (4.1). Veremos que en ambas aplicaciones mejoramos el estudio de la aplicación del método de Newton dado por Kantorovich para aproximar soluciones de las ecuaciones. Utilizaremos siempre la norma del máximo.

4.3.1. Aplicación 1

Consideramos

$$x(s) = \frac{1}{2} + \int_0^1 G(s,t)x(t)^3 \, dt, \tag{4.5}$$

donde $x \in \mathcal{C}([0,1])$, $t \in [0,1]$ y el núcleo G es la función de Green.

La resolución de (4.5) es equivalente a resolver $F(x) = 0$, donde $F : \Omega \subseteq \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$,

$$[F(x)](s) = x(s) - \frac{1}{2} - \int_0^1 G(s,t)x(t)^3 \, dt, \quad s \in [0,1],$$

y Ω es un dominio abierto convexo no vacío adecuado. En este caso,

$$[F'(x)y](s) = y(s) - 3\int_0^1 G(s,t)x(t)^2 y(t) \, dt,$$

$$[F''(x)(yz)](s) = -6\int_0^1 G(s,t)x(t)z(t)y(t) \, dt,$$

$$[F'''(x)(yzw)](s) = -6\int_0^1 G(s,t)w(t)z(t)y(t) \, dt.$$

Observamos que $\|F''(x)\|$ no está acotada en un dominio general Ω, pero el operador F si que satisface la condición (II) del teorema 4.2.5, sin más que tomar $m = 3$.

Teniendo en cuenta que una solución $x^*(s)$ de (4.5) en $\mathcal{C}([0,1])$ debe satisfacer:

$$\|x^*\| - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\|x^*\|^3 \leq 0,$$

se sigue que $\|x^*\| \leq \sigma_1 = 0{,}5173\ldots$ o $\|x^*\| \geq \sigma_2 = 2{,}5340\ldots$, donde σ_1 y σ_2 son las dos raíces reales positivas de la ecuación real $\dfrac{t^3}{8} - t + \dfrac{1}{2} = 0$. Por tanto, mediante las condiciones de Kantorovich, solo podemos aproximar una solución $x^*(s)$ tal que $\|x^*\| \in [0, \sigma_1]$, puesto que podemos considerar $\Omega = B(0,\rho)$, con $\rho \in (\sigma_1, \sigma_2)$, donde $\|F''(x)\|$ está acotada, y tomar como punto de salida $x_0 \in B(0,\rho)$. Sin embargo, si queremos aproximar una solución $x^{**}(s)$ tal que $\|x^{**}(s)\| \geq \sigma_2 = 2{,}5340\ldots$, no podemos utilizar la teoría de Kantorovich porque no sabemos cómo elegir una bola en la que esté $x^{**}(s)$, ya que, elegida al azar, la bola podría no contener la solución o cortarla, en cuyo caso, aunque pudiéramos acotar $\|F''(x)\|$ en un dominio $\widetilde{\Omega}$, éste no contendría la solución $x^{**}(s)$, y por tanto no podríamos aproximarla utilizando la teoría de Kantorovich. Veremos que con nuestras condiciones podemos considerar ambos casos y que además en el primero, que podemos aplicar las condiciones de Kantorovich y las nuestras, mejoramos las estimaciones a priori del error que se obtienen a partir de Kantorovich.

Comenzamos con el caso en que $\Omega = B(0,\rho)$ con $\rho \in (\sigma_1, \sigma_2)$. Tomamos por ejemplo $\rho = 2$ y elegimos como se hace habitualmente [50] $x_0(s) = \dfrac{1}{2}$ como punto de salida. Vemos que $\|I - F'(x_0)\| \leq \dfrac{3}{32} < 1$, de manera que Γ_0 está definido, $\|\Gamma_0\| \leq \dfrac{32}{29} = \beta$ y $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \dfrac{1}{58} = \eta$. Además, $\|F''(x)\| \leq \dfrac{3}{2} = k$ y $k\beta\eta = \dfrac{24}{841} = 0{,}0285\ldots \leq \dfrac{1}{2}$. Luego, podemos aplicar el teorema de Newton-Kantorovich teniendo en cuenta que $p(s) = \dfrac{3}{4}s^2 - \dfrac{29}{32}s + \dfrac{1}{64}$, $s^* = 0{,}0174\ldots$, $B(x_0, s^*) \subseteq \Omega = B(0,\rho)$ y usar el método de Newton para aproximar una solución $x^*(s)$ en $\Omega = B(0,\rho)$.

Teniendo en cuenta lo anterior y que $s^{**} = 1{,}1908\ldots$, obtenemos que los dominios de existencia y unicidad de Kantorovich son respectivamente

$$\left\{ l \in \Omega; \left\| l - \frac{1}{2} \right\| \leq 0{,}0285\ldots \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ l \in \Omega; \left\| l - \frac{1}{2} \right\| < 1{,}1908\ldots \right\}.$$

Por otra parte, si consideramos los teoremas 4.2.5 y 4.2.7 y elegimos $t_0 = 0$, obtenemos:

$$\|F''(x_0)\| \leq \frac{3}{8} = b_2 \quad \text{y} \quad \|F'''(x)\| \leq \frac{3}{4} = M.$$

Por tanto, $f(t) = \dfrac{t^3}{8} + \dfrac{3}{16}t^2 - \dfrac{29}{32}t + \dfrac{1}{64}$, $q = 1{,}1329\ldots$ y $f(q) = -0{,}5886\ldots \leq 0$, de manera que se cumplen las condiciones de los teoremas 4.2.5 y 4.2.7, obteniéndose $t^* = 0{,}01773\ldots$ y $t^{**} = 2{,}0340\ldots$ En consecuencia los dominios de existencia y unicidad que obtenemos son respectivamente:

$$\left\{l \in \Omega; \left\|l - \frac{1}{2}\right\| \leq 0{,}0173\ldots\right\} \quad \text{y} \quad \left\{l \in \Omega; \left\|l - \frac{1}{2}\right\| < 2{,}0340\ldots\right\}.$$

Vemos que los dominios de existencia y unicidad que acabamos de calcular mejoran los dados por Kantorovich.

