UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

Título
Envolventes universales de álgebras de Sabinin

Autor/es
Sara Madariaga Merino
Director/es
Georgia Benkart y José María Pérez Izquierdo
Facultad
Titulación
Departamento
Matemáticas y Computación
Curso Académico
2011-2012

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Departamento de Matemáticas y Computación

Facultad de Ciencias, Estudios Agroalimentarios e Informática

TESIS DOCTORAL / PHD THESIS:

ENVOLVENTES UNIVERSALES DE ÁLGEBRAS DE SABININ

Memoria de investigación presentada por
Thesis submitted by

Sara Madariaga Merino

para la obtención del título de Doctora en Matemáticas
in fulfillment of the requirements for the PhD degree in Mathematics

---

Tesis codirigida por / Supervised by
Georgia Benkart, University of Wisconsin
José María Pérez Izquierdo, Universidad de La Rioja

Este trabajo ha sido subvencionado por:

- beca de de posgrado para la formación de profesorado universitario AP2007-01986 (Ministerio de Ciencia e Innovación)
- proyectos de investigación MTM2007-67884-C04-03 y MTM2010-18370-C04-03 (Ministerio de Ciencia y Cultura)
- ayudas a grupos de investigación EGI 11/ 57, EGI 10/ 61, EGI 09/ 56 (Universidad de La Rioja)
- ayudas para la realización de tesis doctorales ATUR09/22, ATUR10/24, ATUR11/35 (Universidad de La Rioja, subvencionadas por el Banco Santander)

La autora desea agradecer la hospitalidad de los centros en los que realizó estancias de investigación:

- Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra (septiembre-diciembre, 2009)
- Department of Mathematics and Statistics, University of Saskatchewan (septiembre-diciembre, 2011)

- Escoge la montaña que deseas subir: no te dejes llevar por los comentarios de los demás, que dicen “esa es más bonita” o “aquella es más fácil”. Vas a gastar mucha energía y entusiasmo en alcanzar tu objetivo. Tú eres el único responsable y debes estar seguro de lo que estás haciendo.
- Sabe cómo llegar frente a ella: muchas veces vemos la montaña de lejos, hermosa, interesante y llena de desafíos pero cuando intentamos acercarnos, ¿qué ocurre? Que está rodeada de carreteras, que entre tú y tu meta se interponen bosques, que lo que parece claro en el mapa es difícil en la vida real. Por ello intenta todos los caminos, todas las sendas, hasta que por fin un día te encuentres frente a la cima que pretendes alcanzar.
- Aprende de quien ya caminó por allí: por más que te consideres único, siempre habrá alguien que tuvo el mismo sueño antes que tú y dejó marcas que te pueden facilitar el recorrido: lugares donde colocar la cuerda o ramas quebradas para facilitar la marcha. La caminata es tuya y la responsabilidad también, pero no olvides que la experiencia ajena ayuda mucho.
- Los peligros, vistos de cerca, se pueden controlar: cuando empieces a subir la montaña de tus sueños, presta atención a lo que te rodea. Hay despeñaderos, claro. Hay hendiduras casi imperceptibles. Hay piedras tan pulidas por las tormentas que se vuelven resbaladizas como el hielo. Pero si sabes dónde pones el pie, te darás cuenta de los peligros y sabrás evitarlos.
- El paisaje cambia, así que aprovéchalo. Claro que hay que tener un objetivo en mente: llegar a lo alto. Pero a medida que se va subiendo se pueden ver más cosas y no cuesta nada detenerse de vez en cuando y disfrutar un poco del panorama de alrededor. A cada metro conquistado puedes ver un poco más lejos; aprovecha para descubrir cosas de las que hasta ahora no te habías dado cuenta.
- Respeta tu cuerpo: solo consigue subir una montaña aquel que presta a su cuerpo la atención que merece. Tú tienes todo el tiempo que te da la vida, así que, al caminar, no

te exijas más de lo que puedas dar. Si vas demasiado deprisa, te cansarás y abandonarás a la mitad. Si lo haces demasiado despacio, caerá la noche y estarás perdido. Aprovecha el paisaje, disfruta del agua fresca de los manantiales y de los frutos que la naturaleza generosamente te ofrece, pero sigue caminando.
- Respeta tu alma: no te repitas todo el rato "voy a conseguirlo". Tu alma ya lo sabe. Lo que ella necesita es usar la larga caminata para poder crecer, extenderse por el horizonte, alcanzar el cielo. De nada sirve una obsesión para la búsqueda de un objetivo, y además termina por echar a perder la escalada. Pero atención, tampoco te repitas "es más difícil de lo que pensaba", pues eso te hará perder la fuerza interior.
- Prepárate para caminar un kilómetro más: el recorrido hasta la cima de la montaña es siempre mayor de lo que pensabas. No te engañes, ha de llegar el momento en que aquello que parecía cercano está aún muy lejos. Pero como estás dispuesto a llegar hasta allí, eso no ha de ser un problema.
- Alégrate cuando llegues a la cumbre: llora, bate palmas, grita a los cuatro vientos que lo has conseguido, deja que el viento allá en lo alto (porque allá en la cima siempre hace viento) purifique tu mente, refresca tus pies sudados y cansados, abre los ojos, limpia el polvo de tu corazón. Piensa que lo que antes era apenas un sueño, una visión lejana, es ahora parte de tu vida. Lo conseguiste.
- Haz una promesa: aprovecha que has descubierto una fuerza que ni siquiera conocías y dite a ti mismo que a partir de ahora y durante el resto de tus días la vas utilizar. Y, si es posible, promete también descubrir otra montaña y parte en una nueva aventura.
- Cuenta tu historia: sí, cuenta tu historia. Ofrece tu ejemplo. Di a todos que es posible y así otras personas sentirán el valor para enfrentarse a sus propias montañas.

(PAULO COELHO: Manual para subir montañas)

Gracias a todos los que habéis hecho conmigo esta tesis:
quienes me disteis las piernas y me enseñasteis a andar,
mi inestimable guía infalible y mi gran equipo técnico y de apoyo logístico,
quienes alguna vez habéis compartido mi camino;
quienes me habéis esperado al final de cada día con los brazos abiertos,
la cena en la mesa, un buen vino y mejor conversación;
quienes habéis sabido enseñarme a parar de vez en cuando a disfrutar del paisaje,
habéis compartido la carga de mi mochila, curado mis ampollas, refrescado mi frente,
enjugado mis lágrimas, cogido de la mano y animado a seguir hasta el final.
Con todos vosotros no dudaría en calzarme las botas de nuevo.
Para todos vostros, el resultado de este trabajo.

Índice general

Introducción / Introduction

0.1. Introducción

Un grupo de Lie es una variedad diferenciable real o compleja que es también un grupo tal que las operaciones de multiplicación e inversión son funciones analíticas. Un álgebra de Lie es un espacio vectorial con una operación binaria bilineal antisimétrica que verifica la llamada identidad de Jacobi. Así como un grupo de Lie puede ser interpretado como un grupo de transformaciones sobre una variedad diferenciable, un álgebra de Lie puede concebirse como un conjunto de transformaciones infinitesimales.

La teoría de Lie (grupos de Lie, álgebras de Lie y sus aplicaciones) es una parte fundamental de las matemáticas. Desde la Segunda Guerra Mundial ha sido objeto de crecientes esfuerzos de investigación y se ha probado que está en contacto con un enorme abanico de ramas de las matemáticas, incluyendo áreas tan diversas como la geometrías clásica, diferencial y algebraica, la topología, la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, el análisis complejo (tanto en una como en varias variables), la teoría de grupos y de anillos, la teoría de números e incluso la física, desde la clásica hasta la cuántica y la relativista.

Es imposible listar el alcance completo de la teoría de Lie, pero citamos a continuación algunos ejemplos significativos. Uno de los logros más tempranos de la teoría de Lie, en el siglo XIX, fue proporcionar una comprensión sistemática de la relación entre la geometría euclídea y las geometrías más nuevas: hiperbólica o lovachevskiana, elíptica o riemaniana y proyectiva. Esto condujo a Felix Klein a enunciar su famoso programa de Erlangen [Kle93]. El principio del programa de Klein fue que la geomtría debía ser entendida como el estudio de invariantes a izquierda por la acción de un grupo en un espacio. Otro desarrollo en el que Klein se vio involucrado fue el teorema de la uniformización para superficies riemanianas [Ber58]. Este teorema puede enunciarse diciendo que toda 2-variedad conexa es un doble espacio de coclases del grupo de isometría de una de las tres geometrías 2-dimensionales estándar (euclídea, hiperbólica o elíptica). Las 3-variedades son mucho más complejas que las 2-variedades, pero el interesante artículo de Thurston [Thu80] dio un paso importante hacia la demostración de que gran parte de su estructura puede ser explicada de manera análoga al caso 2-dimensional en términos de espacios de coclases de ciertos grupos de Lie.

Contemporáneo con el teorema de uniformización fue el descubrimiento de la teoría de relatividad especial de Einstein [Ein05] y su restablecimiento de la transformación de Lorentz como un especto básico de la cinemática del espacio-tiempo. El tratamiento intuitivo de la relatividad especial dado por Einstein fue seguido poco después por un tratamiento más sofisticado dado por Minkowski [Min10], que probó que las transformaciones de Lorentz constituyen un grupo de Lie: el grupo de isometría de cierta métrica pseudo-riemaniana en $\mathbb{R}^4$. Del mismo modo, poco después de que Heisenberg [Hei25] introdujera sus famosas relaciones de conmutación en mecánica cuántica, que subyacen en el principio de incertidumbre, Weyl [Wey77] probó que podían ser interpretadas como las relaciones de estructura del álgebra de Lie de un cierto grupo de Lie nilpotente de índice de nilpotencia 2. A medida que la teoría de grupos se demostraba cada vez más fundamental en la física, algunos físicos abogaban por extender el programa de Erlangen de Klein a la física. De hecho, hoy en día, los principios de simetría basados en la teoría de Lie son una herramienta estándar en la física teórica. En particular, la teoría de quarks es en esencia una construcción de teoría de grupos de Lie.

Las aplicaciones de la teoría de Lie son asombrosas por su capacidad de penetración y sus resultados muchas veces inesperados. El trabajo de Proctor [Pro82] presenta aplicaciones a la combinatoria e ilustra la necesidad de extender el estudio de la teoría de Lie, ya que la considera poco conocida en comparación con su importancia, especialmente debido a la unificación de técnicas y puntos de vista en todas las áreas con que se relaciona.

El fenómeno esencial de la teoría de Lie es que asocia de manera natural a un grupo de Lie G un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$: el espacio tangente al grupo en el elemento neutro. Esta álgebra es un espacio vectorial con una operación bilineal llamada corchete de Lie que contiene toda la información local acerca del grupo. Sorprendentemente, el grupo G está determinado (salvo isomorfismo) por el álgebra de Lie y su corchete de Lie. Por tanto, el grupo de Lie puede ser sustituido en muchas situaciones por su álgebra de Lie. Debido a que G es un objeto no lineal (y, por tanto, complicado de estudiar) y $\mathfrak{g}$ es simplemente un espacio vectorial, habitualmente resulta muchísimo más sencillo trabajar con $\mathfrak{g}$. Cálculos que serían intratables se convierten en pura álgebra lineal. Este estudio se recoge fundamentalmente en los trabajos [Lie74, Lie80]. Entre los resultados más destacados se encuentran los conocidos como teoremas de Lie (reformulados en su versión más moderna):

- El primer teorema de Lie afirma que dado un grupo de Lie G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ existe (salvo isomorfismo) un único grupo de Lie $\tilde{G}$ conexo y simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

- El segundo teorema de Lie establece que dados G y H grupos de Lie, G 1-conexo, con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente y un homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, existe un único homomorfismo de grupos de Lie $\phi' : G \to H$ tal que el homomorfismo de álgebras de Lie que induce entre los espacios tangentes es exactamente ϕ.

- El tercer teorema de Lie asegura que dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ existe un grupo de Lie G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Resultados relacionados son la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff, que da una expresión del producto del grupo en términos de series de potencias de corchetes de Lie iterados. Curiosamente, este resultado se debe a F. Schur, quien en [Sch91] dio una fórmula para la ley de composición de un grupo de Lie en términos de coordenadas canónicas, es decir, en términos de las coordenadas lineales del álgebra de Lie.

Otra forma de probar este último resultado involucra una construcción de gran importancia para la teoría: el álgebra envolvente universal de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, un álgebra de Hopf asociativa que contiene al álgebra de Lie como conjunto de elementos primitivos y verifica unas ciertas propiedades que la asimilan al álgebra de polinomios sobre $\mathfrak{g}$ gracias al conocido teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt. Los homomorfismos entre álgebras de Lie se pueden extender a sus respectivas envolventes universales, convirtiéndose así en una herramienta básica en el estudio de representaciones de álgebras de Lie. El álgebra envolvente universal de un álgebra de Lie puede interpretarse como el álgebra de Hopf de distribuciones con soporte en el elemento identidad del grupo de Lie asociado, de manera que las relaciones entre grupos de Lie, álgebras de Lie y álgebras de Hopf pueden expresarse a través del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & D_e(G) = U(Lie(G)) \\ G \arrow[ur] \arrow[r] & T_e(G) = Lie(G) \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{0.1.1}$$

El desarrollo posterior de la geometría ha permitido descubrir importantes relaciones entre ciertas estructuras algebraicas no asociativas que generalizan los grupos y las álgebras de Lie y la geometría diferencial. Puede entenderse que la no asociatividad es el equivalente algebraico del concepto geométrico de curvatura. Dichas estructuras, como los lazos y los cuasigrupos se obtienen de objetos puramente geométricos como son los espacios afines conexos. Podría decirse que un lazo es un grupo en el que no se asume asociatividad y no posee necesariamente inversos, aunque las operaciones de multiplicación por elementos del lazo son biyectivas, y que un cuasigrupo es un lazo sin elemento identidad.

Para cualquier espacio con una conexión afín, se introducen las llamadas estructuras lupusculares, odulares y geodulares (unas ciertas álgebras parciales suaves). Como sucedía en la teoría de Lie, la estructura geodular natural de un espacio afín conexo permite reconstruir de manera única el espacio original. Más aún: cualquier estructura geodular suave dada de manera abstracta genera de manera única un espacio afín conexo cuya estructura geodular natural es isomorfa a la primera. Esto significa que cualquier espacio afín conexo puede ser estudiado como una estructura puramente algebraica con suavidad. Las propiedades geométricas habituales se pueden expresar en lenguaje algebraico a través de identidades algebraicas.

Todo esto da inicio a nuevas ramas de las matemáticas: geometría odular y lupuscular y álgebra geométrica no lineal. Estas nuevas teorías se pueden aplicar a numerosas disciplinas tanto dentro de las matemáticas (geometría, álgebra, ...) como fuera de ellas (física teórica, mecánica cuántica, teoría de deslocalización, relatividad general y especial, ...).

El concepto de lazo local suave apareció por primera vez en el trabajo de Malcev

[Mal55] en relación con la generalización de la teoría de grupos de Lie, pero sin referencias a la geometría diferencial. De hecho, durante un largo periodo de tiempo el papel que los lazos y los cuasigrupos jugaban en geometría diferencial se vio restringido únicamente a la teoría de redes [Bla55]. La situación cambió cuando Loos [Loo69] probó que los espacios simétricos pueden ser considerados como grupoides suaves. Este hecho inició el estudio de la geometría diferencial de diferentes tipos de cuasigrupos. Ledger [Led67] sugirió el siguiente paso crucial introduciendo la noción de s-espacios y s-estructuras, que admiten, como se demostraría más tarde, una interpretación en el lenguaje de cuasigrupos. Independientemente, Fedenko [Fed73, Fed77] y Kowalski [Kow74] introdujeron la conexión afín reductiva natural en una amplia clase de s-estructuras (globales) suaves. De hecho, algunos elementos de esta construcción se relacionan con la conexión en A-lazos [Bru58]. La geometría de los A-lazos y los lazos simétricos fue desarrollada en los trabajos de Sabinin [Sab72b, Sab72a], Karanda [Kar72] y Kikkawa [Kik75a, Kik75b] en relación con la teoría de espacios homogéneos simétricos y reductivos. En este punto destaca la enorme analogía con la teoría de grupos de Lie: en lugar de un álgebra de Lie, en este caso aparece un álgebra tangente con producto triple [Yam58a, Yam58b].

En todos los casos anteriores, la geometría que está conectada con cuasigrupos y lazos es la geometría de un espacio reductivo homogéneo con una conexión afín. Naturalmente surge la pregunta acerca de la relación entre lazos arbitrarios y espacios homogéneos. Parace ser que los lazos a izquierda y los espacios homogéneos a izquierda definen esencialmente la misma estructura, es decir, especificando los detalles necesarios se trata de categorías equivalentes. Esto fue clarificado en los trabajos de Sabinin [Sab72b, Sab72a] donde se introduce la importante construcción del producto semidirecto de un lazo por su transasociante.

Volviendo a una conexión afín arbitraria, en un entorno de cada punto se puede definir de manera única el lazo local geodésico, dado por la conexión a través de un transporte parelelo a lo largo de geodésicas. Esta construcción fue obtenida independientemente por Kikkawa [Kik64] y Sabinin [Sab77]. La familia de lazos locales construida de esta manera define unívocamente un espacio con conexión afín, aunque no toda familia de lazos locales en una variedad define una conexión afín: existen relaciones entre los lazos asociados a los diferentes puntos. Estas relaciones son imposibles de expresar de manera algebraica únicamente en términos de lazos: hay que tener en cuenta que en un entorno de un punto en una variedad con conexión afín la estructura de lazo local admite otra operación adicional y una estructura de espacio vectorial inducida desde el espacio tangente en el punto por la aplicación exponencial. En este contexto sí se pueden expresar las relaciones mencionadas por medio de identidades algebraicas. Por tanto, en los entornos de los puntos de espacios conexos afines aparecen ódulos y diódulos unívocamente generados por la conexión afín en lugar de lazos [Sab77].

Es bastante notable que exitiera una barrera ideológica entre el programa de Erlangen de Klein (métodos de teoría de grupos en geometría) y el programa de Riemann-Levi-Civita-Weyl (geometría de conexiones afines). Los intentos de Cartan y otros matemáticos de tratar los espacios conexos afines en el marco de la teoría de grupos (como G-estructuras) no son concluyentes. El uso del álgebra no asociativa, especialmente los cuasigrupos, nos permite un punto de vista unificado acerca de estos dos programas. Al hilo de esto, merece la pena destacar una llamativa cita de Lobachevsky [Lob29]: "Sin embargo, uno puede prever que los cambios en la mecánica generados por los nuevos principios de la geometría serán del mismo tipo que los que demostró Laplace asumiendo la posibilidad de dependencia de la velocidad en alguna fuerza o, más precisamente, asumiendo que las fuerzas, siempre medidas a través de velocidades, están sujetas a otra ley de composición que la aceptada suma de ellas". Esta otra ley de composición es simplemente la omisión de la asociatividad y la conmutatividad en la composición de vectores, que desemboca en el concepto de lazo, por lo que podría decirse que Lobachevsky intuyó el papel fundamental que el álgebra no asociativa (que no existía en su tiempo) tendría en la geometría.

Todas estas estructuras tienen un valor algebraico intrínseco: si se ignora la suavidad y se consideran las operaciones definidas globalmente, es posible introducir una conexión afín en cuerpos arbitrarios, anillos de división e incluso anillos o espacios más generales, acercándose al álgebra geométrica (planos afines y proyectivos) en una variante no lineal.

En este contexto surge la teoría infinitesimal de lazos locales analíticos, el análogo de la teoría de grupos de Lie y álgebras de Lie. En el trabajo de Malcev [Mal55] se estudian los lazos analíticos locales disociativos (en los que cualesquiera dos elementos generan un grupo), para los que se puede construir un análogo de la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff que depende únicamente del producto bilineal en el espacio tangente en el elemento identidad. Por tanto, localmente, un lazo disociativo puede ser recuperado desde su álgebra tangente, que resulta ser un álgebra de Lie binaria (cualesquiera dos elementos generan un álgebra de Lie), generalizando así lo que se conocía para grupos de Lie y álgebras de Lie. Posteriormente, Gainov [Gaĭ57] describió las álgebras binarias de Lie mediante un conjunto de identidades. En el mismo trabajo de Malcev se consideran también los lazos de Moufang suaves que, al ser disociativos, pueden ser descritos infinitesimalmente por un álgebra antisimétrica con ciertas identidades, que Malcev llamó álgebras de Moufang-Lie y ahora se conocen como álgebras de Malcev. Kuzmin [Kuz70] probó que un álgebra de Malcev define unívocamente un lazo de Moufang suave, dando un paso más en la generalización de la teoría de Lie. Grishkov [Gri86] probó que toda álgebra de Lie binaria sobre $\mathbb{R}$ es un álgebra de Malcev, completando el estudio para estas estructuras. Pérez-Izquierdo y Shestakov [PIS04] dieron una construcción del álgebra envolvente universal para un álgebra de Malcev, además de probar que posee una base de tipo Poincaré-Birkhoff-Witt, generalizando completamente el diagrama conmutativo 0.1.1 al contexto de lazos de Moufang y álgebras de Malcev. En este caso la envolvente universal es una biálgebra que verifica una cierta identidad similar a la identidad de Moufang. Es interesante remarcar que en el caso en que el álgebra de Malcev sea un álgebra de Lie, la envolvente universal como álgebra de Malcev coincide con la envolvente universal como álgebra de Lie.

Malcev y Kikkawa exploraron diversas clases de lazos cercanos a los grupos de Lie entre los que se encuentran los lazos de Lie homogéneos (también conocidos como A-lazos), cuyos objetos infinitesimales asociados son las álgebras de Lie triples. Especial mención merecen los provenientes de espacios simétricos: los lazos de Bol, cuyos objetos infinitesimales asociados, las álgebras de Bol, poseen dos operaciones: una binaria y otra ternaria, ambas necesarias para recuperar el lazo de Bol de manera unívoca [SM82]. Pérez-Izquierdo [PI05] dio la construcción de la envolvente universal para las álgebras de Bol, probando que en este caso también existe una base de tipo Poincaré-Birkhoff-Witt para la envolvente.

Akivis trató de generalizar esta situación definiendo el concepto de álgebra local, más tarde denominada álgebra de Akivis [AG06a], en su estudio de 3-redes multidimensionales y sus cuasigrupos coordenados locales. Esta estructura posee dos operaciones: una binaria y otra ternaria relacionadas por la identidad de Akivis. Shestakov [She99] probó que toda álgebra de Akivis puede ser incrustada en el álgebra de conmutadores y asociadores de una cierta álgebra no asociativa. Hofmann y Strambach [HS86] consideraron la correspondencia entre lazos analíticos reales y sus correspondientes álgebras de Akivis locales, llegando a la conclusión de que, en general, un álgebra de Akivis no define unívocamente un lazo analítico, es decir, no puede establecerse un análogo al tercer teorema de Lie (puede hacerse en los casos particulares en que el álgebra de Akivis sea de Lie, Malcev o Bol). Basándose en estudios analíticos y desarrollos de Taylor, Akivis [AG06a] define el álgebra local prolongada de orden s asociada un cuasigrupo. En esta álgebra se definen más operaciones, de hasta aridad s, y se prueba que si una cierta G-estructura asociada con el cuasigrupo es cerrada (esto es, está completamente definida por un conjunto finito de constantes estructurales), entonces existe un álgebra local prolongada que satisface el tercer teorema de Lie para ese cuasigrupo.

La generalización definitiva de las estructuras infinitesimales asociadas con lazos suaves la dieron Mikheev y Sabinin con lo que definieron como hiperálgebras [SM87] y que ahora se conocen como álgebras de Sabinin. Estas álgebras se obtienen mediante una construcción de geometría diferencial y definen la estructura del álgebra tangente a un lazo local analítico en el elemento identidad. Además satisfacen los análogos de los tres teoremas de Lie, por lo que definen unívocamente los lazos locales analiticos. Estas álgebras tienen dos familias infinitas de operaciones que verifican un conjunto numerable de identidades consecuencia de las condiciones de integrabilidad del sistema de ecuaciones diferenciales que las define. Shestakov y Umirbaev [SU02] estudiaron las álgebras de Sabinin desde un punto de vista más algebraico, probando que el espacio de elementos primitivos en una biálgebra no asociativa tiene estructura de álgebra de Sabinin. Finalmente, Pérez-Izquierdo [PI07] probó que toda álgebra de Sabinin aparece de esta manera, es decir, para cada álgebra de Sabinin existe una H-biálgebra no asociativa (su envolvente universal) tal que su conjunto de elementos primitivos es precisamente el álgebra de Sabinin dada. También demuestra que la envolvente universal satisface el análogo del teorema de Poicaré-Birkhoff-Witt y que en los casos particulares en que el álgebra de Sabinin es de Lie, Malcev o Bol, la envolvente universal como álgebra de Sabinin coincide con la envolvente universal como álgebra de Malcev, Lie o Bol. En este trabajo también se prueba que las identidades que definen una clase de cuasigrupos se pueden linealizar para dar lugar a identidades en H-biálgebras. En particular, demuestra que las linealizaciones de las identidades que definen los lazos de Moufang y de Bol se verifican en las envolventes universales de las correspondientes álgebras tangentes.

En [MPI10], Mostovoy y Pérez-Izquierdo describen la teoría de Lie no asociativa relacionando los lazos formales, las álgebras de Sabinin y las biálgebras no asociativas en términos de equivalencias de categorías. Partiendo de un lazo formal construyen la biálgebra de distribuciones con el producto de convolución y prueban que la categoría de lazos formales es equivalente a la categoría de biálgebras coconmutativas y coasociativas irreducibles. Después consideran el álgebra de Sabinin de los elementos primitivos y demuestran que la categoría de álgebras de Sabinin es equivalente a la categoría de biálgebras coconmutativas y coasociativas irreducibles. También muestran cómo las identidades que definen cada clase de lazos se traducen (a través del proceso de linealización) en identidades en la biálgebra de distribuciones.

Otra herramienta clásica para la comprensión de estructuras algebraicas complejas es la teoría de representación. Esta rama de las matemáticas pretende estudiar objetos algebraicos abstractos representando sus elementos por transformaciones lineales de espacios vectoriales y sus operaciones en términos de la suma y el producto de matrices. Los objetos más representados históricamente han sido los grupos, las álgebras asociativas y las álgebras de Lie. La teoría de representación es una herramienta muy potente, ya que reduce problemas de álgebra abstracta a problemas en álgebra lineal, un área muy bien conocida y ampliamente estudiada. Además, el espacio vectorial en en que se representa puede ser de dimensión infinita, por lo que si consideramos por ejemplo un espacio de Hilbert, podremos aplicar técnicas de análisis a la teoría de grupos. La teoría de representación es también muy importante en física: describe, por ejemplo, cómo el grupo de simetrías de un sistema físico afecta a las soluciones de las ecuaciones que describen ese sistema. Otra característica importante de la teoría de representación es su capacidad de penetración en las matemáticas, ya sea por sus numerosas aplicaciones (generaliza el análisis de Fourier vía análisis armónico, está estrechamente ligado a la geometría a través de la teoría de invariantes y el programa de Erlangen, tiene un profundo impacto en la teoría de números vía formas automórficas y el programa de Langlands, etc.) o por la diversidad de aproximaciones a ella: los mismos objetos pueden ser estudiados usando métodos de geometría algebraica, teoría de módulos, teoría de números analítica, geometría diferencial, teoría de operadores y topología entre otras áreas. El éxito de la teoría de representación ha llevado a numerosas generalizaciones. Una de las más generales es la categórica: los objetos algebraicos a los que la teoría de representación se aplica pueden ser vistos como un tipo particular de categorías y las representaciones como functores de la categoría de objetos a la categoría de espacios vectoriales. Esta descripción apunta a dos tipos de generalización: primero, los objetos algebraicos pueden ser sustituidos por categorías más generales y, segundo, la categoría de espacios vectoriales puede ser reemplazada por otras categorías más convenientes.

La teoría de representación en el caso de álgebras y grupos de Lie ha sido ampliamente estudiada: la teoría clásica [FH91, Hum78] (álgebras de Lie semisimples sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero), sobre cuerpos de característica prima [FP87, FP88], ... En el caso de álgebras de Malcev, las referencias son más escasas: esencialmente los trabajos de Carlsson [Car76] y Elduque [Eld90]. Para lazos de Moufang exiten varias aproximaciones: la dada por Loginov [Log93], generalizando la idea de extensiones escindidas de grupos por módulos, y la introducida por Dharwadker y Smith [DS95] basada en una teoría más general de representaciones de cuasigrupos introducida por el propio Smith [Smi86] en la que usa técnicas de teoría de categorías.

La presente tesis se estructura de la siguiente manera:

- En la primera parte se agrupan todos los resultados que tienen que ver con la estructura de las álgebras de Sabinin y sus envolventes universales. En el capítulo 1 se estudia la envolvente universal de las álgebras de Malcev (que es un álgebra de Moufang-Hopf) y se da una construcción diferente a la previamente existente a través de la generalización de los resultados de Glauberman, Doro, Grishkov y Zavarnitsine acerca de grupos y álgebras de Lie con trialdad al contexto de álgebras de Hopf. En el capítulo 2 se estudia la rigidez de las envolventes universales de la familia de álgebras de Malcev simples $M(\alpha, \beta, \gamma)$. En particular se prueba que toda deformación coasociativa de dichas envolventes es coconmutativa y que toda deformación coasociativa que verifica la identidad de Moufang-Hopf es trivial. En el capítulo 3 se estudia la clase de álgebras de Sabinin correspondiente a las álgebras tangentes a lazos monoasociativos como generalización de las álgebras de Lie, Malcev y Bol y se busca un conjunto de identidades polinomiales que la defina. Se prueba que es necesario introducir una operación cuaternaria adicional y se encuentra un subconjunto de dichas identidades.

- En la segunda parte se presentan los resultados relacionados con la teoría de representación de las álgebras de Sabinin. En el capítulo 4 se introduce una teoría general, en términos categóricos, de representación para biálgebras utilizando la teoría de módulos para cuasigrupos y las equivalencias entre las categorías de lazos formales y álgebras de Sabinin. En el capítulo 5 se estudia el caso particular de los lazos de Moufang y las álgebras de Malcev y se generaliza la noción de representación preexistente, obteniéndose así nuevos ejemplos de módulos. En el capítulo 6 se da una fórmula de tipo Weyl para la dimensión de los módulos para sistemas triples de Lie simples y se clasifican los módulos de dimensión 1 para dichos sistemas.
- En el anexo se presenta un trabajo realizado durante el periodo de desarrollo de la tesis que tiene que ver con la estructura de otra clase de álgebras no asociativas: las álgebras de Leibniz. Se extiende a característica arbitraria el resultado de Pojidaev que afirma que para $n \geq 3$ no existen álgebras de Leibniz n-arias conmutativas simples.

Los resultados que aparecen en los diferentes capítulos han sido recopilados en diversos artículos de investigación y enviados para su publicación a diferentes revistas científicas de difusión internacional. Los artículos correspondientes al anexo A y el capítulo 2 han sido publicados en la revista “Communications in Algebra” en 2010 y 2012 respectivamente; el artículo proveniente del capítulo 6 ha sido publicada en la revista “Journal of Algebra” en 2012. Los trabajos que resultantes de los capítulos 1 y 3 han sido aceptados para su publicación en las revistas “Transactions of the American Mathematical Society” y “Communications in Algebra” respectivamente.

0.2. Introduction

A Lie group is a real or complex differentiable manifold that is also a group such that the multiplication and the inversion are analytic functions. A Lie algebra is a vector space endowed with an antisymmetric bilinear product that verifies the so called Jacobi identity. As well as a Lie group can be interpreted as the group of transformations of a differentiable manifold, a Lie algebra can be thought as a set of infinitesimal transformations.

Lie theory (Lie groups, Lie algebras and their applications) is a fundamental part of mathematics. Since World War II it has been the focus of burgeoning research efforts and has been seen to touch a tremendous spectrum of mathematical areas, including classical, differential and algebraic geometry, topology, ordinary and partial differential equations, complex analysis (in one or several variables), group and ring theory, number theory and physics, from classical to quantum and relativistic.

It is impossible to list the full compass of Lie theory, but we will cite some significant examples. An early major success of Lie theory was to provide a systematic understanding of the relationship between Euclidean geometry and newer geometries: hyperbolic non-Euclidean or Lobachevskian, Riemann's elliptic geometry and projective geometry that had arisen in the 19th century. This led Felix Klein to enunciate his Erlanger program [Kle93]. The principle of Klein's program was that geometry should be understood as the study of invariants left by the action of a group on a space. Another development in which Klein was involved was the Uniformization Theorem for Riemann surfaces [Ber58]. This theorem can be stated by saying that every connected 2-manifold is a double coset space of the isometry group of one of the three (Euclidean, hyperbolic, elliptic) standard 2-dimensional geometries. Three-manifolds are much more complex than two-manifolds, but the intriguing work of Thurston [Thu80] was a crucial step towards showing that much of their structure can be understood in a way analogous to the 2-dimensional case in terms of coset spaces of certain Lie groups.

Contemporary with the Uniformization Theorem was Einstein's discovery of the special theory of relativity [Ein05] and his establishment of the Lorentz transformation as a basic feature of the kinematics of space-time. Einstein's intuitive treatment of relativity was followed shortly by a more sophisticated treatment by Minkowski [Min10] in which Lorentz transformations were shown to constitute a certain Lie group: the isometry group of an indefinite pseudo-Riemannian metric on $\mathbb{R}^4$. Similarly, after Heisenberg [Hei25] introduced his famous Commutation Relations in quantum mechanics, which underlie his Uncertainty Principle, Hermann Weyl [Wey77] showed that they could be interpreted as the structure relations for the Lie algebra of a certain two-step nilpotent Lie group. As the group-theoretical undernippings of physics became better appreciated, some physicists advocated extending Klein's Erlanger program to physics. Today, indeed, symmetry principles based on Lie theory are a standard tool in theoretical physics. Quark theory, in particular, is primarily a Lie group-theoretical construction.

The applications of Lie theory are astonishing in their pervarsiveness and sometimes in their unexpectedness. The paper by Proctor [Pro82] discusses an application to combinatorics and illustrates the need to broaden the understanding of Lie theory, poorly known in comparison to its importance, especially due to the unity of methods and viewpoints in the many subjects to which it relates.

The essential phenomenon of Lie theory is that one can associate in a natural way to a Lie group G its Lie algebra $\mathfrak{g}$: the tangent space to G at the identity element. This algebra is a vector space endowed with a bilinear product called Lie bracket that contains all the local information about the group. Amazingly, the Lie group G is completely determined (up to isomorphism) by its Lie algebra and the Lie bracket. Thus for many purposes one can replace G by $\mathfrak{g}$. Since G is a complicated nonlinear object and $\mathfrak{g}$ is merely a vector space, it is usually vastly simpler to work with $\mathfrak{g}$. Otherwise intractable computations become straightforward linear algebra. This study appears in the works by Lie [Lie74, Lie80]. Among the most remarkable results we find the well-known Lie's theorems (reformulated here in their modern versions):

- Lie's first theorem asserts that given a Lie groups G with Lie algebra $\mathfrak{g}$ there exists (up to isomorphism) a unique connected and simply connected Lie group $\tilde{G}$ whose Lie algebra is exactly $\mathfrak{g}$.

- Lie's second theorem affirms that given two Lie groups G and H, G being 1-connected, with respective Lie algebras $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{h}$ and a homomorphism of Lie algebras $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, there exists a unique homomorphism of Lie groups $\phi' : G \to H$ such that the induced homomorphism of Lie algebras on the tangent spaces is exactly ϕ.

- Lie's third theorem asseverates that given a Lie algebra $\mathfrak{g}$ there exists a Lie group G with Lie algebra $\mathfrak{g}$.

A related result is the Campbell-Baker-Hausdorff formula, that gives an expression for the Lie group product in terms of a power series of iterated Lie brackets of its associated Lie algebra. Surprisingly, this result is due to F. Schur, who gave a formula for the composition law of a Lie group in terms of canonical coordinates, that is, in terms of linear coordinates of the Lie algebra [Sch91].

Another different way of proving this latter result involves a very important construction for this theory: the universal enveloping algebra of a Lie algebra $\mathfrak{g}$. This is an associative Hopf algebra that contains the Lie algebra as the set of primitive elements and verifies cartain properties that make it similar to the polynomial algebra over $\mathfrak{g}$ thanks to the well-known Poincaré-Birkhoff-Witt theorem. Homomorphisms of Lie algebras can be extended to their universal enveloping algebras, turning them into a basic tool to study representations of Lie algebras. The universal enveloping algebra of a Lie algebra can also be seen as the Hopf algebra of distributions with support in the identity element of the associated Lie group. The relations between Lie groups, Lie algebras and Hopf algebras can be expressed by means of the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd} & D_e(G) = U(Lie(G)) \\ G \arrow[ur] \arrow[r] & T_e(G) = Lie(G) \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{0.2.1}$$

The later development of geometry allowed the discovery of important relations between certain nonassociative algebraic structures that generalize Lie groups and Lie algebras and differential geometry. One can understand that nonassociativity is the algebraic equivalent to the geometric notion of curvature. Such structures, as loops and quasigroups, are obtained from purely geometric objects such as connected affine spaces. We can say that a loop is a group in which associativity is not assumed and that does not necessarily have inverses, although multiplications by elements of the loop are bijective and a quasigroup is a loop without identity element.

For any space with an affine connection, loopuscular, odular and geodular structures (a kind of smooth partial algebras) were introduced. As it happened in Lie theory, the natural geodular structure of a connected affine space allows us to reconstruct uniquely (up to isomorphism) the original space. Moreover: any given abstract smooth geodular structure uniquely generates a connected affine space whose natural geodular structure is isomorphic to it. This means that any connected affine space can be studied as a purely algebraic structure with smoothness. Usual geometrical properties can be expressed in an algebraic language by means of algebraic identities.

All this initiated new research lines in mathematics: odular and loopuscular geometry and nonlinear geometric algebra. These new theories can be applied to many areas both in mathematics (geometry, algebra, ...) and out of them (theoretical physics, quantum mechanics, dislocation theory, general and special relativity ...)

The notion of smooth local loop appeared for the first time in Malcev's work [Mal55] in relation with the generalization of the theory of Lie groups but without any references to differential geometry. Indeed, during a long time, the role that loops and quasigroups played in differential geometry was restricted to web theory [Bla55]. This situation changed when Loos [Loo69] showed that symmetric spaces could be considered as smooth groupoids. This fact initiated the study of differential geometry of different kinds of quasigroups. Ledger [Led67] suggested the following crucial step by introducting the notion of s-spaces and s-structures that admit, as shown later, an interpretation in the language of quasigroups. Independently, Fedenko [Fed73, Fed77] and Kowalski [Kow74] introduced the natural reductive affine connection in a wide class of (global) smooth s-structures. Indeed, some elements of this construction are related to connections on A-loops [Bru58]. The geometry of A-loops and symmetric loops was developed in the works by Sabinin [Sab72b, Sab72a], Karanda [Kar72] y Kikkawa [Kik75a, Kik75b] in relation to the theory of reductive and symmetric homogeneous spaces. At this point, it stands out the tremendous analogy with the theory of Lie groups: instead of a Lie algebra, a tangent algebra with triple product appeared [Yam58a, Yam58b].

In all the previous cases, the geometry that is related to quasigroups and loops is the geometry of an homogeneous reductive space with an affine connection. Naturaly it comes up the question about the relation between arbitrary loops and homogeneous spaces. It appears that left loops and left homogeneous spaces define essentially the same structure: especifying the necessary details, they are equivalent categories. This was clarified in the works by Sabinin [Sab72b, Sab72a], where he introduced the important construction of a semidirect product of a loop by its transassociant.

Getting back to an arbitrary affine connection, in a neighbourhood of each point one can define uniquely the local geodesic loop given by the connection through a parallel transport along geodesics. This construction was obtained independently by Kikkawa [Kik64] and Sabinin [Sab77]. The family of local loops constructed this way uniquely defines an space with affine connection, although not every family of local loops in a variety defines an affine connection: there exist some relations between the local loops associated to different points. These relations are impossible to express algebraically only in terms of loops: one has to consider that in a neighbourhood of a point in a variety with affine connection, the local loop struture admits an additional operation and a vector space structure induced from the tangent space at the point by the exponential map. In this context we can express the relations mentioned above by means of algebraic identities. Thus in the neighbourhoods of the points of connected affine spaces instead of loops there appear odules and diodules uniquely generated by the affine connection [Sab77].

It is very remarkable the existence of an ideological barrier between Klein's Erlangen program (group-theoretical methods in geometry) and the program by Riemann-Levi-Civita-Weyl (geometry of affine connections). The attempts of Cartan and other mathematicians to deal with connected affine spaces in the framework of group theory (as G-structures) were not conclusive. The use of nonassociative algebra, especially quasigroups, allows us a unified point of view of both programs. In line with this, it is worthwhile to remark a striking assertion by Lobachevsky [Lob29]: "However, one could foresee that the changes in mechanics generated by the new principles of geometry will be of the same kind as Laplace demonstrates assuming the possibility of any dependence of a velocity on a force or, more precisely speaking, assuming forces, always measured by velocities, being submitted to another law of composition than the accepted addition". This other law of composition is simply the omission of associativity and commutativity in vector's usual composition, leading to the concept of loop. As if Lobachevsky foresaw the fundamental role of nonassociative algebra (which did not exist at that time) in geometry!

All these structures have an intrinsic algebraic value. If we ignore the smoothness and regard the operations as defined everywhere then it is possible to introduce an affine connection to arbitrary fields, division rings and even rings or more general spaces, approaching geometrical algebra (projective and affine planes) in a nonlinear version.

In this context it emerged the infinitesimal theory of local analytic loops, the analogue of the theory of Lie groups and Lie algebras. In the paper by Malcev [Mal55] dissociative local analytic loops (in which any two elements generate a group) are studied. For these loops one can construct an analogue to the Campbell-Baker-Hausdorff formula depending only on the bilinear product of the tangent space to the loop at the identity element. Thus, locally, a dissociative loop can be recovered from its tangent algebra, that appears to be a binary Lie algebra (in which any two elements generate a Lie subalgebra), generalizing what was known for Lie groups and Lie algebras. Lately Gainov [Gaĭ57] described binary Lie algebras by a set of identities. In the same work by Malcev smooth Moufang loops were also considered. These loops are dissociative, so they can be infinitesimally described by an antisymmetric algebra with certain identities that Malcev called Moufang-Lie algebras and now are known as Malcev algebras. Kuzmin [Kuz70] proved that a Malcev algebra uniquely defines a smooth Moufang loop, stepping forward to the generalization of Lie theory. Grishkov [Gri86] proved that any binary Lie algebra over $\mathbb{R}$ is a Malcev algebra and this completed the study for this structures. Pérez-Izquierdo and Shestakov [PIS04] gave a construction for the universa enveloping algebra of a Malcev algebra and proved that it has a Poincaré-Birkhoff-Witt type basis, generalizing completely the commutative diagram 0.1.1 to the context of Moufang loops and Malcev algebras. In this case the universal enveloping algebra is a bialgebra that verifies an identity that is similar to the Moufang identity. It is remarkable that in the case that the Malcev algebra is a Lie algebra, its universal enveloping algebra as Malcev algebra coincides with its universal enveloping algebra as Lie algebra.

Malcev and Kikkawa explored diverse classes of loops similar to Lie groups among which are homogeneous Lie loops (also known as A-loops), whose infinitesimal objects are triple Lie algebras. We should also mention Bol loops, that arise from symmetric spaces, and whose infinitesimal objects are Bol algebras, that have two operations: one binary and another ternary, both needed to uniquely recover the Bol loop [SM82]. Pérez-Izquierdo [PI05] gave the construction of the universal enveloping algebra for Bol algebras, showing also that there exists a Poincaré-Birkhoff-Witt type basis for it.

Akivis tried to generalize this by defining the concept of local algebra, later called Akivis algebra [AG06a], in his study of multidimensional 3-webs and their local coordinate quasigroups. This algebra has two operations: one binary and another ternay related by the so-called Akivis identity. Shestakov [She99] proved that every Akivis algebra can be embedded into the algebra of commutators and associators of a certain nonassociative algebra. Hofmann and Strambach [HS86] considered the correspondence between real analytic loops and their associated local Akivis algebras, concluding that in general an Akivis algebra does not define uniquely an analytic loop, so the analogue of the third Lie's theorem does not hold (it is true for the cases of the Akivis algebra being Lie, Malcev or Bol). From analytic studies and Taylor power series, Akivis [AG06a] defined the prolonged local algebra of order s associated to a quasigroup. In this algebra he defined more operations, up to arity s, and proved that if a certain G-structure associated with the quasigroup is closed (completely defined by a finite set of structural constants) then there exists a prolonged local algebra that verifies the third Lie's theorem for this quasigroup.

The final generalization of infinitesimal structures associated to smooth loops was given by Mikheev and Sabinin with which they defined as hyperalgebras [SM87], now known as Sabinin algebras. These algebras are obtained by a contruction of differential geometry and define the structure of the tangent algebra to a local analytic loop in its identity element. Moreover, since these algebras verify the analogues of the three Lie's theorems they uniquely define local analytic loops. These algebras have two infinite families of operations that verify a numerable set of identities that are consequence of the integrability conditions of the differential equations system defining them. Shestakov and Umirbaev [SU02] studied Sabinin algebras from an algebraic point of view, showing that the space of primitive elements of a nonassociative bialgebra is a Sabinin algebra. Finally, Pérez-Izquierdo [PI07] demonstrated that every Sabinin algebra arises this way. Thus for every Sabinin algebra there exists a nonassociative H-bialgebra (the universal enveloping algebra) such that its set of primitive elements is precisely the given Sabinin algebra. He also proves that this universal enveloping algebra satisfies an analogue of the Poicaré-Birkhoff-Witt theorem and in the particular cases of the Sabinin algebra being a Lie, Malcev or Bol algebra the universal enveloping algebra as Sabinin algebra coincides with the universal enveloping algebra as Lie, Malvev or Bol algebra respectively. In this work it is also shown that the identities defining a variety of quasigroups can be linearized to obtain identities in H-bialgebras. In particular, the linearizations of the identities defining Moufang and Bol loops are satisfied by the universal enveloping algebras of their corresponding tangent algebras.

Mostovoy and Pérez-Izquierdo described in [MPI10] the nonassociative Lie theory relating formal loops, Sabinin algebras and nonassociative bialgebras in terms of equivalences of categories. Starting from a formal loop they constructed the bialgebra of distributions with the convolution product and proved that the category of formal loops is equivalent to the category of irreducible coassociative cocommutative bialgebras. Then they consider the Sabinin algebra of the primitive elements and proved that the category of Sabinin algebras is also equivalent to the category of irreducible coassociative cocommutative bialgebras. They also showed how identities defining a variety of loops are translated (by the linearization process) into identities of the corresponding bialgebra of distributions.

Another classical tool to understand complex algebraic structures is representation theory. This branch of mathematics studies abstract algebraic objects making them more concrete by describing their elements by matrices and the algebraic operations in terms of matrix addition and matrix multiplication. Historically groups, associative algebras and Lie algebras have been the most representated objects. Representation theory is a powerful tool because it reduces problems in abstract algebra to problems in linear algebra, a subject which is well understood. Furthermore, the vector space on which an object is represented can be infinite dimensional, and by allowing it to be, for instance, a Hilbert space, methods of analysis can be applied to the theory of groups. Representation theory is also important in physics because, for example, it describes how the symmetry group of a physical system affects the solutions of equations describing that system. An striking feature of representation theory is its pervasiveness in mathematics: the applications of representation theory are diverse (generalizes Fourier analysis via harmonic analysis, is deeply connected to geometry via invariant theory and the Erlangen program, has a profound impact in number theory via automorphic forms and the Langlands program, etc.) and there is a big diversity of approaches to representation theory: the same objects can be studied using methods from algebraic geometry, module theory, analytic number theory, differential geometry, operator theory and topology among others. The success of representation theory has led to numerous generalizations. One of the most general is a categorical one. The algebraic objects to which representation theory applies can be viewed as particular kinds of categories, and the representations as functors from the object category to the category of vector spaces. This description points to two generalizations: first, the algebraic objects can be replaced by more general categories; second the target category of vector spaces can be replaced by other more convenient categories.

Representation theory for Lie groups and Lie algebras has been deeply studied by the classical theory [FH91, Hum78] (semisimple Lie algebras over algebraically closed fields of characteristic zero), over fields of prime characteristic [FP87, FP88], ... In the case of Malcev algebras, references are not as many: essentially we have the works by Carlsson [Car76] and Elduque [Eld90]. For Moufang loops we find different approaches: the one given by Loginov [Log93] generalizing the idea of split extensiones of groups by modules and the other introduced by Dharwadker and Smith [DS95] based in a more general quasigroup representation theory by Smith [Smi86] using category theory.

This thesis is structured as follows:

- In the first part we collect all the results regarding the structure of Sabinin algebras and their universal enveloping algebras. In chapter 1 we study the universal enveloping algebra of Malcev algebras (which is a Moufang-Hopf algebra) and we give a construction for it different from the existing one by generalizing the results of Glauberman, Doro, Grishkov and Zavarnitsine on groups and Lie algebras with triality to the context of Hopf algebras. In chapter 2 we study the rigidity of the universal enveloping algebra of the family of simple Malcev algebras $M(\alpha,\beta,\gamma)$. In particular we show that every coassociative deformation of these universal enveloping algebras is cocommutative and that every coassociative deformation that verifies the Moufang-Hopf identity is trivial. In chapter 3 we study the variety of Sabinin algebras corresponding to the tangent algebras of monoassociative loops as a generalization of Lie, Malcev and Bol algebras and we seek a set of polynomial identities defining it. We prove that we need to introduce an additional quaternary operation and we find a subset of these identities.

- In the second part we present the results that are related to representation theory of Sabinin algebras. In chapter 4 we introduce a general theory, in terms of categories, for representations of bialgebras using the theory of modules for quasigroups and the equivalences between the categories of formal loops and Sabinin algebras. In chapter 5 we study the particular case of Moufang loops and Malcev algebras and we generalize the previous notion of representation to obtain new examples of modules. In chapter 6 we give a Weyl type formula for the dimension of the modules for simple Lie triple systems and we clasify the 1-dimensional modules for these systems.

- In appendix A we present a work done at the time of development of the thesis. It is related to the structure of another variety of nonassociative algebras: Leibniz algebras. We extend to arbitrary characteristic the result by Pojidaev which asserts that for $n \geq 3$ there do not exist simple commutative n-ary Leibniz algebras.

The results appearing in the chapters have been compiled in different papers and submitted to international scientific journals for their publication. The papers corresponding to appendix A and chapter 2 have been published in the journal "Communications in Algebra" in 2010 and 2012 respectively and the paper corresponding to chapter 6 has been published in the journal "Journal of Algebra" in 2012. The papers from chapters 1 and 3 have been accepted for being published by the journals "Transactions of the American Mathematical Society" and "Communications in Algebra" respectively.

Parte I

Envolventes universales

Capítulo 1

Álgebras de Hopf con trialdad

1.1. Introducción / Introduction

1.1.1. Introducción

En esta sección se exponen las definiciones y los resultados básicos utilizados a lo largo del capítulo. También se pretende dar una visión global del mismo. A lo largo de esta sección utilizaremos notación a derecha para los operadores.

Definición 1.1.1. Un **lazo** $(Q, \cdot, e)$ es un conjunto con una operación binaria

$$\begin{aligned} \cdot \colon Q \times Q &\to Q \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

denominada producto que posee elemento identidad $e \in Q$ y tal que los operadores de multiplicación $L_a \colon b \mapsto ab$ y $R_b \colon a \mapsto ab$ son biyectivos para cualesquiera $a, b \in Q$.

Definición 1.1.2. Dados un lazo Q y un cuerpo F, se define el **álgebra lazo sobre** F **asociada a** Q, FQ, como el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de Q con coeficientes en F, es decir, el conjunto

$$\{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \mid n \geq 0, a_i \in F, x_i \in Q \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

Estos elementos se denotan en general como $\sum\limits_{x \in Q} a_x x$, donde se asume que $a_x = 0$ para todos los elementos $x \in Q$ excepto para un número finito de ellos. FQ es un álgebra con la suma definida por

$$\sum_{x\in Q} a_x x + \sum_{x\in Q} b_x x = \sum_{x\in Q} (a_x + b_x)x,$$

el producto por escalares $a \in F$ dado por

$$a \sum_{x\in Q} a_x x = \sum_{x\in Q} (aa_x)x$$

y el producto interno

$$\sum_{x\in Q} a_x x \cdot \sum_{y\in Q} b_y y = \sum_{x,y\in Q} (a_x b_y)xy.$$

Notar que FQ es unitaria, ya que $e \in Q$ es elemento neutro para este producto.

Informalmente, podríamos decir que un lazo es un "grupo no asociativo" o que un grupo es un lazo que, además, verifica la propiedad asociativa $(xy)z = x(yz)$.

En contextos no asociativos, son interesantes otros lazos además de los grupos. Uno de ellos es la esfera siete dimensional de los octoniones de norma 1. Esta esfera no tiene estructura de grupo de Lie; sin embargo, con el producto heredado de los octoniones, verifica las identidades (a izquierda, central y a derecha) de Moufang

$$a(x(ay)) = ((ax)a)y, \quad (a(xy))a = (ax)(ya), \quad ((xa)y)a = x(a(ya)) \tag{1.1.1}$$

para cualesquiera elementos $a, x, y \in Q$, luego en cierto sentido este producto es "casi asociativo".

Lema 1.1.3 (Bruck, [Bru58])**.** *En un lazo las tres identidades anteriores son equivalentes.*

Definición 1.1.4. Un lazo que satisface cualquiera de las identidades anteriores (1.1.1) (y, por tanto, todas ellas), se dice **lazo de Moufang**.

A cualquier lazo Q se le asocia el grupo generado por los operadores de multiplicación $\{L_a, R_a \mid a \in Q\}$, el llamado *grupo de multiplicación de* Q, $\mathrm{Mlt}(Q)$. En ocasiones, este grupo tiene una estrecha relación con la estructura de Q. Esta idea de asociar lazos con grupos ha sido muy fructífera en el caso de los lazos de Moufang tras los trabajos de Glauberman [Gla68] y Doro [Dor78], especialmente en los últimos años [Mik93, GH05, GZ05, GZ06, GZ09]. Glauberman observó ([Gla68]) que los operadores de multiplicación en un lazo de Moufang con identidad 1 verifican

$$\begin{array}{lll} P_1 = L_1 = R_1 = 1 & P_x L_x R_x = 1 & \\ L_{xyx} = L_x L_y L_x & R_{xyx} = R_x R_y R_x & P_{xyx} = P_x P_y P_x \\ L_{y^{-1}x} = R_y L_x P_y & R_{y^{-1}x} = P_y R_x L_y & P_{y^{-1}x} = L_y P_x R_y \\ L_{xy^{-1}} = P_y L_x R_y & R_{xy^{-1}} = L_y R_x P_y & P_{xy^{-1}} = R_y P_x L_y, \end{array} \tag{1.1.2}$$

donde $P_x = R_x^{-1} L_x^{-1}$. El grupo $\mathcal{D}(Q)$ generado por los símbolos $\{L_x, R_x, P_x \mid x \in Q\}$ y sujeto a las relaciones (1.1.2) admite dos automorfismos ρ, σ

$$\begin{array}{lll} P_x^\rho = L_x & L_x^\rho = R_x & R_x^\rho = P_x \\ P_x^\sigma = P_x^{-1} & L_x^\sigma = R_x^{-1} & R_x^\sigma = L_x^{-1} \end{array} \tag{1.1.3}$$

debido a las simetrías de dichas relaciones. Estos automorfismos proporcionan una representación del grupo simétrico en tres símbolos S_3 como automorfismos de $\mathcal{D}(Q)$.

Notar que $\sigma^2 = Id = \rho^3$, por lo que σ puede considerarse como la imagen de la permutación (12), mientras que ρ sería la imagen de (123). Una observación importante en este punto es que

$$(g^{-1}g^\sigma)(g^{-1}g^\sigma)^\rho(g^{-1}g^\sigma)^{\rho^2} = 1 \tag{1.1.4}$$

se verifica para cualquier g en $\mathcal{D}(Q)$

Definición 1.1.5. Un grupo G se dice **grupo con trialdad (relativa a ρ y σ)** si admite como automorfismos una representación de S_3 que cumple (1.1.4).

Sorprendentemente, Doro probó que la construcción de un grupo con trialdad a partir de un lazo de Moufang puede ser invertida. Aquí se presenta una aproximación más simple, dada por Grishkov y Zavarnitsine, a la construcción de dicho lazo de Moufang en lugar de la idea original de Doro para evitar el uso de espacios simétricos y coclases.

Teorema 1.1.6 ([GZ06])**.** *Dado G un grupo con trialdad, el conjunto*

$$\mathbb{M}(G) = \{g^{-1}g^\sigma \mid g \in G\}$$

es un lazo de Moufang con el producto dado por

$$m \cdot n = m^{-\rho} n m^{-\rho^2} = n^{-\rho^2} m n^{-\rho} \quad \forall m, n \in \mathbb{M}(G)$$

Cualquier lazo de Moufang Q puede recuperarse salvo isomorfismo como $\mathbb{M}(\mathcal{D}(Q))$ [GZ06]. Por construcción, el grupo de Doro $\mathcal{D}(Q)$ verifica la siguiente propiedad universal: dado un grupo con trialdad G tal que $\mathbb{M}(G) \cong Q$ existe un homomorfismo de grupos con trialdad $\mathcal{D}(Q) \to G$ dado por $P_x \mapsto x, L_x \mapsto x^{\rho}$ y $R_x \mapsto x^{\rho^2}$ [Dor78, GZ06].

Definición 1.1.7. Sean G, G' grupos con trialdad σ, ρ y σ', ρ' respectivamente. Un **homomorfismo de grupos con trialdad** entre G y G' es un homomorfismo de grupos $\varphi : G \to G'$ que respeta la trialdad, es decir, que cumple que $\varphi \circ \sigma = \sigma'$ y $\varphi \circ \rho = \rho'$.

Mikheev [Mik93] dio otra construcción de un grupo con trialdad, $\mathcal{W}(Q)$, a partir de un lazo de Moufang con una propiedad universal dual a la de $\mathcal{D}(Q)$: si G es un grupo con trialdad tal que $\mathbb{M}(G) \cong Q$ y $Z_S(G) = \{1_G\}$, entonces existe un monomorfismo $G \to \mathcal{W}(Q)$ de grupos con trialdad, donde $Z_S(G)$ denota el subgrupo normal maximal de G en el que $S = S_3$ actúa trivialmente. El artículo de Mikheev no contiene demostraciones, pero estas fueron dadas por Grishkov y Zavarnitsine en [GZ06]. La construcción de $\mathcal{W}(Q)$ precisa del siguiente concepto:

Definición 1.1.8. Un **pseudoautomorfismo de un lazo de Moufang** Q es un par (A, a), donde $A \colon Q \to Q$ es una aplicación biyectiva y a un elemento de Q, llamado *compañero a derecha de* A de manera que

$$(xA) \cdot (yA \cdot a) = (x \cdot y)A \cdot a$$

para cualesquiera $x, y \in Q$.

Los pseudoautomorfismos de un lazo de Moufang Q forman un grupo, $\mathrm{PsAut}(Q)$, con el producto

$$(A, a)(B, b) = (AB, aB \cdot b).$$

Una vez visto esto, el grupo $\mathcal{W}(Q)$ se define como $\mathcal{W}(Q) = \mathrm{PsAut}(Q) \times Q$ con producto

$$[(A, a), x][(B, b), y] = [(A, a)(B, b)(C, c), xB \cdot y]$$

donde

$$(C, c) = (R_{b,xB}, b^{-1}(xB)^{-1}b(xB))(R_{xB,y}, (xB)^{-1}y^{-1}(xB)y)$$

y $R_{x,y} = R_x R_y R_{xy}^{-1}$. Las acciones de ρ y σ están dadas por

$$[(A, a), x] \quad \stackrel{\rho}{\mapsto} \quad [(A, a), a][(T_x, x^{-3}), x^{-2}] \text{ y}$$

$$[(A,a),x] \quad \overset{\sigma}{\mapsto} \quad [(A,a)(T_x,x^{-3}),x^{-1}]$$

con $T_x = L_x^{-1}R_x$.

Como se indica en [GZ06], una verificación directa de la asociatividad de este producto es "técnicamente intratable". Sin embargo, en este capítulo se probará que este carácter técnico en la definición de $\mathcal{W}(Q)$ es ficticio, ya que este grupo es exactamente el grupo de autotopías de Q con el producto componente a componente.

Definición 1.1.9. Dado un lazo Q, una **autotopía de** Q es un triple (A_1, A_2, A_3) con $A_i \in \mathrm{Biy}(Q)$ (el conjunto de todas las biyecciones de Q) tal que

$$(xy)A_1 = (xA_2)(yA_3)$$

para cualesquiera $x, y \in Q$.

El conjunto $\mathrm{Atp}(Q)$ de todas las autotopías de Q es un grupo con el producto componente a componente que tiene como subgrupo al grupo de automorfismos de Q. Este grupo es conocido desde hace muchos años, pero su propiedad universal parece haber pasado desapercibida hasta su interpretación como $\mathcal{W}(Q)$. Esta descripción permite dar demostraciones sencillas de las propiedades de $\mathcal{W}(Q)$. La sección 1.2 está dedicada a esta cuestión. Estas ideas pueden ser extendidas a un contexto de álgebras de Hopf, como se verá en la sección 1.7.

Definición 1.1.10. Una **coálgebra (coasociativa)** (C, Δ, ϵ) sobre un cuerpo F es un F-espacio vectorial C dotado de dos aplicaciones lineales $\Delta : C \to C \otimes C$ (*coproducto* o *comultiplicación*) y $\epsilon : C \to F$ (*counidad*) que verifican las siguientes propiedades:

1. La aplicación Δ es coasociativa:

$$(\Delta \otimes 1)\Delta(x) = (1 \otimes \Delta)\Delta(x).$$

2. El axioma de la counidad:

$$(\epsilon \otimes 1)\Delta(x) = x = (1 \otimes \epsilon)\Delta(x).$$

Una coálgebra C se dice **coconmutativa** si $\sigma \otimes \Delta = \Delta$, donde $\sigma : C \otimes C \to C \otimes C$, $\sigma(\sum_i x_i \otimes y_i) = \sum_i y_i \otimes x_i$.

Nota 1.1.11. Notar que las propiedades de coálgebra son duales a las propiedades de álgebra asociativa unitaria. Esta dualidad se muestra de forma clara en la representación de los operadores en forma de diagrama conmutativo (basta revertir el sentido de las flechas para obtener las propiedades de coálgebra):

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes 1"] \arrow[d, "1 \otimes m"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes F \arrow[r, "1 \otimes i"] \arrow[dr, "\cong"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & F \otimes A \arrow[l, "i \otimes 1"'] \arrow[dl, "\cong"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Definición 1.1.12. Dada una coálgebra (C, Δ, ϵ), un elemento $x \in C$ se dice **elemento de tipo grupo** si $\Delta(x) = x \otimes x$ y $\epsilon(x) = 1$. Dado $e \in C$ es de tipo grupo, un elemento $x \in C$ se dice **elemento e-primitivo** si $\Delta(x) = e \otimes x + x \otimes e$. Si $1 \in C$, un elemento $x \in C$ se dice **elemento primitivo** si $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$.

Definición 1.1.13. Una **biálgebra asociativa unitaria** $(B, m, i, \Delta, \epsilon)$ sobre un cuerpo F es un F-espacio vectorial B dotado de un producto $m : B \otimes B \to B$, una unidad $i : F \to C$, un coproducto $\Delta : B \to B \otimes B$ y una counidad $\epsilon : B \to F$ que verifican:

1. (B, m) es un álgebra asociativa con unidad $i(1)$.

2. (B, Δ, ϵ) es una coálgebra coasociativa.

3. Las aplicaciones Δ y ϵ son homomorfismos de álgebras unitarias.

Definición 1.1.14. Una biálgebra B se dice **coconmutativa** si para cualquier elemento $x \in B$ se cumple que $\sum x_{(1)} \otimes x_{(2)} = \sum x_{(2)} \otimes x_{(1)}$. Una biálgebra B se dice **coasociativa** si $(\Delta \otimes 1_B) \circ \Delta = (1_B \otimes \Delta) \circ \Delta$.

Nota 1.1.15. Si B es una biálgebra asociativa unitaria, entonces $B \otimes B$ hereda una estructura de álgebra asociativa unitaria con el producto

$$\sum_i x_i \otimes y_i \cdot \sum_j x'_j \otimes y'_j = \sum_{i,j} x_i x'_j \otimes y_i y'_j.$$

Definición 1.1.16. Un **álgebra de Hopf** es una biálgebra asociativa $(H, m, i, \Delta, \epsilon)$ dotada de una aplicación biyectiva $S : H \to H$ (*antípoda*) de manera que $m(1 \otimes S)\Delta(x) = i(\epsilon(x)) = m(S \otimes 1)\Delta(x)$.

Definición 1.1.17. Dadas H, H' álgebras de Hopf, un **homomorfismo de álgebras de Hopf** entre H y H' es un homomorfismo de biálgebras asociativas unitarias $\varphi : H \to H'$ (esto es, φ es homomorfismo de álgebras asociativas unitarias y homomorfismo de coálgebras) que verifica $\varphi \circ S_H = S_{H'} \circ \varphi$ (respeta la antípoda).

Recordar en este punto la notación sigma de Sweedler $\Delta(u) = \sum u_{(1)} \otimes u_{(2)}$ para la comultiplicación en álgebras de Hopf. En el caso coasociativo, denotaremos $(\Delta \otimes 1)\Delta(u) = (1 \otimes \Delta)\Delta(u) = \sum u_{(1)} \otimes u_{(2)} \otimes u_{(3)}$. La antípoda se denotará usualmente por S y ϵ hará referencia a la counidad. Aunque la antípoda y el subgrupo generado por ρ y σ se representan por el mismo símbolo S, esto no dará lugar a tipo alguno de confusión. La letra F se reserva para el cuerpo en el que se trabaja.

Definición 1.1.18. Dados dos automorfismos ρ, σ de un álgebra de Hopf coconmutativa H tales que $\sigma^2 = \rho^3 = 1_H$ y $\sigma\rho = \rho^2\sigma$, H se dice **álgebra de Hopf coconmutativa con trialdad relativa a** ρ **y** σ si se verifica

$$\sum P(u_{(1)})\rho(P(u_{(2)}))\rho^2(P(u_{(3)})) = \epsilon(u)1, \tag{1.1.5}$$

donde $P(u) = \sum \sigma(u_{(1)})S(u_{(2)})$.

Como se probará más adelante, la definición de álgebra de Hopf con trialdad no depende de los generadores ρ, σ del subgrupo $S = \langle \rho, \sigma \rangle$ que se hayan elegido, luego podemos hablar de álgebras de Hopf con trialdad S, aunque habitualmente se mencionarán explícitamente los generadores con los que se trabajará.

Ejemplo 1.1.19. *El álgebra grupo FG de un grupo G con trialdad relativa a ρ y σ es un álgebra de Hopf coconmutativa con trialdad relativa a ρ y σ (haciendo un abuso de notación, se identifican los automorfismos de G con sus extensiones lineales a FG), luego las álgebras de Hopf con trialdad aparecen como objetos muy naturales.*

El análogo de los lazos de Moufang en el contexto de álgebras de Hopf son las álgebras de Moufang-Hopf:

Definición 1.1.20. Una biálgebra unitaria coasociativa y coconmutativa $(U, \cdot, 1, \Delta, \epsilon)$ que verifique la *identidad de Moufang-Hopf a izquierda*

$$\sum u_{(1)}(v(u_{(2)}w)) = \sum((u_{(1)}v)u_{(2)})w \tag{1.1.6}$$

se dice **álgebra de Moufang-Hopf** si existe una aplicación $S\colon U \to U$, la *antípoda*, de forma que

$$\sum S(u_{(1)})(u_{(2)}v) = \epsilon(u)v = \sum u_{(1)}(S(u_{(2)})v) \text{ y}$$
$$\sum (vu_{(1)})S(u_{(2)}) = \epsilon(u)v = \sum (vS(u_{(1)}))u_{(2)}.$$

Un álgebra de Moufang-Hopf también verifica (análogamente al caso de los lazos) la *identidad de Moufang central* y la *identidad de Moufang a derecha*:

$$\sum (u_{(1)}(vw))u_{(2)} = \sum (u_{(1)}v)(wu_{(2)}) \text{ y } \sum ((vu_{(1)})w)u_{(2)} = \sum v(u_{(1)}(wu_{(2)})).$$

El *álgebra lazo* FQ de un lazo de Moufang Q es un ejemplo de álgebra de Moufang-Hopf (la antípoda es la extensión lineal de $S\colon a \mapsto a^{-1}$ para cualquier $a \in Q$). Otra importante variedad de ejemplos de álgebras de Moufang-Hopf se encuentra en las envolventes universales de las álgebras de Malcev.

Definición 1.1.21. Un **álgebra de Malcev** sobre un cuerpo de característica distinta de 2 es un álgebra $(\mathfrak{m}, [\ ,\ ])$ con un producto antisimétrico $[x, y]$ que satisface la identidad de Malcev

$$J(x, y, [x, z]) = [J(x, y, z), x]$$

donde $J(x, y, z) = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]$ es el *jacobiano de* x, y, z.

Las álgebras de Malcev son una generalización de las bien conocidas álgebras de Lie.

Definición 1.1.22. Un **álgebra de Lie** es un álgebra $(\mathcal{L}, [\ ,\ ])$ con un producto antisimétrico $[x, y]$ que satisface la identidad de Jacobi

$$J(x, y, z) = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0.$$

Definición 1.1.23. Dada un álgebra no asociativa A, se define el **núcleo alternativo generalizado de** A como el conjunto

$$\mathrm{N_{alt}}(A) = \{a \in A \mid (a, x, y) = -(x, a, y) = (x, y, a) \quad \forall x, y \in A\}.$$

De la misma manera que un álgebra asociativa con el producto conmutador $[x, y] = xy - yx$ tiene estructura de álgebra de Lie, el núcleo alternativo generalizado de un álgebra no asociativa es cerrado por el conmutador y, con este producto, adquiere una estructura de álgebra de Malcev [MPIP01].

Cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ aparece como una subálgebra (de Lie) de su envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ cuando el producto asociativo se sustituye por el conmutador. Para álgebras de Malcev existe un resultado análogo: cualquier álgebra de Malcev $\mathfrak{m}$ sobre un cuerpo de característica distinta de 2 y de 3 puede verse como subálgebra (de Malcev) de $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(U(\mathfrak{m}))$ para cierta álgebra no asociativa $U(\mathfrak{m})$: su envolvente universal [PIS04]. En el caso de que el álgebra de Malcev $\mathfrak{m}$ sea un álgebra de Lie, $U(\mathfrak{m})$ es isomorfa a la envolvente universal usual del álgebra de Lie $\mathfrak{m}$. Este resultado es el objetivo principal de [PIS04], donde se observó también que $U(\mathfrak{m})$ tiene estructura de biálgebra. Posteriormente, en [PI07] se prueba que $U(\mathfrak{m})$ es un álgebra de Moufang-Hopf donde $\mathfrak{m}$ se identifica con los elementos primitivos, esto es, elementos a tales que $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$. En un álgebra de Moufang-Hopf, las identidades de Moufang-Hopf implican de forma sencilla que los elementos primitivos pertenecen al núcleo alternativo generalizado.

La aproximación de Grishkov y Zavarnitsine a la construcción de $\mathbb{M}(G)$ es muy adecuada para su extensión a álgebras de Hopf coconmutativas. La construcción de Glauberman, Doro, Grishkov y Zavarnitsine se puede extender a álgebras de Hopf coconmutativas en los siguientes términos:

Teorema. *Sea H un álgebra de Hopf coconmutativa con trialdad relativa a ρ y σ. Se define $P(x) = \sum \sigma(x_{(1)})S(x_{(2)})$ para cualquier $x \in H$. Se tiene que*

$$\mathcal{MH}(H) = \{P(x) \mid x \in H\}$$

es un álgebra de Moufang-Hopf coconmutativa unitaria con la estructura de coálgebra y antípoda heredadas de H, el mismo elemento unidad y producto dado por

$$u * v = \sum \rho^2(S(u_{(1)}))v\rho(S(u_{(2)})) = \sum \rho(S(v_{(1)}))u\rho^2(S(v_{(2)}))$$

para cualesquiera $u, v \in \mathcal{MH}(H)$.

La sección 1.3 está dedicada a probar este resultado. La construcción de Doro, $\mathcal{D}(Q)$, también se puede extender al contexto de álgebras de Hopf para obtener el resultado recíproco: cualquier álgebra de Moufang-Hopf coconmutativa aparece como $\mathcal{MH}(H)$ para una cierta álgebra de Hopf con trialdad H. En particular, debe haber un modo natural de construir la envolvente universal de un álgebra de Malcev a partir de un álgebra de Hopf con trialdad. Precisamente, el desarrollo de esta aproximación es la motivación fundamental de este capítulo.

Para terminar de encajar todas estas piezas es necesario el concepto de álgebra de Lie con trialdad que aparece en el trabajo de Mikheev [Mik92] y que fue estudiado por Grishkov en [Gri03].

Definición 1.1.24. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que admite un grupo de automorfismos $S = \langle \rho, \sigma \rangle$ con $\sigma^2 = \rho^3 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$ y $\sigma\rho = \rho^2\sigma$ se dice **álgebra de Lie con trialdad S (o relativa a ρ y σ)** si se verifica

$$a - \sigma(a) + \rho(a) - \rho\sigma(a) + \rho^2(a) - \rho^2\sigma(a) = 0 \tag{1.1.7}$$

para cualquier $a \in \mathfrak{g}$.

Los automorfismos ρ, σ inducen una representación $\lambda\colon S_3 \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ del grupo simétrico en tres elementos S_3 en $\mathfrak{g}$ dada por $(12) \mapsto \sigma$, $(123) \mapsto \rho$. La condición (1.1.7) es equivalente a

$$\sum_{\tau \in S_3} \mathrm{sn}(\tau)\tau(a) = 0 \tag{1.1.8}$$

donde se escribe $\tau(a)$ en lugar de $\lambda(\tau)(a)$ para abreviar. En particular, (1.1.7) no depende de la elección de los generadores ρ, σ de S.

En la sección 1.5 se prueba que la envolvente universal de un álgebra de Lie con trialdad es un álgebra de Hopf con trialdad, luego se pueden generar álgebras de Moufang-Hopf a partir de álgebras de Lie con trialdad.

En la sección 1.6 se presenta una aproximación a la construcción de la envolvente universal de un álgebra de Malcev diferente a la expuesta en [PIS04]. Tomando un álgebra de Malcev $\mathfrak{m}$ se tiene que el álgebra de Lie asociada $\mathcal{L}(\mathfrak{m})$ definida en [PIS04] es un álgebra de Lie con trialdad, luego su envolvente universal $U(\mathcal{L}(\mathfrak{m}))$ es un álgebra de Hopf con trialdad. Se prueba que $U(\mathfrak{m})$ es isomorfa a $\mathcal{MH}(U(\mathcal{L}(\mathfrak{m})))$. En la figura 1.1.1 se muestran algunas de las relaciones entre los objetos involucrados a los que se ha hecho referencia y que se utilizarán a lo largo del capítulo.

1.1.2. Introduction

In this section we summarize the basic definitions and results used in this chapter and give an overview of its contents. Along this section we use right notation for the action of operators on elements.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\boxed{\text{Álgebras de Lie con trialdad}} \arrow[d, shift right, "\mathfrak{g} \mapsto U(\mathfrak{g})"'] \arrow[r, dotted, shift right] & \boxed{\text{Álgebras de Malcev}} \arrow[l, shift right, "\mathcal{L}(\mathfrak{m}) \mapsfrom \mathfrak{m}"'] \arrow[d, shift left, "\mathfrak{m} \mapsto U(\mathfrak{m})"] \\
\boxed{\text{Álgebras de Hopf con trialdad}} \arrow[u, dotted, shift right, "\text{elementos primitivos}"'] \arrow[r, shift left, "H \mapsto \mathcal{MH}(H)"] \arrow[d, dotted, shift left, "\text{elementos de tipo grupo}"] & \boxed{\text{Álgebras de Moufang-Hopf}} \arrow[u, dotted, shift left, "\text{elementos primitivos}"] \arrow[l, shift left, "\mathcal{D}(U) \mapsfrom U"] \arrow[d, dotted, shift right, "\text{elementos de tipo grupo}"'] \\
\boxed{\text{Grupos con trialdad}} \arrow[u, shift left, "\text{álgebra grupo}"] \arrow[r, dotted, shift left, "G \mapsto \mathbb{M}(G)"] & \boxed{\text{Lazos de Moufang}} \arrow[u, shift right, "\text{álgebra lazo}"'] \arrow[l, shift left, "\mathcal{D}(Q) \mapsfrom Q"]
\end{tikzcd}
$$

Figura 1.1: Algunas relaciones entre objetos Moufang/Malcev y objetos asociativos/Lie con trialdad

Definition 1.1.25. A **loop** $(Q, \cdot, e)$ is a set Q endowed with a binary operation

$$
\begin{aligned}
\cdot \colon Q \times Q &\to Q \\
(a, b) &\mapsto ab
\end{aligned}
$$

called product that has identity element $e \in Q$ and such that the left and right multiplication operators $L_a \colon b \mapsto ab$ and $R_b \colon a \mapsto ab$ are bijective for every $a, b \in Q$.

Definition 1.1.26. Given a loop Q and a field F, we define the **loop algebra over** F **associated to** Q, FQ, as the set of all finite linear combinations of elements in Q with coefficients in F, that is, the set

$$\{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \mid n \geq 0, a_i \in F, x_i \in Q \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

These elements are denoted as $\sum_{x \in Q} a_x x$, where it is assumed that $a_x = 0$ for all $x \in Q$ except for maybe a finite number of them. FQ is an algebra with sum defined by

$$\sum_{x \in Q} a_x x + \sum_{x \in Q} b_x x = \sum_{x \in Q} (a_x + b_x) x,$$

scalar product by an element $a \in F$ given by

$$a \sum_{x \in Q} a_x x = \sum_{x \in Q} (a a_x) x$$

and inner product

$$\sum_{x \in Q} a_x x \cdot \sum_{y \in Q} b_y y = \sum_{x,y \in Q} (a_x b_y) xy.$$

Recall that FQ is a unitary algebra, because $e \in Q$ is the identity element for this product.

Informally, one can say that a loop is a “nonassociative group” or that a group is a loop that, in additon, verifies tha associative property $(xy)z = x(yz)$.

In a nonassociative setting there are other interseting loops that are not groups. One of the most remarkable is the 7-dimensional sphere of the 1-normed octonions. This sphere does not have a Lie group structure but, with the product inherited from the octonions, it verifies the (left, middle and right) Moufang identities

$$a(x(ay)) = ((ax)a)y, \quad (a(xy))a = (ax)(ya), \quad ((xa)y)a = x(a(ya))$$

for every $a, x, y \in Q$. Note that, up to some extent, this product is “almost associative”.

Lemma 1.1.27 (Bruck, [Bru58])**.** *In a loop the three identities below are equivalent.*

Definition 1.1.28. If a loop verifies any of the identities below (thus, all of them), then we say it is a **Moufang loop**.