A continuación, aproximamos mediante el método de Newton una solución con estas características. Para ello, realizaremos un proceso de discretización. Aproximamos entonces la integral que aparece en (4.5) mediante una fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre:

$$\int_0^1 \varphi(t)\, dt \simeq \sum_{j=1}^{8} \gamma_j \varphi(t_j),$$

donde los nodos t_j y los pesos γ_j son conocidos.

Si denotamos $x(t_i)$ por x_i, con $i = 1, 2, \ldots, 8$, obtenemos el siguiente sistema no lineal:

$$x_i = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{8} a_{ij} x_j^3,$$

donde

$$a_{ij} = \begin{cases} \gamma_j t_j (1 - t_i) & \text{si } j \leq i, \\ \gamma_j t_i (1 - t_j) & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Ahora, podemos escribir el sistema no lineal anterior de la forma matricial:

$$F(\overline{x}) = \overline{x} - \overline{v} - A\overline{w} = 0,$$

donde $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_8)^T$, $\overline{v} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{2}\right)^T$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{8}$ y $\overline{w} = (x_1^3, x_2^3, \ldots, x_8^3)^T$. Además

$$F'(\overline{x}) = I - 3A\mathrm{diag}\{x_1^2, x_2^2, \ldots, x_8^2\}.$$

Como hemos elegido $x_0(s) = \dfrac{1}{2}$, tomamos como vector inicial para aplicar el método de Newton $\overline{x}_0 = \left(\dfrac{1}{2}, \dots, \dfrac{1}{2}\right)^T$ y, después de 4 iteraciones, obtenemos la aproximación numérica de la solución $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_8^*)^T$ que aparece en la tabla 4.1. Observamos que $\|\overline{x}^*\| = 0{,}5168\ldots \leq \sigma_1 = 0{,}5173\ldots$

i	x_i^*	i	x_i^*
1	$0{,}501329\ldots$	5	$0{,}516824\ldots$
2	$0{,}506285\ldots$	6	$0{,}512542\ldots$
3	$0{,}512542\ldots$	7	$0{,}506285\ldots$
4	$0{,}516824\ldots$	8	$0{,}501329\ldots$

Tabla 4.1: Solución numérica de (4.5)

A continuación vemos que la sucesión mayorizante $\{t_n\}$, dada por (4.3) y obtenida a partir de (4.4), proporciona mejores estimaciones a priori del error que las que se obtienen a partir de la sucesión mayorizante $\{s_n\}$ que se construye a partir del método de Newton con el polinomio de Kantorovich $p(s)$. Las estimaciones a priori del error y el error absoluto podemos verlos en la tabla 4.2, donde hemos considerado como solución real la solución dada en la tabla 4.1. Observamos en la tabla 4.2 la notable mejora de las estimaciones a priori que obtenemos a partir de la sucesión mayorizante aquí construida.

n	$\|x^* - x_n\|$	$\|t^* - t_n\|$	$\|s^* - s_n\|$
0	$0{,}016824\ldots$	$0{,}017304\ldots$	$0{,}017494\ldots$
1	$0{,}000044\ldots$	$0{,}000062\ldots$	$0{,}000253\ldots$
2	$3{,}1150\ldots \times 10^{-10}$	$8{,}4667\ldots \times 10^{-10}$	$5{,}4655\ldots \times 10^{-8}$

Tabla 4.2: Error absoluto y estimaciones a priori del error

Si ahora interpolamos los puntos de la tabla 4.1 y tenemos en cuenta que las soluciones de (4.5) satisfacen $x(0) = x(1) = \dfrac{1}{2}$, obtenemos la aproximación $\widetilde{x}$ de la solución numérica $\overline{x}^*$ que aparece en la tabla 4.1 y que representamos en la figura 4.1.

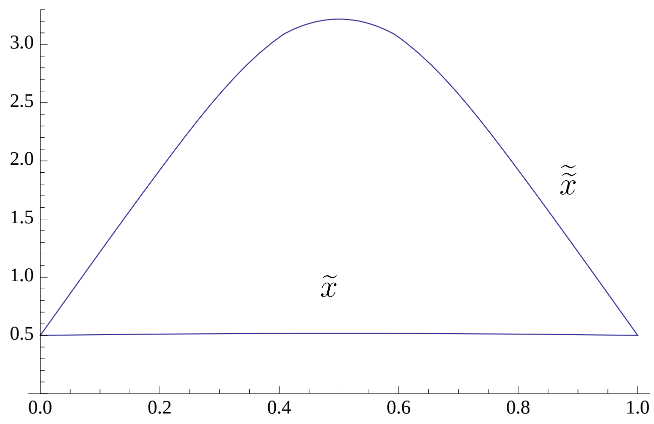

Figura 4.1: Soluciones aproximadas de la ecuación (4.5)

Hemos visto anteriormente que la ecuación (4.5) puede tener una solución $x^{**}(s)$ tal que $\|x^{**}(s)\| \geq \sigma_2 = 2{,}5340\ldots$, pero que por Kantorovich no podemos garantizar la convergencia del método de Newton a ella, porque no podemos fijar una bola que la contenga y donde $\|F''(x)\|$ esté acotada. Veamos a continuación que utilizando el teorema 4.2.5 si que podemos garantizar la convergencia del método de Newton.

Tomamos por ejemplo como punto inicial para el método de Newton la función $x_0(s) = 4$, que verifica que $\|x_0(s)\| = 4 > \sigma_2 = 2{,}5340\ldots$ En un principio, tampoco podemos aplicar el teorema 4.2.5, ya que no podemos construir la función real $f(t)$. Sin embargo, parece claro que mejorando esta aproximación inicial se van a cumplir las condiciones del teorema 4.2.5. Considerando $\overline{x}_0 = (4, 4, \ldots, 4)^T$ e iterando cuatro veces con el método de Newton, vemos que tomando como nuevo punto inicial

$$\overline{z}_0 = \overline{x}_4 = \begin{pmatrix} 0{,}643403\ldots \\ 1{,}233188\ldots \\ 2{,}182331\ldots \\ 3{,}102723\ldots \\ 3{,}102723\ldots \\ 2{,}182331\ldots \\ 1{,}233188\ldots \\ 0{,}643403\ldots \end{pmatrix},$$

ya se cumplen las condiciones del teorema 4.2.5 puesto que la correspondiente función real $f(t)$ que se obtiene,

$$f(t) = \frac{t^3}{8} + (1{,}1635\ldots)t^2 - (0{,}3908\ldots)t + (0{,}0044\ldots),$$

verifica que $f(q) = -0{,}0278\ldots \leq 0$, donde $q = 0{,}1636\ldots$ En consecuencia, $t^* = 0{,}0117\ldots$ y $t^{**} = 0{,}3131\ldots$, de manera que los dominios de existencia y unicidad de solución son respectivamente

$$\{\bar{l} \in \mathbb{R}^8; \|\bar{l} - \overline{z}_0\| \leq 0{,}0117\ldots\} \quad \text{y} \quad \{\bar{l} \in \mathbb{R}^8; \|\bar{l} - \overline{z}_0\| < 0{,}3131\ldots\}.$$

Observamos que el nuevo punto de salida $\overline{z}_0$ verifica que $\|\overline{z}_0\| = 3{,}1027\ldots > \sigma_2 = 2{,}5340\ldots$ Después de 3 iteraciones más del método de Newton, obtenemos la solución aproximada $\overline{x}^{**} = (x_1^{**}, x_2^{**}, \ldots, x_8^{**})^T$ dada en la tabla 4.3, que es una solución que está fuera del alcance de Kantorovich.

i	x_i^{**}	i	x_i^{**}
1	0,642778...	5	3,091270...
2	1,229990...	6	2,174987...
3	2,174987...	7	1,229990...
4	3,091270...	8	0,642778...

Tabla 4.3: Solución numérica de (4.5)

Interpolando de nuevo los valores obtenidos en la tabla 4.3 y teniendo en cuenta que $x^{**}(0) = x^{**}(1) = \frac{1}{2}$, obtenemos la aproximación $\tilde{\tilde{x}}$ de la solución numérica $\overline{x}^{**}$ que aparece en la tabla 4.3 y que representamos en la figura 4.1.

4.3.2. Aplicación 2

Consideramos ahora la ecuación integral

$$x(s) = \int_0^1 G(s,t)(x(t) + x(t)^3)\, dt, \tag{4.6}$$

donde $x \in \mathcal{C}([0,1])$, $t \in [0,1]$ y el núcleo G es la función de Green.

Nosotros estamos interesados en soluciones de (4.6) distintas de la trivial, cuyo conocimiento es obvio. Observamos ahora que una solución $x^*(s)$

de (4.6) en $\mathcal{C}([0,1])$ debe cumplir que

$$\frac{1}{8}\|x^*\|(7-\|x^*\|^2)\leq 0,$$

de manera que $\|x^*\|\geq\sqrt{7}$. De nuevo, a partir de la teoría de Kantorovich, no podemos garantizar la convergencia del método de Newton a una solución de la ecuación (4.6) distinta de la trivial, puesto que no podemos prelocalizar una bola que contenga una solución distinta de la trivial y en la que $\|F''(x)\|$ esté acotada. Sin embargo, vemos a continuación que si lo podemos hacer mediante el teorema 4.2.5.

Tomamos como punto inicial $x_0(s)=3$, que verifica que $\|x_0(s)\|=3>\sqrt{7}$. Para este punto inicial no podemos construir la función real $f(t)$ correspondiente al teorema 4.2.5, pero iterando de nuevo con el método de Newton a partir del vector inicial $\overline{x}_0=(3,3,\ldots,3)^T$, después de tres iteraciones obtenemos el vector $\overline{x}_3$, dado por

$$\overline{x}_3=\begin{pmatrix}0{,}176919\ldots\\0{,}905153\ldots\\2{,}087105\ldots\\3{,}279568\ldots\\3{,}279568\ldots\\2{,}087105\ldots\\0{,}905153\ldots\\0{,}176919\ldots\end{pmatrix},$$

que si cumple las condiciones del teorema 4.2.5, de manera que lo podemos considerar como nuevo vector inicial $\overline{z}_0=\overline{x}_3$ para garantizar la convergencia del método de Newton a partir de él. La correspondiente función real $f(t)$ que se obtiene entonces para el teorema 4.2.5 es:

$$f(t)=\frac{t^3}{8}+(1{,}2298\ldots)t^2-(0{,}3987\ldots)t+(0{,}0021\ldots),$$

que verifica que $f(q)=-0{,}0296\ldots\leq 0$, donde $q=0{,}1582\ldots$, y tiene dos raíces reales $t^*=0{,}0054\ldots$ y $t^{**}=0{,}3088\ldots$ Notemos que $\|\overline{z}_0\|=3{,}2795\ldots>\sqrt{7}$. Aplicando de nuevo el método de Newton, obtenemos después de tres iteraciones más, la solución $\overline{x}^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_8^*)^T$ dada en la tabla 4.4.

i	x_i^*	i	x_i^*
1	0,176647...	5	3,274166...
2	0,903758...	6	2,083876...
3	2,083876...	7	0,903758...
4	3,274166...	8	0,176647...