We can associate to a loop Q the group generated by the left and right multiplications by the elements of Q $\{L_a, R_a \mid a \in Q\}$, the so-called *multiplication group of* Q, denoted $\mathrm{Mlt}(Q)$. Sometimes, this group has a close relation with the structure of Q. This idea of associating loops to groups has proved very fruitful for Moufang loops after the works by Glauberman [Gla68] and Doro [Dor78], specially last years [Mik93, GH05, GZ05, GZ06, GZ09]. Glauberman [Gla68] noticed that multiplication operators in a Moufang loop with identity element 1 verify

$$\begin{array}{lll} P_1 = L_1 = R_1 = 1 & P_x L_x R_x = 1 & \\ L_{xyx} = L_x L_y L_x & R_{xyx} = R_x R_y R_x & P_{xyx} = P_x P_y P_x \\ L_{y^{-1}x} = R_y L_x P_y & R_{y^{-1}x} = P_y R_x L_y & P_{y^{-1}x} = L_y P_x R_y \\ L_{xy^{-1}} = P_y L_x R_y & R_{xy^{-1}} = L_y R_x P_y & P_{xy^{-1}} = R_y P_x L_y, \end{array}$$

where $P_x = R_x^{-1} L_x^{-1}$. The group $\mathcal{D}(Q)$ generated by the abstract symbols $\{L_x, R_x, P_x \mid x \in Q\}$ and subject to the relations before admits two automorphisms ρ, σ

$$\begin{array}{lll} P_x^\rho = L_x & L_x^\rho = R_x & R_x^\rho = P_x \\ P_x^\sigma = P_x^{-1} & L_x^\sigma = R_x^{-1} & R_x^\sigma = L_x^{-1} \end{array}$$

because of the symmetries of these relations. The automorphisms ρ and σ provide a representation of the symmetric group in three letters S_3 as automorphisms of $\mathcal{D}(Q)$. Note that $\sigma^2 = 1 = \rho^3$, thus σ can be thought as the image of the permutation (12) while ρ could be the image of (123). An important remark is that the equation

$$(g^{-1}g^\sigma)(g^{-1}g^\sigma)^\rho(g^{-1}g^\sigma)^{\rho^2} = 1$$

is verified for every g en $\mathcal{D}(Q)$

Definition 1.1.29. A group G is a **group with triality (relative to ρ and σ)** if it admits a representation of S_3 that satisfies the equation below as subgroup of its group of automorphisms.

Surprisingly, Doro showed that the construction of a group with triality from a Moufang loop can be reverted. Here we present a simpler approach, introduced by Grishkov and Zavarnitsine, to the construction of this Moufang loop instead of the original idea by Doro to avoid the use of symmetric spaces and cosets.

Teorema 1.1.30 ([GZ06])**.** *Given a group with triality G, the set*

$$\mathbb{M}(G) = \{g^{-1}g^\sigma \mid g \in G\}$$

is a Moufang loop with product expressed by the formula

$$m \cdot n = m^{-\rho} n m^{-\rho^2} = n^{-\rho^2} m n^{-\rho} \quad \forall m, n \in \mathbb{M}(G).$$

Any Moufang loop Q can be recovered, up to isomorphism, as $\mathbb{M}(\mathcal{D}(Q))$ [GZ06]. By construction, Doro's group $\mathcal{D}(Q)$ verifies the following universal property: given a group with triality G such that $\mathbb{M}(G) \cong Q$, there exists a homomorphism of groups with triality $\mathcal{D}(Q) \to G$ given by $P_x \mapsto x$, $L_x \mapsto x^\rho$ and $R_x \mapsto x^{\rho^2}$ [Dor78, GZ06].

Definition 1.1.31. Let G, G' be groups with triality σ, ρ and σ', ρ' respectively. A **homomorphism of groups with triality** between G and G' is a homomorphism of groups $\varphi : G \to G'$ that verifies $\varphi \circ \sigma = \sigma'$ and $\varphi \circ \rho = \rho'$.

Mikheev [Mik93] gave another construction of a group with triality from a Moufang loop, $\mathcal{W}(Q)$, with a universal property dual to that of $\mathcal{D}(Q)$: if G is a group with triality such that $\mathbb{M}(G) \cong Q$ and $Z_S(G) = \{1_G\}$, then there exists a monomorphism $G \to \mathcal{W}(Q)$ of groups with triality, where $Z_S(G)$ denotes the maximal normal subgroup of G in which $S = S_3$ acts trivially. Mikheev's paper does not contain proofs, but they were given by Grishkov and Zavarnitsine in [GZ06]. The construction of $\mathcal{W}(Q)$ needs the following concept.

Definition 1.1.32. A **pseudoautomorphism of a Moufang loop** Q is a pair (A, a), where $A\colon Q \to Q$ is a bijective map and $a \in Q$, called *right companion of* A, such that

$$(xA) \cdot (yA \cdot a) = (x \cdot y)A \cdot a$$

for every $x, y \in Q$.

Pseudoautomorphisms of a Moufang loop Q form a group, $\mathrm{PsAut}(Q)$ with the product

$$(A, a)(B, b) = (AB, aB \cdot b).$$

Now we can define the group $\mathcal{W}(Q)$ as $\mathcal{W}(Q) = \mathrm{PsAut}(Q) \times Q$ with product

$$[(A, a), x][(B, b), y] = [(A, a)(B, b)(C, c), xB \cdot y],$$

where

$$(C, c) = (R_{b,xB}, b^{-1}(xB)^{-1}b(xB))(R_{xB,y}, (xB)^{-1}y^{-1}(xB)y)$$

and $R_{x,y} = R_x R_y R_{xy}^{-1}$. The actions of ρ and σ are given by

$$\begin{aligned} [(A, a), x] &\overset{\rho}{\mapsto} [(A, a), a][(T_x, x^{-3}), x^{-2}] \text{ and} \\ [(A, a), x] &\overset{\sigma}{\mapsto} [(A, a)(T_x, x^{-3}), x^{-1}] \end{aligned}$$

with $T_x = L_x^{-1} R_x$.

As indicated in [GZ06], a direct verification of the associativity of this product is "technically intractable". However, in this chapter we will prove that this technical issue in the definition of $\mathcal{W}(Q)$ is actually fictitious because this group is exactly the group of autotopies of Q with componentwise product.

Definition 1.1.33. Let Q be a loop. An **autotopy of** Q is a triple (A_1, A_2, A_3) with $A_i \in \mathrm{Bij}(Q)$ (the set of all bijections of Q) such that

$$(xy)A_1 = (xA_2)(yA_3)$$

for any $x, y \in Q$.

The set $\mathrm{Atp}(Q)$ of all the autotopies of Q is a group with componentwise product that has the group of automorphisms of Q as a subgroup. This group has been known for many years but its universal property seems to have been unnoticed until its interpretation as $\mathcal{W}(Q)$. This description allows simple proofs of the properties of $\mathcal{W}(Q)$. Section 1.2 is devoted to this question. These ideas can be extended to a Hopf algebras setting, as it will be proved in section 1.7.

Definition 1.1.34. A **(coassociative) coalgebra** (C, Δ, ϵ) over a field F is a F-vector space C endowed with two linear maps $\Delta : C \to C \otimes C$ (*coproduct* or *comultiplication*) and $\epsilon : C \to F$ (*counit*) that verify the following properties:

1. The map Δ is coassociative:

$$(\Delta \otimes 1)\Delta(x) = (1 \otimes \Delta)\Delta(x).$$

2. The counit axiom:

$$(\epsilon \otimes 1)\Delta(x) = x = (1 \otimes \epsilon)\Delta(x).$$

A coalgebra C is said to be **cocommutative** if $\sigma \otimes \Delta = \Delta$, where $\sigma : C \otimes C \to C \otimes C$, $\sigma(\sum_i x_i \otimes y_i) = \sum_i y_i \otimes x_i$.

Remark 1.1.35. Recall that the coalgebra properties are dual to unital associative algebra properties. This duality is clearly expressed in the representation of the maps as commutative diagrams (it suffices to reverse the directions of the arrows to get the coalgebra properties):

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes 1"] \arrow[d, "1 \otimes m"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes F \arrow[r, "1 \otimes i"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & F \otimes A \arrow[l, "i \otimes 1"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Definition 1.1.36. Let (C, Δ, ϵ) be a coalgebra. An element $x \in C$ is a **group-like element** if $\Delta(x) = x \otimes x$ and $\epsilon(x) = 1$. Given a group-like element $e \in C$ an element $x \in C$ is a e**-primitive element** if $\Delta(x) = e \otimes x + x \otimes e$. If $1 \in C$, an element $x \in C$ is a **primitive element** if $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$.

Definition 1.1.37. A **unital associative bialgebra** $(B, m, i, \Delta, \epsilon)$ over a field F is a F-vector space B endowed with a product $m : B \otimes B \to B$, a unit $i : F \to C$, a coproduct $\Delta : B \to B \otimes B$ and a counit $\epsilon : B \to F$ which verify:

1. (B, m) is an associative algebra with unit $i(1)$.

2. (B, Δ, ϵ) is a coassociative coalgebra.

3. The maps Δ and ϵ are homomorphisms of unital algebras.

Definition 1.1.38. A bialgebra B is **cocommutative** if each element $x \in B$ verifies $\sum x_{(1)} \otimes x_{(2)} = \sum x_{(2)} \otimes x_{(1)}$. A bialgebra B is **coassociative** if $(\Delta \otimes 1_B) \circ \Delta = (1_B \otimes \Delta) \circ \Delta$.

Remark 1.1.39. If B is a unital associative bialgebra, then $B \otimes B$ inherits a structure of unital associative algebra with product

$$\sum_i x_i \otimes y_i \cdot \sum_j x'_j \otimes y'_j = \sum_{i,j} x_i x'_j \otimes y_i y'_j.$$

Definition 1.1.40. A **Hopf algebra** is an associative bialgebra $(H, m, i, \Delta, \epsilon)$ endowed with a bijective map $S : H \to H$ (*antipode*) such that

$$m(1 \otimes S)\Delta(x) = i(\epsilon(x)) = m(S \otimes 1)\Delta(x).$$

Definition 1.1.41. Let H, H' be Hopf algebras. A **homomorphism of Hopf algebras** between H and H' is a homomorphism of unital associative bialgebras $\varphi : H \to H'$ (φ is both a homomorphism of unital associative bialgebras and a homomorphism of coalgebras) such that $\varphi \circ S_H = S_{H'} \circ \varphi$.

Recall the Sweedler sigma notation $\Delta(u) = \sum u_{(1)} \otimes u_{(2)}$ for the coalgebra coproduct. In the coassociative case we will denote

$$(\Delta \otimes 1)\Delta(u) = (1 \otimes \Delta)\Delta(u) = \sum u_{(1)} \otimes u_{(2)} \otimes u_{(3)}.$$

The antipode will be denoted by S and ϵ will refer to the counit. Although the antipode and the subgroup generated by ρ and σ will be denoted by the same symbol S, this will not be confusing. F will denote the base field.

Definition 1.1.42. Let ρ, σ be two automorphisms of a cocommutative Hopf algebra H such that $\sigma^2 = \rho^3 = 1_H$ and $\sigma\rho = \rho^2\sigma$. H is a **cocommutative Hopf algebra with triality relative to ρ and σ** if it verifies

$$\sum P(u_{(1)})\rho(P(u_{(2)}))\rho^2(P(u_{(3)})) = \epsilon(u)1,$$

where $P(u) = \sum \sigma(u_{(1)})S(u_{(2)})$.

As it will be proved later, the definition of Hopf algebra with triality does not depend on the chosen generators ρ, σ of the subgroup $S = \langle \rho, \sigma \rangle$, so we can speak about Hopf algebras with triality S, though we will usually mention explicitly the generators we will work with.

Example 1.1.43. *The group algebra FG of a group G with triality relative to ρ and σ is a cocommutative Hopf algebra with triality relative to ρ y σ (by abuse of notation we identify the automorphisms of G with their linear extensions to FG), thus Hopf algebras with triality appear as quite natural objects.*

The analogous of Moufang loops in the Hopf algebras setting are the Moufang-Hopf algebras.

Definition 1.1.44. A cocommutative coassociative bialgebra $(U, \cdot, 1, \Delta, \epsilon)$ which verifies the so-called *left Moufang-Hopf identity*

$$\sum u_{(1)}(v(u_{(2)}w)) = \sum ((u_{(1)}v)u_{(2)})w$$

is called **Moufang-Hopf algebra** if there exists a map $S\colon U \to U$, the *antipode*, such that

$$\sum S(u_{(1)})(u_{(2)}v) = \epsilon(u)v = \sum u_{(1)}(S(u_{(2)})v) \text{ y}$$
$$\sum (vu_{(1)})S(u_{(2)}) = \epsilon(u)v = \sum (vS(u_{(1)}))u_{(2)}.$$

Analogously to the loop case, a Moufang-Hopf algebra also verifies the *middle Moufang identity* and the *right Moufang identity*:

$$\sum (u_{(1)}(vw))u_{(2)} = \sum (u_{(1)}v)(wu_{(2)}) \text{ y } \sum ((vu_{(1)})w)u_{(2)} = \sum v(u_{(1)}(wu_{(2)})).$$

The *loop algebra* FQ of a Moufang loop Q is an example of Moufang-Hopf algebra. The antipode is the linear extension of $S\colon a \mapsto a^{-1}$ for each $a \in Q$. Another important source of examples of Moufang-Hopf algebras are the universal enveloping algebras of Malcev algebras.

Definition 1.1.45. A **Malcev algebra** over a field of characteristic different from 2 is an algebra $(\mathfrak{m}, [\,,\,])$ with an antisymmetric product $[x, y]$ that verifies the Malcev identity

$$J(x, y, [x, z]) = [J(x, y, z), x]$$

where $J(x, y, z) = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]$ is the *jacobian of* x, y, z.

Malcev algebras are a generalization of Lie algebras.

Definition 1.1.46. A **Lie algebra** is an algebra $(\mathcal{L}, [\,,\,])$ with an antisymmetric product $[x, y]$ that verifies the Jacobi identity

$$J(x, y, z) = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0.$$

Definition 1.1.47. Let A be a nonassociative algebra. The **generalized alternative nucleous of** A is the set

$$\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A) = \{a \in A \mid (a, x, y) = -(x, a, y) = (x, y, a) \quad \forall x, y \in A\}.$$

An associative algebra with the commutator product $[x, y] = xy - yx$ is a Lie algebra. Analogously, the generalized alternative nucleous of a nonassociative algebra is closed by the commutator product, with which becomes a Malcev algebra [MPIP01].

Any Lie algebra $\mathfrak{g}$ appears as a (Lie) subalgebra of its universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ when the associative product is replaced by the commutator. There exists an analogous result for Malcev algebras: any Malcev algebra $\mathfrak{m}$ over a field of characteristic different from 2 or 3 can be regarded as a (Malcev) subalgebra of $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(U(\mathfrak{m}))$ for a certain nonassociative algebra $U(\mathfrak{m})$: its universal enveloping algebra [PIS04]. In case where the Malcev algebra $\mathfrak{m}$ is a Lie algebra $U(\mathfrak{m})$ is isomorphic to the universal enveloping algebra as Lie algebra. This result is the main goal of [PIS04], where it was also noted that $U(\mathfrak{m})$ admits a bialgebra structure. Later, in [PI07] it is proved that $U(\mathfrak{m})$ is a Moufang-Hopf algebra, where $\mathfrak{m}$ is identified with the primitive elements. In a Moufang-Hopf algebra, the

Moufang-Hopf identities easily imply that the primitive elements belong to the generalized alternative nucleous.

The approach of Grishkov and Zavarnitsine to the construction of $\mathbb{M}(G)$ is very convenient for its extension to cocommutative Hopf algebras. The construction by Glauberman, Doro, Grishkov y Zavarnitsine can be extended to the Hopf setting as follows

Theorem. *Let H be a cocommutative Hopf algebra with triality relative to ρ and σ. We define $P(x) = \sum \sigma(x_{(1)})S(x_{(2)})$ for each $x \in H$. We have that*

$$\mathcal{MH}(H) = \{P(x) \mid x \in H\}$$

is a unital cocommutative Moufang-Hopf algebra with the coalgebra structure and antipode inherited from H, the same unit element and product given by the formula

$$u * v = \sum \rho^2(S(u_{(1)}))v\rho(S(u_{(2)})) = \sum \rho(S(v_{(1)}))u\rho^2(S(v_{(2)}))$$

for every $u, v \in \mathcal{MH}(H)$.

Section 1.3 is devoted to show this result. Doro's construction $\mathcal{D}(Q)$ can also be extended to the Hopf algebras setting to prove the converse result: any cocommutative Moufang-Hopf algebra can be obtained as $\mathcal{MH}(H)$ for a certain Hopf algebra with triality H. In particular, there is a natural way of constructing the universal enveloping algebra of a Malcev algebra from a Hopf algebra with triality. Indeed, the development of this approach is the main purpose of this chapter.

To finish fitting all the pieces it is necessary to use the concept of Lie algebra with triality that appears in Mikheev work [Mik92] and was studied by Grishkov in [Gri03].

Definition 1.1.48. A Lie algebra $\mathfrak{g}$ that admits a group of automorphisms $S = \langle \rho, \sigma \rangle$ with $\sigma^2 = \rho^3 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$ and $\sigma\rho = \rho^2\sigma$ is said to be a **Lie algebra with triality S (or relative to ρ and σ)** if it verifies

$$a - \sigma(a) + \rho(a) - \rho\sigma(a) + \rho^2(a) - \rho^2\sigma(a) = 0$$

for all $a \in \mathfrak{g}$.

ρ, σ induce a representation $\lambda \colon S_3 \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ of the symmetric group in three letters S_3 in $\mathfrak{g}$ given by $(12) \mapsto \sigma$ and $(123) \mapsto \rho$. The condition below is equivalent to

$$\sum_{\tau \in S_3} \mathrm{sn}(\tau)\tau(a) = 0,$$

where we write $\tau(a)$ instead of $\lambda(\tau)(a)$ for short. In particular, the condition for Lie algebras with triality does not depend on the particular choice of generators ρ and σ of S.

In section 1.5 we prove that the universal enveloping algebra of a Lie algebra with triality is a Hopf algebra with triality, so we can obtain Moufang-Hopf algebras from Lie algebras with triality.

In section 1.6 we present an approach to the construction of the universal enveloping algebra of a Malcev algebra, different from that exposed in [PIS04]. Given a Malcev algebra $\mathfrak{m}$ we have that the associated Lie algebra $\mathcal{L}(\mathfrak{m})$ defined in [PIS04] is a Lie algebra with triality. Thus, its universal enveloping algebra $U(\mathcal{L}(\mathfrak{m}))$ is a Hopf algebra with triality. It is also shown that $U(\mathfrak{m})$ is isomorphic to $\mathcal{MH}(U(\mathcal{L}(\mathfrak{m})))$. In the figure 1.1.2 we exhibit the relations between the described objects that will be used along the rest of the chapter.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Lie algebras with triality}} \arrow[d, shift right, "\mathfrak{g} \mapsto U(\mathfrak{g})"'] \arrow[r, dotted, shift right] & \boxed{\text{Malcev algebras}} \arrow[l, shift right, "\mathcal{L}(\mathfrak{m}) \leftarrow\!\shortmid \mathfrak{m}"'] \arrow[d, shift left, "\mathfrak{m} \mapsto U(\mathfrak{m})"] \\
\boxed{\text{Hopf algebras with triality}} \arrow[u, dotted, shift right, "\text{elementos primitivos}"'] \arrow[r, shift left, "H \mapsto \mathcal{MH}(H)"] \arrow[d, dotted, shift right, "\text{group-like elements}"'] & \boxed{\text{Moufang-Hopf algebras}} \arrow[l, shift left, "\mathcal{D}(U) \leftarrow\!\shortmid U"] \arrow[u, dotted, shift left, "\text{elementos primitivos}"] \arrow[d, dotted, shift left, "\text{group-like elements}"] \\
\boxed{\text{Groups with triality}} \arrow[u, shift right, "\text{group algebra}"'] \arrow[r, dotted, shift left, "G \mapsto \mathbb{M}(G)"] & \boxed{\text{Moufang loops}} \arrow[l, shift left, "\mathcal{D}(Q) \leftarrow\!\shortmid Q"] \arrow[u, shift left, "\text{loop algebra"}]
\end{tikzcd}
$$

Figura 1.2: Some relations between Moufang/Malcev objects and associative/Lie with triality objects

1.2. Grupos con trialdad y lazos de Moufang

Este sección está dedicada a la intepretación de los resultados del trabajo de Grishkov y Zavarnitsine y de la construcción de Mikheev para lazos de Moufang en términos de su grupo de autotopías.

Nota 1.2.1. Recordar que una autotopía de Q es un triple (A_1, A_2, A_3) con $A_i \in Biy(Q)$ tal que $(xy)A_1 = (xA_2)(yA_3)$. Las identidades de Moufang implican que

$$(L_x, U_x, L_x^{-1}), (R_x, R_x^{-1}, U_x) \text{ y } (U_x, L_x, R_x)$$

son autotopías de Q, donde $U_x = L_x R_x$.

Se puede definir una acción del grupo simétrico en tres elementos en $\mathrm{Atp}(Q)$ dada por

$$(A_1, A_2, A_3)^\rho = (JA_2J, A_3, JA_1J) \text{ y } (A_1, A_2, A_3)^\sigma = (A_3, JA_2J, A_1), \tag{1.2.1}$$

donde $J\colon x \mapsto x^{-1}$ para cualquier $x \in Q$ [SR99, proposición 4.1.1]. Además de las identidades que definen un lazo de Moufang es conveniente recordar que en esta variedad de lazos, para cada elemento x existe su inverso, x^{-1}, que verifica $L_x^{-1} = L_{x^{-1}}$ y $R_x^{-1} = R_{x^{-1}}$.

Lema 1.2.2. *Si* $(A_1, A_2, A_3) \in \mathrm{Atp}(Q)$ *con* $1A_2 = 1$ *entonces* $A_1 = A_3$ *y* $JA_2J = A_2$.

Demostración. La condición en A_2 implica que

$$(yA_1) = (1y)A_1 = (1A_2)(yA_3) = yA_3,$$

luego se tiene que $A_1 = A_3$. Con $a = 1A_3$ se obtiene que

$$xA_3 = xA_1 = (x1)A_1 = xA_2a.$$

Por tanto,

$$a = 1A_1 = (xx^{-1})A_1 = (xA_2)(x^{-1}A_3) = (xA_2)(x^{-1}A_2a).$$

Multiplicando por $(xA_2)^{-1}$ se llega a que $(xA_2)^{-1}a = x^{-1}A_2a$, lo que prueba el enunciado. □

Ahora, el resultado [GZ06, corolario 1] puede rescribirse y probarse en términos de autotopías:

Teorema 1.2.3. *Sea Q un lazo de Moufang. Se tiene que* $\mathrm{Atp}(Q)$ *es un grupo con trialdad (relativa a ρ y σ dadas por (1.2.1)) tal que $\mathbb{M}(\mathrm{Atp}(Q)) \cong Q$ y $Z_S(\mathrm{Atp}(Q)) = \{1_{\mathrm{Atp}(Q)}\}$. Además,* $\mathrm{Atp}(Q)$ *es un objeto inyectivo universal en el siguiente sentido: si G es un grupo con trialdad tal que $\mathbb{M}(G) \cong Q$ y $Z_S(G) = \{1_G\}$, entonces existe un monomorfismo de grupos con trialdad $G \to \mathrm{Atp}(Q)$.*

Demostración. La condición de grupo con trialdad para $\mathrm{Atp}(Q)$ es equivalente a las siguientes tres igualdades:

$$\begin{aligned} A_1^{-1}A_3JA_2^{-1}JA_2JA_3^{-1}A_1J &= \mathrm{Id}_Q, \\ A_2^{-1}JA_2JA_3^{-1}A_1JA_1^{-1}A_3J &= \mathrm{Id}_Q \text{ y} \\ A_3^{-1}A_1JA_1^{-1}A_3JA_2^{-1}JA_2J &= \mathrm{Id}_Q\,. \end{aligned}$$

Primeramente, observar que si se toma $x = 1A_2$, entonces la componente central de $(A_1, A_2, A_3)(R_x, R_x^{-1}, U_x) \in \mathrm{Atp}(Q)$ fija al elemento identidad 1, luego aplicando el lema 1.2.2, se tiene que $(A_1, A_2, A_3)(R_x, R_x^{-1}, U_x) = (A, B, A)$ para ciertos A, B con $JB = BJ$. Como

$$(A_1, A_2, A_3) = (A, B, A)(R_x^{-1}, R_x, U_x^{-1})$$

y se cumple que $JL_xJ = R_x^{-1}$, $JR_xJ = L_x^{-1}$ y $JU_xJ = U_x^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} A_1^{-1}A_3JA_2^{-1}JA_2JA_3^{-1}A_1J &= R_xA^{-1}AU_x^{-1}JR_x^{-1}B^{-1}JBR_xJU_xA^{-1}AR_x^{-1}J \\ &= L_x^{-1}JR_x^{-1}JR_xJL_xJ = \mathrm{Id}_Q\,. \\ A_2^{-1}JA_2JA_3^{-1}A_1JA_1^{-1}A_3J &= R_x^{-1}B^{-1}JBR_xJU_xA^{-1}AR_x^{-1}JR_xA^{-1}AU_x^{-1}J \\ &= R_x^{-1}JR_xJU_XR_x^{-1}JR_xU_x^{-1}J = \mathrm{Id}_Q\,. \\ A_3^{-1}A_1JA_1^{-1}A_3JA_2^{-1}JA_2J &= U_xA^{-1}AR_x^{-1}JR_xA^{-1}AU_x^{-1}JR_x^{-1}B^{-1}JBR_xJ \\ &= L_xJL_x^{-1}JR_x^{-1}JR_xJ = \mathrm{Id}_Q\,. \end{aligned}$$

El conjunto $\mathbb{M}(\mathrm{Atp}(Q))$ está formado por las autotopías

$$(A_1^{-1}A_3, A_2^{-1}JA_2J, A_3^{-1}A_1). \tag{1.2.2}$$

Como en cualquier autotopía (A_1, A_2, A_3) se tiene que $(xy)A_1 = (xA_2)(yA_3)$ implica $A_1 = A_3L_a$, con $a = 1A_2$, entonces $A_1^{-1}A_3 = L_a^{-1}$ y la autotopía (1.2.2) puede escribirse como

$(L_a^{-1}, A_2^{-1}JA_2J, L_a)$. En una autotopía (A_1, A_2, A_3), la primera y la segunda componentes se relacionan mediante $A_1 = A_2R_{1A_3}$, luego $(L_a^{-1}, A_2^{-1}JA_2J, L_a) = (L_a^{-1}, U_a^{-1}, L_a)$. Como cualquier elemento $a \in Q$ es de la forma $1A_2$ para una cierta autotopía (A_1, A_2, A_3) entonces

$$\mathbb{M}(\mathrm{Atp}(Q)) = \{(L_a^{-1}, U_a^{-1}, L_a) \mid a \in Q\}.$$

El producto de $(L_a^{-1}, U_a^{-1}, L_a)$ y $(L_b^{-1}, U_b^{-1}, L_b)$ en $\mathbb{M}(\mathrm{Atp}(Q))$ es

$$\begin{aligned}(L_a^{-1}, U_a^{-1}, L_a) \cdot (L_b^{-1}, U_b^{-1}, L_b) &= (U_a^{-1}, L_a^{-1}, R_a^{-1})(L_b^{-1}, U_b^{-1}, L_b)(R_a, R_a^{-1}, U_a)\\ &= (L_{ab}^{-1}, U_{ab}^{-1}, L_{ab})\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de las identidades de Moufang. Esto prueba que $(L_b^{-1}, U_b^{-1}, L_b) \mapsto b$ da un isomorfismo $\mathbb{M}(\mathrm{Atp}(Q)) \cong Q$.

En cualquier grupo con trialdad G se tiene que $z \in Z_S(G)$ si y solo si $z^\tau = z$ y $g^{-1}g^\tau z = zg^{-1}g^\tau$ para cualesquiera $g \in G$ y $\tau \in S$ [GZ05]; por tanto, una autotopía (A_1, A_2, A_3) que pertenezca a $Z_S(\mathrm{Atp}(Q))$ i) verifica $A_1 = A_2 = A_3$ y ii) conmuta con $(L_a^{-1}, U_a^{-1}, L_a)$ para todo $a \in Q$. La condición i) implica que A_1 es un automorfismo de Q y la condición ii) por tanto, dice que $A_1 = \mathrm{Id}_Q$. Así pues, $Z_S(\mathrm{Atp}(Q)) = \{1_{\mathrm{Atp}(Q)}\}$.

Sea G un grupo con trialdad relativa a ρ y σ tal que $\mathbb{M}(G) \cong Q$ (notar que no hay confusión al usar los mismos símbolos para denotar los automorfismos de G y de $\mathrm{Atp}(Q)$). Debido a que

$$x^{-1}(g^{-1}g^\sigma)x^\sigma = (gx)^{-1}(gx)^\sigma \in \mathbb{M}(G)$$

para cualesquiera $x, g \in G$, se pueden definir las siguientes aplicaciones $A_1, A_2, A_3 \colon G \to \mathrm{Biy}(\mathbb{M}(G))$:

$$\begin{aligned}A_1 \colon x &\mapsto A_1(x) \colon m \mapsto x^{-\rho^2\sigma} m x^{\rho^2},\\ A_2 \colon x &\mapsto A_2(x) \colon m \mapsto x^{-1} m x^\sigma \text{ y}\\ A_3 \colon x &\mapsto A_3(x) \colon m \mapsto x^{-\rho} m x^{\rho\sigma}.\end{aligned}$$

Es sencillo comprobar que

$$(m \cdot n)^{A_1(x)} = x^{-\rho^2\sigma} m^{-\rho} n m^{-\rho^2} x^{\rho^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^{-\sigma\rho} m^{-\rho} x^{\rho} x^{-\rho} n x^{\rho\sigma} x^{-\sigma\rho^2} m^{-\rho^2} x^{\rho^2} \\
&= (x^{-1} m x^{\sigma}) \cdot (x^{-\rho} n x^{\rho\sigma}) \\
&= m^{A_2(x)} \cdot n^{A_3(x)}
\end{aligned}
$$

y también que $m^{A_1(xy)} = (xy)^{-\rho^2\sigma} m (xy)^{\rho^2} = (m^{A_1(x)})^{A_1(y)}$, luego se tiene que $A_1(xy) = A_1(x)A_1(y)$. De la misma manera,

$$
\begin{aligned}
m^{A_2(xy)} &= (xy)^{-1} m (xy)^{\sigma} = y^{-1} x^{-1} m x^{\sigma} y^{\sigma} = (m^{A_2(x)})^{A_2(y)} \\
m^{A_3(xy)} &= (xy)^{-\rho} m (xy)^{\rho\sigma} = y^{-\rho} x^{-\rho} m x^{\rho\sigma} y^{\rho\sigma} = (m^{A_3(x)})^{A_3(y)}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, se obtiene un homomorfismo de grupos

$$
\begin{aligned}
G &\to \operatorname{Atp}(\mathbb{M}(G)) \\
x &\mapsto (A_1(x), A_2(x), A_3(x)).
\end{aligned}
$$

Se comprueba fácilmente que este homomorfismo respeta la trialdad, ya las asignaciones $x^{\rho} \mapsto (A_1(x), A_2(x), A_3(x))^{\rho}$, $x^{\sigma} \mapsto (A_1(x), A_2(x), A_3(x))^{\sigma}$ verifican:

$$
\begin{aligned}
A_1(x^{\rho}) : m &\mapsto x^{-\sigma} m x = (x^{-1} m^{\sigma} x^{\sigma})^{\sigma} = m^{JA_2(x)J} = m^{A_1(x)^{\rho}} \\
A_2(x^{\rho}) : m &\mapsto x^{-\rho} m x^{\rho\sigma} = m^{A_3(x)} = m^{A_2(x)^{\rho}} \\
A_3(x^{\rho}) : m &\mapsto x^{-\rho^2} m x^{\rho^2\sigma} = m^{JA_1(x)J} = m^{A_3(x)^{\rho}} \\
A_1(x^{\sigma}) : m &\mapsto x^{-\rho} m x^{\rho\sigma} = m^{A_3(x)} = m^{A_1(x)^{\sigma}} \\
A_2(x^{\sigma}) : m &\mapsto x^{-\sigma} m x = m^{JA_2(x)J} = m^{A_2(x)^{\sigma}} \\
A_3(x^{\sigma}) : m &\mapsto x^{-\sigma\rho} m x^{\rho^2} = m^{A_1(x)} = m^{A_3(x)^{\sigma}}
\end{aligned}
$$

El núcleo de este homomorfismo consta de los elementos $x \in G$ tales que $x^{-1} m x^{\sigma} = m = x^{-\rho} m x^{\rho\sigma}$ para cualquier $m \in \mathbb{M}(G)$. Esta condición es equivalente a $x^{\sigma} = x = x^{\rho}$ y $xm = mx$ para todo $m \in \mathbb{M}(G)$, luego el núcleo de dicho homomorfismo es precisamente $Z_S(G)$. □

Esta sección quedará completa con la definición de un isomorfismo explícito entre $\mathcal{W}(Q)$ y $\operatorname{Atp}(Q)$. Para ello, primero se presenta una interpretación de los pseudoautomorfismos en términos de las autotopías.

Lema 1.2.4. *Sea Q un lazo arbitrario. La aplicación*

$$\begin{aligned}\{(A_1, A_2, A_3) \in \mathrm{Atp}(Q) \mid 1A_2 = 1\} &\mapsto \mathrm{PsAut}(Q)\\ (A_1, A_2, A_3) &\mapsto (A_2, 1A_1)\end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Por el lema 1.2.2, cualquier autotopía (A_1, A_2, A_3) con $1A_2 = 1$ es de la forma (A', A, A'). La condición de autotopía implica que $A' = AR_a$ con $a = 1A'$, luego (A', A, A') viene determinado por (A, a). Al producto $(A'B', AB, A'B')$ de dos autotopías (A', A, A') y (B', B, B') le corresponde $(AB, 1A'B') = (AB, (aB)b)$ con $b = 1B'$. Por tanto, la aplicación del enunciado es un monomorfismo de grupos. Aún más, esta aplicación es biyectiva con inversa $(A, a) \mapsto (AR_a, A, AR_a)$, donde el triple es una autotopía por la propia definición de pseudoautomorfismo. □

Como se ha observado en la demostración del teorema 1.2.3, cualquier autotopía (A_1, A_2, A_3) de un lazo de Moufang se descompone de forma única en $\mathrm{Atp}(Q)$ como

$$(A_1, A_2, A_3) = (A', A, A')(R_x^{-1}, R_x, U_x^{-1})$$

para ciertas A, A' con $x = 1A_2$. Por tanto, podemos identificar $\mathrm{Atp}(Q)$ con $\mathrm{PsAut}(Q) \times Q$ a través de $(A_1, A_2, A_3) \mapsto [(A, a), x]$ con $a = 1A'$ y $x = 1A_2$, obteniendo así el resultado buscado:

Teorema 1.2.5. *Sea Q un lazo de Moufang. La aplicación*

$$\begin{aligned}\omega\colon \mathrm{Atp}(Q) &\to \mathcal{W}(Q)\\ (A_1, A_2, A_3) &\mapsto [(A, a), x]\end{aligned}$$

con $x = 1A_2$, $A = A_2R_x^{-1}$ y $a = 1A_1x$ es un isomorfismo de grupos con trialdad.

Demostración. Notar que $(A', A, A')^\omega = (A, a)$ con $a = 1A'$ y que $(R_x^{-1}, R_x, U_x^{-1})^\omega = [(\mathrm{Id}_Q, 1), x]$, luego por el lema 1.2.4 ω es biyectiva y basta con probar que ω es un homomorfismo de grupos con trialdad. Primero se probará que

$$((R_x^{-1}, R_x, U_x^{-1})(B', B, B'))^\omega = (R_x^{-1}, R_x, U_x^{-1})^\omega (B', B, B')^\omega$$

para pasar después al caso general. Por un lado, se tiene que

$$\begin{aligned}(R_x^{-1}, R_x, U_x^{-1})^\omega (B', B, B')^\omega &= [(\mathrm{Id}_Q, 1), x][(B, b), 1] \\ &= [(BR_{b,xB}, bR_{b,xB}[\![b, xB]\!]), xB],\end{aligned}$$

donde$[\![x, y]\!] = x^{-1}y^{-1}xy$ y $R_{x,y} = R_x R_y R_{xy}^{-1}$. Por otra parte, se puede escribir

$$(R_x^{-1}, R_x, U_x^{-1})(B', B, B') = (R_x^{-1}B', R_x B, U_x^{-1}B') = (D', D, D')(R_{xB}^{-1}, R_{xB}, U_{xB}^{-1})$$

con $D' = R_x^{-1}B'R_{xB}$ y $D = R_x B R_{xB}^{-1}$. Por tanto,

$$((R_x^{-1}, R_x, U_x^{-1})(B', B, B'))^\omega = [(D, d), xB],$$

con $d = 1D' = (x^{-1}B')(xB)$ y solo queda comprobar que

$$BR_{b,xB} = R_x B R_{xB}^{-1} \text{ y } (x^{-1}B')(xB) = (bR_{b,xB})[\![b, xB]\!].$$

Como el sublazo generado por dos elementos en un lazo de Moufang es asociativo (teorema de Moufang, [Mou35]), se tiene que

$$(bR_{b,xB})[\![b, xB]\!] = (xB)^{-1}b(xB) = (x^{-1}B)b(xB) = (x^{-1}B')(xB)$$

debido al lema 1.2.2. La definición de pseudoautomorfismo para (B, b) puede reescribirse como $(yx)BR_b = (yB)(xBR_b)$, luego $R_x BR_b = BR_{xBb}$. Esto implica que

$$R_x B = BR_{xBb}R_b^{-1} \tag{1.2.3}$$

y, por tanto, $R_x BR_{xB}^{-1} = BR_{xBb}R_b^{-1}R_{xB}^{-1}$. Usando la identidad de Moufang a derecha se observa que $((((ax)y)(xy)^{-1})y)x = a(yx)$, luego $R_{x,y} = R_x R_y R_{xy}^{-1} = R_{yx}R_x^{-1}R_y^{-1}$ y se tiene $R_x BR_{xB}^{-1} = BR_{b,xB}$.

Para el caso general, dadas dos autotopías (A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3) y su descomposición

$$\begin{aligned}(A_1, A_2, A_3) &= (A', A, A')(R_x^{-1}, R_x, U_x^{-1}) \\ (B_1, B_2, B_3) &= (B', B, B')(R_y^{-1}, R_y, U_y^{-1})\end{aligned}$$

con $x = 1A_2$ y $y = 1B_2$, se debe probar que

$$((A_1, A_2, A_3)(B_1, B_2, B_3))^\omega = [(A, a)(B, b)(R_{b,xB}, [\![b, xB]\!])(R_{xB,y}, [\![xB, y]\!]), xBy].$$

Definiendo (D', D, D') como en el caso anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}(A_1, A_2, A_3)(B_1, B_2, B_3) &= (A', A, A')(R_x^{-1}, R_x, U_x^{-1})(B', B, B')(R_y^{-1}, R_y, U_y^{-1})\\ &= (A', A, A')(D', D, D')(R_{xB}^{-1}, R_{xB}, U_{xB}^{-1})(R_y^{-1}, R_y, U_y^{-1})\\ &= (A', A, A')(D', D, D')(R_{xB}^{-1}, R_{xB}, U_{xB}^{-1})(R_y^{-1}, R_y, U_y^{-1})\\ &\quad (R_{xBy}, R_{xBy}^{-1}, U_{xBy})(R_{xBy}^{-1}, R_{xBy}, U_{xBy}^{-1}),\end{aligned}$$

luego solo deben comprobarse las igualdades

$$\begin{aligned}ADR_{xB}R_yR_{xBy}^{-1} &= ABR_{b,xB}R_{xB,y} \text{ y}\\ 1A'D'R_{xB}^{-1}R_y^{-1}R_{xBy} &= ((aBb)R_{b,xB}[\![b, xB]\!])R_{xB,y}[\![xB, y]\!].\end{aligned}$$

De la definición de D y (1.2.3) se tiene que

$$\begin{aligned}B^{-1}DR_{xB}R_yR_{xBy}^{-1} &= B^{-1}R_xBR_{xB^{-1}}R_{xB}R_yR_{xBy}^{-1} = R_{xBb}R_b^{-1}R_yR_{xBy}^{-1}\\ &= R_{xBb}R_b^{-1}R_{xB}^{-1}R_{xB}R_yR_{xBy}^{-1} = R_{b,xB}R_{xB,y},\end{aligned}$$

lo que prueba que $ADR_{xB}R_yR_{xBy}^{-1} = ABR_{b,xB}R_{xB,y}$, la primera de las dos igualdades buscadas. Con respecto a la segunda, si se observa que para cualesquiera x, y el triple $(R_x^{-1}R_y^{-1}R_{xy}, R_xR_yR_{xy}^{-1}, U_x^{-1}U_y^{-1}U_{xy})$ es una autotopía, se sigue que la primera y la segunda componentes están relacionadas por $R_x^{-1}R_y^{-1}R_{xy} = R_xR_yR_{xy}^{-1}R_{[\![x,y]\!]}$. Por tanto,

$$R_x^{-1}R_y^{-1}R_{xy} = R_{x,y}R_{[\![x,y]\!]} \tag{1.2.4}$$

y

$$(R_{x,y}R_{[\![x,y]\!]}, R_{x,y}, R_{x,y}R_{[\![x,y]\!]}) \in \mathrm{Atp}(Q). \tag{1.2.5}$$

Así,

$$\begin{aligned}((aBb)R_{b,xB}[\![b, xB]\!])R_{xB,y}[\![xB, y]\!] &\overset{(1)}{=} ((aBR_{b,xB})(bR_{b,xB}[\![b, xB]\!]))R_{xB,y}[\![xB, y]\!]\\ &= ((aBR_{b,xB})(b[\![b, xB]\!]))R_{xB,y}[\![xB, y]\!]\\ &\overset{(2)}{=} ((aBR_{b,xB})(b[\![b, xB]\!]))R_{xB}^{-1}R_y^{-1}R_{xBy},\end{aligned}$$

donde la igualdad (1) se sigue de (1.2.5), y la igualdad (2) de (1.2.4). Ahora, basta con ver que $(aBR_{b,xB})(b[\![b, xB]\!]) = 1A'D' = aD'$. Como se ha mostrado previamente,

$$D = R_xBR_{xB}^{-1} = BR_{b,xB} \text{ y } D' = DR_{1D'}$$

con $1D' = (x^{-1}B')(xB) = (bR_{b,xB})[\![b, xB]\!] = b[\![b, xB]\!]$, luego

$$aD' = aD(b[\![b, xB]\!]) = (aBR_{b,xB})(b[\![b, xB]\!]).$$

Para ver que ω respeta la trialdad basta comprobarlo en los generadores:

$$\begin{aligned}
((A', A, A')^\sigma)^\omega &= (A', JAJ, A')^\omega = (A', A, A')^\omega = [(A, a), 1]\\
((A', A, A')^\omega)^\sigma &= [(A, a), 1]^\sigma = [(A, a)(\mathrm{Id}, 1), 1] = [(A, a), 1]\\
((R_x^{-1}, R_x, U_x^{-1})^\sigma)^\omega &= (U_x^{-1}, JR_xJ, R_x^{-1})^\omega = (U_x^{-1}, L_x^{-1}, R_x^{-1})^\omega = [(T_x, x^{-3}), x^{-1})]\\
((R_x^{-1}, R_x, U_x^{-1})^\omega)^\sigma &= [(\mathrm{Id}, 1), x]^\sigma = [(T_x, x^{-3}), x^{-1}]\\
((A', A, A')^\rho)^\omega &= (JAJ, A', JA'J)^\omega = (A, A', JA'J)^\omega = [(A, a), a]\\
((A', A, A')^\omega)^\rho &= [(A, a), 1]^\rho = [(A, a), a]\\
((R_x^{-1}, R_x, U_x^{-1})^\rho)^\omega &= (L_x^{-1}, U_x^{-1}, L_x)^\omega = [(T_x, x^{-3}), x^{-2})]\\
((R_x^{-1}, R_x, U_x^{-1})^\omega)^\rho &= [(\mathrm{Id}, 1), x]^\rho = [(T_x, x^{-3}), x^{-2}]
\end{aligned}$$

usando las descomposiciones de las autotopías. □

Nota 1.2.6. En esta sección, la mayor parte de los operadores se han hecho actuar a la derecha de sus argumentos, de forma que la notación fuera consistente con la de [GZ06]. Se volverá a emplear esta notación en la sección 1.7, donde se consideran los análogos a las autotopías en el contexto de álgebras de Moufang-Hopf. En el resto del capítulo, se utiliza notación a izquierda para los operadores.

1.3. Álgebras de Hopf coconmutativas con trialdad

En esta sección se prueba que cualquier álgebra de Hopf coconmutativa H con trialdad relativa a ρ y σ induce un álgebra de Moufang-Hopf. Los argumentos son la extensión natural de los dados en [GZ06] al contexto de álgebras de Hopf.

Se define el conjunto

$$\mathcal{MH}(H) = \{P(x) \mid x \in H\}$$

donde $P(x) = \sum \sigma(x_{(1)})S(x_{(2)})$. Notar que $S(P(x)) = \sigma(P(x)) = P(\sigma(x))$ y también $\Delta(\mathcal{MH}(H)) \subseteq \mathcal{MH}(H) \otimes \mathcal{MH}(H)$.

Lema 1.3.1. *Para cualesquiera $u, v \in \mathcal{MH}(H)$ se tiene* *a)* $\sum \rho^i(u_{(1)})\rho^j(u_{(2)}) = \sum \rho^j(u_{(1)})\rho^i(u_{(2)})$ *(*$i, j \in \{0, 1, 2\}$*)*

b) $\sum \rho^2(S(u_{(1)}))v\rho(S(u_{(2)})) = \sum \rho(S(v_{(1)}))u\rho^2(S(v_{(2)})) \in \mathcal{MH}(H)$.

Demostración. Por un lado, la condición (1.1.42) implica que

$$\sum u_{(1)}\rho(u_{(2)})\rho^2(u_{(3)}) = \epsilon(u)1,$$

por tanto, $\sum u_{(1)}\rho(u_{(2)}) = S(\rho^2(u))$. Por otra parte, la misma ecuación (1.1.42) aplicada a $S(u)$ resulta

$$\sum S(u_{(1)})\rho(S(u_{(2)}))\rho^2(S(u_{(3)})) = \epsilon(u)1,$$

luego $\sum \rho^2(u_{(1)})\rho(u_{(2)})u_{(3)} = \epsilon(u)1$, de donde

$$\sum \rho(u_{(1)})u_{(2)} = S(\rho^2(u)) = \sum u_{(1)}\rho(u_{(2)}).$$

Esto prueba la parte a) cuando $i = 1, j = 0$. Los demás casos se obtienen aplicando ρ.

Como $\sigma(u) = S(u)$ y $\sigma(v) = S(v)$, entonces

$$\begin{aligned} P\left(\rho(u)\rho(S(v))\right) &= \sum \sigma(\rho(u_{(1)})\rho(S(v_{(1)})))S(\rho(u_{(2)})\rho(S(v_{(2)}))) \\ &= \sum \rho^2(S(u_{(1)}))\rho^2(v_{(1)})\rho(v_{(2)})S(\rho(u_{(2)})) \\ &= \sum \rho^2(S(u_{(1)}))v\rho(S(u_{(2)})) \end{aligned}$$

y se tiene que $\sum \rho^2(S(u_{(1)}))v\rho(S(u_{(2)})) \in \mathcal{MH}(H)$. De la misma manera, el elemento $\sum \rho(S(v_{(1)}))u\rho^2(S(v_{(2)}))$ pertenece a $\mathcal{MH}(H)$. Si se usa la condición de trialdad en este elemento se obtiene que

$$\begin{aligned} \epsilon(uv)1 &= \sum \rho(S(v_{(1)}))u_{(1)}\rho^2(S(v_{(2)}))S(v_{(3)})\rho^2(u_{(2)})\rho(S(v_{(4)}))\rho^2(S(v_{(5)}))\rho(u_{(3)})S(v_{(6)}) \\ &= \sum \rho(S(v_{(1)}))u_{(1)}\rho(v_{(2)})\rho^2(u_{(2)})v_{(3)}\rho(u_{(3)})S(v_{(4)}) \end{aligned}$$

Y, por tanto,

$$\begin{aligned} \epsilon(uv)1 &= \sum S(v_{(1)})\rho(S(v_{(2)}))u_{(1)}\rho(v_{(3)})\rho^2(u_{(2)})v_{(4)}\rho(u_{(3)}) \\ &= \sum \rho^2(v_{(1)})u_{(1)}\rho(v_{(2)})\rho^2(u_{(2)})v_{(3)}\rho(u_{(3)}). \end{aligned}$$

Esta ecuación implica que $\sum \rho^2(u_{(1)})v\rho(u_{(2)}) = \sum \rho(S(v_{(1)}))S(u)\rho^2(S(v_{(2)}))$. Sustituyendo u por $S(u)$ se obtiene la parte b). $\square$

Nota 1.3.2. La parte a) del lema muestra que los papeles de ρ y ρ^2 pueden ser intercambiados en la definición de álgebra de Hopf con trialdad. Más aún, si se toma $\rho\sigma$ en lugar de σ y se considera $Q(x) = \sum \rho\sigma(x_{(1)})S(x_{(2)})$, entonces $Q(x) = \rho^2(P(\rho(x)))$, luego la relación de trialdad

$$\sum Q(x_{(1)})\rho(Q(x_{(2)}))\rho^2(Q(x_{(3)})) = \epsilon(x)1$$

se tiene si y solo si

$$\sum P(x_{(1)})\rho(P(x_{(2)}))\rho^2(P(x_{(3)})) = \epsilon(x)1.$$

Por tanto, σ puede ser reemplazado por $\rho\sigma$ en la definición de álgebra de Hopf con trialdad. Lo mismo ocurre para $\rho^2\sigma$, luego la definición no depende de los generadores ρ, σ del subgrupo $S = \langle\rho, \sigma\rangle$ elegidos.

Teorema 1.3.3. *Sea H un álgebra de Hopf coconmutativa con trialdad relativa a ρ y σ. Se tiene que $\mathcal{MH}(H)$ es un álgebra de Moufang-Hopf coconmutativa unitaria con la estructura de coálgebra heredada de H, el mismo elemento unidad y producto dado por*

$$u * v = \sum \rho^2(S(u_{(1)}))v\rho(S(u_{(2)})) = \sum \rho(S(v_{(1)}))u\rho^2(S(v_{(2)})).$$

Demostración. Primeramente, observar que, como $\Delta(P(x)) = \sum P(x_{(1)}) \otimes P(x_{(2)})$, entonces $\mathcal{MH}(H)$ es una subcoálgebra de H. El producto está bien definido, debido al lema 1.3.1. Este producto claramente es un homomorfismo de coálgebras $\mathcal{MH}(H)\otimes\mathcal{MH}(H) \to \mathcal{MH}(H)$, luego $\mathcal{MH}(H)$ es una biálgebra (no asociativa). El elemento unidad de H verifica $1 * v = 1v1 = v$ y $u * 1 = 1u1 = u$ por el lema 1.3.1. La antípoda S restringida a $\mathcal{MH}(H)$ resulta ser una antípoda en $\mathcal{MH}(H)$:

$$\begin{aligned}\sum S(u_{(1)}) * (u_{(2)} * v) &= \sum S(u_{(1)}) * (\rho^2(S(u_{(2)}))v\rho(S(u_{(3)}))) \\ &= \sum \rho^2(u_{(1)})\rho^2(S(u_{(2)}))v\rho(S(u_{(3)}))\rho(u_{(4)}) \\ &= \epsilon(u)v = \sum u_{(1)} * (S(u_{(2)}) * v).\end{aligned}$$

Como $S(u * v) = \sum \rho(u_{(1)})S(v)\rho^2(u_{(2)}) = S(v) * S(u)$, se tiene que

$$\sum(v * u_{(1)}) * S(u_{(2)}) = \epsilon(u)v = \sum(v * S(u_{(1)})) * u_{(2)}.$$

Finalmente,

$$\sum((u_{(1)} * v) * u_{(2)}) * w$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum ((\rho^2(S(u_{(1)}))v\rho(S(u_{(2)}))) * u_{(3)}) * w \\
&= \sum (u_{(1)}\rho^2(S(v_{(1)}))\rho(u_{(2)})u_{(3)}\rho^2(u_{(4)})\rho(S(v_{(2)}))u_{(5)}) * w \\
&= \sum (u_{(1)}\rho^2(S(v_{(1)}))\rho(S(v_{(2)}))u_{(2)}) * w \\
&= \sum (u_{(1)}vu_{(2)}) * w \\
&= \sum \rho^2(S(u_{(1)}))\rho^2(S(v_{(1)}))\rho^2(S(u_{(2)}))w\rho(S(u_{(3)}))\rho(S(v_{(2)}))\rho(S(u_{(4)})) \\
&= \sum u_{(1)} * (\rho^2(S(v_{(1)}))\rho^2(S(u_{(2)}))w\rho(S(u_{(3)}))\rho(S(v_{(2)}))) \\
&= \sum u_{(1)} * (v * (\rho^2(S(u_{(2)}))w\rho(S(u_{(3)})))) \\
&= \sum u_{(1)} * (v * (u_{(2)} * w)).
\end{aligned}
$$

□

Tras este resultado tiene sentido la siguiente definición:

Definición 1.3.4. Se define el *álgebra de Moufang-Hopf asociada a un álgebra de Hopf coconmutativa H con trialdad relativa a ρ y σ* como el conjunto

$$\mathcal{MH}(H) = \{P(x) \mid x \in H\}$$

donde $P(x) = \sum \sigma(x_{(1)})S(x_{(2)})$, con producto

$$u * v = \sum \rho^2(S(u_{(1)}))v\rho(S(u_{(2)})) = \sum \rho(S(v_{(1)}))u\rho^2(S(v_{(2)})).$$

Dado un elemento $m \in U$ de un álgebra de Moufang-Hopf U se denota

$$P_m = \sum R_{S(m_{(1)})}L_{S(m_{(2)})}.$$

Lema 1.3.5. *Sea U un álgebra de Moufang-Hopf coconmutativa. Entonces, para cualesquiera $m, n \in U$ se tiene:*

i) $P_1 = L_1 = R_1 = \mathrm{Id}_U$,

ii) $\sum P_{m_{(1)}}L_{m_{(2)}}R_{m_{(3)}} = \epsilon(m)\,\mathrm{Id}_U$,

iii) $\sum P_{m_{(1)}}P_nP_{m_{(2)}} = \sum P_{m_{(1)}nm_{(2)}}, \sum L_{m_{(1)}}L_nL_{m_{(2)}} = \sum L_{m_{(1)}nm_{(2)}},$
$\sum R_{m_{(1)}}R_nR_{m_{(2)}} = \sum R_{m_{(1)}nm_{(2)}},$

iv) $\sum R_{m_{(1)}}P_nL_{m_{(2)}} = P_{S(m)n}, \sum P_{m_{(1)}}L_nR_{m_{(2)}} = L_{S(m)n}, \sum L_{m_{(1)}}R_nP_{m_{(2)}} = R_{S(m)n},$

v) $\sum L_{m_{(1)}}P_nR_{m_{(2)}} = P_{nS(m)}, \sum R_{m_{(1)}}L_nP_{m_{(2)}} = L_{nS(m)}, \sum P_{m_{(1)}}R_nL_{m_{(2)}} = R_{nS(m)}.$

Demostración. Los apartados i) y ii) son obvios.

iii) Usando la identidad de Moufang central:

$$\begin{aligned}\sum P_{m_{(1)}}P_nP_{m_{(2)}}(x) &= \sum S(m_{(1)})(S(n_{(1)})(S(m_{(2)})xS(m_{(3)}))S(n_{(2)}))S(m_{(4)})\\ &= \sum S(m_{(1)})((S(n_{(1)})S(m_{(2)}))x(S(n_{(2)})S(m_{(3)})))S(m_{(2)})\\ &= \sum (S(m_{(1)})S(n_{(1)})S(m_{(2)}))x(S(m_{(3)})S(n_{(2)})S(m_{(4)}))\\ &= \sum P_{m_{(1)}nm_{(2)}}(x)\end{aligned}$$

Aplicando la identidad de Moufang a izquierda:

$$\begin{aligned}\sum L_{m_{(1)}}L_nL_{m_{(2)}}(x) &= \sum m_{(1)}(n(m_{(2)}x)) = \sum((m_{(1)}n)m_{(2)})x\\ &= \sum L_{m_{(1)}nm_{(2)}}(x)\end{aligned}$$

Debido a la identidad de Moufang a derecha:

$$\begin{aligned}\sum R_{m_{(1)}}R_nR_{m_{(2)}}(x) &= \sum((xm_{(2)})n)m_{(1)} = \sum x(m_{(2)}(nm_{(1)}))\\ &= \sum R_{m_{(1)}nm_{(2)}}(x)\end{aligned}$$

iv) Las identidades de Moufang a derecha y central implican:

$$\begin{aligned}&\sum R_{m_{(1)}}P_nL_{m_{(2)}}(x)\\ &\quad= \sum(S(n_{(1)})(m_{(2)}x)S(n_{(2)}))m_{(1)}\\ &\quad= \sum(S(n_{(1)})((m_{(1)}xm_{(2)})S(m_{(3)}))S(n_{(2)}))m_{(4)}\\ &\quad= \sum((S(n_{(1)})(m_{(1)}xm_{(2)}))(S(m_{(3)})S(n_{(2)})))m_{(4)}\\ &\quad= \sum((S(n_{(1)})(m_{(1)}xm_{(2)}))S(m_{(3)}))\cdot(m_{(4)}(S(m_{(5)})S(n_{(2)}))m_{(6)})\\ &\quad= \sum(S(n_{(1)})m_{(1)})x(S(n_{(2)})m_{(2)})\\ &\quad= P_{S(m)n}(x).\end{aligned}$$

Por la identidad de Moufang central:

$$\begin{aligned}\sum P_{m_{(1)}}L_nR_{m_{(2)}}(x) &= \sum(S(m_{(1)})(n(xm_{(2)})))S(m_{(3)})\\ &= \sum(S(m_{(1)})n)((xm_{(2)})S(m_{(3)}))\\ &= (S(m)n)x = L_{S(m)n}(x)\end{aligned}$$

Utilizando la identidad de Moufang a izquierda:

$$\begin{aligned}\sum L_{m_{(1)}} R_n P_{m_{(2)}}(x) &= \sum m_{(1)}((S(m_{(2)})x)S(m_{(3)}))n) \\ &= \sum m_{(1)}(S(m_{(2)})(x(S(m_{(3)})n))) \\ &= x(S(m)n) = R_{S(m)n}(x)\end{aligned}$$

v) Gracias a las identidades de Moufang-Hopf a derecha y central:

$$\begin{aligned}&\sum L_{m_{(1)}} P_n R_{m_{(2)}}(x) \\ &\quad = \sum m_{(1)}(S(n_{(1)})((xS(m_{(2)}))(m_{(3)}1m_{(4)}))S(n_{(2)})) \\ &\quad = \sum m_{(1)}((S(n_{(1)})(xS(m_{(2)})))((m_{(3)}m_{(4)})S(n_{(2)}))) \\ &\quad = \sum (m_{(1)}(S(n_{(1)})(xS(m_{(2)})))m_{(3)}) \cdot (S(m_{(4)})((m_{(5)}m_{(6)})S(n_{(2)}))) \\ &\quad = \sum ((m_{(1)}S(n_{(1)}))x)(m_{(2)}S(n_{(2)})) \\ &\quad = P_{nS(m)}(x).\end{aligned}$$

Empleando la identidad de Moufang a derecha:

$$\begin{aligned}\sum R_{m_{(1)}} L_n P_{m_{(2)}}(x) &= \sum (n((S(m_{(1)})x)S(m_{(2)})))m_{(3)} \\ &= \sum (n(S(m_{(1)})(xS(m_{(2)}))))m_{(3)} \\ &= \sum (((nS(m_{(1)}))x)S(m_{(2)}))m_{(3)} \\ &= (nS(m))x = L_{nS(m)}(x)\end{aligned}$$

Finalmente, de la identidad de Moufang central se tiene:

$$\begin{aligned}\sum P_{m_{(1)}} R_n L_{m_{(2)}}(x) &= \sum (S(m_{(1)})((m_{(2)}x)n))S(m_{(3)}) \\ &= \sum (S(m_{(1)})((m_{(2)}x)((nS(m_{(3)}))m_{(4)}))S(m_{(5)}) \\ &= \sum (S(m_{(1)})(m_{(2)}(x((nS(m_{(3)})))))m_{(4)})S(m_{(5)}) \\ &= \sum ((x((nS(m_{(1)}))))m_{(2)})S(m_{(3)}) \\ &= \sum x((nS(m))) = R_{nS(m)}(x)\end{aligned}$$

□

A continuación se define la construcción de Doro para álgebras de Moufang-Hopf.

Definición 1.3.6. Dada un álgebra de Moufang-Hopf coconmutativa U se define la **construcción de Doro asociada a** U, $\mathcal{D}(U)$, como el álgebra asociativa unitaria generada por los símbolos abstractos $\{P_m, L_m, R_m \mid m \in U\}$ sujetos a las relaciones

$$P_1 = L_1 = R_1 = 1,$$

$$P_{\alpha m+\beta n} = \alpha P_m + \beta P_n, \quad L_{\alpha m+\beta n} = \alpha L_m + \beta L_n, \quad R_{\alpha m+\beta n} = \alpha R_m + \beta R_n,$$

$$\sum P_{m_{(1)}} L_{m_{(2)}} R_{m_{(3)}} = \epsilon(m)1,$$

$$\sum P_{m_{(1)}} P_n P_{m_{(2)}} = \sum P_{m_{(1)} n m_{(2)}}, \quad \sum L_{m_{(1)}} L_n L_{m_{(2)}} = \sum L_{m_{(1)} n m_{(2)}},$$

$$\sum R_{m_{(1)}} R_n R_{m_{(2)}} = \sum R_{m_{(1)} n m_{(2)}},$$

$$\sum R_{m_{(1)}} P_n L_{m_{(2)}} = P_{S(m)n}, \quad \sum P_{m_{(1)}} L_n R_{m_{(2)}} = L_{S(m)n},$$

$$\sum L_{m_{(1)}} R_n P_{m_{(2)}} = R_{S(m)n},$$

$$\sum L_{m_{(1)}} P_n R_{m_{(2)}} = P_{nS(m)}, \quad \sum R_{m_{(1)}} L_n P_{m_{(2)}} = L_{nS(m)} \text{ y}$$

$$\sum P_{m_{(1)}} R_n L_{m_{(2)}} = R_{nS(m)}$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in F$ y $m, n \in U$.

Nota 1.3.7. Las aplicaciones

$$\Delta\colon P_m \mapsto \sum P_{m_{(1)}} \otimes P_{m_{(2)}}, \quad L_m \mapsto \sum L_{m_{(1)}} \otimes L_{m_{(2)}}, \quad R_m \mapsto \sum R_{m_{(1)}} \otimes R_{m_{(2)}}$$

$$\epsilon\colon P_m \mapsto \epsilon(m)1, \quad L_m \mapsto \epsilon(m)1, \quad R_m \mapsto \epsilon(m)1$$

$$S\colon P_m \mapsto P_{S(m)}, \quad L_m \mapsto L_{S(m)}, \quad R_m \mapsto R_{S(m)}$$

inducen respectivamente los homomorfismos de álgebras $\Delta\colon \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(U) \otimes \mathcal{D}(U)$, $\epsilon\colon \mathcal{D}(U) \to F$ y $S\colon \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(U)$ que hacen de $\mathcal{D}(U)$ un álgebra de Hopf coconmutativa. Además, $\mathcal{D}(U)$ con respecto a los automorfismos inducidos por

$$\begin{array}{ccccccc} & \rho & & & & \sigma & \\ P_m & \mapsto & L_m & \quad & P_m & \mapsto & P_{S(m)} \\ L_m & \mapsto & R_m & \quad & L_m & \mapsto & R_{S(m)} \\ R_m & \mapsto & P_m & \quad & R_m & \mapsto & L_{S(m)} \end{array}$$

es un álgebra de Hopf con trialdad.

El resultado principal de esta sección es el que da la propiedad universal de $\mathcal{D}(U)$, de manera totalmente análoga a lo que sucedía en el caso de lazos de Moufang y grupos con trialdad.

Teorema 1.3.8. *Para cualquier álgebra de Moufang-Hopf coconmutativa U, la aplicación*

$$\begin{aligned} \iota\colon U &\to \mathcal{MH}(\mathcal{D}(U)) \\ m &\mapsto P_m \end{aligned}$$

es un isomorfismo de álgebras de Moufang-Hopf. Además, $\mathcal{D}(U)$ satisface la siguiente propiedad universal: dada un álgebra de Hopf con trialdad H y un homomorfismo $\varphi\colon U \to \mathcal{MH}(H)$ de álgebras de Moufang-Hopf, φ se extiende a un homomorfismo $\bar{\varphi}\colon \mathcal{D}(U) \to H$ de álgebras de Hopf con trialdad (es decir, conmuta con la acción de ρ y σ) de manera que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D}(U) \arrow[d, "\bar{\varphi}"] \\ U \arrow[ur, hook, "\iota"] \arrow[r, "\varphi"'] & H \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Primero se prueba que ι es un isomorfismo de álgebras de Moufang-Hopf. Si $P_m = P_n$ entonces $L_m = \rho(P_m) = \rho(P_n) = L_n$. Sin embargo, el lema 1.3.5 implica que existe un homomorfismo desde $\mathcal{D}(U)$ al álgebra de multiplicación de U de forma que envía L_m al operador de multiplicación a izquierda por m. Evaluando en 1, se tiene que $m = n$. Así pues, ι es inyectiva. Para ver que es homomorfismo de álgebras notar que

$$\begin{aligned} \iota(m) * \iota(n) &= P_m * P_n = \sum \rho^2(S(P_{m_{(1)}}))P_n\rho(S(P_{m_{(2)}})) \\ &= \sum R_{S(m_{(1)})}P_nL_{S(m_{(2)})} = P_{mn} = \iota(mn). \end{aligned}$$

Por definición de Δ, ϵ y S, se ve fácilmente que ι es un homomorfismo de álgebras de Moufang-Hopf. Para probar que ι es suprayectiva debe comprobarse que se da la igualdad $\mathcal{MH}(\mathcal{D}(U)) = \{P_m \mid m \in U\}$. Por definición, $\mathcal{MH}(\mathcal{D}(U)) = \{P(x) \mid x \in \mathcal{D}(U)\}$ pero $P(xy) = \sum \sigma(x_{(1)})P(y)S(x_{(2)})$, luego solo tiene que probarse que

$$P(P_m), P(L_m), P(R_m) \in \mathcal{MH}(\mathcal{D}(U))$$

y que para cualesquiera $m, n \in U$

$$\sum \sigma(P_{n_{(1)}})P_mS(P_{n_{(2)}}),\ \sum \sigma(L_{n_{(1)}})P_mS(L_{n_{(2)}}) \text{ y } \sum \sigma(R_{n_{(1)}})P_mS(R_{n_{(2)}})$$

también pertenecen a $\mathcal{MH}(\mathcal{D}(U))$. Por la definición y las relaciones en $\mathcal{D}(U)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
P(P_m) &= \sum \sigma(P_{m_{(1)}})S(P_{m_{(2)}}) = \sum P_{S(m_{(1)})}P_{S(m_{(2)})} = \sum P_{S(m_{(1)})S(m_{(2)})},\\
P(L_m) &= \sum \sigma(L_{m_{(1)}})S(L_{m_{(2)}}) = \sum R_{S(m_{(1)})}L_{S(m_{(2)})} = P_m \text{ y}\\
P(R_m) &= \sum \sigma(R_{m_{(1)}})S(R_{m_{(2)}}) = \sum L_{S(m_{(1)})}R_{S(m_{(2)})} = P_m,
\end{aligned}$$

luego $P(P_m), P(L_m), P(R_m) \in \mathcal{MH}(\mathcal{D}(U))$. Las relaciones en $\mathcal{D}(U)$ también implican que

$$\begin{aligned}
\sum \sigma(P_{n_{(1)}})P_m S(P_{n_{(2)}}) &= \sum P_{S(n_{(1)})}P_m P_{S(n_{(2)})} = P_{\sum S(n_{(1)})mS(n_{(2)})},\\
\sum \sigma(L_{n_{(1)}})P_m S(L_{n_{(2)}}) &= \sum R_{S(n_{(1)})}P_m L_{S(n_{(2)})} = P_{nm} \text{ y}\\
\sum \sigma(R_{n_{(1)}})P_m S(R_{n_{(2)}}) &= \sum L_{S(n_{(1)})}P_m R_{S(n_{(2)})} = P_{mn},
\end{aligned}$$

luego ι es suprayectiva.

Sea ahora $\varphi\colon U \to \mathcal{MH}(H)$ un homomorfismo de álgebras de Moufang-Hopf donde H es un álgebra de Hopf coconmutativa con trialdad. Dados $m, n \in U$, los elementos $\varphi(m), \varphi(n)$ satisfacen

$$\sum \varphi(m_{(1)})\rho(\varphi(m_{(2)}))\rho^2(\varphi(m_{(3)})) = \epsilon(m),$$

y por la definición del producto $*$ en $\mathcal{MH}(H)$

$$\begin{aligned}
&\sum \varphi(m_{(1)})\varphi(n)\varphi(m_{(2)}) = \sum m_{(1)} * n * m_{(2)},\\
&\sum \rho^2(\varphi(m_{(1)}))\varphi(n)\rho(\varphi(m_{(2)})) = \varphi(S(m)) * \varphi(n) \text{ y}\\
&\sum \rho(\varphi(m_{(1)}))\varphi(n)\varphi^2(m_{(2)}) = \varphi(n) * \varphi(S(m)).
\end{aligned}$$

Estas identidades y las obtenidas aplicando la acción de ρ muestran que la correspondencia

$$\bar{\varphi}\colon P_m \mapsto \varphi(m), \quad L_m \mapsto \rho(\varphi(m)), \quad R_m \mapsto \rho^2(\varphi(m))$$

induce un homomorfismo $\bar{\varphi}\colon \mathcal{D}(U) \to H$ de álgebras de Hopf con trialdad que hace conmutativo el diagrama del enunciado. □

Para concluir esta sección, se prueban un par de resultados relativos a las relaciones de isomorfía entre estos objetos con los que hemos estado trabajando y que se muestran en el diagrama de la página 35.

Proposición 1.3.9. *Sea Q un lazo de Moufang. Se tiene que el álgebra lazo FQ es isomorfa a $\mathcal{MH}(F\mathcal{D}(Q))^{op}$.*

Demostración. Notar que $F\mathcal{D}(Q)$ es el álgebra grupo generada por el conjunto $\{L_x, R_x \mid x \in Q\}$ sujeto a las relaciones (1.1.2). Así,

$$\mathcal{MH}(F\mathcal{D}(Q)) = \{P(x) \mid x \in F\mathcal{D}(Q)\}.$$

Observar que

$$\begin{aligned} P(L_x) &= \sum \sigma((L_x)_{(1)})S((L_x)_{(2)}) = \sigma(L_x)S(L_x) = R_x^{-1}L_x^{-1} \text{ y} \\ P(R_x) &= \sum \sigma((R_x)_{(1)})S((R_x)_{(2)}) = \sigma(R_x)S(R_x) = L_x^{-1}R_x^{-1} \end{aligned}$$

coinciden, debido a la conmutatividad que se deduce de (1.1.2). Definiendo

$$\begin{aligned} \varphi : FQ &\to \mathcal{MH}(F\mathcal{D}(Q)) \\ x \in Q &\mapsto P(L_x) \\ x + y &\mapsto P(L_x + L_y) \end{aligned}$$

se ve claramente que es una aplicación biyectiva. Además,

$$P(L_x + L_y) = \sigma(L_x)S(L_x) + \sigma(L_y)S(L_y) = P(L_x)P(L_y),$$

luego φ es lineal. Se tiene también que $\varphi(xy) = P(xy) = P_{xy}$, mientras que

$$\begin{aligned} \varphi(x)\varphi(y) &= \rho^2(S((\varphi(x))_{(1)}))\varphi(y)\rho(S((\varphi(x))_{(2)})) = \rho^2(S(P_x)\varphi(y)\rho(S(P_x)) \\ &= \rho^2(P_x^{-1}\varphi(y)\rho(P_x^{-1}) = R_x^{-1}P_yL_x^{-1} = P_{yx}. \end{aligned}$$

□

Nota 1.3.10. Esta sorprendente aparición del álgebra opuesta $\mathcal{MH}(F\mathcal{D}(Q))^{op}$ no es casual: responde a la utilización de notación tanto a derecha como a izquierda para los operadores en las diferentes construcciones.

Proposición 1.3.11. *Sea Q un lazo de Moufang. Se tiene que $\mathcal{D}(FQ)$ es isomorfo a $F\mathcal{D}(Q)$.*

Demostración. Por definición, $\mathcal{D}(FQ) = \langle \bar{L}_x, \bar{R}_x \mid x \in FQ\rangle$ y $F\mathcal{D}(Q) = F\langle L_x, R_x \mid x \in Q\rangle$, ambos sujetos a las relaciones (1.1.2). LA aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : F\mathcal{D}(Q) &\to \mathcal{D}(FQ) \\ L_x &\mapsto \bar{L}_x \\ R_x &\mapsto \bar{R}_x \end{aligned}$$

es una aplicación lineal y biyectiva, así como un homomorfismo de álgebras de Hopf con trialdad, ya que

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi(L_x)) &= \Delta(\bar{L}_x) = \sum \bar{L}_{x_{(1)}} \otimes \bar{L}_{x_{(2)}} = (\varphi \otimes \varphi)\Delta(L_x) \\ \rho(\varphi(L_x)) &= \rho(\bar{L}_x) = \bar{R}_x = \varphi(\rho(L_x)) \\ \sigma(\varphi(L_x)) &= \sigma(\bar{L}_x) = \bar{R}_x^{-1} = \varphi(\sigma(L_x)), \end{aligned}$$

luego se tiene el isomorfismo. □

1.4. Algunos ejemplos no coconmutativos

En esta sección se tratan dos ejemplos bien conocidos de álgebras de Hopf no coconmutativas en las que se pueden definir homomorfismos de trialdad. En el primero de ellos se comprueba que la condición de coconmutatividad impuesta en el teorema 1.3.3 no es superflua, es decir, si la eliminamos no obtenemos que $\mathcal{MH}(H)$ sea álgebra de Moufang-Hopf.

1.4.1. Álgebras de Nichols

W. Nichols estudió por primera vez (bosonizaciones de) lo que hoy conocemos como álgebras de Nichols siguiendo una sugerencia de Kaplansky. Una referencia fundamental acerca de estas estructuras es el trabajo de Andruskiewitsch y Schneider [AS02].

En esta sección se considera la familia de álgebras de Nichols

$$E(n) = alg_F\langle g, x_1, \ldots, x_n \mid g^2 = 1, x_i^2 = 0, gx_i = -x_i g, x_i x_j = -x_j x_i, \forall i, j, i \neq j\rangle$$

con aplicaciones estructurales inducidas por

$$\Delta(g) = g \otimes g \qquad \epsilon(g) = 1 \qquad S(g) = g$$

$$\Delta(x_i) = 1 \otimes x_i + x_i \otimes g \qquad \epsilon(x_i) = 0 \qquad S(x_i) = -x_i g$$

Lema 1.4.1. *El grupo de automorfismos de $E(n)$ como álgbera de Hopf,* $\mathrm{Aut}_{Hopf}(E(n))$*, es isomorfo al grupo de matrices $GL_n(F)$.*

Demostración. Dada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in GL_n(F)$, la aplicación inducida por

$$\begin{aligned} f_A(g) &= g \\ f_A(x_i) &= a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \end{aligned}$$

define un automorfismo del álgebra de Hopf $E(n)$. Recíprocamente, todos los automorfismos de $E(n)$ pueden ser descritos de esta manera, ya que g es el único elemento de tipo grupo, luego su imagen por cualquier isomorfismo será un múltiplo escalar del propio g. Como f es lineal, se puede asumir que $f(g) = g$. $\square$

Si se considera el espacio vectorial $V = F\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$, entonces $GL(V) \cong \mathrm{Aut}_{Hopf}(E(n))$. Si se tienen $\sigma, \rho \in GL(V)$ tales que $\sigma^2 = 1 = \rho^3$ y $\sigma\rho = \rho^2\sigma$ (es decir, una representación del grupo simétrico S_3 en $GL(V)$ de manera que $(12) \mapsto \sigma$ y $(123) \mapsto \rho$), entonces, definiendo $\sigma(g) = g = \rho(g)$ se tienen dos automorfismos del álgebra de Nichols $E(n)$ que verifican $\sigma^2 = 1 = \rho^3$ y $\sigma\rho = \rho^2\sigma$.