Tabla 4.4: Solución numérica de (4.6)

Los dominios de existencia y unicidad que se obtiene en este caso son respectivamente:

$$\{\bar{l} \in \mathbb{R}^8; \|\bar{l} - \overline{z}_0\| \leq 0{,}0054\ldots\} \quad \text{y} \quad \{\bar{l} \in \mathbb{R}^8; \|\bar{l} - \overline{z}_0\| < 0{,}3088\ldots\}.$$

Interpolando una vez más los valores dados en la tabla 4.4 y teniendo en cuenta que las soluciones de (4.6) satisfacen $x(0) = x(1) = 0$, obtenemos la aproximación $\widehat{x}$ de la solución numérica $\overline{x}^*$ representada en la figura 4.2.

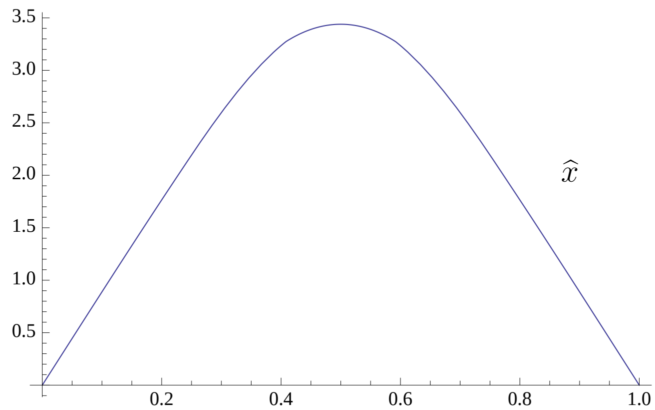

Figura 4.2: Solución aproximación de la ecuación (4.6)

Conclusiones y temas abiertos

Una vez terminada esta memoria es momento de repasar lo que se ha hecho y lo que queda por hacer en relación a lo aquí presentado. El objetivo principal perseguido a lo largo de toda la memoria ha sido suavizar y generalizar las condiciones de convergencia semilocal del teorema clásico de Newton-Kantorovich para el método de Newton y lo que esto implica en cuanto a las modificaciones que conllevan.

Hemos presentado tres alternativas al teorema clásico de Newton-Kantorovich, las que se exponen en los capítulos 2, 3 y 4. En los tres capítulos se ha desarrollado una teoría paralela a la de Kantorovich para el método de Newton, utilizando su misma técnica de demostración: el principio de la mayorante. Para todo el desarrollo inicial hemos tenido que construir sucesiones mayorizantes, pero lo hemos hecho de forma diferente a cómo lo hace Kantorovich, mientras que él busca un polinomio de segundo grado mediante un ajuste interpolatorio que sirviese de función escalar para construir las sucesiones mayorizantes, nosotros buscamos funciones escalares *ad hoc* que nos permitan construir las sucesiones mayorizantes adaptándolas a los problemas considerados. Esto es como consecuencia de que la condición que exigimos al operador implicado es más suave y da más información sobre el operador que la exigida por Kantorovich en el teorema clásico de Newton-Kantorovich, aunque no permite obtener la función escalar implicada en la sucesión mayorizante resolviendo un problema de tipo interpolatorio, tal y como hace Kantorovich. Nosotros vemos a lo largo de toda la memoria que también se pueden construir sucesiones mayorizantes para el método de Newton en un espacio de Banach a partir de funciones escalares que son soluciones de determinados problemas de valor inicial.

En los tres capítulos originales de esta memoria se pone de manifiesto cuál es la dificultad principal de la condición clásica que impone Kantorovich al operador implicado, la condición de que su derivada segunda esté acotada superiormente en norma por una constante en un dominio general. Vemos también por qué una de las formas más comunes de solventar esta dificultad, la de prelocalizar la solución en algún dominio y buscar en él una cota superior para la norma de la derivada segunda del operador, no funciona siempre. La teoría desarrollada a lo largo de toda la memoria ayuda en gran medida a solventar estas dificultades aquí planteadas. Para ello, hemos analizado ejemplos habituales de la vida real, como son las ecuaciones integrales no lineales de tipo Hammerstein y de Bratu, ilustrándose todo lo anterior.

Como hemos dicho anteriormente, hemos utilizado el principio de la mayorante como técnica de demostración de la convergencia semilocal del método de Newton para seguir cierto paralelismo con Kantorovich y poder ver así cómo Kantorovich ideó su teoría. Esto se pone de manifiesto en el capítulo 2, donde se ve cuál es el planteamiento inicial, cuál es el problema que presenta este planteamiento inicial y cómo se puede solucionar. Todo ello se hace considerando condiciones más suaves que la considerada por Kantorovich en el teorema clásico de Newton-Kantorovich, a partir de su teoría básica del principio de la mayorante.

Es bien conocido que el hecho de exigir condiciones más suaves al operador implicado conlleva habitualmente la contrapartida de que se reduzca el dominio de puntos de salida válidos para el método de Newton. Es por ello por lo que en el capítulo 3 no nos preocupamos por exigir condiciones más suaves al operador, sino más fuertes con el claro objetivo de modificar, que no de restringir, el dominio de puntos de salida para el método de Newton, de manera que podamos garantizar, al menos en algunas situaciones, la convergencia semilocal del método de Newton empezando desde puntos a partir de los cuales el teorema clásico de Newton-Kantorovich no la puede garantizar.

En el último capítulo de esta memoria desarrollamos una situación particular que se puede dar cuando el operador implicado es varias veces diferenciable. Siguiendo con la línea de determinar las condiciones iniciales, destacamos la teoría de la estimación puntual o α-teoría introducida por Smale en los años 80 del siglo XX, técnica que trata de precisar las condiciones y dominios de convergencia para resolver una ecuación usando únicamente información sobre el punto inicial. Los primeros resultados con esta técnica sobre el análisis de la convergencia de método iterativos para resolver ecuaciones no lineales están asociados al método de Newton ([115]) y sus variantes. Los principales resultados de la α-teoría consisten en encontrar una constante universal que garantice la convergencia del método iterativo. El trabajo de Smale es de gran importancia teórica sobre todo cuando se trabaja con sistemas de polinomios ([122, 123, 124]). Además, esta teoría ha servido de base e inspiración en los trabajos de otros muchos autores (ver [62, 114, 117, 118, 121]). Esto nos hace pensar que un trabajo interesante para realizar en el futuro es comparar lo aquí desarrollado con las condiciones que Smale propone en su α-teoría.