La teoría de representación de grupos simétricos nos dice que, salvo isomorfismo, S_3 posee tres representaciones irreducibles [FH91]:

$$\begin{array}{lll} \text{trivial} : S_3 \to GL(\mathbb{C}), & \text{signatura} : S_3 \to GL(\mathbb{C}), & \text{natural} : S_3 \to GL(\mathbb{C}^2) \\ \tau \mapsto Id & \tau \mapsto sn(\tau) & \sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & & \rho \mapsto \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

donde ω es una raíz cúbica primitiva de la unidad. Dado $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \in V$, se tiene que

$$v^2 = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i \alpha_j x_i x_j = 0,$$

luego $(v + v')^2 = 0$ y, por tanto, $vv' = -v'v \ \forall v, v' \in V$. Además, $gv = -vg$, $\Delta(v) = 1 \otimes v + v \otimes g$, $S(v) = -vg$ y $\epsilon(v) = 0$. Así, cualquier base de V que se considere verifica las mismas propiedades que $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Si $F = \mathbb{C}$ (cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero) entonces, debido a la descomposición de V en suma de módulos irreducibles para S_3, se tiene que existe una base de V de manera que

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 1 &&&&&&& \\ &&&& \ddots &&&&&& \\ &&&&& 1 &&&&& \\ &&&&&& \omega &&&& \\ &&&&&&& \omega^2 &&& \\ &&&&&&&& \ddots && \\ &&&&&&&&& \omega & \\ &&&&&&&&&& \omega^2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

La condición de trialdad puede escribirse como

$$T(x) = T_{\sigma,\rho}(x) = \sum \sigma(x_{(1)})S(x_{(2)})\rho\sigma(x_{(3)})\rho(S(x_{(4)}))\rho^2\sigma(x_{(5)})\rho^2(S(x_{(6)})) = \epsilon(x)\cdot 1. \tag{1.4.1}$$

Veamos cuándo se verifica esta condición en los elementos básicos:

$$\begin{aligned}
T(1) &= \sigma(1)S(1)\rho\sigma(1)\rho(1)\rho^2\sigma(1)\rho^2(1) = 1\\
T(g) &= \sigma(g)S(g)\rho\sigma(g)\rho(g)\rho^2\sigma(g)\rho^2(g) = g^6 = 1\\
T(x_i) &= \rho^2(S(x_i)) + \rho^2\sigma(x_i)\rho^2(S(g)) + \rho(S(x_i))\rho^2\sigma(g)\rho^2(S(g))\\
&\quad + \rho\sigma(x_i)\rho(S(g))\rho^2\sigma(g)\rho^2(S(g)) + S(x_i)\rho\sigma(g)\rho(S(g))\rho^2\sigma(g)\rho^2(S(g))\\
&\quad + \sigma(x_i)S(g)\rho\sigma(g)\rho(S(g))\rho^2\sigma(g)\rho^2(S(g))\\
&= -\rho^2(x_i)g + \rho^2\sigma(x_i)g - \rho(x_i)g + \rho\sigma(x_i)g - x_ig + \sigma(x_i)g
\end{aligned}$$

Como $\epsilon(1) = 1 = \epsilon(g)$, la condición de trialdad se verifica para 1 y g. Para x_i habrá que distinguir casos, dependiendo de en qué tipo de módulo se encuentre:

módulo trivial: $\sigma(x_i) = x_i = \rho(x_i)$:

$$T(x_i) = -x_ig + x_ig - x_ig + x_ig - x_ig + x_ig = 0$$

módulo signatura: $-\sigma(x_i) = x_i = \rho(x_i)$:

$$T(x_i) = -x_ig - x_ig - x_ig - x_ig - x_ig - x_ig = -6x_ig$$

módulo natural: $\sigma(x_i) = x_j, \rho(x_i) = \xi x_i$:

$$T(x_i) = -\xi^2x_ig + \xi x_jg - \xi x_ig + \xi^2x_jg - x_ig + x_jg = (\xi^2+\xi+1)(x_j - x_i)g = 0$$

Como $\epsilon(x_i) = 0$ y la característica del cuerpo es cero, los elementos básicos x_i no pueden estar en el módulo signatura (sí en el trivial y en el natural). por tanto, las matrices de ρ y σ en la base adecuada quedan:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& \omega &&&& \\ &&&& \omega^2 &&& \\ &&&&& \ddots && \\ &&&&&& \omega & \\ &&&&&&& \omega^2 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& 0 & 1 &&& \\ &&& 1 & 0 &&& \\ &&&&& \ddots && \\ &&&&&& 0 & 1 \\ &&&&&& 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota 1.4.2. La no aparición del módulo signatura en $V = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ no implica que $E(n)$ no posea tales submódulos. Por ejemplo, sea $E(n)$ con $n \geq 4$ y una base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ en la que

$$\rho = \begin{pmatrix} \omega & & & & & & & \\ & \omega^2 & & & & & & \\ & & \omega & & & & & \\ & & & \omega^2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $\mathbb{C}\langle x_1x_4 - x_2x_3 \rangle$ es isomorfo al módulo signatura, ya que

$$\rho(x_1x_4 - x_2x_3) = \omega\omega^2 x_1x_4 - \omega^2\omega x_2x_3 = x_1x_4 - x_2x_3$$
$$\sigma(x_1x_4 - x_2x_3) = x_2x_3 - x_1x_4 = -(x_1x_4 - x_2x_3)$$

Veamos ahora que si $x' = x_j x$ con $x = x_{i_1}x_{i_1}\cdots x_{i_m}$ producto de $x_i's$ distintos (y distintos de x_j), entonces por inducción en $|x'| = m+1$ (el grado de x') también se verifica que $T(x') = \epsilon(x') \cdot 1$ y, por tanto, $E(n)$ es un álgebra de Hopf con trialdad (no coconmutativa). Si denotamos $P(x) = \sum \sigma(x_{(1)})S(x_{(2)})$, entonces

$$T(x) = \sum P(x_{(1)})\rho(P(x_{(2)}))\rho^2(P(x_{(3)})).$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} P(xg) &= \sum \sigma(x_{(1)})\sigma(g_{(1)})S(g_{(2)})S(x_{(2)}) = \sum \sigma(x_{(1)})\sigma(g)S(g)S(x_{(2)}) \\ &= \sum \sigma(x_{(1)})S(x_{(2)}) = P(x) \\ P(gx) &= (-1)^{|x|}P(xg) = (-1)^{|x|}P(x) \qquad (1.4.2) \\ P(x') &= \sum \sigma(x'_{(1)})S(x'_{(2)}) = \sum \sigma(x_{(1)})S(x_{(2)})S(x_j) + \sigma(x_j)\sigma(x_{(1)})S(x_{(2)})S(g) \\ &\overset{(*)}{=} \sum \sigma(x_{(1)})S(x_{(2)})S(x_j) + \sigma(x_{(1)})S(x_{(2)})\sigma(x_j)S(g) \\ &= \sum \sigma(x_{(1)})S(x_{(2)})(S(x_j) + \sigma(x_j)S(g)) \\ &= P(x)(-x_j + \sigma(x_j)S(g)) = P(x)P(x_j) \end{aligned}$$

$$P(x_jx) = P(x)P(x_j) = P(x_{i_m})\ldots P(x_{i_1})P(x_j) = P(x_{i_k}\ldots x_{i_m})P(x_jx_{i_1}\ldots x_{i_{k-1}})$$

$$P(x)P(x_j) = P(x_jx) = (-1)^{|x|}P(xx_j) = (-1)^{|x|}P(x_j)P(x), \tag{1.4.3}$$

donde la igualdad $(*)$ se tiene porque x es producto de x_i's distintos, luego cada sumando $x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ es producto de $1 \otimes x_i$ y $x_i \otimes g$, luego cada expresión $\sigma(x_{(1)})S(x_{(2)})$ es producto de $-x_ig$ y x_kg, por lo que x_j conmuta con ellos. Veamos ahora que si $|x| \geq 1$ se verifica que $\sum P(x'_{(1)})\rho(P(x'_{(2)}))\rho^2(P(x'_{(3)})) = \epsilon(x') \cdot 1 = \epsilon(x_j)\epsilon(x) \cdot 1 = 0$:

$$\begin{aligned}
T(x') =& \sum \Big(P(x_{(1)})\rho(P(x_{(2)}))\rho^2(P(x_jx_{(3)})) + P(x_{(1)})\rho(P(x_jx_{(2)}))\rho^2(P(gx_{(3)})) \\
& + P(x_jx_{(1)})\rho(P(gx_{(2)}))\rho^2(P(gx_{(3)}))\Big) \\
\overset{(1.4.2),(1.4.3)}{=} & \sum \Big(P(x_{(1)})\rho(P(x_{(2)}))\rho^2(P(x_{(3)}))\rho^2(P(x_j)) \\
& + (-1)^{|x_{(3)}|}P(x_{(1)})\rho(P(x_{(2)}))\rho(P(x_j))\rho^2(P(x_{(3)})) \\
& + (-1)^{|x_{(2)}|+|x_{(3)}|}P(x_{(1)})P(x_j)\rho(P(x_{(2)}))\rho^2(P(x_{(3)}))\Big) \\
\overset{(1.4.3)}{=} & \sum \Big(P(x_{(1)})\rho(P(x_{(2)}))\rho^2(P(x_{(3)}))\rho^2(P(x_j)) \\
& + (-1)^{|x_{(2)}|+|x_{(3)}|}P(x_{(1)})\rho(P(x_j))\rho(P(x_{(2)}))\rho^2(P(x_{(3)})) \\
& + (-1)^{|x_{(1)}|+|x_{(2)}|+|x_{(3)}|}P(x_j)P(x_{(1)})\rho(P(x_{(2)}))\rho^2(P(x_{(3)}))\Big) \\
\overset{(\cdot)}{=} & \sum \Big(P(x_{(1)})\rho(P(x_{(2)}))\rho^2(P(x_{(3)}))\rho^2(P(x_j)) \\
& + (-1)^{|x_{(1)}|+|x_{(2)}|+|x_{(3)}|}\rho(P(x_j))P(x_{(1)})\rho(P(x_{(2)}))\rho^2(P(x_{(3)})) \\
& + (-1)^{|x_{(1)}|+|x_{(2)}|+|x_{(3)}|}P(x_j)P(x_{(1)})\rho(P(x_{(2)}))\rho^2(P(x_{(3)}))\Big) \\
=& T(x)\rho^2(P(x_j)) + (-1)^{|x_{(1)}|+|x_{(2)}|+|x_{(3)}|}\Big(\rho(P(x_j))T(x) + P(x_j)T(x)\Big) \\
\overset{\text{inducción}}{=} & 0.
\end{aligned}$$

Para la igualdad $(\cdot)$ notar que como $P(x_j) = (\sigma(x_j) - x_j)g$, si $\rho(x_j) = \xi x_j$ entonces se tiene que $\rho(P(x_j)) = (\xi^2\sigma(x_j) - \xi x_j)g$ y

$$\begin{aligned}
P(x_{(1)})\rho(P(x_j)) =& P(x_{(1)})(\xi^2\sigma(x_j) - \xi x_j)g = P(x_{(1)})\left(\xi^2(\sigma(x_j) - x_j) + (\xi^2 - \xi)x_j\right)g \\
=& P(x_{(1)})(\xi^2P(x_j) + (\xi^2 - \xi)x_jg) \\
=& (-1)^{|x_{(1)}|}\left(\xi^2P(x_j) + (\xi^2 - \xi)x_jg\right)P(x_{(1)}) \\
=& (-1)^{|x_{(1)}|}\rho(P(x_j))P(x_{(1)}).
\end{aligned}$$

Por tanto, se verifica $T(x') = \epsilon(x') \cdot 1$ para todo elemento $x' \in E(n)$, es decir, $E(n)$ es un álgebra de Hopf (no coconmutativa) con trialdad. Calculamos ahora el conjunto

$\mathcal{MH}(E(n)) = \{P(x) \mid x \in E(n)\}$ y vemos qué propiedades verifica:

$$\begin{aligned} P(g) &= \sigma(g)S(g) = g^2 = 1 \\ P(x_i) &= (\sigma(x_i) - x_i)g \\ P(\prod_{i=1}^{k} x_i) &= \prod_{i=1}^{k} P(x_i) = \prod_{i=1}^{k} \pm(\sigma(x_i) - x_i)g^k. \end{aligned}$$

Calculamos $\Delta(P(x_i))$ para comprobar si la estructura de coálgebra de $E(n)$ es heredada por $\mathcal{MH}(E(n))$:

$$\begin{aligned} \Delta(P(x_i)) &= \Delta((\sigma(x_i) - x_i)g) = \Delta(\sigma(x_i) - x_i)\Delta(g) \\ &= (1 \otimes (\sigma(x_i) - x_i) + (\sigma(x_i) - x_i) \otimes g)(g \otimes g) \\ &= g \otimes (\sigma(x_i) - x_i)g + (\sigma(x_i) - x_i)g \otimes 1. \end{aligned}$$

Como $g \notin \mathcal{MH}(E(n))$, entonces $\Delta(P(x_i)) \notin \mathcal{MH}(E(n)) \otimes \mathcal{MH}(E(n))$, luego $\mathcal{MH}(E(n))$ no hereda la estructura de coálgebra de $E(n)$. Por tanto, la condición de coconmutatividad impuesta en el teorema es necesaria para dotar a $\mathcal{MH}(H)$ de estructura de coálgebra.

1.4.2. Álgebras de Taft

Sea el álgebra de Taft

$$H = H(q, n) = F\langle x_1, \ldots, x_n, y \mid x_i^q = 1, x_i x_j = x_j x_i, y x_i = \omega x_i y, y^q = 0\rangle,$$

donde $\omega \in F$ es una raíz q-ésima primitiva de la unidad, con aplicaciones estructurales inducidas por

$$\begin{aligned} \Delta(x_i) &= x_i \otimes x_i & \epsilon(x_i) &= 1 & S(x_i) &= x_i^{q-1} \\ \Delta(y) &= y \otimes x_1 + 1 \otimes y & \epsilon(y) &= 0 & S(y) &= -\omega^{-1} x_1^{q-1} y. \end{aligned}$$

H es un caso particular de las álgebras definidas en [BDG00]. Usando el teorema 2.1 de este trabajo se tiene que

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{Aut}_{Hopf}(H) \Leftrightarrow & f|_C \in \mathrm{Aut}_{Grupo}(C), \text{ donde } C = Grupo\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \\ & f(x_1) = x_1 \\ & c_1^* = c_1^* \circ f|_C, \text{ donde } c_1^* : C \to F \end{aligned}$$

$$x_i \mapsto \omega.$$

Si $f \in \mathrm{Aut}_{Hopf}(H)$ entonces, como y es un elemento $(x_1, 1)$-primitivo, $f(y)$ también debe serlo, es decir, debe verificar $\Delta(f(y)) = f(y) \otimes x_1 + 1 \otimes f(y)$, luego $f(y) = \lambda y$ con $\lambda \in F$. Podemos asumir que $f(y) = y$, ya que f es lineal.

La condición de trialdad 1.4.1 respecto de f y g se verifica trivialmente para x_1 e y cualesquiera que sean $f, g \in \mathrm{Aut}_{Hopf}(H)$, ya que se tiene que

$$\begin{aligned}
T_{f,g}(x_1) =& f(x_1)S(x_1)gf(x_1)g(S(x_1))g^2f(x_1)g^2(S(x_1)) \\
\overset{f(x_1)=x_1=g(x_1)}{=}& x_1S(x_1)x_1S(x_1)x_1S(x_1) = \epsilon(x_1)\epsilon(x_1)\epsilon(x_1)\cdot 1 = 1 = \epsilon(x_1)\cdot 1 \\
T_{f,g}(y) =& g^2(S(y)) + g^2f(y)g^2(S(x_1)) + g(S(y))g^2f(x_1)g^2(S(x_1)) \\
&+ gf(y)g(S(x_1))g^2f(x_1)g^2(S(x_1)) + S(y)gf(x_1)g(S(x_1))g^2f(x_1)g^2(S(x_1)) \\
&+ f(y)S(x_1)gf(x_1)g(S(x_1))g^2f(x_1)g^2(S(x_1)) \\
\overset{\substack{f(x_1)=x_1=g(x_1) \\ f(y)=y=g(y)}}{=}& -\omega^{-1}x_1^{q-1}y + yx_1^{q-1} - \omega^{-1}x_1^{q-1}yx_1x_1^{q-1} + yx_1^{q-1}x_1x_1^{q-1} \\
&- \omega^{-1}x_1^{q-1}yx_1x_1^{q-1}x_1x_1^{q-1} + yx_1^{q-1}x_1x_1^{q-1}x_1x_1^{q-1} \\
=& -yx_1^{q-1} + yx_1^{q-1} - yx_1^{q-1} + yx_1^{q-1} - yx_1^{q-1} + yx_1^{q-1} = 0 = \epsilon(y)\cdot 1.
\end{aligned}$$

Además, para $x \in H$,

$$\begin{aligned}
P(xy) &= \sum \sigma(x_{(1)})\sigma(y_{(1)})S(y_{(2)})S(x_{(2)}) = \sum \sigma(x_{(1)})P(y)S(x_{(2)}) = 0 \\
&= \epsilon(x)\epsilon(y)\cdot 1,
\end{aligned}$$

ya que

$$P(y) = \sigma(y)S(x_1) + \sigma(1)S(y) = yx_1^{q-1} - \omega^{-1}x_1^{q-1}y = \omega^{q-1}x_1^{q-1}y - \omega^{-1}x_1^{q-1}y = 0.$$

Por tanto, H tendrá trialdad si se cumple que

$$\langle x_2, \ldots, x_n\rangle \cong \langle x_2\rangle \times \langle x_n\rangle \cong C_q \times \cdots \times C_q$$

(donde C_q es el grupo cíclico de orden q) es un grupo con trialdad σ, ρ y también se verifican las condiciones $c_1^* = c_1^* \circ \sigma$ y $c_1^* = c_1^* \circ \rho$.

Si consideramos el grupo cíclico C_q como grupo aditivo, podemos asociar a cada automorfismo $f \in \mathrm{Aut}_{Grupo}(C_q \times \cdots \times C_q)$, donde $f : x_i \mapsto (e_{2i}x_2, \ldots, e_{ni}x_n)$, una aplicación

$f' \in \mathrm{Aut}_{Grupo}(\mathbb{Z}_q \times \cdots \times \mathbb{Z}_q)$ aditiva con inversa, es decir, una aplicación lineal cuya matriz coordenada en la base canónica de $C_q \times \cdots \times C_q$ es de la forma $\begin{pmatrix} e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix}$ con $e_{ij} \in \mathbb{Z}_q$ y determinante invertible en $\mathbb{Z}_q$. La condición $c_1^* = c_1^* \circ f$ se traduce en que $\sum_i e_{ij} \equiv 1(mod\ q)\ \forall j = 2, \ldots, n$.

Ejemplo 1.4.3. *Sea el álgebra de Hopf*

$$H = H(4,4) = \mathbb{C}\langle x_1, x_2, x_3, x_4, y \mid x_j^4 = 1, y^4 = 0, x_j x_k = x_k x_j, y x_j = i x_j y\ \forall j,k = 1,2,3,4\rangle,$$

donde $i \in \mathbb{C}$ es la unidad imaginaria ($i^2 = -1$). Las aplicaciones estructurales de H quedan

$$\begin{array}{lll} \Delta(x_j) = x_j \otimes x_j & \epsilon(x_j) = 1 & S(x_j) = x_j^3 \\ \Delta(y) = y \otimes x_1 + 1 \otimes y & \epsilon(y) = 0 & S(y) = i x_1^3 y. \end{array}$$

Se tiene que el grupo generado por x_2, x_3, x_4 es un grupo con trialdad

$$\begin{array}{ll} \sigma : \langle x_2, x_3, x_4\rangle \to \langle x_2, x_3, x_4\rangle, & \rho : \langle x_2, x_3, x_4\rangle \to \langle x_2, x_3, x_4\rangle \\ \quad x_2 \mapsto x_3 & \quad x_2 \mapsto x_3 \\ \quad x_3 \mapsto x_2 & \quad x_3 \mapsto x_4 \\ \quad x_4 \mapsto x_4 & \quad x_4 \mapsto x_2. \end{array}$$

Notar que las matrices asociadas a σ y ρ son

$$\sigma \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ y\ \rho \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estas matrices tienen determinante invertible en $\mathbb{Z}_4$, ya que $det(\sigma) = -1$ y $det(\rho) = 1$. Sus inversas son

$$\sigma^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ y\ \rho^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es inmediato comprobar que la aplicación

$$\begin{aligned} c_1^* : \langle x_2, x_3, x_4 \rangle &\to \mathbb{C} \\ x_j &\mapsto i \end{aligned}$$

verifica $c_1^* \circ \sigma = c_1^* = c_1^* \circ \rho$ *(notar además que la suma de los elementos de cada fila en ambas matrices es* 1*).*

1.5. Álgebras de Lie con trialdad

Antes de entrar en consideraciones teóricas, se presenta el ejemplo estándar de álgebra de Lie con trialdad. Dadas $\mathbb{O} = \mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ un álgebra de Cayley generalizada con norma $n(\,)$ sobre un cuerpo de característica distinta de 2 y de 3 y $\mathbb{O}_0$ el álgebra de Malcev de los elementos de traza cero en $\mathbb{O}$, se considera $\mathfrak{o}(\mathbb{O}, n)$ el álgebra de Lie ortogonal formada por todos los elementos $d \in \mathrm{End}(\mathbb{O})$ que son antisimétricos con respecto a $n(\,)$ [ZSSS82]. El principio de rrialdad (local) [Sch95] asegura que para cada $d_1 \in \mathfrak{o}(\mathbb{O}, n)$ existen $d_2, d_3 \in \mathfrak{o}(\mathbb{O}, n)$ únicos de manera que

$$d_1(xy) = d_2(x)y + xd_3(y) \tag{1.5.1}$$

para todo $x, y \in \mathbb{O}$. Las aplicaciones $d_1 \mapsto d_2$ y $d_1 \mapsto d_3$ son automorfismos de $\mathfrak{o}(\mathbb{O}, n)$, de los cuales se conoce una descripción explícita. Notar que

$$\mathfrak{o}(\mathbb{O}, n) = \mathrm{Der}(\mathbb{O}) \oplus \langle L_a \mid a \in \mathbb{O}_0 \rangle \oplus \langle R_b \mid b \in \mathbb{O}_0 \rangle$$

y que las identidades alternativas $x(xy) = x^2y$, $(yx)x = yx^2$ son equivalentes a las relaciones siguientes:

$$L_a(xy) = T_a(x)y - xL_a(y) \quad \text{y} \quad R_a(xy) = -R_a(x)y + xT_a(y)$$

donde L_a, R_a denotan los operadores de multiplicación a izquierda y derecha por a respectivamente y $T_a = L_a + R_a$. Por tanto, los automorfismos $d_1 \mapsto d_2$ y $d_1 \mapsto d_3$ vienen determinados por

$$\begin{array}{ccc} d & \mapsto & d \\ L_a & \mapsto & T_a \\ R_a & \mapsto & -R_a \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} d & \mapsto & d \\ L_a & \mapsto & -L_a \\ R_a & \mapsto & T_a \end{array}$$

para cualesquiera $d \in \mathrm{Der}(\mathbb{O})$ y $a \in \mathbb{O}_0$. Esto prueba que las aplicaciones $\rho, \sigma \colon \mathfrak{o}(\mathbb{O}, n) \to \mathfrak{o}(\mathbb{O}, n)$ dadas por

$$\begin{array}{ccc} d & \overset{\rho}{\mapsto} & d \\ L_a & \mapsto & R_a \\ R_a & \mapsto & -T_a \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} d & \overset{\sigma}{\mapsto} & d \\ L_a & \mapsto & -R_a \\ R_a & \mapsto & -L_a \end{array}$$

son automorfismos y que $\mathfrak{o}(\mathbb{O}, n)$ es un álgebra de Lie con trialdad relativa a ρ y σ.

En esta sección se prueba que el álgebra envolvente universal de un álgebra de Lie con trialdad es un álgebra de Hopf con trialdad. En lo que sigue, $S(\xi; f)$ denotará el subespacio correspondiente al valor propio ξ de f. Extendiendo escalares, se puede asumir que el cuerpo base F contiene una raíz cúbica primitiva de la unidad ω.

Lema 1.5.1. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, $\lambda \colon S_3 \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ una acción de S_3 como automorfismos de $\mathfrak{g}$ y $\sigma = \lambda((12))$. Entonces*

$$\{P(x) \mid x \in U(\mathfrak{g})\} = \mathrm{span}\langle a_n \circ (\cdots (a_2 \circ a_1)) \mid a_1, \dots, a_n \in S(-1; \sigma), n \in \mathbb{N}\rangle$$

donde $P(x) = \sum \sigma(x_{(1)}) S(x_{(2)})$ y $a \circ x = ax + xa$.

Demostración. Se procede por inducción en el grado de filtración de $x \in U(\mathfrak{g})$. En el caso en que $x = a \in \mathfrak{g}$, $P(a) = \sigma(a) - a \in S(-1; \sigma)$. En general, dado $a_1 \cdots a_{n+1} \in U(\mathfrak{g})$ se puede asumir que $a_i \in S(-1; \sigma) \cup S(1; \sigma)$ $i = 1, \dots, n+1$. Se distinguen dos casos:

i) *Al menos un a_i pertenece a $S(1; \sigma)$*: en este caso, salvo términos de menor grado, se puede asumir que $a_{n+1} \in S(1; \sigma)$. Con $x = a_1 \cdots a_n$, $a = a_{n+1}$ se obtiene

$$P(xa) = \sum \sigma(x_{(1)}) \sigma(a) S(x_{(2)}) - \sum \sigma(x_{(1)}) a S(x_{(2)}) = 0$$

ii) $a_1, \dots, a_{n+1} \in S(-1; \sigma)$: en este caso, con $x = a_2 \cdots a_{n+1}$ y $a = a_1$ se tiene

$$P(ax) = \sum \sigma(a) \sigma(x_{(1)}) S(x_{(2)}) - \sum \sigma(x_{(1)}) S(x_{(2)}) a = -a \circ P(x)$$

y el resultado se sigue por inducción.

□

Lema 1.5.2. *Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre un cuerpo de característica distinta de 2 y de 3 con dos automorfismos σ, ρ tales que $\sigma^2 = \rho^3 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$, $\sigma\rho = \rho^2\sigma$ se tiene que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie con trialdad relativa a ρ y σ si y solo si $S(1; \rho) \subseteq S(1; \sigma)$.*

Demostración. Dado $a \in S(1;\rho)$, (1.1.7) implica que $3\sigma(a) - 3a = 0$, luego $\sigma(a) = a$. Recíprocamente, para elementos $a \in S(1;\rho)$, la condición (1.1.7) se sigue de la hipótesis, mientras que para elementos $a \in S(\omega;\rho)$ se tiene que

$$\sum_{\tau \in S_3} \mathrm{sn}(\tau)\tau(a) = (1+\omega+\omega^2)(a - \sigma(a)) = 0.$$

Como $\mathfrak{g} = S(1;\rho) \oplus S(\omega;\rho) \oplus S(\omega^2;\rho)$ se tiene. $\square$

El álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ actúa en $\mathfrak{g}$ mediante

$$x \cdot a = \sum x_{(1)} a S(x_{(2)})$$

donde S denota la antípoda. Con esta notación se tiene:

Lema 1.5.3. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con trialdad relativa a ρ y σ sobre un cuerpo de característica distinta de 2 y de 3. Se tiene que $U(\mathfrak{g})$ verifica*

$$\begin{aligned} &\epsilon(x)a - P(x)\cdot\sigma(a) + P(x)\cdot\rho(a) \\ &\quad -\rho^2\sigma(P(x))\cdot\rho\sigma(a) + \rho^2\sigma(P(x))\cdot\rho^2(a) - \epsilon(x)\rho^2(\sigma(a)) = 0. \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Demostración. Primeramente, observar que $\sigma\rho = \rho^2\sigma$ implica

$$\sigma(S(\omega;\rho)) = S(\omega^2;\rho).$$

En particular, por el lema 1.5.2 cualquier elemento $a \in S(-1;\sigma)$ puede escribirse como $a = a' - a''$ con $a' \in S(\omega;\rho)$ y $a'' = \sigma(a')$. Notar también que, por el lema 1.5.1, puede asumirse que $P(x) = a_n \circ (\cdots(a_2 \circ a_1))$ con $a_1,\ldots,a_n \in S(-1;\sigma)$. Esto implica que $\sigma(P(x)) = (-1)^n P(x)$.

Por el lema 1.5.2, el resultado es obvio si $a \in S(1;\rho)$, luego se asume que $a \in S(\omega;\rho) \cup S(\omega^2;\rho)$. De hecho, solo es necesario probar (1.5.2) para $a = a' \in S(\omega;\rho)$ porque el caso $a \in S(\omega^2;\rho)$ es consecuencia de él aplicando σ a (1.5.2).

Se denota $p = a_n \circ (\cdots(a_2 \circ a_1))$. Si $n = 0$ entonces $p = 1$ y (1.5.2) es (1.1.7), lugo se asume que $n \geq 1$. La ecuación (1.5.2) se reescribe ahora como

$$-p\cdot a'' + \omega p\cdot a' - (-1)^n\omega^2\rho^2(p)\cdot a'' + (-1)^n\omega^2\rho^2(p)\cdot a' = 0 \tag{1.5.3}$$

con $a'' = \sigma(a')$.

Para simplificar cálculos, se escribe p_0, p', p'' para las proyecciones de p en $S(1;\rho)$, $S(\omega;\rho)$ y $S(\omega^2;\rho)$ respectivamente, donde ρ denota también la extensión de ρ hasta un automorfismo de $U(\mathfrak{g})$. Notar que $\sigma(p) = (-1)^n p$ implica que $\sigma(p_0) = (-1)^n p_0$, $\sigma(p') = (-1)^n p''$ y $\sigma(p'') = (-1)^n p'$.

Sustituyendo $p = p_0 + p' + p''$ en (1.5.3) y tomando proyecciones en $S(1;\rho), S(\omega;\rho)$ y $S(\omega^2;\rho)$ se obtiene que (1.5.3) es equivalente a

(i) $-\omega p' \cdot a'' + \omega^2 p'' \cdot a' = -(-1)^n \left(-\omega^2 p' \cdot a'' + \omega p'' \cdot a'\right)$,

(ii) $p_0 \cdot a' - \omega^2 p'' \cdot a'' = -(-1)^n \left(\omega p_0 \cdot a' - \omega^2 p'' \cdot a''\right)$ y

(iii) $\omega p' \cdot a' - p_0 \cdot a'' = -(-1)^n \left(\omega p' \cdot a' - \omega^2 p_0 \cdot a''\right)$.

Por tanto, es preciso verificar que (i), (ii) y (iii) son ciertas.

Para probar (i) observar que $-\omega p' \cdot a'' + \omega^2 p'' \cdot a' \in S(1;\rho) \cap \mathfrak{g}$. Por el lema 1.5.2 se tiene que

$$-\omega p' \cdot a'' + \omega^2 p'' \cdot a' = \sigma(-\omega p' \cdot a'' + \omega^2 p'' \cdot a') = -(-1)^n \omega p'' \cdot a' + (-1)^n \omega^2 p' \cdot a'',$$

como se buscaba.

La igualdad (iii) se deduce de (ii) sin más que aplicarle σ.

Se divide la demostración de (ii) en dos casos, dependiendo de la paridad de n. Si n es impar, entonces (ii) es equivalente a

$$p_0 \cdot a' = 0 \tag{impar}$$

mientras que en el caso en que n is par (ii) es equivalente a

$$p_0 \cdot a' = -2p'' \cdot a'' \tag{par}$$

Por inducción en n, se asume que se tiene (1.5.3) para p y se considera $q = b \circ p$ con $b = b' - b'' \in S(-1;\sigma)$, $b' \in S(\omega;\rho)$ y $b'' = \sigma(b')$. Las proyecciones de q en $S(1;\rho), S(\omega;\rho)$ y $S(\omega^2;\rho)$ son

$$\begin{aligned} q_0 &= b'p'' + p''b' - b''p' - p'b'', \\ q' &= b'p_0 + p_0b' - b''p'' - p''b'' \text{ y} \\ q'' &= -p_0b'' - b''p_0 + b'p' + p'b' \end{aligned}$$

respectivamente.

Si se toma n impar, debe probarse que $q_0 \cdot a' = -2q'' \cdot a''$. Observar que la hipótesis de inducción implica que $p_0 \cdot a' = 0$. Aplicando σ a ambos lados de la igualdad se tiene que también $p_0 \cdot a'' = 0$. La igualdad (i) implica que $p' \cdot a'' = -p'' \cdot a'$. El conmutador $[b'', a']$ pertenece a $S(1;\rho)$, luego por el lema 1.5.2, $[b'', a'] = [b', a'']$. Con esta información se calcula $q_0 \cdot a' + 2q'' \cdot a''$ como sigue

$$\begin{aligned} q_0 \cdot a' + 2q'' \cdot a'' &= (b'p'' + p''b' - b''p' - p'b'') \cdot a' + 2(b'p' + p'b') \cdot a'' \\ &= (p''b' - b''p') \cdot a' + (b'p' + p'b') \cdot a'' \\ &= (p''b' - b''p') \cdot a' + (-b'p'' + p'b'') \cdot a' \\ &= -([b', p''] + [b'', p']) \cdot a'. \end{aligned}$$

Como $[b' + b'', a_i] \in S(-1;\sigma)$ y

$$[b' + b'', p] = \sum_{i=1}^{n} a_n \circ (\cdots ([b' + b'', a_i] \circ (\cdots (a_2 \circ a_1))))$$

por (par), la acción de la proyección de $[b' + b'', p]$ en $S(1;\rho)$ anula a'. Esta proyección es $[b', p''] + [b'', p']$ luego $([b', p''] + [b'', p']) \cdot a' = 0$. Esto prueba que $q_0 \cdot a' = -2q'' \cdot a''$.

En el caso en que n es par, debe probarse que $q_0 \cdot a' = 0$. La hipótesis de inducción, junto con (i), (ii) y (iii) para p, implica que $p' \cdot a'' = p'' \cdot a'$, $p_0 \cdot a' = -2p'' \cdot a''$ y $p_0 \cdot a'' = -2p' \cdot a'$. La hipótesis de inducción aplicada a $[b' + b'', p] = ([b', p''] + [b'', p']) + ([b', p_0] + [b'', p'']) + ([b'', p_0] + [b', p'])$ implica que $([b', p''] + [b'', p']) \cdot a' = -2([b', p'] + [b'', p_0]) \cdot a''$. Así,

$$\begin{aligned} 0 &= ([b', p''] + [b'', p']) \cdot a' + 2([b', p'] + [b'', p_0]) \cdot a'' \\ &= 3b'p'' \cdot a' - p''b' \cdot a' + b''p' \cdot a' - p'b'' \cdot a' - 2p'b' \cdot a'' - 4b''p' \cdot a' + 4p''b' \cdot a' \\ &= 3b'p'' \cdot a' + 3p''b' \cdot a' - 3b''p' \cdot a' - 3p'b'' \cdot a' \\ &= 3q_0 \cdot a'. \end{aligned}$$

Como la característica del cuerpo es distinta de 2 y de 3, se tiene que $q_0 \cdot a' = 0$, con lo que se concluye la prueba. □

Teorema 1.5.4. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con trialdad relativa a ρ y σ sobre un cuerpo de característica distinta de 2 y de 3. Entonces su álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Hopf con trialdad relativa a ρ y σ.*

Demostración. Se prueba (1.1.42) por inducción en el grado de filtración de x. Si este grado es 0 entonces (1.1.42) se tiene trivialmente. Por tanto, se asume que (1.1.42) se verifica para $x \in U(\mathfrak{g})$ con grado de filtración $\leq n$ y se prueba que también es válido para ax con $a \in \mathfrak{g}$. Notar que $P(ax) = \sigma(a)P(x) - P(x)a$.

Como por inducción se tiene que $\sum P(x_{(1)})\rho(P(x_{(2)}))\rho^2(P(x_{(3)})) = \epsilon(x)1$, entonces también se verifican las igualdades

$$\begin{aligned}
\sum \rho(P(x_{(1)}))\rho^2(P(x_{(2)})) &= S(P(x)) \text{ y} \\
\sum P(x_{(1)})\rho(P(x_{(2)})) &= S(\rho^2(x)).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
&\sum P((ax)_{(1)})\rho(P((ax)_{(2)}))\rho^2(P((ax)_{(3)})) \\
&\quad = \sum P(ax_{(1)})\rho(P(x_{(2)}))\rho^2(P(x_{(3)})) + P(x_{(1)})\rho(P(ax_{(2)}))\rho^2(P(x_{(3)})) \\
&\qquad + P(x_{(1)})\rho(P(x_{(2)}))\rho^2(P(ax_{(3)})) \\
&\quad = \sum \left(\sigma(a)P(x_{(1)}) - P(x_{(1)})a\right) S(P(x_{(2)})) \\
&\qquad + P(x_{(1)})\rho(\sigma(a)P(x_{(2)}) - P(x_{(2)})a)\rho^2(P(x_{(3)})) \\
&\qquad + \sum S(\rho^2(P(x_{(1)})))\rho^2(\sigma(a)P(x_{(2)}) - P(x_{(2)})a) \\
&\quad = \epsilon(x)\sigma(a) - \sum P(x_{(1)})aS(P(x_{(2)})) \\
&\qquad + \sum P(x_{(1)})\rho\sigma(a)S(P(x_{(2)})) - \sum S(\rho^2(P(x_{(1)})))\rho(a)\rho^2(P(x_{(2)})) \\
&\qquad + \sum S(\rho^2(P(x_{(1)})))\rho^2\sigma(a)\rho^2(P(x_{(2)})) - \epsilon(x)\rho^2(a) \\
&\quad = \epsilon(x)\sigma(a) - P(x) \cdot a + P(x) \cdot \rho\sigma(a) - \rho^2\sigma(P(x)) \cdot \rho(a) \\
&\qquad + \rho^2\sigma(P(x)) \cdot \rho^2\sigma(a) - \epsilon(x)\rho^2(a).
\end{aligned}$$

El lema 1.5.3 aplicado a $\sigma(a)$ implica

$$\sum P((xa)_{(1)})\rho(P((xa)_{(2)}))\rho^2(P((xa)_{(3)})) = 0 = \epsilon(xa)1.$$

$\square$

1.6. Construcción del álgebra envolvente universal de un álgebra de Malcev

En [PIS04], la construcción del álgebra envolvente universal de un álgebra de Malcev $\mathfrak{m}$ sobre un cuerpo F de característica distinta de 2 y de 3 comienza asociando un álgebra de Lie, $\mathcal{L}(\mathfrak{m})$, al álgebra de Malcev $\mathfrak{m}$. Esta álgebra de Lie es el álgebra de Lie generada por los símbolos $\{\lambda_a, \rho_a \mid a \in \mathfrak{m}\}$ sujetos a las relaciones

$$\begin{array}{rl} \lambda_{\alpha a+\beta b} = \alpha\lambda_a + \beta\lambda_b & \rho_{\alpha a+\beta b} = \alpha\rho_a + \beta\rho_b \\ {[\lambda_a, \lambda_b]} = \lambda_{[a,b]} - 2[\lambda_a, \rho_b] & [\rho_a, \rho_b] = -\rho_{[a,b]} - 2[\lambda_a, \rho_b] \\ {[\lambda_a, \rho_b]} = [\rho_a, \lambda_b] & \end{array} \tag{1.6.1}$$

para cualesquiera $a, b \in \mathfrak{m}$, $\alpha, \beta \in F$. Con la notación

$$\mathrm{ad}_a = \lambda_a - \rho_a, \quad T_a = \lambda_a + \rho_a \quad \text{y} \quad D_{a,b} = \mathrm{ad}_{[a,b]} - 3[\lambda_a, \rho_b]$$

se prueba que $\mathcal{L}(\mathfrak{m}) = \mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{L}_-$ con

$$\mathcal{L}_+ = \mathrm{span}\langle \mathrm{ad}_a, D_{a,b} \mid a, b \in \mathfrak{m}\rangle \text{ y } \mathcal{L}_- = \mathrm{span}\langle T_a \mid a \in \mathfrak{m}\rangle,$$

donde la aplicación $T_a \mapsto a$ es un isomorfismo lineal de $\mathcal{L}_-$ en $\mathfrak{m}$ [PIS04, proposición 3.2]. El espacio vectorial subyacente a $U(\mathfrak{m})$ es el álgebra simétrica en $\mathcal{L}_-$, dotado de una estructura de $\mathcal{L}(\mathfrak{m})$-módulo. También se observa que $\mathcal{L}(\mathfrak{m})$ admite dos automorfismos ζ, η dados por

$$\begin{array}{ll} \zeta(\lambda_a) = T_a & \eta(\lambda_a) = -\lambda_a \\ \zeta(\rho_a) = -\rho_a & \eta(\rho_a) = T_a \end{array}$$

Con estos automorfismos, la estructura de $\mathcal{L}(\mathfrak{m})$-módulo de $S(\mathfrak{m})$ ($\mathcal{L}_-$ se identifica con $\mathfrak{m}$) se ve alterada para dar lugar a dos nuevos módulos $S(\mathfrak{m})_\zeta$ y $S(\mathfrak{m})_\eta$. El producto de $U(\mathfrak{m})$ se obtiene como un homomorfismo de $\mathcal{L}(\mathfrak{m})$-módulos $S(\mathfrak{m})_\zeta \otimes S(\mathfrak{m})_\eta \to S(\mathfrak{m})$ satisfaciendo ciertas condiciones [PIS04, proposición 3.4].

Proposición 1.6.1. *Sea $\mathfrak{m}$ un álgebra de Malcev sobre un cuerpo de característica distinta de 2 y de 3. Entonces $\mathcal{L}(\mathfrak{m})$ es un álgebra de Lie con trialdad relativa a $\rho = \eta\zeta$ y $\sigma = \zeta\eta\zeta$.*

Demostración. Los automorfismos ρ, σ están determinados por su acción en los generadores

$$\begin{array}{ll} \sigma(\lambda_a) = -\rho_a & \rho(\lambda_a) = \rho_a \\ \sigma(\rho_a) = -\lambda_a & \rho(\rho_a) = -T_a \end{array}$$

Por tanto, claramente se satisfacen $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(\mathfrak{m})} = \rho^3$ y $\sigma\rho = \rho^2\sigma$. Debido a (1.6.1), los elementos $\mathrm{ad}_a, D_{a,b}$ son fijos por σ, luego es suficiente comprobar (1.1.7) para los elementos T_a, pero esto es obvio. □

El álgebra envolvente universal $U(\mathcal{L}(\mathfrak{m}))$ del álgebra de Lie $\mathcal{L}(\mathfrak{m})$ es, por tanto, un álgebra de Hopf con trialdad, luego se puede considerar su álgebra de Moufang-Hopf asociada $\mathcal{MH}(U(\mathcal{L}(\mathfrak{m})))$.

Lema 1.6.2. *Para cualesquiera $a \in \mathfrak{m}$ y $u \in \mathcal{MH}(U(\mathcal{L}(\mathfrak{m})))$ los elementos*

$$T_a * u + u * T_a \in \mathcal{MH}(U(\mathcal{L}(\mathfrak{m}))) \text{ y}$$
$$T_a u + u T_a \in U(\mathcal{L}(\mathfrak{m}))$$

coinciden.

Demostración. Si se usan las dos fórmulas para el producto en $\mathcal{MH}(\mathcal{L}(\mathfrak{m}))$ dadas en el teorema 1.3.3, entonces por una parte

$$T_a * u = \rho^2(S(T_a))u + u\rho(S(T_a)) = \rho_a u + u\lambda_a,$$

mientras que por otro lado

$$u * T_a = \rho(S(T_a))u + u\rho^2(S(T_a)) = \lambda_a u + u\rho_a.$$

Por tanto, $T_a * u + u * T_a = T_a u + u T_a$. □

Teorema 1.6.3. *Sea $\mathfrak{m}$ un álgebra de Malcev sobre un cuerpo de característica distinta de 2 y de 3. Se tiene que $U(\mathfrak{m})$ es isomorfo a $\mathcal{MH}(U(\mathcal{L}(\mathfrak{m})))$.*

Demostración. Los lemas 1.5.1 y 1.6.2 implican que $\mathcal{MH}(U(\mathcal{L}(\mathfrak{m})))$ está generada por elementos de la forma

$$T_{a_n} \bullet (\cdots (T_{a_2} \bullet T_{a_1})) \text{ con } a_1, \dots, a_m \in \mathfrak{m}, n \in \mathbb{N} \text{ y } T_a \bullet u = T_a * u + u * T_a.$$

Los elementos T_a son primitivos en el álgebra de Moufang-Hopf $\mathcal{MH}(U(\mathcal{L}(\mathfrak{m})))$, luego pertenecen a su núcleo alternativo generalizado. El conmutador de dos de estos elementos en $\mathcal{MH}(U(\mathcal{L}(\mathfrak{m})))$ se calcula de forma sencilla:

$$T_a * T_b \quad = \quad \rho^2(S(T_a))T_b + T_b\rho(S(T_a)) = \rho_a T_b + T_b\lambda_a,$$

$$T_a * T_b - T_b * T_a \quad = \quad \rho_a\rho_b + \lambda_b\lambda_a - \rho_b\rho_a - \lambda_a\lambda_b = [\rho_a, \rho_b] - [\lambda_a, \lambda_b] = -T_{[a,b]}$$

donde la última igualdad se deduce de las relaciones (1.6.1). Por la propiedad universal de $U(\mathfrak{m})$ (ver [PIS04]), se puede concluir que la aplicación $a \mapsto -T_a$ se extiende a un homomorfismo de álgebras unitarias $\varphi\colon U(\mathfrak{m}) \to \mathcal{MH}(U(\mathcal{L}(\mathfrak{m})))$. De hecho, como

$$\mathcal{MH}(U(\mathcal{L}(\mathfrak{m}))) = \mathrm{span}\langle T_{a_n} \bullet (\cdots (T_{a_2} \bullet T_{a_1})) \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{m}, n \in \mathbb{N}\rangle,$$

φ es suprayectiva. Para probar que φ es un isomorfismo, se recurre al teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt para $U(\mathfrak{m})$ y $U(\mathcal{L}(\mathfrak{m}))$. Dada una base totalmente ordenada $\{a_i\}_{i\in\Lambda}$ de $\mathfrak{m}$, $U(\mathfrak{m})$ admite una base

$$\{a_{i_n} \bullet (\cdots (a_{i_2} \bullet a_{i_1})) \mid i_1 \leq \cdots \leq i_n, n \in \mathbb{N}\}$$

con $a \bullet x = ax + xa$ en $U(\mathfrak{m})$ [PIS04]. Esta base es enviada por φ a

$$\{T_{a_{i_n}} \circ (\cdots (T_{a_{i_2}} \circ T_{a_{i_1}})) \mid i_1 \leq \cdots \leq i_n, n \in \mathbb{N}\},$$

un conjunto linealmente independiente en $U(\mathcal{L}(\mathfrak{m}))$. Como φ envía una base a un conjunto linealmente independiente, entonces φ es también inyectiva. $\square$

Teorema 1.6.4. *Sea $\mathfrak{m}$ un álgebra de Malcev sobre un cuerpo de característica distinta de 2 y de 3. Entonces $\mathcal{D}(U(\mathfrak{m}))$ es isomorfo a $U(\mathcal{L}(\mathfrak{m}))$.*

Demostración. El isomorfismo $\varphi\colon U(\mathfrak{m}) \to \mathcal{MH}(U(\mathcal{L}(\mathfrak{m})))$ de la demostración del teorema 1.6.3 envía $a \in \mathfrak{m}$ a $-T_a$. Por la propiedad universal de $\mathcal{D}(U(\mathfrak{m}))$, se obtiene un homomorfismo $\bar{\varphi}\colon \mathcal{D}(U(\mathfrak{m})) \to U(\mathcal{L}(\mathfrak{m}))$ de álgebras de Hopf con trialdad que envía P_a a $-T_a$. Las relaciones que definen $\mathcal{D}(U(\mathfrak{m}))$ implican que la mayor parte de los generadores $\{P_m, L_m, R_m \mid m \in U(\mathfrak{m})\}$ son superfluos. De hecho, como $U(\mathfrak{m})$ está generado por $\mathfrak{m}$ se tiene que $\mathcal{D}(U(\mathfrak{m}))$ está generado por $\{L_a, R_a \mid a \in \mathfrak{m}\}$. Las imágenes de estos generadores por $\bar{\varphi}$ son $\bar{\varphi}(L_a) = \bar{\varphi}(\rho(P_a)) = \rho(\bar{\varphi}(P_a)) = -\rho(T_a) = \lambda_a$ y $\bar{\varphi}(R_a) = \rho_a$.

Las identidades que definen $\mathcal{D}(U(\mathfrak{m}))$ también implican que

$$\begin{aligned} -L_{ab} &= P_a L_b + L_b R_a = -L_a L_b - [R_a, L_b] \\ -L_{ab} &= R_b L_a + L_a P_b = -L_a L_b - [L_a, R_b] \end{aligned}$$

luego $[L_a, R_b] = [R_a, L_b]$ y $[L_a, L_b] = L_{[a,b]} - 2[L_a, R_b]$. De una forma similar, $[R_a, R_b] = -R_{[a,b]} - 2[L_a, R_b]$. Esto prueba que los generadores $\{L_a, R_a \mid a \in \mathfrak{m}\}$ satisfacen relaciones análogas a (1.6.1). Por tanto, existe un homomorfismo de álgebras de Hopf $U(\mathcal{L}(\mathfrak{m})) \to \mathcal{D}(U(\mathfrak{m}))$ que envía λ_a a L_a y ρ_a a R_a. Este homomorfismo es claramente el inverso de $\bar{\varphi}$, luego $\bar{\varphi}$ es un isomorfismo de álgebras de Hopf. $\square$

1.7. Lazos de Moufang desde morfismos de coálgebras

En esta sección se usa notación a derecha para los operadores.

Sean $(\mathcal{C}, \Delta, \epsilon)$ una coálgebra coconmutativa y U un álgebra de Moufang-Hopf que permanecerá fija a lo largo de toda esta sección. Es conocido ([PI07]) que el conjunto de morfismos de coálgebras $\mathrm{Coalg}(\mathcal{C}, U)$ desde $\mathcal{C}$ hasta U es un lazo de Moufang con el producto de convolución $f * g$ dado por

$$c(f * g) = \sum (c_{(1)} f)(c_{(2)} g),$$

con elemento unidad $c \mapsto \epsilon(c)1$. Esto es un análogo no asociativo del hecho de que para un álgebra de Hopf H, $\mathrm{Coalg}(\mathcal{C}, H)$ es un grupo con la convolución.

En el espacio vectorial $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathrm{End}(U))$ puede definirse también una convolución:

$$(A * B)_c = \sum A_{c_{(1)}} B_{c_{(2)}}$$

para la cual $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathrm{End}(U))$ es un álgebra asociativa con identidad $c \mapsto \epsilon(c)\,\mathrm{Id}_U$. La notación para la imagen A_c de c por A es coherente con la notación L_x, R_x para los operadores de multiplicación en U, que pueden interpretarse como elementos $L, R \in \mathrm{Hom}(U, \mathrm{End}(U))$. Si se consideran los elementos $A \in \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathrm{End}(U))$ tales que

1. A es invertible,
2. $\epsilon(yA_x) = \epsilon(y)\epsilon(x)$ y
3. $\Delta(yA_x) = \sum y_{(1)} A_{x_{(1)}} \otimes y_{(2)} A_{x_{(2)}}$

y se define $G = G(\mathcal{C}, U)$ como el conjunto de todos ellos, entonces claramente G es un grupo. Por ejemplo, si $\mathcal{C} = U$ entonces $L \colon x \mapsto L_x$, $R \colon x \mapsto R_x$ pertenece a $G(U, U)$. De hecho,

$$\sum y L_{x_{(1)}} L_{x_{(2)} S} = \epsilon(x) y = \sum y L_{x_{(1)} S} L_{x_{(2)}} \quad \text{y}$$
$$\sum y R_{x_{(1)}} R_{x_{(2)} S} = \epsilon(x) y = \sum y R_{x_{(1)} S} R_{x_{(2)}}$$

muestra que L y R son invertibles en $\mathrm{Hom}(U, \mathrm{End}(U))$ con inversos

$$L^{-1}\colon x \mapsto L_{xS} \quad \text{y} \quad R^{-1}\colon x \mapsto R_{xS}.$$

La aplicación $U = L * R\colon x \mapsto \sum L_{x_{(1)}} R_{x_{(2)}}$ también pertenece a $G(U, U)$.

Definición 1.7.1. Se define

$$\mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U) = \{(A, B, C) \in G^3 \mid (xy)A_c = \sum (xB_{c_{(1)}})(yC_{c_{(2)}}) \quad \forall x, y \in U\}.$$

Esta notación está justificada: en el caso en que $U = FQ$ es el álgebra lazo de un lazo de Moufang Q y $\mathcal{C} = Fe$ es la coálgebra unidimensional con $\Delta(e) = e \otimes e$ y $\epsilon(e) = 1$ entonces G puede ser identificado con $\mathrm{Biy}(Q)$ y $\mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$ con $\mathrm{Atp}(Q)$.

El objetivo de esta sección es probar que, análogamente a los resultados de la sección 1.2, $\mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$ es un grupo con trialdad para el cual $\mathbb{M}(\mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)) = \mathrm{Coalg}(\mathcal{C}, U)$.

Proposición 1.7.2. $\mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$ *es un grupo con el producto componente a componente.*

Demostración. Es fácil comprobar que $\mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$ es cerrado por productos, luego hay que ver que $(A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}) \in \mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$ si $(A, B, C) \in \mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$. Sea $(A, B, C) \in \mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$; por un lado

$$\sum (((xB^{-1}_{c_{(1)}})(yC^{-1}_{c_{(2)}}))A_{c_{(3)}})A^{-1}_{c_{(4)}} = \sum (xB^{-1}_{c_{(1)}})(yC^{-1}_{c_{(2)}});$$

por otra parte,

$$\sum (((xB^{-1}_{c_{(1)}})(yC^{-1}_{c_{(2)}}))A_{c_{(3)}})A^{-1}_{c_{(4)}} = \sum (((xB^{-1}_{c_{(1)}})B_{c_{(2)}})((yC^{-1}_{c_{(3)}})C_{c_{(4)}}))A^{-1}_{c_{(5)}} = (xy)A^{-1}_c.$$

□

Nota 1.7.3. Dada $A \in G$ se consideran

$$L_A\colon c \mapsto L_{1A_c}, \quad R_A\colon c \mapsto R_{1A_c} \text{ y } U_A\colon c \mapsto U_{1A_c}$$

donde $yU_x = \sum x_{(1)} y x_{(2)}$ para cualesquiera $x, y \in U$. Estas aplicaciones son invertibles con inversas

$$(L_A)^{-1} = (L^{-1})_A, \quad (R_A)^{-1} = (R^{-1})_A \text{ y } (U_A)^{-1} = (U^{-1})_A.$$

De hecho, $L_A, R_A, U_A \in G(\mathcal{C}, U)$.

Lema 1.7.4. *Para cualesquiera $A \in G(\mathcal{C}, U)$ se tiene que*

$$(L_A, U_A, L_A^{-1}), (R_A, R_A^{-1}, U_A), (U_A, L_A, R_A) \in \mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U).$$

Demostración. El resultado es consecuencia directa de las identidades de Moufang-Hopf:

$$\begin{aligned}
\sum (x(U_A)_{c_{(1)}})(y(L_A)^{-1}_{c_{(2)}} &= \sum (1A_{c_{(1)}} x 1A_{c_{(2)}})(1A_{c_{(3)}} Sy) \\
&= \sum ((1A_{c_{(1)}} x) 1A_{c_{(2)}})(1A_{c_{(3)}} S((y 1A_{c_{(4)}}) 1A_{c_{(5)}} S)) \\
&= \sum ((((1A_{c_{(1)}} x) 1A_{c_{(2)}})(y 1A_{c_{(4)}})) 1A_{c_{(5)}} S) \\
&= \sum ((1A_{c_{(1)}} x)(y 1A_{c_{(2)}})) 1A_{c_{(3)}} S \\
&= \sum ((1A_{c_{(1)}} (xy)) 1A_{c_{(2)}}) 1A_{c_{(3)}} S \\
&= 1A_c(xy) = (xy) L_{1A_c} = (xy)(L_A)_c,
\end{aligned}$$

luego $(L_A, U_A, L_A^{-1}) \in \mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$.

$$\begin{aligned}
\sum (x(R_A)^{-1}_{c_{(1)}})(y(U_A)_{c_{(2)}} &= \sum (x 1A_{c_{(1)}} S)(1A_{c_{(2)}} S 1A_{c_{(3)}}) \\
&= \sum ((1A_{c_{(1)}} S(1A_{c_{(2)}} x)) 1A_{c_{(3)}} S)(1A_{c_{(4)}} y 1A_{c_{(5)}}) \\
&= \sum 1A_{c_{(1)}} S((1A_{c_{(2)}} x)(1A_{c_{(3)}} S(1A_{c_{(4)}} (y 1A_{c_{(5)}})))) \\
&= \sum 1A_{c_{(1)}} S((1A_{c_{(2)}} x)(y 1A_{c_{(3)}})) \\
&= \sum 1A_{c_{(1)}} S(1A_{c_{(2)}} ((xy) A_{c_{(3)}})) \\
&= \sum (xy) 1A_c = (xy) R_{1A_c} = (xy)(R_A)_c,
\end{aligned}$$

luego $(R_A, R_A^{-1}, U_A) \in \mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$.

$$\sum (x(L_A)_{c_{(1)}})(y(R_A)_{c_{(2)}}) = \sum (1A_{c_{(1)}} x)(y 1A_{c_{(2)}}) = \sum (1A_{c_{(1)}} (xy)) 1A_{c_{(2)}} = (xy)(U_A)_c,$$

luego $(U_A, L_A, R_A) \in \mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$. □

Lema 1.7.5. *Sea $B \in G(\mathcal{C}, U)$ tal que $1B_c = \epsilon(c)1$ para todo $c \in \mathcal{C}$. Entonces $L_B = R_B = U_B = 1_{G(\mathcal{C},U)}$.*

Demostración. Aplicando directamente la definición se tiene:

$$L_B \colon c \mapsto L_{1B_c} = L_{\epsilon(c)1} = \epsilon(c) L_1 = \epsilon(c) \,\mathrm{Id}_U .$$

De la misma forma se obtienen las otras dos igualdades. □

Lema 1.7.6. *Sea* $(A, B, C) \in \mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$*. Se tiene que* $A = B * R_C$ *y* $A = C * L_B$*. En particular, si* $1B_c = \epsilon(c)1$ *para todo* $c \in \mathcal{C}$ *entonces* $A = C$*.*

Demostración. Como $(xy)A_c = \sum (xB_{c_{(1)}})(yC_{c_{(2)}})$ entonces, evaluando en $y = 1$ se obtiene $xA_c = \sum (xB_{c_{(1)}})(1C_{c_{(2)}}) = (xB_{c_{(1)}})R_{1C_{c_{(2)}}} = x(B * R_C)_c$. La otra igualdad del enunciado se obtiene evaluando en $x = 1$. □

Lema 1.7.7. *Cualquier* $(A, B, C) \in \mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$ *puede escribirse como*

$$(A, B, C) = (D', D, D')(R_B^{-1}, R_B, U_B^{-1})$$

para ciertos $(D', D, D') \in \mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$*.*

Demostración. La única elección para (D', D, D') es $(A * R_B, B * R_B^{-1}, C * U_B)$ una vez se ha comprobado que $A * R_B = C * U_B$, pero esto es una consecuencia de $1(B * R_B^{-1})_c = \sum (1B_{c_{(1)}})((1B_{c_{(2)}})S) = \epsilon(c)1$ y el lema 1.7.6. □

Dada $A \in G(\mathcal{C}, U)$ se considera

$$A^S : c \mapsto SA_cS.$$

esta aplicación es invertible con inversa $(A^{-1})^S$:

$$((A^{-1})^S * A^S)_c = \sum SA^{-1}_{c_{(1)}} SSA_{c_{(2)}}S = \epsilon(c)\,\mathrm{Id}_U = (A^S * (A^{-1})^S)_c.$$

Además, se tiene

$$\begin{aligned}
\varepsilon(y(A^S)_x) &= \varepsilon(ySA_xS) = \varepsilon(ySA_x) = \varepsilon(yS)\varepsilon(x) = \varepsilon(y)\varepsilon(x) \text{ y} \\
\Delta(y(A^S)_x) &= \Delta(ySA_xS) = \Delta(ySA_x)(S \otimes S) \\
&= (\sum (yS)_{(1)}A_{x_{(1)}} \otimes (yS)_{(2)}A_{x_{(2)}})(S \otimes S) \\
&= \sum (yS)_{(1)}A_{x_{(1)}}S \otimes (yS)_{(2)}A_{x_{(2)}}S,
\end{aligned}$$

luego $A^S \in G(\mathcal{C}, U)$ y esta aplicación es también un automorfismo involutivo de $G(\mathcal{C}, U)$. En adelante, se escribirá A^{-S} en lugar de $(A^{-1})^S$.

Proposición 1.7.8. *Sean* U *un álgebra de Moufang-Hopf coconmutativa y* $\mathcal{C}$ *una coálgebra coconmutativa. Se tiene que* $\mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$ *es un grupo con trialdad relativa a los automorfismos* ρ, σ *dados por*

$$(A, B, C)^\rho = (B^S, C, A^S) \quad y \quad (A, B, C)^\sigma = (C, B^S, A)$$

para cualquier $(A, B, C) \in \mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$.

Demostración. Se puede calcular $\sum((x_{(1)}S)B_{c_{(1)}}S)(((x_{(2)}S)(x_{(3)}y))A_{c_{(2)}})$ de dos maneras diferentes:

$$\sum(xSB_{c_{(1)}}S)(yA_{c_{(2)}}) \ \text{ y } \ \sum(x_{(1)}SB_{c_{(1)}}S)((x_{(2)}SB_{c_{(2)}})((x_{(3)}y)C_{c_{(3)}})) = (xy)C_c.$$

Esto prueba que $(C, B^S, A) \in \mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$. Un cálculo similar para

$$\sum((xy_{(1)})(y_{(2)}S))A_{c_{(1)}}(y_{(3)}SC_{c_{(2)}}S)$$

indica que $(B, A, C^S) \in \mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$. Comenzando con (C, B^S, A) en lugar de (A, B, C) se obtiene $(B^S, C, A^S) \in \mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$. Las aplicaciones

$$\rho\colon (A, B, C) \mapsto (B^S, C, A^S) \text{ y } \sigma\colon (A, B, C) \mapsto (C, B^S, A)$$

verifican $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)} = \rho^3$, $\sigma\rho = \rho^2\sigma$.

En este punto debe observarse que si $(A, B, A) \in \mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$ entonces $(A, B^S, A) = (A, B, A)^\sigma \in \mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$ luego $(1_{G(\mathcal{C},U)}, B^{-1} * B^S, 1_{G(\mathcal{C},U)}) \in \mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$, esto es, $B^{-1} * B^S = 1_{G(\mathcal{C},U)}$. Por tanto, $B^S = B$.

La demostración de (1.1.4) para $\mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U)$ es similar a la del teorema 1.2.3. Las igualdades que deben verificarse en este caso son

$$\begin{aligned}
A^{-1} * C * B^{-S} * B * C^{-S} * A^S &= 1_{G(\mathcal{C},U)}, \\
B^{-1} * B^S * C^{-1} * A * A^{-S} * C^S &= 1_{G(\mathcal{C},U)} \text{ y} \\
C^{-1} * A * A^{-S} * C^S * B^{-1} * B^S &= 1_{G(\mathcal{C},U)}.
\end{aligned}$$

Notar que por el lema 1.7.6 puede escribirse $A = C * L_B$ y por el lema 1.7.7 se descompone (A, B, C) como $(D', D, D')(R_B^{-1}, R_B, U_B^{-1})$ para obtener que $B = D * R_B$ con $D^S = D$. Además, se tiene que $L_B^S = R_B^{-1}$. Utilizando todo esto se obtiene

$$\begin{aligned}
A^{-1} * C * B^{-S} * B * C^{-S} * A^S &= L_B^{-1} * B^{-S} * B * L_B^S \\
&= L_B^{-1} * R_B^{-S} * D^{-S} * D * R_B * L_B^S = 1_{G(\mathcal{C},U)}, \\
B^{-1} * B^S * C^{-1} * A * A^{-S} * C^S &= B^{-1} * B^S * C^{-1} * C * L_B * L_B^{-S} * C^{-S}C^S \\
&= R_B^{-1} * D^{-1} * D^S * R_B^S * L_B * L_B^{-S} = 1_{G(\mathcal{C},U)} \text{ y} \\
C^{-1} * A * A^{-S} * C^S * B^{-1} * B^S &= C^{-1} * C * L_B * L_B^{-S} * C^{-S} * C^S * B{-}1 * B^S
\end{aligned}$$

$$= L_B * L_B^{-S} * R_B^{-1} * D^{-1} * D^S * R_B^S$$
$$= L_B * R_B * R_B^{-1} * L_B^{-1} = 1_{G(\mathcal{C},U)}.$$

$\square$

El lazo $\mathbb{M}(\mathrm{Atp}(\mathcal{C},U))$ está formado por los elementos

$$(A,B,C)^{-1}(A,B,C)^{\sigma} = (A^{-1} * C, B^{-1} * B^S, C^{-1} * A) = (L_B^{-1}, U_B^{-1}, L_B).$$

De hecho, para cualquier $B \in G(\mathcal{C},U)$ se tiene que $(U_B, L_B, R_B) \in \mathrm{Atp}(\mathcal{C},U)$ y $L_{L_B} = L_B$, luego se puede identificar $\mathbb{M}(\mathrm{Atp}(\mathcal{C},U))$ con $\{L_B \mid B \in G(\mathcal{C},U)\}$. El producto en $\mathrm{Atp}(\mathcal{C},U)$ viene dado por

$$\begin{aligned}(L_B^{-1}, U_B^{-1}, L_B)\cdot(L_{B'}^{-1}, U_{B'}^{-1}, L_{B'}) &= (L_B, U_B, L_B^{-1})^{\rho}(L_{B'}^{-1}, U_{B'}^{-1}, L_{B'})(L_B, U_B, L_B^{-1})^{\rho^2}\\ &= (U_B^S, L_B^{-1}, L_B^S)(L_{B'}^{-1}, U_{B'}^{-1}, L_{B'})(L_B^{-S}, L_B^S, U_B)\\ &= (U_B^{-1}, L_B^{-1}, R_B^{-1})(L_{B'}^{-1}, U_{B'}^{-1}, L_{B'})(R_B, R_B^{-1}, U_B)\\ &= (U_B^{-1} * L_{B'}^{-1} * R_B, L_B^{-1} * U_{B'}^{-1} * R_B^{-1}, R_B^{-1} * L_{B'} * U_B).\end{aligned}$$

Por la identidad de Moufang-Hopf central, la última componente de este triple, $R_B^{-1} * L_{B'} * U_B$, actúa mediante

$$x(R_B^{-1} * L_{B'} * U_B)_c = \sum((1B_{c_{(1)}})(1B'_{c_{(1)}}))x$$

luego con la identificación de $\mathbb{M}(\mathrm{Atp}(\mathcal{C},U))$ con $\{L_B \mid B \in G(\mathcal{C},U)\}$, el producto viene dado por

$$L_B \cdot L_{B'} = L_{L_B * R_{B'}}.$$

Proposición 1.7.9. $\mathbb{M}(\mathrm{Atp}(\mathcal{C},U))$ *y* $\mathrm{Coalg}(\mathcal{C},U)$ *son lazos de Moufang isomorfos.*

Demostración. Dado un morfismo de coálgebras $\theta\colon \mathcal{C} \to U$, se define $L_\theta\colon \mathcal{C} \to \mathrm{End}(U)$ por $L_\theta\colon c \mapsto L_{c\theta}$. Como $L_\theta = L'_\theta$ si y solo si $\theta = \theta'$, entonces se puede identificar $\mathrm{Coalg}(\mathcal{C},U)$ con $\{L_\theta \mid \theta \in \mathrm{Coalg}(\mathcal{C},U)\}$.

Los elementos L_θ con $\theta \in \mathrm{Coalg}(\mathcal{C},U)$ pertenecen a $G(\mathcal{C},U)$ y satisfacen $L_{L_\theta} = L_\theta$ ya que $(L_{L_\theta})_c = L_{1(L_\theta)_c} = L_{c\theta} = (L_\theta)_c$. Por tanto,

$$\{L_\theta \mid \theta \in \mathrm{Coalg}(\mathcal{C},U)\} \subseteq \{L_B \mid B \in G(\mathcal{C},U)\}.$$

La otra inclusión también se tiene. Dado $B \in G(\mathcal{C}, U)$, se define θ como $c\theta = 1B_c$. Entonces $L_\theta = L_B$. El producto en $\{L_\theta \mid \theta \in \mathrm{Coalg}(\mathcal{C}, U)\}$ es

$$\begin{aligned} x(L_\theta \cdot L_{\theta'})_c &= x(L_{L_\theta} \cdot L_{L_{\theta'}})_c = \sum((1(L_\theta)_{c_{(1)}})(1(L_{\theta'})_{c_{(2)}}))x = \sum(\theta_{c_{(1)}}\theta'_{c_{(2)}})x \\ &= x(L_{\theta * \theta'})_c. \end{aligned}$$

Consecuentemente, el lazo de Moufang $\mathrm{Coalg}(\mathcal{C}, U)$ es isomorfo a $\mathbb{M}(\mathrm{Atp}_{\mathcal{C}}(U))$. □

1.8. En breve / Summarizing

1.8.1. En breve

En este capítulo se ha probado que las envolventes universales de las álgebras de Malcev son álgebras de Moufang-Hopf, es decir, son biálgebras que verifican la identidad

$$\sum u_{(1)}(v(u_{(2)}w)) = \sum((u_{(1)}v)u_{(2)})w,$$

que es la linearización en el sentido de [MPI10] de la identidad de Moufang, dando una construcción alternativa a la definida en [PIS04].

Para ello, usando grupos de autotopías, se simplifica la aproximación de Grishkov y Zavarnitsine [GZ06] a la construcción de Doro [Dor78] de lazos de Moufang a partir de grupos con trialdad y se extiende al contexto de biálgebras de manera que se pueden obtener álgebras de Moufang-Hopf a partir de álgebras de Hopf coconmutativas con trialdad y viceversa.
Se prueba que el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt se cumple también para álgebras de Lie con trialdad y álgebras de Hopf con trialdad. Debido a esto, se pueden construir álgebras de Moufang-Hopf a partir de álgebras de Lie con trialdad.

También se dan algunos ejemplos de álgebras de Hopf no coconmutativas con trialdad para los que la construcción de Doro no es un álgebra de Moufang-Hopf y una construcción de lazos de Moufang a partir de morfismos de coálgebras.

Los resultados que aparecen en este capítulo han sido recopilados en el artículo “Hopf Algebras with Triality”, que ha sido aceptado para su publicación en la revista “Transactions of the American Mathematical Society” (31 de mayo 2011) [BMP11].

1.8.2. Summarizing

In this chapter we proved that universal enveloping algebras for Malcev algebras are Moufang-Hopf algebras, i.e. they satisfy the identity

$$\sum u_{(1)}(v(u_{(2)}w)) = \sum((u_{(1)}v)u_{(2)})w.$$

This identity is the linearization of the Moufang identity in the sense of [MPI10]. We gave a construction for these algebras that is different from that in [PIS04].
We used autotopy groups to simplify the approach by Grishkov and Zavarnitsine [GZ06] to Doro's construction [Dor78] of Moufang loops form groups with triality and we extended it to the bialgebras setting. We proved that one can obtain Moufang-Hopf algebras from Hopf algebras with triality and viceversa.

We also proved that universal enveloping algebras of Lie algebras with triality are Hopf algebras with triality. Thus one can obtain Moufang-Hopf from Lie algebras with triality.

We gave some examples of noncocommutative Hopf algebras with triality for which Doro's construction is not longer a Moufang-Hopf algebra. Finally we explain how to get Mofang loops starting with coalgebra morphisms.

The results from this chapter appear in the paper "Hopf Algebras with Triality", that has been accepted for publication in the journal "Transactions of the American Mathematical Society" (31st May 2011) [BMP11].

Capítulo 2

Deformaciones de la envolvente universal de los octoniones de traza cero

A lo largo de este capítulo, salvo que se especifique otra cosa, el cuerpo base F se asume de característica cero.

2.1. Introducción / Introduction

2.1.1. Introducción

En esta sección se motiva el estudio de las deformaciones de la envolvente universal de los octoniones de traza cero y se introducen los conceptos que aparecerán a lo largo del capítulo.

Definición 2.1.1. Un **álgebra de Hopf topológicamente libre** sobre el anillo de series de potencias formales $K = F[\![h]\!]$ con coeficientes en el cuerpo base F es un K-módulo topológicamente libre (ver definición en Kassel [Kas95, sección XVI.2]) dotado de producto, unidad, coproducto, counidad y antípoda que verifican los axiomas de álgebra de Hopf sobre K con los productos tensoriales entendidos en sentido completo (Kassel [Kas95, sección XVI.3]).

Si $H/hH \cong U(\mathfrak{g})$ como álgebras de Hopf sobre F para algún álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$, entonces H se dice **álgebra envolvente universal cuantizada** o **deformación como álgebra de Hopf de** $U(\mathfrak{g})$ [CP, sección 6.1].

Definición 2.1.2. Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, una **estructura de biálgebra** en $\mathfrak{g}$ es una aplicación antisimétrica $\delta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ tal que

(I) $\delta^*\colon \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ es un corchete de Lie en el espacio dual $\mathfrak{g}^*$.

(II) $\delta([x, y]) = (\mathrm{ad}_x \otimes \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} + \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} \otimes \mathrm{ad}_x)\delta(y) - (\mathrm{ad}_y \otimes \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} + \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} \otimes \mathrm{ad}_y)\delta(x)$ para cualesquiera $x, y \in \mathfrak{g}$, donde $\mathrm{ad}_x(z) = [x, z]$.

Cualquier estructura de biálgebra en $\mathfrak{g}$ puede ser extendida a una aplicación de su envolvente universal $\delta\colon U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ mediante $\delta(a_1 a_2) = \delta(a_1)\Delta(a_2) + \Delta(a_1)\delta(a_2)$ para cualesquiera elementos $a_1, a_2 \in U(\mathfrak{g})$. La estructura algebraica resultante es una *coálgebra de Hopf-Poisson* $(U(\mathfrak{g}), \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S, \delta)$, es decir, un álgebra de Hopf $(A, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ dotada de una aplicación lineal antisimétrica $\delta\colon A \to A \otimes A$, el *cocorchete de Poisson*, que verifica las siguientes condiciones:

(I) *identidad de coJacobi*: $\sum_{\text{cíclica}} (\delta \otimes \mathrm{Id})\delta = 0$,

(II) *identidad de coLeibniz*: $(\Delta \otimes \mathrm{Id})\delta = (\mathrm{Id} \otimes \delta)\Delta + \sigma_{23}(\delta \otimes \mathrm{Id})\Delta$,
donde $\sigma_{23}(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = a_1 \otimes a_3 \otimes a_2$,

(III) $\delta(a_1 a_2) = \delta(a_1)\Delta(a_2) + \Delta(a_1)\delta(a_2)$.

Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, las estructuras de biálgebra en $\mathfrak{g}$ y los cocorchetes de Poisson en su envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ que hacen de $(U(\mathfrak{g}), \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ una coálgebra de Poisson-Hopf están en correspondencia uno a uno, ya que cualquier cocorchete δ verifica que $\delta(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ y $\delta|_{\mathfrak{g}}$ es una estructura de biálgebra en $\mathfrak{g}$ [CP, sección 6.2].

Las deformaciones como álgebra de Hopf de $U(\mathfrak{g})$ y las estructuras de biálgebra de $\mathfrak{g}$ están fuertemente relacionadas. Dada $U_h(\mathfrak{g})$ deformación de Hopf de $U(\mathfrak{g})$, si se define $\delta\colon U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ por

$$\delta(x) \equiv \frac{\Delta_h(a) - \Delta_h^{\mathrm{op}}(a)}{h} \pmod{h},$$

donde Δ_h denota la comultiplicación en $U_h(\mathfrak{g})$ y a es un elemento de $U_h(\mathfrak{g})$ que se reduce a $x \pmod h$, entonces $(U(\mathfrak{g}), \delta)$ es una coálgebra de Hopf-Poisson y está determinada por la estructura de biálgebra de Lie $\delta|_{\mathfrak{g}}$ [CP, sección 6.2]. Reshetikin [Res] probó que toda biálgebra de Lie de dimensión finita $(\mathfrak{g}, \delta)$ puede obtenerse de una deformación de Hopf de $U(\mathfrak{g})$ de esta manera, es decir, toda biálgebra de Lie de dimensión finita admite una *cuantización*. La estructura estándar de biálgebra de un álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}$ es la responsable de la existencia de la conocida álgebra envolvente universal cuantizada $U_h(\mathfrak{g})$ que aparece en [Dri, Jim].

Las álgebras de Lie reales de dimensión finita son espacios tangentes de grupos de Lie locales. Este punto de vista fue estudiado por Malcev cuando introdujo en [Mal] lo que hoy se denominan álgebras de Malcev, que generalizan el concepto de álgebras de Lie y están asociadas a lazos de Moufang. Recordar que un *lazo de Moufang* (Q, e) es un conjunto no vacío con una operación binaria $(x, y) \mapsto xy$ y un elemento distinguido e de manera que para cualesquiera $x, y, z \in Q$ los operadores de multiplicación a derecha $R_y : x \mapsto xy$ y a izquierda $L_x : y \mapsto xy$ son biyectivos, $ex = x = xe$ y el producto verifica la *identidad de Moufang*

$$x(y(xz)) = ((xy)x)z.$$

Claramente, los lazos de Moufang extienden a los grupos. El análogo de las álgebras de Lie para lazos de Moufang locales son las álgebras de Malcev. Un *álgebra de Malcev* $(\mathfrak{m}, [\,,\,])$ es un espacio vectorial dotado de un producto antisimétrico $[x, y]$ para el cual se satisface la identidad

$$[\mathrm{J}(x, y, z), x] = \mathrm{J}(x, y, [x, z]), \tag{2.1.1}$$

donde $\mathrm{J}(x, y, z) = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]$ es el *jacobiano* de x, y, z.

Las álgebras de Malcev clasifican los lazos de Moufang locales. El álgebra de Malcev más conocida es el álgebra de los *octoniones de traza cero*

$$\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma) = \{x \in \mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma) \mid t(x) = 0\}$$

con el producto conmutador [ZSSS82]. De hecho, esta es la única álgebra de Malcev simple central que no es un álgebra de Lie.

El concepto de envolvente universal de un álgebra de Lie ha sido extendido a las álgebras de Malcev [PIS04]: dada un álgebra de Malcev $(\mathfrak{m}, [\,,\,])$ sobre un cuerpo de característica distinta de 2 y de 3, existe una biálgebra unitaria punteada coconmutativa y coasociativa $(U(\mathfrak{m}), \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$, la *envolvente universal de* $\mathfrak{m}$, tal que existe una aplicación $\iota : \mathfrak{m} \hookrightarrow U(\mathfrak{m})$ que cumple que $\iota([x,y]) = \iota(x)\iota(y) - \iota(y)\iota(x)$, verifica la *identidad de Moufang-Hopf*

$$\sum a_{(1)}(b(a_{(2)}c)) = \sum((a_{(1)}b)a_{(2)})c, \tag{2.1.2}$$

y posee una aplicación lineal $S\colon U(\mathfrak{m}) \to U(\mathfrak{m})$, la *antípoda*, que cumple que

$$\begin{aligned} \textstyle\sum S(a_{(1)})(a_{(2)}b) = \epsilon(a)b = \sum a_{(1)}(S(a_{(2)})b) \\ \textstyle\sum(ba_{(1)})S(a_{(2)}) = \epsilon(a)b = \sum(bS(a_{(1)}))a_{(2)}. \end{aligned}$$

El álgebra $U(\mathfrak{m})$ es universal respecto de todas las álgebras A con una aplicación $\iota\colon \mathfrak{m} \to A$ tal que $\iota(\mathfrak{m}) \subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A) = \{a \in A \mid (a,x,y) = -(x,a,y) = (x,y,a) \quad \forall_{x,y\in A}\}$ y $\iota([a,b]) = \iota(a)\iota(b) - \iota(b)\iota(a)$, donde $(x,y,z) = (xy)z - x(yz)$ denota el asociador. Sobre cuerpos de característica cero, $(\mathfrak{m}, [\ ,\ ])$ puede ser identificada con los elementos primitivos de $U(\mathfrak{m})$ con el producto conmutador. Además, si el álgebra de Malcev $\mathfrak{m}$ es un álgebra de Lie, entonces $U(\mathfrak{m})$ coincide con la envolvente universal de $\mathfrak{m}$ como álgebra de Lie.

La *deformación nula* de $U(\mathfrak{m})$ se obtiene extendiendo K-linealmente las aplicaciones estructurales de $U(\mathfrak{m})$. Las *deformaciones triviales* son aquellas isomorfas a la deformación nula mediante un isomorfismo de biálgebras K lineal que es la identidad módulo h. Las deformaciones triviales existen siempre, luego naturalmente surge la pregunta:

¿Existen deformaciones no triviales de $U(\mathcal{M}(\alpha,\beta,\gamma))$ que verifiquen (2.1.4)?

Un álgebra de funciones cuantizada (grupo cuántico) o, lo que es lo mismo, una deformación no conmutativa del álgebra de funciones de un grupo de Lie, se asume habitualmente asociativa, lo que hace natural la coasociatividad del álgebra de Hopf de deformaciones de $U(\mathfrak{g})$. Desde nuestro punto de vista, las deformaciones como biálgebra de $U(\mathcal{M}(-1,-1,-1))$ en el caso real deben estar relacionadas con al álgebra de funciones de la esfera de dimensión 7 vista como lazo de Moufang [KM], luego mantendremos la coasociatividad de las deformaciones como biálgebras que estamos considerando. Esta restricción permite una aproximación a las deformaciones de $U(\mathcal{M}(\alpha,\beta,\gamma))$ similar a la basada en estructuras de biálgebras de Lie. Sin embargo, al contrario de lo que sucede en álgebras de Lie, para las que existe una gran variedad de estructuras de biálgebras de

Lie, ahora estas estructuras se anulan, lo que se traduce en la coconmutatividad de las deformaciones.

2.1.2. Introduction

In this section we motivate the study of deformations of the universal enveloping algebras of the traceless octonions and we introduce the main concepts which will appear along the chapter.

Definition 2.1.3. A **topologically free Hopf algebra** over the ring of formal power series $K = F[\![h]\!]$ with coefficients on a base field F is a topologically free K-module (see definition in Kassel [Kas95, section XVI.2]) endowed with product, unit, coproduct, counit and antipode which verify the Hopf algebra axioms over K with the tensor products extended in a complete sense (Kassel [Kas95, section XVI.3]).
If $H/hH \cong U(\mathfrak{g})$ as Hopf algebras over F for some Lie algebra $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$, then H is called **quantized universal enveloping algebra** or **deformation of** $U(\mathfrak{g})$ **as a Hopf algebra** [CP, section 6.1].

Definition 2.1.4. Given a Lie algebra $\mathfrak{g}$, a **bialgebra structure** in $\mathfrak{g}$ is an antisymmetric map $\delta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ such that

(I) $\delta^*\colon \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ is a Lie bracket on the dual space $\mathfrak{g}^*$.

(II) $\delta([x, y]) = (\mathrm{ad}_x \otimes \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} + \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} \otimes \mathrm{ad}_x)\delta(y) - (\mathrm{ad}_y \otimes \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} + \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} \otimes \mathrm{ad}_y)\delta(x)$ for any $x, y \in \mathfrak{g}$, where $\mathrm{ad}_x(z) = [x, z]$.