Una idea también interesante que queda abierta para el futuro es combinar de cierta forma las condiciones impuestas al operador en los capítulos 3 y 4, de manera que impongamos al operador implicado F una condición del tipo:

$$\|F^{(m)}(x) - F^{(m)}(x_0)\| \leq \omega(\|x - x_0\|), \quad m \geq 3,$$

donde $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua no decreciente y tal que $\omega(0) = 0$.

A la hora de pensar en este tipo de condiciones también hay otra que surge de forma natural, que es la generalización de la impuesta al operador implicado F en el capítulo 4, de manera que

$$\|F^{(m)}(x)\| \leq \omega(\|x\|), \quad m \geq 3,$$

donde $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua no decreciente. Este análisis se podría completar con un estudio en el que se ponga de manifiesto cuál es la mejora que se obtiene con respecto a la situación estudiada en el capítulo 2.

Tampoco es difícil reparar en que todo lo desarrollado en esta memoria, y lo propuesto hasta ahora para continuar, se puede extender a métodos iterativos de orden superior, como podrían ser los métodos de tercer orden bien conocidos de Chebyshev y Halley.

También se pueden compaginar los análisis de la convergencia semilocal realizados a partir del principio de la mayorante con el uso de la técnica alternativa desarrollada por el grupo de investigación PRIENOL a lo largo de los últimos años, que se basa en la construcción de un sistema de relaciones de recurrencia que deben verificar determinadas sucesiones escalares, a partir de las cuales se garantiza la convergencia semilocal de los métodos iterativos en espacios de Banach. En muchos casos, especialmente cuando el orden de convergencia de un método iterativo es alto, el uso de esta técnica simplifica considerablemente el análisis de la convergencia semilocal del método iterativo, obteniendo así resultados que no son fáciles de obtener a partir de la técnica del principio de la mayorante (ver [7, 8, 90, 131]).

Para terminar, simplemente recordar lo que se ha dicho al principio de esta memoria en su introducción: el problema de resolver una ecuación no lineal ha interesado a los matemáticos desde siempre. Este interés no ha decaído en la actualidad y sigue siendo un problema vigente de estudio en las investigaciones de hoy en día, basta ver los numerosos artículos que siguen apareciendo en la actualidad sobre resolución de ecuaciones no lineales mediante métodos iterativos. A continuación, indicamos solo algunos de ellos por la relación de sus autores con nuestro grupo de investigación PRIENOL: [1, 4, 5, 13, 14, 16, 31, 32, 36, 37, 38, 43, 49, 59, 60, 123, 124]. A todos ellos, gracias.

Bibliografía

[1] Alarcón, V., Amat, S., Busquier, S. y Manzano, F. High order iterative schemes for quadratic equations. *Numerical Algorithms, 48*, 4 (2008), 373–381.

[2] Alefeld, G. y Herzberger, J. *Introduction to interval computations.* Academic Press, 1983.

[3] Amat, S. Bermúdez, C., Busquier, S. y Plaza, S. On a third-order Newton-type method free of bilinear operators. *Numerical Linear Algebra with Applications, 17* (2010), 639–653.

[4] Amat, S., Bermúdez, C., Busquier, S. y Mestiri, D. A family of Halley-Chebyshev iterative schemes for non-Fréchet differentiable operators. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 228*, 1 (2009), 486–493.

[5] Amat, S., Busquier, S. y Candela, V. A class of quasi-Newton generalized Steffensen methods on Banach spaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 149*, 2 (2002), 397–406.

[6] Anselone, P. *Nonlinear integral equations.* University of Wisconsin Press, Madison, Wisconsin, 1964.

[7] Argyros, I. K. On Newton's method and nondiscrete mathematical induction. *Bulletin Australian Mathematical Society, 38* (1988), 131–140.

[8] Argyros, I. K. Newton-like methods and non-discrete mathematical induction. *Studia Sciences Mathematics Hungary, 28* (1993), 417–426.

[9] Argyros, I. K. On the convergence of Newton's method for polynomial equations and applications in radiative transfer. *Monatshefte für Mathematik, 127*, 4 (1999), 265–276.

[10] Argyros, I. K. An improved convergence analysis and applications for Newton-like methods in Banach space. *Numerical Functional Analysis and Optimization, 24*, 7-8 (2003), 653–572.

[11] Argyros, I. K. On the Newton-Kantorovich hypothesis for solving equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 169*, 2 (2004), 315–332.

[12] Argyros, I. K. A semilocal convergence analysis for directional Newton methods. *Mathematical Computation, 80*, 273 (2011), 327–343.

[13] Argyros, I. K. y Hilout, S. On a class of secant-like methods for solving nonlinear equations. *Numerical Algorithms, 54*, 4 (2010), 485–501.

[14] Argyros, I. K. y Hilout, S. A unified approach for the convergence of certain numerical algorithms, using recurrent functions. *Computing, 90*, 3–4 (2010), 131–164.

[15] Argyros, I. K. y Hilout, S. On the semilocal convergence of the Gauss-Newton method using recurrent functions. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education. Series B, Pure and Applied Mathematics, 17*, 4 (2011), 307–319.

[16] Argyros, I. K. y Hilout, S. Optimal Newton-type methods for solving nonlinear equations. *Advances in Nonlinear Variational Inequalities, 14*, 1 (2011), 47–59.

[17] Argyros, I. K. y Hilout, S. Semilocal convergence of Newton's method for singular systems with constant rank derivatives. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education. Series B, Pure and Applied Mathematics, 18*, 2 (2011), 97–111.