A bialgebra structure in $\mathfrak{g}$ can be extended to a map on its universal enveloping algebra $\delta\colon U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ by $\delta(a_1a_2) = \delta(a_1)\Delta(a_2) + \Delta(a_1)\delta(a_2)$ for any $a_1, a_2 \in U(\mathfrak{g})$. The resulting bialgebra structure is a *Hopf-Poisson coalgebra* $(U(\mathfrak{g}), \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S, \delta)$, i.e. a Hopf algebra $(A, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ endowed with an antisymmetric linear map $\delta\colon A \to A \otimes A$, the *Poisson cobracket* which verifies the following identities:

(I) *coJacobi identity*: $\sum_{\text{cyclic}} (\delta \otimes \mathrm{Id})\delta = 0$,

(II) *coLeibniz identity*: $(\Delta \otimes \mathrm{Id})\delta = (\mathrm{Id} \otimes \delta)\Delta + \sigma_{23}(\delta \otimes \mathrm{Id})\Delta$, where $\sigma_{23}(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = a_1 \otimes a_3 \otimes a_2$,

(III) $\delta(a_1a_2) = \delta(a_1)\Delta(a_2) + \Delta(a_1)\delta(a_2)$.

Given a Lie algebra $\mathfrak{g}$, bialgebra structures on $\mathfrak{g}$ and Poisson cobrackets on its universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ which make $(U(\mathfrak{g}), \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ a Poisson-Hopf coalgebra are in one to one correspondence, because any cobracket δ verifies $\delta(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ and $\delta|_{\mathfrak{g}}$ is a bialgebra structure on $\mathfrak{g}$ [CP, section 6.2].

Deformations of $U(\mathfrak{g})$ as Hopf algebras and bialgebra structures on $\mathfrak{g}$ are strongly related. Given $U_h(\mathfrak{g})$ a Hopf deformation of $U(\mathfrak{g})$, if we define $\delta\colon U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ by

$$\delta(x) \equiv \frac{\Delta_h(a) - \Delta_h^{\mathrm{op}}(a)}{h} \pmod h,$$

where Δ_h denotes the coproduct on $U_h(\mathfrak{g})$ and a is an element of $U_h(\mathfrak{g})$ which reduces to $x \pmod h$, then $(U(\mathfrak{g}), \delta)$ is a Hopf-Poisson coalgebra and it is determined by the Lie bialgebra structure $\delta|_{\mathfrak{g}}$ [CP, section 6.2]. Reshetikin [Res] proved that any finite dimensional Lie bialgebra $(\mathfrak{g}, \delta)$ can be obtained from a Hopf deformation of $U(\mathfrak{g})$ in this way, i.e. any finite dimensional Lie bialgebra admits a *quantization*. The standard bialgebra structure of a Kac-Moody algebra $\mathfrak{g}$ is the responsible of the existence of the quantized universal enveloping algebra $U_h(\mathfrak{g})$ appearing in [Dri, Jim].

Finite dimensional real Lie algebras are tangent spaces of local Lie groups. This point of view was studied by Malcev in [Mal] when he introduced what we now call Malcev algebras, which generalize Lie algebras and are associated to Moufang loops. Recall tha a Moufang loop (Q, e) is a non-empty set endowed with a binary operation $(x, y) \mapsto xy$ and a distinguished element e such that for any elements $x, y, z \in Q$ right and left multiplication operators $R_y : x \mapsto xy$ and $L_x : y \mapsto xy$ are bijective, $ex = x = xe$ and the product verifies the *Moufang identity*

$$x(y(xz)) = ((xy)x)z.$$

Clearly, Moufang loops generalize groups. The analogue of Lie algebras for Moufang loops are Malcev algebras. A *Malcev algebra* $(\mathfrak{m}, [\,,\,])$ is a vector space $\mathfrak{m}$ endowed with an antisymmetric product $[x, y]$ which satisfy the Malcev identity

$$[\mathrm{J}(x, y, z), x] = \mathrm{J}(x, y, [x, z]), \tag{2.1.3}$$

where $\mathrm{J}(x, y, z) = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]$ is the *jacobian* of x, y, z.

Malcev algebras classify local Moufang loops. The most known Malcev algebra is the algebra of the *traceless octonions*

$$\mathcal{M}(\alpha,\beta,\gamma)=\{x\in\mathbb{O}(\alpha,\beta,\gamma)\mid t(x)=0\}$$

with the commutator product [ZSSS82]. Indeed, this algebra is the only central simple Malcev algebra which is not a Lie algebra.

The notion of universal enveloping algebra has been extended to Malcev algebras [PIS04]: given a Malcev algebra $(\mathfrak{m},[\,,\,])$ over a field of characteristic not 2 or 3, there exists a cocommutative coassociative pointed unital bialgebra $(U(\mathfrak{m}),\mu,\eta,\Delta,\epsilon)$, the *universal enveloping algebra of* $\mathfrak{m}$ such that there exists a map $\iota:\mathfrak{m}\hookrightarrow U(\mathfrak{m})$ which verifies $\iota([x,y])=\iota(x)\iota(y)-\iota(y)\iota(x)$, satisfies the so-called *Moufang-Hopf identity*

$$\sum a_{(1)}(b(a_{(2)}c))=\sum((a_{(1)}b)a_{(2)})c, \tag{2.1.4}$$

and admits a linear map $S\colon U(\mathfrak{m})\to U(\mathfrak{m})$, the *antipode*, which verifies

$$\begin{aligned}\textstyle\sum S(a_{(1)})(a_{(2)}b)=\epsilon(a)b=\sum a_{(1)}(S(a_{(2)})b)\\ \textstyle\sum(ba_{(1)})S(a_{(2)})=\epsilon(a)b=\sum(bS(a_{(1)}))a_{(2)}.\end{aligned}$$

$U(\mathfrak{m})$ is universal with respect to all algebras A endowed with a linear map $\iota\colon\mathfrak{m}\to A$ such that $\iota(\mathfrak{m})\subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)=\{a\in A\mid (a,x,y)=-(x,a,y)=(x,y,a)\quad\forall_{x,y\in A}\}$ and $\iota([a,b])=\iota(a)\iota(b)-\iota(b)\iota(a)$, where $(x,y,z)=(xy)z-x(yz)$ denotes the associator. Over fields of characteristic zero, $(\mathfrak{m},[\,,\,])$ can be identified with the set of primitive elements of $U(\mathfrak{m})$ with the commutator product. Moreover, if the Malcev algebra $\mathfrak{m}$ is a Lie algebra then $U(\mathfrak{m})$ coincides with the universal enveloping algebra of $\mathfrak{m}$ as Lie algebra.

The *null deformation* of $U(\mathfrak{m})$ is obtained by extending K-linearly the structure operations of $U(\mathfrak{m})$. *Trivial deformations* are those isomorphic to the null deformation by a K-linear bialgebra isomorphism which is the identity modulo h. Trivial deformations always exist, so a natural quastion arises in this context:

Are there any non-trivial deformations of $U(\mathcal{M}(\alpha,\beta,\gamma))$ *which verify (2.1.4)?*

A quantized algebra of functions (quantum group or noncommutative deformation the the algebra of functions of a Lie group) is always assumed to be associative, so the coassociativity of the Hopf algebra of deformations of $U(\mathfrak{g})$ is quite natural. From our point of view, bialgebra deformations of $U(\mathcal{M}(-1,-1,-1))$ in the real case should be related to the algebra of functions of the 7-dimensions sphere regarded as Moufang loop [KM], so we keep the coassociativity of the bialgebra deformations considered here. This restriction allows an approach to the deformations of $U(\mathcal{M}(\alpha,\beta,\gamma))$ similar to that based on Lie bialgebra structures. However, contrary to what happens in the Lie algebra case, for which there exists a wide variety of Lie bialgebra structures, now these structures vanish, which translates into the cocommutativity of the deformations.

2.2. Coconmutatividad de Δ_h

Definición 2.2.1. Dada un álgebra de Malcev $\mathfrak{m}$ sobre un cuerpo F, una **deformación como biálgebra** coasociativa de $U(\mathfrak{m})$ sobre $K = F[[h]]$ es un K-módulo topológicamente libre B dotado de cuatro aplicaciones de K-módulos

(unidad)	$\eta_h\colon K \to B,\ 1 \mapsto 1_B,$	*(producto)*	$\mu_h\colon B\tilde{\otimes}B \to B,$
(counidad)	$\epsilon_h\colon B \to K,$	*(coproducto)*	$\Delta_h\colon B \to B\tilde{\otimes}B,$

donde $\tilde{\otimes}$ denota el producto tensorial completo en la topología h-ádica, tal que

1. $(B,\mu_h,\eta_h,\Delta_h,\epsilon_h)$ verifica los axiomas de biálgebra sobre el anillo conmutativo K (ver [CP, notas a la definición 4.1.3]) excepto posiblemente la asociatividad, pero con los productos tensoriales reemplazados por sus compleciones,

2. $B/hB \cong U(\mathfrak{m})$ como F-espacios vectoriales y, con esta identificación,

3. $\mu_h \equiv \mu \pmod h$ y $\Delta_h \equiv \Delta \pmod h$,

con μ y Δ la multiplicación y la comultiplicación en $U(\mathfrak{m})$ respectivamente.

Nota 2.2.2. Como B es topológicamente libre y $B/hB \cong U(\mathfrak{m})$, podemos identificar B con $U(\mathfrak{m})[[h]]$ como K-módulos. El producto μ_h y el coproducto Δ_h están unívocamente determinados por sus restricciones a $U(\mathfrak{m}) \otimes U(\mathfrak{m})$ y $U(\mathfrak{m})$ respectivamente. Podemos escribir

$$\mu_h|_{U(\mathfrak{m})\otimes U(\mathfrak{m})} = \mu + h\mu_1 + h^2\mu_2 + \cdots$$
$$\Delta_h|_{U(\mathfrak{m})} = \Delta + h\Delta_1 + h^2\Delta_2 + \cdots$$

para ciertas aplicaciones F-lineales $\mu_i\colon U(\mathfrak{m})\otimes U(\mathfrak{m}) \to U(\mathfrak{m})$ y $\Delta_i\colon U(\mathfrak{m}) \to U(\mathfrak{m})\otimes U(\mathfrak{m})$ $(i \geq 1)$.

Definición 2.2.3. El álgebra de Malcev simple central de dimensión 7 de los **octoniones de traza cero** $\mathbb{O}_0$ está definido por la siguiente tabla de multiplicación:

[-,-]	e	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
e	0	$2x_1$	$2x_2$	$2x_3$	$-2y_1$	$-2y_2$	$-2y_3$
x_1	$-2x_1$	0	$2y_3$	$-2y_2$	e	0	0
x_2	$-2x_2$	$-2y_3$	0	$2y_1$	0	e	0
x_3	$-2x_3$	$2y_2$	$-2y_1$	0	0	0	e
y_1	$2y_1$	$-e$	0	0	0	$-2x_3$	$2x_2$
y_2	$2y_2$	0	$-e$	0	$2x_3$	0	$-2x_1$
y_3	$2y_3$	0	0	$-e$	$-2x_2$	$2x_1$	0

Nota 2.2.4. A lo largo del capítulo se usará la notación $U = U(\mathbb{O}_0)$ y $U_h = U_h(\mathbb{O}_0)$.

Siguiendo la idea de [CP, sección 6.2-B], se introduce el concepto análogo al de cociclo:

Definición 2.2.5. Dado $x \in U$, se define $\delta(x) \in U \otimes U$ mediante la fórmula

$$\delta(x) = \frac{\Delta_h(x) - \Delta_h^{op}(x)}{h} \quad (mod\ h). \tag{2.2.1}$$

Nota 2.2.6. Dado que $\Delta_h = \Delta + h\Delta_1 + h^2\Delta_2 + \dots$ en U y Δ se asume coconmutativa, se tiene que

$$\frac{\Delta_h(x) - \Delta_h^{op}(x)}{h}(mod\ h) = \Delta_1(x) - \Delta_1^{op}(x);$$

por tanto, la aplicación $\delta : U \to U \otimes U$ está bien definida.

Lema 2.2.7. *Se cumple que*

$$\sum_{cíclica} (\delta \otimes I)\delta(x) = 0.$$

Demostración. Por 2.2.4 se tiene que $\Delta_h(x) - \Delta_h^{op}(x) = h\delta(x) + h^2 r(x)$. Así:

$$\begin{aligned}
&(\Delta_h \otimes I)\Delta_h(x) - (\Delta_h^{op} \otimes I)\Delta_h(x) - (\Delta_h \otimes I)\Delta_h^{op}(x) + (\Delta_h^{op} \otimes I)\Delta_h^{op}(x) \\
&= ((\Delta_h - \Delta_h^{op}) \otimes I)(\Delta_h - \Delta_h^{op})(x) = ((h\delta + h^2 r) \otimes I)(h\delta + h^2 r)(x) \\
&\equiv h^2(\delta \otimes I)\delta(x) \quad (mod\ h^3)
\end{aligned}$$

Y, por tanto,

$$(\delta\otimes I)\delta(x)\equiv\tfrac{1}{h^2}\Big((\Delta_h\otimes I)\Delta_h(x)-(\Delta_h^{op}\otimes I)\Delta_h(x)$$
$$-(\Delta_h\otimes I)\Delta_h^{op}(x)+(\Delta_h^{op}\otimes I)\Delta_h^{op}(x)\Big)(mod\ h).$$

Como Δ_h es coasociativa, escribiendo $(\Delta_h\otimes I)\Delta_h(x)=\sum x_i\otimes x_i'\otimes x_i''$, resulta

$$(\Delta_h^{op}\otimes I)\Delta_h(x)=\sum x_i'\otimes x_i\otimes x_i'',\ (\Delta_h\otimes I)\Delta_h^{op}(x)$$
$$=\sum x_i'\otimes x_i''\otimes x_i,\ (\Delta_h^{op}\otimes I)\Delta_h^{op}(x)=\sum x_i''\otimes x_i'\otimes x_i.$$

Así,

$$\sum_{\text{cíclica}}(\delta\otimes I)\delta(x)=\frac{1}{h^2}\Big(\sum_{\text{cíclica}}(x_i\otimes x_i'\otimes x_i''-x_i'\otimes x_i\otimes x_i''-x_i'\otimes x_i''\otimes x_i+x_i''\otimes x_i'\otimes x_i)\Big)$$
$$=x_i\otimes x_i'\otimes x_i''-x_i'\otimes x_i\otimes x_i''-x_i'\otimes x_i''\otimes x_i+x_i''\otimes x_i'\otimes x_i$$
$$+x_i'\otimes x_i''\otimes x_i-x_i\otimes x_i''\otimes x_i'-x_i''\otimes x_i\otimes x_i'+x_i'\otimes x_i\otimes x_i''$$
$$+x_i''\otimes x_i\otimes x_i'-x_i''\otimes x_i'\otimes x_i-x_i\otimes x_i'\otimes x_i''+x_i\otimes x_i''\otimes x_i'=0$$

□

Lema 2.2.8. *δ satisface la identidad de coLeibniz, es decir*

$$(I\otimes\delta)\Delta+\sigma_{23}(\delta\otimes I)\Delta=(\Delta\otimes I)\delta.$$

Demostración. Operando, se tiene

$$(I\otimes(\Delta_h-\Delta_h^{op}))\Delta_h(x)+\sigma_{23}((\Delta_h-\Delta_h^{op})\otimes I)\Delta_h(x)$$
$$=x_i\otimes x_i'\otimes x_i''-x_i\otimes x_i''\otimes x_i'+\sigma_{23}(x_i\otimes x_i'\otimes x_i''-x_i'\otimes x_i\otimes x_i''$$
$$=x_i\otimes x_i'\otimes x_i''-x_i\otimes x_i''\otimes x_i'+x_i\otimes x_i''\otimes x_i'-x_i'\otimes x_i''\otimes x_i$$
$$=x_i\otimes x_i'\otimes x_i''-x_i'\otimes x_i''\otimes x_i=(\Delta_h\otimes I)(\Delta_h-\Delta_h^{op})(x))$$

Por tanto,

$$(I\otimes(\Delta_h-\Delta_h^{op}))\Delta_h+\sigma_{23}((\Delta_h-\Delta_h^{op})\otimes I)\Delta_h$$
$$=\begin{cases} h(I\otimes\delta)\Delta+O(h^2)+h\sigma_{23}(\delta\otimes I)\Delta+O(h^2)\\ \\ (\Delta_h\otimes I)(\Delta_h-\Delta_h^{op})=h(\Delta\otimes I)\delta+O(h^2)\end{cases}$$

con lo que se tiene el resultado. □

Lema 2.2.9. *Se verifica*

$$\delta(xy) = \delta(x)\Delta(y) + \Delta(x)\delta(y).$$

Demostración. Es inmediato; basta observar lo siguiente:

$$\begin{aligned}\Delta_h(xy) - \Delta_h^{op}(xy) &= \Delta_h(x)\Delta_h(y) - \Delta_h^{op}(x)\Delta_h^{op}(y)\\ &= (\Delta_h - \Delta_h^{op})(x)\Delta_h(y) + \Delta_h^{op}(x)(\Delta_h - \Delta_h^{op})(y).\end{aligned}$$

□

Lema 2.2.10. *Se tiene que* $\delta\,|_{\mathbb{O}_0} : \mathbb{O}_0 \to \mathbb{O}_0 \otimes \mathbb{O}_0$.

Demostración. Sean $a \in \mathbb{O}_0$ y $\delta(a) = \sum a_i \otimes a_i'$ con $a_i, a_i' \in U$ y $\{a_i\}_i$ libre. Por la identidad de coLeibniz se tiene que

$$\begin{aligned}(I \otimes \delta)(a \otimes 1 + 1 \otimes a) + \sigma_{23}(\delta \otimes I)(a \otimes 1 + 1 \otimes a) &= (\Delta \otimes I)\delta(a)\\ \sum(1 \otimes a_i \otimes a_i' + \sigma_{23}(a_i \otimes a_i' \otimes 1)) &= \sum \Delta(a_i) \otimes a_i'\\ \sum(1 \otimes a_i \otimes a_i' + a_i \otimes 1 \otimes a_i') &= \sum \Delta(a_i) \otimes a_i'\end{aligned}$$

Luego $\Delta(a_i) = 1 \otimes a_i + a_i \otimes 1$, es decir, $a_i \in \mathbb{O}_0$. □

Nota 2.2.11. Para los elementos de $\mathbb{O}_0$, la propiedad del lema 2.2.9 dice que

$$\begin{aligned}\delta(ab - ba) &= \delta(a)\Delta(b) + \Delta(a)\delta(b) - \delta(b)\Delta(a) - \Delta(b)\delta(a)\\ &= (a_i \otimes a_i')(b \otimes 1 + 1 \otimes b) + (a \otimes 1 + 1 \otimes a)(b_i \otimes b_i')\\ &\quad - (b_i \otimes b_i')(a \otimes 1 + 1 \otimes a) - (b \otimes 1 + 1 \otimes b)(a_i \otimes a_i')\\ &= a_i b \otimes a_i' + a_i \otimes a_i' b + ab_i \otimes b_i' + b_i \otimes ab_i'\\ &\quad - b_i a \otimes b_i' - b_i \otimes b_i' a - ba_i \otimes a_i' - a_i \otimes ba_i'\\ &= [a_i, b] \otimes a_i' + a_i \otimes [a_i', b] + [a, b_i] \otimes b_i' + b_i \otimes [a, b_i']\end{aligned}$$

Por tanto, se puede escribir

$$\delta([a, b]) = (ad_a \otimes I + I \otimes ad_a)\delta(b) - (ad_b \otimes I + I \otimes ad_b)\delta(a). \tag{2.2.2}$$

Lema 2.2.12. *Se tiene que* $\delta^* : \mathbb{O}_0^* \otimes \mathbb{O}_0^* \to \mathbb{O}_0^*$ *es álgebra de Lie.*

Demostración. δ^* viene dada por $\delta^*(f \otimes g) = (f \otimes g)\delta$. Como δ es antisimétrica, también lo es δ^*. Además,

$$\delta^*(\delta^* \otimes I)(f \otimes g \otimes h)(a) = (\delta^*(f \otimes g) \otimes h)\delta(a) = (f \otimes g \otimes h)(\delta \otimes I)\delta(a),$$

luego, por el lema 2.2.7 se verifica la identidad de Jacobi:

$$\sum_{\substack{\text{cíclica} \\ \text{de } f,g,h}} \delta^*(\delta^* \otimes I)(f \otimes g \otimes h)(a) = (f \otimes g \otimes h)(\sum_{\substack{\text{cíclica} \\ \text{en } a}} (\delta \otimes I)\delta(a)) = 0$$

□

Lema 2.2.13. *Si $\delta(e) = 0$ entonces $\delta = 0$.*

Demostración. Denotando $D_a = ad_a \otimes I + I \otimes ad_a$, si $\delta(e) = 0$, la propiedad (2.2.2) dice:

$$D_{x_i}\delta(y_j) = D_{y_j}\delta(x_i)\ \forall i, j \tag{1}$$

$$2\delta(x_i) = D_e\delta(x_i) \tag{2}$$

$$-2\delta(y_j) = D_e\delta(y_j) \tag{3}$$

$$2\delta(y_3) = D_{x_1}\delta(x_2) - D_{x_2}\delta(x_1) \tag{4}$$

Por tanto, teniendo en cuenta (2), $\delta(x_i)$ solo puede tener como sumandos $e \otimes x_j$ y $x_j \otimes e$, ya que

$$\begin{aligned}
D_e(e \otimes y_j) &= e \otimes [e, y_j] = -2e \otimes y_j \\
D_e(y_j \otimes e) &= [e, y_j] \otimes e = -2y_j \otimes e \\
D_e(x_j \otimes x_k) &= [e, x_j] \otimes x_k + x_j \otimes [e, x_k] = 2x_j \otimes x_k + 2x_j \otimes x_k = 4x_j \otimes x_k \\
D_e(y_j \otimes y_k) &= [e, y_j] \otimes y_k + y_j \otimes [e, y_k] = -2y_j \otimes y_k - 2y_j \otimes y_k = -4y_j \otimes y_k \\
D_e(e \otimes e) &= 0 \\
D_e(x_j \otimes y_k) &= [e, x_j] \otimes y_k + x_j \otimes [e, y_k] = 2x_j \otimes y_k - 2x_j \otimes y_k = 0 \\
D_e(y_j \otimes x_k) &= [e, y_j] \otimes x_k + y_j \otimes [e, x_k] = -2y_j \otimes x_k + 2y_j \otimes x_k = 0
\end{aligned}$$

Análogamente, por (3), $\delta(y_j)$ solo puede como tener sumandos $e \otimes y_j$ e $y_j \otimes e$. Como δ es antisimétrica, podemos escribir

$$\delta(x_i) = \alpha_{i1}(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e) + \alpha_{i2}(e \otimes x_2 - x_2 \otimes e) + \alpha_{i3}(e \otimes x_3 - x_3 \otimes e)$$

$$\delta(y_j) = \beta_{j1}(e \otimes y_1 - y_1 \otimes e) + \beta_{j2}(e \otimes y_2 - y_2 \otimes e) + \beta_{j3}(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e).$$

Así,

$$D_{x_i}\delta(y_j) = -2\beta_{j1}(x_i \otimes y_1 - y_1 \otimes x_i) - 2\beta_{j2}(x_i \otimes y_2 - y_2 \otimes x_i) - 2\beta_{j3}(x_i \otimes y_3 - y_3 \otimes x_i)$$
$$D_{y_j}\delta(x_i) = -2\alpha_{i1}(x_1 \otimes y_j - y_j \otimes x_1) - 2\alpha_{i2}(x_2 \otimes y_j - y_j \otimes x_2) - 2\alpha_{i3}(x_3 \otimes y_j - y_j \otimes x_3).$$

Usando (1), se obtiene:

$\underline{i = 1, j = 1}$: $\beta_{11} = \alpha_{11}, \quad \beta_{12} = 0 = \beta_{13}, \quad \alpha_{12} = 0 = \alpha_{13}.$

$\underline{i = 1, j = 2}$: $\beta_{22} = \alpha_{11}, \quad \beta_{21} = 0 = \beta_{23}.$

$\underline{i = 1, j = 3}$: $\beta_{33} = \alpha_{11}, \quad \beta_{31} = 0 = \beta_{32}.$

$\underline{i = 2, j = 1}$: $\alpha_{22} = \alpha_{11}, \quad \alpha_{21} = 0 = \alpha_{23}$

$\underline{i = 3, j = 1}$: $\alpha_{33} = \alpha_{11}, \quad \alpha_{31} = 0 = \alpha_{32}$

Por tanto, $\delta(x_i) = \alpha(e \otimes x_i - x_i \otimes e)$ y $\delta(y_j) = \alpha(e \otimes y_j - y_j \otimes e)$. Finalmente, usando (4):

$$\begin{aligned} 2\alpha(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e) &= \delta(y_3) = D_{x_1}\delta x_2 - D_{x_2}\delta(x_1) \\ &= 4\alpha((e \otimes y_3 - y_3 \otimes e) - (x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1)). \end{aligned}$$

Luego $\alpha = 0$ y, por tanto, $\delta = 0$. □

Teorema 2.2.14. *Si car$F \neq 2, 3$ entonces $\delta = 0$.*

Demostración. Tras extender escalares si fuese necesario, se puede asumir que el cuerpo base F es algebraicamente cerrado. En este caso, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma)$ tiene una base (que llamaremos *base estándar*) $\{f, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ con producto dado por

$$\begin{array}{lll} [f, u_i] = 2u_i & [f, v_i] = -2v_i & [u_i, v_j] = -\delta_{i,j} f \\ [u_i, u_j] = \epsilon_{i,j,k} v_k & [v_i, v_j] = \epsilon_{i,j,k} u_k & \end{array} \tag{2.2.3}$$

donde $\epsilon_{i,j,k}$ alterna en i, j, k y $\epsilon_{1,2,3} = 1$. A partir de $\{f, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$, mediante automorfismos de $\mathbb{O}_0$, se obtienen las siguientes bases:

$I)\quad \{-f, v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3\}$,

$II_1)\quad \{f, u_2, u_1, -u_3, v_2, v_1, -v_3\}$,

$II_2)\quad \{f, -u_1, u_3, u_2, -v_1, v_3, v_2\}$,

$II_3)\quad \{f, u_3, -u_2, u_1, v_3, -v_2, v_1\}$ y

$III)\quad \{f + u_1, u_1, u_2 + \frac{1}{2}v_3, u_3 - \frac{1}{2}v_2, v_1 + \frac{1}{2}f + \frac{1}{4}u_1, v_2, v_3\}$,

que son también bases estándar (con el mismo producto). La base en I) refleja la simetría entre $\{u_1, u_2, u_3\}$ y $\{v_1, v_2, v_3\}$. Las bases II$_1$), II$_2$) y II$_3$) muestran simetrías (salvo signo) entre u_1, u_2 and u_3. Como vamos a estudiar las imágenes por $\delta_{\mathcal{M}}$ de los elementos de cualquier base estándar, los resultados obtenidos para un elemento de una de las bases se trasladan de forma inmediata a los elementos automorfos en las otras bases (por ejemplo, los resultados obtenidos para u_1 serán también resultados para u_2, u_3, v_1, v_2, v_3). Este argumento de simetría será muy útil a lo largo de esta demostración.

La forma bilineal simétrica no degenerada (,) determinada por las imágenes de los elementos de una base estándar por

$$(u_i, v_i) = \frac{1}{2}, \quad (f, f) = -1$$

(y 0 en los demás casos) es asociativa respecto de [,], es decir, verifica

$$([x, y], z) = -(y, [x, z]).$$

Podemos extender esta forma bilineal a $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$ mediante

$$(x \otimes y, x' \otimes y') = (x, x')(y, y').$$

Los operadores

$$D_a = \mathrm{ad}_a \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \mathrm{ad}_a$$

son antisimétricos con respecto a esta nueva forma bilineal no degenerada y, además, el subespacio de tensores simétricos $\mathrm{Sim}^2(\mathcal{M})$ es ortogonal al subespacio $\Lambda^2(\mathcal{M})$ de tensores antisimétricos, es decir,

$$(\mathrm{Sim}^2(\mathcal{M}), \Lambda^2(\mathcal{M})) = 0.$$

Denotaremos por $x \wedge y$ al elemento antisimétrico $\frac{1}{2}(x \otimes y - y \otimes x)$. La notación $U \wedge V$ donde U, V son subconjuntos de $\mathcal{M}$ tiene el significado natural. Escribiremos también δ en lugar de $\delta_{\mathcal{M}}$ para simplificar las expresiones de las operaciones. Observar que la condición

(2.2.2) $\delta([x,y]) = (\mathrm{ad}_x \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \mathrm{ad}_x)\delta(y) - (\mathrm{ad}_y \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \mathrm{ad}_y)\delta(x)$ puede reescribirse como

$$\delta([x,y]) = D_x\delta(y) - D_y\delta(x). \tag{2.2.4}$$

El espacio $\mathcal{M}$ se descompone como $\mathcal{M} = U \oplus Ff \oplus V$ donde $U = F\langle u_1, u_2, u_3\rangle$, Ff y $V = F\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ son los subespacios propios de valores propios $2, 0, -2$ respectivamente para la acción de ad_f, luego

$$\mathcal{M} \wedge \mathcal{M} = (U \wedge U) \oplus (U \wedge f) \oplus (U \wedge V) \oplus (V \wedge f) \oplus (V \wedge V)$$

es la descomposición de $\mathcal{M} \wedge \mathcal{M}$ como suma directa de subespacios propios de valores propios $4, 2, 0, -2, -4$ respectivamente para la acción de D_f.

Por claridad, dividimos la demostración del teorema en cuatro lemas.

Lema 2.2.15. *Se verifica:*

i) $(\delta(f), U \otimes V) = 0$ *y*

ii) $(\delta(U), U \otimes U) = (\delta(V), V \otimes V) = 0$.

Demostración. Dado $u \in U$, por (2.2.4),

$$D_u\delta(f) = (D_f - 2\,\mathrm{Id})\delta(u) \tag{2.2.5}$$

luego

$$\begin{aligned}(\delta(f), D_u(f \otimes V)) &= -(D_u\delta(f), f \otimes V) = -((D_f - 2\,\mathrm{Id})\delta(u), f \otimes V)\\ &= (\delta(u), (D_f + 2\,\mathrm{Id})(f \otimes V)) = 0,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de la acción de D_f en $f \otimes V$. Por tanto,

$$(\delta(f), D_u(f \otimes V)) = 0 \tag{2.2.6}$$

Como por la ortogonalidad de $\mathrm{Sim}^2(\mathcal{M})$ y $\Lambda^2(\mathcal{M})$, se tiene $(\delta(f), f \otimes f) = 0$ entonces (2.2.6) implica que $2(\delta(f), u \otimes V) = 0$, es decir,

$$(\delta(f), U \otimes V) = 0,$$

lo que prueba la parte i).

Por la acción de D_f, tenemos $(D_f + 2\,\mathrm{Id})(U \otimes U) = 6U \otimes U = U \otimes U$; por tanto, (2.2.5) implica

$$\begin{aligned}(\delta(U), U \otimes U) &= (\delta(U), (D_f + 2\,\mathrm{Id})(U \otimes U)) = ((2\,\mathrm{Id} - D_f)\delta(U), U \otimes U)\\ &= (D_U\delta(f), U \otimes U) \subseteq (\delta(f), D_U(U \otimes U))\\ &\subseteq (\delta(f), V \otimes U) + (\delta(f), U \otimes V) = 0,\end{aligned}$$

es decir,

$$(\delta(U), U \otimes U) = 0 = (\delta(V), V \otimes V),$$

donde la segunda igualdad se obtiene de la simetría entre U y V. □

Lema 2.2.16. *$(\delta(V), f \otimes U) = (\delta(U), f \otimes V) = 0$.*

Demostración. Dados $u', u'' \in U$ tenemos que

$$(\delta([v_1, v_2]), u' \otimes u'') = (\delta(u_3), u' \otimes u'') = 0$$

y, por (2.2.4),

$$(D_{v_1}\delta(v_2) - D_{v_2}\delta(v_1), u' \otimes u'') = 0.$$

La antisimetría de D_x implica que

$$(\delta(v_2), D_{v_1}(u' \otimes u'')) = (\delta(v_1), D_{v_2}(u' \otimes u'')).$$

Eligiendo $u' = u_1$ y $u'' = u_3$ se obtiene

$$(\delta(v_2), f \otimes u_3) = 0$$

y, por simetría entre u_1 y u_3,

$$(\delta(v_2), f \otimes u_1) = 0.$$

Tomando $u' = u_1$ y $u'' = u_2$ se tiene

$$(\delta(v_2), f \otimes u_2) = (\delta(v_1), u_1 \otimes f)$$

y, por simetría entre u_1, u_2 y u_3,

$$(\delta(v_1), u_1 \otimes f) = (\delta(v_3), f \otimes u_3) = (\delta(v_2), u_2 \otimes f).$$

Por tanto, $2(\delta(v_2), f \otimes u_2) = (\delta(v_2), f \otimes u_2 + u_2 \otimes f) = 0$ por la ortogonalidad entre $\mathrm{Sim}^2(\mathcal{M})$ y $\Lambda^2(\mathcal{M})$. Esto prueba que

$$(\delta(v_2), f \otimes U) = 0.$$

El resultado se sigue por simetría. $\square$

Sean

$$\begin{aligned} f' &= f + u_1 \\ u_1' &= u_1, & u_2' &= u_2 + \frac{1}{2}v_3, & u_3' &= u_3 - \frac{1}{2}v_2, \\ v_1' &= \frac{1}{2}f + v_1 + \frac{1}{4}u_1, & v_2' &= v_2, & v_3' &= v_3 \end{aligned}$$

la base estándar de III) y U', V' los correspondientes subespacios generados por $\{u_1', u_2', u_3'\}$ y $\{v_1', v_2', v_3'\}$ respectivamente.

Lema 2.2.17. *Se verifica:*

I) $(\delta(U) + \delta(V), \mathcal{M} \otimes f) = 0$ *y*

II) $(\delta(u_1), \mathcal{M} \otimes u_1) = 0$.

Demostración. Por el lema 2.2.15, $(\delta(f), U \otimes V) = (\delta(f'), U' \otimes V') = 0$. Por tanto

$$0 = (\delta(f'), u_1 \otimes v_2) = (\delta(f) + \delta(u_1), u_1 \otimes v_2) = (\delta(u_1), u_1 \otimes v_2)$$

y, por simetría,

$$(\delta(v_2), v_2 \otimes u_1) = 0.$$

Esta igualdad, junto con el lema 2.2.15 implica que $0 = (\delta(v_2), v_2 \otimes (4v_1 + 2f + u_1)) = 2(\delta(v_2), v_2 \otimes f)$ luego

$$(\delta(v_2), v_2 \otimes f) = 0. \tag{2.2.7}$$

El lema 2.2.15 y la ortogonalidad entre $\mathrm{Sim}^2(\mathcal{M})$ y $\Lambda^2(\mathcal{M})$ implican que

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta(f'), (2u_2 + v_3) \otimes v_3) = 2(\delta(f'), u_2 \otimes v_3) = 2(\delta(f) + \delta(u_1), u_2 \otimes v_3) \\ &= 2(\delta(u_1), u_2 \otimes u_3) \end{aligned}$$

y, por simetría,

$$(\delta(v_2), v_3 \otimes u_1) = 0.$$

Esta igualdad, junto con el lema 2.2.15 prueban que

$$0 = (\delta(v_2), v_3 \otimes (4v_1 + 2f + u_1)) = 2(\delta(v_2), v_3 \otimes f)$$

y, por simetría,

$$(\delta(v_2), v_3 \otimes f) = 0 = (\delta(v_2), v_1 \otimes f). \tag{2.2.8}$$

Ahora, las ecuaciones (2.2.7), (2.2.8) y la simetría entre U y V implican que

$$(\delta(V), V \otimes f) = 0 = (\delta(U), U \otimes f).$$

Esta última ecuación y el lema 2.2.16 implican que $(\delta(U), U \otimes f + V \otimes f) = 0$, lo que prueba la parte i).

La parte i) aplicada a U' y f' muestra que $(\delta(U'), \mathcal{M} \otimes f') = 0$. Por tanto,

$$0 = (\delta(u_1), \mathcal{M} \otimes f') = (\delta(u_1), \mathcal{M} \otimes f + \mathcal{M} \otimes u_1) = (\delta(u_1), \mathcal{M} \otimes u_1).$$

□

Lema 2.2.18. *Se tiene que* $(\delta(U), \mathcal{M} \otimes U) = 0$.

Demostración. El lema 2.2.17 implica que

$$0 = (\delta(v_2), \mathcal{M} \otimes f') = (\delta(v_2), \mathcal{M} \otimes f + \mathcal{M} \otimes u_1) = (\delta(v_2), \mathcal{M} \otimes u_1)$$

y, por simetría,

$$(\delta(u_1), \mathcal{M} \otimes v_2) = (\delta(u_1), \mathcal{M} \otimes v_3) = (\delta(v_3), \mathcal{M} \otimes u_1) = 0. \tag{2.2.9}$$

Esta última ecuación y el lema 2.2.17 implican que también

$$0 = (\delta(2u_2 + v_3), \mathcal{M} \otimes f') = (\delta(2u_2 + v_3), \mathcal{M} \otimes u_1) = 2(\delta(u_2), \mathcal{M} \otimes u_1)$$

y por simetría,

$$(\delta(u_1), \mathcal{M} \otimes u_2) = (\delta(u_1), \mathcal{M} \otimes u_3) = 0.$$

Por el lema 2.2.17, parte ii) se tiene que $(\delta(u_1), \mathcal{M} \otimes U) = 0$ y, por simetría,

$$(\delta(U), \mathcal{M} \otimes U) = 0.$$

□

Para concluir la demostración del teorema, observar que

$$(\delta(U), \mathcal{M} \otimes f) = (\delta(U), \mathcal{M} \otimes U) = 0$$

implica que $\delta(U) \subseteq U \wedge U$. Si escribimos $\delta(u_1) = \alpha u_1 \wedge u_2 + \beta u_1 \wedge u_3 + \gamma u_2 \wedge u_3$ para ciertos $\alpha, \beta, \gamma \in F$, de la ecuación (2.2.9) tenemos que

$$(\delta(u_1), v_1 \otimes v_2) = (\delta(u_1), v_1 \otimes v_3) = (\delta(u_1), v_2 \otimes v_3) = 0,$$

luego $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Por tanto, $\delta(u_1) = 0$ y, por simetría $\delta(U) = 0 = \delta(V)$. Como $\delta(V') = 0$, también obtenemos $\delta(f) = 0$, lo que prueba el teorema. $\square$

Así queda probado que Δ_1 es coconmutativa. Se prueba fácilmente el siguiente corolario:

Corolario 2.2.19. *Cualquier deformación como biálgebra coasociativa de $U(\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma))$ es coconmutativa.*

Demostración. De manera análoga a la definición de δ en (2.2.4), se puede definir, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\delta^{(n)}(x) = \frac{\Delta_h(x) - \Delta_h^{op}(x)}{h^n} \quad (mod\ h) \tag{2.2.10}$$

Notar que $\delta^{(n)}$ está bien definida, dado que en cada paso i $\Delta_{i-1} = \Delta_{i-1}^{op}$, lo que da sentido a la expresión. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene una aplicación $\delta^{(n)}$ que verifica las mismas propiedades que δ, luego se le puede aplicar el teorema 2.2.14 y resulta ser cero, luego Δ_h es coconmutativa. $\square$

2.3. La envolvente universal cuantizada de $\mathbb{O}_0$

En esta sección se prueba que no existen deformaciones coasociativas de $U(\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma))$ que verifiquen la identidad de Moufang-Hopf (2.1.4).

Primero, recordamos que una *deformación como álgebra de Malcev* de una F-álgebra de Malcev $(\mathfrak{m}, [\,,\,])$ es un K-módulo topológicamente libre $\mathfrak{m}_h$ junto con un producto bilineal antisimétrico $[\,,\,]_h \colon \mathfrak{m}_h \tilde{\otimes} \mathfrak{m}_h \to \mathfrak{m}_h$ que verifica (2.1.1) y de forma que

$$\frac{\mathfrak{m}_h}{h\mathfrak{m}_h} \cong \mathfrak{m} \quad \text{como } F\text{-álgebras de Malcev.}$$

Por simplicidad de notación, escribiremos $\mathcal{M}$ para referirnos al álgebra de Malcev $\mathcal{M}(\alpha,\beta,\gamma)$ y $U_h(\mathcal{M})$ representará una deformación como biálgebra coasociativa de $U(\mathcal{M})$ que verifica la identidad de Moufang-Hopf (2.1.4).

La demostración de la proposición [CP, proposición 6.3.1] se traslada literalmente a nuestro contexto para probar que los elementos primitivos de $U_h(\mathcal{M})$ con el producto conmutador proporcionan una deformación como álgebra de Malcev $(\mathcal{M}_h, [\,,\,]_h)$ de $\mathcal{M}$:

Teorema 2.3.1. *Cualquier deformación como biálgebra coasociativa de $U(\mathcal{M}(\alpha,\beta,\gamma))$ que verifique*

$$\sum a_{(1)}(b(a_{(2)}c)) = \sum((a_{(1)}b)a_{(2)})c$$

es trivial.

Demostración. Primeramente, identificamos $\mathcal{M}_h$ con $\mathcal{M}[[h]]$ como K-módulos. Definimos $\sigma_0 = \mathrm{Id}$ y asumimos que para $i = 1,\dots,n-1$ existen aplicaciones lineales $s_i\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, que extendemos a aplicaciones en $\mathcal{M}_h$ $s_i\colon \mathcal{M}_h \to \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_h$ mediante $s_i(a_0+a_1h+\cdots) = s_i(a_0)$ y tales que $\sigma_{n-1} = (\mathrm{Id}+s_1h)\cdots(\mathrm{Id}+s_{n-1}h^{n-1})$ verifica

$$\sigma_{n-1}^{-1}([\sigma_{n-1}(a), \sigma_{n-1}(b)]_h) \equiv [a,b] \pmod{h^n}$$

para cualesquiera $a,b \in \mathcal{M}$. Identificamos $\mathcal{M} \oplus h^n \mathcal{M}$ con la F-álgebra de Malcev $\frac{\mathcal{M}+h^n\mathcal{M}_h}{h^{n+1}\mathcal{M}_h}$ con producto inducido por

$$[x,y]'_h = \sigma_{n-1}^{-1}([\sigma_{n-1}(x), \sigma_{n-1}(y)]_h).$$

Como $h^n\mathcal{M}$ es un ideal abeliano y $\frac{\mathcal{M}+h^n\mathcal{M}}{h^n\mathcal{M}} \cong \mathcal{M}$, el teorema de Levi para álgebras de Malcev [Car, Gri, Kuz] asegura que existe un homomorfismo de álgebras de Malcev $\mathrm{Id}+s_nh^n\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}+h^n\mathcal{M}$ para cierta aplicación lineal $s_n\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, es decir,

$$[a,b] + s_n([a,b])h^n \equiv [a,b]'_h + [a, s_n(b)]h^n + [s_n(a), b]h^n \pmod{h^{n+1}}$$

para cualesquiera $a,b \in \mathcal{M}$. Por tanto, extendiendo s_n a $\mathcal{M}_h$ del modo ya explicado, la aplicación $\sigma_n = \sigma_{n-1}(\mathrm{Id}+s_nh^n)$ verifica

$$\begin{aligned}\sigma_n^{-1}([\sigma_n(a), \sigma_n(b)]_h) =& (\mathrm{Id}-s_nh^n)[a+s_n(a)h^n, b+s_n(b)h^n]'_h\\ \equiv& [a,b]'_h + ([a,s_n(b)] + [s_n(a),b] - s_n([a,b]))h^n\\ \equiv& [a,b] \pmod{h^{n+1}}\end{aligned}$$

para cualesquiera $a, b \in \mathcal{M}$. La aplicación $\sigma = (\mathrm{Id} + s_1 h)(\mathrm{Id} + s_2 h^2) \cdots$ está bien definida y proporciona un isomorfismo de K-álgebras entre $\mathcal{M}[[h]]$ y $\mathcal{M}_h$. Es particular, existe una F-subálgebra $\mathcal{M}_0$ de $\mathcal{M}_h$ isomorfa a $\mathcal{M}$ y de tal forma que $\mathcal{M}_h = \mathcal{M}_0[[h]]$.

La identidad de Moufang-Hopf (2.1.4) implica que los elementos primitivos $\mathcal{M}_h = \mathcal{M}_0[[h]]$ de $U_h(\mathcal{M})$ pertenecen al núcleo alternativo generalizado $\mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(U_h(\mathcal{M}))$ de $U_h(\mathcal{M})$. Por la propiedad universal de $U(\mathcal{M})$, existe un monomorfismo de F-álgebras $U(\mathcal{M}) \hookrightarrow U_h(\mathcal{M})$ que envía $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}_0$. Por tanto, salvo isomorfismo, $U(\mathcal{M})[[h]] \subseteq U_h(\mathcal{M})$. Como módulo h ambas deformaciones, la trivial $U(\mathcal{M})[[h]]$ y $U_h(\mathcal{M})$ coinciden, entonces son iguales, con lo que se tiene lo que buscábamos.

$\square$

2.4. Primera demostración de $\delta = 0$

En esta sección se expone la primera demostración hallada para probar que $\delta = 0$. Consiste en resolver un sistema lineal de ecuaciones, eliminando incógnitas usando las restricciones generadas por la propiedad (2.2.2).

Primero se observa que, como δ es antisimétrica, al aplicarla a cualquier elemento no puede tener sumandos simétricos, que son: $e \otimes e$, $x_i \otimes x_i$, $y_i \otimes y_i$. Por tanto, los posibles sumandos son:

$$\begin{aligned}
&e \otimes x_i - x_i \otimes e, \quad e \otimes y_i - y_i \otimes e && (i = 1,2,3)\\
&x_i \otimes x_j - x_j \otimes x_i, \quad y_i \otimes y_j - y_j \otimes y_i && (i,j = 1,2,3,\ i \neq j)\\
&x_i \otimes y_j - y_j \otimes x_i && (i,j = 1,2,3).
\end{aligned}$$

Después se calcula (con ayuda de *Mathematica*) la imagen por todas las aplicaciones

$$ad_a \otimes Id + Id \otimes ad_a,\ a \in \{e, x_i, y_i \mid i = 1,2,3\}$$

de todos los posibles sumandos de δ.

Aplicando (2.2.2) a e y x_1, se tiene:

$$2\delta(x_1) = (ad_e \otimes Id + ad_e \otimes Id)\delta(x_1) - (ad_{x_1} \otimes e + e \otimes ad_{x_1})\delta(e).$$

Por tanto,

$$(ad_{x_1} \otimes e + e \otimes ad_{x_1})\delta(e) = (ad_e \otimes Id + ad_e \otimes Id)\delta(x_1) - 2\delta(x_1)$$

$$= (ad_e \otimes Id + ad_e \otimes Id - 2)\delta(x_1).$$

Si nos fijamos en las imágenes de $ad_e \otimes Id + Id \otimes ad_e$, podría tener como sumandos

$$\begin{array}{rcr}
-4(e\otimes y_1 - y_1\otimes e), & -4(e\otimes y_2 - y_2\otimes e) & -4(e\otimes y_3 - y_3\otimes e),\\
2(x_1\otimes x_2 - x_2\otimes x_1), & 2(x_1\otimes x_3 - x_3\otimes x_1), & 2(x_2\otimes x_3 - x_3\otimes x_2),\\
-6(y_1\otimes y_2 - y_2\otimes y_1), & -6(y_1\otimes y_3 - y_3\otimes y_1), & -6(y_2\otimes y_3 - y_3\otimes y_2),\\
-2(x_1\otimes y_1 - y_1\otimes x_1), & -2(x_1\otimes y_2 - y_2\otimes x_1), & -2(x_1\otimes y_3 - y_3\otimes x_1),\\
-2(x_2\otimes y_1 - y_1\otimes x_2), & -2(x_2\otimes y_2 - y_2\otimes x_2), & -2(x_2\otimes y_3 - y_3\otimes x_2),\\
-2(x_3\otimes y_1 - y_1\otimes x_3), & -2(x_3\otimes y_2 - y_2\otimes x_3), & -2(x_3\otimes y_3 - y_3\otimes x_3).
\end{array}$$

Sin embargo, algunos de estos elementos no aparecen en la imagen de $ad_{x_1} \otimes e + e \otimes ad_{x_1}$, luego sus preimágenes no pueden ser sumandos de $\delta(x_1)$. Así, en $\delta(x_1)$ no pueden aparecer los sumandos

$$\begin{array}{rlr}
e\otimes y_1 - y_1\otimes e, & x_2\otimes x_3 - x_3\otimes x_2, & x_2\otimes y_1 - y_1\otimes x_2,\\
x_2\otimes y_3 - y_3\otimes x_2, & x_3\otimes y_1 - y_1\otimes x_3, & x_3\otimes y_2 - y_2\otimes x_3.
\end{array}$$

Análogamente, aplicando (2.2.2) a e e y_1, llegamos a que en $\delta(y_1)$ no pueden aparecer los sumandos

$$\begin{array}{rlr}
e\otimes x_1 - x_1\otimes e, & x_1\otimes y_2 - y_2\otimes x_1, & x_1\otimes y_3 - y_3\otimes x_1,\\
x_2\otimes y_3 - y_3\otimes x_2, & x_3\otimes y_2 - y_2\otimes x_3, & y_2\otimes y_3 - y_3\otimes y_2.
\end{array}$$

Y, como $\delta(e) = (ad_{x_1} \otimes e + e \otimes ad_{x_1})\delta(y_1) - (ad_{y_1} \otimes e + e \otimes ad_{y_1})\delta(x_1)$, puede tener sumandos

$$\begin{array}{rl}
-2(x_1\otimes x_2 - x_2\otimes x_1) + 2(e\otimes y_3 - y_3\otimes e), & -2(x_1\otimes y_1 - y_1\otimes x_1),\\
-2(x_1\otimes x_3 - x_3\otimes x_1) - 2(e\otimes y_2 - y_2\otimes e), & -2(x_1\otimes y_3 - y_3\otimes x_1),\\
-2(x_3\otimes y_3 - y_3\otimes x_3) - 2(x_2\otimes y_2 - y_2\otimes x_2), & -2(x_1\otimes y_2 - y_2\otimes x_1),\\
-2(y_1\otimes y_3 - y_3\otimes y_1) - (e\otimes x_2 - x_2\otimes e), & -(e\otimes x_1 - x_1\otimes e),\\
2(y_1\otimes y_2 - y_2\otimes y_1) - (e\otimes x_3 - x_3\otimes e), & -2(y_2\otimes y_3 - y_3\otimes y_2),\\
 & e\otimes y_2 - y_2\otimes e,\\
 & e\otimes y_3 - y_3\otimes e,
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
2(y_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes y_1) - 2(e \otimes x_3 - x_3 \otimes e), \quad & -2(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1), \\
2(y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1) - 2(e \otimes x_2 - x_2 \otimes e), \quad & -2(x_2 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_2), \\
-(e \otimes y_2 - y_2 \otimes e) - 2(x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1), \quad & -2(x_3 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_3), \\
-(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e) + 2(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1), \quad & -(e \otimes x_2 - x_2 \otimes e), \\
-2(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3) - 2(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2), \quad & -(e \otimes x_3 - x_3 \otimes e), \\
& -(e \otimes y_1 - y_1 \otimes e), \\
& -2(x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2).
\end{aligned}$$

De la misma forma, se obtiene que en $\delta(x_2)$ no pueden aparecer los sumandos

$$\begin{array}{lll}
e \otimes y_2 - y_2 \otimes e, & x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1, & x_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_1, \\
x_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_1, & x_3 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_3, & x_3 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_3
\end{array}$$

y en $\delta(y_2)$ no aparecen

$$\begin{array}{lll}
e \otimes x_2 - x_2 \otimes e, & x_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_1, & x_2 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_2, \\
x_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_2, & x_3 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_3, & y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1.
\end{array}$$

Y, como $\delta(e) = (ad_{x_2} \otimes e + e \otimes ad_{x_2})\delta(y_2) - (ad_{y_2} \otimes e + e \otimes ad_{y_2})\delta(x_2)$, puede tener sumandos

$$\begin{aligned}
2(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) - 2(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e), \quad & -2(x_2 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_2), \\
-2(x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2) + 2(e \otimes y_1 - y_1 \otimes e), \quad & -2(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2), \\
2(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3) + 2(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1), \quad & -2(x_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_2), \\
2(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2) - (e \otimes x_1 - x_1 \otimes e), \quad & 2(y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1), \\
2(y_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes y_1) - (e \otimes x_3 - x_3 \otimes e), \quad & e \otimes y_3 - y_3 \otimes e, \\
& e \otimes x_2 - x_2 \otimes e, \\
& e \otimes y_1 - y_1 \otimes e, \\
-2(y_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes y_1) + 2(e \otimes x_3 - x_3 \otimes e), \quad & -2(x_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_1), \\
2(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2) - 2(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e), \quad & -2(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2), \\
-(e \otimes y_1 - y_1 \otimes e) + 2(x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2), \quad & -2(x_3 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_3), \\
-(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e) + 2(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1), \quad & -(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&2(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3) + 2(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1), \quad && 2(x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1),\\
& && -(e \otimes x_3 - x_3 \otimes e),\\
& && -(e \otimes y_2 - y_2 \otimes e).
\end{aligned}
$$

Repitiendo las operaciones, se obtiene que en $\delta(x_3)$ no pueden aparecer los sumandos

$$
\begin{array}{rll}
e \otimes y_3 - y_3 \otimes e, & x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1, & x_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_1,\\
x_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_1, & x_2 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_2, & x_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_2.
\end{array}
$$

Y en $\delta(y_3)$ no aparecen

$$
\begin{array}{rll}
e \otimes x_3 - x_3 \otimes e, & x_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_1, & x_2 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_2,\\
x_3 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_3, & x_3 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_3, & y_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes y_1.
\end{array}
$$

Y, como $\delta(e) = (ad_{x_3} \otimes e + e \otimes ad_{x_3})\delta(y_3) - (ad_{y_3} \otimes e + e \otimes ad_{y_3})\delta(x_3)$, puede tener sumandos

$$
\begin{aligned}
2(x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1) - 2(e \otimes y_2 - y_2 \otimes e), \quad & -2(x_3 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_3),\\
2(x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2) - 2(e \otimes y_1 - y_1 \otimes e), \quad & -2(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3),\\
-2(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1) - 2(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2), \quad & -2(x_3 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_3),\\
2(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2) - (e \otimes x_1 - x_1 \otimes e), \quad & -2(y_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes y_1),\\
-2(y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1) - (e \otimes x_2 - x_2 \otimes e), \quad & -(e \otimes x_3 - x_3 \otimes e),\\
& e \otimes y_1 - y_1 \otimes e,\\
& e \otimes y_2 - y_2 \otimes e,\\
-2(y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1) - 2(e \otimes x_2 - x_2 \otimes e), \quad & -2(x_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_1),\\
-2(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2) + 2(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e), \quad & -2(x_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_2),\\
-(e \otimes y_1 - y_1 \otimes e) + 2(x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2), \quad & -2(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3),\\
-(e \otimes y_2 - y_2 \otimes e) - 2(x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1), \quad & e \otimes x_1 - x_1 \otimes e,\\
-2(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2) - 2(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1), \quad & -2(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1),\\
& e \otimes x_2 - x_2 \otimes e,\\
& -(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e).
\end{aligned}
$$

Ahora, se buscan los sumandos que no aparecen en los tres bloques de $\delta(e)$ para obtener relaciones entre los coeficientes:

$$\text{en } \delta(x_1) \text{ son } \begin{cases} \text{iguales} \\ \text{opuestos} \end{cases} \text{los coeficientes de } \begin{cases} e \otimes x_3 - x_3 \otimes e \ , \ y_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes y_1 \\ e \otimes x_2 - x_2 \otimes e \ , \ y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1 \end{cases}$$

$$\text{en } \delta(y_1) \text{ son } \begin{cases} \text{iguales} \\ \text{opuestos} \end{cases} \text{los coeficientes de } \begin{cases} e \otimes y_3 - y_3 \otimes e \ , \ x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1 \\ e \otimes y_2 - y_2 \otimes e \ , \ x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1 \end{cases}$$

$$\text{en } \delta(x_2) \text{ son } \begin{cases} \text{iguales} \\ \text{opuestos} \end{cases} \text{los coeficientes de } \begin{cases} e \otimes x_1 - x_1 \otimes e \ , \ y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2 \\ e \otimes x_3 - x_3 \otimes e \ , \ y_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes y_1 \end{cases}$$

$$\text{en } \delta(y_2) \text{ son } \begin{cases} \text{iguales} \\ \text{opuestos} \end{cases} \text{los coeficientes de } \begin{cases} e \otimes y_1 - y_1 \otimes e \ , \ x_2 \otimes x_2 - x_3 \otimes x_2 \\ e \otimes y_3 - y_3 \otimes e \ , \ x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1 \end{cases}$$

$$\text{en } \delta(x_3) \text{ son } \begin{cases} \text{iguales} \\ \text{opuestos} \end{cases} \text{los coeficientes de } \begin{cases} e \otimes x_1 - x_1 \otimes e \ , \ y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2 \\ e \otimes x_2 - x_2 \otimes e \ , \ y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1 \end{cases}$$

$$\text{en } \delta(y_3) \text{ son } \begin{cases} \text{iguales} \\ \text{opuestos} \end{cases} \text{los coeficientes de } \begin{cases} e \otimes y_1 - y_1 \otimes e \ , \ x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2 \\ e \otimes y_2 - y_2 \otimes e \ , \ x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1 \end{cases}$$

Con las relaciones que hemos obtenido hasta ahora, podemos contruir la siguiente tabla de incógnitas (posibles coeficientes para δ):

Ahora, usando $0 = (ad_{x_i} \otimes Id + Id \otimes ad_{x_i})\delta(y_j) - (ad_{y_j} \otimes Id + Id \otimes ad_{y_j})\delta(x_i)$ si $i \neq j$ hallamos relaciones entre los coeficientes:

$$\begin{aligned} 0 =& (ad_{x_1} \otimes Id + Id \otimes ad_{x_1})\delta(y_2) - (ad_{y_2} \otimes Id + Id \otimes ad_{y_2})\delta(x_1) \\ & (-2f_3(x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1) - 2f_3(e \otimes y_2 - y_2 \otimes e) - 2f_4(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1) \\ & - 2f_5(x_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_1) - 2f_6(x_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_1) + 2f_6(x_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_1) \\ & - 2f_8(x_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_1) - 2f_4(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3) - 2f_4(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2) \\ & + f_{10}(e \otimes y_2 - y_2 \otimes e) - f_{13}(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e) - 2f_{17}(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2) \\ & - 2f_{21}(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2)) \end{aligned}$$

	$\delta(e)$	$\delta(x_1)$	$\delta(x_2)$	$\delta(x_3)$	$\delta(y_1)$	$\delta(y_2)$	$\delta(y_3)$
$e\otimes x_1 - x_1\otimes e$		a_1	b_1	c_1	0	f_1	g_1
$e\otimes x_2 - x_2\otimes e$		a_2	b_2	c_2	d_2	0	g_2
$e\otimes x_3 - x_3\otimes e$		a_3	b_3	c_3	d_3	f_3	0
$e\otimes y_1 - y_1\otimes e$		0	b_4	c_4	d_4	f_4	g_4
$e\otimes y_2 - y_2\otimes e$		a_5	0	c_5	d_5	f_5	g_5
$e\otimes y_3 - y_3\otimes e$		a_6	b_6	0	d_6	f_6	g_6
$x_1\otimes x_2 - x_2\otimes x_1$		a_7	b_7	0	d_6	f_6	g_7
$x_1\otimes x_3 - x_3\otimes x_1$		a_8	0	c_8	$-d_5$	f_8	$-g_5$
$x_2\otimes x_3 - x_3\otimes x_2$		0	b_9	c_9	d_9	f_4	g_4
$y_1\otimes y_2 - y_2\otimes y_1$		a_3	b_3	c_{10}	d_{10}	f_{10}	0
$y_1\otimes y_3 - y_3\otimes y_1$		$-a_2$	b_{11}	$-c_2$	d_{11}	0	g_{11}
$y_2\otimes y_3 - y_3\otimes y_2$		a_{12}	b_1	c_1	0	f_{12}	g_{12}
$x_1\otimes y_1 - y_1\otimes x_1$		a_{13}	b_{13}	c_{13}	d_{13}	f_{13}	g_{13}
$x_1\otimes y_2 - y_2\otimes x_1$		a_{14}	0	0	0	f_{14}	0
$x_1\otimes y_3 - y_3\otimes x_1$		a_{15}	0	0	0	0	g_{15}
$x_2\otimes y_1 - y_1\otimes x_2$		0	b_{16}	0	d_{16}	0	0
$x_2\otimes y_2 - y_2\otimes x_2$		a_{17}	b_{17}	c_{17}	d_{17}	f_{17}	g_{17}
$x_2\otimes y_3 - y_3\otimes x_2$		0	b_{18}	0	0	0	g_{18}
$x_3\otimes y_1 - y_1\otimes x_3$		0	0	c_{19}	d_{19}	0	0
$x_3\otimes y_2 - y_2\otimes x_3$		0	0	c_{20}	0	f_{20}	0
$x_3\otimes y_3 - y_3\otimes x_3$		a_{21}	b_{21}	c_{21}	d_{21}	f_{21}	g_{21}

Tabla 2.1: Tabla inicial de coeficientes

$$\begin{aligned}
&- (-2a_1(x_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_1) - 2a_2(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2) - 2a_3(x_3 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_3) \\
&+ 2a_6(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2) - 2a_6(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e) + a_7(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e) \\
&+ 2a_3(x_3 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_3) - 2a_2(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3) - 2a_2(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1) \\
&+ 2a_{12}(x_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_1) + 2a_{13}(x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1) - a_{17}(e \otimes y_2 - y_2 \otimes e) \\
&+ 2a_{21}(x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1))
\end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}
0 &= -2f_3 - 2a_{13} - 2a_{21} && \Longrightarrow f_3 = -a_{13} - a_{21} \\
0 &= -2f_3 + f_{10} + a_{17} && \Longrightarrow f_{10} = -2a_{13} - a_{17} - 2a_{21} \\
0 &= -2f_4 + 2a_2 && \Longrightarrow f_4 = a_2 \\
0 &= -2f_5 - 2f_8 + 2a_1 - 2a_{12} && \Longrightarrow f_8 = a_1 - a_{12} - f_5 \\
0 &= -f_{13} + 2a_6 - a_7 && \Longrightarrow f_{13} = 2a_6 - a_7 \\
0 &= -2f_{17} - 2f_{21} - 2a_6 && \Longrightarrow f_{21} = -a_6 - f_{17}
\end{aligned}$$

También:

$$\begin{aligned}
0 =&(ad_{x_1} \otimes Id + Id \otimes ad_{x_1})\delta(y_3) - (ad_{y_3} \otimes Id + Id \otimes ad_{y_3})\delta(x_1) \\
&(-2g_2(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) + 2g_2(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e) - 2g_4(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1) \\
&- 2g_5(x_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_1) - 2g_6(x_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_1) + 2g_7(x_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_1) \\
&+ 2g_5(x_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_1) - 2g_4(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3) - 2g_4(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2) \\
&+ g_{11}(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e) - g_{13}(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e) - 2g_{17}(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2) \\
&- 2g_{21}(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2)) \\
&- (-2a_1(x_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_1) - 2a_2(x_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_2) - 2a_3(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3) \\
&- 2a_5(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2) + 2a_5(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e) + a_8(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e) \\
&- 2a_3(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2) - 2a_3(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1) + 2a_2(x_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_2) \\
&+ 2a_{12}(x_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_1) - 2a_{13}(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) - 2a_{17}(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) \\
&- 2a_{21}(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e))
\end{aligned}$$

De donde

$$0 = -2g_2 + 2a_{13} + 2a_{17} \qquad \Longrightarrow g_2 = a_{13} + a_{17}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= 2g_2 + g_{11} + a_{21} && \Longrightarrow g_{11} = -2a_{13} - 2a_{17} - a_{21}\\
0 &= -2g_4 + 2a_3 && \Longrightarrow g_4 = a_3\\
0 &= -2g_6 + 2g_7 + 2a_1 - 2a_{12} && \Longrightarrow g_7 = -a_1 + a_{12} + g_6\\
0 &= -g_{13} - 2a_5 - a_8 && \Longrightarrow g_{13} = -2a_5 - a_8\\
0 &= -2g_{17} - 2g_{21} + 2a_5 && \Longrightarrow g_{21} = a_5 - g_{17}
\end{aligned}
$$

De

$$
\begin{aligned}
0 =&(ad_{x_2} \otimes Id + Id \otimes ad_{x_2})\delta(y_1) - (ad_{y_1} \otimes Id + Id \otimes ad_{y_1})\delta(x_2)\\
&(-2d_3(x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2) + 2d_3(e \otimes y_1 - y_1 \otimes e) - 2d_4(x_2 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_2)\\
&- 2d_5(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2) - 2d_6(x_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_2) + 2d_6(x_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_2)\\
&- 2d_5(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3) - 2d_5(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1) - 2d_9(x_2 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_2)\\
&- d_{10}(e \otimes y_1 - y_1 \otimes e) + 2d_{13}(y_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes y_1) - d_{17}(e \otimes x_2 - x_2 \otimes e)\\
&+ 2d_{21}(y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1))\\
&- (-2b_1(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1) - 2b_2(x_2 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_2) - 2b_3(x_3 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_3)\\
&+ 2b_6(y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1) - 2b_6(e \otimes x_2 - x_2 \otimes e) - b_7(e \otimes x_2 - x_2 \otimes e)\\
&+ 2b_3(x_3 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_3) - 2b_{11}(x_2 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_2) - 2b_1(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3)\\
&- 2b_1(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2) - b_{13}(e \otimes y_1 - y_1 \otimes e) - 2b_{17}(x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2)\\
&- 2b_{21}(x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2))
\end{aligned}
$$

se tiene

$$
\begin{aligned}
0 &= -2d_3 + 2b_{17} + 2b_{21} && \Longrightarrow d_3 = b_{17} + b_{21}\\
0 &= 2d_3 - d_{10} + b_{13} && \Longrightarrow d_{10} = b_{13} + 2b_{17} + 2b_{21}\\
0 &= -2d_4 - 2d_9 + 2b_2 + 2b_{11} && \Longrightarrow d_9 = b_2 + b_{11} - d_4\\
0 &= -2d_5 + 2b_1 && \Longrightarrow d_5 = b_1\\
0 &= 2d_{13} + 2d_{21} - 2b_6 && \Longrightarrow d_{21} = -b_6 + d_{13}\\
0 &= -d_{17} + 2b_6 + b_7 && \Longrightarrow d_{17} = b_7 + 2b_6
\end{aligned}
$$

Operando

$$
0 =(ad_{x_2} \otimes Id + Id \otimes ad_{x_2})\delta(y_3) - (ad_{y_3} \otimes Id + Id \otimes ad_{y_3})\delta(x_2)
$$

$$
\begin{aligned}
&(2g_1(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) - 2g_1(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e) - 2a_3(x_2 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_2) \\
&- 2g_5(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2) - 2g_6(x_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_2) + 2(-a_1 + a_{12} + g_6)(x_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_2) \\
&- 2g_5(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3) - 2g_5(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1) + 2a_3(x_2 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_2) \\
&+ g_{12}(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e) + 2(-2a_5 - a_8)(y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1) - g_{17}(e \otimes x_2 - x_2 \otimes e) \\
&+ 2(a_5 - g_1 7)(y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1)) \\
&- (-2b_1(x_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_1) - 2b_2(x_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_2) - 2b_3(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3) \\
&- 2b_4(y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1) - 2b_4(e \otimes x_2 - x_2 \otimes e) + b_9(e \otimes x_2 - x_2 \otimes e) \\
&- 2b_3(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2) - 2b_3(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1) - 2b_{11}(x_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_2) \\
&+ 2b_1(x_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_1) - 2b_{13}(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) - 2b_{17}(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) \\
&- b_{21}(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e))
\end{aligned}
$$

se consigue

$$
\begin{aligned}
&0 = 2g_1 + 2b_{13} + 2b_{17} && \Longrightarrow g_1 = -b_{13} - b_{17} \\
&0 = -2g_1 + g_{12} + b_{21} && \Longrightarrow g_{12} = -2b_{13} - 2b_{17} + b_{21} \\
&0 = -2g_5 + 2b_3 && \Longrightarrow g_5 = b_3 \\
&0 = -2g_6 + 2(-a_1 - a_{12} + g_6) + 2b_2 + 2b_{11} && \Longrightarrow b_{11} = a_1 - a_{12} - b_2 \\
&0 = 2(-2a_5 - a_8) + 2(a_5 - g_{17}) + 2b_4 && \Longrightarrow g_{17} = b_4 - a_5 - a_8 \\
&0 = -g_{17} + 2b_4 - b_9 && \Longrightarrow b_9 = b_4 + a_5 + a_8
\end{aligned}
$$

Con

$$
\begin{aligned}
0 =&(ad_{x_3} \otimes Id + Id \otimes ad_{x_3})\delta(y_1) - (ad_{y_1} \otimes Id + Id \otimes ad_{y_1})\delta(x_3) \\
&(2d_2(x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1) - 2d_2(e \otimes y_1 - y_1 \otimes e) - 2d_4(x_3 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_3) \\
&- 2b_1(x_3 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_3) - 2d_6(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3) - 2d_6(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1) \\
&- 2d_6(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2) + 2b_1(x_3 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_3) + 2(a_1 - a_{12} - d_4)(x_3 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_3) \\
&- d_{11}(e \otimes y_1 - y_1 \otimes e) + 2d_{13}(y_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes y_1) - 2(b_7 + 2b_6)(y_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes y_1) \\
&- (-b_6 + d_{13})(e \otimes x_3 - x_3 \otimes e)) \\
&- (-2c_1(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1) - 2c_2(x_2 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_2) - 2c_3(x_3 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_3) \\
&+ 2c_5(y_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes y_1) - 2c_5(e \otimes x_3 - x_3 \otimes e) - c_8(e \otimes x_3 - x_3 \otimes e)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2c_{10}(x_3\otimes y_1-y_1\otimes x_3)+2c_2(x_2\otimes y_1-y_1\otimes x_2)-2c_1(x_2\otimes y_3-y_3\otimes x_2)\\
&-2c_1(x_1\otimes y_2-y_2\otimes x_1)-c_{13}(e\otimes y_1-y_1\otimes e)-2c_{17}(x_2\otimes x_3-x_3\otimes x_2)\\
&-2c_{21}(x_2\otimes x_3-x_3\otimes x_2))
\end{aligned}
$$

se llega a

$$
\begin{aligned}
&0=2d_2+2c_{17}+2c_{21} && \Longrightarrow d_2=-c_{17}-c_{21}\\
&0=-2d_2-d_{11}+c_{13} && \Longrightarrow d_{11}=2c_{17}+2c_{21}+c_{13}\\
&0=-2d_4+2(a_1-a_{12}-d_4)+2c_3-2c_{10} && \Longrightarrow 2d_4=a_1-a_{12}+c_3-c_{10}\\
&0=-2d_6+2c_1 && \Longrightarrow d_6=c_1\\
&0=-2d_{13}-2(b_7+2b_6)-2c_5 && \Longrightarrow c_5=-b_6-b_7-d_{13}\\
&0=-(-b_6+d_{13})+2c_5+c_8 && \Longrightarrow c_8=b_6+2b_7+3d_{13}
\end{aligned}
$$

Usando

$$
\begin{aligned}
0=&(ad_{x_3}\otimes Id+Id\otimes ad_{x_3})\delta(y_2)-(ad_{y_2}\otimes Id+Id\otimes ad_{y_2})\delta(x_3)\\
&(2f_1(x_1\otimes x_3-x_3\otimes x_1)-2f_1(e\otimes y_2-y_2\otimes e)-2a_2(x_3\otimes y_1-y_1\otimes x_3)\\
&-2f_5(x_3\otimes y_2-y_2\otimes x_3)-2f_6(x_3\otimes y_3-y_3\otimes x_3)-2f_6(x_1\otimes y_1-y_1\otimes x_1)\\
&-2f_6(x_2\otimes y_2-y_2\otimes x_2)-2(a_1-a_{12}-f_5)(x_3\otimes y_2-y_2\otimes x_3)\\
&+2a_2(x_3\otimes y_1-y_1\otimes x_3)-f_{12}(e\otimes y_2-y_2\otimes e)-2(2a_6-a_7)(y_1\otimes y_2-y_2\otimes y_1)\\
&-2f_{17}(y_1\otimes y_2-y_2\otimes y_1)-(-a_6-f_{17})(e\otimes y_3-y_3\otimes e))\\
&-(-2c_1(x_1\otimes y_2-y_2\otimes x_1)-2c_2(x_2\otimes y_2-y_2\otimes x_2)-2c_3(x_3\otimes y_2-y_2\otimes x_3)\\
&-2c_4(y_1\otimes y_2-y_2\otimes y_1)+2c_4(e\otimes x_3-x_3\otimes e)-c_9(e\otimes x_3-x_3\otimes e)\\
&+2(a_1-a_{12}+c_3-2d_4)(x_3\otimes y_2-y_2\otimes x_3)-2c_2(x_3\otimes y_3-y_3\otimes x_3)\\
&-2c_2(x_1\otimes y_1-y_1\otimes x_1)+2c_1(x_1\otimes y_2-y_2\otimes x_1)+2c_{13}(x_1\otimes x_3-x_3\otimes x_1)\\
&-c_{17}(e\otimes y_2-y_2\otimes e)+2c_{21}(x_1\otimes x_3-x_3\otimes x_1))
\end{aligned}
$$

se tiene que

$$
\begin{aligned}
&0=2f_1-2c_{13}-2c_{21} && \Longrightarrow f_1=c_{13}+c_{21}\\
&0=-2f_1-f_{12}+c_{17} && \Longrightarrow f_{12}=-2a_3+c_{17}-2c_{21}\\
&0=-2f_5-2(a_1-a_{12}-f_5)+2c_3-2(a_1-a_{12}+c_3-2d_4) && \Longrightarrow d_4=-a_1+a_{12}
\end{aligned}
$$

$$0 = -2f_6 + 2c_2 \qquad \Longrightarrow f_6 = c_2$$

$$0 = -2(2a_6 - a_7) - 2f_{17} + 2c_4 \qquad \Longrightarrow f_{17} = 3a_6 + 2a_7 + c_9$$

$$0 = -(a_6 - f_{17}) - 2c_4 + c_9 \qquad \Longrightarrow c4 = 2a_6 + a_7 + c_9$$

En este punto, la tabla de incógnitas es la tabla 2.2.

Usando otras identidades dadas por (2.2.2) podemos seguir hallando relaciones entre estos coeficientes. Por ejemplo, la identidad

$$2\delta(y_3) = (ad_{x_1} \otimes Id + Id \otimes ad_{x_1})\delta(x_2) - (ad_{x_2} \otimes Id + Id \otimes ad_{x_2})\delta(x_1)$$

equivale a

$$\begin{aligned}
&2(-b_{13} - b_{17})(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e) + 2(a_{13} + a_{17}(e \otimes x_2 - x_2 \otimes e))\\
&+ 2a_3(e \otimes y_1 - y_1 \otimes e) + 2b_3(e \otimes y_2 - y_2 \otimes e) + 2g_6(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e)\\
&+ 2(-a_1 + a_{12} + g_6)(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) - 2b_3(x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1)\\
&+ 2a_3(x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2) + 2(-2a_{13} - 2a_{17} - a_{21})(y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1)\\
&+ 2(-2b_{18} - 2b_{17} - b_{21})(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2) + 2(-2a_5 - a_8)(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1)\\
&+ 2g_5(x_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_1) + 2(-a_5 - a_8 + b_4)(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2)\\
&+ 2g_{18}(x_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_2) + 2(a_5 - g_{17})(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3)\\
=&(-2b_2(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) + 2b_2(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e) - 2b_3(x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1)\\
&- 2b_3(e \otimes y_2 - y_2 \otimes e) - 2b_4(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1) - 2b_6(x_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_1)\\
&+ 2b_7(x_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_1) - 2(a_5 + a_8 + b_4)(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3)\\
&- 2(a_5 + a_8 + b_4)(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2) + b_3(e \otimes y_2 - y_2 \otimes e)\\
&(a_1 - a_{12} - b_2)(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e) - b_{13}(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e) - 2b_{16}(y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1)\\
&- 2b_{16}(e \otimes x_2 - x_2 \otimes e) - 2b_{17}(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2) - 2b_{21}(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2))\\
-&(2a_1(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) - 2a_1(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e) - 2a_3(x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2)\\
&+ 2a_3(e \otimes y_1 - y_1 \otimes e) - 2a_5(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2) - 2a_6(x_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_2)\\
&+ 2a_7(x_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_2) + 2a_8(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3) + 2a_8(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1)\\
&- a_3(e \otimes y_1 - y_1 \otimes e) + a_{12}(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e) + 2a_{13}(y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1)\\
&2a_{14}(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2) - a_{14}(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e)\\
&- a_{17}(e \otimes x_2 - x_2 \otimes e) + 2a_{21}(y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1)),
\end{aligned}$$

	$\delta(e)$	$\delta(x_1)$	$\delta(x_2)$	$\delta(x_3)$	$\delta(y_1)$	$\delta(y_2)$	$\delta(y_3)$
$e\otimes x_1 - x_1\otimes e$		a_1	b_1	c_1	0	$c_{13}+c_{21}$	$-b_{13}-b_{17}$
$e\otimes x_2 - x_2\otimes e$		a_2	b_2	c_2	$-c_{17}-c_{21}$	0	$a_{13}+a_{17}$
$e\otimes x_3 - x_3\otimes e$		a_3	b_3	c_3	$b_{17}+b_{21}$	$-a_{13}-a_{21}$	0
$e\otimes y_1 - y_1\otimes e$		0	b_4	c_4	d_4	a_2	a_3
$e\otimes y_2 - y_2\otimes e$		a_5	0	c_5	b_1	f_5	b_3
$e\otimes y_3 - y_3\otimes e$		a_6	b_6	0	c_1	c_2	g_6
$x_1\otimes x_2 - x_2\otimes x_1$		a_7	b_7	0	c_1	c_2	$-a_1+a_{12}+g_6$
$x_1\otimes x_3 - x_3\otimes x_1$		a_8	0	$5b_6+2b_7$	$-b_1$	$a_1-a_{12}-f_5$	$-b_3$
$x_2\otimes x_3 - x_3\otimes x_2$		0	$a_5+a_8+b_4$	$a_6+a_7+c_4$	$-a_1+a_{12}+d_4$	a_2	a_3
$y_1\otimes y_2 - y_2\otimes y_1$		a_3	b_3	$-a_1+a_{12}+c_3$	$b_{13}+2b_{17}+2b_{21}$	$-2a_{13}-a_{17}-2a_{21}$	0
$y_1\otimes y_3 - y_3\otimes y_1$		$-a_2$	$a_1-a_{12}-b_2$	$-c_2$	$c_{13}+2c_{17}+2c_{21}$	0	$-2a_{13}-2a_{17}-a_{21}$
$y_2\otimes y_3 - y_3\otimes y_2$		a_{12}	b_1	c_1	0	$-2c_{13}+c_{17}-2c_{21}$	$-2b_{13}-2b_{17}-b_{21}$
$x_1\otimes y_1 - y_1\otimes x_1$		a_{13}	b_{13}	c_{13}	$-4b_6-2b_7-2c_5$	$2a_6-a_7$	$-2a_5-a_8$
$x_1\otimes y_2 - y_2\otimes x_1$		a_{14}	0	0	0	f_{14}	0
$x_1\otimes y_3 - y_3\otimes x_1$		a_{15}	0	0	0	0	g_{15}
$x_2\otimes y_1 - y_1\otimes x_2$		0	b_{16}	0	d_{16}	0	0
$x_2\otimes y_2 - y_2\otimes x_2$		a_{17}	b_{17}	c_{17}	$2b_6+b_7$	$-2a_6-a_7+c_4$	$-a_5-a_8+b_4$
$x_2\otimes y_3 - y_3\otimes x_2$		0	b_{18}	0	0	0	g_{18}
$x_3\otimes y_1 - y_1\otimes x_3$		0	0	c_{19}	d_{19}	0	0
$x_3\otimes y_2 - y_2\otimes x_3$		0	0	c_{20}	0	f_{20}	0
$x_3\otimes y_3 - y_3\otimes x_3$		a_{21}	b_{21}	c_{21}	$5b_6+2b_7+2c_5$	$a_6+a_7-c_4$	$2a_5+a_8-b_4$

Tabla 2.2: Tabla de coeficientes con las condiciones $(ad_{x_i}\otimes Id + Id\otimes ad_{x_i})\delta(y_j) - (ad_{y_j}\otimes Id + Id\otimes ad_{y_j})\delta(x_i)$

lo que nos da las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
-2b_{13} - 2b_{17} = -b_{13} + a_{14} &\implies & a_{14} = -b_{13} - 2b_{17}(*)\\
2a_{13} + 2a_{17} = -b_{16} + a_{17} &\implies & b_{16} = -2a_{13} - a_{17}(**)\\
2a_3 = -2a_3 + a_3 &\implies & a_3 = 0\\
2b_3 = -2b_3 + b_3 &\implies & b_3 = 0\\
2g_6 = 0 &\implies & g_6 = 0\\
-2a_1 + 2a_{12} + 2g_6 = -2b_2 - 2a_1 &\implies & a_{12} = -b_2\\
-4a_{13} - 4a_{17} - 2a_{21} = -2b_{16} - 2a_{13} - 2a_{21} &\implies & b_{16} = a_{13} + 2a_{17}(**)\\
-4b_{13} - 4b_{17} - 2b_{21} = -2b_{17} - 2b_{21} - 2a_{14} &\implies & a_{14} = 2b_{13} + b_{17}(*)\\
-4a_5 - 2a_8 = -2b_4 - 2a_8 &\implies & b_4 = a_5(***)\\
2g_{15} = -2b_6 + 2b_7 &\implies & g_{15} = -b_6 + b_7\\
-2a_5 - 2a_8 + 2b_4 = -2a_5 - 2a_8 - 2b_4 + 2a_5 &\implies & a_5 = 2b_4(***)\\
2g_{18} = 2a_6 - 2a_7 &\implies & g_{18} = a_6 - a_7\\
4a_5 + 2a_8 - 2b_4 = -2a_5 - 2a_8 - 2b_4 - 2a_8 &\implies & a_8 = -a_5(****)\\
0 = -2b_2 + a_1 - a_{12} - b_2 + 2a_1 - a_{12} &\implies & b_2 = 3a_1
\end{aligned}$$

Ahora, con las expresiones $(*)$ tenemos que $b_{17} = -b_{13}$ y $a_{14} = b_{13}$; usando $(**)$ se llega a $a_{17} = -a_{13}$ y $b_{16} = -a_{13}$ y de $(***)$ se deduce que $a_5 = 0 = b_4$, luego por $(****)$ $a_8 = 0$.

La igualdad $2\delta(x_2) = (ad_{y_1} \otimes Id + Id \otimes ad_{y_1})\delta(y_3) - (ad_{y_3} \otimes Id + Id \otimes ad_{y_3})\delta(y_1)$ se reescribe como

$$\begin{aligned}
&2b_1(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e) + 6a_1(e \otimes x_2 - x_2 \otimes e)) + 2b_6(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e)\\
&+ 2b_7(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) + 2a_1(y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1) + 2b_1(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2)\\
&+ 2a_{14}(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1) - 2a_{13}(x_2 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_2) - 2a_{14}(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2)\\
&+ 2b_{18}(x_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_2) + 2b_{21}(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3)\\
=&(+4a_1(e \otimes x_2 - x_2) + 2a_{21}(x_2 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_2) + 2b_{21}(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3)\\
&+ 2b_{21}(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2) - (-b_6 + b_7)(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e)\\
&+ 2(-b_6 + b_7)(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1)) - (-2(-c_{17} - c_{21})(x_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-2(-a_{14}+b_{21})(x_3\otimes y_3-y_3\otimes x_3)-2d_4(y_1\otimes y_3-y_3\otimes y_1)\\
&-2d_4(e\otimes x_2-x_2\otimes e)-2b_1(y_2\otimes y_3-y_3\otimes y_2)+2b_1(e\otimes x_1-x_1\otimes e)\\
&-b_1(e\otimes x_1-x_1\otimes e)+(-4a_1+d_4)(e\otimes x_2-x_2\otimes e)\\
&-2(-a_{14}+2b_{21})(x_2\otimes y_2-y_2\otimes x_2)-2(-a_{14}+2b_{21})(x_1\otimes y_1-y_1\otimes x_1)\\
&-2(c_{13}+2c_{17}+2c_{21})(x_2\otimes y_3-y_3\otimes x_2)-2(-4b_6-2b_7-2c_5)(x_1\otimes x_2-x_2\otimes x_1)\\
&-2(2b_6+b_7)(x_1\otimes x_2-x_2\otimes x_1)-d_{19}(e\otimes y_2-y_2\otimes e)-2d_{19}(x_1\otimes x_3-x_3\otimes x_1)\\
&-(5b_6+2b_7+2c_5)(e\otimes y_3-y_3\otimes e))
\end{aligned}
$$

Por lo que se tiene:

$$
\begin{aligned}
2b_1=-2b_1+b_1 &\implies & b_1=0\\
6a_1=4a_1+2d_4+4a_1-d_4 &\implies & -2a_1=d_4(*)\\
2b_6=b_6-b_7+5b_6+2b_7+2c_5 &\implies & 0=4b_6+b_7+2c_5(**)\\
2b_7=-2b_6+2b_7-8b_6-4b_7-4c_5+4b_6+2b_7 &\implies & 0=-6b_6-2b_7-4c_5(**)\\
2a_1=2d_4 &\implies & a_1=d_4(*)\\
2a_{14}=-2a_{14}+4b_{21} &\implies & 3a_{14}=4b_{21}=0\\
-2a_{13}=2a_{21} &\implies & a_{21}=-a_{13}\\
-2a_{14}=2b_{21}-2a_{14}+4b_{21} &\implies & b_{21}=0\\
2b_{18}=-2c_{17}-2c_{21}+2c_{13}+4c_{17}+4c_{21} &\implies & b_{18}=c_{13}+c_{17}+c_{21}\\
2b_{21}=2b_{21}-2a_{14}+2b_{21} &\implies & a_{14}=b_{21}\\
0=d_{19} &\implies & d_{19=0}
\end{aligned}
$$

Así, de $(*)$ se obtiene que $a_1=0=d_4$ y de $(**)$ tenemos que $b_6=0$ y $2c_5=3b_7$.

La igualdad $2\delta(x_1)=(ad_{y_3}\otimes Id+Id\otimes ad_{y_3})\delta(y_2)-(ad_{y_2}\otimes Id+Id\otimes ad_{y_2})\delta(y_3)$ nos da:

$$
\begin{aligned}
&2a_2(e\otimes x_2-x_2\otimes e)+2a_6(e\otimes y_3-y_3\otimes e)+2a_7(x_1\otimes x_2-x_2\otimes x_1)\\
&-2a_2(y_1\otimes y_3-y_3\otimes y_1)+2a_{13}(x_1\otimes y_1-y_1\otimes x_1)+2a_{15}(x_1\otimes y_3-y_3\otimes x_1)\\
&-2a_{13}(x_2\otimes y_2-y_2\otimes x_2)-2a_{13}(x_3\otimes y_3-y_3\otimes x_3)\\
=&(-2(c_{13}+c_{21})(x_1\otimes y_3-y_3\otimes x_1)-2a_2(y_1\otimes y_3-y_3\otimes y_1)-2a_2(e\otimes x_2-x_2\otimes e)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 2f_5(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2) + 2f_5(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e) - f_5(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e)\\
&+ a_2(e \otimes x_2 - x_2 \otimes e) - 2a_{13}(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2) - 2a_{13}(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1)\\
&2(-2c_{13} + c_{17} - 2c_{21})(x_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_1) - 2(2a_6 - a_7)(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1)\\
&- 2(-2a_6 - a_7 + c_4)(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) - f_{20}(e \otimes y_2 - y_2 \otimes e)\\
&- 2f_{20}(x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1) - (a_6 + a_7 - c_4)(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e))\\
&-(2a_{13}(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3) + 2a_{13}(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1) - (a_6 + a_7)(e \otimes y_3 - y_3 \otimes e)\\
&+ 2(a_6 + a_7)(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1))
\end{aligned}
$$

Que nos permite obtener las siguientes relaciones entre coeficientes:

$$
\begin{aligned}
2a_2 = -2a_2 + a_2 &\implies & a_2 &= 0\\
2a_6 = -a_6 - a_7 + c_4 + a_6 + a_7 &\implies & c_4 &= 2a_6(*)\\
2a_7 = -4a_6 + 2a_7 + 4a_6 + 2a_7 - 2c_4 - 2a_6 - 2a_7 &\implies & c_4 &= -a_6(*)\\
2a_{13} = -2a_{13} - 2a_{13} &\implies & a_{13} &= 0\\
2a_{15} = -4c_{13} + 2c_{17} - 6c_1 & & &\\
0 = 2f_5 &\implies & f_5 &= 0\\
0 = -f_{20} &\implies & f_{20} &= 0
\end{aligned}
$$

De $(*)$ se tiene que $c_4 = 0 = a_6$. Los coeficientes en este momento vienen dados en la tabla 2.3:

Finalmente, de la identidad

$$2\delta(x_3) = (ad_{y_2} \otimes Id + Id \otimes ad_{y_2})\delta(y_1) - (ad_{y_1} \otimes Id + Id \otimes ad_{y_1})\delta(y_2)$$

se tiene

$$
\begin{aligned}
&2c_1(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e) + 2c_2(e \otimes x_2) + 2c_3(e \otimes x_3 - x_3 \otimes e) + 2c_5(e \otimes y_2 - y_2 \otimes e)\\
&+ 4b_7(x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1) + 2a_7(x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2) + 2c_3(y_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes y_1)\\
&- 2c_2(y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1) + 2c_1(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2) + 2c_{13}(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1)\\
&+ 2c_{17}(x_2 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_2) + 2c_{19}(x_3 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_3) + 2c_{20}(x_3 \otimes y_2 - y_2 \otimes x_3)\\
&+ 2c_{21}(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3)
\end{aligned}
$$

	$\delta(e)$	$\delta(x_1)$	$\delta(x_2)$	$\delta(x_3)$	$\delta(y_1)$	$\delta(y_2)$	$\delta(y_3)$
$e\otimes x_1 - x_1\otimes e$		0	0	c_1	0	$c_{13}+c_{21}$	0
$e\otimes x_2 - x_2\otimes e$		0	0	c_2	$-c_{17}-c_{21}$	0	0
$e\otimes x_3 - x_3\otimes e$		0	0	c_3	0	0	0
$e\otimes y_1 - y_1\otimes e$		0	0	0	0	0	0
$e\otimes y_2 - y_2\otimes e$		a_5	0	c_5	0	0	0
$e\otimes y_3 - y_3\otimes e$		0	0	0	c_1	c_2	0
$x_1\otimes x_2 - x_2\otimes x_1$		a_7	b_7	0	c_1	c_2	0
$x_1\otimes x_3 - x_3\otimes x_1$		0	0	$2b_7$	0	0	0
$x_2\otimes x_3 - x_3\otimes x_2$		0	0	a_7	0	0	0
$y_1\otimes y_2 - y_2\otimes y_1$		0	0	c_3	0	0	0
$y_1\otimes y_3 - y_3\otimes y_1$		0	0	$-c_2$	$c_{13}+2c_{17}+2c_{21}$	0	0
$y_2\otimes y_3 - y_3\otimes y_2$		0	0	c_1	0	$-2c_{13}+c_{17}-2c_{21}$	0
$x_1\otimes y_1 - y_1\otimes x_1$		0	0	c_{13}	b_7	$-a_7$	0
$x_1\otimes y_2 - y_2\otimes x_1$		0	0	0	0	f_{14}	0
$x_1\otimes y_3 - y_3\otimes x_1$		a_{15}	0	0	0	0	b_7
$x_2\otimes y_1 - y_1\otimes x_2$		0	0	0	d_{16}	0	0
$x_2\otimes y_2 - y_2\otimes x_2$		0	0	c_{17}	b_7	$-a_7$	0
$x_2\otimes y_3 - y_3\otimes x_2$		0	$c_{13}+c_{17}+c_{21}$	0	0	0	$-a_7$
$x_3\otimes y_1 - y_1\otimes x_3$		0	0	c_{19}	0	0	0
$x_3\otimes y_2 - y_2\otimes x_3$		0	0	c_{20}	0	0	0
$x_3\otimes y_3 - y_3\otimes x_3$		0	0	c_{21}	$5b_7$	a_7	0

Tabla 2.3: Tabla de coeficientes con más condiciones impuestas

$$\begin{aligned}
=&(-2(-c_{17} - c_{21})(x_{\otimes}y_2 - y_2 \otimes x_2) + 2c_1(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2) - 2c_1(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e) \\
&+ c_1(e \otimes x_1 - x_1 \otimes e) + 2(c_{13} + 2c_{17} + 2c_{21})(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3) \\
&+ 2(c_{13} + 2c_{17} + 2c_{21})(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1) + 2b_7(x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1) \\
&- d_{16}(e \otimes y_1 - y_1 \otimes e) + 2d_{16}(x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2) - b_7(e \otimes y_2 - y_2 \otimes e) \\
&+ 10b_7(x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1)) - (-2(c_{13} + c_{21})(x_1 \otimes y_1 - y_1 \otimes x_1) \\
&+ 2c_2(y_1 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_1) - 2c_2(e \otimes x_2 - x_2 \otimes e) - c_2(e \otimes x_2 - x_2 \otimes e) \\
&- 2(-2c_{13} + c_{17} - 2c_{21})(x_3 \otimes y_3 - y_3 \otimes x_3) - 2(-2c_{13} + c_{17} - 2c_{21})(x_2 \otimes y_2 \\
&- y_2 \otimes x_2) - (2a_6 - a_7)(e \otimes y_1 - y_1 \otimes e) - f_{14}(e \otimes y_2 - y_2 \otimes e) \\
&- 2f_{14}(x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1) + 2a_7(x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2) - 2a_7(x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2)
\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}
2c_1 = -2c_1 + c_1 &\Longrightarrow & c_1 &= 0 \\
2c_2 = 2c_2 + c_2 &\Longrightarrow & c_2 &= 0 \\
2c_3 = 0 &\Longrightarrow & c_3 &= 0 \\
2c_5 = -b_7 + f_{14} &\Longrightarrow & f_{14} &= b_7 + 2c_5(*) \\
4b_7 = 2b_7 + 10b_7 + 2f_{14} &\Longrightarrow & f_{14} &= -4b_7(*) \\
2a_7 = 2d_{16} + 2a_7 - 2a_7 &\Longrightarrow & d_{16} &= a_7(**) \\
2c_{13} = 2_{13} + 4c_{17} + 4c_{21} + 2c_{13} + 2c_{21} &\Longrightarrow & 0 &= c_{13} + 2c_{17} + 3c_{21}(***) \\
2c_{17} = 2c_{17} + 2c_{21} - 4c_{13} + 2c_17 - 4c_{21} &\Longrightarrow & 0 &= -2c_{13} + 2c_{17} - 2c_{21}(***) \\
2c_{19} = 0 &\Longrightarrow & c_{19} &= 0 \\
2c_{20} = 0 &\Longrightarrow & c_{20} &= 0 \\
2c_{21} = 2c_{13} + 4c_{17} + 4c_{21} - 4c_{13} + 2c_{17} - 4c_{21} &\Longrightarrow & c_{21} &= c_{13}(***) \\
0 = -d_{16} + a_7 &\Longrightarrow & d_{16} &= -a_7(**)
\end{aligned}$$

Ahora, de 2.4 y $(*)$ se tiene que $f_{14} = b_7 = c_5 = 0$; con $(**)$ se obtiene que $a_7 = 0$ y $(***)$ implica que $c_{13} = c_{17} = c_{21} = 0$. Por tanto, $\delta(x_2) = 0 = \delta(y_2)$, de donde $\delta(e) = (ad_{x_2} \otimes Id + Id \otimes ad_{x_2})\delta(y_2) - (ad_{y_2} \otimes Id + Id \otimes ad_{y_2})\delta(x_2) = 0$. Por la proposición (2.2.13), se tiene que $\delta = 0$.

2.5. En breve / Summarizing

2.5.1. En breve

En este capítulo se han extendido los conceptos de deformaciones y cuantizaciones de envolventes universales que aparecen en [CP, Res, Dri, Jim] al contexto de álgebras de Malcev. También se ha probado que, en el caso particular de la familia de álgebras de Malcev simples centrales de dimensión 7, cualquier deformación coasociativa de la envolvente universal es coconmutativa y que no existen deformaciones coasociativas no triviales de dicha envolvente universal que verifiquen la identidad de Moufang-Hopf 2.1.4.

Los resultados que aparecen en este capítulo han sido recopilados en el artículo "Non-Existence of Coassociative Quantized Universal Enveloping Algebras of the Traceless Octonions", que ha sido publicado en la revista "Communications in Algebra" [MPI12].

2.5.2. Summarizing

In this chapter we extended the notions of deformations and quantizations of universal enveloping algebras appearing in [CP, Res, Dri, Jim] to the Malcev algebras setting. We also proved that in the particular case of the family of 7-dimensional simple Malcev algebras, any coassociative deformation of the universal enveloping algebra is cocommutative, so there exist no non-trivial coassociative deformations of this universal enveloping algebra which verify the Moufang-Hopf identity 2.1.4.

The results from this chapter were compiled in the paper "Non-Existence of Coassociative Quantized Universal Enveloping Algebras of the Traceless Octonions", that was published in the journal "Communications in Algebra"[MPI12].

Capítulo 3

Identidades polinomiales para las álgebras tangentes a lazos monoasociativos

El objetivo de este capítulo es determinar las identidades polinómicas multilineales que definen la variedad de las álgebras tangentes a los lazos monoasociativos. Las técnicas utilizadas se basan en la teoría de representación del grupo simétrico S_n y los cálculos han sido realizados con ayuda del programa de cálculo simbólico Maple.

The goal of this chapter is to determine the multilinear polynomial identities defining the variety of tangent algebras to monoassociative loops. We use techniques based in representation theory of the symmetric group S_n and the computations have been made with the help of Maple, a program for symbolic computation.

3.1. Introducción / Introduction

3.1.1. Introducción

Lazos monoasociativos en geometría diferencial y álgebras de Sabinin

Definición 3.1.1. Un **cuasigrupo** $(Q, \cdot, \backslash, /)$ es un conjunto no vacío Q con tres operaciones binarias $\cdot$ (*producto o multiplicación*), $\backslash$ (*división a izquierda*) y $/$ (*división a derecha*) que verifican

$$a\backslash(a \cdot b) \equiv b,\ a \cdot (a\backslash b) \equiv b,\ (a \cdot b)/b \equiv a,\ (a/b) \cdot b \equiv a.$$

Nota 3.1.2. Un *lazo* es, por tanto, un cuasigrupo $(Q, \cdot, \backslash, /)$ que verifica

$$a\backslash a = b/b \quad \forall a, b \in Q.$$

Esta condición implica la existencia de un elemento identidad en Q: $e = a/a = a\backslash a$ para cualquier elemento $a \in Q$.

Los cuasigrupos diferenciables (y, en particular, los lazos analíticos) son una generalización no asociativa de los grupos de Lie y han sido ampliamente estudiados en álgebra y en geometría diferencial. Su estudio algebraico ha llevado al desarrollo de lo que se conoce como "teoría de Lie no asociativa", que extiende los resultados más relevantes de la teoría de grupos y álgebras de Lie a estructuras no asociativas. El siguiente diagrama conmutativo ilustra las relaciones existentes entre las diversas estructuras que aparecen:

$$\begin{tikzcd} & \underset{\text{álgebra de Hopf}}{\mathcal{D}_e(G) = U(T_e(G))} \\ \underset{\text{grupo de Lie local}}{G} \arrow[ur] \arrow[r] & \underset{\text{álgebra de Lie}}{T_e(G)} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Recordamos las definciciones de álgebra de Lie y álgebra de Hopf. Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial L con una operación bilineal antisimétrica $[-,-]: L \times L \to L$ que verifica la identidad de Jacobi

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] \equiv 0.$$

Un *álgebra de Hopf* $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ es un espacio vectorial H donde (H, μ, η) es un álgebra asociativa unitaria, (H, Δ, ϵ) es una coálgebra coasociativa, Δ y ϵ son homomorfismos de álgebras, μ y η son homomorfismos de coálgebras y $S : H \to H$ es antihomomorfismo de álgebras y de coálgebras y verifica $S(x_{(1)})x_{(2)} \equiv \epsilon(x) \cdot 1 \equiv x_{(1)}S(x_{(2)})$.

Dado un grupo de Lie local G, el espacio tangente en el elemento neutro $T_e(G)$ es un álgebra de Lie y la biálgebra de distribuciones con soporte en el neutro $\mathcal{D}_e(G)$ es un álgebra de Hopf, que es isomorfa a la envolvente universal del álgebra de Lie $T_e(G)$. Además, las flechas del diagrama son functores de equivalencia entre categorías, ya que el tercer teorema de Lie asegura la integrabilidad del álgebra de Lie para obtener de manera única un grupo de Lie (formal) y cualquier álgebra de Lie se puede recuperar como el conjunto de elementos primitivos de su envolvente universal como consecuencia del teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Ciertas variedades de lazos han sido especialmente estudiadas, por ejemplo los lazos de Moufang, que satisfacen las identidades equivalentes

$$a(b(ac)) = ((ab)a)c, \quad b(a(ca)) = ((ba)c)a, \quad (ab)(ca) = (a(bc))a$$

y los lazos de Bol, que verifican las identidades

$$a(b(ac)) = (a(ba))c, \quad ((ca)b)a = c((ab)a).$$

Las álgebras tangentes a estos lazos (álgebras de Malcev y álgebras de Bol respectivamente) generalizan las álgebras de Lie y tienen asociados diagramas conmutativos análogos al visto para las álgebras y los grupos de Lie [PIS04, PI05].

$$\begin{tikzcd} & \underset{\text{álgebra de Moufang-Hopf}}{\mathcal{D}_e(Q) = U(T_e(Q))} \\ \underset{\text{lazo de Moufang local}}{Q} \arrow[ur] \arrow[r] & \underset{\text{álgebra de Malcev}}{T_e(Q)} \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \underset{H\text{-biálgebra}}{\mathcal{D}_e(Q) = U(T_e(Q))} \\ \underset{\text{lazo de Bol local}}{Q} \arrow[ur] \arrow[r] & \underset{\text{álgebra de Bol}}{T_e(Q)} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Recordar también que un *álgebra de Malcev* es un álgebra antisimétrica $(M, [-,-])$ que verifica la identidad

$$[J(x,y,z),x] \equiv J(x,y,[x,z]),$$

donde $J(x,y,x) = [[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y]$ es el jacobiano de x, y, z.

Definición 3.1.3. Un **álgebra de Bol** $(B, [-,-], [-,-,-])$ es un álgebra antisimétrica

$(B, [-,-])$ con una operación trilineal $[-,-,-]$ tal que

$$[a, b, b] = 0 \tag{B1}$$

$$[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = 0 \tag{B2}$$

$$[[a, b, c], x, y] = [[a, x, y], b, c] + [a, [b, x, y], c] + [a, b, [c, x, y]] \tag{B3}$$

$$[[a, b], c, d] = [[a, c, d], b] + [a, [b, c, d]] + [[c, d], a, b] + [[a, b], [c, d]]. \tag{B4}$$

Definición 3.1.4. Una **H-biálgebra** es una biálgebra $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ con dos operaciones binarias adicionales $\backslash$ y $/$ que verifican

$$x_{(1)}\backslash(x_{(2)}y) \equiv \epsilon(x)y \equiv x_{(1)}(x_{(2)}\backslash y)$$
$$(yx_{(1)})/x_{(2)} \equiv \epsilon(x)y \equiv (y/x_{(1)})x_{(2)}.$$

Estos lazos, junto con los grupos de Lie y los *lazos monoasociativos*, que verifican la identidad $(aa)a = a(aa)$, aparecen en trabajos de geometría diferencial asociados con una cierta clase de estructura conocida como 3-red hexagonal. En [AS92] se define el concepto de "red cerrada" y se prueba que el cierre de las 3-redes hexagonales es equivalente a determinadas identidades en los lazos coordenados asociados, como se muestra en la tabla 3.1.

LAZOS LOCALES	IDENTIDADES (LAZO)	CIERRE DE 3-RED
grupos de Lie abelianos	$u \cdot v = v \cdot u, (u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$	(T) Thomsen
grupos de Lie	$(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$	(R) Reidemeister
lazos de Moufang	$(u \cdot v) \cdot (w \cdot u) = u \cdot ((v \cdot w) \cdot u)$	(M) $=$ (B$_l$) $\bigcap$ (B$_r$)
lazos de Bol a izda.	$(u \cdot (v \cdot u)) \cdot w = u \cdot (v \cdot (u \cdot w))$	(B$_l$) Bol izquierda
lazos de Bol a dcha	$u \cdot (v \cdot (w \cdot v)) = ((u \cdot v) \cdot w) \cdot v$	(B$_r$) Bol derecha
lazos monoasociativos	$u^2 \cdot u = u \cdot u^2$	(H) hexagonal

Tabla 3.1: Variedades de lazos y condiciones de cierre de 3-redes

Las 3-redes han sido ampliamente estudiadas (ver, entre otros, [AS92, Che82, Nag01]). En [Aki76], se definen las álgebras locales de 3-redes multidimensionales. Estas álgebras poseen un producto bilineal antisimétrico $[-,-]$ llamado conmutador y una operación trilineal $(-,-,-)$ llamada asociador que se relacionan mediante la identidad de Jacobi generalizada o *identidad de Akivis*

$$\begin{aligned}&[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b]\\&\quad-(a,b,c)+(a,c,b)-(b,c,a)+(b,a,c)-(c,a,b)+(c,b,a)=0.\end{aligned}$$

Definición 3.1.5. Un **álgebra de Akivis** es un espacio vectorial con una operación bilineal antisimétrica $[-,-]$ y una operación trilineal $(-,-,-)$ que se relacionan mediante la identidad de Akivis.

Estas álgebras son también álgebras locales de los cuasigrupos asociados con las 3-redes: las álgebras tangentes en el elemento identidad $T_e(Q)$ de los lazos coordenados isotópicos.

Como se ha mencionado antes, en la teoría de Lie tiene gran importancia el tercer teorema de Lie, que asegura que un álgebra de Lie determina unívoca un grupo de Lie local. En general, los cuasigrupos diferenciables no están determinados unívocamente por un álgebra de Akivis, aunque la unicidad se da para los lazos de Moufang y Bol (las álgebras de Malcev y Bol son ejemplos de álgebras de Akivis). Sin embargo, en [AG00] se definen las *álgebras de Akivis prolongadas*, definidas en un entorno diferenciable de cuarto orden, y se prueba que determinan unívocamente a los lazos monoasociativos. Estas álgebras tienen dos operaciones cuaternarias adicionales, llamadas *cuaternadores*. Mikeev [Mik96] probó que uno de los dos cuaternadores puede ser expresado en términos del otro y de las operaciones binaria y ternaria, dado que las álgebras locales de los lazos monoasociativos son asociativas en las potencias.

Más en general, Akivis [Aki75] introdujo la noción de G-estructuras cerradas en un cuasigrupo Q, definidas por un número finito de constantes estructurales, y demostró que un álgebra de Akivis (o su álgebra prolongada) definen unívocamente un cuasigrupo diferenciable Q si y solo si la G-estructura asociada a Q es cerrada. Las operaciones d-arias adicionales que aparecen en el álgebra prolongada provienen de los términos de orden d en el desarrollo de Taylor del producto de Q y las posibles operaciones de aridad mayor que d que pudieran aparecer son expresables algebraicamente en términos de las operaciones de menor aridad. Además, estas álgebras prolongadas son álgebras de Sabinin [SM87].

Las operaciones en las álgebras locales (o sus prolongadas) de un cuasigrupo Q verifican identidades que definen variedades de álgebras, como se prueba en [AG06b] y se muestra en la tabla 3.2.

grupos de Lie	conmutador	álgebras de Lie
lazos de Moufang	conmutador	álgebras de Malcev
Lazos de Bol	*conmutador* *asociador*	álgebras de Bol
lazos monoasociativos	*conmutador* *asociador* *cuaternador*	álgebras BTQ

Tabla 3.2: Cuasigrupos, operaciones multilineales y álgebras tangentes

Recordar que un lazo es de Moufang si y solo si todos sus isótopos son alternativos; un lazo es de Bol a izquierda (respectivamente, a derecha) si y solo si todos sus isótopos son alternativos a izquierda (respectivamente, a derecha). Si un lazo y todos sus isótopos son asociativos en la tercera potencia entonces el lazo es asociativo en las potencias, pero el recíproco no es cierto: existen lazos asociativos en las potencias con isótopos que no son asociativos en la tercera potencia (para más detalles, ver [Acz65, teorema 3.7]). Las correspondientes álgebras tangentes pueden ser definidas mediante las identidades polinomiales de grado bajo que son verificadas por ciertos operadores primitivos multilineales en determinadas álgebras no asociativas, ver tabla 3.3.

Definición 3.1.6. Sean X un conjunto (finito o no), (A, Ω) un álgebra perteneciente a la variedad ν, donde A es el espacio vectorial subyacente y Ω es el conjunto de operadores definidos en A, y $\psi : X \to A$ una aplicación inyectiva. Se dice que (A, ψ) es el **álgebra libre en la variedad ν sobre el conjunto de generadores** X si para cada álgebra B en la variedad ν y toda aplicación $\tau : X \to B$, existe un único morfismo de ν-álgebras $\sigma : A \to B$ tal que $\sigma\psi = \tau$.

Definición 3.1.7. Un **álgebra alternativa** es un álgebra binaria que satisface las identidades $(xx)y = x(xy)$ (alternativa a izquierda) y $(yx)x = y(xx)$ (alternativa a derecha).

ÁLGEBRA SUBYACENTE	OPERADORES PRIMITIVOS	ÁLGEBRA TANGENTE
asociativa libre	conmutador	álgebra de Lie
alternativa libre	conmutador, (asociador)	álgebras de Malcev
alternativa a derecha libre	conmutador, asociador	álgebras de Bol
asociativa en las potencias libre	conmutador, asociador, cuaternador	álgebras BTQ

Tabla 3.3: Álgebras libres, operadores multilineales y álgebras tangentes

Definición 3.1.8. Un **álgebra asociativa en las potencias** es un álgebra binaria en la cual todo elemento genera un álgebra asociativa.

Aunque este capítulo está dedicado a estudiar desde un punto de vista algebraico las relaciones que definen la variedad de las álgebras BTQ (investigadas previamente desde un punto de vista geométrico, por Shelekov, Mikheev y Akivis [AG00, AS89, Mik96, She89]), la teoría de Lie no asociativa está mucho más desarrollada. En este contexto de álgebras tangentes, Mikheev y Sabinin [SM87] definieron las estructuras tangentes a lazos locales analíticos arbitrarios: las hiperálgebras o álgebras de Sabinin. Estas estructuras pueden ser integradas bajo ciertas condiciones de convergencia a lazos locales, generalizando así las álgebras de Lie. Shestakov y Umirbaev [SU02] probaron que el conjunto de elementos primitivos de cualquier biálgebra tiene estructura de álgebra de Sabinin y Pérez-Izquierdo [PI07] demostró que toda álgebra de Sabinin puede ser construida de este modo. Por tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \substack{K[F]=U(T_e(F)) \\ \text{biálgebra unitaria irreducible}} \\ \substack{F \\ \text{lazo formal}} \arrow[ur] \arrow[r] & \substack{T_e(F) \\ \text{álgebra de Sabinin}} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

La teoría de representación del grupo simétrico como herramienta para hallar identidades

La teoría de representación del grupo simétrico S_n ha probado ser una herramienta muy útil en el estudio de identidades polinomiales en álgebras. En este capítulo se usa de dos maneras diferentes. La primera de ellas, conceptualmente muy sencilla pero computacionalmente más costosa, consiste en considerar las identidades polinomiales multilineales homogéneas de grado n como un módulo para el grupo simétrico S_n y buscar bases (como subespacios vectoriales) para determinados submódulos.

Definición 3.1.9. Sea $f(x_1,\dots,x_n)$ un polinomio multilineal homogéneo y sea A un álgebra. Decimos que f es una **identidad en** A, y lo denotamos por $f\equiv 0$ si $f(a_1,\dots,a_n)=0$ para cualesquiera $a_1,\dots,a_n\in A$.

Claramente, el grupo simétrico S_n actúa en el conjunto de las identidades de grado n por permutación de variables (cambiando de orden su posición).

Definición 3.1.10. Dadas $f, f_1,\dots,f_n$ identidades de grado d en un álgebra A, decimos f **es consecuencia de** $f_1,\dots,f_n$ si f admite una expresión como combinación lineal de permutaciones de variables de $f_1,\dots,f_n$. En caso contrario, se dice que f **es independiente de** $f_1,\dots,f_n$.

Notar que una identidad es consecuencia de otras dadas si y solo si pertenece al submódulo del grupo simétrico correspondiente generado por ellas. Por ejemplo, si $f_1(x,y,z)=(xy)z$, $f_2(x,y,z)=x(yz)$, entonces cualquier identidad de grado 3 es consecuencia de f_1 y f_2, ya que generan el módulo completo de las identidades multilineales de grado 3.

Definición 3.1.11. Dada una identidad $f(x_1,\dots,x_n)$ de grado n en un álgebra no asociativa con un producto binario, podemos obtener $n+2$ nuevas identidades en grado $n+1$, introduciendo una nueva variable x_{n+1} y realizando n sustituciones y dos productos:

$$f(x_1x_{n+1},\dots,x_n),\quad \dots\quad , f(x_1,\dots,x_nx_{n+1}),$$

$$f(x_1,\ldots,x_n)x_{n+1}, \quad x_{n+1}f(x_1,\ldots,x_n)$$

Estas identidades son conocidas como **extensiones de f a grado** $n+1$ y generan el módulo para el grupo simétrico S_{n+1} formado por todas las identidades que se deducen de f en grado $n+1$.

Nota 3.1.12. Análogamente se puede extender cualquier identidad $f \in F\{\Omega; X\}$ usando cualquiera de los operadores $\omega \in \Omega$. Para extender una identidad f de grado d mediante un operador ω de aridad n son necesarias $n-1$ nuevas variables, por lo que el grado de las extensiones será $d+n-1$, y se obtienen d extensiones realizando sustituciones y n extensiones realizando productos. Por ejemplo, si queremos extender $f(x,y) = x{\cdot}y$ usando un operador trilineal $[-,-,-]$, necesitamos introducir 2 nuevas variables y obtenemos 2 extensiones mediante sustitución y 3 extensiones mediante productos:

$$[x,z,t]\cdot y, \quad x\cdot[y,z,t], \quad [x\cdot y,z,t], \quad [z,x\cdot y,t], \quad [z,t,x\cdot y].$$

Observar que si trabajamos con más de un operador, para generar las extensiones de una identidad a grados más altos debemos considerar todas las posibles combinaciones que pueda haber antre ellos. Por ejemplo, para extender una identidad de grado 2 a grado 4 podemos hacerlo de diversas maneras: usando iteradamente operadores de grado 2 o usando una sola vez operadores de grado 3.

Definición 3.1.13. Dada una operación binaria $(-,-)$ en el álgebra no asociativa libre, definimos los **tipos de asociación en grado d para** $(-,-)$ como el conjunto de todos los posibles monomios no asociativos y no conmutativos de grado d, salvo permutación de variables.

Buscar todos los tipos de asociación en grado d es equivalente a considerar “todas las formas diferentes de colocar paréntesis” para formar productos con d variables. El número de tipos de asociación de grado d viene dado por los números de Catalan $C(d) = \frac{1}{d}\binom{2d-2}{d-1}$. Por ejemplo, en grado 2 solo hay un tipo de asociación: $(-,-)$; en grado 3 hay dos: $((-,-),-)$ y $(-,(-,-))$; en grado 4 hay cinco:

$$(((-,-),-),-), \quad ((-,(-,-)),-), \quad ((-,-),(-,-)),$$
$$(-,((-,-),-)), \quad (-,(-,(-,-))).$$

Definición 3.1.14. Dado un conjunto de operaciones Ω, definimos el conjunto de **tipos de asociación de grado** d **para** Ω al conjunto de todas las posibles combinaciones de operaciones en Ω involucrando d variables, salvo permutaciones.

Por ejemplo, si Ω consta de dos operaciones binarias $(-,-)$ y $[-,-]$, entonces los tipos de asociación en grado 3 para $\Omega = \{(-,-),[-,-]\}$ son ocho:

$$((-,-),-),\quad (-,(-,-)),\quad ([-,-],-),\quad (-,[-,-]),$$
$$[(-,-),-],\quad [-,(-,-)],\quad [[-,-],-],\quad [-,[-,-]].$$

Definición 3.1.15. Dado un conjunto de operaciones Ω, definimos el conjunto de **monomios de grado** d **para** Ω al conjunto resultante de aplicar todas las posibles permutaciones de variables a los tipos de asociación de grado d para Ω.

Definición 3.1.16. Denominamos **monomio básico para un tipo de asociación en grado** d al que contiene las d primeras variables en orden lexicográfico.

En el ejemplo anterior, las dos operaciones binarias generan $8 * 3! = 48$ monomios en grado 3:

$$((a,b),c),(a,(b,c)),([a,b],c),(a,[b,c]),[(a,b),c],[a,(b,c)],[[a,b],c],[a,[b,c]],$$
$$((a,c),b),(a,(c,b)),([a,c],b),(a,[c,b]),[(a,c),b],[a,(c,b)],[[a,c],b],[a,[c,b]],$$
$$((b,a),c),(b,(a,c)),([b,a],c),(b,[a,c]),[(b,a),c],[b,(a,c)],[[b,a],c],[b,[a,c]],$$
$$((b,c),a),(b,(c,a)),([b,c],a),(b,[c,a]),[(b,c),a],[b,(c,a)],[[b,c],a],[b,[c,a]],$$
$$((c,a),b),(c,(a,b)),([c,a],b),(c,[a,b]),[(c,a),b],[c,(a,b)],[[c,a],b],[c,[a,b]],$$
$$((c,b),a),(c,(b,a)),([c,b],a),(c,[b,a]),[(c,b),a],[c,(b,a)],[[c,b],a],[c,[b,a]].$$

Sea $F\{X\}$ el álgebra no asociativa libre en el conjunto de generadores X sobre un cuerpo F y sea B_n el subespacio de $F\{X\}$ formado por todos los polinomios multilineales homogéneos de grado n. Como cada monomio multilineal de grado n está compuesto por una permutación de $\{1,\ldots,n\}$ y un tipo de asociación, se tiene que $dim\ B_n = n!\, C_n$.

Definición 3.1.17. Sean Ω un conjunto finito de operadores multilineales, $F\{\Omega; X\}$ el álgebra libre de los polinomios multilineales homogéneos en los operadores de Ω y A_n el subespacio de $F\{\Omega; X\}$ de los elementos de grado n. Cada operación d-aria $\omega \in \Omega$ se puede identificar con un elemento $p_\omega \in B_d$, de manera que para cada n se define una aplicación lineal $E_n : A_n \to B_n$, la **aplicación expansión**, que dado un polinomio en los operadores de Ω, reemplaza cada aparición de ω por p_ω.

A lo largo de este capítulo, se identifican "operación binaria anticonmutativa" y "operación ternaria" con conmutador $[a,b] = ab - ba$ y asociador $(a,b,c) = (ab)c - a(bc)$ respectivamente. Así, por ejemplo,

$$E_4([(a,b,c),d]) = ((ab)c)d - (a(bc))d - d((ab)c) + d(a(bc)).$$

El principio computacional básico en este capítulo es el hecho de que el kernel de la aplicación expansión es el conjunto de identidades de grado n que verifican los elementos $\{p_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ en $F\{X\}$. Para cada grado, distinguiremos las identidades que son extensiones de identidades de grado menor (que forman un submódulo respecto de la acción del grupo S_n) y las que no lo son (que forman el módulo cociente).

A continuación se presenta un ejemplo sencillo y representativo de las técnicas utilizadas en este capítulo.

Ejemplo 3.1.18 (Identidades de grado 3 que satisfacen el conmutador y el asociador en el álgebra no asociativa libre)**.** *Las identidades de grado 3 que verifican el conmutador y el asociador en el álgebra no asociativa libre pueden dividirse en dos tipos: las son consecuencias de las extensiones de identidades de grado 2 y las que no lo son. En grado 2 solo hay una identidad:* $[x,y]+[y,x] \equiv 0$*, la antisimetría del conmutador. Si extendemos esta identidad a grado 3 obtenemos 4 identidades:*

$$[[a,c],b] + [b,[a,c]] \equiv 0 \quad [a,[b,c]] + [[b,c],a] \equiv 0$$
$$[c,[a,b]] + [c,[b,a]] \equiv 0 \quad [[a,b],c] + [[b,a],c] \equiv 0$$

Salvo permutación de variables, debido a la antisimetría del conmutador, las cuatro identidades son equivalentes, luego en grado 3 tenemos una extensión de la antisimetría del conmutador. Esta identidad genera un submódulo de A_3 *para la acción del grupo* S_3*. El resto de identidades que buscamos son los generadores del módulo cociente. Para encontrarlas utilizamos técnicas de álgebra lineal. La idea fundamental es aplicar reducción gausiana a la matriz cuyas filas resultan de la expansión en el álgebra libre de los monomios de grado 3 en el conmutador y el asociador para obtener las relaciones de dependencia lineales que existen entre ellos. Consideramos bases ordenadas para los tipos* *de asociación de grado 3:* $\mathcal{B} = \{((-,-),-),(-,(-,-))\}$ *y para los monomios grado 3 respecto del conmutador y el asociador:*

$$\mathcal{B}' = \{[a,[b,c]],\ [b,[a,c]],\ [c,[a,b]],(a,b,c),\ (a,c,b),\\ (b,a,c),(b,c,a),\ (c,a,b),\ (c,b,a)\}.$$

Notar que, en este caso, como el conmutador es antisimétrico, para construir una base solo necesitamos monomios con un tipo de asociación, ya que $[[a,b],c] = -[c,[a,b]]$. *Construimos una matriz compuesta por dos bloques:* $[X \mid I]$. *El bloque de la derecha es la matriz identidad de orden 9, el número de elementos de* $\mathcal{B}'$. *El número de columnas de* X *es 12, tantas como monomios no asociativos de grado 3. Cada fila de* X *corresponde con la ecuación que resulta al igualar un elemento de* $\mathcal{B}'$ *con su expansión en el álgebra libre. Por ejemplo:* $(a,(b,c)) - (a,(c,b)) - ((b,c),a) + (a,(b,c)) = [a,[b,c]]$. *La matriz resultante es:*

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|ccccccccc}
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

Aplicamos reducción gausiana a la matriz y obtenemos

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1
\end{array}\right]$$

Las filas de esta matriz que tengan el primer elemento no nulo en el bloque de la derecha forman una base del submódulo que buscábamos. En este caso, este submódulo tiene un solo generador, correspondiente a la última fila de la matriz, que representa la identidad de Akivis

$$0 \equiv [a,[b,c]] - [b,[a,c]] + [c,[a,b]]$$

$$+ (a, b, c) - (a, c, b) - (b, a, c) + (b, c, a) + (c, a, b) - (c, b, a).$$

Por tanto, las identidades de grado 3 que verifican el conmutador y el asociador en el álgebra no asociativa libre son consecuencias de $[[a, c], b] + [b, [a, c]] \equiv 0$ *y la identidad de Akivis.*

La segunda forma de usar la teoría de representación del grupo simétrico se basa en la descomposición de Wedderburn del álgebra grupo $\mathbb{Q}S_n$ como suma de ideales simples isomorfos a álgebras de matrices. Esta técnica es indirecta y más complicada conceptualmente, pero presenta dos ventajas importantes. La primera de ellas es que los cálculos se pueden dividirse en bloques independientes más pequeños (correspondientes a cada representación irreducible del grupo simétrico) que pueden ser ejecutados simultáneamente; por tanto, son menos costosos y se puede utilizar computación paralela. La segunda es que la unidad básica en esta aproximación es la identidad en lugar de todas sus permutaciones de variables, luego trabajamos con un solo elemento en lugar de con $n!$, lo que reduce también el tiempo y los recursos necesarios.

Sea $f(x_1, \ldots, x_n)$ una identidad polinomial multilineal de grado n con coeficientes en un cuerpo F. Ordenamos sus términos por tipo de asociación y escribimos $f = f_1 + \cdots + f_t$, donde t es el número de tipos de asociación. En cada tipo de asociación, los términos pueden ser identificados mediante su coeficiente $c \in F$ y la permutación π de las variables en el monomio. Por tanto, cada f_i puede expresarse como un elemento $g_i = \sum_{\pi} c_{i\pi}\pi$ del álgebra grupo FS_n. Por tanto, f puede ser identificada con el elemento $(g_1, \ldots, g_t)$ de $M = FS_n \oplus \cdots \oplus FS_n$ (t sumandos). Si $\pi \in S_n$, entonces $(\pi g_1, \ldots, \pi g_t)$ es también una identidad, que representa la identidad f aplicada a una permutación de sus argumentos. Como combinaciones lineales de identidades son también identidades, se tiene que $(gg_1, \ldots, gg_t)$ es una identidad para cualquier elemento $g \in FS_n$. Por tanto, M es un módulo para el álgebra grupo FS_n y el conjunto de todas las identidades que buscamos es un submódulo de M.

Cada partición λ de n determina una representación irreducible de S_n de dimensión d_λ. El álgebra grupo FS_n es isomorfa a la suma directa de álgebras de matrices de tamaño $d_\lambda \times d_\lambda$. Si ρ_λ es la proyección del álgebra grupo en la subálgebra de matrices correspondiente a la partición λ, entonces a cada elemento del álgebra grupo le corresponde una matriz de tamaño $d_\lambda \times d_\lambda$. Por tanto, $(\rho_\lambda(g_1), \ldots, \rho_\lambda(g_t))$ es una matriz de tamaño

$d_\lambda \times td_\lambda$ que se corresponde con la identidad f en la representación asociada a λ. De la misma manera, $(\rho_\lambda(gg_1), \ldots, \rho_\lambda(gg_t)) = \rho_\lambda(g)(\rho_\lambda(g_1), \ldots, \rho_\lambda(g_t))$ se corresponde con una secuencia de operaciones por filas aplicada a la matriz que representa a f (incluyendo la posiblidad de reducir a cero una fila). Estas matrices $\rho_\lambda(g)$ son calculadas mediante un algoritmo descrito por Clifton [Cli81].

Definición 3.1.19. Decimos que dos identidades de grado n f y f' son **identidades equivalentes** si generan el mismo FS_n-módulo de M.

De la misma manera se definen conjuntos equivalentes de identidades. Notar que dos identidades son equivalentes si y solo si para cada patición λ las matrices que representan a ambas identidades generan el mismo espacio de filas.

Definición 3.1.20. Una **identidad minimal** es una identidad para la cual las matrices que la representan tienen rango cero para todas las particiones λ salvo una, para la que tiene rango uno.

Toda identidad es equivalente a un conjunto de identidades minimales. Por tanto, para encontrar identidades, basta con buscar todas las minimales.
Si apilamos verticalmente las matrices que representan a las identidades $f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}$ obtendremos una matriz de tamaño $kd_\lambda \times td_\lambda$. Al hacer operaciones de filas en esta matriz sustituimos una fila por una combinación lineal de filas, luego las filas de la matriz resultante representan identidades que son consecuencia de $f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}$. Las filas no nulas de la forma canónica de esta matriz son un conjunto independiente de generadores para el submódulo de M generado por $f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}$ correspondiente a la partición λ. Como el rango de esta matriz no puede ser mayor que td_λ, se tiene que el número de generadores independientes es a lo sumo td_λ.
Para más detalles y aplicaciones de este método a diferentes problemas, ver [BH04, BP07, BP09b, BP11].

Nota 3.1.21. En la medida de lo posible los cálculos se hacen usando aritmética racional, pero esto no es eficiente cuando las matrices son muy grandes: al calcular la forma canónica los numeradores y denominadores de las entradas pueden resultar extremadamente altos, incluso aunque la matriz original tuviera entradas enteras bajas. Para controlar la cantidad de memoria requerida para realizar los cálculos en algunos casos hemos utilizado aritmética modular con un primo p mayor que el grado n de las identidades, lo

que garantiza que F_pS_n es semisimple. La teoría de estructura de $\mathbb{Q}S_n$, en particular la descomposición de Wedderburn, prueba que los elementos de $\mathbb{Q}S_n$ que representan las matrices E_{ij} en los ideales simples tienen coeficientes cuyos denominadores son divisores de $n!$. Por tanto, el S_n-módulo FS_n tiene la "misma" estructura sobre $\mathbb{Q}$ que sobre F_p cuando $p > n$. Por tanto, los rangos que se obtienen usando aritmética modular son los mismos que los que se obtendrían usando aritmética racional. Sin embargo, hay que tener cuidado al recuperar resultados racionales a partir de resultados modulares.
Debido a las dimensiones de los problemas que aparecen en este capítulo no ha sido necesario utilizar aritmética modular.

El algoritmo LLL para la reducción de bases de retículos

El estudio computacional de las identidades polinomiales en álgebras no asociativas involucra en algunos casos identidades con un gran número de términos y coeficientes aparentemente aleatorios que no aportan información relevante al problema que se está considerando. En [BP09a], los autores ponen de manifiesto cómo las técnicas de reducción de bases de retículos pueden ser aplicadas para encontrar conjuntos de identidades más simples equivalentes a las originales.
Las identidades se representan como el espacio nulo de una matriz E con entradas en $\mathbb{Z}$ (la matriz de expansión, proveniente de la aplicación expansión previamente definida en 3.1.17). De la forma canónica de E sobre $\mathbb{Q}$ podemos extraer una base para el espacio nulo cuyos elementos tengan todas sus componentes en $\mathbb{Z}$, pero en general estos vectores no forman una base del retículo del espacio nulo (el conjunto de vectores con todas sus componentes en $\mathbb{Z}$), ver [BP09a, ejemplo 17]. Sin embargo, podemos encontrar una base del retículo del subespacio nulo calculando la forma normal de Hermite H de la matriz traspuesta E^t y la matriz U para la que $UE^t = H$: si el espacio nulo de E tiene dimensión d sobre $\mathbb{Q}$, entonces las d últimas filas de U son una base del retículo del espacio nulo cuyos elementos tienen todas sus componentes en $\mathbb{Z}$, ver [BP09a, lema 20]. Con frecuencia, estos vectores básicos son muy complicados; para simplificarlos usamos el algoritmo LLL (Lenstra-Lenstra-Lovász) de reducción de bases de retículos. Esta reducción produce identidades cuyos coeficientes tienen valores absolutos más pequeños, lo que significa también menor número de términos.

En este capítulo, el espacio nulo de la matriz E tiene estructura de módulo sobre el grupo simétrico S_n, ya que los vectores que lo forman representan identidades polinomiales multilineales homogéneas de grado n. Por tanto, reduciremos el número de identidades necesarias considerando únicamente el conjunto de generadores para el módulo en lugar de una base lineal completa.
Los algoritmos que implementan este método están descritos en [BP09a, sección 3].

3.1.2. Introduction

Monoassociative loops in differential geometry and Sabinin algebras

Definition 3.1.22. A **quasigroup** $(Q, \cdot, \backslash, /)$ is a nonempty set Q endowed with three binary operations $\cdot$ (*product or multiplication*), $\backslash$ (*left division*) and $/$ (*right division*) which verify

$$a\backslash(a \cdot b) \equiv b,\ a \cdot (a\backslash b) \equiv b,\ (a \cdot b)/b \equiv a,\ (a/b) \cdot b \equiv a.$$

Remark 3.1.23. A *loop* is a quasigroup $(Q, \cdot, \backslash, /)$ which verifies

$$a\backslash a = b/b \quad \forall a, b \in Q.$$

This condition implies the existence of an identity element in Q: $e = a/a = a\backslash a$ for any $a \in Q$.

Differentiable quasigroups (and, in particular, analytic loops) are a nonassociative generalization of Lie groups and have been widely studied in algebra and differential geometry. Their algebraic study led to the development of what is known as "nonassociative Lie theory" which extends the most relevant results on Lie groups and Lie algebras to nonassociative structures. The following commutative diagram illustrates the existing relations between the different structures involved.

$$\begin{tikzcd}
& \underset{\text{Hopf algebra}}{\mathcal{D}_e(G) = U(T_e(G))} \\
\underset{\text{local Lie group}}{G} \arrow[ur] \arrow[r] & \underset{\text{Lie algebra}}{T_e(G)} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

We recall the definitions of Lie algebras and Hopf algebras. A *Lie algebra* is a vector space L endowed with an antisymmetric bilinear operation $[-,-] : L \times L \to L$ which verifies the so-called Jacobi identity

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] \equiv 0.$$

A *Hopf algebra* $(H,\mu,\eta,\Delta,\epsilon,S)$ is a vector space H where (H,μ,η) is a unital associative algebra, (H,Δ,ϵ) is a coassociative coalgebra, Δ and ϵ are algebra homomorphisms, μ and η are coalgebra homomorphisms and $S : H \to H$ is both an algebra and coalgebra antihomomorphism and verifies $S(x_{(1)})x_{(2)} \equiv \epsilon(x) \cdot 1 \equiv x_{(1)}S(x_{(2)})$.

Given a local Lie group G, its tangent space in the identity element $T_e(G)$ is a Lie algebra and the bialgebra of distributions with support in y¡the identity element $\mathcal{D}_e(G)$ is a Hopf algebra which is isomorphic to the universal enveloping algebra of the Lie algebra $T_e(G)$. Moreover, the arrows in the diagram are equivalence functors between categories because the third Lie's theorem ensures the integrability of the Lie algebra to get uniquely a (formal) Lie group and any Lie algebra can be recovered as the set of primitive elements of it universal enveloping algebra as a consequence of the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem.

Certain varieties of loops have been specially studied. For example, Moufang loops which satisfy the equivalent identities

$$a(b(ac)) = ((ab)a)c, \quad b(a(ca)) = ((ba)c)a, \quad (ab)(ca) = (a(bc))a$$

and Bol loops which verify the identities

$$a(b(ac)) = (a(ba))c, \quad ((ca)b)a = c((ab)a).$$

Tangent algebras to these loops (Malcev algebras and Bol algebras respectively) generalize Lie algebras. They have associated commutative diagrams, analogous to that seen for Lie algebras and Lie groups [PIS04, PI05].

$$\begin{tikzcd} & \underset{\text{Moufang-Hopf algebra}}{\mathcal{D}_e(Q) = U(T_e(Q))} \\ \underset{\text{local Moufang loop}}{Q} \arrow[ur] \arrow[r] & \underset{\text{Malcev algebra}}{T_e(Q)} \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \underset{H\text{-bialgebra}}{\mathcal{D}_e(Q) = U(T_e(Q))} \\ \underset{\text{local Bol loop}}{Q} \arrow[ur] \arrow[r] & \underset{\text{Bol algebra}}{T_e(Q)} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Recall that a *Malcev algebra* is an antisymmetric algebra $(M, [-,-])$ which verifies the identity

$$[J(x,y,z),x] \equiv J(x,y,[x,z]),$$

where $J(x,y,x) = [[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y]$ is the jacobian of x,y,z.

Definition 3.1.24. A **Bol algebra** $(B, [-,-], [-,-,-])$ is an antisymmetric algebra $(B, [-,-])$ endowed with a trilinear operation $[-,-,-]$ such that

$$[a,b,b] = 0$$

$$[a,b,c] + [b,c,a] + [c,a,b] = 0$$

$$[[a,b,c],x,y] = [[a,x,y],b,c] + [a,[b,x,y],c] + [a,b,[c,x,y]]$$

$$[[a,b],c,d] = [[a,c,d],b] + [a,[b,c,d]] + [[c,d],a,b] + [[a,b],[c,d]].$$

Definition 3.1.25. An H**-bialgebra** is a bialgebra $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ endowed with two extra binary operations $\backslash$ and $/$ which verify

$$x_{(1)}\backslash(x_{(2)}y) \equiv \epsilon(x)y \equiv x_{(1)}(x_{(2)}\backslash y)$$

$$(yx_{(1)})/x_{(2)} \equiv \epsilon(x)y \equiv (y/x_{(1)})x_{(2)}.$$

These loops, along with Lie groups and *monoassociative loops*, which verify the identity $(aa)a = a(aa)$, appear in differential geometry associated to a certain structure konwn as hexagonal 3-web. In [AS92] they define the notion of "closed web" and it is shown that the closeness for hexagonal 3-webs is equivalent to certain identities satisfied by the associated coordinated loops, as displayed in the the table 3.4.

3-webs have been widely studied (see [AS92, Che82, Nag01] among others). In [Aki76], they define local algebras to multidimesional 3-webs. These algebras have an antisymmetric bilinear product $[-,-]$ called commutator and a trilinear operation $(-,-,-)$ called associator which are related by the so-called generalized Jacobi identity or *Akivis identity*

$$\begin{aligned}&[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b]\\ &\quad - (a,b,c) + (a,c,b) - (b,c,a) + (b,a,c) - (c,a,b) + (c,b,a) = 0.\end{aligned}$$

Definition 3.1.26. An **Akivis algebra** is a vector space endowed with an antisymmetric bilinear operation $[-,-]$ and a trilinear operation $(-,-,-)$ which are related by the Akivis identity.

LOCAL LOOPS	LOOP IDENTITIES	3-WEB CONDITION
abelian Lie groups	$u \cdot v = v \cdot u, (u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$	(T) Thomsen
Lie groups	$(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$	(R) Reidemeister
Moufang loops	$(u \cdot v) \cdot (w \cdot u) = u \cdot ((v \cdot w) \cdot u)$	(M) = (B_l) $\bigcap$ (B_r)
left Bol loops	$(u \cdot (v \cdot u)) \cdot w = u \cdot (v \cdot (u \cdot w))$	(B_l) left Bol
right Bol loops	$u \cdot (v \cdot (w \cdot v)) = ((u \cdot v) \cdot w) \cdot v$	(B_r) right Bol
monoassociative loops	$u^2 \cdot u = u \cdot u^2$	(H) hexagonal

Tabla 3.4: Varieties of loops and 3-webs closeness conditions

These algebras are also local algebras of the quasigroups associated to the 3-webs: tangent algebras $T_e(Q)$ in the identity element of isotopic coordinated loops. As mentioned before, the third Lie's theorem is of great importance in Lie theory. It asserts that a Lie algebra uniquely defines a local Lie group. In general, differential quasigroups are not uniquely defined by an Akivis algebra, although this uniqueness occurs for Moufang and Bol loops (Malcev algebras and Bol algebras are examples of Akivis algebras). However, in [AG00] they introduced the *prolonged Akivis algebras*, defined in a fouth-order differential neighbourhood and it is proved that they uniquely define monoassociative loops. These algebras have also two additional quaternary operations called *quaternators*. Mikeev [Mik96] showed that one of the quaternators can be expressed in terms of the other quaternator and the binary and ternary operations because local algebras of monoassociative loops are power-associative.

More in general, Akivis [Aki75] introduced the notion of closed G-structures in a quasigroup Q, defined by a finite number of structural constants and proved that an Akivis algebra (or its prolonged algebra) uniquely define a differential quasigroup Q if and only of the G-structure associated to Q is closed. The additional d-ary operations that appear in the prolonged algebra come from the terms of order d in the Taylor series for the product on Q. The possible operations of arity greater then d can be algebraically expressed in terms of the operations of smaller arity. Moreover, prolonged algebras are

Sabinin algebras [SM87].

The operations in local algebras (or their prolonged algebras) of a quasigroup Q satisfy set of identities that define varieties of algebras, as shown in [AG06b]. we diplay them in the table 3.5.

Lie groups	commutator	Lie algebras
Moufang loops	commutator	Malcev algebras
Bol loops	*commutator* *associator*	Bol algebras
monoassociative loops	*commutator* *associator* *cuaternator*	BTQ algebras

Tabla 3.5: Quasigroups, multilinear operations and tangent algebras

Recall that a loop is a Moufang loop if and only if all its osotopes are alternative. A loop is a left (resp. right) Bol loop if and only of all its isotopes are left (resp. right) alternative. If a loop and all its osotopes are third-power associative then the loop is power-associative but the converse is not true: there exists power-associative loops with isotopes that are not third-power associative (see [Acz65, teorema 3.7] for details). The corresponding tangent algebras can be defined by low degree polynomial identities verified by certain multilnear primitive operators in certain varieties of nonassociative algebras, see table 3.6.

Definition 3.1.27. Let X be a (finite or infinite) set, (A, Ω) an algebra belonging to the variety ν, where A is the underlying vector space and Ω is the set of operators defined in A, and $\psi : X \to A$ be an injective map. We say that (A, ψ) is the **free algebra in the variety ν over the set of generators** X if for each algebra B in the variety ν and each map $\tau : X \to B$, there existe a unique morphism of ν-algebras $\sigma : A \to B$ such that $\sigma\psi = \tau$.

Definition 3.1.28. An **alternative algebra** is a binary algebra which verifies the identities $(xx)y = x(xy)$ (left alternative) and $(yx)x = y(xx)$ (right alternative).

UNDERLYING ALGEBRA	PRIMITIVE OPERATORS	TANGENT ALGEBRA
free associative	commutator	Lie algebra
free alternative	commutator, (associator)	Malcev algebras
free right alternative	commutator, associator	Bol algebras
free power-associative	commutator, associator, quaternator	BTQ algebras

Tabla 3.6: Free algebras, multilinear operators and tangent algebras

Definition 3.1.29. A **power-associative algebra** is a binary algebra in which any element generated an associative algebra.

Por tanto, los rangos que se obtienen usando aritmética modular son los mismos que los que se obtendrían usando aritmética racional. Sin embargo, hay que tener cuidado al recuperar resultados racionales a partir de resultados modulares.
Debido a las dimensiones de los problemas que aparecen en este trabajo no ha sido necesario utilizar aritmética modular. Although this chapter is devoted to study the defining relations for the variety of BTQ algebras from an algebraic point of view (previously investigated from a geometrical point of view by Shelekov, Mikheev and Akivis [AG00, AS89, Mik96, She89]), nonassociative Lie theory is much more developed. In this context of tangent algebras, Mikheev and Sabinin [SM87] defined the tangent structures of arbitrary local analytic loops: the hyperalgebras or Sabinin algebras. These structures can be integrated under certain convergence conditions to local loops, generalizing Lie algebras. Shestakov and Umirbaev [SU02] proved that the set of primitive elements of any bialgebra is a Sabinin algebra and Pérez-Izquierdo [PI07] demonstrated that any Sabinin algebra arises this way. Thus we have the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
 & \underset{\text{irreducible unital bialgebra}}{K[F] = U(T_e(F))} \\
\underset{\text{formal loop}}{F} \arrow[ur] \arrow[r] & \underset{\text{Sabinin algebra}}{T_e(F)} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Representation theory of the symmetric group as a tool to find identities

Representation theory of the symmetric group S_n has proved to be very useful in the study of polynomial identities in algebras. In this chapter we use it in two different manners. The one which is conceptually easy to understand but computationally more expensive consists of considering the homogeneous multilinear polynomial identities of degree n as a module for the symmetric group S_n and finding bases (as vector spaces) for certain submodules.

Definition 3.1.30. Let $f(x_1, \ldots, x_n)$ be a homogeneous multilinear polynomial and A an algebra. We say that f is an **identity in** A, and we denote it by $f \equiv 0$ if $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ for any $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Claerly, the symmetric group S_n acts in the set of identities of degree n by permuting the variables (changing their positions).

Definition 3.1.31. Given $f, f_1, \ldots, f_n$ identities of degree d in an algebra A, we say that f **is a consequence of** $f_1, \ldots, f_n$ if f admits an expression as linear combination of permutations of variables of $f_1, \ldots, f_n$. Otherwise we say that f **is independent of** $f_1, \ldots, f_n$.

Note that an identity is a consequence of others if and only of it belongs to the submodule of the symmetric group generated by them. For example, if $f_1(x, y, z) = (xy)z$, $f_2(x, y, z) = x(yz)$, then any identity os degree 3 is a consequence of f_1 and f_2, because they generate the full module of multilinear identities of degrees 3.

Definition 3.1.32. If $f(x_1, \ldots, x_n)$ is an identity of degree n in a nonassociative algebra with binary product, then we can obtain $n+2$ new identities of degree $n+1$, by introducting a new variable x_{n+1} and performing n susbtitutions and two products:

$$f(x_1 x_{n+1}, \ldots, x_n), \quad \ldots \quad , f(x_1, \ldots, x_n x_{n+1}),$$

$$f(x_1, \ldots, x_n)x_{n+1}, \quad x_{n+1}f(x_1, \ldots, x_n)$$

These identities are known as the **extensions of f to degree $n+1$** and generate the submodule for the symmetric group S_{n+1} consisting of all the identities of degree $n+1$ which can be deduced from f.

Remark 3.1.33. Analogously we can extend any identity $f \in F\{\Omega; X\}$ using any of the operators $\omega \in \Omega$. To extend an identity f of degree d by an operator ω of arity n we need $n-1$ new variables, thus the degree of the extensions will be $d+n-1$. We obtain d extensions by performing substitutions and n extensions by making products. For example, if e want to extend $f(x,y) = x \cdot y$ using a trilineal operator $[-,-,-]$, we need to introduce 2 new variables and we obtain 2 extensions by substitution and 3 extensiones by products:

$$[x,z,t] \cdot y, \quad x \cdot [y,z,t], \quad [x \cdot y, z, t], \quad [z, x \cdot y, t], \quad [z,t,x \cdot y].$$

Note that if we consider more than one operator to generate extensions of an identity to higher degrees we must consider all the possible combinations of them. For example, to extend an identity of degree 2 to degree 4 we can use two operators of degree 2 or only one operator of degree 3.

Definition 3.1.34. Given a binary operation $(-,-)$ in the free nonassociative algebra, we define the **types of association in degree d for** $(-,-)$ as the set of all the possible noncommutative and nonassociative monomials of degree d, up to permutations of variables.

The problem of finding all the association types in degree d is equivalent to consider "all possible ways to put parenthesis" to make products with d variables. The number of association types in degree d is given by the Catalan numbers $C(d) = \frac{1}{d}\binom{2d-2}{d-1}$. For example, in degree 2 there is only one association type: $(-,-)$; in degree 3 there are two of them: $((-,-),-)$ and $(-,(-,-))$; in degree 4 we have the following five:

$$(((-,-),-),-), \quad ((-,(-,-)),-), \quad ((-,-),(-,-)),$$
$$(-,((-,-),-)), \quad (-,(-,(-,-))).$$

Definition 3.1.35. Given a set of operations Ω, we define the set of **association types of degree d for Ω** as the set of all possible combinations of operations in Ω involving d variables, up to permutatios.

For example, if Ω consists of two binary operations $(-,-)$ and $[-,-]$, then the association types of degree 3 for $\Omega = \{(-,-),[-,-]\}$ are eight:

$$((-,-),-),\quad (-,(-,-)),\quad ([-,-],-),\quad (-,[-,-]),$$
$$[(-,-),-],\quad [-,(-,-)],\quad [[-,-],-],\quad [-,[-,-]].$$

Definition 3.1.36. Given a set of operations Ω, we define the set of **monomials of degree d for Ω** as the set obtained by applying all possible permutations of variables to the association types of degree d for Ω.

Definition 3.1.37. We call **basic monomial of an association type of degree d** to the monomial containing the first d variables in lexicographical order.

In the previous example, the two binary operations generate $8 * 3! = 48$ monomials in degree 3:

$$((a,b),c),(a,(b,c)),([a,b],c),(a,[b,c]),[(a,b),c],[a,(b,c)],[[a,b],c],[a,[b,c]],$$
$$((a,c),b),(a,(c,b)),([a,c],b),(a,[c,b]),[(a,c),b],[a,(c,b)],[[a,c],b],[a,[c,b]],$$
$$((b,a),c),(b,(a,c)),([b,a],c),(b,[a,c]),[(b,a),c],[b,(a,c)],[[b,a],c],[b,[a,c]],$$
$$((b,c),a),(b,(c,a)),([b,c],a),(b,[c,a]),[(b,c),a],[b,(c,a)],[[b,c],a],[b,[c,a]],$$
$$((c,a),b),(c,(a,b)),([c,a],b),(c,[a,b]),[(c,a),b],[c,(a,b)],[[c,a],b],[c,[a,b]],$$
$$((c,b),a),(c,(b,a)),([c,b],a),(c,[b,a]),[(c,b),a],[c,(b,a)],[[c,b],a],[c,[b,a]].$$

Let $F\{X\}$ be the free nonassociative algebra in the set of generators X over a field F and B_n be the subspace of $F\{X\}$ consisting of all the homogeneous multilinear polynomials of degree n. Since each multilinear monomial of degree n is defined by a permutation of $\{1,\ldots,n\}$ and an association type, we have that $\dim B_n = n!\, C_n$.

Definition 3.1.38. Let Ω be a finite set of multilinear operators, $F\{\Omega; X\}$ be the free algebra of homogeneous multilinear polynomials in the operators of Ω and A_n be the subspace of $F\{\Omega; X\}$ consisting of the elements of degree n. Each d-ary operator $\omega \in \Omega$ can be identified with an element $p_\omega \in B_d$, in such a way that for each n we define a linear map $E_n : A_n \to B_n$, the **expansion map**, which given a polynomial in the operators of Ω, replaces each instance of ω by p_ω.

All along this chapter we identify "an anticommutative binary operation" and "a ternary operation" with the commutator $[a, b] = ab - ba$ and the associator $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ respectively. Thus

$$E_4([(a, b, c), d]) = ((ab)c)d - (a(bc))d - d((ab)c) + d(a(bc)).$$

The basic computational principle in this chapter is that the kernel of the expansion map is the set of identities of degree n verified by the elements $\{p_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ in $F\{X\}$. For each degree we will distinguish the identities which are extensions of identities of lower degree (which define a submodule for the action of the symmetric group S_n) from which are not (they define the quotient module).

Now we present a simple example of the techniques that we are using along this chapter.

Example 3.1.39 (Degree-3 identities satisfied by the commutator and the associator in the free nonassociative algebra)**.** *Identities of degree 3 verified by the commutator and the associator in the free nonassociative algebra can be divided into two grups: those which are consequences of the identities of degree 2 and those wich are not. There is only one identity in degree 2:* $[x, y] + [y, x] \equiv 0$*, the antisymmetry of the commutator. If we extend this identity to degree 3 we get four identities:*

$$[[a, c], b] + [b, [a, c]] \equiv 0 \quad [a, [b, c]] + [[b, c], a] \equiv 0$$
$$[c, [a, b]] + [c, [b, a]] \equiv 0 \quad [[a, b], c] + [[b, a], c] \equiv 0$$

Due to the antisymmetry of the commutator, these identities are equivalent up to permutation of variables. Thus in degree 3 we only have one extension of the antisymmetry of the commutator. This identity generates a submodule of A_3 *with respect to the action of the group* S_3*. The rest of the identities we are looking for are the generators of the quotient module. We use linear algebra techiques to find them. The fundamental idea is to apply gaussian reduction to the matrix whose rows are the expansions of the monomials of degree 3 in the free nonassociative algebra to find the linear dependences between them. We consider ordered basis for the association types in degree 3* $\mathcal{B} = \{((-, -), -), (-, (-, -))\}$ *and for the monomials of degree 3 with respect to teh commutator and the associator*

$$\mathcal{B}' = \{[a, [b, c]],\ [b, [a, c]],\ [c, [a, b]], (a, b, c),\ (a, c, b),$$

$$(b,a,c),(b,c,a),\ (c,a,b),\ (c,b,a)\}.$$

Since the commutator is antisymmetric, we only need monomials of one association type to construct a basis because $[[a,b],c] = -[c,[a,b]]$. *We construct a block matrix* $[X \mid I]$. *The right block is the identity matrix of order 9, the number of elements of* $\mathcal{B}'$. X *has 12 columns, as many as nonassociative monomials of degree 3. Each row of* X *represents the identification of an element in* $\mathcal{B}'$ *with its expansion in the free nonassociative algebra. For example,*

$$(a,(b,c)) - (a,(c,b)) - ((b,c),a) + (a,(b,c)) = [a,[b,c]].$$

The resulting matrix is

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|ccccccccc}
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

By applying gaussian reduction to the matrix we obtain

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1
\end{array}\right]$$

The rows whose first nonzero element lies in the right block form a basis of the desired submodule. In this case it only has one element, corresponding to the last row, which represents the Akivis identity

$$\begin{aligned}
0 \equiv\ & [a,[b,c]] - [b,[a,c]] + [c,[a,b]] \\
& + (a,b,c) - (a,c,b) - (b,a,c) + (b,c,a) + (c,a,b) - (c,b,a).
\end{aligned}$$

Thus, all identities of degree 3 verified by the commutator and the associator in the free nonassociative algebra are consequences of the antisymmetry of $[[a,c],b] + [b,[a,c]] \equiv 0$ *and the Akivis identity.*

The other way of using representation theory of the symmetric group is based on the Wedderburn decomposition of the group algebra $\mathbb{Q}S_n$ as sum of simple ideals isomorphic to matrix algebras. This is an indirect technique, conceptually more complicated, but it has two important benefits. The first advantage is that computations can be splitted into smaller independent pieces (each one corresponding to an irreducible representation of the symmetric group) which can be independently executed: they are computationally less costing and we can use parallel computation. The second advantange is that the basic unit of this approach is the identity instead of all its permutations of variables, so we deal with one element at a time instead of $n!$. It also reduces costs and machine resources.

We now explain th second method. Let $f(x_1, \dots, x_n)$ be a multilineal polynomial identity of degree n with coefficients in a field F. We order its terms by association type and we write $f = f_1 + \cdots + f_t$, where t is the number of association types. In each association type a term can be identified by its coefficient $c \in F$ and the permutation π of the variables in the monomial. Thus each f_i can be expressed as an element $g_i = \sum\limits_{\pi} c_{i\pi}\pi$ of the group algebra FS_n. Thus f can be identified with the element $(g_1, \dots, g_t)$ of $M = FS_n \oplus \cdots \oplus FS_n$ (t summands). If $\pi \in S_n$ then $(\pi g_1, \dots, \pi g_t)$ is also an identity, which represents the identity f aplied to a permutation of its arguments. Since linear combinations of identities are also identities, we have that $(gg_1, \dots, gg_t)$ is an identity for any element $g \in FS_n$. Thus M is a module for the group algebra FS_n and the set of the desired identities is a submodule of M.

Each partition λ of n determines an irreducible representation of S_n of dimension d_λ. The group algebra FS_n is isomorphic to the direct sum of matrix algebras of size $d_\lambda \times d_\lambda$. If ρ_λ is the projection of the group algebra onto the matrix subalgebra corresponding to the partition λ, then we associate to each element of the group algebra a matrix of size $d_\lambda \times d_\lambda$. Thus $(\rho_\lambda(g_1), \dots, \rho_\lambda(g_t))$ is a matrix of size $d_\lambda \times td_\lambda$ which corresponds to the identity f in the representation associated to λ. In the same way $(\rho_\lambda(gg_1), \dots, \rho_\lambda(gg_t)) = \rho_\lambda(g)(\rho_\lambda(g_1), \dots, \rho_\lambda(g_t))$ corresponds to a sequence of row operations applied to the matrix representing f (including the possibility of reduce a row to zero). These matrices $\rho_\lambda(g)$ are computed with an algorithm described by Clifton [Cli81].

Definition 3.1.40. We say that two identites of degree n f and f' are **equivalent identities** if they generate the same FS_n-module of M.

We define analogously equivalent sets of identities. Note that two identities are equivalente if and only of for each partition λ the matrices representing both identities generate the same rowspace.

Definition 3.1.41. A **minimal identity** is an identity whose representing matrices have rank zero for all partitions λ except one, for which it has rank 1.

Every identity is equivalent to a set of minimal identities. Thus we only need to find minimal identities.

If we stack vertically the matrices representing the identities $f^{(1)}, \dots, f^{(k)}$ we obtain a matrix of size $kd_\lambda \times td_\lambda$. By performing row operations we substitue a row by a linear combination of rows, so the rows of the resulting matrix represent identities which are consequences of $f^{(1)}, \dots, f^{(k)}$. Nonzero rows of the canonical form of this matrix form a set of independent generators for the submodule of M generated by $f^{(1)}, \dots, f^{(k)}$ corresponding to the partition λ. Since the rank of this matrix can not be bigger than td_λ, we have that the number of independent generators is at most td_λ.

For more details and applications of this method to different problems, see [BH04, BP07, BP09b, BP11].

Remark 3.1.42. As long as it is possible we compute using rational arithmetic but this becomes inefficient when the matrices are big. In this case, when computing canonical forms, the size of numerators and denominators can be extremely big, even if the original matrix has small entries. To control the required memory in some cases we have used modular arithmetic with a prime p bigger than the degree n of the identities. This guarantees that F_pS_n is semisimple. Structure theory of $\mathbb{Q}S_n$ (in particular, Wedderburn's decomposition) shows that elements of $\mathbb{Q}S_n$ representing the matrices E_{ij} in the simple ideals have coefficients whose denominators are divisors of $n!$. Thus the S_n-module FS_n has "the same" structure over $\mathbb{Q}$ as over F_p if $p > n$. Thus ranks obtained using modular arithmetic this way are the same as obtained usion rational arithmetic. However, one must be careful when re-writing rational results from modular ones.

Along this chapter we did not need to use modular arithmetic because the problems were relatively small.

LLL algorithm for lattice basis reduction

Computational study of polynomial identities in nonassociative algebra involves in some cases identities with a big number of terms and apparently random coefficients which do not contribute relevant information about the problem. In [BP09a], the authors highlight how lattice basis reduction techniques can be applied to find simpler sets of identities that are equivalent to the original ones.

Identies are represented as the nullspace of a matrix E with entries in $\mathbb{Z}$: the expansion matrix from the expansion map defined in 3.1.17. From the canonical form of E over $\mathbb{Q}$ we can extract a basis for the nullspace whose elements have all their entries in $\mathbb{Z}$ but in general these vectors are not a basis of the nullspace lattice (the set of all vectors whose comoponents lie in $\mathbb{Z}$), see [BP09a, example 17].

However, we can find a basis for the nullspace lattice by computing the Hermite normal form H of the transpose matrix E^t and the matrix U for which $UE^t = H$. If the nullspace of E has dimension d over $\mathbb{Q}$ then the last d rows of U are a basis of the nullspace lattice whose components lie in $\mathbb{Z}$, see [BP09a, lema 20]. Those vectors are usually complicated. To simplify them we use the LLL (Lenstra-Lenstra-Lovász) algorithm for reducing lattice basis. This reduction produces identities whose coefficients have smaller absolute values and also fewer terms.

In our case, the nullspace of the matrix E admits a structure of module over the symmetric group S_n because its vectors represent homogeneous polynomial identities of degree n. Thus we will reduce the number of needed identities by considering only the set of generators for the module instead of a complete linear basis.

Algorithms implementing this method are described in [BP09a, section 3].

3.2. Operaciones cuaternarias y álgebras de Sabinin

Consideramos el álgebra libre no asociativa $F\{X\}$ generada por el conjunto X sobre el cuerpo F y definimos un coproducto $\Delta : F\{X\} \to F\{X\} \otimes F\{X\}$ mediante $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$, $x \in X$ y extendiéndolo a los monomios básicos inductivamente de manera que Δ sea un endomorfismo de $F\{X\}$. Las operaciones multilineales que vamos a considerar en $F\{X\}$ se corresponden con elementos $f \in F\{X\}$ primitivos con respecto a este coproducto, es decir, que verifican $\Delta(f) = 1 \otimes f + f \otimes 1$. En el trabajo de Shestakov y Umirbaev [SU02] se presenta un algoritmo para obtener dichos elementos primitivos. En grado 2 todo elemento primitivo es consecuencia del conmutador $[a, b] = ab - ba$; en grado 3 todo elemento primitivo es consecuencia del conmutador iterado $[[a, b], c]$ y del asociador $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$.