[18] Argyros, I. K. y Ren, H. Kantorovich-type semilocal convergence analysis for inexact Newton methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 235*, 9 (2011), 2993–3005.

[19] Atkinson, K. E. The numerical solution of a nonlinear boundary integral equation on smooth surfaces. *IMA Journal of Numerical Analysis, 14* (1994), 461–483.

[20] Banach, S. *Théorie des operateurs linéaires.* Funduszu Kultury Narodowej, Warszawa, 1932.

[21] Banás, J., Rocha Martinb, C. J. y Sadaranganib, K. On solutions of a quadratic integral equation of Hammerstein type. *Mathematical and Computer Modelling, 43* (2006), 97–104.

[22] Beauzamy, B. *Introduction to Banach spaces and their geometry.* North Holland, 1985.

[23] Bellman, R. y Kalaba, R. *Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems.* American Elseiver, New York, 1965.

[24] Bennett, A. Newton's method in general analysis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA, 2* (1916), 592–598.

[25] Berberian, S. K. *Lectures in functional analysis and operator theory.* Apringer Verlag, 1974.

[26] Biéanié, N. y Johnson, K. H. Who was '-Raphson'? *International Journal for Numerical Methods in Engineering, 14* (1979), 148–152.

[27] Blutel, E. Sur lápplication de la métode dápproximation de Newton à la résolution approchée des équations á plusieurs inconnues. *Comptes Rendus de lÁcadémie des Sciences Paris, 151* (1910), 1109–1112.

[28] Bruns, D. D. y Bailey, J. E. Nonlinear feedback control for operating a nonisothermal CSTR near an unstable steady state. *Chemical Engineering Science, 32* (1997), 257–264.

[29] Bussmann, K. *Ph. D. Diss.* Institute of Technology, Braunschweig, Germany, 1940.

[30] Caglar, H., Caglar, N., Özer, M., Valaristos, A., Miliou, A. N. y Anagnostopoulos, A. N. Dynamics of the solution of Bratu's equation. *Nonlinear Analysis, 71* (2007), 672–678.

[31] Candela, V. y Marquina, A. Recurrence relations for rational cubic methods. I. The Halley method. *Computing, 44*, 2 (1990), 169–184.

[32] Candela, V. y Marquina, A. Recurrence relations for rational cubic methods. II. The Chebyshev method. *Computing, 45*, 4 (1990), 355–367.

[33] Cartan, H. *Calcul différentiel.* Hermann, 1971.

[34] Cauchy, A. Sur la détermination approximative des racines dúne équation algébrique ou trascendante. *Leures Complète, (II)*, 4 (1829), 573–609.

[35] Collatz, L. *Functional analysis and numerical mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1964.

[36] Cordero, A., Hueso, J. L., Martínez, E. y Torregrosa, J. R. A family of iterative methods with sixth and seventh order convergence for nonlinear equations. *Mathematical and Computer Modelling, 52*, 9–10 (2010), 1490–1496.

[37] Cordero, A., Hueso, J. L., Martínez, E. y Torregrosa, J. R. Iterative methods for use with nonlinear discrete algebraic models. *Mathematical and Computer Modelling, 52*, 7–8 (2010), 1251–1257.

[38] Cordero, A., Torregrosa, J. R. y Vassileva, M. P. Three-step iterative methods with optimal eighth-order convergence. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 235*, 10 (2011), 3189–3194.

[39] Corduneanu, C. *Integral Equations and Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[40] Curtain, R. F. y Pritchard, A. J. *Functional analysis in modern applied mathematics.* Academic Press, 1977.

[41] Davis, H. T. *Introduction to nonlinear differential and integral equations.* Dover Publications, New York, 1962.

[42] Day, M. M. *Normed linear spaces.* Springer Verlag, 1958.

[43] Dedieu, J.-P. *Points fixes, zéros et la méthode de Newton.* Springer, Berlin, 2006.

[44] Deimling, K. *Nonlinear functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[45] Dennis, J. E. On the Kantorovich hypothesis for Newton's method. *SIAM Journal of Numerical Analysis, 6* (1969), 493–507.

[46] Dennis, J. E. y Schnabel, R. B. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations.* Society for Industrial Mathematics, Philadelphia, 1996.

[47] Döring, B. Über das newtonsche näherungsverfahren. *Mathematical Physics Semi.-Ber., 16* (1969), 27–40.

[48] Dunford, N. y Schwartz, J. T. *Linear operators. Part I, General theory.* Interscience Publishers Inc., 1958.

[49] Ezquerro, J. A., Grau-Sánchez, M., Hernández, M. A. y Romero, N. Variants of a classic Traub's result. *Computers and Mathematics with Applications, 60*, 11 (2010), 2899–2908.

[50] Ezquerro, J. A. y Hernández, M. A. Generalized differentiability conditions for Newton's method. *IMA Journal of Numerical Analysis, 22*, 2 (2002), 187–205.

[51] Ezquerro, J. A. y Hernández, M. A. On an aplication of Newton's method to nonlinear operators with ω-conditioned second derivative. *BIT, 42*, 3 (2002), 519–530.

[52] Ezquerro, J. A. y Hernández, M. A. Halley's method for operators with unbounded second derivative. *Applied Numerical Mathematics, 57*, 3 (2007), 345–360.

[53] Faraci, F. y Moroz, V. Solutions of Hammerstein integral equations via a variational principle. *Journal of Integral Equations and Applications, 15*, 4 (2003), 385–402.

[54] Fine, H. B. On Newton's method of approximation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA, 2* (1916), 546–552.

[55] Fourier, J. B. J. *Question dánalyse algébrique, in: Oeuvres Complétes.* Gauthier-Villars, Paris, 1890.

[56] Ganesh, M. y Joshi, M. C. Numerical solvability of Hammerstein integral equations of mixed type. *IMA Journal of Numerical Analysis, 11* (1991), 21–31.