Definición 3.2.1. Llamamos **elemento de Akivis** en el álgebra no asociativa libre a un polinomio que puede ser expresado usando solo el conmutador y el asociador.

De la definición de deduce que los elementos de Akivis son primitivos. En grado 4 los elementos de Akivis multilineales son consecuencias de los siguientes seis monomios:

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_1(a, b, c, d) = [[[a, b], c], d], &&\mathcal{A}_2(a, b, c, d) = [(a, b, c), d], \\ &\mathcal{A}_3(a, b, c, d) = [[a, b], [c, d]], &&\mathcal{A}_4(a, b, c, d) = ([a, b], c, d), \\ &\mathcal{A}_5(a, b, c, d) = (a, [b, c], d), &&\mathcal{A}_6(a, b, c, d) = (a, b, [c, d]). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Siguiendo el mencionado algoritmo de Shestakov y Umirbaev, en grado 4 existen dos elementos primitivos que no son elementos de Akivis:

$$\begin{aligned} p_{2,1}(ab, c, d) &= (ab, c, d) - a(b, c, d) - b(a, c, d), \\ p_{1,2}(a, bc, d) &= (a, bc, d) - b(a, c, d) - c(a, b, d). \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Todo polinomio multilineal no asociativo de grado 4 es consecuencia de los anteriores ocho elementos. En este trabajo usaremos como operaciones cuarternarias unas modificaciones de los elementos primitivos $p_{1,2}$ y $p_{2,1}$ que pueden ser interpretados como una medida de la desviación de los asociadores $(-, c, d)$ y $(a, -, d)$ de ser derivaciones.

Definición 3.2.2. Los **cuaternadores** están definidos por las fórmulas

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1(a, b, c, d) &= (ab, c, d) - a(b, c, d) - (a, c, d)b, \\ \mathcal{Q}_2(a, b, c, d) &= (a, bc, d) - b(a, c, d) - (a, b, d)c, \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Notar que los cuaternadores son elementos primitivos y son equivalentes (módulo elementos de Akivis) a $p_{1,2}$ y $p_{2,1}$, ya que $\mathcal{Q}_1(a, b, c, d) = p_{1,2}(ab, c, d) - \mathcal{A}_2(a, c, d, b)$ y $\mathcal{Q}_2(a, b, c, d) = p_{2,1}(a, bc, d) - \mathcal{A}_2(a, b, d, c)$.

A continuación se transcriben algunas definiciones y resultados básicos del trabajo de Shestakov y Umirbaev [SU02]. Salvo que se especifique lo contrario, la notación sin paréntesis para los monomios no asociativos significará monomios normados a derecha: $x_1x_2x_3\cdots x_m = (\cdots((x_1x_2)x_3)\cdots x_m)$.

Definición 3.2.3. El par ordenado (u_1, u_2) es una **2-descomposición** de $u = x_1\cdots x_m$ si $u_1 = x_{i_1}\cdots x_{i_k}$ y $u_2 = x_{i_{k+1}}\cdots x_{i_m}$ donde los subconjuntos $I_1 = \{i_1,\ldots,i_k\}$ y $I_2 = \{i_{k+1},\ldots,i_m\}$ verifican

$$i_1 < \cdots < i_m, \qquad i_{k+1} < \cdots < i_m, \qquad I_1 \cup I_2 = \{1,\ldots,m\}, \qquad I_1 \cap I_2 = \emptyset.$$

Si $k = 0$ entonces $u_1 = 1$; si $k = m$ entonces $u_2 = 1$ (para una definición más general, ver [SU02, p. 538]).

Definición 3.2.4. [SU02, p. 544] Se definen los siguientes polinomios inductivamente en el álgebra no asociativa libre:

$$\begin{aligned}
&p_{1,1}(x,y,z) = (x,y,z), \quad \text{(asociador)}\\
&p_{m,n}(x_1\cdots x_m, y_1\cdots y_n, z)\\
&= (\,x_1\cdots x_m,\, y_1\cdots y_n,\, z\,) - \sum_{\substack{u_1\neq 1 \text{ o } v_1\neq 1\\ u_2\neq 1 \text{ y } v_2\neq 1}} u_1v_1p_{m-\deg(u_1),n-\deg(v_1)}(u_2,v_2,z),
\end{aligned}$$

donde $m+n \geq 3$ y la suma se realiza sobre todas las 2-descomposiciones de $u = x_1\cdots x_m$ y $v = y_1\cdots y_n$.

Notar que en [SU02] se prueba que todos estos elementos son primitivos. Calculamos los polinomios de grado 4. Para $m = 2$, $n = 1$ se tiene $u = x_1x_2$, $v = y$ y las 2-descomposiciones son

$$(u_1,u_2) = (x_1x_2,1),(x_1,x_2),(x_2,x_1),(1,x_1x_2), \qquad (v_1,v_2) = (y,1),(1,y).$$

Debido a las restricciones de la definición, los sumandos que aparecen son los correspondientes a combinar (x_1,x_2) con $(1,y)$ y (x_2,x_1) con $(1,y)$. Por tanto, obtenemos

$$\begin{aligned}
p_{2,1}(x_1x_2,y,z) &= (x_1x_2,y,z) - x_1p_{1,1}(x_2,y,z) - x_2p_{1,1}(x_1,y,z)\\
&= ((x_1x_2)y)z - (x_1x_2)(yz) - x_1((x_2y)z)\\
&\quad + x_1(x_2(yz)) - x_2((x_1y)z) + x_2(x_1(yz)).
\end{aligned}$$

Análogamente, para $m = 1$, $n = 2$ obtenemos

$$p_{1,2}(x,y_1y_2,z) = (x,y_1y_2,z) - y_1p_{1,1}(x,y_2,z) - y_2p_{1,1}(x,y_1,z)$$

$$
\begin{aligned}
&= (x(y_1y_2))z - x((y_1y_2)z) - y_1((xy_2)z) \\
&\quad + y_1(x(y_2z)) - y_2((xy_1)z) + y_2(x(y_1z)).
\end{aligned}
$$

Notar que estos polinomios son los mismos que aparecían en 3.2.2.

Definición 3.2.5. [SU02, p. 539] En un álgebra no asociativa se definen las siguientes **operaciones de Sabinin** (multilineales) en función del conmutador y de los polinomios $p_{m,n}$:

$$
\begin{aligned}
\langle y, z\rangle &= -[y, z], \\
\langle x_1, \ldots, x_m, y, z\rangle &= -p_{m,1}(u, y, z) + p_{m,1}(u, z, y),
\end{aligned}
$$

donde $u = x_1 \cdots x_m$ y $m \geq 1$, y

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{m,n}(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n) = \\
&\frac{1}{m!n!} \sum_{\sigma\in S_m} \sum_{\tau\in S_n} p_{m,n-1}\big(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}; y_{\tau(1)}, \ldots, y_{\tau(n-1)}; y_{\tau(n)}\big),
\end{aligned}
$$

donde $m \geq 1$ y $n \geq 2$.

En grados 2, 3 y 4, las operaciones de Sabinin son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
\langle y, z\rangle &= -[y, z], \\
\langle x, y, z\rangle &= -p_{1,1}(x, y, z) + p_{1,1}(x, z, y), \\
\Phi_{1,2}(x, y, z) &= \tfrac{1}{2}\big(p_{1,1}(x, y, z) + p_{1,1}(x, z, y)\big), \\
\langle w, x, y, z\rangle &= -p_{2,1}(wx, y, z) + p_{2,1}(wx, z, y), \\
\Phi_{1,3}(w, x, y, z) &= \tfrac{1}{6}\big(p_{1,2}(w, xy, z) + p_{1,2}(w, xz, y) + p_{1,2}(w, yx, z) \\
&\qquad + p_{1,2}(w, yz, x) + p_{1,2}(w, zx, y) + p_{1,2}(w, zy, x)\big), \\
\Phi_{2,2}(w, x, y, z) &= \tfrac{1}{4}\big(p_{2,1}(wx, y, z) + p_{2,1}(wx, z, y) + p_{2,1}(xw, y, z) + p_{2,1}(xw, z, y)\big).
\end{aligned}
$$

Usando las fórmulas (3.2.2) y ordenando los términos primero por tipo de asociación

$$
((ab)c)d, \quad (a(bc))d, \quad (ab)(cd), \quad a((bc)d), \quad a(b(cd)),
$$

y después por permutación de las letras, se obtienen las expresiones de las operaciones cuaternarias en el álgebra no asociativa libre:

$$
\langle w, x, y, z\rangle = -\,((wx)y)z + ((wx)z)y + (wx)(yz) - (wx)(zy) + w((xy)z) - w((xz)y)
$$

$$+ x((wy)z) - x((wz)y) - w(x(yz)) + w(x(zy)) - x(w(yz)) + x(w(zy)),$$

$$\begin{aligned}\Phi_{1,3}(w,x,y,z) =& \tfrac{1}{6}\big((w(xy))z + (w(xz))y + (w(yx))z + (w(yz))x + (w(zx))y + (w(zy))x \\ & - w((xy)z) - w((xz)y) - w((yx)z) - w((yz)x) - w((zx)y) - w((zy)x) \\ & - 2x((wy)z) - 2x((wz)y) - 2y((wx)z) - 2y((wz)x) \\ & - 2z((wx)y) - 2z((wy)x) + 2x(w(yz)) + 2x(w(zy)) \\ & + 2y(w(xz)) + 2y(w(zx)) + 2z(w(xy)) + 2z(w(yx))\big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{2,2}(w,x,y,z) =& \tfrac{1}{4}\big(((wx)y)z + ((wx)z)y + ((xw)y)z + ((xw)z)y - (wx)(yz) - (wx)(zy) \\ & - (xw)(yz) - (xw)(zy) - 2w((xy)z) - 2w((xz)y) - 2x((wy)z) \\ & - 2x((wz)y) + 2w(x(yz)) + 2w(x(zy)) + 2x(w(yz)) + 2x(w(zy))\big).\end{aligned}$$

Estas tres operaciones de Sabinin son equivalentes a los dos cuaternadores de la definición 3.2.2 en el siguiente sentido: consideramos el subespacio N formado por los polinomios homogéneos de grado 4 en el álgebra no asociativa libre generada por 4 elementos, el subespacio P de los elementos primitivos y el subespacio A de los elementos de Akivis. Estos tres espacios admiten una acción natural del grupo simétrico S_4 por permutación de las variables y se tiene que $A \subseteq P \subseteq N$. El módulo cociente P/A tiene como conjuntos de generadores las coclases de los dos cuaternadores y las coclases de las tres operaciones de Sabinin de grado 4. Los dos lemas siguientes dan las expresiones explícitas de las dependencias entre los cuaternadores y las operaciones de Sabinin de grado 4. En los dos casos la demostración se tiene expandiendo ambos términos de cada ecuación en el álgebra libre no asociativa.

Lema 3.2.6. *Las operaciones de Sabinin de grado 4 pueden expresarse en función de los cuaternadores y los elementos de Akivis:*

$$\langle a,b,c,d\rangle = -\mathcal{A}_2(a,c,d,b) + \mathcal{A}_2(a,d,c,b) - \mathcal{Q}_1(a,b,c,d) + \mathcal{Q}_1(a,b,d,c),$$

$$\begin{aligned}6\Phi_{1,3}(a,b,c,d) =& 2\mathcal{A}_2(a,b,c,d) + 2\mathcal{A}_2(a,b,d,c) + 2\mathcal{A}_2(a,c,b,d) - 4\mathcal{A}_2(a,c,d,b) \\ & + 2\mathcal{A}_2(a,d,b,c) + 2\mathcal{A}_2(a,d,c,b) - 3\mathcal{A}_5(a,b,c,d) - \mathcal{A}_5(a,b,d,c) \\ & - \mathcal{A}_5(a,c,d,b) - 2\mathcal{A}_6(a,b,c,d) - 2\mathcal{A}_6(a,c,b,d) - 2\mathcal{Q}_1(a,b,c,d) \\ & + 2\mathcal{Q}_1(a,b,d,c) - 2\mathcal{Q}_1(a,c,b,d) + 2\mathcal{Q}_1(a,c,d,b) + 6\mathcal{Q}_2(a,b,c,d),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\Phi_{2,2}(a,b,c,d) = {} & 2\mathcal{A}_2(a,c,d,b) + 2\mathcal{A}_2(a,d,c,b) - \mathcal{A}_4(a,b,c,d) - \mathcal{A}_4(a,b,d,c) \\ & + 2\mathcal{Q}_1(a,b,c,d) + 2\mathcal{Q}_1(a,b,d,c).\end{aligned}$$

Lema 3.2.7. *Los cuaternadores pueden expresarse en función de las operaciones de Sabinin de grado 4 y los elementos de Akivis:*

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_1(a,b,c,d) = & - \mathcal{A}_2(a,c,d,b) + \tfrac{1}{4}\mathcal{A}_4(a,b,c,d) + \tfrac{1}{4}\mathcal{A}_4(a,b,d,c) \\ & - \tfrac{1}{2}\langle a,b,c,d\rangle + \tfrac{1}{4}\Phi_{2,2}(a,b,c,d) \\ \mathcal{Q}_2(a,b,c,d) = & - \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,b,c,d) - \tfrac{2}{3}\mathcal{A}_2(a,b,d,c) - \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,c,b,d) \\ & + \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,c,d,b) + \tfrac{1}{2}\mathcal{A}_5(a,b,c,d) + \tfrac{1}{6}\mathcal{A}_5(a,b,d,c) \\ & + \tfrac{1}{6}\mathcal{A}_5(a,c,d,b) + \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_6(a,b,c,d) + \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_6(a,c,b,d) \\ & - \tfrac{1}{3}\langle a,b,c,d\rangle - \tfrac{1}{3}\langle a,c,b,d\rangle + \tfrac{1}{6}\Phi_{1,3}(a,b,c,d)\end{aligned}$$

Definición 3.2.8. [SU02, p. 544] Un **álgebra de Sabinin** es un espacio vectorial con dos familias de operaciones multilineales

$$\begin{aligned}&\langle x_1, x_2, \dots, x_m; y, z\rangle, \quad m \geq 0, \\ &\Phi(x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_n), \quad m \geq 1, n \geq 2,\end{aligned}$$

que satisfacen las identidades polinomiales

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_m; y, z\rangle + \langle x_1, x_2, \dots, x_m; z, y\rangle \equiv 0, \tag{3.2.4}$$

$$\begin{aligned}&\langle x_1, x_2, \dots, x_r, a, b, x_{r+1}, \dots, x_m; y, z\rangle \\ &\quad - \langle x_1, x_2, \dots, x_r, b, a, x_{r+1}, \dots, x_m; y, z\rangle \\ &\quad + \sum_{k=0}^{r}\sum_{\alpha} \left\langle x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k}, \left\langle x_{\alpha_{k+1}}, \dots, x_{\alpha_r}; a, b\right\rangle, \dots, x_m; y, z\right\rangle \equiv 0,\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

$$\begin{aligned}&\sigma_{x,y,z}\Big(\langle x_1, \dots, x_r, x; y, z\rangle \\ &\quad + \sum_{k=0}^{r}\sum_{\alpha} \left\langle x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k}; \left\langle x_{\alpha_{k+1}}, \dots, x_{\alpha_r}; y, z\right\rangle, x\right\rangle \Big) \equiv 0,\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

$$\Phi(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) \equiv \Phi(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(m)}; y_{\delta(1)}, \dots, y_{\delta(n)}), \tag{3.2.7}$$

donde $\alpha \in S_r$ $(i \mapsto \alpha_i)$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$, $\alpha_{k+1} < \cdots < \alpha_r$, $k = 0, 1, \dots, r$, $r \geq 0$, $\sigma_{x,y,z}$ denota la suma cíclica sobre x, y, z, $\tau \in S_m$ y $\delta \in S_n$.

Introducimos ahora una variedad de álgebras que será útil a lo largo del capítulo.

Definición 3.2.9. Un **álgebra de Sabinin de grado** d para $d \geq 2$ es el álgebra que se obtiene de la definición 3.2.8 considerando únicamente las operaciones multilineales de grado menor o igual que d junto con las identidades polinomiales de grado menor o igual que d que involucran dichas operaciones.

En particular, para $d = 2$ se obtiene la variedad de álgebras anticonmutativas : un espacio vectorial con una operación multilineal $\langle a, b\rangle$ que verifica $\langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle \equiv 0$.
Para $d = 3$ se tiene la variedad de álgebras con una operación bilineal $\langle a, b\rangle$ y dos operaciones trilineales $\langle a, b, c\rangle$ y $\Phi_{1,2}(a, b, c)$ que satisfacen las identidades

$$\begin{aligned}
&\langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle \equiv 0,\\
&\langle a, b, c\rangle + \langle a, c, b\rangle \equiv 0,\\
&\langle a, b, c\rangle + \langle\langle b, c\rangle, a\rangle + \langle b, c, a\rangle + \langle\langle c, a\rangle, b\rangle + \langle c, a, b\rangle + \langle\langle a, b\rangle, c\rangle \equiv 0,\\
&\Phi_{1,2}(a, b, c) \equiv \Phi_{1,2}(a, c, b).
\end{aligned}$$

Esta variedad de álgebras resulta ser equivalente a las álgebras de Akivis. Dada un algebra de Sabinin de grado 3 con operaciones $\langle -, -\rangle$, $\langle -, -, -\rangle$ y $\Phi_{1,2}(-, -, -)$, si definimos

$$[a, b] = -\langle a, b\rangle, (a, b, c) = \tfrac{1}{2}\big(2\Phi_{1,2}(a, b, c) - \langle a, b, c\rangle\big),$$

se tiene que

$$[a, b] + [b, a] = -\langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle \overset{(i)}{=} 0$$

$$\begin{aligned}
&[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b]\\
&\quad - (a, b, c) - (b, c, a) - (c, a, b)\\
&\quad + (b, a, c) + (a, c, b) + (c, b, a)\\
&= \langle\langle a, b\rangle, c\rangle + \langle\langle b, c\rangle, a\rangle + \langle\langle c, a\rangle, b\rangle\\
&\quad - \tfrac{1}{2}\big(2\Phi_{1,2}(a, b, c) - \langle a, b, c\rangle\big) - \tfrac{1}{2}\big(2\Phi_{1,2}(b, c, a) - \langle b, c, a\rangle\big)\\
&\quad - \tfrac{1}{2}\big(2\Phi_{1,2}(c, a, b) - \langle c, a, b\rangle\big) + \tfrac{1}{2}\big(2\Phi_{1,2}(b, a, c) - \langle b, a, c\rangle\big)\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\big(2\Phi_{1,2}(a, c, b) - \langle a, c, b\rangle\big) + \tfrac{1}{2}\big(2\Phi_{1,2}(c, b, a) - \langle c, b, a\rangle\big)\\
&\overset{(iv)}{=} \langle\langle a, b\rangle, c\rangle + \langle\langle b, c\rangle, a\rangle + \langle\langle c, a\rangle, b\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \tfrac{1}{2}\langle a,b,c\rangle + \tfrac{1}{2}\langle b,c,a\rangle + \tfrac{1}{2}\langle c,a,b\rangle \\
&- \tfrac{1}{2}\langle b,a,c\rangle - \tfrac{1}{2}\langle a,c,b\rangle - \tfrac{1}{2}\langle c,b,a\rangle \\
&\overset{(ii)}{=} \langle\langle a,b\rangle,c\rangle + \langle\langle b,c\rangle,a\rangle + \langle\langle c,a\rangle,b\rangle + \langle a,b,c\rangle + \langle b,c,a\rangle + \langle c,a,b\rangle \overset{(iii)}{=} 0,
\end{aligned}
$$

donde los números en cada igualdad hacen referencia a la correspondiente identidad verificada por las álgebras de Sabinin de grado 3 aplicada. Recíprocamente, dada un álgebra de Akivis con operaciones $[-,-]$ y $(-,-,-)$, si definimos

$$\langle a,b\rangle = -[a,b], \langle a,b,c\rangle = -(a,b,c)+(a,c,b), \Phi_{1,2}(a,b,c) = \tfrac{1}{2}\big((a,b,c)+(a,c,b)\big),$$

se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle = -[a,b]+[a,b] = 0 \\
&\langle a,b,c\rangle + \langle a,c,b\rangle = -(a,b,c)+(a,c,b)-(a,c,b)+(a,b,c) = 0 \\
&\langle a,b,c\rangle + \langle\langle b,c\rangle,a\rangle + \langle b,c,a\rangle + \langle\langle c,a\rangle,b\rangle + \langle c,a,b\rangle + \langle\langle a,b\rangle,c\rangle \\
&\quad = -(a,b,c)+(a,c,b)+[[b,c],a]-(b,c,a)+(b,a,c)+[[c,a],b] \\
&\qquad -(c,a,b)+(c,b,a)+[[a,b],c] \overset{(A)}{=} 0 \\
&\Phi_{1,2}(a,b,c) = \tfrac{1}{2}\big((a,b,c)+(a,c,b)\big) = \Phi_{1,2}(a,c,b),
\end{aligned}
$$

donde (A) significa que aplicamos la identidad de Akivis.

3.3. Álgebras de Sabinin de grado 4

El objetivo de esta sección es encontrar una variedad de álgebras equivalente a las álgebras de Sabinin de grado 4 cuyas identidades definitorias sean más sencillas. Primero obtenemos las identidades que relacionan las operaciones de grados 2, 3 y 4

$$\langle y,z\rangle,\quad \langle x,y,z\rangle,\quad \langle w,x,y,z\rangle,\quad \Phi_{1,2}(x,y,z),\quad \Phi_{1,3}(w,x,y,z),\quad \Phi_{2,2}(w,x,y,z)$$

en un álgebra de Sabinin de grado 4. De la identidad (3.2.4) se obtiene la antisimetría en los dos últimos argumentos de las tres primeras operaciones:

$$\langle y,z\rangle + \langle z,y\rangle \equiv 0, \tag{4S1}$$

$$\langle x,y,z\rangle + \langle x,z,y\rangle \equiv 0, \tag{4S2}$$

$$\langle w,x,y,z\rangle + \langle w,x,z,y\rangle \equiv 0. \tag{4S3}$$

En la identidad (3.2.5), solo podemos tomar $r = m = 0$; obtenemos:

$$\langle a,b,y,z\rangle - \langle b,a,y,z\rangle + \langle\langle a,b\rangle\,,y,z\rangle \equiv 0. \tag{4S4}$$

En la identidad (3.2.6) podemos tomar $r = 0$ o $r = 1$. Con $r = 0$ obtenemos:

$$\langle x,y,z\rangle + \langle y,z,x\rangle + \langle z,x,y\rangle + \langle\langle x,y\rangle, z\rangle + \langle\langle y,z\rangle, x\rangle + \langle\langle z,x\rangle, y\rangle \equiv 0. \tag{4S5}$$

Con $r = 1$ obtenemos

$$\sigma_{x,y,z}\big(\,\langle x_1,x,y,z\rangle + \langle\langle x_1,y,z\rangle\,,x\rangle + \langle x_1,\langle y,z\rangle\,,x\rangle\,\big) \equiv 0. \tag{4S6}$$

De la identidad (3.2.7) obtenemos las siguientes simetrías de las tres últimas operaciones:

$$\Phi_{1,2}(x,y,z) \equiv \Phi_{1,2}(x,z,y), \tag{4S7}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{1,3}(w,x,y,z) &\equiv \Phi_{1,3}(w,x,z,y) \equiv \Phi_{1,3}(w,y,x,z) \equiv \Phi_{1,3}(w,y,z,x)\\ &\equiv \Phi_{1,3}(w,z,x,y) \equiv \Phi_{1,3}(w,z,y,x),\end{aligned} \tag{4S8}$$

$$\Phi_{2,2}(w,x,y,z) \equiv \Phi_{2,2}(w,x,z,y) \equiv \Phi_{2,2}(x,w,y,z) \equiv \Phi_{2,2}(x,w,z,y). \tag{4S9}$$

En siguiente resultado obtenemos las identidades de grado menor o igual que 4 que satisfacen el conmutador $[a,b] = ab - ba$, el asociador $(a,b,c) = (ab)c - a(bc)$ y los dos cuaternadores 3.2.2 en el álgebra no asociativa libre. Consideramos los cuaternadores como operaciones multilineales y usamos la notación

$$\mathcal{Q}_1(a,b,c,d) = \{a,b,c,d\} \text{ y } \mathcal{Q}_2(a,b,c,d) = \{a,b,c,d\}'.$$

Teorema 3.3.1. *Toda identidad de grado menor o igual que 4 verificada por el conmutador $[a,b]$, el asociador (a,b,c) y los dos cuaternadores $\{a,b,c,d\}$ y $\{a,b,c,d\}'$ en el álgebra no asociativa libre es consecuencia de las siguientes cinco identidades independientes:*

$$[a,b] + [b,a] \equiv 0, \tag{i}$$

$$\begin{aligned}[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] &\equiv (a,b,c) - (a,c,b) - (b,a,c)\\ &\quad + (b,c,a) + (c,a,b) - (c,b,a),\end{aligned} \tag{ii}$$

$$([a,b],c,d) - [a,(b,c,d)] + [b,(a,c,d)] \equiv \{a,b,c,d\} - \{b,a,c,d\}, \tag{iii}$$

$$(a,[b,c],d)-[b,(a,c,d)]+[c,(a,b,d)] \equiv \{a,b,c,d\}'-\{a,c,b,d\}', \tag{iii}$$

$$\begin{aligned}[b,(a,c,d)]-[b,(a,d,c)]-(a,b,[c,d]) \equiv {} & \{a,b,c,d\}-\{a,b,d,c\} \\ & -\{a,b,c,d\}'+\{a,b,d,c\}'. \end{aligned} \tag{v}$$

Demostración. La demostración de este resultado es similar a la expuesta en el ejemplo 3.1.18 y está hecha con ayuda de Maple. Consideramos los tipos de asociación de grado 4 para $\Omega = \{[-,-],(-,-,-),\{a,b,c,d\},\{a,b,c,d\}'\}$ (que llamaremos tipos de asociación BTQQ, haciendo referencia a una operación binaria, una operación ternaria y dos operaciones cuaternarias):

$$\begin{array}{llll} [-,[-,[-,-]]], & [-,(-,-,-)], & [[-,-],[-,-]], & (-,-,[-,-]), \\ (-,[-,-],-), & ([-,-],-,-), & \{-,-,-,-\}, & \{-,-,-,-\}'. \end{array}$$

Construimos una base $\mathcal{B}$ (como espacio vectorial) de los polinomios homogéneos multilineales de grado 4. Para ello, aplicamos todas las permutaciones de las variables a,b,c,d a los tipos BTQQ para generar los monomios multilineales BTQQ. Notar que, debido a la antisimetría del conmutador, en algunos de los tipos BTQQ no todos los monomios son linealmente independientes, luego habrá que descartar los que sean múltiplos de otros; elegiremos según el orden lexicográfico (para más detalles acerca de las simetrías de un tipo de asociación y su influencia en las dimensiones de los subespacios, ver [BP11, sección 2.2]). Los distintos tipos de asociación BTQQ aportan, respectivamente, 12, 24, 3, 12, 12, 12, 24 y 24 elementos a la base, sumando un total de 123.

Construimos una matriz por bloques $E = [X \mid I]$, donde X tiene dimensión 123×120 e I es la matriz identidad. El número de columnas de X corresponde con el número de monomios multilineales de grado 4 en el álgebra no asociativa libre. Como en el ejemplo 3.1.18, las filas de E representan las ecuaciones que igualan cada monomio de la base previamente construida (el 1 en la fila correspondiente de I) con su expansión en el álgebra no asociativa libre (los coeficientes en la fila correspondiente de X).

Aplicamos reducción gausiana a E e identificamos las filas que tengan el primer elemento no nulo en el bloque de la derecha. Las 45 filas obtenidas forman una base lineal del subespacio de identidades de grado 4 verificadas por las operaciones de Ω, incluyendo las consecuencias de la identidad de Akivis (notar que las consecuencias de la antisimetría del conmutador las hemos omitido al descartar los monomios dependientes en la construcción de la base $\mathcal{B}$).

Nos interesa identificar las identidades que son "nuevas", es decir, que no son consecuencias de las identidades existentes en grado 3. Para ello, vamos a comparar cada una de las 45 identidades con las extensiones de la identidad de Akivis $A(a,b,c,d)$ en grado 4

$$A([a,d],b,c), \quad A(a,[b,d],c), \quad A(a,b,[c,d]), \quad [A(a,b,c),d], \quad [d,A(a,b,c)].$$

Construimos una matriz por bloques $\left[\begin{array}{c} A \\ \hline B \end{array}\right]$ inicializada a cero, donde A tiene tamaño 123×123 y B, 24×123. Para cada consecuencia de la identidad de Akivis (salvo la última, que es un múltiplo escalar de la anterior debido a la antisimetría del conmutador) hacemos lo siguiente: aplicamos todas las permutaciones de variables, las expresamos en la base $\mathcal{B}$, introducimos los 24 vectores de coeficientes como filas de B y hacemos reducción gausiana (notar que el bloque B se hace cero en cada iteración). El resultado es una matriz de rango 10 cuyas filas generan (linealmente) todas las consecuencias en grado 4 de la identidad de Akivis. Por tanto, como el rango de todas las identidades de grado 4 es 45, las nuevas identidades forman un espacio cociente de dimensión 35.

Para saber qué identidades de las obtenidas al reducir E son nuevas, las ordenamos por orden creciente de términos (desde 6 hasta 58) y para cada una de ellas repetimos el proceso anterior: aplicamos todas las permutaciones de variables, las expresamos en la base $\mathcal{B}$, introducimos los 24 vectores de coeficientes como filas de B y hacemos reducción gausiana. Si el rango de la matriz aumenta tras un paso significa que no es consecuencia de las extensiones de la identidad de Akivis ni de las identidades procesadas previamente. Solo 4 de las 45 identidades aumentan el rango:

$$[c,(d,b,a)] - [d,(c,b,a)] - ([c,d],b,a) + \{c,d,b,a\} - \{d,c,b,a\} \equiv 0,$$

$$[b,(c,d,a)] - [d,(c,b,a)] - (c,[b,d],a) + \{c,b,d,a\}' - \{c,d,b,a\}' \equiv 0,$$

$$\begin{aligned}(c,d,[a,b]) &- (d,c,[a,b]) + ([c,d],a,b) - ([c,d],b,a) \\ &- \{c,d,a,b\}' + \{c,d,b,a\}' + \{d,c,a,b\}' - \{d,c,b,a\}' \equiv 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[c,(d,a,b)] &- [d,(c,b,a)] - (d,c,[a,b]) - ([c,d],b,a) \\ &+ \{c,d,b,a\} - \{d,c,a,b\} + \{d,c,a,b\}' - \{d,c,b,a\}' \equiv 0.\end{aligned}$$

Sin embargo, debemos comprobar si estas 4 identidades son independientes entre sí o si alguna de ellas es consecuencia de las otras, ya que las identidades que han sido procesadas primero podrían ser consecuencia de las procesadas posteriormente. Para realizar la comprobación, recuperamos la matriz con las extensiones de la identidad de Akivis reducida y procesamos (aplicamos todas las permutaciones de variables, las expresamos en la base $\mathcal{B}$, introducimos los 24 vectores de coeficientes como filas de B y hacemos reducción gausiana) las 4 identidades en diferente orden, de manera que si hay alguna dependiente, al procesarla la última no aumentará el rango de la matriz.

Se obtiene que la tercera de las identidades anteriores no aumenta el rango de la matriz al procesarla en último lugar, luego es consecuencia de las otras tres (y de las extensiones de la identidad de Akivis), que resultan ser independientes, ya que al procesarlas en todos los posibles órdenes, cada una de ellas aumenta el rango de la matriz. Por tanto, las identidades "nuevas" son

$$[c,(d,b,a)] - [d,(c,b,a)] - ([c,d],b,a) + \{c,d,b,a\} - \{d,c,b,a\} \equiv 0,$$

$$[b,(c,d,a)] - [d,(c,b,a)] - (c,[b,d],a) + \{c,b,d,a\}' - \{c,d,b,a\}' \equiv 0,$$

$$\begin{aligned}&[c,(d,a,b)] - [d,(c,b,a)] - (d,c,[a,b]) - ([c,d],b,a)\\ &\qquad + \{c,d,b,a\} - \{d,c,a,b\} + \{d,c,a,b\}' - \{d,c,b,a\}' \equiv 0.\end{aligned}$$

Notar que estas tres identidades son equivalentes a las del enunciado del teorema, ya que las dos primeras solo difieren en una permutación de variables y la tercera identidad del enunciado es la suma de permutaciones de variables de la primera y la tercera previas. $\square$

Nota 3.3.2. En [AS89, Mik96] aparecen resultados similares obtenidos mediante técnicas de geometría diferencial: se definen determinados tensores invariantes, relacionados con 3-redes, que admiten una interpretación algebraica como conmutador, asociador y dos "alternadores" y permiten el estudio de las 3-redes a través de las identidades que satisfacen.

Definición 3.3.3. Un **álgebra BTQQ** es un espacio vectorial con una operación bilineal $[-,-]$, una operación trilineal $(-,-,-)$ y dos operaciones cuatrilineales $\{-,-,-,-\}$ y $\{-,-,-,-\}'$ que verifican las identidades del teorema 3.3.1.

Teorema 3.3.4. *Las variedades de álgebras de Sabinin de grado 4 y álgebras BTQQ son equivalentes.*

Demostración. Dada un álgebra BTQQ definimos

$$
\begin{aligned}
\langle a,b\rangle &= -[a,b],\\
\langle a,b,c\rangle &= -(a,b,c)+(a,c,b),\\
\Phi_{1,2}(a,b,c) &= (a,b,c)+(a,c,b),\\
\langle a,b,c,d\rangle &= -\mathcal{A}_2(a,c,d,b)+\mathcal{A}_2(a,d,c,b)-\mathcal{Q}_1(a,b,c,d)+\mathcal{Q}_1(a,b,d,c),\\
\Phi_{1,3}(a,b,c,d) &= 2\mathcal{A}_2(a,b,c,d)+2\mathcal{A}_2(a,b,d,c)+2\mathcal{A}_2(a,c,b,d)-4\mathcal{A}_2(a,c,d,b)\\
&\quad+2\mathcal{A}_2(a,d,b,c)+2\mathcal{A}_2(a,d,c,b)-3\mathcal{A}_5(a,b,c,d)-\mathcal{A}_5(a,b,d,c)\\
&\quad-\mathcal{A}_5(a,c,d,b)-2\mathcal{A}_6(a,b,c,d)-2\mathcal{A}_6(a,c,b,d)-2\mathcal{Q}_1(a,b,c,d)\\
&\quad+2\mathcal{Q}_1(a,b,d,c)-2\mathcal{Q}_1(a,c,b,d)+2\mathcal{Q}_1(a,c,d,b)+6\mathcal{Q}_2(a,b,c,d),\\
\Phi_{2,2}(a,b,c,d) &= 2\mathcal{A}_2(a,c,d,b)+2\mathcal{A}_2(a,d,c,b)-\mathcal{A}_4(a,b,c,d)-\mathcal{A}_4(a,b,d,c)\\
&\quad+2\mathcal{Q}_1(a,b,c,d)+2\mathcal{Q}_1(a,b,d,c),
\end{aligned}
$$

donde los elementos de Akivis $\mathcal{A}_i(a,b,c,d)$ están definidos en 3.2.1. Veamos que estos operadores verifican las identidades que definen las álgebras de Sabinin de grado 4:

$$\langle y,z\rangle+\langle z,y\rangle \overset{(i)}{=} -[y,z]+[z,y]=0$$

$$\langle x,y,z\rangle+\langle x,z,y\rangle = -(x,y,z)+(x,z,y)-(x,z,y)+(x,y,z)=0$$

$$
\begin{aligned}
&\langle w,x,y,z\rangle+\langle w,x,z,y\rangle\\
&= -\mathcal{A}_2(w,y,z,x)+\mathcal{A}_2(w,z,y,x)-\mathcal{Q}_1(w,x,y,z)+\mathcal{Q}_1(w,x,z,y)\\
&\quad-\mathcal{A}_2(w,z,y,x)+\mathcal{A}_2(w,y,z,x)-\mathcal{Q}_1(w,x,z,y)+\mathcal{Q}_1(w,x,y,z)=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle a,b,y,z\rangle-\langle b,a,y,z\rangle+\langle\langle a,b\rangle,y,z\rangle\\
&= [(a,y,z),b]+[(a,z,y),b]-\{a,b,y,z\}+\{a,b,z,y\}\\
&\quad+[(b,y,z),a]-[(b,z,y),a]+\{b,a,y,z\}-\{b,a,z,y\}\\
&\quad+([a,b],y,z)-([a,b],z,y) \overset{(iii)}{=} 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle x,y,z\rangle+\langle y,z,x\rangle+\langle z,x,y\rangle+\langle\langle x,y\rangle,z\rangle+\langle\langle y,z\rangle,x\rangle+\langle\langle z,x\rangle,y\rangle\\
&= -(x,y,z)+(x,z,y)-(y,z,x)+(y,x,z)-(z,x,y)+(z,y,x)\\
&\quad[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y] \overset{(ii)}{=} 0
\end{aligned}
$$

$$\sigma_{x,y,z}\big(\langle x_1,x,y,z\rangle+\langle\langle x_1,y,z\rangle,x\rangle+\langle x_1,\langle y,z\rangle,x\rangle\big)$$

$$= \sigma_{b,c,d}\big(- [(a,c,d),b] + [(a,d,c),b] - \{a,b,c,d\} + \{a,b,d,c\}$$
$$+ [(a,c,d),b] - [(a,d,c),b] + (a,[c,d],b) - (a,b,[c,d])\big)$$
$$= -\big(\{a,b,c,d\} - \{a,b,d,c\} - (a,[c,d],b) + (a,b,[c,d])$$
$$\{a,c,d,b\} - \{a,c,b,d\} - (a,[d,b],c) + (a,c,[d,b])$$
$$\{a,d,b,c\} - \{a,d,c,b\} - (a,[b,c],d) + (a,d,[b,c])\big)$$
$$\overset{(v)}{=} -\big(\{a,b,c,d\}' - \{a,b,d,c\}' + [b,(a,c,d)] - [b,(a,d,c)]$$
$$- (a,b,[c,d]) - (a,[c,d],b) + (a,b,[c,d]) + \{a,c,d,b\}'$$
$$- \{a,c,b,d\}' + [c,(a,d,b)] - [c,(a,b,d)] - (a,c,[d,b])$$
$$- (a,[d,b],c) + (a,c,[d,b])\{a,d,b,c\}' - \{a,d,c,b\}'$$
$$+ [d,(a,b,c)] - [d,(a,c,b)] - (a,d,[b,c]) - (a,[b,c],d) + (a,d,[b,c])\big) \overset{(iv)}{=} 0$$

$$\Phi_{1,2}(x,y,z) = (x,y,z) + (x,z,y) = \Phi_{1,2}(x,z,y)$$

$$\Phi_{1,3}(w,x,y,z) = 2[(w,x,y),z] + 2[(w,x,z),y] + 2[(w,y,x),z] - 4[(w,y,z),x]$$
$$+ 2[(w,z,x),y] + 2[(w,z,y),x] - 3(w,[x,y],z) - (w,[x,z],y)$$
$$- (w,[y,z],x) - 2(w,x,[y,z]) - 2(w,y,[x,z]) - 2\{w,x,y,z\}$$
$$+ 2\{w,x,z,y\} - 2\{w,y,x,z\} + 2\{w,y,z,x\} + 6\{w,x,y,z\}'$$
$$\overset{(v)}{=} 2[(w,x,y),z] + 4[(w,x,z),y] + 2[(w,y,x),z] - 2[(w,y,z),x]$$
$$- 3(w,[x,y],z) - (w,[x,z],y) - (w,[y,z],x) - 2\{w,x,y,z\}$$
$$+ 2\{w,x,z,y\} - 2\{w,y,x,z\} + 2\{w,y,z,x\} + 6\{w,x,y,z\}'$$
$$+ 2\{w,x,y,z\} - 2\{w,x,z,y\} - 2\{w,x,y,z\}' + 2\{w,x,z,y\}'$$
$$+ 2\{w,y,x,z\} - 2\{w,y,z,x\} - 2\{w,y,x,z\}' + 2\{w,y,z,x\}'$$
$$\overset{(iv)}{=} [(w,x,y),z] + 4[(w,x,z),y] + [(w,y,x),z] - 2[(w,y,z),x]$$
$$- 3(w,[x,y],z) + [(w,z,y),x] + [(w,z,x),y] + 4\{w,x,y,z\}'$$
$$+ 2\{w,x,z,y\}' - 2\{w,y,x,z\}' + 2\{w,y,z,x\}' - \{w,x,z,y\}'$$
$$+ \{w,z,x,y\}' - \{w,y,z,x\}' + \{w,z,y,x\}'$$
$$\overset{(iv)}{=} [(w,x,y),z] + [(w,x,z),y] + [(w,y,x),z] + [(w,z,y),x]$$
$$[(w,z,y),x] + [(w,z,x),y] + 4\{w,x,y,z\}' + \{w,x,z,y\}'$$

$$
\begin{aligned}
&- 2\{w,y,x,z\}' + \{w,y,z,x\}' + \{w,z,x,y\}' + \{w,z,y,x\}' \\
&- 3\{w,x,y,z\}' + 3\{w,y,x,z\}' \\
= {}& [(w,x,y),z] + [(w,x,z),y] + [(w,y,x),z] + [(w,z,y),x] \\
&[(w,z,y),x] + [(w,z,x),y] + \{w,x,y,z\}' + \{w,x,z,y\}' \\
&+ \{w,y,x,z\}' + \{w,y,z,x\}' + \{w,z,x,y\}' + \{w,z,y,x\}'
\end{aligned}
$$

Notar que la última expresión es invariante al permutar $\{x,y,z\}$, luego se tienen las simetrías buscadas. Claramente, $\Phi_{2,2}(w,x,y,z) = \Phi_{2,2}(w,x,z,y)$ y $\Phi_{2,2}(x,w,y,z) = \Phi_{2,2}(x,w,z,y)$, luego hay que probar que $\Phi_{2,2}(w,x,y,z) = \Phi_{2,2}(x,w,y,z)$.

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{2,2}(w,x,y,z) - \Phi_{2,2}(x,w,y,z) \\
&= 2[(a,c,d),b] + 2[(a,d,c),b] - ([a,b],c,d) - ([a,b],d,c) \\
&\quad + 2\{a,b,c,d\} + 2\{a,b,d,c\} - 2[(b,c,d),a] - 2[(b,d,c),a] \\
&\quad + ([b,a],c,d) + ([b,a],d,c) - 2\{b,a,c,d\} - 2\{b,a,d,c\} \\
&\overset{(iii)}{=} 2([a,b],c,d) - 2[a,(b,c,d)] + 2[b,(a,c,d)] + 2([a,b],d,c) \\
&\quad - 2[a,(b,d,c)] + 2[b,(a,d,c)] + 2[(a,c,d),b] + 2[(a,d,c),b] \\
&\quad - 2[(b,c,d),a] - 2[(b,d,c),a] - 2([a,b],c,d) - 2([a,b],d,c) = 0.
\end{aligned}
$$

Los números que aparecen en las igualdades hacen referencia a las identidades del teorema 3.3.1. Recíprocamente, dada un álgebra de Sabinin de grado 4, si se define

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= -\langle a,b\rangle, \\
(a,b,c) &= \tfrac{1}{2}\big(2\Phi_{1,2}(a,b,c) - \langle a,b,c\rangle\big), \\
\{a,b,c,d\} &= -\widetilde{\mathcal{A}}_2(a,c,d,b) + \tfrac{1}{4}\widetilde{\mathcal{A}}_4(a,b,c,d) + \tfrac{1}{4}\widetilde{\mathcal{A}}_4(a,b,d,c) \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\langle a,b,c,d\rangle + \tfrac{1}{4}\Phi_{2,2}(a,b,c,d), \\
\{a,b,c,d\}' &= -\tfrac{1}{3}\widetilde{\mathcal{A}}_2(a,b,c,d) - \tfrac{2}{3}\widetilde{\mathcal{A}}_2(a,b,d,c) - \tfrac{1}{3}\widetilde{\mathcal{A}}_2(a,c,b,d) \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\widetilde{\mathcal{A}}_2(a,c,d,b) + \tfrac{1}{2}\widetilde{\mathcal{A}}_5(a,b,c,d) + \tfrac{1}{6}\widetilde{\mathcal{A}}_5(a,b,d,c) \\
&\quad + \tfrac{1}{6}\widetilde{\mathcal{A}}_5(a,c,d,b) + \tfrac{1}{3}\widetilde{\mathcal{A}}_6(a,b,c,d) + \tfrac{1}{3}\widetilde{\mathcal{A}}_6(a,c,b,d) \\
&\quad - \tfrac{1}{3}\langle a,b,c,d\rangle - \tfrac{1}{3}\langle a,c,b,d\rangle + \tfrac{1}{6}\Phi_{1,3}(a,b,c,d),
\end{aligned}
$$

donde se han rescrito los elementos de Akivis en términos de los operadores de Sabinin:

$$\widetilde{\mathcal{A}}_1(a,b,c,d) = -\langle\langle\langle a,b\rangle,c\rangle,d\rangle,$$

$$\widetilde{\mathcal{A}}_2(a,b,c,d) = -\langle \Phi_{1,2}(a,b,c), d\rangle + \tfrac{1}{2}\langle\langle a,b,c\rangle, d\rangle,$$
$$\widetilde{\mathcal{A}}_3(a,b,c,d) = -\langle\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle\rangle,$$
$$\widetilde{\mathcal{A}}_4(a,b,c,d) = -\Phi_{1,2}(\langle a,b\rangle, c, d) + \tfrac{1}{2}\langle\langle a,b\rangle, c, d\rangle,$$
$$\widetilde{\mathcal{A}}_5(a,b,c,d) = -\Phi_{1,2}(a, \langle b,c\rangle, d) + \tfrac{1}{2}\langle a, \langle b,c\rangle, d\rangle,$$
$$\widetilde{\mathcal{A}}_6(a,b,c,d) = -\Phi_{1,2}(a, b, \langle c,d\rangle) + \tfrac{1}{2}\langle a, b, \langle c,d\rangle\rangle.$$

Estos operadores verifican las identidades de álgebra BTQQ:

$$[a,b] + [b,a] = -\langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle \overset{(4S1)}{=} 0$$

$$\begin{aligned}
&[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b]\\
&\quad - (a,b,c) + (a,c,b) + (b,a,c) - (b,c,a) - (c,a,b) + (c,b,a)\\
&= \langle\langle a,b\rangle, c\rangle + \langle\langle b,c\rangle, a\rangle + \langle\langle c,a\rangle, b\rangle\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\big(- 2\Phi_{1,2}(a,b,c) + \langle a,b,c\rangle + 2\Phi_{1,2}(a,c,b) - \langle a,c,b\rangle + 2\Phi_{1,2}(b,a,c) - \langle b,a,c\rangle\\
&\qquad - 2\Phi_{1,2}(b,c,a) + \langle b,c,a\rangle - 2\Phi_{1,2}(c,a,b) + \langle c,a,b\rangle + 2\Phi_{1,2}(c,b,a) - \langle c,b,a\rangle\big)\\
&\underset{(4S7)}{\overset{(4S2)}{=}} \langle\langle a,b\rangle, c\rangle + \langle\langle b,c\rangle, a\rangle + \langle\langle c,a\rangle, b\rangle + \langle a,b,c\rangle + \langle b,c,a\rangle + \langle c,a,b \overset{(4S5)}{=} 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\{a,b,c,d\} - \{b,a,c,d\}\\
&= -\mathcal{A}_2(a,c,d,b) + \tfrac{1}{4}\mathcal{A}_4(a,b,c,d) + \tfrac{1}{4}\mathcal{A}_4(a,b,d,c) - \tfrac{1}{2}\langle a,b,c,d\rangle + \tfrac{1}{4}\Phi_{2,2}(a,b,c,d)\\
&\quad + \mathcal{A}_2(b,c,d,a) - \tfrac{1}{4}\mathcal{A}_4(b,a,c,d) - \tfrac{1}{4}\mathcal{A}_4(b,a,d,c) + \tfrac{1}{2}\langle b,a,c,d\rangle - \tfrac{1}{4}\Phi_{2,2}(b,a,c,d)\\
&\underset{(4S9)}{\overset{(4S4)}{=}} \tfrac{1}{2}\langle\langle a,b\rangle, c, d\rangle + \tfrac{1}{2}\mathcal{A}_4(a,b,c,d) + \tfrac{1}{2}\mathcal{A}_4(a,b,d,c) - [(a,c,d),b] + [(b,c,d),a]\\
&\underset{(4S7)}{\overset{(4S2)}{=}} \tfrac{1}{2}\langle\langle a,b\rangle, c, d\rangle - \Phi_{1,2}(\langle a,b\rangle, c, d) + [b,(a,c,d)] - [a,(b,c,d)]\\
&= -(\langle a,b\rangle, c, d) + [b,(a,c,d)] - [a,(b,c,d)]\\
&= ([a,b], c, d) + [b,(a,c,d)] - [a,(b,c,d)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\{a,b,c,d\}' - \{a,c,b,d\}'\\
&= -\tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,b,c,d) - \tfrac{2}{3}\mathcal{A}_2(a,b,d,c) - \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,c,b,d) + \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,c,d,b)\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\mathcal{A}_5(a,b,c,d) + \tfrac{1}{6}\mathcal{A}_5(a,b,d,c) + \tfrac{1}{6}\mathcal{A}_5(a,c,d,b) + \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_6(a,b,c,d)\\
&\quad + \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_6(a,c,b,d) - \tfrac{1}{3}\langle a,b,c,d\rangle - \tfrac{1}{3}\langle a,c,b,d\rangle + \tfrac{1}{6}\Phi_{1,3}(a,b,c,d)\\
&\quad + \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,c,b,d) + \tfrac{2}{3}\mathcal{A}_2(a,c,d,b) + \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,b,c,d) - \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,b,d,c)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \tfrac{1}{2}\mathcal{A}_5(a,c,b,d) - \tfrac{1}{6}\mathcal{A}_5(a,c,d,b) - \tfrac{1}{6}\mathcal{A}_5(a,b,d,c) - \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_6(a,c,b,d)\\
&- \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_6(a,b,c,d) + \tfrac{1}{3}\langle a,c,b,d\rangle + \tfrac{1}{3}\langle a,b,c,d\rangle - \tfrac{1}{6}\Phi_{1,3}(a,c,b,d)\\
\overset{(4S8)}{=}\ & -\mathcal{A}_2(a,b,d,c) + \mathcal{A}_2(a,c,d,b) + \tfrac{1}{2}\mathcal{A}_5(a,b,c,d) - \tfrac{1}{2}\mathcal{A}_5(a,c,b,d)\\
=\ & -\mathcal{A}_2(a,b,d,c) + \mathcal{A}_2(a,c,d,b) + \mathcal{A}_5(a,b,c,d)\\
=\ & -[b,(a,c,d)] + (a,[b,c],d) + [c,(a,b,d)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{a,b,c,d\} - \{a,b,d,c\} - \{a,b,c,d\}' + \{a,b,d,c\}'\\
=\ & -\mathcal{A}_2(a,c,d,b) + \tfrac{1}{4}\mathcal{A}_4(a,b,c,d) + \tfrac{1}{4}\mathcal{A}_4(a,b,d,c) - \tfrac{1}{2}\langle a,b,c,d\rangle + \tfrac{1}{4}\Phi_{2,2}(a,b,c,d)\\
&+ \mathcal{A}_2(a,d,c,b) - \tfrac{1}{4}\mathcal{A}_4(a,b,d,c) - \tfrac{1}{4}\mathcal{A}_4(a,b,c,d) + \tfrac{1}{2}\langle a,b,d,c\rangle - \tfrac{1}{4}\Phi_{2,2}(a,b,d,c)\\
&+ \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,b,c,d) + \tfrac{2}{3}\mathcal{A}_2(a,b,d,c) + \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,c,b,d) - \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,c,d,b)\\
&- \tfrac{1}{2}\mathcal{A}_5(a,b,c,d) - \tfrac{1}{6}\mathcal{A}_5(a,b,d,c) - \tfrac{1}{6}\mathcal{A}_5(a,c,d,b) - \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_6(a,b,c,d)\\
&- \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_6(a,c,b,d) + \tfrac{1}{3}\langle a,b,c,d\rangle + \tfrac{1}{3}\langle a,c,b,d\rangle - \tfrac{1}{6}\Phi_{1,3}(a,b,c,d)\\
&- \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,b,d,c) - \tfrac{2}{3}\mathcal{A}_2(a,b,c,d) - \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,d,b,c) + \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,d,c,b)\\
&+ \tfrac{1}{2}\mathcal{A}_5(a,b,d,c) + \tfrac{1}{6}\mathcal{A}_5(a,b,c,d) + \tfrac{1}{6}\mathcal{A}_5(a,d,c,b) + \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_6(a,b,d,c)\\
&+ \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_6(a,d,b,c) - \tfrac{1}{3}\langle a,b,d,c\rangle - \tfrac{1}{3}\langle a,d,b,c\rangle + \tfrac{1}{6}\Phi_{1,3}(a,b,d,c)\\
\underset{(4S8)(4S9)}{\overset{(4S3)}{=}}\ & -\mathcal{A}_2(a,c,d,b) + \mathcal{A}_2(a,d,c,b) - \langle a,b,c,d\rangle - \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,b,c,d)\\
&+ \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,b,d,c) + \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,c,b,d) - \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,c,d,b) - \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,d,b,c) + \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_2(a,d,c,b)\\
&- \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_5(a,b,c,d) + \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_5(a,b,d,c) - \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_5(a,c,d,b) - \tfrac{2}{3}\mathcal{A}_6(a,b,c,d) - \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_6(a,c,b,d)\\
&+ \tfrac{1}{3}\mathcal{A}_6(a,d,b,c) + \tfrac{2}{3}\langle a,b,c,d\rangle + \tfrac{1}{3}\langle a,c,b,d\rangle - \tfrac{1}{3}\langle a,d,b,c\rangle\\
=\ & -\mathcal{A}_2(a,c,d,b) + \mathcal{A}_2(a,d,c,b) - \tfrac{1}{3}\big(\langle a,b,c,d\rangle + \langle a,c,d,b\rangle + \langle a,d,b,c\rangle\big)\\
&+ \tfrac{1}{3}\big(\langle \Phi_{1,2}(a,b,c),d\rangle - \tfrac{1}{2}\langle\langle a,b,c\rangle,d\rangle - \langle \Phi_{1,2}(a,b,d),c\rangle + \tfrac{1}{2}\langle\langle a,b,d\rangle,c\rangle\\
&\qquad - \langle \Phi_{1,2}(a,c,b),d\rangle + \tfrac{1}{2}\langle\langle a,c,b\rangle,d\rangle - \langle \Phi_{1,2}(a,c,d),b\rangle + \tfrac{1}{2}\langle\langle a,c,d\rangle,b\rangle\\
&\qquad + \langle \Phi_{1,2}(a,d,b),c\rangle - \tfrac{1}{2}\langle\langle a,d,b\rangle,c\rangle - \langle \Phi_{1,2}(a,d,c),b\rangle + \tfrac{1}{2}\langle\langle a,d,c\rangle,b\rangle\big)\\
&+ \tfrac{1}{3}\big(\Phi_{1,2}(a,\langle b,c\rangle,d) - \tfrac{1}{2}\langle a,\langle b,c\rangle,d\rangle - \Phi_{1,2}(a,\langle b,d\rangle,c)\\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\langle a,\langle b,d\rangle,c\rangle + \Phi_{1,2}(a,\langle c,d\rangle,b) - \tfrac{1}{2}\langle a,\langle c,d\rangle,b\rangle\big)\\
&+ \tfrac{1}{3}\big(2\Phi_{1,2}(a,b,\langle c,d\rangle) - \langle a,b,\langle c,d\rangle\rangle + \Phi_{1,2}(a,c,\langle b,d\rangle)\\
&\qquad - \tfrac{1}{2}\langle a,c,\langle b,d\rangle\rangle - \Phi_{1,2}(a,d,\langle b,c\rangle) + \tfrac{1}{2}\langle a,d,\langle b,c\rangle\rangle\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mathcal{A}_2(a,c,d,b) + \mathcal{A}_2(a,d,c,b) \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\big(\langle\langle a,d,b\rangle,c\rangle + \langle a,\langle d,b\rangle,c\rangle + \langle\langle a,b,c\rangle,d\rangle \\
&\qquad + \langle a,\langle b,c\rangle,d\rangle + \langle\langle a,c,d\rangle,b\rangle + \langle a,\langle c,d\rangle,b\rangle\big) \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\big(-\langle\langle a,b,c\rangle,d\rangle - \langle\langle a,c,d\rangle,b\rangle - \langle\langle a,d,b\rangle,c\rangle\big) \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\big(3\Phi_{1,2}(a,b,\langle c,d\rangle) - \langle a,\langle b,c\rangle,d\rangle - \langle a,\langle d,b\rangle c\rangle - \tfrac{1}{2}\langle a,b,\langle c,d\rangle\rangle\big) \\
&= -\mathcal{A}_2(a,c,d,b) + \mathcal{A}_2(a,d,c,b) + \Phi_{1,2}(a,b,\langle c,d\rangle) - \tfrac{1}{2}\langle a,b,\langle c,d\rangle\rangle \\
&= -\mathcal{A}_2(a,c,d,b) + \mathcal{A}_2(a,d,c,b) - \mathcal{A}_6(a,b,c,d) \\
&= [b,(a,c,d)] - [b,(a,d,c)] - (a,b,[c,d]).
\end{aligned}
$$

□

3.4. Álgebras tangentes a lazos monoasociativos

De acuerdo con la tabla 3.3, las álgebras tangentes a lazos monoasociativos pueden definirse en términos de las identidades polinomiales que satisfacen el conmutador, el asociador y el primer cuaternador en el álgebra libre asociativa en las potencias. Debido a un resultado de Albert [Alb48], sabemos que un álgebra no asociativa sobre un cuerpo de característica cero es asociativa en las potencias si y solo si verifica las identidades

$$(a,a,a) \equiv 0, \qquad (a^2,a,a) \equiv 0,$$

que llamaremos asociatividad en la tercera y cuarta potencias respectivamente. Esta caracterización es muy útil desde el punto de vista computacional, ya que reduce una colección infinita de condiciones a dos, simplificando los cálculos.

Lema 3.4.1. *En un álgebra asociativa en las potencias, toda identidad de grado 3 verificada por el conmutador y el asociador es consecuencia de*

$$
\begin{aligned}
&(a,b,c) + (a,c,b) + (b,a,c) + (b,c,a) + (c,a,b) + (c,b,a) \equiv 0, \\
&[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] \equiv 2(a,b,c) + 2(b,c,a) + 2(c,a,b).
\end{aligned}
$$

Demostración. Las dos identidades se verifican en un álgebra asociativa en las potencias: la primera identidad es la linearización de la asociatividad en la tercera potencia y la segunda identidad es la suma de la primera con la identidad de Akivis. Comprobamos ahora que toda identidad de grado 3 es consecuencia de estas dos. Para ello, primero construimos una matriz por bloques $E = \left[\begin{array}{c|c} T & O \\ \hline X & I \end{array}\right]$, de tamaño 10×21, donde las 12 columnas de T se corresponden con los monomios multilineales no asociativos de grado 3

$$(ab)c,\ (ac)b,\ (ba)c,\ (bc)a,\ (ca)b,\ (cb)a,\ a(bc),\ a(cb),\ b(ac),\ b(ca),\ c(ab),\ c(ba),$$

y las 9 columnas del bloque derecho se corresponden con los monomios binario-ternarios multilineales

$$[[a,b],c],\ [[a,c],b],\ [[b,c],a],\ (a,b,c),\ (a,c,b),\ (b,a,c),\ (b,c,a),\ (c,a,b),\ (c,b,a).$$

T contiene una sola fila, el vector de coeficientes de la linearización de la asociatividad en la tercera potencia (notar que esta identidad es totalmente simétrica en a, b, c, por lo que al aplicar todas las permutaciones de las variables siempre obtenemos la misma identidad). X tiene como filas los vectores de coeficientes de las expansiones de los monomios binario-ternarios multilineales en el álgebra libre no asociativa. O es el vector cero.

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|ccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

Aplicamos reducción gausiana a la matriz E e identificamos las filas cuyo primer coeficiente no nulo esté situado en la parte derecha de la matriz.

$$
\left[\begin{array}{cccccccccccc|ccccccccc}
1&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&-1&1&0&1&-1&0&-2&-1&0&0&-2\\
0&1&0&0&0&0&0&0&-1&1&-1&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&-1&0&-1&1&0&1&-1&0&-1&0&1&1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&-1&1&-1&0&0&1&0&0&-1&0&0&1&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&1&0&2&2&0&0&2\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1
\end{array}\right]
$$

Notar que las filas identificadas (las dos últimas) contienen los vectores de coeficientes de las identidades que aparecen en el enunciado del lema. □

Lema 3.4.2. *Toda extensión a grado 4 de la identidad asociativa en la tercera potencia es consecuencia de las siguientes identidades:*

$$\mathcal{T}_1(a,b,c,d) = (ad,b,c) + (ad,c,b) + (b,ad,c) + (b,c,ad) + (c,ad,b) + (c,b,ad),$$

$$\mathcal{T}_2(a,b,c,d) = (a,b,c)d + (a,c,b)d + (b,a,c)d + (b,c,a)d + (c,a,b)d + (c,b,a)d,$$

$$\mathcal{T}_3(a,b,c,d) = d(a,b,c) + d(a,c,b) + d(b,a,c) + d(b,c,a) + d(c,a,b) + d(c,b,a).$$

Demostración. Para extender la linearización de la identidad asociativa en la tercera potencia

$$(a,b,c) + (a,c,b) + (b,a,c) + (b,c,a) + (c,a,b) + (c,b,a) \equiv 0$$

a grado 4 debemos hacer tres sustituciones y dos multiplicaciones (ver definición 3.1.11). Debido a la simetría que presenta la identidad, las tres sustituciones son equivalentes, luego basta considerar una de ellas: $\mathcal{T}_1(a,b,c,d)$. Las multiplicaciones no son equivalentes y corresponden con las identidades $\mathcal{T}_2(a,b,c,d)$ y $\mathcal{T}_3(a,b,c,d)$. □

Lema 3.4.3. *En un álgebra asociativa en la tercera potencia el segundo cuaternador es redundante: $\mathcal{Q}_2(a,b,c,d)$ es consecuencia de $\mathcal{Q}_1(a,b,c,d)$, los elementos de Akivis y las consecuencias en grado 4 de la asociatividad en la tercera potencia.*

Demostración. Para probar este resultado procedemos como en la última parte de la demostración del teorema 3.3.1: calculamos el rango de la matriz obtenida al procesar $\mathcal{Q}_1$, los elementos de Akivis y las consecuencias en grado 4 de la asociatividad en la tercera potencia, procesamos $\mathcal{Q}_2$ y comparamos los rangos obtenidos.

Construimos una matriz por bloques $\left[\begin{array}{c} A \\ \hline B \end{array}\right]$. A tiene tamaño 120×120 y B, 24×120. Las columnas se corresponden con los monomios multilineales no asociativos en grado 4 (24 permutaciones de las 4 variables en cada uno de los 5 tipos de asociación). Procesamos las siguientes identidades en el orden dado: las tres consecuencias de la asociatividad en la tercera potencia que aparecen el el lema 3.4.2, los seis elementos de Akivis 3.2.1 y los dos cuaternadores 3.2.3. Recordar que procesar en este contexto significa que para cada identidad aplicamos todas las permutaciones de variables, las expresamos en la base $\mathcal{B}$, introducimos los 24 vectores de coeficientes como filas de B y hacemos reducción gausiana. Obtenemos la siguiente secuencia de rangos: 12, 16, 20, 32, 46, 49, 61, 73, 73, 82, 82. Al procesar $\mathcal{Q}_2(a,b,c,d)$ el rango no aumenta, por lo que concluimos que pertenece al S_4-módulo generado por los otros elementos; es decir, es consecuencia de ellos. □

Nota 3.4.4. Notar que, en la demostración anterior, al procesar el sexto elemento de Akivis $\mathcal{A}_6(a,b,c,d)$ el rango tampoco aumenta. Esto significa que la asociatividad en la tercera potencia hace que $\mathcal{A}_6(a,b,c,d)$ sea consecuencia de los demás elementos de Akivis.

Nota 3.4.5. Podemos obtener una fórmula explícita para $\mathcal{Q}_2$ en términos de las consecuencias de la asociatividad en la tercera potencia, los elementos de Akivis y $\mathcal{Q}_1$.

Para ello, construimos una matriz $E = [B_1 \mid \cdots \mid B_{10}]$ que contiene 10 bloques de tamaño 120×24. Las filas se corresponden con los monomios no asociativos de grado 4. Las columnas contienen los vectores de coeficientes de todas las permutaciones del primer cuaternador, los elementos de Akivis y las consecuencias en grado 4 de la asocitividad en la tercera potencia (un bloque para cada identidad).

Aplicamos reducción gausiana a E e identificamos las columnas que contienen que contienen el primer elemento no nulo de las filas no nulas. Estas 82 columnas forman una base del espacio de columnas de E, es decir, una base del S_4-submódulo generado por las identidades procesadas.

Ahora construimos una matriz 120×83, en cuyas 82 primeras columnas introducimos los vectores de la base del espacio de columnas de E que hemos hallado. En la columna 83 introducimos el vector de coordenadas de $\mathcal{Q}_2$ en la base de monomios multilineales no asociativos. Aplicamos reducción gausiana, tras lo que la última columna contiene el vector de coeficientes de $\mathcal{Q}_2$ con respecto a la base del espacio de columnas. Esta expresión para $\mathcal{Q}_2$ tiene 54 términos:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4}\big(3\mathcal{Q}_1(a,b,c,d) - \mathcal{Q}_1(a,b,d,c) + \mathcal{Q}_1(a,c,b,d) - \mathcal{Q}_1(a,c,d,b) + 3\mathcal{Q}_1(a,d,b,c) \\
&\quad - \mathcal{Q}_1(a,d,c,b) - \mathcal{Q}_1(b,c,a,d) - 3\mathcal{Q}_1(b,d,a,c) + 2\mathcal{Q}_1(c,a,d,b) + \mathcal{Q}_1(c,b,a,d) \\
&\quad - 2\mathcal{Q}_1(c,b,d,a) - \mathcal{Q}_1(c,d,a,b) - 2\mathcal{Q}_1(d,a,b,c) + 2\mathcal{Q}_1(d,a,c,b) + 3\mathcal{Q}_1(d,b,a,c) \\
&\quad - 2\mathcal{Q}_1(d,b,c,a) - \mathcal{Q}_1(d,c,a,b) - 2\mathcal{A}_1(a,d,b,c) + 2\mathcal{A}_1(a,d,c,b) - \mathcal{A}_1(b,c,d,a) \\
&\quad + 2\mathcal{A}_1(b,d,a,c) - \mathcal{A}_1(b,d,c,a) - \mathcal{A}_1(c,d,b,a) + 2\mathcal{A}_2(a,b,c,d) - 2\mathcal{A}_2(a,c,b,d) \\
&\quad + 4\mathcal{A}_2(a,c,d,b) - 2\mathcal{A}_2(b,a,c,d) + 2\mathcal{A}_2(b,c,a,d) - 2\mathcal{A}_2(b,d,c,a) + 2\mathcal{A}_2(c,d,b,a) \\
&\quad + 4\mathcal{A}_2(d,a,c,b) - 2\mathcal{A}_2(d,b,c,a) + 2\mathcal{A}_3(a,c,b,d) + 2\mathcal{A}_3(a,d,b,c) + 2\mathcal{A}_5(a,b,c,d) \\
&\quad + 2\mathcal{A}_5(a,b,d,c) - \mathcal{A}_5(b,a,c,d) - \mathcal{A}_5(b,a,d,c) + \mathcal{A}_5(c,a,b,d) + \mathcal{A}_5(c,a,d,b) \\
&\quad - 2\mathcal{A}_5(c,b,d,a) + \mathcal{A}_5(d,a,b,c) - \mathcal{A}_5(d,a,c,b) + 2\mathcal{A}_6(a,b,c,d) - 2\mathcal{A}_6(a,c,b,d) \\
&\quad + 2\mathcal{A}_6(b,c,a,d) - \mathcal{T}_1(a,b,c,d) + \mathcal{T}_1(a,b,d,c) - \mathcal{T}_1(a,c,d,b) + 2\mathcal{T}_1(b,a,c,d) \\
&\quad - \mathcal{T}_2(a,b,c,d) - \mathcal{T}_2(a,b,d,c) - \mathcal{T}_2(a,c,d,b) + \mathcal{T}_2(b,c,d,a)\big).
\end{aligned}
$$

En el siguiente teorema se dan las identidades de grado 4 que satisfacen el conmutador, el asociador y el primer cuaternador en un álgebra asociativa en las potencias. Estas identidades definen una nueva variedad de álgebras no asociativas con multioperadores que generalizan las álgebras de Lie, Malcev y Bol.

Teorema 3.4.6. *En un álgebra asociativa en las potencias toda identidad de grado 4 verificada por el conmutador, el asociador y el primer cuaternador es consecuencia de la antisimetría del conmutador, las dos identidades del lema 3.4.1 y las siguientes cuatro identidades:*

$$[(a,b,c),d] - [(d,b,c),a] - ([a,d],b,c) + \{a,d,b,c\} - \{d,a,b,c\} \equiv 0,$$

$$
\begin{aligned}
&(a,[b,c],d) - (a,[b,d],c) + (a,[c,d],b) - (a,b,[c,d]) + (a,c,[b,d]) - (a,d,[b,c]) \\
&\quad - \{a,b,c,d\} + \{a,b,d,c\} + \{a,c,b,d\} - \{a,c,d,b\} - \{a,d,b,c\} + \{a,d,c,b\} \equiv 0,
\end{aligned}
$$

$$[(a,b,c),d] - [(a,d,c),b] - [(c,b,a),d] + [(c,d,a),b] + [(b,a,d),c] - [(b,c,d),a]$$

$$
\begin{aligned}
&- [(d,a,b),c] + [(d,c,b),a] - ([a,b],c,d) - ([a,d],b,c) - ([c,b],d,a) - ([c,d],a,b) \\
&- (a,[c,b],d) - (c,[a,d],b) - (b,[c,d],a) - (d,[a,b],c) - (a,b,[c,d]) - (c,d,[a,b]) \\
&- (b,c,[a,d]) - (d,a,[c,b]) \equiv 0, \\
&\sum_\pi \{a^\pi, b^\pi, c^\pi, d^\pi\} \equiv 0,
\end{aligned}
$$

donde π recorre todas las permutaciones de las variables $\{a,b,c,d\}$.

Demostración. Primero comprobamos que las identidades de grado 4 se verifican en cualquier álgebra asociativa en las potencias. Notar que la primera identidad es una permutación de variables de (iii) en el teorema 3.3.1. Las igualdades, salvo que se indique lo contrario, provienen de extender el conmutador, el asociador y el primer cuaternador en el álgebra libre y de simplificar términos.

$$
\begin{aligned}
&(a,[b,c],d) - (a,[b,d],c) + (a,[c,d],b) - (a,b,[c,d]) + (a,c,[b,d]) - (a,d,[b,c]) \\
&\quad - \{a,b,c,d\} + \{a,b,d,c\} + \{a,c,b,d\} - \{a,c,d,b\} - \{a,d,b,c\} + \{a,d,c,b\} \\
&= (c(ab))d - c((ab)d) - (c(ba))d + c((ba)d) - (c(ad))b + c((ad)b) \\
&\quad + (c(da))b - c((da)b) + (c(bd))a - c((bd)a) - (c(db))a + c((db)a) \\
&\quad - (ca)(bd) + c(a(bd)) + (ca)(db) - c(a(db)) + (cb)(ad) - c(b(ad)) \\
&\quad - (cb)(da) + c(b(da)) - (cd)(ab) + c(d(ab)) + (cd)(ba) - c(d(ba)) \\
&\quad - ((ca)b)d + (ca)(bd) + c((ab)d) - c(a(bd)) + ((cb)d)a - (c(bd))a \\
&\quad + ((ca)d)b - (ca)(db) - c((ad)b) + c(a(db)) - ((cd)b)a + (c(db))a \\
&\quad + ((cb)a)d - (cb)(ad) - c((ba)d) + c(b(ad)) - ((ca)d)b + (c(ad)b) \\
&\quad - ((cb)d)a + (cb)(da) + c((bd)a) - c(b(da)) + ((cd)a)b - (c(da))b \\
&\quad - ((cd)a)b + (cd)(ab) + c((da)b) - c(d(ab)) + ((ca)b)d - (c(ab))d \\
&\quad + ((cd)b)a - (cd)(ba) - c((db)a) + c(d(ba)) - ((cb)a)d + (c(ba))d \\
&= c\big((ba)d + (ad)b + (db)a + a(bd) + b(da) + d(ab) \\
&\qquad + (ab)d + a(db) + b(ad) + (bd)a + (da)b + d(ba)\big) \\
&\quad - c\big((ab)d + (da)b + (bd)a + a(db) + b(ad) + d(ba) \\
&\qquad\quad + a(bd) + (ad)b + (ba)d + b(da) + d(ab) + (db)a\big) = 0
\end{aligned}
$$

$$[(a,b,c),d] - [(a,d,c),b] - [(c,b,a),d] + [(c,d,a),b] + [(b,a,d),c]$$

$$
\begin{aligned}
&- [(b,c,d),a] - [(d,a,b),c] + [(d,c,b),a] - ([a,b],c,d) - ([a,d],b,c)\\
&- ([c,b],d,a) - ([c,d],a,b) - (a,[c,b],d) - (c,[a,d],b) - (b,[c,d],a)\\
&- (d,[a,b],c) - (a,b,[c,d]) - (c,d,[a,b]) - (b,c,[a,d]) - (d,a,[c,b])\\
= {} & ((ac)b)d - (a(cb))d - d((ac)b) + d(a(cb)) - ((ad)b)c + (a(db))c\\
&+ c((ad))b - c(a(db)) - ((bc)a)d + (b(ca))d + d((bc)a) - d(b(ca))\\
&+ ((bd)a)c - (b(da))c - c((bd)a) + c(b(da)) + ((ca)d)b - (c(ad))b\\
&- b((ca)d) + b(c(ad)) - ((cb)d)a + (c(bd))a + a((cb)d) - a(c(bd))\\
&- ((da)c)b + (d(ac))b + b((da)c) - b(d(ac)) + ((db)c)a - (d(bc))a\\
&- a((db)c) + a(d(bc)) - ((ac)b)d + (ac)(bd) + ((ca)b)d - (ca)(bd)\\
&- ((ad)c)b + (ad)(cb) + ((da)c)b - (da)(cb) - ((bc)d)a + (bc)(da)\\
&+ ((cb)d)a - (cb)(da) - ((bd)a)c + (bd)(ac) + ((db)a)c - (db)(ac)\\
&- (a(bc))d + a((bc)d) + (a(cb))d - a((cb)d) - (b(ad))c + b((ad)c)\\
&+ (b(da))c - b((da)c) - (c(bd))a + c((bd)a) + (c(db))a - c((db)a)\\
&- (d(ac))b + d((ac)b) + (d(ca))b - d((ca)b) - (ac)(bd) + a(c(bd))\\
&+ (ac)(db) - a(c(db)) - (bd)(ac) + b(d(ac)) + (bd)(ca) - b(d(ca))\\
&- (cb)(ad) + c(b(ad)) + (cb)(da) - c(b(da)) - (da)(bc) + d(a(bc))\\
&+ (da)(cb) - d(a(cb))\\
= {} & -(ca)(bd) + (ad)(cb) + (bc)(da) - (db)(ac) + (ac)(db) + (bd)(ca)\\
&- (cb)(ad) - (da)(bc) - ((bc)a)d + (b(ca))d + ((ca)b)d - (a(bc))d\\
&+ d((bc)a) - d(b(ca)) - d((ca)b) + d(a(bc)) - ((ad)b)c + (a(db))c\\
&+ ((db)a)c - (b(ad))c + c((ad)b) - c(a(db)) - c((db)a) + c(b(ad))\\
&+ ((ca)d)b - (c(ad))b - ((ad)c)b + (d(ca))b - b((ca)d) + b(c(ad))\\
&+ b((ad)c) - b(d(ca)) + ((db)c)a - (d(bc))a - ((bc)d)a + (c(db))a\\
&- a((db)c) + a(d(bc)) + a((bc)d) - a(c(db))\\
= {} & d(b,c,a) - (b,c,a)d + c(a,d,b) - (a,d,b)c - b(c,a,d) + (c,a,d)b\\
&- a(d,b,c) + (d,b,c)a + (ca,b,d) - (d,a,bc) + (db,a,c) - (c,b,ad)\\
&- (ad,c,b) + (b,d,ca) - (bc,d,a) + (a,c,db) - (a,bc,d) + (d,ca,b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- (b, ad, c) + (c, db, a) \\
&= d(b,c,a) - (b,c,a)d + c(a,d,b) - (a,d,b)c - b(c,a,d) + (c,a,d)b \\
&\quad - a(d,b,c) + (d,b,c)a - (ca,d,b) - (d,b,ca) - (b,ca,d) + (a,d,bc) \\
&\quad + (bc,a,d) + (d,bc,a) - (db,c,a) - (c,a,db) - (a,db,c) + (b,c,ad) \\
&\quad + (ad,b,c) + (c,ad,b) \\
&\overset{(*)}{=} d(b,c,a) - (b,c,a)d + c(a,d,b) - (a,d,b)c - b(c,a,d) + (c,a,d)b \\
&\quad - a(d,b,c) + (d,b,c)a - (ca,d,b) - (b,ca,d) + (bc,a,d) + (d,bc,a) \\
&\quad - (db,c,a) - (a,db,c) + (ad,b,c) + (c,ad,b) + (db,c,a) - d(b,c,a) \\
&\quad - (d,bc,a) - (d,b,c)a - (ad,b,c) + a(d,b,c) + (a,db,c) + (a,d,b)c \\
&\quad + (ca,d,b) - c(a,d,b) - (c,ad,b) - (c,a,d)b - (bc,a,d) + b(c,a,d) \\
&\quad + (b,ca,d) + (b,c,a)d = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\pi} \{a^\pi, b^\pi, c^\pi, d^\pi\} \\
&= (ab,c,d) - a(b,c,d) - (a,c,d)b + (ab,d,c) - a(b,d,c) - (a,d,c)b \\
&\quad (ac,b,d) - a(c,b,d) - (a,b,d)c + (ac,d,b) - a(c,d,b) - (a,d,b)c \\
&\quad (ad,b,c) - a(d,b,c) - (a,b,c)d + (ad,c,b) - a(d,c,b) - (a,c,b)d \\
&\quad (ba,c,d) - b(a,c,d) - (b,c,d)a + (ba,d,c) - b(a,d,c) - (b,d,c)a \\
&\quad (bc,a,d) - b(c,a,d) - (b,a,d)c + (bc,d,a) - b(c,d,a) - (b,d,a)c \\
&\quad (bd,a,c) - b(d,a,c) - (b,a,c)d + (bd,c,a) - b(d,c,a) - (b,c,a)d \\
&\quad (ca,b,d) - c(a,b,d) - (c,b,d)a + (ca,d,b) - c(a,d,b) - (c,d,b)a \\
&\quad (cb,a,d) - c(b,a,d) - (c,a,d)b + (cb,d,a) - c(b,d,a) - (c,d,a)b \\
&\quad (cd,a,b) - c(d,a,b) - (c,a,b)d + (cd,b,a) - c(d,b,a) - (c,b,a)d \\
&\quad (da,b,c) - d(a,b,c) - (d,b,c)a + (da,c,b) - d(a,c,b) - (d,c,b)a \\
&\quad (db,a,c) - d(b,a,c) - (d,a,c)b + (db,c,a) - d(b,c,a) - (d,c,a)b \\
&\quad (dc,a,b) - d(c,a,b) - (d,a,b)c + (dc,b,a) - d(c,b,a) - (d,b,a)c \\
&\overset{\mathcal{T}}{=} (ab,c,d) + (ab,d,c) + (ac,b,d) + (ac,d,b) + (ad,b,c) + (ad,c,b) \\
&\quad + (ba,c,d) + (ba,d,c) + (bc,a,d) + (bc,d,a) + (bd,a,c) + (bd,c,a)
\end{aligned}
$$

$$+ (ca, b, d) + (ca, d, b) + (cb, a, d) + (cb, d, a) + (cd, a, b) + (cd, b, a)$$
$$+ (da, b, c) + (da, c, b) + (db, a, c) + (db, c, a) + (dc, a, b) + (dc, b, a) \overset{\mathcal{F}}{=} 0,$$

donde $\mathcal{T}$ y $\mathcal{F}$ significan que aplicamos la asociatividad de las terceras y las cuartas potencias respectivamente. En (*) se ha utilizado la identidad

$$(a, b, cd) = -(ab, c, d) + a(b, c, d) + (a, bc, d) + (a, b, c)d$$

Para completar la demostración, necesitamos probar que toda identidad verificada por el conmutador, el asociador y el primer cuaternador en un álgebra asociativa en las potencias es consecuencia de las identidades mencionadas en el enunciado del teorema. Lo probamos con ayuda de Maple, siguiendo las ideas básicas del lema 3.4.1. Hay siete tipos de asociación en grado 4 para $\Omega = \{[-, -], (-, -, -), \{-, -, -, -\}\}$:

$$[[[a, b], c], d], \qquad [(a, b, c), d], \qquad [[a, b], [c, d]], \qquad ([a, b], c, d),$$
$$(a, [b, c], d), \qquad (a, b, [c, d]), \qquad \{a, b, c, d\}.$$

Debido a la antisimetría del conmutador, estos elementos admiten, respectivamente, 12, 24, 3, 12, 12, 12 y 24 permutaciones que den lugar a monomios linealmente independientes, que llamaremos monomios BTQ (haciendo referencia a una operación binaria, una ternaria y una cuaternaria). Un álgebra asociativa en las potencias verifica las siguientes multilineales identidades de grado 4: las extensiones a grado 4 de la asociatividad en la tercera potencia $\mathcal{T}_i(a, b, c, d)$, $i = 1, 2, 3$ y la linearización de la asociatividad en la cuarta potencia $\mathcal{F}(a, b, c, d)$. La simetría de estas identidades hace que una base (como espacio vectorial) del S_4-submódulo generado por estas identidades esté formado por las 24 permutaciones de $\mathcal{T}_1$, las cuatro permutaciones cíclicas de $\mathcal{T}_2$ y $\mathcal{T}_3$ y la permutación identidad de $\mathcal{F}$.

Primero calculamos el S_4-módulo formado por todas las identidades multilineales de grado 4 verificadas por el conmutador, el asociador y el primer cuaternador en el álgebra asociativa en las potencias libre. Análogamente a lo visto en la demostración del lema 3.4.1, construimos una matriz por bloques $E = \left[\begin{array}{c|c} TF & O \\ \hline X & I \end{array}\right]$. La parte izquierda de E consta de 120 columnas, correspondientes a los monomios no asociativos multilineales. La parte derecha de E tiene 99 columnas, correspondientes a los monomios BTQ multilineales. El bloque TF contiene las identidades multilineales de grado 4 verificadas por las álgebras asociativas en las potencias ($\mathcal{T}_i$ y $\mathcal{F}$). El bloque X contiene los vectores de coeficientes de las expansiones de los monomios BTQ multilineales en el álgebra no asociativa libre usando las definiciones de conmutador, asociador y primer cuaternador. Los bloques I y O son las matrices identidad y cero respectivamente.

Como todas las entradas de E son enteros, podemos calcular la forma normal de Hermite de E sobre $\mathbb{Z}$ en lugar de aplicar reducción gausiana como anteriormente, ya que este método es más eficiente. Tras la reducción, seleccionamos las filas de E que tengan el primer elemento no nulo en el bloque derecho. Estas 38 filas forman una base del retículo de las identidades polinomiales con coeficientes enteros verificadas por las tres operaciones en un álgebra asociativa en las potencias. Aplicamos el algoritmo LLL de reducción de bases descrito en la introducción a estos 38 vectores y después ordenamos el resultado por norma euclídea creciente.

Ahora debemos determinar cuántas (y cuáles) de estas identidades son "nuevas", es decir, no son consecuencia de las extensiones de las identidades ya conocidas en grado 3 (halladas en el lema 3.4.1). Para ello, procedemos de manera análoga a la demostración del lema 3.4.1: construimos una matriz por bloques $\left[\begin{array}{c} A \\ \hline B \end{array}\right]$, procesamos en A las identidades $\mathcal{F}_i$ y $\mathcal{T}$ (porque trabajamos en un álgebra asociativa en las potencias) y las extensiones de las identidades conocidas a grado 4 para hallar así una base del S_4-submódulo formado por las identidades conocidas. Después procesamos las 38 identidades obtenidas, seleccionamos las que aumentan el rango de la matriz y nos quedamos con las que son independientes, que son una base del S_4-módulo cociente. Estas identidades son las que aparecen en el enunciado del teorema. $\square$

Definición 3.4.7. Un **álgebra BTQ** es un espacio vectorial con una operación bilineal anticonmutativa $[a, b]$, una operación trilineal (a, b, c) y una operación cuatrilineal $\{a, b, c, d\}$ que satisfacen las identidades del lema 3.4.1 y del teorema 3.4.6.

Nota 3.4.8. Para comprobar que las álgebras BTQ generalizan a las álgebras de Lie, Malcev y Bol basta con demostrar que un álgebra de Bol $(B, [-,-], [-,-,-])$ es un álgebra BTQ. Las operaciones

$$[a, b]_{BTQ} = [a, b]$$

$$(a,b,c) = \tfrac{1}{2}[a,b,c] - \tfrac{1}{2}[a,[b,c]]$$
$$\{a,b,c,d\} = \tfrac{1}{2}\big(- [a,b,[c,d]] + [a,[b,[c,d]]]\big)$$

definidas en B verifican los axiomas de álgebra BTQ: las identidades del lema 3.4.1 y del teorema 3.4.6

$$\begin{aligned}
&(a,b,c) + (a,c,b) + (b,a,c) + (b,c,a) + (c,a,b) + (c,b,a)\\
&= \tfrac{1}{2}\big([a,b,c] - [a,[b,c]] + [a,c,b] - [a,[c,b]] + [b,a,c] - [b,[ac]]\\
&\qquad + [b,c,a] - [b,[c,a]] + [c,a,b] - [c,[a,b]] + [c,b,a] - [c,[b,a]]\big) \underset{(B2)}{\overset{(a)}{=}} 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2(a,b,c) + 2(b,c,a) + 2(c,a,b)\\
&= [a,b,c] - [a,[b,c]] + [b,c,a] - [b,[c,a]] + [c,a,b] - [c,[a,b]]\\
&\overset{(B2)}{=} [[b,c],a] + [[c,a],b] + [[a,b],c]\\
&= [[a,b]_{BTQ},c]_{BTQ} + [[b,c]_{BTQ},a]_{BTQ} + [[c,a]_{BTQ},b]_{BTQ}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[(a,b,c),d]_{BTQ} - [(d,b,c),a]_{BTQ} - ([a,d]_{BTQ},b,c) + \{a,d,b,c\} - \{d,a,b,c\}\\
&= \tfrac{1}{2}\big([[a,b,c],d] - [[a,[b,c]],d] - [[d,b,c],a] + [[d,[b,c]],a] - [[a,d],b,c]\\
&\qquad + [[a,d],[b,c]] - [a,d,[b,c]] + [a,[d,[b,c]]] + [d,a,[b,c]] - [d,[a,[b,c]]]\big)\\
&\overset{(B4)}{=} \tfrac{1}{2}\big([[a,b,c],d] + [d,[a,[b,c]]] - [[d,b,c],a] - [a,[d,[b,c]]] - [[a,d],b,c]\\
&\qquad\quad - [a,d,[b,c]] + [a,[d,[b,c]]] + [d,a,[b,c]] - [d,[a,[b,c]]] - [[a,d],c,b]\\
&\qquad\quad + [[a,c,b],d] - [[d,c,b],a] + [[c,b],a,d]\big)\\
&= \tfrac{1}{2}\big(- [a,d,[b,c]] - [d,[b,c],a] - [[b,c],a,d]\big) \overset{(B2)}{=} 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(a,[b,c]_{BTQ},d) - (a,[b,d]_{BTQ},c) + (a,[c,d]_{BTQ},b) - (a,b,[c,d]_{BTQ})\\
&+ (a,c,[b,d]_{BTQ}) - (a,d,[b,c]_{BTQ}) - \{a,b,c,d\} + \{a,b,d,c\}\\
&+ \{a,c,b,d\} - \{a,c,d,b\} - \{a,d,b,c\} + \{a,d,c,b\}\\
&= \tfrac{1}{2}\big([a,[b,c],d] - [a,[[b,c],d]] - [a,[b,d],c] + [a,[[b,d],c] + [a,[c,d],b]\\
&\qquad - [a,[[c,d],b]] - [a,b,[c,d]] + [a,[b,[c,d]]] + [a,c,[b,d]] - [a,[c,[b,d]]]\\
&\qquad - [a,d,[b,c]] + [a,[d,[b,c]]] + [a,b,[c,d]] - [a,[b,[c,d]]] - [a,b,[d,c]]\\
&\qquad + [a,[b,[d,c]]] - [a,c,[b,d]] + [a,[c,[b,d]]] + [a,c,[d,b]] - [a,[c,[d,b]]]\\
&\qquad + [a,d,[b,c]] - [a,[d,[b,c]]] - [a,d,[c,b]] + [a,[d,[c,b]]]\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}\big([a,[b,c],d] + [a,c,[b,d]] - [a,b,[c,d]] \\
&\qquad + [a,b,[c,d]] + [a,c,[d,b]] - [a,[b,c],d]\big) \underset{(B1)}{\overset{(a)}{=}} 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[(a,b,c),d]_{BTQ} - [(a,d,c),b]_{BTQ} - [(c,b,a),d]_{BTQ} + [(c,d,a),b]_{BTQ} \\
&+ [(b,a,d),c]_{BTQ} - [(b,c,d),a]_{BTQ} - [(d,a,b),c]_{BTQ} + [(d,c,b),a]_{BTQ} \\
&- ([a,b]_{BTQ},c,d) - ([a,d]_{BTQ},b,c) - ([c,b]_{BTQ},d,a) - ([c,d]_{BTQ},a,b) \\
&- (a,[c,b]_{BTQ},d) - (c,[a,d]_{BTQ},b) - (b,[c,d]_{BTQ},a) - (d,[a,b]_{BTQ},c) \\
&- (a,b,[c,d]_{BTQ}) - (c,d,[a,b]_{BTQ}) - (b,c,[a,d]_{BTQ}) - (d,a,[c,b]_{BTQ}) \\
&= \tfrac{1}{2}\big([[a,b,c],d] - [[a,[b,c]],d] - [[a,d,c],b] + [[a,[d,c]],b] \\
&\qquad - [[c,b,a],d] + [[c,[b,a]],d] + [[c,d,a],b] - [[c,[d,a]],b] \\
&\qquad + [[b,a,d],c] - [[b,[a,d]],c] - [[b,c,d],a] + [[b,[c,d]],a] \\
&\qquad - [[d,a,b],c] + [[d,[a,b]],c] + [[d,c,b],a] - [[d,[c,b]],a] \\
&\qquad - [[a,b],c,d] + [[a,b],[c,d]] - [[a,d],b,c] + [[a,d],[b,c]] \\
&\qquad - [[c,b],d,a] + [[c,b],[d,a]] - [[c,d],a,b] + [[c,d],[a,b]] \\
&\qquad - [a,[c,b],d] + [a,[[c,b],d]] - [c,[a,d],b] + [c,[[a,d],b]] \\
&\qquad - [b,[c,d],a] + [b,[[c,d],a]] - [d,[a,b],c] + [d,[[a,b],c]] \\
&\qquad - [a,b,[c,d]] + [a,[b,[c,d]]] - [c,d,[a,b]] + [c,[d,[a,b]]]\big) \\
&\underset{(B1)(B2)}{\overset{(a)}{=}} \tfrac{1}{2}\big(- [[b,c,a],d] + [[d,c,a],b] + [[a,b,d],c] + [[c,d,b],a] \\
&\qquad\qquad + [c,d,[a,b]] + [d,a,[c,b]] + [[a,d],b,c] + [[c,d],a,b] \\
&\qquad\qquad - [c,d,[a,b]] - [d,a,[c,b]] - [[c,d],a,b] - [[a,d],b,c]\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(- [[b,c,a],d] + [[d,c,a],b] + [[a,b,d],c] + [[c,d,b],a]\big) \\
&\overset{(B4)}{=} \tfrac{1}{2}\big([[d,b],a,c] + [[c,a],d,b] + [[d,b],[c,a]] \\
&\qquad + [[a,c],d,b] + [[b,d],a,c] + [[a,c],[b,d]] \overset{(a)}{=} 0,
\end{aligned}
$$

donde si no se dice nada las igualdades se siguen desarrollando las operaciones y simplificando y (a) hace referencia a la anticonmutatividad del conmutador $[-,-]$. La identidad $\sum_\pi \{a^\pi, b^\pi, c^\pi, d^\pi\} \equiv 0$ se deduce la anticonmutatividad de $[-,-]$, ya que implica que $\{a,b,c,d\} = -\{a,b,d,c\}$.

3.5. Identidades especiales en álgebras BTQ

En el contexto de variedades de álgebras que aparecen al definir operadores en álgebras libres, existe un tipo de identidades de gran interés, que no son consecuencia de las identidades que definen a la variedad pero se verifican en el álgebra libre con la nueva estructura. Este tipo de identidades han sido estudiadas en álgebras de Jordan, quasi-Jordan y de Bol [BP11, Hen79, HP11] y se denominan identidades especiales identidad (polinomial)!especial.

Definición 3.5.1. Una **identidad especial en un álgebra BTQ** es una identidad que no es consecuencia de las identidades de la definición 3.4.7 pero que sí se verifica en un álgebra asociativa en las potencias libre definiendo el conmutador $[a, b] = ab - ba$, el asociador $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ y el cuaternador $\{a, b, c, d\} = (ab, c, d) - a(b, c, d) - (a, c, d)b$, donde ab denota el producto binario del álgebra asociativa en las potencias libre.

Teorema 3.5.2. *El conmutador, el asociador y el primer cuaternador en un álgebra asociativa en las potencias verifican la siguiente identidad no lineal*

$$[(a, [a, b], a), a] - [\{a, a, a, b\}, a] + [\{a, b, a, a\}, a] \equiv 0,$$

que no es consecuencia de las identidades que definen las álgebras BTQ.

Demostración. Hay siete representaciones irreducibles distintas (no isomorfas) del grupo simétrico S_5, de dimensiones $d = 1, 4, 5, 6, 5, 4, 1$ correspondientes a las particiones $\lambda = 5$, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1. Las matrices de representación $\rho_i(\pi)$ $(1 \leq i \leq 7)$ vienen dadas por las proyecciones en los correspondientes ideales simples en la suma directa de la descomposición del álgebra grupo:

$$\mathbb{Q}S_5 = \mathbb{Q} \oplus M_4(\mathbb{Q}) \oplus M_5(\mathbb{Q}) \oplus M_6(\mathbb{Q}) \oplus M_5(\mathbb{Q}) \oplus M_4(\mathbb{Q}) \oplus \mathbb{Q}.$$

Estas matrices de representación se calculan aplicando el método descrito en [Cli81]. La idea básica de la demostración es descomponer una identidad polinomial multilineal en componentes irreducibles correspondientes a las álgebras de matrices en la suma anterior. Dada una identidad polinomial de grado 5 en el álgebra no asociativa libre, primero ordenamos sus términos en los 14 posibles tipos de asociación

$$((((-,-),-),-),-), \qquad (((-,(-,-)),-),-), \qquad (((-,-),(-,-)),-),$$

$$((-,((-,-),-)),-), \quad ((-,(-,(-,-))),-), \quad (((-,-),-),(-,-)),$$
$$((-,(-,-)),(-,-)), \quad ((-,-),((-,-),-)), \quad ((-,-),(-,(-,-))),$$
$$(-,(((-,-),-),-)), \quad (-,((-,(-,-)),-)), \quad (-,((-,-),(-,-))),$$
$$(-,(-,((-,-),-))), \quad (-,(-,(-,(-,-)))).$$

En cada tipo de asociación los términos solo difieren en una permutación de las variables, por lo que la identidad completa puede verse como un elemento de la suma directa de 14 copias del álgebra grupo $\mathbb{Q}S_5$. Para cada partición λ, correspondiente a una representación irreducible de dimensión d, calculamos las matrices de representación de las 14 componentes de la identidad y construimos una matriz $d \times 14d$.

Aplicamos este proceso a las extensiones a grado 5 de las identidades asociativas en las potencias. Usando la definición 3.1.11 extendemos las identidades $\mathcal{T}_i$ y $\mathcal{F}$ a grado 5. Notar que como trabajamos en el álgebra asociativa en las potencias libre, solo podemos extender usando el producto binario no asociativo: dos veces en el caso de $\mathcal{T}_i$ y una para $\mathcal{F}$. Conseguimos así 36 identidades multilineales $P_i(a,b,c,d,e)$ $(1 \leq i \leq 36)$ en grado 5, que son elementos del álgebra libre asociativa en las potencias generada por 5 elementos; todas las identidades multilineales de grado 5 verificadas en un álgebra asociativa en las potencias son consecuencia de estas extensiones. Para cada partición λ, calculamos las matrices de representación de cada una de las identidades y construimos una matriz P de tamaño $36d \times 14d$.

Consideramos ahora los 22 monomios BTQ multilineales básicos en grado 5

$$[[[[a,b],c],d],e], \quad [[(a,b,c),d],e], \quad [[[a,b],[c,d]],e], \quad [([a,b],c,d),e], \quad [(a,[b,c],d),e],$$
$$[(a,b,[c,d]),e], \quad [\{a,b,c,d\},e], \quad [[[a,b],c],[d,e]], \quad [(a,b,c),[d,e]], \quad ([[a,b],c],d,e),$$
$$((a,b,c),d,e), \quad ([a,b],[c,d],e), \quad ([a,b],c,[d,e]), \quad (a,[[b,c],d],e), \quad (a,(b,c,d),e),$$
$$(a,[b,c],[d,e]), \quad (a,b,[[c,d],e]), \quad (a,b,(c,d,e)), \quad \{[a,b],c,d,e\}, \quad \{a,[b,c],d,e\},$$
$$\{a,b,[c,d],e\}, \quad \{a,b,c,[d,e]\}.$$

Denotamos por $X_i(a,b,c,d,e)$ $(1 \leq i \leq 22)$ a las expansiones de estos monomios en el álgebra libre no asociativa usando las definiciones del conmutador, el asociador y el primer cuaternador. Si combinamos las matrices de representación de estos monomios para formar una sola, obtenemos una matriz X de tamaño $22d \times 14d$.

Construimos una matriz por bloques $\left[\begin{array}{c|c} P & O \\ \hline X & I \end{array}\right]$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz cero respectivamente. Aplicamos reducción gausiana a esta matriz e identificamos las filas cuyo primer coeficiente no nulo esté en el bloque derecho. Estas filas representan las identidades polinomiales verificadas por los monomios BTQ: expresan las relaciones de dependencia existentes entre ellos que son consecuencia de su expansión en el álgebra asociativa en las potencias libre. El número de estas filas se muestra en la columna "todas" de la tabla 3.7.

Ahora necesitamos comparar estas identidades con las simetrías de los monomios BTQ que provienen de la antisimetría del conmutador y las extensiones de las identidades BTQ de grados hasta 4. Cada monomio BTQ puede tener 0, 1 o más simetrías, dependiendo del número de conmutadores que contiene. Por ejemplo, el monomio $([a, b], c, [d, e])$ tiene dos antisimetrías que pueden escribirse en el álgebra grupo como $I + T$, donde I es la permutación identidad y T es *bacde* o *abced*. Las dos identidades BTQ de grado 3 (ver lema 3.4.1) se pueden extender a grado 5 de dos maneras no equivalentes: usando dos veces el comutador o usando una vez el asociador. Las identidades BTQ de grado 4 (ver teorema 3.4.6) se extienden a grado 5 usando el conmutador.

Para cada partición λ con representación de tamaño d construimos una matriz con $22d$ columnas que contiene las matrices de representación de las simetrías de los monomios BTQ y las extensiones de las identidades BTQ y aplicamos reducción gausiana. Los rangos obtenidos se muestran en la columna "'sim+ext" de la tabla 3.7.

En la tabla 3.7, la columna "nuevas" indica la diferencia entre las columnas "todas" y "sim+ext". Cuando este valor es cero, comprobamos además que las matrices resultantes de los dos cálculos (al hallar "todas" y al hallar "sim+ext") son exactamente iguales y, por tanto, toda identidad BTQ para estas particiones es consecuencia de las simetrías de los monomios y las extensiones de identidades de menor grado. El único valor no nulo aparece asociado a la partición 4+1 y esto indica la existencia de una nueva identidad.

Como esta nueva identidad aparece en la partición 4+1, esperamos encontrar una identidad no lineal en dos variables: de grado 4 en una variable a y de grado 1 en la otra variable b. Hay 22 monomios BTQ básicos y 5 permutaciones distintas de $\{a, a, a, a, b\}$, luego 110

partición	dimensión	sim+ext	todas	nuevas
5	1	22	22	0
4+1	4	73	74	1
3+2	5	79	79	0
3+1+1	6	93	93	0
2+2+1	5	72	72	0
2+1+1+1	4	56	56	0
1+1+1+1+1	1	14	14	0

Tabla 3.7: Rangos para las identidades BTQ en grado 5

monomios que pueden aparecer como términos de la nueva identidad. Muchos de ellos son cero debido a las identidades $[a, a] = 0$, $(a, a, a) = 0$ y $\{a, a, a, a\} = 0$; eliminándolos, nos quedan 49. Ahora seguimos la misma técnica que en la demostración del teorema 3.4.6 pero usando monomios no lineales: calculamos la forma normal de Hermite de la matriz y extraemos el bloque inferior de la matriz resultante, cuyas filas representan una base de las identidades verificadas por los 49 monomios. Dividimos cada fila por el máximo común divisor de sus elementos y aplicamos el algoritmo LLL de reducción de bases de retículos al retículo generado por las filas. Todos los elementos de la base reducida excepto uno representan identidades que son consecuencia de extensiones de identidades de menor grado excepto la identidad del enunciado.

Comprobamos que esta identidad es independiente de las extensiones de las identidades de menor grado de la siguiente manera: linearizamos la identidad y volvemos a construir las matrices de representación de las simetrías y las extensiones, añadiendo las correspondientes a esta nueva. Las matrices que obtenemos al aplicar reducción gausiana son exactamente las mismas que las obtenidas al hallar “todas”. □

Nota 3.5.3. Una prueba directa de que esta identidad se verifica en toda álgebra asociativa en las potencias está dada por la siguiente fórmula:

$$[(a, [a, b], a), a] - [\{a, a, a, b\}, a] + [\{a, b, a, a\}, a] =$$

$$\tfrac{1}{30}\big(3T((ab)a, a, a) - 12T((aa)b, a, a) + 6T((aa)a, a, b) + 3T((ba)a, a, a)$$

$$
\begin{aligned}
&+ 6T(aa, ab, a) - 12T(aa, aa, b) + 6T(aa, ba, a) + 3T(a(ab), a, a) \\
&+ 3T(a(ba), a, a) + 6T(a(aa), a, b) - 12T(b(aa), a, a) + 3T(aa, a, a)b \\
&- 12T(ab, a, a)a + 6T(aa, a, b)a + 3T(ba, a, a)a - 3bT(aa, a, a) \\
&+ 12aT(ab, a, a) - 6aT(aa, a, b) - 3aT(ba, a, a) + 2(T(a, a, a)a)b \\
&+ 7(T(a, a, a)b)a - 9(T(a, a, b)a)a - 2b(T(a, a, a)a) - 7a(T(a, a, a)b) \\
&+ 9a(T(a, a, b)a) - F(a, a, a, a)b + F(a, a, a, b)a + bF(a, a, a, a) \\
&- aF(a, a, a, b)\big),
\end{aligned}
$$

donde $T(x, y, z) = \sum_\sigma (x^\sigma, y^\sigma, z^\sigma)$ y $F(w, x, y, z) = \sum_\tau (w^\tau x^\tau, y^\tau, z^\tau)$.

Teorema 3.5.4. *Existe una identidad no lineal de grado 6 en dos variables (de grado 3 en cada una de ellas) que es verificada por el conmutador, el asociador y el primer cuaternador en toda álgebra asociativa en las potencias y no es consecuencia de las identidades que definen las álgebras BTQ ni de la nueva identidad en grado 5 del teorema 3.5.2.*

Demostración. Hacemos los mismos cálculos que en la demostración del teorema 3.5.2, en este caso en grado 6. Hay 11 representaciones irreducibles de S_6, de dimensiones $d = 1$, 5, 9, 10, 5, 16, 10, 5, 9, 5, 1, correspondientes a las particiones $\lambda = 6$, 5+1, 4+2, 4+1+1, 3+3, 3+2+1, 3+1+1+1, 2+2+2, 2+2+1+1, 2+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1, por lo que la descomposición de Wedderburn en este caso queda:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Q}S_6 =& \mathbb{Q} \oplus M_5(\mathbb{Q}) \oplus M_9(\mathbb{Q}) \oplus M_{10}(\mathbb{Q}) \oplus M_5(\mathbb{Q}) \oplus M_{16}(\mathbb{Q}) \\
& \oplus M_{10}(\mathbb{Q}) \oplus M_5(\mathbb{Q}) \oplus M_9(\mathbb{Q}) \oplus M_5(\mathbb{Q}) \oplus \mathbb{Q}.
\end{aligned}
$$

En grado 6 hay 42 tipos de asociación

$$
\begin{aligned}
&(((((-,-),-),-),-),-),\ ((((-,(-,-)),-),-),-),\ ((((-,-),(-,-)),-),-), \\
&(((-,((-,-),-)),-),-),\ (((-,(-,(-,-))),-),-),\ ((((-,-),-),(-,-)),-), \\
&(((-,(-,-)),(-,-)),-),\ (((-,-),((-,-),-)),-),\ (((-,-),(-,(-,-))),-), \\
&((-,(((-,-),-),-)),-),\ ((-,((-,(-,-)),-)),-),\ ((-,((-,-),(-,-))),-), \\
&((-,(-,((-,-),-))),-),\ ((-,(-,(-,(-,-)))),-),\ ((((-,-),-),-),(-,-)), \\
&(((-,(-,-)),-),(-,-)),\ (((-,-),(-,-)),(-,-)),\ ((-,((-,-),-)),(-,-)), \\
&((-,(-,(-,-))),(-,-)),\ (((-,-),-),((-,-),-)),\ (((-,-),-),(-,(-,-))),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
((-,(-,-)),((-,-),-)),\ ((-,(-,-)),(-,(-,-))),\ ((-,-),(((-,-),-),-)),\\
((-,-),((-,(-,-)),-)),\ ((-,-),((-,-),(-,-))),\ ((-,-),(-,((-,-),-))),\\
((-,-),(-,(-,(-,-)))),\ (-,((((-,-),-),-),-)),\ (-,(((-,(-,-)),-),-)),\\
(-,(((-,-),(-,-)),-)),\ (-,((-,((-,-),-)),-)),\ (-,((-,(-,(-,-))),-)),\\
(-,(((-,-),-),(-,-))),\ (-,((-,(-,-)),(-,-))),\ (-,((-,-),((-,-),-))),\\
(-,((-,-),(-,(-,-)))),\ (-,(-,(((-,-),-),-))),\ (-,(-,((-,(-,-)),-))),\\
(-,(-,((-,-),(-,-)))),\ (-,(-,(-,((-,-),-)))),\ (-,(-,(-,(-,(-,-)))))
\end{gathered}
$$

y 80 monomios BTQ multilineales básicos

$$
\begin{array}{llll}
[[[[[a,b],c],d],e],f], & [[[(a,b,c),d],e],f], & [[[[a,b],[c,d]],e],f], & [[([a,b],c,d),e],f],\\
[[(a,[b,c],d),e],f], & [[(a,b,[c,d]),e],f], & [[\{a,b,c,d\},e],f], & [[[[a,b],c],[d,e]],f],\\
[[(a,b,c),[d,e]],f], & [([[a,b],c],d,e),f], & [((a,b,c),d,e),f], & [([a,b],[c,d],e),f],\\
[([a,b],c,[d,e]),f], & [(a,[[b,c],d],e),f], & [(a,(b,c,d),e),f], & [(a,[b,c],[d,e]),f],\\
[(a,b,[[c,d],e]),f], & [(a,b,(c,d,e)),f], & [\{[a,b],c,d,e\},f], & [\{a,[b,c],d,e\},f],\\
[\{a,b,[c,d],e\},f], & [\{a,b,c,[d,e]\},f], & [[[[a,b],c],d],[e,f]], & [[(a,b,c),d],[e,f]],\\
[[[a,b],[c,d]],[e,f]], & [([a,b],c,d),[e,f]], & [(a,[b,c],d),[e,f]], & [(a,b,[c,d]),[e,f]],\\
[\{a,b,c,d\},[e,f]], & [[[a,b],c],[[d,e],f]], & [[[a,b],c],(d,e,f)], & [(a,b,c),(d,e,f)],\\
([[[a,b],c],d],e,f), & ([(a,b,c),d],e,f), & ([[a,b],[c,d]],e,f), & (([a,b],c,d),e,f),\\
((a,[b,c],d),e,f), & ((a,b,[c,d]),e,f), & (\{a,b,c,d\},e,f), & ([[a,b],c],[d,e],f),\\
((a,b,c),[d,e],f), & ([[a,b],c],d,[e,f]), & ((a,b,c),d,[e,f]), & ([a,b],[[c,d],e],f),\\
([a,b],(c,d,e),f), & ([a,b],[c,d],[e,f]), & ([a,b],c,[[d,e],f]), & ([a,b],c,(d,e,f)),\\
(a,[[[b,c],d],e],f), & (a,[(b,c,d),e],f), & (a,[[b,c],[d,e]],f), & (a,([b,c],d,e),f),\\
(a,(b,[c,d],e),f), & (a,(b,c,[d,e]),f), & (a,\{b,c,d,e\},f), & (a,[[b,c],d],[e,f]),\\
(a,(b,c,d),[e,f]), & (a,[b,c],[[d,e],f]), & (a,[b,c],(d,e,f)), & (a,b,[[[c,d],e],f]),\\
(a,b,[(c,d,e),f]), & (a,b,[[c,d],[e,f]]), & (a,b,([c,d],e,f)), & (a,b,(c,[d,e],f)),\\
(a,b,(c,d,[e,f])), & (a,b,\{c,d,e,f\}), & \{[[a,b],c],d,e,f\}, & \{(a,b,c),d,e,f\},\\
\{[a,b],[c,d],e,f\}, & \{[a,b],c,[d,e],f\}, & \{[a,b],c,d,[e,f]\}, & \{a,[[b,c],d],e,f\},\\
\{a,(b,c,d),e,f\}, & \{a,[b,c],[d,e],f\}, & \{a,[b,c],d,[e,f]\}, & \{a,b,[[c,d],e],f\},
\end{array}
$$

$$\{a, b, (c, d, e), f\}, \quad \{a, b, [c, d], [e, f]\}, \quad \{a, b, c, [[d, e], f]\}, \quad \{a, b, c, (d, e, f)\}.$$

Por tanto, para cada partición λ tendremos que calcular las matrices de representación que corresponden a las 42 componentes irreducibles de cada extensión de las identidades $\mathcal{T}_i$ y $\mathcal{F}$ a grado 6 y compararlas con las correspondientes a las simetrías de los 80 monomios BTQ de grado 6 y las extensiones de las identidades BTQ y la identidad del teorema 3.5.2 a grado 6. Los resultados se muestran en la tabla 3.8.

partición	dimensión	sim+ext	todas	nuevas
6	1	80	80	0
51	5	367	367	0
42	9	602	602	0
411	10	662	662	0
33	5	314	315	1
321	16	988	988	0
3111	10	610	610	0
222	5	298	298	0
2211	9	523	523	0
21111	5	287	287	0
111111	1	56	56	0

Tabla 3.8: Rangos para las identidades BTQ en grado 6

El único valor no nulo en la columa “nuevas” aparece en la fila correspondiente a la partición 3+3, lo que nos indica que tenemos una identidad nueva, no lineal, en dos variables, de grado 3 en cada una de ellas. En todos los demás casos, se ha comprobado que las matrices resultantes de los dos cálculos son iguales, luego solo tenemos esta identidad. □

3.6. Conclusiones

En este capítulo se han dado identidades polinomiales que definen la variedad de álgebras tangentes a lazos analíticos locales monoasociativos, completando así el trabajo de Akivis y otros muchos geómetras y algebristas. Sin embargo, aparecen muchas otras cuestiones que pueden ser objeto de investigación.

Las álgebras BTQ no son álgebras de Sabinin, ya que no verifican todas las identidades de la definición 3.2.8: se ha comprobado con Maple que algunas de estas identidades no son consecuencia de las identidades BTQ. Por tanto, para hablar con propiedad de álgebras tangentes a lazos analíticos locales monoasociativos tendríamos que considerar la variedad intersección de las álgebras BTQ con las álgebras de Sabinin. Un problema interesante consiste en encontrar todas las identidades que definen estas álgebras tangentes. Para ello, análogamente a como hemos hecho en el caso de los cuaternadores, deberíamos encontrar los elementos primitivos (en el álgebra no asociativa libre) de grados mayores que no sean consecuencia de las extensiones de los de grados menores. Notar que estos elementos sí serán consecuencia de las extensiones a grado 5 de los monomios BTQ, ya que debido a la G-estructura cerrada definida por el lazo, los operadores de aridad mayor que 4 son expresables algebraicamente en términos de las operaciones de menor aridad (ver [Aki75]).

Trabajando en esta dirección hemos encontrado estas operaciones en aridad 5.

Definición 3.6.1. Los **quincuenadores** son las operaciones multilineales quincuenarias:

$$\begin{aligned}
\text{❀}_1(a,b,c,d,e) &= ((ab)c,d,e) - (ab,d,e)c - (ac,d,e)b - (bc,d,e)a \\
&\quad + ((a,d,e)c)b + ((b,d,e)c)a + ((c,d,e)b)a, \\
\text{❀}_2(a,b,c,d,e) &= (a,(bc)d,e) - (a,bc,e)d - (a,bd,e)c - (a,cd,e)b \\
&\quad + ((a,b,e)d)c + ((a,c,e)d)b + ((a,d,e)c)b, \\
\text{❀}_3(a,b,c,d,e) &= (a,b,(cd)e) - (a,b,cd)e - (a,b,ce)d - (a,b,de)c \\
&\quad + ((a,b,c)e)d + ((a,b,d)e)c + ((a,b,e)d)c.
\end{aligned}$$

Estas expresiones tienen una interesante interpretación: su anulación supone que podemos reducir un término de grado 3 en el primer, segundo o tercer argumento de un asociador a una combinación lineal de términos que tienen menor grado en dicha posición del asociador.

Otro tema de interés es continuar el estudio de las identidades especiales para las álgebras BTQ en grados mayores. Hemos probado que dichas identidades existen en grado 6 pero no tenemos una expresión explícita. Tampoco conocemos qué sucede en grados superiores.

Tras definir la variedad de las álgebras de Sabinin de grado d, surgen preguntas naturales acerca de la estructura de estos objetos: qué ejemplos conocemos, qué ejemplos nuevos interesantes aparecen, qué propiedades tiene... En particular, nos preguntamos por la propiedad de Schreier: si las subálgebras de un álgebra libre en esta variedad son también libres. Las álgebras de Sabinin de grado 2 (álgebras anticonmutativas) y de grado 3 (álgebras de Akivis), así como las álgebras de Sabinin, son Schreier (ver [ZSSS82, SU02, Chi11]); luego cabe preguntarse si las álgebras de Sabinin de grado d también lo son.

En los trabajos de Pérez-Izquierdo y Shestakov [PI05, PIS04] se generaliza el teorema de Poicaré-Birkhoff-Witt para álgebras de Malcev y de Bol y se construye la envolvente universal para estas estructuras. Es interesante tratar de extender las técnicas utilizadas por estos autores para construir la envolvente universal de las álgebras tangentes a los lazos monoasociativos.

3.7. En breve / Summarizing

3.7.1. En breve

En este capítulo se ha estudiado un caso particular de álgebras de Sabinin: las álgebras tangentes a los lazos monoasociativos, que generalizan las álgebras de Lie, Malcev y Bol, ya que son el caso más general de álgebras asociadas a 3-redes hexagonales cerradas, ampliamente estudiadas en geometría diferencial. Este estudio de ha centrado en hallar un conjunto de identidades polinomiales multilineales que definan dicha variedad de álgebras, utilizando las operaciones primitivas definidas introducidas en [SU02] y técnicas computacionales basadas en la teoría de representación del grupo simétrico y el algoritmo LLL de reducción de bases de retículos. No se ha logrado hallar el conjunto completo de identidades, pero de ha determinado que la variedad de álgebras tangentes a los lazos monoasociativos es la intersección de las variedades de álgebras de Sabinin y de las definidas como álgebras BTQ.

Los resultados que aparecen en este capítulo han sido recopilados en el artículo "Polynomial identities for tangent algebras of monoassociative loops", que ha sido aceptado para su publicación en la revista "Communications in Algebra" (1 de mayo de 2012) [BM11].

3.7.2. Summarizing

In this chapter we have studied a particular variety of Sabinin algebras: tangent algebras for monoassociative loops, which generalize Lie, Malcev and Bol algebras. These algebras are the most general of the local algebras associated to closed hexagonal 3-webs, widely studied in differential geometry. Our study was focused on finding a defining set of multilinear polynomial identities for this variety by using the primitive operations defined in [SU02] and computational techniques based on representation theory of the symmetric group and the LLL algorithm for lattice reduction. We did not find the complete set of identities but we determined that the variety of tangent algebras for monoassociative algebras can be thought as the intersection between the categories of Sabinin algebras and defined BTQ algebras.

The results from this chapter were compiled in the paper “Polynomial identities for tangent algebras of monoassociative loops”, that was accepted for publication in the journal “Communications in Algebra” (1st May 2012) [BM11].

Parte II

Representaciones

Capítulo 4

Teoría de representación para lazos formales, álgebras de Sabinin y biálgebras

4.1. Introducción / Introduction

4.1.1. Introducción

Sean un grupo G y un grupo abeliano $(M, +)$ en el que G actúa por la derecha

$$\begin{aligned} M \times G &\to M \\ (x, g) &\mapsto xg. \end{aligned}$$

Toda esta información la podemos codificar en el conjunto $M \times G$, al que llamaremos *fibrado*, mediante la operación

$$(x, a) \cdot (y, b) = (x + ya^{-1}, ab).$$

Sean $E = M \times G$, $\pi : E \to G$ dada por $\pi((x, a)) = a$ y fijado $a \in G$ el conjunto $E_a = \pi^{-1}(a) = \{(x, a) \mid x \in M\}$ al que llamaremos *fibra de a*. El fibrado E satisface ciertas propiedades que dependen de la acción de G y de su producto. Por ejemplo:

- E posee elemento neutro:

$$(x,a)\cdot(0,e) = (x+0a^{-1},a) = (x,a) = (0,e)\cdot(x,a).$$

- E posee inversos:

$$(x,a)\cdot(-xa,a^{-1}) = (x+(-xa)a^{-1},aa^{-1}) = (0,e) = (-xa,a^{-1})\cdot(x,a).$$

- E es asociativo:

$$\begin{aligned}\big((x,a)\cdot(y,b)\big)\cdot(z,c) &= (x+ya^{-1}+z(ab)^{-1},ab\cdot c)\\ &= (x+(y+zb^{-1})a^{-1},a\cdot bc) = (x,a)\cdot\big((y,b)\cdot(z,c)\big).\end{aligned}$$

Luego el fibrado E es un grupo debido a que G lo es y a que M es módulo para G. Si se define el *producto fibrado*

$$E\times_G E = \{((x,a),(y,a)) \mid x,y\in M, a\in G\},$$

entonces

$$\begin{array}{ccc} E\times_G E \xrightarrow{+} E & E\xrightarrow{-} E & G\xrightarrow{0} E\\ ((x,a),(y,a))\mapsto(x+y,a) & (x,a)\mapsto(-x,a) & a\mapsto 0_a=(0,a)\end{array}$$

satisfacen los axiomas de grupo abeliano y son homomorfismos de grupos. El módulo $(M,+)$ se recupera como la fibra E_e con la suma inducida por $E\times_G E\xrightarrow{+}E$ y la acción se expresa en términos del producto de E y de la aplicación $0: G\to E$ como

$$0_a^{-1}\cdot(x,e)0_a = (0,a^{-1})(x,e)(0,a) = (xa,a^{-1})(0,a) = (xa,e).$$

Por lo tanto, podemos trabajar con el módulo M a través del fibrado E. De hecho, si E es un grupo, $\pi: E\to G$ es un homomorfismo de grupos y existen homomorfismos de grupos $E\times_G E\xrightarrow{+}E$, $E\xrightarrow{-}E$ y $G\xrightarrow{0}E$ que cumplen los axiomas de grupo abeliano, entonces la fibra E_e es un G-módulo.

La pregunta natural en este punto es si esta estructura split para grupos y sus módulos se puede generalizar para lazos. Una adecuada definición de representación (o módulo) para un lazo no es inmediata: cualquier intento de generalizar la noción de representación para grupos identificando elementos del lazo con permutaciones o aplicaciones de otras estructuras no puede funcionar, ya que la composición de aplicaciones es asociativa. Puesto que hay diferentes variedades de lazos (Moufang, Bol, ...), cada una debería dar lugar a un conjunto de axiomas. Por tanto, más que una fórmula universal se necesita un método para derivar las fórmulas adecuadas a cada variedad, ya que el uso de fibrados permite separar la definición de módulo de las fórmulas concretas que lo determinan en cada caso. J.D. Smith [Smi92, Smi07] propone la teoría de categorías como el marco adecuado para desarrollar la teoría de representación de cuasigrupos. Recordar que un cuasigrupo es un conjunto Q dotado de tres aplicaciones binarias $\cdot$ (producto), $/$ (división a derecha) y $\backslash$ (división a izquierda) que verifican las identidades

$$a\backslash(a \cdot b) = b,\ a \cdot (a\backslash b) = b,\ (a \cdot b)/b = a,\ (a/b) \cdot b = a$$

para cualesquiera elementos $a, b \in Q$. Un lazo, por tanto, es un cuasigrupo que posee elemento identidad e dado por $a\backslash a = e = b/b\ \forall a, b \in Q$. En este punto hay que tener cuidado de no hacer una teoría tan general que deje de reflejar las propiedades del objeto que se pretende representar.

A lo largo de este capítulo se presentan diferentes aproximaciones a la representación de lazos formales, tomando como referencia y punto de partida las ideas anteriores.

4.1.2. Introduction

Let G is a group right-acting on an abelian group $(M, +)$ by

$$\begin{aligned} M \times G &\to M \\ (x, g) &\mapsto xg. \end{aligned}$$

We can encode all this information in the set $M \times G$, which we call *bundle*, by means of the operation

$$(x, a) \cdot (y, b) = (x + ya^{-1}, ab).$$

If we have $E = M \times G$ and $\pi : E \to G$ ($\pi((x, a)) = a$) and we fix an element $a \in G$, then we define the set $E_a = \pi^{-1}(a) = \{(x, a) \mid x \in M\}$ which we call *fiber of* a. The bundle E satisfy certain properties that are consequence of the action of G and its product. For example:

- E has an identity element:

$$(x,a)\cdot(0,e) = (x+0a^{-1},a) = (x,a) = (0,e)\cdot(x,a).$$

- E has inverses:

$$(x,a)\cdot(-xa,a^{-1}) = (x+(-xa)a^{-1},aa^{-1}) = (0,e) = (-xa,a^{-1})\cdot(x,a).$$

- E is associative:

$$\begin{aligned}\big((x,a)\cdot(y,b)\big)\cdot(z,c) &= (x+ya^{-1}+z(ab)^{-1},ab\cdot c)\\ &= (x+(y+zb^{-1})a^{-1},a\cdot bc) = (x,a)\cdot\big((y,b)\cdot(z,c)\big).\end{aligned}$$

Thus the bundle E is a group because G is a group and M is a module for G. If we define the *bundle product*

$$E\times_G E = \{((x,a),(y,a)) \mid x,y\in M, a\in G\},$$

then

$$\begin{array}{ccc} E\times_G E \xrightarrow{+} E & E\xrightarrow{-} E & G\xrightarrow{0} E\\ ((x,a),(y,a))\mapsto(x+y,a) & (x,a)\mapsto(-x,a) & a\mapsto 0_a=(0,a)\end{array}$$

verify the abelian group axioms and are group homomorphisms. The module $(M,+)$ can be recovered as the fiber E_e with the sum induced by $E\times_G E\xrightarrow{+}E$ and the action of G is expressed in terms of the product in E and the map $0: G\to E$ as

$$0_a^{-1}\cdot(x,e)0_a = (0,a^{-1})(x,e)(0,a) = (xa,a^{-1})(0,a) = (xa,e).$$

Thus we can work with the module M in the bundle E. Indeed, if E is a group, $\pi: E\to G$ is a group homomorphism and there exist group homomorphisms $E\times_G E\xrightarrow{+}E$, $E\xrightarrow{-}E$ and $G\xrightarrow{0}E$ which verify the axioms of abelian group, then the fiber E_e is a G-module.

At this point, the natural question is if we can generalize this split structure for groups and their modules to a loop setting. An appropriate definition of representation or module for a loop is not immediate: any attempt of generalizing the notion of group representation by identifying the elements of the loop with permutations or inner maps of other structures can not work because map composition os associative but loops are not. Since there are different varieties of loops (Moufang, Bol, ...), each one would originate a different set of axioms. Thus instead of a "universal formula" (which would be very complicated to work with and maybe impossible to find), we need a general method for deriving accurate formulas for each variety of loops. J.D. Smith [Smi92, Smi07] proposes category theory as the suitable framework to develop the representation theory of quasigroups. Recall that a quasigroup is a set Q endowed with three binary maps: $\cdot$ (product or multiplication), $/$ (right division) and $\backslash$ (left division) which verify the following identities:

$$a\backslash(a \cdot b) = b,\ a \cdot (a\backslash b) = b,\ (a \cdot b)/b = a,\ (a/b) \cdot b = a$$

for any elements $a, b \in Q$. Thus a loop is a quasigroup with identity element e given by $a\backslash a = e = b/b\ \forall a, b \in Q$.

At this point one should be very careful in the way we define the theory: we risk of generalizing so much that the resulting structure reflects none of the properties of the object we intended to represent.

Along this chapter we present different approaches to representation theory of formal loops, taking the ideas below as reference points.

4.2. Grupos abelianos en categorías slice sobre lazos

A continuación se dan las definiciones y resultados principales que aparecen en [Smi07]

Definición 4.2.1. Un **grupo abeliano** es un objeto A en la categoría $\boldsymbol{Set}$ de conjuntos y aplicaciones junto con un morfismo *cero*

$$\begin{aligned} 0 : & A^0 \to A \\ & * \ \mapsto\ 0, \end{aligned}$$

donde A^0 denota el objeto cero de la categoría, un morfismo *opuesto*

$$\begin{aligned} - : & A \to A \\ & a \ \mapsto -a, \end{aligned}$$

y un morfismo *suma*

$$+ : A \times A \to\ A$$

$$(a,b) \mapsto a+b$$

que verifican los axiomas usuales para la suma expresados en términos de diagramas conmutativos en la categoría ***Set***:

Asociatividad:

$$\begin{tikzcd} A\times A\times A \arrow[r, "{(1,+)}"] \arrow[d, "{(+,1)}"'] & A\times A \arrow[d, "+"] \\ A\times A \arrow[r, "+"'] & A \end{tikzcd}$$

Conmutatividad:

$$\begin{tikzcd} A\times A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "+"'] & A\times A \arrow[d, "+"] \\ A \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

Cero:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, equal] & A\times A^0 \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "{(1,0)}"] \\ A & A\times A \arrow[l, "+"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, equal] & A^0\times A \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "{(0,1)}"] \\ A & A\times A \arrow[l, "+"] \end{tikzcd}$$

Opuesto:

$$\begin{tikzcd} A\times A \arrow[r, "{(1,\Delta)}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A\times A\times A \arrow[d, "{(1,1,-)}"] \\ A & A\times A\times A \arrow[l, "{+(+,1)}"'] \end{tikzcd}$$

donde $\Delta(a) = (a,a)$, $\sigma((a,b)) = (b,a)$ y $\pi_1(a,b) = a$.

Nota 4.2.2. Recordar que un objeto X en una categoría $\mathfrak{C}$ se dice que es el *producto de una familia* $\{X_i\}_{i\in I}$ de objetos de $\mathfrak{C}$ si y solo si existe una familia de morfismos $\{\pi_i : X \to X_i\}_{i\in I}$ (las *proyecciones canónicas*) tal que para cualquier otro objeto Y con una familia de morfismos $\{f_i : Y \to X_i\}_{i\in I}$ existe un único morfismo $f : Y \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta para cualquier $i \in I$:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi_i"] \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

En general, dada una categoría $\mathfrak{C}$ con productos finitos, un grupo abeliano en la categoría $\mathfrak{C}$ es un objeto A de dicha categoría dotado de $\mathfrak{C}$-morfismos *cero* $0 : A^0 \to A$, donde A^0

es el objeto cero de la categoría, *opuesto* $- : A \to A$ y *suma* $+ : A \times A \to A$ tales que los diagramas que representan las identidades de grupo abeliano anteriores conmutan cuando se interpretan en $\mathfrak{C}$.

Definición 4.2.3. Sea Q un objeto en la categoría $\mathfrak{C}$ de lazos. La **categoría slice $\mathfrak{C}$ sobre Q** se denota $\mathfrak{C}/Q$ y tiene como objetos los $\mathfrak{C}$-morfismos $p : E \to Q$ y como morfismos los $\mathfrak{C}$-morfismos $f : E_1 \to E_2$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_1"'] & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ Q \arrow[r, "1_Q"'] & Q \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathfrak{C}$.

Si la categoría original $\mathfrak{C}$ tiene pullbacks, entonces la categoría slice $\mathfrak{C}/Q$ tiene productos finitos. El producto vacío (u objeto terminal) es la identidad $1_Q : Q \to Q$ en $\mathfrak{C}$, mientras que el producto de dos objetos $p_i : E_i \to Q$ es el objeto pullback $E_1 \times_Q E_2$ en $\mathfrak{C}$ junto con los $\mathfrak{C}$-morfismos hasta Q dados por cualquiera de las rutas del diagrama de pullback

$$\begin{tikzcd} E_1 \times_Q E_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ E_1 \arrow[r, "p_1"'] & Q \end{tikzcd}$$

en $\mathfrak{C}$. Las proyecciones del producto $E_1 \times_Q E_2$ están dadas por las aplicaciones π_i del diagrama anterior.

La definición de módulo que vamos a utilizar apareció por primera vez en [Bec67].

Definición 4.2.4. Dada una categoría $\mathfrak{C}$ de lazos y un objeto $Q \in \mathfrak{C}$, se define **módulo para** Q como un grupo abeliano en la categoría slice $\mathfrak{C}/Q$.

Si en esta definición tomamos $\mathfrak{C}$=***Grp*** la categoría de grupos y un objeto G en esta categoría, se tiene que la categoría de grupos abelianos en ***Grp***$/G$ es equivalente a la categoría de módulos para G: un objeto E en la categoría ***Grp***$/G$ se corresponde de manera biunívoca con la extensión escindida $E = M \times G$, donde M es un G-módulo y el producto en E viene dado por

$$(m_1, g_1)(m_2, g_2) = (m_1 + m_2 g_1^{-1}, g_1 g_2).$$

En el caso en que $\mathfrak{C} = \boldsymbol{Q}$ es la categoría de los cuasigrupos y Q es un objeto en $\mathfrak{C}$, los Q-módulos como grupos abelianos en la categoría slice $\boldsymbol{Q}/Q$ son equivalentes a módulos sobre el estabilizador universal del elemento neutro $e \in Q$ en el grupo universal de multiplicación $U(Q; \boldsymbol{Q})$ [Smi92]. Este grupo universal de multiplicación es el subgrupo generado por los operadores de multiplicación a izquierda y a derecha por elementos de Q del grupo de multiplicación de una cierta estructura universal que contiene a Q. Más precisamente:

Definición 4.2.5. [Smith, [Smi07]] Sean Q un cuasigrupo en la variedad $\mathcal{V}$ y $Q[X]$ el producto libre en $\mathcal{V}$ de Q con el cuasigrupo libre en $\mathcal{V}$ generado por un solo generador X. El cuasigrupo $Q[X]$ es un análogo del anillo de polinomios y está caracterizado por la siguiente propiedad universal: dados un cuasigrupo Q' en la categoría $\mathcal{V}$ y un $\mathfrak{V}$-epimorfismo $f : Q \to Q'$, para cada $x \in Q'$ existe un único $\mathcal{V}$-morfismo tal que

$$\begin{aligned} Q[X] &\to Q' \\ a \in Q &\mapsto f(a) \\ X &\mapsto x. \end{aligned}$$

Se define el **grupo universal de multiplicación de Q en la categoría $\mathcal{V}$** como $U(Q; \mathcal{V}) := \mathrm{Mlt}_{Q[X]}(Q)$.

4.3. Reconstrucción de un Q-módulo para un lazo a partir de un grupo abeliano

El objetivo de esta sección es identificar la fibra E_e dentro del fibrado y escribir el producto en E en función de la acción de $U(Q, \mathcal{C})_e$ en E_e, donde $\mathfrak{C}$ denota la categoría de lazos. Las demostraciones están extraídas de [Smi07] y se incluyen por completitud.

Sea $\pi : E \to Q$ un Q-módulo con las aplicaciones $+ : E \times_Q E \to E$, $- : E \to E$ y $0 : Q \to E$. Por estar en la categoría $\mathcal{C}$, estas aplicaciones son homomorfismos de lazos. Denotaremos $E_a = \pi^{-1}(a)$, x_a un elemento de E_a y 0_a la imagen de a por la aplicación 0. En ocasiones, por conveniencia a la hora de hacer los cálculos, escribiremos $+((x, y))$ en lugar de $x + y$.

Lema 4.3.1. *Como conjuntos,*

$$E = \{x_e 0_a \mid x_e \in E_e, a \in Q\} = E_e 0_Q \cong E_e \times Q.$$

Demostración. Claramente el fibrado E puede escribirse como unión disjunta de fibras $E = \bigsqcup_{a\in Q} E_a$. Veamos que $E_a = E_e 0_a$. Dado $x_a \in E_a$, por ser π homomorfismo, se tiene que $\pi(x_a/0_a) = a/a = e$, luego $x_a = (x_a/0_a)\cdot 0_a \in E_e 0_a$ y, por tanto, $E_a \subseteq E_e 0_a$. Además, $\pi(E_e 0_a) = ea = a$, por lo que $E_e 0_a \subseteq E_a$. □

Lema 4.3.2. 0_Q *es un sublazo de* E *isomorfo a* Q.

Demostración. Del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ Q \arrow[ur, "0"] \arrow[r, equal] & Q \end{tikzcd}$$

se tiene que si $0_a = 0_b$ entonces $a = \pi(0_a) = \pi(0_b) = b$, es decir, 0 es inyectiva y, por tanto, $0_Q \cong Q$. □

Lema 4.3.3. *La fibra* E_a *es un grupo abeliano con elemento neutro* 0_a.

Demostración. Usando que E es grupo abeliano y que π es homomorfismo, se tiene que

$$\pi(x_a + y_a) = a \implies x_a + y_a \in E_a$$
$$\pi(-x_a) = a \implies -x_a \in E_a$$
$$\pi(0_a) = a \implies 0_a \in E_a,$$

luego $(E_a, +)$ es grupo abeliano. Notar que 0_a es el elemento neutro debido a las propiedades de la aplicación $0 : Q \to E$. □

Lema 4.3.4. *Las aplicaciones entre* E_a *y* E_{ab} *o* E_{ba} *dadas por* $x_a \mapsto x_a 0_b$ *y* $x_a \mapsto 0_b x_a$ *son isomorfismos de grupos abelianos.*

Demostración. Notar que

$$\begin{aligned} x_a 0_b + y_a 0_b &= +\left((x_a 0_b, y_a 0_b)\right) = +\left((x_a, y_a)\cdot(0_b, 0_b)\right) = +(x_a, y_a)\cdot +(0_b, 0_b) \\ &= (x_a + y_a)\cdot(0_b + 0_b) = (x_a + y_a)0_b \end{aligned}$$

$$0_b x_a + 0_b y_a = +\left((0_b x_a, 0_b y_a)\right) = +\left((0_b, 0_b)\cdot(x_a, y_a)\right) = +(0_b, 0_b)\cdot +(x_a, y_a)$$

$$= (0_b, 0_b) \cdot (x_a + y_a) = 0_b(x_a + y_a)$$

y que las aplicaciones poseen inversas $x_{ab} \mapsto x_{ab}/0_b$ y $x_{ba} \mapsto 0_b\backslash x_{ba}$ respectivamente. □

Proposición 4.3.5. *$(E_e, +)$ es un módulo para $U(Q; \mathcal{C})_e$ con la acción inducida por $x_bL_a = 0_ax_b$ y $x_bR_a = x_b0_a$.*

Demostración. Puesto que $0 : Q \to 0_Q \subseteq E$ es homomorfismo de lazos, se tiene que existe un homomorfismo de grupos

$$U(Q, \mathcal{C}) \longrightarrow U(E; \mathcal{C})$$
$$L_a \mapsto L_{0_a}$$
$$R_a \mapsto R_{0_a}$$

Como E es un $U(E, \mathcal{C})$-módulo a derecha, entonces también es $U(Q, \mathcal{C})$-módulo por el homomorfismo anterior:

$$x_bL_a = x_bL_{0_a} = 0_ax_b$$
$$x_bR_a = x_bR_{0_a} = x_b0_a$$

Además, $U(Q, \mathcal{C})_e$ estabiliza a E_e, luego E_e es un $U(Q, \mathcal{C})_e$-módulo. Como L_{0_a} y R_{0_a} son homomorfismos del grupo aditivo $(E_e, +)$, entonces las representaciones de los elementos de $U(Q, \mathcal{C})_e$ también lo son. □

Lema 4.3.6. *Se tiene que*

$$x_ay_b = x_a0_b + 0_ay_b$$
$$x_a/y_b = (x_a - 0_{a/b}y_b)/0_b$$
$$x_a\backslash y_b = 0_a\backslash(y_b - x_a0_{a\backslash b}).$$

Demostración.

$$+((x_a0_b, 0_ay_b)) = +((x_a, 0_a) \cdot (0_b, y_b)) = +((x_a, 0_a)) \cdot +((0_b, y_b)) = x_a \cdot y_b$$

$$\begin{aligned} x_a/y_b \cdot 0_b &= (x_a/y_b + 0_{a/b}) \cdot (y_b + (-y_b)) = +((x_a/y_b, 0_{a/b})) \cdot +((y_b, -y_b)) \\ &= +((x_a/y_b, 0_{a/b}) \cdot (y_b, -y_b)) = +(x_a/y_b \cdot y_b, -0_{a/b}y_b) = x_a - 0_{a/b}y_b \end{aligned}$$

$$0_a \cdot x_a\backslash y_b = (x_a + (-x_a)) \cdot (x_a\backslash y_b + 0_{a\backslash b}) = +((x_a, -x_a)) \cdot +((x_a\backslash y_b, 0_{a\backslash b}))$$

$$= +((x_a, -x_a) \cdot (x_a \backslash y_b, 0_{a\backslash b})) = +((x_a \cdot x_a \backslash y_b, -x_a \cdot 0_{a\backslash b})) = y_b - x_a 0_{a\backslash b}.$$

□

Proposición 4.3.7. *El producto en E se puede obtener a partir de la acción de $U(Q, \mathcal{C})_e$ en E_e mediante la fórmula*

$$x_e 0_a \cdot y_e 0_b = (x_e \cdot R_a R_b R_{ab}^{-1} + y_e \cdot R_b L_a R_{ab}^{-1}) 0_{ab}.$$

Demostración. Notar que como $E = E_e \times Q$ podemos escribir

$$x_e 0_a \cdot y_e 0_b = x_e 0_a \cdot 0_b + 0_a \cdot y_e 0_b = (x_e \cdot R_a R_b R_{ab}^{-1} + y_e \cdot R_b L_a R_{ab}^{-1}) 0_{ab}.$$

□

4.4. Grupos abelianos en categorías slice de H-biálgebras

Todas las nociones categóricas que hemos visto en las secciones anteriores se pueden definir para biálgebras. A lo largo del capítulo trabajaremos con H-biálgebras punteadas conexas coconmutativas y coasociativas y adoptaremos la notación de Sweedler para el coproducto:

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)} = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}.$$

Recordar que una *biálgebra* (unitaria) es un espacio vectorial $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ donde (B, μ, η) es un álgebra no necesariamente asociativa (unitaria), (B, Δ, ϵ) es una coálgebra y μ, η son homomorfismos de coálgebras (por lo que Δ, ϵ serán homomorfismos de álgebras). Recordar también que una biálgebra B se dice *coconmutativa* si para cualquier elemento $x \in B$ se tiene que $\sum x_{(1)} \otimes x_{(2)} = \sum x_{(2)} \otimes x_{(1)}$. Una biálgebra B se dice *coasociativa* si se verifica que $(\Delta \otimes 1_B) \circ \Delta = (1_B \otimes \Delta) \circ \Delta$.

Recordar que una *H-biálgebra* es una biálgebra H con dos operaciones adicionales $\backslash : H \to H$ (*división a izquierda*) y $/ : H \to H$ (*división a derecha*) que verifican

$$\sum x_{(1)} \backslash (x_{(2)} y) = \epsilon(x) y = \sum x_{(1)} (x_{(2)} \backslash y)$$
$$\sum (y x_{(1)}) / x_{(2)} = \epsilon(x) y = \sum (y \backslash x_{(1)}) x_{(2)}.$$

Notar que es la estructura análoga a un álgebra de Hopf en el contexto no asociativo. Definimos ahora la categoría slice para estos objetos:

Definición 4.4.1. Sea $\mathcal{H}$ la categoría de H-biálgebras punteadas coconmutativas y sea $B \in \mathcal{H}$ fija. La **categoría slice sobre** B, denotada $\mathcal{H}/B$ tiene como objetos $\mathcal{H}$-morfismos $\pi : A \to B$ y como morfismos $\mathcal{H}$-morfismos $\varphi : A_1 \to A_2$ tales que los correspondientes diagramas

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B \arrow[r, "1_B"'] & B \end{tikzcd}$$

son conmutativos en $\mathcal{H}$.

Proposición 4.4.2. *La categoría $\mathcal{H}/B$ tiene productos finitos.*

Demostración. Sean $A_1 \xrightarrow{\pi_1} B$, $A_2 \xrightarrow{\pi_2} B$ objetos de $\mathcal{H}/B$. Definimos

$$A_1 \otimes_B A_2 = \text{ mayor subcoálgebra contenida en } \ker(\epsilon \otimes \pi_2 - \pi_1 \otimes \epsilon).$$

Se tiene que $A_1 \otimes_B A_2$ es sub-H-biálgebra de $A_1 \otimes A_2$: dados $\sum_i x_i \otimes y_i, \sum_j x'_j \otimes y'_j \in A_1 \otimes_B A_2$,

$$(\epsilon \otimes \pi_2)\left(\sum_i x_i \otimes y_i \cdot \sum_j x'_j \otimes y'_j\right) = \sum_{i,j} \epsilon(x_i)\epsilon(x'_j)\pi_2(y_i)\pi_2(y'_j)$$
$$= \sum_{i,j} \pi_1(x_i)\pi_1(x'_j)\epsilon(y_i)\epsilon(y'_j) = (\pi_1 \otimes \epsilon)\left(\sum_i x_i \otimes y_i \cdot \sum_j x_j \otimes y'_j\right),$$

luego $A_1 \otimes_B A_2 \cdot A_1 \otimes_B A_2 \subseteq \ker(\epsilon \otimes \pi_2 - \pi_1 \otimes \epsilon)$ y además es subcoálgebra, por lo que $A_1 \otimes_B A_2 \cdot A_1 \otimes_B A_2 \subseteq A_1 \otimes_B A_2$. También se tiene

$$(\epsilon \otimes \pi_2)\left(\sum_i x_i \otimes y_i / \sum_j x'_j \otimes y'_j\right) = \sum_{i,j} \epsilon(x_i)\epsilon(x'_j) \cdot \pi_2(y_i)/\pi_2(y'_j)$$
$$= \sum_{i,j} \pi_1(x_i)/\pi_1(x'_j) \cdot \epsilon(y_i)\epsilon(y'_j) = (\pi_1 \otimes \epsilon)\left(\sum_i x_i \otimes y_i / \sum_j x_j \otimes y'_j\right)$$
$$(\epsilon \otimes \pi_2)\left(\sum_i x_i \otimes y_i \backslash \sum_j x'_j \otimes y'_j\right) = \sum_{i,j} \epsilon(x_i)\epsilon(x'_j) \cdot \pi_2(y_i)\backslash\pi_2(y'_j)$$
$$= \sum_{i,j} \pi_1(x_i)\backslash\pi_1(x'_j) \cdot \epsilon(y_i)\epsilon(y'_j) = (\pi_1 \otimes \epsilon)\left(\sum_i x_i \otimes y_i \backslash \sum_j x_j \otimes y'_j\right)$$

luego $(A_1 \otimes_B A_2)/(A_1 \otimes_B A_2), (A_1 \otimes_B A_2)\backslash(A_1 \otimes_B A_2) \subseteq A_1 \otimes_B A_2$. La aplicación

$$A_1 \otimes_B A_2 \xrightarrow{\pi} B$$

$$\sum_i x_i \otimes y_i \mapsto \sum_i \epsilon(x_i)\pi_2(y_i) = \sum_i \epsilon(y_i)\pi_1(x_i)$$

es un homomorfismo de H-biálgebras:

$$\begin{aligned}
\pi\left(\sum_i x_i \otimes y_i \cdot \sum_j x'_j \otimes y'_j\right) &= \pi\left(\sum_{i,j} x_i x'_j \otimes y_i y'_j\right) = \sum_{i,j} \epsilon(x_i x'_j)\pi_2(y_i y'_j) \\
&= \sum_{i,j} \epsilon(x_i)\pi_2(y_i)\epsilon(x'_j)\pi_2(y'_j) = \sum_{i,j} \pi(x_1 \otimes y_i)\pi(x'_j \otimes y'_j) \\
&= \pi(\sum_i x_i \otimes y_i) \cdot \pi(\sum_j x'_j \otimes y'_j)
\end{aligned}$$

$$\pi(1 \otimes 1) = \epsilon(1)\pi_2(1) = 1$$

$$\begin{aligned}
(\pi \otimes \pi)\Delta\left(\sum_i x_i \otimes y_i\right) &= \sum_i \sum_{(x)} \sum_{(y)} \pi(x_{i_{(1)}} \otimes y_{i_{(1)}}) \otimes \pi(x_{i_{(2)}} \otimes y_{i_{(2)}}) \\
&= \sum_i \sum_{(x)} \sum_{(y)} \epsilon(x_{i_{(1)}})\pi_2(y_{i_{(1)}}) \otimes \epsilon(x_{i_{(2)}})\pi_2(y_{i_{(2)}}) = \sum_i \epsilon(x_i) \sum_{(y)} \pi_2(y_{i_{(1)}}) \otimes \pi_2(y_{i_{(2)}}) \\
&= \Delta\left(\sum_i \epsilon(x_i)\pi_2(y_i)\right) = \Delta\left(\pi(\sum_i x_i \otimes y_i)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi(\epsilon \otimes \epsilon)\left(\sum_i x_i \otimes y_i\right) &= \sum_i \pi(\epsilon(x_i) \otimes \epsilon(y_i)) = \sum_i \epsilon(\epsilon(x_i))\pi_2(\epsilon(y_i)) = \sum_i \epsilon(x_i)\epsilon(\pi_2(y_i)) \\
&= \sum_i \epsilon(\pi(x_i \otimes y_i))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi\left(\sum_i x_i \otimes y_i / \sum_j x'_j \otimes y'_j\right) &= \pi\left(\sum_{i,j} x_i/x'_j \otimes y_i/y'_j\right) = \sum_{i,j} \epsilon(x_i/x'_j)\pi_2(y_i/y'_j) \\
&= \sum_{i,j} \epsilon(x_i)\epsilon(x'_j)\pi_2(y_i)/\pi_2(y'_j) = \sum_{i,j} \epsilon(x_i)\pi_2(y_i)/\epsilon(x'_j)\pi_2(y'_j) \\
&= \sum_i \pi(x_i \otimes y_i)/\sum_j \pi(x'_j \otimes y'_j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi\left(\sum_i x_i \otimes y_i \backslash \sum_j x'_j \otimes y'_j\right) &= \pi\left(\sum_{i,j} x_i\backslash x'_j \otimes y_i\backslash y'_j\right) = \sum_{i,j} \epsilon(x_i\backslash x'_j)\pi_2(y_i\backslash y'_j) \\
&= \sum_{i,j} \epsilon(x_i)\epsilon(x'_j)\pi_2(y_i)\backslash\pi_2(y'_j) = \sum_{i,j} \epsilon(x_i)\pi_2(y_i)\backslash\epsilon(x'_j)\pi_2(y'_j) \\
&= \sum_i \pi(x_i \otimes y_i)\backslash \sum_j \pi(x'_j \otimes y'_j).
\end{aligned}$$

Las proyecciones $A_1 \otimes_B A_2 \xrightarrow{p_1} A_1$ y $A_1 \otimes_B A_2 \xrightarrow{p_2} A_2$ dadas por $p_1(\sum_i x_i \otimes y_i) = \sum_i \epsilon(y_i)x_i$

y $p_2(\sum_i x_i \otimes y_i) = \sum_i \epsilon(x_i) y_i$ son homomorfismos de H-biálgebras que hacen conmutativos respectivamente los diagramas

$$\begin{tikzcd} A_1 \otimes_B A_2 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\pi"'] & A_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\ B \arrow[r, "1_B"'] & B \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} A_1 \otimes_B A_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\pi"'] & A_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B \arrow[r, "1_B"'] & B \end{tikzcd}$$

y además cumplen que si se tienen

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p_1'"] \arrow[d, "\pi"'] & A_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\ B \arrow[r, "1_B"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "p_2'"] \arrow[d, "\pi"'] & A_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B \arrow[r, "1_B"'] & B \end{tikzcd}$$

entonces existe $p : A \to A_1 \otimes_B A_2$ homomorfismo de H-biálgebras tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & & A_1 \\ A \arrow[r, "p"] \arrow[urr, "p_1'"] \arrow[drr, "p_2'"'] & A_1 \otimes_B A_2 \arrow[ur, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ & & A_2 \end{tikzcd}$$

La definición de p es $p(a) = \sum p_1'(a_{(2)}) \otimes p_2'(a_{(1)})$. Claramente $p(a) \in A_1 \otimes_B A_2$, ya que

$$\sum \epsilon(p_1'(a_{(1)}))\pi_2(p_2'(a_{(2)})) = \sum \epsilon(p_1'(a_{(1)}))\pi(a_{(2)}) = \pi(a) = \sum \pi_1(p_1'(a_{(1)}))\epsilon(p_2'(a_{(2)})).$$

Además,

$$p_1 p(a) = \sum \epsilon(p_2'(a_{(2)}))p_1'(a_{(1)}) = p_1'(a)$$
$$p_2 p(a) = \sum \epsilon(p_1'(a_{(1)}))p_2'(a_{(2)}) = p_2'(a)$$

y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & A_1 \otimes_B A_2 \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[r, "1_B"'] & B \end{tikzcd}$$

por lo que la H-biálgebra $A_1 \otimes_B A_2$ es el producto en sentido categórico de $A_1 \xrightarrow{\pi_1} B$ y $A_2 \xrightarrow{\pi_2} B$ en la categoría slice $\mathcal{H}/B$. $\square$

Probamos ahora los resultados que permiten dar una definición correcta de grupos abelianos en la categoría slice $\mathcal{H}/B$.

Proposición 4.4.3. *Las aplicaciones*

$$\begin{aligned} B \otimes_B A &\to A \\ \sum_i b_i \otimes x_i &\mapsto \sum_i \epsilon(b_i) x_i \end{aligned} \qquad y \qquad \begin{aligned} A \otimes_B B &\to A \\ \sum_i x_i \otimes b_i &\mapsto \sum_i \epsilon(b_i) x_i \end{aligned}$$

son isomorfismos de H-biálgebras.

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} \varphi : B \otimes_B A &\to A \\ \sum_i b_i \otimes x_i &\mapsto \sum_i \epsilon(b_i) x_i \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \psi : A &\to B \otimes_B A \\ x &\mapsto \sum \pi(x_{(1)}) \otimes x_{(2)} \end{aligned}$$

Es claro que ambas aplicaciones son homomorfismos de H-biálgebras. Puesto que $(\epsilon \otimes \pi)(\psi(x)) = \pi(x) = (1_B \otimes \epsilon)(\psi(x))$ y $\psi(A)$ es coálgebra, se tiene que $\psi(x) \in B \otimes_B A$. Ahora bien, $\varphi\psi(x) = \sum \epsilon(\pi(x_{(1)}))x_{(2)} = x$, luego $\varphi\psi = 1_A$. Como $B \otimes_B A \subseteq \ker(\pi \otimes \epsilon - \epsilon \otimes \pi)$ es coálgebra,

$$\sum_i b_{i_{(1)}} \otimes x_{i_{(1)}} \otimes b_{i_{(2)}} \otimes x_{i_{(2)}} \in (B \otimes_B A) \otimes (B \otimes_B A),$$

luego aplicándole $(\pi \otimes \epsilon \otimes 1 \otimes 1)$ y $(\epsilon \otimes \pi \otimes 1 \otimes 1)$ se tiene que

$$\sum_i b_{i_{(1)}} \otimes b_{i_{(2)}} \otimes x_i = \sum_i \pi(x_{i_{(1)}}) \otimes b_i \otimes x_{i_{(2)}}.$$

Aplicando ahora $1 \otimes \epsilon \otimes 1$ a la igualdad anterior resulta

$$\sum_i b_i \otimes x_i = \sum_i \epsilon(b_i)\pi(x_{i_{(1)}}) \otimes x_{i_{(2)}}.$$

Finalmente, $\psi\varphi(\sum_i b_i \otimes x_i) = \psi(\sum_i \epsilon(b_i)x_i) = \sum_i \epsilon(b_i)\pi(x_{i_{(1)}}) \otimes x_{i_{(2)}} = \sum_i b_i \otimes x_i$, luego $\psi\varphi = 1_{B\otimes_B A}$. □

Proposición 4.4.4. *La aplicación*

$$\begin{aligned} \sigma : A_1 \otimes_B A_2 &\to A_2 \otimes_B A_1 \\ \sum_i x_i \otimes y_i &\mapsto \sum_i y_i \otimes x_i \end{aligned}$$

es isomorfismo de H-biálgebras.

Demostración.

$$\sigma : A_1 \otimes A_2 \to A_2 \otimes A_1$$
$$x \otimes y \mapsto y \otimes x$$

es isomorfismo de biálgebras. En particular, $\sigma(A_1 \otimes A_2)$ es coálgebra. Dado $\sum_i x_i \otimes y_i \in A_1 \otimes_B A_2$ se tiene que

$$(\pi \otimes \epsilon)(\sum_i y_i \otimes x_i) = \sum_i \pi(y_i)\epsilon(x_i) = \sum_i \epsilon(y_i)\pi(x_i) = (\epsilon \otimes \pi)(\sum_i y_i \otimes x_i),$$

luego $\sigma(A_1 \otimes_B A_2) \subseteq A_2 \otimes_B A_1$. Además, como $A_2 \otimes_B A_1 = \sigma(\sigma(A_2 \otimes_B A_1)) \subseteq \sigma(A_1 \otimes_B A_2)$, se tiene el enunciado. □

Lema 4.4.5. *Dado un elemento* $\sum_i x_i \otimes y_i \in A_1 \otimes_B A_2$ *se tiene que*

$$\sum_i \pi(x_{i_{(1)}}) \otimes x_{i_{(2)}} \otimes y_i = \sum_i \pi(y_{i_{(1)}}) \otimes x_i \otimes y_{i_{(2)}}.$$

Demostración. Por ser $A_1 \otimes_B A_2$ coálgebra,

$$\sum_i (x_{i_{(1)}} \otimes y_{i_{(1)}}) \otimes (x_{i_{(2)}} \otimes y_{i_{(2)}}) \in (A_1 \otimes_B A_2) \otimes (A_1 \otimes_B A_2)$$

y, por lo tanto,

$$\sum_i \pi(x_{i_{(1)}})\epsilon(y_{i_{(1)}}) \otimes x_{i_{(2)}} \otimes y_{i_{(2)}} = \sum_i \epsilon(x_{i_{(1)}})\pi(y_{i_{(1)}}) \otimes x_{i_{(2)}} \otimes y_{i_{(2)}},$$

luego

$$\sum_i \pi(x_{i_{(1)}}) \otimes x_{i_{(2)}} \otimes y_i = \sum_i \pi(y_{i_{(1)}}) \otimes x_i \otimes y_{i_{(2)}}.$$

□

Corolario 4.4.6. *Dado un elemento* $\sum_i x_i \otimes y_i \in A_1 \otimes_B A_2$ *se tiene que*

1. $\sum_i \pi(x_i) \otimes y_i = \sum_i \epsilon(x_i)\pi(y_{i_{(1)}}) \otimes y_{i_{(2)}}$

2. $\sum_i \pi(y_i) \otimes x_i = \sum_i \epsilon(y_i)\pi(x_{i_{(1)}}) \otimes x_{i_{(2)}}$

Demostración. Las identidades se obtienen aplicando $(1 \otimes \epsilon \otimes 1)$ y $(1 \otimes 1 \otimes \epsilon)$ respectivamente a la identidad del lema 4.4.5. □

Lema 4.4.7. *Si C es una subcoálgebra de $(A_1 \otimes A_2) \otimes A_3$, entonces* $\sum_{\xi \in A_1^*} (\xi \otimes 1 \otimes 1)(C)$ *es subcoálgebra de $A_2 \otimes A_3$.*

Demostración. Sea $D = \sum_{\xi \in A_1^*} (\xi \otimes 1 \otimes 1)(C)$. Dado $\sum_{i,j} x_i \otimes y_{ij} \otimes z_j \in C$,

$$\sum_{i,j} (x_{i_{(1)}} \otimes y_{ij_{(1)}} \otimes z_{j_{(1)}}) \otimes (x_{i_{(2)}} \otimes y_{ij_{(2)}} \otimes z_{j_{(2)}}) \in C \otimes C,$$

luego para cualquier $\xi \in A_1^*$

$$\sum_{i,j} \epsilon(x_{i_{(1)}}) \xi(x_{i_{(2)}})(y_{ij_{(1)}} \otimes z_{j_{(1)}}) \otimes (y_{ij_{(2)}} \otimes z_{j_{(2)}}) \in D \otimes D$$

$$\Longrightarrow \sum_{i,j} \xi(x_i)(y_{ij_{(1)}} \otimes z_{j_{(1)}}) \otimes (y_{ij_{(2)}} \otimes z_{j_{(2)}}) \in D \otimes D,$$

$$\Longrightarrow \Delta\left((\xi \otimes 1 \otimes 1)(\sum_{i,j} (x_i \otimes y_{ij} \otimes z_j)\right) \in D \otimes D.$$

□

Proposición 4.4.8. *La aplicación*

$$(A_1 \otimes_B A_2) \otimes_B A_3 \to A_1 \otimes_B (A_2 \otimes_B A_3)$$
$$\sum_i (x_i \otimes y_i) \otimes z_i \mapsto \sum_i x_i \otimes (y_i \otimes z_i)$$

es isomorfismo de H-biálgebras.