[57] Garay, J. y Hernández, M. A. Degree of logarithmic convexity. *Publicaciones del Seminario Matemático García Galdeano, Serie II*, 26 (1988).

[58] Gragg, W. B. y Tapia, R. A. Optimal error bounds for the Newton-Kantorovich theorem. *SIAM Journal of Numerical Analysis, 11* (1974), 10–13.

[59] Grau-Sánchez, M., Grau, A. y Noguera, M. Frozen divided difference scheme for solving systems of nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 234*, 6 (2011), 1739–1743.

[60] Grau-Sánchez, M. y Gutiérrez, J. M. Some variants of the Chebyshev-Halley family of methods with fifth order of convergence. *International Journal of Computer Mathematics, 87*, 4 (2010), 818–833.

[61] Gutiérrez, J. M. A new semilocal convergence theorem for Newton's method. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 79* (1997), 131–145.

[62] Gutiérrez, J. M. y Hernández, M. A. New recurrence relations for Chebyshev method. *Applied Mathematics Letters, 10*, 2 (1997), 63–65.

[63] Henrici, P. *Discrete variable methods for ordinary differential equations.* Wiley, New York, 1962.

[64] Hernández, M. A. y Salanova, M. A. Grados de convexidad y concavidad de una curva. Su aplicación al estudio de procesos iterativos para la resolución de ecuaciones. *Publicaciones del Seminario Matemático García Galdeano, Serie II*, 4 (1991).

[65] Hernández, M. A. y Salanova, M. A. La convexidad y concavidad en la convergencia de procesos iterativos para la resolución de ecuaciones. *Publicaciones del Seminario Matemático García Galdeano, Serie II*, 5 (1993).

[66] Hernández, M. A. y Salanova, M. A. Indices of convexity and concavity. application to Halley method. *Applied Mathematics and Computation, 103*, 1 (1999).

[67] Hirasawa, Y. On Newton's method in convex linear topological spaces. *Comment. Math. Univ. St. Paul, 3* (1954).

[68] Hu, S., Khavanin, M. y Zhuang, W. Integral equations arising in the kinetic theory of gases. *Applied Analysis, 34* (1989), 261–266.

[69] Kantorovich, L. On Newton's method. *Trudy Mathematica Inst Steklov, 28* (1949).

[70] Kantorovich, L. V. The method of successive aproximations for functional analysis. *Acta Mathematica, 71* (1939), 63–97.

[71] Kantorovich, L. V. Functional analysis and applied mathematics. (Russian). *Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 3*, 6 (1948), 89–185.

[72] Kantorovich, L. V. On Newton's method for functional equations. *Doklady Akademii Nauk SSSR, 59* (1948), 1237–1240.

[73] Kantorovich, L. V. The majorant principle and Newton's method. *Doklady Akademii Nauk SSSR, 76* (1951), 17–20.

[74] Kantorovich, L. V. Some further applications of the majorant principle (Russian). *Doklady Akademii Nauk SSSR, 80* (1951), 849–852.

[75] Kantorovich, L. V. y Akilov, G. P. *Functional analysis.* Pergamon Press, Oxford, 1982.

[76] Keller, H. *Numerical methods for two-points boundary value problems.* Ginn(Blaisdell), Boston, 1968.

[77] Knill, R. J. A modified Babylonian algorithm. *American Mathematical Monthly, 99* (1992), 734–737.

[78] Kornstaedt, H. J. Functional ungleichchungen und iterations verfahren. *Aequationes Mathematicae, 13* (1975).

[79] Kreyszig, E. Introductory functional analysis with applications. *Wiley,* (1978).

[80] Lee, E. *Quasilinearization and invariant imbedding.* Academic Press, New York, 1968.

[81] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L. *Classical Banach spaces I.* Springer Verlag, 1977.

[82] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L. *Classical Banach spaces II.* Springer Verlag, 1979.

[83] Lund, J. y Vogel, C. A Fully-Galerkin method for the solution of an inverse problem in a parabolic partial differential equation, numerical solution of an inverse. *Inverse Problems, 6* (1990), 205–217.

[84] Mamedov, A. On an approximate solution of nonlinear integral equations (Russian). *Izv. Akad. Nauk Azerbaidzhan. SSR Ser. Fiz.-Tekhn. Mat. Nauk,* (1965), 41–48.

[85] Miel, G. J. The Kantorovich theorem with optimal error bounds. *American Mathematical Monthly, 86* (1979), 212–215.

[86] Miel, G. J. Majorizing sequences and error bounds for iterative methods. *Mathematical Computation, 34* (1980), 185–202.

[87] Miel, G. J. An updated version of the Kantorovich theorem for Newton's method. *Computing, 27* (1981), 237–244.

[88] Moore, R. E. Methods and applications of interval analysis. *SIAM Studies in Applied Mathematics,* (1979).

[89] Moore, R. H. *Newton's method and variations, in "Nonlinear integral equations" (P. Anselone, ed.).* University of Wisconsin Press, Madison, Wisconsin, 1964.

[90] Moret, I. A note on Newton type iterative methods. *Computing, 33* (1984), 65–73.

[91] Moser, J. A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations I, II. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 20* (1966), 265–315, 499–535.

[92] Noble, B. *The numerical solution of nonlinear integral equations and related topics, in "Nonlinear integral equations" (P. Anselone, ed.).* University of Wisconsin Press, Madison, Wisconsin, 1964.

[93] Ortega, J. M. The Newton-Kantorovich theorem. *American Mathematical Monthly, 75* (1968).

[94] Ortega, J. M. y Rheinboldt, W. C. *Iterative solution of nonlinear equations in several variables.* Academic Press, 1970.

[95] Ostrowski, A. Konvergenzdiskussion und fehlerabschätzung für die Newton'sche methode bei gleichungssystem. *Commentarii Mathematici Helvetici, 9* (1936).

[96] Ostrowski, A. *Solution of equations in Euclidean and Banach spaces.* Academic Pres, 1943.

[97] Ostrowski, A. M. *Solution of equations and systems of equations.* Academic Press, 1966.

[98] Ostrowski, A. M. La méthode de Newton dans les espaces de Banach. *Comptes Rendus de l´Académie des Sciences, 272*, Serie A (1971), 1251–1253.

[99] Polyanin, A. D. y Manzhirov, A. V. *Handbook of integral equations.* CRC Press, Boca Raton, 1998.

[100] Potra, F. A. On the a posteriori error estimates for Newton's method. *Beiträge zur Numerische Mathematik, 12* (1984), 125–138.

[101] Potra, F. A. y Pták, V. Sharp error bounds for Newton process. *Numerische Mathematik, 34* (1981), 63–72.

[102] Potra, F. A. y Pták, V. *Nondiscrete induction and iterative processes.* Pitman Publishing Limited, London, 1984.

[103] Proinov, P. D. New general convergence theory for iterative processes and its applications to Newton-Kantorovich type theorems. *Journal of Complexity, 26*, 1 (2010), 3–42.

[104] Pták, V. Concerning the rate of convergence of Newton's process. *Command Mathematical University Carolina, 16* (1975), 699–705.

[105] Pták, V. The rate of convergence of Newton's process. *Numerische Mathematik, 25* (1976), 279–285.

[106] Rall, L. B. *Computational solution of nonlinear operator equations.* Robert E. Krieger Publishing Company, Michigan, 1979.

[107] Rall, L. B. y Tapia, R. A. *The Kantorovich theorem and error estimates for Newton's method.* MRC Technical Summary Report No. 1043, University of Wisconsin-Madison, 1970.

[108] Rashidinia, J. y Zarebnia, M. New approach for numerical solution of Hammerstein integral equations. *Applied Mathematics and Computation, 185* (2007), 147–154.

[109] Rehbock, F. Zur konvergenz des Newtonschen verfahrens für gleichungssysteme. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. Akademie Verlag, 22* (1942), 361–362.

[110] Rheinboldt, W. C. A unified convergence theory for a class of iterative processes. *SIAM Journal of Numerical Analysis, 5* (1968), 42–63.

[111] Rudin, W. *Functional Analysis.* McCraw-Hill, 1974.

[112] Runge, C. Separation und approximation der wurzeln von gleichungen. *Enzyklo. d. Mathem. Wissensch., 1* (1899), 405–449.

[113] Salajan, R. A. The convergence of the Newton method for multiple roots. *Annals of Oradea University - Mathematics Fascicola, 17*, 2 (2010), 149–154.

[114] Shub, M. y Smale, S. Complexity of Bézout theorem I: Geometric aspects. *Journal of American Mathematical Society, 6* (1993), 459–501.

[115] Smale, S. The funamental theorem of algebra and complexity theory. *Bulletin of the American Mathematical Society, 4* (1981), 1–35.

[116] Tapia, R. A. The Kantorovich theorem for Newton's method. *American Mathematical Monthly, 78* (1971), 389–392.

[117] Wang, X. Some results relevant to Smale's report. *Proceedings of the Smalefest (M. V. Hirsch, J. E. Mardsen y M. Shub editors), Springer-Verlag,* (1993), 456–465.

[118] Wang, X. y Zhao, F. The theory of Smale's point estimation and its applicaions. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 60* (1995), 253–269.

[119] Willers, F. Zur konvergenz des Newtonschen näherunggsverfahrens. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. Akademie Verlag, 18* (1938), 197–200.

[120] Wojtaszczyk, P. *Banach spaces for analysis.* Cambridge University Press, 1991.

[121] Yakoubshon, J. C. Finding zeros of Analytic functions: α-theory for secant type method. *Journal of Complexity, 15* (1999), 239–281.

[122] Yakoubshon, J. C. Finding a cluster of zeros of univariate polynomials. *Journal of Complexity, 16*, 3 (2000), 603–638.

[123] Yakoubshon, J. C. Simultaneous computation of all the zero-clusters of univariate polynomial. *In: F. Cucker, M. Rojas (Eds.), Foundations of Computational Mathematics, Proceedings of the Smalefest 2000, World Scientific, Singapore,* (2002), 433–457.

[124] Yakoubshon, J. C. Numerical analysis of a bisection–exclusion method to find zeros of univariate analytic functions. *Journal of Complexity, 21*, 5 (2005), 652–690.

[125] Yamamoto, T. Error bounds for Newton's iterates derived from the Kantorovich theorem. *Numerische Mathematik, 48* (1985), 91–98.

[126] Yamamoto, T. Error bounds for Newton's process derived from the Kantorovich theorem. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 2* (1985), 258–292.

[127] Yamamoto, T. A unified derivation for several error bounds for Newton's process. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 12*, 13 (1985), 179–191.

[128] Yamamoto, T. A convergence theorem for Newton's method in Banach spaces. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 3* (1986), 37–52.

[129] Yamamoto, T. A method for finding sharp error bounds for Newton's method under the Kantorovich assumption. *Numerische Mathematik, 49* (1986), 203–220.

[130] Yamamoto, T. Convergence theorem for Newton-like methods in Banach spaces. *Numerische Mathematik, 51* (1987), 545–557.

[131] Zabrejko, P. y Nguen, D. The majorant method in the theory of Newton-Kantorovich approximations and the Pták error estimates. *Numerical Functional Analysis and Optimization JournalSeek, 9*, 5-6 (1987), 671–684.

[132] Zhang, Z. A note on weaker convergence conditions for Newton iteration. (Chinese). *Journal of Zhejiang University (Science Edition), 30*, 2 (2003), 133–135,144.

[133] Zheng, Q., Bai, R. y Liu, Z. The cubic semilocal convergence on two variants of Newton's method. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 220*, 1–2 (2008), 480–489.

De lo que aquí adelante me sucediere
avisaré a Vuestra Merced.

Tratado Sexto
Lazarillo de Tormes
Anónimo