Demostración. Basta probar que

$$\sum_i (x_i \otimes y_i) \otimes z_i \in (A_1 \otimes_B A_2) \otimes_B A_3 \Leftrightarrow \sum_i x_i \otimes (y_i \otimes z_i) \in A_1 \otimes_B (A_2 \otimes_B A_3)$$

Veamos la implicación directa (la recíproca se prueba de manera análoga). Podemos asumir que $\{x_i\}_i$ es libre, lo que por linealidad determina el tensor $\sum_j y_{ij} \otimes z_j$ que acompaña a cada x_i. Hay que probar primero que $\sum_j y_{ij} \otimes z_j \in A_2 \otimes_B A_3$. Por el lema 4.4.7, $D = \sum_{\xi \in A_1^*} (\xi \otimes 1 \otimes 1)(A_1 \otimes A_2 \otimes A_3)$ es subcoálgebra de $A_2 \otimes A_3$. Además, usando la segunda identidad del corolario 4.4.6

$$(1 \otimes \pi \otimes \epsilon)\left(\sum_{i,j} x_i \otimes y_{ij} \otimes z_j\right) = \sum_{i,j} \epsilon(z_j) x_i \otimes \pi(y_{ij}) = \sum_{i,j} \epsilon(z_j)\epsilon(y_{ij}) x_{i_{(1)}} \otimes \pi(x_{i_{(2)}})$$

$$(1\otimes\epsilon\otimes\pi)\left(\sum_{i,j} x_i\otimes y_{ij}\otimes z_j\right)=(1\otimes\epsilon\otimes 1)\left(\sum_{i,j} x_i\otimes y_{ij}\otimes\pi(z_j)\right)$$
$$=(1\otimes\epsilon\otimes 1)\left(\sum_{i,j}\epsilon(z_j)(x_{i(1)}\otimes y_{ij_{(1)}})\otimes\pi(x_{i_{(2)}}\otimes y_{ij_{(2)}})\right)$$
$$=(1\otimes\epsilon\otimes 1)\left(\sum_{i,j}\epsilon(z_j)(x_{i(1)}\otimes y_{ij}\otimes\pi(x_{i_{(2)}}))\right)=\sum_{i,j}\epsilon(z_j)\epsilon(y_{ij})(x_{i_{(1)}}\otimes\pi(x_{i_{(2)}})),$$

por lo que $D\subseteq\ker(\pi\otimes\epsilon-\epsilon\otimes\pi)$ y, por tanto, $D\subseteq A_2\otimes_B A_3$. Puesto que $\sum_j y_{ij}\otimes z_j\in D$, entonces $\sum_{i,j} x_i\otimes(y_{ij}\otimes z_j)\in A_1\otimes(A_2\otimes A_3)$. Ahora bien,

$$(\epsilon\otimes\pi)\left(\sum_{i,j} x_i\otimes(y_{ij}\otimes z_j)\right)=\sum_{i,j}\epsilon(x_i)\pi(y_{ij})\epsilon(z_j)=\sum_{i,j}\pi(x_i)\epsilon(y_{ij})\epsilon(z_j)$$
$$=(\pi\otimes\epsilon)\left(\sum_{i,j} x_i\otimes(y_{ij}\otimes z_j)\right),$$

por lo que $\sum_{i,j} x_i\otimes(y_{ij}\otimes z_j)\in\ker(\epsilon\otimes\pi-\pi\otimes\epsilon)$. Como además

$$\left\{\sum_{i,j} x_i\otimes(y_{ij}\otimes z_j)\mid\sum_{i,j}(x_i\otimes y_{ij})\otimes z_j\in(A_1\otimes_B A_2)\otimes_B A_3\right\}$$

es subcoálgebra de $A_1\otimes(A_2\otimes_B A_3)$ entonces

$$\sum_{i,j} x_i\otimes(y_{ij}\otimes z_j)\in A_1\otimes_B(A_2\otimes_B A_3).$$

□

Definición 4.4.9. Un **grupo abeliano en la categoría slice** $\mathcal{H}/B$ es un objeto $\pi: A\to B\in\mathcal{H}/B$ junto con un morfismo *cero*

$$\begin{aligned}0:&B\to A\\ b&\mapsto 0_b,\end{aligned}$$

un morfismo *opuesto*

$$\begin{aligned}\boxminus:&A\to A\\ a&\mapsto\boxminus a,\end{aligned}$$

y un morfismo *suma*

$$\begin{aligned} \boxplus : A \otimes_B A &\to A \\ (a,b) &\mapsto a \boxplus b \end{aligned}$$

que verifican los axiomas usuales para la suma expresados en términos de diagramas conmutativos en la categoría $\mathcal{H}/B$.

Definición 4.4.10. Sean $\mathcal{H}$ la categoría de H-biálgebras punteadas coconmutativas y un objeto $B \in \mathcal{H}$. Un **módulo para** B es un grupo abeliano en la categoría slice $\mathcal{H}/B$.

Nota 4.4.11. Utilizaremos indistintamente las notaciones $a \boxplus b$ y $\boxplus(a \otimes b)$ para referirnos a la suma del grupo abeliano en la categoría slice $\mathcal{H}/B$.

Nota 4.4.12. Los diagramas conmutativos tienen sentido debido a los resultados previos. Escribimos las relaciones que se deducen de ellos:

Asociatividad: $(A \otimes_B A) \otimes_B A$ se identifica con $A \otimes_B (A \otimes_B A)$ y se tiene

$$\begin{tikzcd} A \otimes_B A \otimes_B A \arrow[r, "1\otimes\boxplus"] \arrow[d, "\boxplus\otimes 1"'] & A \otimes_B A \arrow[d, "\boxplus"] \\ A \otimes_B A \arrow[r, "\boxplus"'] & A \end{tikzcd} \qquad \sum_i (x_i \boxplus y_i) \boxplus z_i = \sum_i x_i \boxplus (y_i \boxplus z_i)$$

Conmutatividad: como $\sigma : x \otimes y \mapsto y \otimes x$ cumple $\sigma(A \otimes_B A) = A \otimes_B A$, entonces

$$\begin{tikzcd} A \otimes_B A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\boxplus"'] & A \otimes_B A \arrow[d, "\boxplus"] \\ A \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd} \qquad \sum_i x_i \boxplus y_i = \sum_i y_i \boxplus x_i$$

Cero: como $B \otimes_B A \equiv A \cong A \otimes_B B$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, equal] & A \otimes_B B \arrow[d, "1\otimes 0"] \\ A & A \otimes_B A \arrow[l, "\boxplus"] \end{tikzcd} \qquad \sum_i x_i \boxplus 0(b_i) = \sum_i \epsilon(b_i) x_i \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, equal] & B \otimes_B A \arrow[d, "0\otimes 1"] \\ A & A \otimes_B A \arrow[l, "\cong", "\boxplus"'] \end{tikzcd} \qquad \sum 0(\pi(x_{(1)})) \boxplus x_{(2)} = x$$

Opuesto: como $\Delta(A) \subseteq A \otimes_B A$, podemos escribir

$$\begin{tikzcd} A \otimes_B A \arrow[r, "1\otimes\Delta"] \arrow[d, "1\otimes\epsilon"'] & A \otimes_B A \otimes_B A \arrow[d, "1\otimes 1\otimes\boxminus"] \\ A & A \otimes_B A \otimes_B A \arrow[l, "\boxplus(\boxplus\otimes 1)"'] \end{tikzcd} \qquad \sum_i x_i \epsilon(y_i) = \sum_i \sum (x_i \boxplus y_{i_{(1)}}) \boxplus (\boxminus y_{i_{(2)}})$$

También se tiene que

$$(0(\pi(y_{(1)})) \boxplus y_{(2)}) \boxplus (\boxminus y_{(3)}) = \begin{cases} \sum 0(\pi(y_{(1)}))\epsilon(y_{(2)}) = 0(\pi(y)) \\ \sum y_{(1)} \boxplus (\boxminus y_{(2)}) \end{cases}$$

por lo que $\sum y_{(1)} \boxplus (\boxminus y_{(2)}) = 0(\pi(y)) = \sum(\boxminus y_{(1)}) \boxplus y_{(2)}$.

Definimos ahora el conjunto que actuará como módulo para la H-biálgebra B en la descomposición del grupo abeliano A.

Definición 4.4.13. Sea $\pi : A \to B$ un homomorfismo de H-biálgebras coconmutativas. Definimos la **fibra de π sobre la identidad** como el conjunto

$$\begin{aligned} F(A) = F(A;\pi) = &\text{ mayor subcoálgebra contenida en } \{x \in A \mid \pi(x) = \epsilon(x) \cdot 1\} \\ = &\text{ suma de todas las coálgebras contenidas en } \{x \in A \mid \pi(x) = \epsilon(x) \cdot 1\} \end{aligned}$$

Veamos las propiedades más importantes de $F(A)$.

Proposición 4.4.14. *$F(A)$ es una sub-H-biálgebra de A.*

Demostración. $F(A)$ es subcoálgebra, ya que

$$\Delta(F(A)F(A)) \subseteq \Delta(F(A))\Delta(F(A)) \subseteq F(A)F(A) \otimes F(A)F(A).$$

Dados dos elementos $u, v \in F(A)$, se tiene que $\pi(uv) = \pi(u)\pi(v) = \epsilon(u)\epsilon(v) = \epsilon(uv)$, luego $F(A)F(A) \subseteq F(A)$. Análogamente se obtiene que $F(A)/F(A) \subseteq F(A)$ y $F(A)\backslash F(A) \subseteq F(A)$. □

Proposición 4.4.15. *Para cualesquiera elementos $u \in F(A)$ y $x, y \in A$ se verifica que*

$$\sum x_{(1)}u/x_{(2)},\ \sum(ux_{(1)} \cdot y_{(1)})/x_{(2)}y_{(2)},\ \sum x_{(1)}y_{(1)}\backslash(x_{(2)} \cdot y_{(2)}u)\ \in F(A).$$

Demostración. El conjunto $\{\sum x_{(1)}u/x_{(2)} \mid u \in F(A), x \in A\}$ es una subcoálgebra de A contenida en $\{x \in A \mid \pi(x) = \epsilon(x) \cdot 1\}$:

$$\begin{aligned} \Delta(\sum x_{(1)}u/x_{(2)}) &= \sum \Delta(x_{(1)})\Delta(u)/\Delta(x_{(2)}) \\ &= \sum(x_{(1)(1)}u_{(1)}/x_{(2)(1)}) \otimes (x_{(1)(2)}u_{(2)}/x_{(2)(2)}) \\ \pi(\sum x_{(1)}u/x_{(2)}) &= \sum \pi(x_{(1)})\pi(u)/\pi(x_{(2)}) = \sum \epsilon(u)\pi(x_{(1)})/\pi(x_{(2)}) \\ &= \sum \epsilon(u)\epsilon(\pi(x)) \cdot 1 = \epsilon(u)\epsilon(x) \cdot 1 = \epsilon(ux) \cdot 1 = \epsilon(\sum x_{(1)}u/x_{(2)}) \cdot 1. \end{aligned}$$

Por tanto, está contenida en $F(A)$. De manera análoga se prueban las otras dos pertenencias. $\square$

Proposición 4.4.16. *Si A es una H-biálgebra punteada e irreducible, entonces $F(A)$ es la subálgebra unitaria generada por* $\mathrm{Prim}(A) \cap \ker \pi$, *donde* $\mathrm{Prim}(A)$ *es el conjunto de elementos primitivos de A.*

Demostración. Como A es punteada e irreducible, entonces $F(A)$ también lo es. Por tanto, $F(A)$ es el álgebra unitaria generada por el conjunto de sus elementos primitivos, es decir, $F(A) = \mathrm{alg}_1\langle \mathrm{Prim}(F(A))\rangle$. Como $\mathrm{Prim}(F(A)) = \mathrm{Prim}(A) \cap \ker \pi$ se tiene el resultado. $\square$

Proposición 4.4.17. *Sea $\pi : A \to B$ un grupo abeliano en la categoría $\mathcal{H}/B$. Se tiene que*

$$F(A) = \left\{\sum x_{(1)}/0(\pi(x_{(2)})) \mid x \in A\right\} = \left\{\sum 0(\pi(x_{(1)}))\backslash x_{(2)} \mid x \in A\right\}$$

Demostración. Hacemos la demostración por doble contenido. Si $x \in F(A)$, entonces $\pi(x) = \epsilon(x) \cdot 1$. Como $\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)} \in F(A) \otimes F(A)$, también $\pi(x_{(i)}) = \epsilon(x_{(i)}) \cdot 1$, luego

$$\sum x_{(1)}/0(\pi(x_{(2)})) = x/0(1) = x = 0(\pi(x_{(1)}))\backslash x_{(2)}.$$

Para probar el otro contenido, notar que los conjuntos $\left\{\sum x_{(1)}/0(\pi(x_{(2)})) \mid x \in A\right\}$ y $\left\{\sum 0(\pi(x_{(1)}))\backslash x_{(2)} \mid x \in A\right\}$ son coálgebras y que

$$\pi(\sum x_{(1)}/0(\pi(x_{(2)}))) = \sum \pi(x_{(1)})/\pi(x_{(2)}) = \epsilon(x) \cdot 1 = \epsilon(\sum x_{(1)}/0(\pi(x_{(2)}))) \cdot 1$$
$$\pi(\sum 0(\pi(x_{(1)}))\backslash x_{(2)}) = \sum \pi(x_{(1)})\backslash \pi(x_{(2)}) = \epsilon(x) \cdot 1 = \epsilon(\sum 0(\pi(x_{(1)}))\backslash x_{(2)}) \cdot 1.$$

$\square$

Proposición 4.4.18. *Sea $\pi : A \to B$ un grupo abeliano en la categoría $\mathcal{H}/B$. Se tiene que*

$$A = F(A)0(B) = 0(B)F(A).$$

Demostración. Dado un elemento $x \in A$ podemos escribirlo como

$$x = \sum x_{(1)}/0\pi(x_{(2)}) \cdot 0\pi(x_{(3)}) = \sum 0\pi(x_{(1)}) \cdot 0\pi(x_{(2)})\backslash x_{(3)}.$$

$\square$

Proposición 4.4.19. *Sea $\pi : A \to B$ un grupo abeliano en la categoría $\mathcal{H}/B$. Se tiene que*

$$A \cong F(A) \otimes B \cong B \otimes F(A)$$

como espacios vectoriales.

Demostración. Sea la aplicación

$$\begin{aligned} F(A) \otimes B &\to A \\ \sum_i x_i \otimes b_i &\mapsto \sum_i x_i 0(b_i). \end{aligned}$$

La proposición anterior muestra que esta aplicación es suprayectiva. Veamos que es inyectiva: sea $\sum_i x_i \otimes b_i \in F(A) \otimes B$ tal que $\sum_i x_i 0(b_i) = 0$; comprobamos que $\sum_i x_i \otimes b_i$ es cero. Aplicando Δ se tiene que

$$\sum_i x_{i_{(1)}} 0(b_{i_{(1)}}) \otimes x_{i_{(2)}} 0(b_{i_{(2)}}) = 0 \otimes 0.$$

Aplicando $1 \otimes \pi$, como $x_{i_{(2)}} \in F(A)$,

$$\sum_i x_i 0(b_{i_{(1)}}) \otimes b_{i_{(2)}} = 0 \otimes 0.$$

Aplicando $1 \otimes \Delta$,

$$\sum_i x_i 0(b_{i_{(1)}}) \otimes b_{i_{(2)}} \otimes b_{i_{(3)}} = 0 \otimes 0 \otimes 0.$$

Aplicando $1 \otimes 0 \otimes 1$:

$$\sum_i x_i 0(b_{i_{(1)}}) \otimes 0(b_{i_{(2)}}) \otimes b_{i_{(3)}} = 0 \otimes 0 \otimes 0.$$

Finalmente, aplicando $/ \otimes 1$ se tiene:

$$\sum_i x_i \otimes b_i = 0 \otimes 0$$

como buscábamos. $\square$

Nota 4.4.20. Para probar estos resultados no se han utilizado ni $\boxplus$ ni $\boxminus$, por tanto son válidos en un contexto más general que el de grupos abelianos. Basta con que $\pi : A \to B$ sea tal que exista una aplicación cero que haga que el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "0"] \arrow[dr, equal] & A \arrow[d, "\pi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Nota 4.4.21. Notar que $0(B) \cong B$ como biálgebras. A veces haremos uso de esta identificación para simplificar la notación en las cuentas. Por ejemplo, para un elemento $b \in B$ la igualdad $\sum_i 0(\pi(b_{(1)})) \boxplus b_{(2)} = b$ puede escribirse como

$$\sum b_{(1)} \boxplus b_{(2)} = b,$$

ya que $\pi(b_{(1)}) = b_{(1)}$.

Proposición 4.4.22. *Dados $x, x' \in F(A)$ se cumple que*

$$xx' = x \boxplus x'.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \boxplus(x \otimes x') &= \boxplus(x\,0(1) \otimes 0(1)\,x') = \boxplus(x \otimes 0(1) \cdot 0(1) \otimes x') \\ &= \boxplus(x \otimes 0(1)) \cdot \boxplus(0(1) \otimes x') = x \cdot x'. \end{aligned}$$

□

Corolario 4.4.23. *$F(A)$ es una sub-H-biálgebra de A conmutativa y asociativa.*

Lema 4.4.24. *Sean $x, x' \in F(A)$ y $b \in B$. Se tiene que*

$$\begin{aligned} (xx')b &= \sum xb_{(1)} \boxplus x'b_{(2)} \\ b(xx') &= \sum b_{(1)}x \boxplus b_{(2)}x'. \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \sum xb_{(1)} \boxplus x'b_{(2)} &= \sum \boxplus(xb_{(1)} \otimes x'b_{(2)}) = \sum \boxplus(x \otimes x' \cdot b_{(1)} \otimes b_{(2)}) \\ &= \boxplus(x \otimes x') \cdot \boxplus\left(\sum b_{(1)} \otimes b_{(2)}\right) = (xx')b \\ \sum b_{(1)}x \boxplus b_{(2)}x' &= \sum \boxplus(b_{(1)}x \otimes b_{(2)}x') = \sum \boxplus(b_{(1)} \otimes b_{(2)} \cdot x \otimes x') \\ &= \boxplus\left(\sum b_{(1)} \otimes b_{(2)}\right) \cdot \boxplus(x \otimes x') = b(xx') \end{aligned}$$

□

Definición 4.4.25. Se definen las aplicaciones

$$\begin{aligned}
ul(b,b') &= \sum b_{(1)}b'_{(1)}\backslash(b_{(2)}\cdot b'_{(2)}u)\\
ur(b,b') &= \sum(ub_{(1)}\cdot b'_{(1)})/b_{(2)}b'_{(2)}\\
ut(b) &= \sum b_{(1)}\backslash ub_{(2)}\\
us(b,b') &= \sum(b_{(1)}\cdot ub'_{(1)})/b_{(2)}b'_{(2)}\\
u\bar{s}(b,b') &= \sum b_{(1)}b'_{(1)}\backslash(b_{(2)}u\cdot b'_{(2)})\\
u\bar{t}(b,b') &= \sum b_{(1)}u/b_{(2)},
\end{aligned}$$

donde $u\in A$, $b,b'\in B$.

Lema 4.4.26. *$F(A)$ es estable por las aplicaciones anteriores.*

Demostración. Sean $u\in F(A)$, $b,b'\in B$

$$\begin{aligned}
\pi(ul(b,b')) &= \pi\left(\sum b_{(1)}b'_{(1)}\backslash(b_{(2)}\cdot b'_{(2)}u)\right) = \sum b_{(1)}b'_{(1)}\backslash(b_{(2)}b'_{(2)}\epsilon(u)) = \epsilon(bb')\epsilon(u)\\
&= \epsilon(ul(b,b'))\cdot 1\\
\pi(ur(b,b')) &= \pi\left(\sum(ub_{(1)}\cdot b'_{(1)})/b_{(2)}b'_{(2)}\right) = \sum(\epsilon(u)b_{(1)}b'_{(1)})/b_{(2)}b'_{(2)} = \epsilon(u)\epsilon(bb')\\
&= \epsilon(ur(b,b'))\cdot 1\\
\pi(ut(b)) &= \pi\left(\sum b_{(1)}\backslash ub_{(2)}\right) = \sum b_{(1)}\backslash\epsilon(u)b_{(2)} = \epsilon(u)\epsilon(b) = \epsilon(ut(b))\cdot 1\\
\pi(us(b,b')) &= \pi\left(\sum(b_{(1)}\cdot ub'_{(1)})/b_{(2)}b'_{(2)}\right) = \sum(b_{(1)}\cdot\epsilon(u)b'_{(1)})/b_{(2)}b'_{(2)} = \epsilon(u)\epsilon(bb')\\
&= \epsilon(us(b,b'))\cdot 1\\
\pi(u\bar{s}(b,b')) &= \pi\left(\sum b_{(1)}b'_{(1)}\backslash(b_{(2)}u\cdot b'_{(2)})\right) = \sum b_{(1)}b'_{(1)}\backslash(b_{(2)}\epsilon(u)\cdot b'_{(2)}) = \epsilon(bb')\epsilon(u)\\
&= \epsilon(u\bar{s}(b,b'))\cdot 1\\
\pi(u\bar{t}(b,b')) &= \pi\left(\sum b_{(1)}u/b_{(2)}\right) = \sum b_{(1)}\epsilon(u)/b_{(2)} = \epsilon(b)\epsilon(u) = \epsilon(u\bar{t}(b,b'))\cdot 1.
\end{aligned}$$

□

Podemos recuperar el producto en $A=F(A)B$ a través de los productos en $F(A)$ y en B y de la acción de B en $F(A)$ dada por las aplicaciones anteriores (comparar con la fórmula para recuperar el producto en un grupo abeliano a través de la acción del estabilizador universal 4.3.7).

Proposición 4.4.27. *Sean $x, x' \in F(A)$ y $b, b' \in B$. Se tiene que*

$$xb \cdot x'b' = \sum \left(xr(b_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot x's(b_{(2)}, b'_{(2)}) \right) \cdot b_{(3)}b'_{(3)}$$
$$bx \cdot b'x' = \sum b_{(1)}b'_{(1)} \cdot \left(x\bar{s}(b_{(2)}, b'_{(2)}) \cdot x'l(b_{(3)}, b'_{(3)}) \right).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
&\sum \left(xr(b_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot x's(b_{(2)}, b'_{(2)}) \right) \cdot b_{(3)}b'_{(3)} \\
&\quad \overset{4.4.24}{=} \sum \left(xr(b_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot b_{(2)}b'_{(2)} \right) \boxplus \left(x's(b_{(3)}, b'_{(3)}) \cdot b_{(4)}b'_{(4)} \right) \\
&\quad = \sum \boxplus \left(xb_{(1)} \cdot b'_{(1)} \otimes b_{(2)} \cdot x'b'_{(2)} \right) \\
&\quad = \boxplus \left(\sum xb_{(1)} \otimes b_{(2)} \right) \cdot \boxplus \left(\sum b'_{(1)} \otimes x'b'_{(2)} \right) = xb \cdot x'b'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum b_{(1)}b'_{(1)} \cdot \left(x\bar{s}(b_{(2)}, b'_{(2)}) \cdot x'l(b_{(3)}, b'_{(3)}) \right) \\
&\quad \overset{4.4.24}{=} \sum \left(b_{(1)}b'_{(1)} \cdot x\bar{s}(b_{(2)}, b'_{(2)}) \right) \boxplus \left(b_{(3)}b'_{(3)} \cdot x'l(b_{(4)}, b'_{(4)}) \right) \\
&\quad = \sum \boxplus \left(b_{(1)}x \cdot b'_{(1)} \otimes b_{(2)} \cdot b'_{(2)}x' \right) \\
&\quad = \boxplus \left(\sum b_{(1)}x \otimes b_{(2)} \right) \cdot \boxplus \left(\sum b'_{(1)} \otimes b_{(2)}x' \right) = bx \cdot b'x'.
\end{aligned}$$

□

Proposición 4.4.28. *Sea φ cualquiera de los operadores $l, r, s, \bar{s}$ anteriores. Se tiene que*

$$(xx')\varphi(b, b') = \sum x\varphi(b_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot x'\varphi(b_{(2)}, b'_{(2)})$$
$$(xx')t(b) = \sum xt(b_{(1)}) \cdot x't(b_{(2)})$$
$$(xx')\bar{t}(b) = \sum x\bar{t}(b_{(1)}) \cdot x'\bar{t}(b_{(2)}).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
&\sum (b_{(1)}b'_{(1)}) \cdot \left(xl(b_{(2)}, b'_{(2)}) \cdot x'l(b_{(3)}, b'_{(3)}) \right) \\
&\quad = \sum \left(b_{(1)}b'_{(1)} \cdot xl(b_{(2)}, b'_{(2)}) \right) \boxplus \left(b_{(3)}b'_{(3)} \cdot xl(b_{(4)}, b'_{(4)}) \right) \\
&\quad = \sum b_{(1)} \cdot b'_{(1)}x \boxplus b_{(2)} \cdot b'_{(2)}x = b(b' \cdot xx') \\
&\qquad \Longrightarrow \sum xl(b_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot x'l(b_{(2)}, b'_{(2)}) = \sum (b_{(1)}b'_{(1)}) \backslash \left(b_{(2)}(b'_{(2)} \cdot xx') \right) = (xx')l(b, b')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum \left(xr(b_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot x'r(b_{(2)}, b'_{(2)}) \right) \cdot (b_{(3)}b'_{(3)}) \\
&\quad = \sum \left(xr(b_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot (b_{(2)}b'_{(2)}) \right) \boxplus \left(x'r(b_{(3)}, b'_{(3)}) \cdot (b_{(4)}b'_{(4)}) \right)
\end{aligned}$$

$$= \sum xb_{(1)} \cdot b'_{(1)} \boxplus x'b_{(2)} \cdot b'_{(2)} = (xx' \cdot b)b'$$

$$\Longrightarrow \sum xr(b_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot x'r(b_{(2)}, b'_{(2)}) = \sum \Big((xx' \cdot b_{(1)})b'_{(1)}\Big) /(b_{(2)}b'_{(2)}) = (xx')r(b, b')$$

$$\sum \Big(xs(b_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot x's(b_{(2)}, b'_{(2)})\Big) \cdot (b_{(3)}b'_{(3)})$$

$$= \sum \Big(xs(b_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot (b_{(3)}b'_{(3)})\Big) \boxplus \Big(x's(b_{(2)}, b'_{(2)}) \cdot (b_{(3)}b'_{(3)})\Big)$$

$$= \sum b_{(1)} \cdot xb_{(2)} \boxplus \sum b_{(1)} \cdot x'b_{(2)} = b(xx' \cdot b')$$

$$\Longrightarrow \sum xs(b_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot x's(b_{(2)}, b'_{(2)}) = \sum \Big(b_{(1)}(xx' \cdot b'_{(1)})\Big) /(b_{(3)}b'_{(3)}) = (xx')s(b, b')$$

$$\sum (b_{(1)}b'_{(1)}) \cdot \Big(x\bar{s}(b_{(2)}, b'_{(2)}) \cdot x'\bar{s}(b_{(3)}, b'_{(3)})\Big)$$

$$= \sum \Big((b_{(1)}b'_{(1)}) \cdot x\bar{s}(b_{(2)}, b'_{(2)})\Big) \boxplus \Big((b_{(3)}b'_{(3)}) \cdot x'\bar{s}(b_{(4)}, b'_{(4)})\Big)$$

$$= \sum b_{(1)}x \cdot b'_{(1)} \boxplus b_{(2)}x \cdot b'_{(2)} = (b \cdot xx')b'$$

$$\Longrightarrow \sum x\bar{s}(b_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot x'\bar{s}(b_{(2)}, b'_{(2)}) = \sum (b_{(1)}b'_{(1)})\backslash(b_{(2)} \cdot xx')b'_{(2)} = (xx')\bar{s}(b, b')$$

$$\sum b_{(1)} \cdot \big(xt(b_{(2)}) \cdot x't(b_{(3)})\big)$$

$$= \sum \big(b_{(1)} \cdot xt(b_{(2)})\big) \boxplus \big(b_{(3)} \cdot x't(b_{(4)})\big) = \sum xb_{(1)} \boxplus x'b_{(2)} = (xx')b$$

$$\Longrightarrow \sum xt(b_{(1)}) \cdot x't(b_{(2)}) = \sum b_{(1)}\backslash(xx')b_{(2)} = (xx')t(b)$$

$$\sum \big(x\bar{t}(b_{(1)}) \cdot x'\bar{t}(b_{(2)})\big) \cdot b_{(3)}$$

$$= \sum \big(x\bar{t}(b_{(1)}) \cdot b_{(2)}\big) \boxplus \big(x'\bar{t}(b_{(3)}) \cdot b_{(4)}\big) = \sum b_{(1)}x \boxplus b_{(2)}x' = b(xx')$$

$$\Longrightarrow \sum x\bar{t}(b_{(1)}) \cdot x'\bar{t}(b_{(2)}) = \sum b_{(1)}(xx')/b_{(2)} = (xx')\bar{t}(b).$$

□

Proposición 4.4.29. *Sean $x, x' \in F(A)$ y $b, b' \in B$. Se verifica que*

$$x \cdot x'b = xx' \cdot b,\ bx \cdot x' = b \cdot xx' \ \text{y}\ xb \cdot x' = x \cdot bx'.$$

Demostración. Las igualdades del enunciado son consecuencia de las fórmulas para el producto en la proposición 4.4.27:

$$x \cdot x'b = \sum \big(xr(1, b_{(1)}) \cdot x's(1, b_{(2)})\big) \cdot b_{(3)} = xx' \cdot b$$

$$bx \cdot x' = \sum b_{(1)} \cdot \big(x\bar{s}(b_{(2)}, 1) \cdot x'l(b_{(3)}, 1)\big) = b \cdot xx'$$

$$xb \cdot x' = \sum \big(x \cdot (b_{(1)}x'/b_{(2)})\big) \cdot b_{(3)} = \sum xb_{(1)} \boxplus b_{(2)}x'$$

$$x \cdot bx' = \sum b_{(1)} \big(x\bar{s}(1, b_{(2)}) \cdot x'l(1, b_{(3)})\big) = \sum b_{(1)} \big((b_{(2)}\backslash xb_{(3)}) \cdot x'\big) = \sum xb_{(1)} \boxplus b_{(2)}x'.$$

□

Extendiendo la notación anterior se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.4.30. *Para cualesquiera elementos $x, x', x'' \in F(A)$ y $b, b' \in B$ se verifica*

$$x''l(xb, x'b') = \epsilon(x)\epsilon(x')x''l(b, b')$$
$$x''r(xb, x'b') = \epsilon(x)\epsilon(x')x''lrb, b').$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
&\sum (x_{(1)}b_{(1)} \cdot x'_{(1)}b'_{(1)}) \cdot x''l(x_{(2)}b_{(2)}, x'_{(2)}b'_{(2)}) = xb \cdot (x'b' \cdot x'') \\
&= \sum xb \cdot \Big(x' \cdot (b'_{(1)}x''/b'_{(2)})\Big) b'_{(3)} \\
&= \sum \Big(xl(b_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot \Big(x' \cdot (b'_{(2)})x''/b'_{(3)}\Big) s(b_{(2)}, b'_{(4)})\Big) \cdot b_{(3)}b'_{(5)} \\
&= \sum \Big(\Big(xl(b_{(1)}, b'_{(1)})\ x's(b_{(2)}, b'_{(3)})\Big) \cdot (b'_{(3)}x''/b'_{(4)})s(b_{(3)}, b'_{(5)})\Big) \cdot b_{(4)}b'_{(6)} \\
&= \sum \Big(\Big(xl(b_{(1)}, b'_{(1)})\ x's(b_{(2)}, b'_{(3)})\Big) \cdot \Big((b_{(3)} \cdot b'_{(3)}x'')/b_{(4)}b'_{(4)}\Big)\Big) \cdot b_{(5)}b'_{(5)} \\
&\sum \Big(x_{(1)}b_{(1)} \cdot x'_{(1)}b'_{(1)}\Big) \cdot x''l(b_{(2)}, b'_{(2)}) \\
&= \sum \Big(\Big(xl(b_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot x's(b_{(2)}, b'_{(2)})\Big) \cdot b_{(3)}b'_{(3)}\Big) \cdot x''l(b_{(4)}, b'_{(4)}) \\
&= \sum \Big((xl(b_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot x's(b_{(2)}, b'_{(2)})) \cdot \Big((b_{(3)} \cdot b'_{(3)}x'')/b_{(4)}b'_{(4)}\Big)\Big) \cdot b_{(5)}b'_{(5)}.
\end{aligned}$$

Por tanto, dividiendo a izquierda por $xb \cdot x'b'$ se tiene la primera igualdad. La prueba de la segunda es análoga. □

4.5. Equivalencia entre módulos para lazos formales y módulos para álgebras de Sabinin

Definición 4.5.1 (Mostovoy, Pérez-Izquierdo, [MPI10])**.** Dado un espacio vectorial V, un **lazo formal sobre** V es una aplicación lineal $F : k[V \times V] \to V$ tal que $F(1) = 0$ y $F|_{k[V]\otimes 1} = \pi_V = F|_{1\otimes k[V]}$, donde π_V es la proyección canónica de $k[V]$ en V.

En [MPI10] se demuestra que las categorías de lazos formales, álgebras de Sabinin y biálgebras unitarias punteadas conexas coconmutativas y coasociativas son equivalentes.

Veamos cómo esta equivalencia de categorías nos da una teoría de módulos para álgebras de Sabinin: el análogo para estos objetos a la bien conocida estructura de extensión nula escindida (split null-extension) de un grupo por un módulo dada por Eilenberg [Eil48].

Definición 4.5.2 (Eilenberg, [Eil48])**.** Si G es un grupo, entonces un G**-módulo** M es un grupo abeliano $(M, +)$ junto con un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} T : G &\to \mathrm{Aut}(M) \\ q &\mapsto (m \mapsto mT(q)) \end{aligned}$$

Definiendo para cada $g \in G$ $\tau(g) = T(g^{-1})$, el conjunto $M \times G$ con el producto

$$(m_1, g_1)(m_2, g_2) = (m_1 + m_2\tau(g_1), g_1 g_2)$$

es un grupo $M \sqsupset G$ conocido como **extensión nula escindida de** G **por** M. De hecho, existe una sucesión exacta de grupos

$$1 \to M \xrightarrow{i} M \sqsupset G \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

con $i : m \mapsto (m, e)$ y $\pi : (m, g) \mapsto g$ escindida por

$$\begin{aligned} 0 : G &\to M \sqsupset G \\ q &\mapsto (0, q). \end{aligned}$$

La acción del grupo se recupera de la extensión escindida mediante

$$mT(g)i = miR((0, g))L((0, g))^{-1}$$

para $m \in M$ y $g \in G$.

A lo largo de esta sección se asume que K es un cuerpo de característica cero y A es una biálgebra unitaria punteada y conexa. La aplicación $\boxplus$ se asume asociativa y conmutativa, con identidad

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[ur, "0"] \arrow[r, equal] & B. \end{tikzcd}$$

La equivalencia de categorías dada en [MPI10] nos permite escribir cada biálgebra como envolvente universal de una cierta álgebra de Sabinin: $A = U(\bar{S})$, $B = U(S)$ y

$F(A) = U(M)$, para las correspondientes álgebras de Sabinin $\bar{S}, S, M$. El diagrama conmutativo anterior puede restringirse a los elementos primitivos de cada una de las biálgebras:

$$\begin{tikzcd} & \bar{S} \arrow[d, "\pi|_{\bar{S}}"] \\ S \arrow[ur, "0|_S"] \arrow[r, equal] & S, \end{tikzcd}$$

de manera que $\bar{S} = S \oplus \ker(\pi|_{\bar{S}})$. Como $M \subseteq \ker(\pi|_{\bar{S}}) \subseteq M$, $\bar{S} = S \oplus M$ como espacios vectoriales. Puesto que $\boxplus$ es asociativa y conmutativa, $F(A)$ también lo es, luego M es un álgebra de Sabinin trivial debido a la definición de los operadores de Sabinin en términos de elementos primitivos dada en [SU02] y, por tanto, $F(A) = U(M) \cong K[M]$, el álgebra simétrica en M. El siguiente resultado muestra que las operaciones multilineales del álgebra de Sabinin $\bar{S}$ se anulan cuando dos o más de sus argumentos están en M (que jugará el papel de módulo para el álgebra de Sabinin S).

Proposición 4.5.3. *Sean $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_m, z \in S \cup M$. Se tiene que*

$$\langle x_1, \ldots x_n; z\rangle = 0 \ si \ \mid \{x_1, \ldots x_n, z\} \cap M \mid \geq 2$$
$$\Phi(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots y_m) = 0 \ si \ \mid \{x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_m\} \cap M \mid \geq 2.$$

Demostración. Recordar que si $u = ((x_1x_2)\cdots)x_n$ y $v = ((y_1y_2)\cdots)y_m$ entonces se definen recursivamente los elementos $p_{n,m}(u, v, z)$ mediante la fórmula [SU02] (ver definición 3.2.4)

$$(u, v, z) = \sum u_{(1)}v_{(1)} \cdot \underbrace{p(\underline{u_{(2)}}; \underline{v_{(2)}}; z)}_{\in \bar{S}}.$$

Por tanto, para obtener el resultado basta probar que $p(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots y_m; z) = 0$ si $d =\mid \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_m, z\} \cap M \mid \geq 2$. Observamos que si $x \in M$ entonces $xr(b, b')$, $xs(b, b') \in M$ $\forall b, b' \in B$ puesto que pertenecen a $\mathrm{Prim}(A) \cap F(A)$. La proposición 4.4.28 nos dice entonces que $K[M]_{d'}B \cdot K[M]_{d''}B \subseteq K[M]_{d'+d''}B$, donde $K[M]_{d'}$ son los polinomios homogéneos de grado d' en M. Puesto que $(u, v, z) \in K[M]_dB$, entonces

$$\sum_{\substack{\text{en } u_{(2)}, v_{(2)}, z \\ \text{aparecen al menos} \\ \text{dos elementos de } M}} u_{(1)}v_{(1)} \cdot p(\underline{u_{(2)}}; \underline{v_{(2)}}; z) = 0.$$

Veamos por inducción en $n+m$ lo que se busca:

$\underline{n+m=1:}$

$$u = x_1, v = 1, z \in M \overset{4.5}{\Longrightarrow} p(x_1; 1; z) = 0$$

$$u = 1, v = y_1, z \in M \overset{4.5}{\Longrightarrow} p(1; y_1; z) = 0$$

$\underline{\text{Supuesto hasta } n+m:}$

$$0 = \sum_{\substack{\text{en } u_{(2)}, v_{(2)}, z \\ \text{aparecen al menos} \\ \text{dos elementos de } M}} u_{(1)} v_{(1)} \cdot p(\underline{u_{(2)}}; \underline{v_{(2)}}; z) \overset{\text{inducción}}{=} p(u; v; z) + 0$$

□

Nota 4.5.4. También se tiene que $[x_1, x_2] = 0$ si $x_1, x_2 \in M$, ya que $F(A)$ es conmutativa.

Corolario 4.5.5. *$\bar{S}$ es una extensión nula escindida de S por M.*

Esto nos dice que M es un módulo (en el sentido de Eilenberg) para S. Por tanto, dados F lazo formal y S la correspondiente álgebra de Sabinin tangente, tenemos que las equivalencias

grupos abelianos en la categoría slice de lazos formales sobre Q (módulos para Q)	$\equiv$	grupos abelianos en la categoría slice de bialgebras irreducibles sobre $U(S)$ (módulos para $U(S)$)	$\equiv$	módulos para S (en el sentido de Eilenberg)

extienden la conocida correspondencia para grupos y álgebras de Lie

módulos para el grupo de Lie local G	$\equiv$	módulos para $U(L)$	$\equiv$	módulos para el álgebra de Lie tangente $L = T_e(G)$

4.6. En breve / Summarizing

4.6.1. En breve

En este capítulo se ha extendido la definición categórica de representación de cuasigrupos propuesta por Smith en [Smi92] al contexto de H-biálgebras. Usando la equivalencia entre las categorías de lazos formales, álgebras de Sabinin y biálgebras punteadas probada por Shestakov y Umirbaev en [SU02] y Mostovoy y Pérez-Izquierdo en [MPI10] se tiene una definición de representación y de módulo escindido para estas estructuras.

4.6.2. Summarizing

In this chapter we extended the categorical definition of quasigroup representation proposed by Smith in [Smi92] to the H-bialgebra setting. Using the equivalences of categories of formal loops, Sabinin algebras and pointed bialgebras proved by Shestakov and Umirbaev in [SU02] and Mostovoy and Pérez-Izquierdo in [MPI10] we give a definition of representation and split module for these structures.

Capítulo 5

Representaciones relativas de álgebras de Malcev

A lo largo de todo el capítulo se usará notación a derecha para las aplicaciones salvo que se indique lo contrario.

5.1. Introducción / Introduction

5.1.1. Introducción

Definición 5.1.1 (Kuzmin, [Kuz68]). Sean $\mathfrak{M}$ un álgebra de Malcev sobre un cuerpo F de característica distinta de 2, V un espacio vectorial sobre F y $\rho : \mathfrak{M} \to End_F(V)$ ($x \mapsto \rho_x$) una aplicación lineal. Se dice que ρ es una **representación de** $\mathfrak{M}$ si para cualesquiera elementos $x, y, z \in \mathfrak{M}$ se tiene que

$$\rho_{xy\cdot z} = \rho_x\rho_y\rho_z - \rho_z\rho_x\rho_y + \rho_y\rho_{zx}$$

o, equivalentemente, si el álgebra definida en $V \oplus \mathfrak{M}$ mediante el producto

$$(v + x)(w + y) = v\rho_y - w\rho_x + xy \tag{5.1.1}$$

es un álgebra de Malcev. En este caso V es un **módulo para** $\mathfrak{M}$.

Los resultados fundamentales que describen los módulos para las álgebras de Malcev son debidos a Carlsson [Car76] y Elduque [Eld90]. Como se prueba en ellos, la mayor parte de los módulos para álgebras de Malcev son módulos para álgebras de Lie.

Teorema (Carlsson [Car76]). *Sobre cuerpos de característica cero*

(a) Cualquier módulo irreducible para $sl(2,F)$ vista como álgebra de Malcev es o bien un módulo para $sl(2,F)$ como álgebra de Lie o bien un módulo 2-dimensional con base $\{v,w\}$ tal que si $\{e,f,h\}$ es una base de $sl(2,F)$ con $eh=e$, $fh=f$ y $ef=\frac{1}{2}f$, entonces la acción de $sl(2,F)$ viene dada por

$$v\cdot h=v,\ w\cdot h=-w,\ v\cdot e=w,\ v\cdot f=0,\ w\cdot e=0, w\cdot f=-v.$$

Este módulo se dice de tipo M_2.

(b) Cualquier módulo irreducible para el álgebra de Malcev simple central 7-dimensional $\mathbb{O}_0$ es o bien trivial o bien isomorfo al módulo adjunto.

Teorema (Carlsson [Car76]). *Sea $\mathfrak{M}$ un álgebra de Malcev semisimple sobre un cuerpo de caracerística cero y sea $\mathfrak{M}=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathfrak{M}_i$ su descomposición como suma directa de ideales simples. Se tiene que cualquier $\mathfrak{M}$-módulo V para $\mathfrak{M}$ admite una descomposición $V=\bigoplus_{j=1}^{r}V_j$ como suma directa de submódulos V_j que satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) V_1 es el submódulo de Lie maximal de V.

(b) Para cada $2\leq j\leq r$ existe un único $1\leq k\leq n$ tal que o bien $\mathfrak{M}_k\cong sl(2,F)$ y V_j es un módulo de tipo M_2 para $\mathfrak{M}_k$ o bien $\mathfrak{M}_k\cong\mathbb{O}_0$ y V_j es isomorfo al módulo adjunto para $\mathfrak{M}_k$. En cualquiera de los dos casos $V_j\mathfrak{M}_k=0$ si $j\neq k$.

Teorema (Elduque [Eld90]). *Sea $\mathfrak{M}$ un álgebra de Malcev semisimple sobre un cuerpo de característica cero y sea $\mathfrak{M}=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathfrak{M}_i$ su descomposición como suma directa de ideales simples. Se tiene que cualquier $\mathfrak{M}$-módulo V para $\mathfrak{M}$ admite una descomposición $V=\bigoplus_{j=1}^{r}V_j$ como suma directa de submódulos V_j que satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *V_1 es el submódulo de Lie maximal de V.*

2. *Para cada $2\leq j\leq r$ existe un único $1\leq k\leq n$ tal que $V_j\mathfrak{M}_k=0$ si $j\neq k$ y se tiene uno de los siguientes casos:*

(a) $\mathfrak{M}_k$ *es de dimensión tres sobre su centroide* Γ_k *y* V_j *tiene estructura de espacio vectorial sobre* Γ_k *compatible con la acción de* $\mathfrak{M}_k$ *de manera que* V_j *es o bien un módulo de tipo* M_2 *o de tipo* $\mathcal{Q}$ *para* $\mathfrak{M}_k$ *sobre* Γ_k*, dependiendo de si* $\mathfrak{M}_k$ *es o no split sobre* Γ_k*.*

(b) $\mathfrak{M}_k$ *es un álgebra de Malcev simple que no es de Lie y* V_j *es el módulo adjunto para* $\mathfrak{M}_k$*.*

Teorema (Elduque [Eld90])**.** *Sea* $\mathfrak{M}$ *un álgebra de Malcev clásica (esto es, un álgebra de Lie clásica o el álgebra de Malcev simple central 7-dimensional) sobre un cuerpo de característica distinta de 2 y de 3 y sea* $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i$ *su descomposición como suma directa de ideales simples. Se tiene que cualquier* $\mathfrak{M}$*-módulo* V *para* $\mathfrak{M}$ *admite una descomposición* $V = \bigoplus_{j=1}^{r} V_j$ *como suma directa de submódulos* V_j *que satisfacen las siguientes condiciones:*

1. V_1 *es el submódulo de Lie maximal de* V *y es anulado por todos los ideales de* $\mathfrak{M}$ *isomorfos a* $\mathbb{O}_0$*.*

2. *Para cada* $2 \leq j \leq r$ *existe un único* $1 \leq k \leq n$ *tal que o bien* $\mathfrak{M}_k \cong sl(2, F)$ *y* V_j *es un módulo de tipo* M_2 *o bien* $\mathfrak{M}_k \cong \mathbb{O}_0$ *y* V_j *es isomorfo al módulo adjunto para* $\mathbb{O}_0$*. En ambos casos se tiene que* $V_j M_k = 0$ *si* $j \neq k$*.*

En el capítulo anterior hemos visto la teoría de representación que propone Smith para lazos ([Smi07]).

Nota 5.1.2. Recordar que el estabilizador universal del elemento identidad $e \in Q$ en el grupo universal de multiplicación $U(Q; \boldsymbol{Q})$. Este grupo universal de multiplicación es el subgrupo generado por los operadores de multiplicación a izquierda y a derecha por elementos de Q del grupo de multiplicación de una cierta estructura universal que contiene a Q (ver definición 4.2.5).

Teorema (Teorema Fundamental de las Representaciones de Lazos, Smith, [Smi07])**.** *Sea* Q *un lazo en la variedad* $\mathcal{V}$ *con elemento identidad* e *y sea* $U(Q; \mathcal{V})$ *el grupo universal de multiplicación de* Q *en* $\mathcal{V}$*. Se tiene que la categoría de los* Q*-módulos, definidos como grupos abelianos en la categoría slice* $\mathcal{V}/Q$ *es equivalente a la categoría de módulos sobre el estabilizador universal* $U(Q; \mathcal{V})_e$*.*

Por tanto, si Q es un lazo en la variedad $\mathcal{V}$ y $E \twoheadrightarrow Q$ es un módulo en la categoría de lazos se tiene la sucesión exacta corta escindida

$$V \rightarrowtail E \underset{i}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} Q$$

con V grupo abeliano. En ese caso $E = VQ$ y V es estable por las operaciones $l, r, s, \bar{s}, t, \bar{t}$ definidas en 4.4.25, es decir, V es estable por $\mathrm{Mlt}_E(Q)_e$, el estabilizador del elemento neutro $e \in Q$ en el grupo de multiplicación

$$\mathrm{Mlt}_E(Q) = \mathrm{Grp}\langle L_a, R_a : E \to E \mid a \in Q\rangle,$$

de manera que puede definirse el producto en $E = VQ$ como

$$(x, a) \cdot (y, b) = (xr(a, b) + ys(a, b), ab).$$

Para asegurar que $E \in \mathcal{V}$, se impone que la acción de determinados elementos de $\mathbb{Z}U(Q; \mathcal{V})_e$ se anule, una condición excesivamente restrictiva.

Si Q es un lazo de Moufang y $E \twoheadrightarrow Q$ es un módulo en la categoría de lazos, entonces existe un grupo abeliano V tal que se tiene la sucesión exacta corta escindida

$$V \hookrightarrow E \underset{\iota}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} Q$$

con $\iota \circ \pi = 1_Q$. En este caso $E = VQ$ y se dice que *los elementos de Q se representan en E actuando en V*. A nivel de espacios tangentes se induce otra sucesión exacta corta escindida

$$V \rightarrowtail \mathfrak{M}_E \underset{i}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathfrak{M}_Q,$$

donde V es un espacio vectorial, $\mathfrak{M}_E$ y $\mathfrak{M}_Q$ son álgebras de Malcev y $\mathfrak{M}_E = V \oplus \mathfrak{M}_Q$ con el producto definido en 5.1.1, donde $r : \mathfrak{M}_Q \to \mathrm{End}(V)$.

Esta definición para módulos con la que se ha trabajado hasta ahora resulta ser muy restrictiva, ya que se impone al grupo abeliano que esté en la misma variedad que el objeto que se quiere representar. Esta condición podría relajarse, sin perder las propiedades del objeto representado, imponiendo que los elementos del lazo (pero no necesariamente los del grupo abeliano V) "se comporten" de manera similar a como lo harían en la variedad a la que pertenecen.

El objetivo del presente capítulo es hacer uso de esta idea de comportamiento particularizando al caso de los lazos de Moufang y las álgebras de Malcev para dar una definición de módulos para estas álgebras que generalice la ya existente de manera que aparezcan representaciones nuevas que puedan ser integradas a representaciones del correspondiente lazo de Moufang. Para ello es necesario introducir el siguiente concepto.

Definición 5.1.3. Dado un lazo Q, un elemento $a \in Q$ se dice **elemento de Moufang de** Q si $\forall x, y \in Q$ se verifica que

$$a(x(ay)) = ((ax)a)y \quad \text{y} \quad ((xa)y)a = x(a(ya))$$

Denotaremos por $M(Q)$ al conjunto de todos los elementos de Moufang de Q.

Proposición 5.1.4 (Phillips, [Phi09]). *Para todo lazo Q, el conjunto de sus elementos de Moufang $M(Q)$ es un sublazo (de Moufang).*

Nota 5.1.5. Debido a este resultado, un lazo Q es de Moufang si y solo si $M(Q) = Q$.

Algunos ejemplos sencillos y bien conocidos de lazos de Moufang son los grupos (de manera trivial) y el conjunto de los octoniones de norma uno $S^7 = \{x \in \mathbb{O} \mid n(x) = 1\}$, también conocido como la esfera 7-dimensional.

La idea de relajar las condiciones acerca del comportamiento de los elementos representados imponiendo que solo ellos verifiquen los axiomas de la variedad a la que pertenecen se ilustra muy claramente en el siguiente resultado, donde se muestra una construcción de un lazo a partir de un grupo y dos módulos para ese grupo en la que los elementos del grupo son elementos de Moufang estrictos, es decir, verifican las identidades de Moufang pero no asocian con todos los demás elementos del lazo.

Proposición 5.1.6 (Ejemplos de grupos que actúan como elementos de Moufang en un lazo pero no están contenidos en su núcleo asociativo). *Sean G un grupo y V, W representaciones lineales de G. Se tiene que el conjunto $E = (V \otimes W) \times G$ con el producto*

$$\Big(\sum_i v_i \otimes w_i, a\Big)\Big(\sum_j v'_j \otimes w'_j, b\Big) = \Big(\sum_i v_i a^{-1}b^{-1}ab \otimes w_i + \sum_j v'_j b^{-1}a^2 b \otimes w'_j a^{-1}, ab\Big)$$

es un lazo, $V \otimes W \hookrightarrow E \underset{\iota}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} G$ es una sucesión exacta corta escindida, $\pi \circ \iota = 1_G$ y $G \subseteq M(E)$.

Si G es simple no abeliano y V es fiel, entonces $G \cap \mathrm{N}_{\mathrm{asoc}}(E) = \{e\}$, donde $\mathrm{N}_{\mathrm{asoc}}(E)$ es el núcleo asociativo de E (ver [ZSSS82]); es decir, los elementos de G son elementos de Moufang estrictos.

Demostración. Notar que se pueden identificar los elementos $a \in G$ con $(0, a) \in E$ y los elementos $v \otimes w \in V \otimes W$ con $(v \otimes w, 1) \in E$. Veamos que los elementos $(0, c) \in G$ actúan como elementos de Moufang en E:

$$\begin{aligned}
&(0,c)\cdot\Big((v\otimes w,a)\cdot\Big((0,c)\cdot(v'\otimes w',b)\Big)\Big)\\
&\qquad=(0,c)\cdot\Big((v\otimes w,a)\cdot(v'b^{-1}c^2b\otimes w'c^{-1},cb)\Big)\\
&\qquad=(0,c)\cdot\Big(va^{-1}b^{-1}c^{-1}acb\otimes w+v'b^{-1}c^2bb^{-1}c^{-1}a^2cb\otimes w'c^{-1}a^{-1},acb\Big)\\
&\qquad=(0,c)\cdot\Big(va^{-1}b^{-1}c^{-1}acb\otimes w+v'b^{-1}ca^2cb\otimes w'c^{-1}a^{-1},acb\Big)\\
&\qquad=(va^{-1}b^{-1}cacb\otimes wc^{-1}+v'b^{-1}cac^2acb\otimes w'c^{-1}a^{-1}c^{-1},cacb)\\
&\Big(\Big((0,c)\cdot(v\otimes w,a)\Big)\cdot(0,c)\Big)\cdot(v'\otimes w',b)\\
&\qquad=\Big((va^{-1}c^2a\otimes wc^{-1},ca)\cdot(0,c)\Big)\cdot(v'\otimes w',b)\\
&\qquad=(va^{-1}cac\otimes wc^{-1},cac)\cdot(v'\otimes w',b)\\
&\qquad=(va^{-1}b^{-1}cacb\otimes wc^{-1}+v'b^{-1}cac^2acb\otimes w'c^{-1}a^{-1}c^{-1},cacb)\\
&\Big(\Big((v\otimes w,a)\cdot(0,c)\Big)\cdot(v'\otimes w',b)\Big)\cdot(0,c)\\
&\qquad=\Big((va^{-1}c^{-1}ac\otimes w,ac)\cdot(v'\otimes w',b)\Big)\cdot(0,c)\\
&\qquad=(va^{-1}c^{-1}b^{-1}acb\otimes w+v'b^{-1}acacb\otimes w'c^{-1}a^{-1},acb)\cdot(0,c)\\
&\qquad=(va^{-1}c^{-1}b^{-1}c^{-1}acbc\otimes w+v'b^{-1}a^2cbc\otimes w'c^{-1}a^{-1},acbc)\\
&(v\otimes w,a)\cdot\Big((0,c)\cdot\Big((v'\otimes w',b)\cdot(0,c)\Big)\Big)\\
&\qquad=(v\otimes w,a)\cdot\Big((0,c)\cdot(v'b^{-1}c^{-1}bc\otimes w',bc)\Big)\\
&\qquad=(v\otimes w,a)\cdot(v'b^{-1}cbc\otimes w'c^{-1},cbc)\\
&\qquad=(va^{-1}c^{-1}b^{-1}c^{-1}acbc\otimes w+v'b^{-1}a^2cbc\otimes w'c^{-1}a^{-1},acbc).
\end{aligned}$$

Se definen la división a derecha y la división a izquierda en E respectivamente como

$$\begin{aligned}
(v\otimes w,a)/(v'\otimes w',b)&=(va^{-1}bab^{-1}\otimes w-v'b^{-1}a^2b^{-1}\otimes w'ba^{-1},ab^{-1})\\
(v\otimes w,a)\backslash(v'\otimes w',b)&=(-va^{-1}b^{-1}a^{-1}\otimes wa+v'b^{-1}a^{-2}b\otimes w'a,a^{-1}b).
\end{aligned}$$

Comprobamos que se verifican los axiomas para estos operadores de división:

$$\Big((v\otimes w,a)\cdot(v'\otimes w',b)\Big)/(v'\otimes w',b)$$

$$= (va^{-1}b^{-1}ab \otimes w + v'b^{-1}a^2b \otimes w'a^{-1}, ab)/(v' \otimes w', b)$$

$$= (va^{-1}b^{-1}abb^{-1}a^{-1}babb^{-1} \otimes w + v'b^{-1}a^2bb^{-1}a^{-1}babb^{-1} \otimes w'a^{-1}$$

$$- v'b^{-1}ababb^{-1} \otimes w'bb^{-1}a^{-1}, abb^{-1}) \qquad = (v \otimes w, a)$$

$$\Big((v \otimes w, a)/(v' \otimes w', b)\Big) \cdot (v' \otimes w', b)$$

$$= (va^{-1}bab^{-1} \otimes w - v'b^{-1}a^2b^{-1} \otimes w'ba^{-1}, ab^{-1}) \cdot (v' \otimes w', b)$$

$$= (va^{-1}bab^{-1}ba^{-1}b^{-1}ab^{-1}b \otimes w - v'b^{-1}a^2b^{-1}ba^{-1}b^{-1}ab^{-1}b \otimes w'ba^{-1}$$

$$+ v'b^{-1}ab^{-1}ab^{-1}b \otimes w'ba^{-1}, ab^{-1}b) \qquad = (v \otimes w, a)$$

$$(v \otimes w, a)\backslash\Big((v \otimes w, a) \cdot (v' \otimes w', b)\Big)$$

$$= (v \otimes w, a)\backslash(va^{-1}b^{-1}ab \otimes w + v'b^{-1}a^2b \otimes w'a^{-1}, ab)$$

$$= (-va^{-1}b^{-1}a^{-1}a^{-1}ab \otimes wa + v'b^{-1}a^2bb^{-1}a^{-2}b \otimes w'a^{-1}a$$

$$+ va^{-1}b^{-1}abb^{-1}a^2b \otimes wa, b) \qquad = (v' \otimes w', b)$$

$$(v \otimes w, a) \cdot \Big((v \otimes w, a)\backslash(v' \cdot w', b)\Big)$$

$$= (v \otimes w, a) \cdot (-va^{-1}b^{-1}a^{-1} \otimes wa + v'b^{-1}a^{-2}b \otimes w'a, a^{-1}b)$$

$$= (va^{-1}b^{-1}aaa^{-1}b \otimes w - va^{-1}b^{-1}a^{-1}bb^{-1}aa^2a^{-1}b \otimes waa^{-1}$$

$$+ v'b^{-1}a^{-2}bb^{-1}aa^2a^{-1}b \otimes w'aa^{-1}, aa^{-1}b) \qquad = (v' \otimes w', b).$$

Notar que dados dos elementos $a, c \in G$ se tiene que:

$$(0, c) \cdot \Big((0, a) \cdot (v' \otimes w', b)\Big) = (0, c) \cdot (v'b^{-1}a^2b \otimes w'a^{-1}, ab)$$

$$= (v'b^{-1}ac^2ab \otimes w'a^{-1}c^{-1}, cab)$$

$$\Big((0, c) \cdot (0, a)\Big) \cdot (v' \otimes w', b) = (0, ca) \cdot (v' \otimes w', b) = (v'b^{-1}cacab \otimes w'(ca)^{-1}, cab),$$

luego se tendrá la asociatividad con los elementos de G si y solamente si

$$v'b^{-1}ac^2ab = v'b^{-1}cacab$$

o, equivalentemente, si y solamente si $v'ac = v'ca$.

Por tanto, si V es una representación fiel y G es un grupo no abeliano, entonces los elementos de G no asocian en E (son elementos de Moufang estrictos). $\square$

A continuación se presentan las nuevas definiciones de módulos para lazos de Moufang y álgebras de Malcev.

Definición 5.1.7. Sean Q un lazo de Moufang y V un grupo abeliano. Decimos que un lazo E es un **módulo relativo para** Q si se tiene una sucesión exacta corta escindida

$$V \hookrightarrow E \underset{\iota}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} Q,$$

donde V es un grupo abeliano y un $U(Q;\mathcal{V})_e$-módulo, el producto es E está dado por

$$(x,a)\cdot(y,b) = (xr(a,b)+ys(a,b),ab)$$

y además, $\iota(Q)\subseteq M(E)$, los elementos de Moufang de E.

El espacio tangente a un lazo E que sea un módulo relativo para Q es un álgebra de Sabinin. La más simple de todas las operaciones de esta álgebra de Sabinin es el conmutador $[x+a,y+b]=[x,b]-[y,a]-[a,b]$, donde la aplicación adjunta $r_a : x\mapsto [x,a]$ verifica

$$[[r_a,r_b],r_c] = -[r_{[a,b]},r_c] + r_{[[a,b],c]+[[a,c],b]+[a,[b,c]]}, \tag{5.1.2}$$

debido a que E es un módulo relativo para Q y, por tanto, $\iota(\mathfrak{M}_Q)$ actúa como elementos de Malcev (esta identidad es una de las propiedades que verifican los operadores adjuntos en álgebras de Malcev: ver [Sag61, lema 2.10]). Como veremos, se puede reconstruir E únicamente a partir de $U(\mathfrak{M}_Q)$ y de esta operación.

Nota 5.1.8. En la fórmula anterior se usa la misma notación $[\ ,\ ]$ para el producto en el álgebra de Malcev y para el conmutador de los homomorfismos r_a. Esto será habitual a lo largo de la sección: si no hay ambigüedad se usará el corchete para denotar ambos productos.

Definición 5.1.9. Sea $\mathfrak{M}$ un álgebra de Malcev. Una **representación relativa de** $\mathfrak{M}$ es una aplicación lineal $r:\mathfrak{M}\to \mathrm{End}(V)$ que verifica

$$[[r_a,r_b],r_c] = -[r_{[a,b]},r_c] + r_{[[a,b],c]+[[a,c],b]+[a,[b,c]]},$$

El objetivo de este capítulo es probar que a partir de un módulo relativo para un álgebra de Malcev podemos obtener un módulo relativo para el correspondiente lazo de Moufang del que es álgebra tangente o, más específicamente, del lazo de Moufang formal de la biálgebra de distribuciones con soporte en el elemento neutro que se obtiene al integrar formalmente el álgebra de Malcev. La integración formal aparece descrita por primera vez para álgebras de Lie en [Ser65]. Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff construye un grupo formal. Considerando el álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$, $U(\mathfrak{g})$, la aplicación

$$U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \stackrel{\text{Prim}}{\to} \mathfrak{g},$$

donde la primera flecha representa el producto en $U(\mathfrak{g})$ y la segunda es la proyección en el espacio de elementos primitivos, e identificando $U(\mathfrak{g})$ con $S(\mathfrak{g})$ a través del teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, se obtiene un grupo formal tal que su álgebra tangente en el elemento neutro es el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Debido a la extensión del teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt a álgebras de Malcev (resp. álgebras de Sabinin) [PIS04] (resp. [PI07]), podemos usar este segundo método de integración formal para obtener lazos formales de Moufang (resp. lazos formales).

Por tanto, el resultado fundamental de este capítulo es el siguiente.

Teorema (Teorema de integración formal de módulos relativos)**.** *Sean $\mathfrak{M}$ un álgebra de Malcev y V un módulo relativo para $\mathfrak{M}$. Se tiene que $F[V] \otimes U(\mathfrak{M})$ con el producto dado por la fórmula*

$$pb \cdot p'b' = \sum \Big(p\, r(b_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot p' s(b_{(2)}, b'_{(2)})\Big) \cdot b_{(3)} b'_{(3)}$$

para cualesquiera elementos $p, p' \in F[V]$ y $b, b' \in U(\mathfrak{M})$, es una biálgebra punteada conexa cuyos elementos primitivos son $V \oplus \mathfrak{M}$ y que contiene a $\mathfrak{M}$ en el núcleo alternativo.

Previamente será necesario estudiar las propiedades de un álgebra de Lie asociada con el álgebra de Malcev $\mathfrak{M}$ y de su envolvente universal para comprender quiénes son los elementos $r(b, b')$ y $s(b, b')$ del teorema y cómo actúan sobre $F[V]$. Finalmente, se aplicarán los resultados obtenidos a los ejemplos clásicos, las álgebras de Lie semisimples y el álgebra $\mathbb{O}_0$ de los octoniones de traza cero, para comprobar que, en efecto, la teoría de módulos desarrollada resulta ser más general y más rica que la previamente conocida.

5.1.2. Introduction

Definition 5.1.10 (Kuzmin, [Kuz68])**.** Let $\mathfrak{M}$ be a Malcev algebra over a field F of characteristic not 2, V be a vector space over F and $\rho : \mathfrak{M} \to End_F(V)$ $(x \mapsto \rho_x)$ be a linear map. We say that ρ is a **representation of** $\mathfrak{M}$ if for any elements $x, y, z \in \mathfrak{M}$ we have that

$$\rho_{xy\cdot z} = \rho_x\rho_y\rho_z - \rho_z\rho_x\rho_y + \rho_y\rho_{zx}$$

or, equivalently, if the algebra defined in $V \oplus \mathfrak{M}$ by the product

$$(v + x)(w + y) = v\rho_y - w\rho_x + xy \tag{5.1.3}$$

is a Malcev algebra. In this case we say that V is a **module for** $\mathfrak{M}$.

The fundamental results describing modules for Malcev algebras are due to Carlsson [Car76] and Elduque [Eld90]. As shown in these papers, most part of modules for Malcev algebras are modules for Lie algebras.

Theorem (Carlsson [Car76])**.** *Over fields of characteristic zero*

(a) Any irreducible module for $sl(2, F)$ regarded as Malcev algebra is either a module for $sl(2, F)$ regarded as Lie algebra or a 2-dimensional module with basis $\{v, w\}$ such that if $\{e, f, h\}$ is a basis for $sl(2, F)$ with $eh = e$, $fh = f$ and $ef = \frac{1}{2}f$, then the action of $sl(2, F)$ is given by

$$v \cdot h = v,\ w \cdot h = -w,\ v \cdot e = w,\ v \cdot f = 0,\ w \cdot e = 0, w \cdot f = -v.$$

This module is said to be of type M_2.

(b) Any irreducible module for the 7-dimensional simple central Malcev algebra $\mathbb{O}_0$ is either trivial or isomorphic to the adjoint module.

Theorem (Carlsson [Car76])**.** *Let $\mathfrak{M}$ be a semisimple Malcev algebra over a field of characteristic zero and $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i$ its decomposition as direct sum of simple ideals. We have that any $\mathfrak{M}$-module V for $\mathfrak{M}$ admits a decomposition $V = \bigoplus_{j=1}^{r} V_j$ as direct sum of irreducible modules V_j which verify the following conditions:*

(a) V_1 is the maximal Lie submodule of V.

(b) For any $2 \leq j \leq r$ there exists a unique $1 \leq k \leq n$ such that either $\mathfrak{M}_k \cong sl(2, F)$ and V_j is a module of typeM_2 for $\mathfrak{M}_k$ or $\mathfrak{M}_k \cong \mathbb{O}_0$ and V_j is isomorphic to the adjoint module for $\mathfrak{M}_k$. In both cases $V_j\mathfrak{M}_k = 0$ if $j \neq k$.

Theorem (Elduque [Eld90]). *Let $\mathfrak{M}$ be a semisimple Malcev algebra over a field of characteristic zero and $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i$ its decomposition as direct sum of simple ideals. We have that any $\mathfrak{M}$-module V for $\mathfrak{M}$ admits a decomposition $V = \bigoplus_{j=1}^{r} V_j$ as direct sum of submodules V_j which verify the following conditions:*

1. *V_1 is the maximal Lie submodule of V.*
2. *For any $2 \leq j \leq r$ there exists a unique $1 \leq k \leq n$ such that $V_j \mathfrak{M}_k = 0$ if $j \neq k$ and we have one of the following:*
   (a) *$\mathfrak{M}_k$ is of dimension 3 over its centroid Γ_k and V_j has a vector space structure over Γ_k compatible with the action of $\mathfrak{M}_k$ such that V_j is either a module of type M_2 or of type $\mathcal{Q}$ for $\mathfrak{M}_k$ over Γ_k, depending on $\mathfrak{M}_k$ being or not split over Γ_k.*
   (b) *$\mathfrak{M}_k$ is a simple non-Lie Malcev algebra and V_j is the adjoint module for $\mathfrak{M}_k$.*

Theorem (Elduque [Eld90]). *Let $\mathfrak{M}$ be a classical Malcev algebra (i.e., a classical Lie algebra or the 7-dimensional simple central Malcev algebra) over a field of characteristic not 2 or 3 and $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i$ its decomposition as direct sum of simple ideals. We have that any $\mathfrak{M}$-module V for $\mathfrak{M}$ admits a desomposition $V = \bigoplus_{j=1}^{r} V_j$ as direct sum of submodules V_j which verify the following conditions:*

1. *V_1 is teh maximal Lie submodule of V and is annihilated by all the ideals of $\mathfrak{M}$ isomorphic to $\mathbb{O}_0$.*
2. *For any $2 \leq j \leq r$ there exists a unique $1 \leq k \leq n$ such that either $\mathfrak{M}_k \cong sl(2, F)$ and V_j is a module of type M_2 or $\mathfrak{M}_k \cong \mathbb{O}_0$ and V_j is isomorphic to the adjoint module for $\mathbb{O}_0$. In both cases we have that $V_j M_k = 0$ if $j \neq k$.*

In the previous chapter we studied the representation theory for loops proposed by Smith ([Smi07]). We summarize it here.

Definition 5.1.11. [Smith, [Smi07]] Let Q be a quasigroup on the variety $\mathcal{V}$ and $Q[X]$ be the free product on $\mathcal{V}$ of Q and the free quasigroup on $\mathcal{V}$ generated by one generator X. The quasigroup $Q[X]$ is the analogue of the polynomial ring and it is characterized by the following universal property: given a quasigroup Q' in the variety $\mathcal{V}$ and a $\mathfrak{V}$-epimorphism

$f : Q \to Q'$, then for each $x \in Q'$ there exists a unique $\mathcal{V}$-morphism such that

$$Q[X] \to Q'$$
$$a \in Q \mapsto f(a)$$
$$X \mapsto x.$$

We define the **universal multiplication group of Q in the variety $\mathcal{V}$** as $U(Q;\mathcal{V}) := \mathrm{Mlt}_{Q[X]}(Q)$.

Theorem (Fundamental theorem for representations of loops, Smith, [Smi07])**.** *Let Q be a loop in the variety $\mathcal{V}$ with identity element e and let $U(Q;\mathcal{V})$ be the universal multiplication group of Q in $\mathcal{V}$. The we have that the category of Q-modules, defined as abelian groups in the slice category $\mathcal{V}/Q$ is equivalent to the category of modules over the universal stabilizer $U(Q;\mathcal{V})_e$.*

Thus if Q is a loop in the variety $\mathcal{V}$ and $E \twoheadrightarrow Q$ is a module in the variety of loops then we have the split short exact sequence

$$V \rightarrowtail E \overset{\pi}{\underset{i}{\rightleftarrows}} Q$$

with V an abelian group. In this case $E = VQ$ and V is stable by the operations $l, r, s, \bar{s}, t, \bar{t}$ defined in 4.4.25, that is, V is stable by $\mathrm{Mlt}_E(Q)_e$, the stabilizer of the identity element $e \in Q$ in the multiplication group

$$\mathrm{Mlt}_E(Q) = \mathrm{Grp}\langle L_a, R_a : E \to E \mid a \in Q\rangle,$$

and we can define the product on $E = VQ$ by

$$(x, a) \cdot (y, b) = (xr(a, b) + ys(a, b), ab).$$

To ensure $E \in \mathcal{V}$, they impose that the annihilation of the action of certain elements $\mathbb{Z}U(Q;\mathcal{V})_e$, a very restrictive condition.

If Q is a Moufang loop and $E \twoheadrightarrow Q$ is a module in the category of loops then there exists an abelian group V such that we have the split short exact sequence

$$V \hookrightarrow E \overset{\pi}{\underset{\iota}{\rightleftarrows}} Q$$

with $\iota \circ \pi = 1_Q$. In this case $E = VQ$ and we say that *the elements of* Q *are represented in* E *acting in* V. It induces a split short exact sequence at the tangent space level

$$V \rightarrowtail \mathfrak{M}_E \underset{i}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathfrak{M}_Q,$$

where V is a vector space, $\mathfrak{M}_E$ and $\mathfrak{M}_Q$ are Malcev algebras and $\mathfrak{M}_E = V \oplus \mathfrak{M}_Q$ with the product defined in 5.1.3, where $r : \mathfrak{M}_Q \to \mathrm{End}(V)$.

This definition of modules we presented is very restrictive. It imposes to the abelian group to be in the same variety as the represented object. This condition could be relaxed, without losing the properties of the represented object, by imposing that the elements of the loop (but not necessarily the elements of the abelian group V) "behave" in the same way they would do as elements of the variety they belong to.

The goal of the present chapter is to illustrate this idea in the particular case of Moufang loops and Malcev algebras. This will give a definition of modules for this variety of algebras which generalizes the existing one and allows the appearance of new modules which can be integrated to modules of the corresponding Moufang loop. To do this, we need to introduce the following notion.

Definition 5.1.12. Given a loop Q, an element $a \in Q$ is said to be a **Moufang element of** Q if it verifies

$$a(x(ay)) = ((ax)a)y \quad \text{y} \quad ((xa)y)a = x(a(ya))$$

for any $x, y \in Q$. We will denote the set of all Moufang elements of Q by $M(Q)$.

Proposition 5.1.13 (Phillips, [Phi09])**.** *For any loop Q, the set of all its Moufang elements $M(Q)$ is a (Moufang) subloop of Q.*

Remark 5.1.14. Note tha a loop Q is a Moufang loop if and only if $M(Q) = Q$.

Some simple and well-known examples of Moufang loops are groups (trivially) and the set of 1-normed octonions $S^7 = \{x \in \mathbb{O} \mid n(x) = 1\}$, also known as the 7-dimensional sphere.

The idea of relaxing the conditions about the behavior of the represented elements by imposing that only them verify the axioms of the variety they belong to is clearly illustrated in the following result. We construct a loop stating with a group and two modules for it in which the elements of the group are strict Moufang elements, i.e., they are Moufang elements but they do not associate with the rest of the elements of the loop.

Proposition 5.1.15 (Some examples of groups acting as Moufang elements in a loop but not contained into its associative nucleus)**.** *Let G be a group and V, W linear representations of G. We have that the set $E = (V \otimes W) \times G$ with product*

$$\Big(\sum_i v_i \otimes w_i, a\Big)\Big(\sum_j v'_j \otimes w'_j, b\Big) = \Big(\sum_i v_i a^{-1}b^{-1}ab \otimes w_i + \sum_j v'_j b^{-1}a^2 b \otimes w'_j a^{-1}, ab\Big)$$

is a loop, $V \otimes W \hookrightarrow E \overset{\pi}{\underset{\iota}{\rightleftarrows}} G$ is a split short exact sequence, $\pi \circ \iota = 1_G$ and $G \subseteq M(E)$. If G is simple and non-abelian and V is faithful, then $G \cap \mathrm{N}_{\mathrm{asoc}}(E) = \{e\}$, where $\mathrm{N}_{\mathrm{asoc}}(E)$ is the associative nucleus of E (see [ZSSS82]); i.e., the elements of G are strict Moufang elements.

Proof. Note that we can identify elements $a \in G$ with $(0, a) \in E$ and elements $v \otimes w \in V \otimes W$ with $(v \otimes w, 1) \in E$. We have that elements $(0, c) \in G$ behave as Moufang elements in E:

$$\begin{aligned}
&(0,c)\cdot\Big((v\otimes w,a)\cdot\Big((0,c)\cdot(v'\otimes w',b)\Big)\Big)\\
&\quad= (0,c)\cdot\Big((v\otimes w,a)\cdot(v'b^{-1}c^2b\otimes w'c^{-1},cb)\Big)\\
&\quad= (0,c)\cdot\Big(va^{-1}b^{-1}c^{-1}acb\otimes w + v'b^{-1}c^2bb^{-1}c^{-1}a^2cb\otimes w'c^{-1}a^{-1},acb\Big)\\
&\quad= (0,c)\cdot\Big(va^{-1}b^{-1}c^{-1}acb\otimes w + v'b^{-1}ca^2cb\otimes w'c^{-1}a^{-1},acb\Big)\\
&\quad= (va^{-1}b^{-1}cacb\otimes wc^{-1} + v'b^{-1}cac^2acb\otimes w'c^{-1}a^{-1}c^{-1},cacb)\\
&\Big(\Big((0,c)\cdot(v\otimes w,a)\Big)\cdot(0,c)\Big)\cdot(v'\otimes w',b)\\
&\quad= \Big((va^{-1}c^2a\otimes wc^{-1},ca)\cdot(0,c)\Big)\cdot(v'\otimes w',b)\\
&\quad= (va^{-1}cac\otimes wc^{-1},cac)\cdot(v'\otimes w',b)\\
&\quad= (va^{-1}b^{-1}cacb\otimes wc^{-1} + v'b^{-1}cac^2acb\otimes w'c^{-1}a^{-1}c^{-1},cacb)\\
&\Big(\Big((v\otimes w,a)\cdot(0,c)\Big)\cdot(v'\otimes w',b)\Big)\cdot(0,c)\\
&\quad= \Big((va^{-1}c^{-1}ac\otimes w,ac)\cdot(v'\otimes w',b)\Big)\cdot(0,c)\\
&\quad= (va^{-1}c^{-1}b^{-1}acb\otimes w + v'b^{-1}acacb\otimes w'c^{-1}a^{-1},acb)\cdot(0,c)\\
&\quad= (va^{-1}c^{-1}b^{-1}c^{-1}acbc\otimes w + v'b^{-1}a^2cbc\otimes w'c^{-1}a^{-1},acbc)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(v\otimes w,a)\cdot\Big((0,c)\cdot\Big((v'\otimes w',b)\cdot(0,c)\Big)\Big)\\
&\qquad=(v\otimes w,a)\cdot\Big((0,c)\cdot(v'b^{-1}c^{-1}bc\otimes w',bc)\Big)\\
&\qquad=(v\otimes w,a)\cdot(v'b^{-1}cbc\otimes w'c^{-1},cbc)\\
&\qquad=(va^{-1}c^{-1}b^{-1}c^{-1}acbc\otimes w+v'b^{-1}a^2cbc\otimes w'c^{-1}a^{-1},acbc).
\end{aligned}
$$

We define right and left division in E as follows:

$$
\begin{aligned}
(v\otimes w,a)/(v'\otimes w',b)&=(va^{-1}bab^{-1}\otimes w-v'b^{-1}a^2b^{-1}\otimes w'ba^{-1},ab^{-1})\\
(v\otimes w,a)\backslash(v'\otimes w',b)&=(-va^{-1}b^{-1}a^{-1}\otimes wa+v'b^{-1}a^{-2}b\otimes w'a,a^{-1}b).
\end{aligned}
$$

We check that these division maps verify the axioms for being a loop:

$$
\begin{aligned}
&\Big((v\otimes w,a)\cdot(v'\otimes w',b)\Big)/(v'\otimes w',b)\\
&\qquad=(va^{-1}b^{-1}ab\otimes w+v'b^{-1}a^2b\otimes w'a^{-1},ab)/(v'\otimes w',b)\\
&\qquad=(va^{-1}b^{-1}abb^{-1}a^{-1}babb^{-1}\otimes w+v'b^{-1}a^2bb^{-1}a^{-1}babb^{-1}\otimes w'a^{-1}\\
&\qquad-v'b^{-1}ababb^{-1}\otimes w'bb^{-1}a^{-1},abb^{-1})\qquad=(v\otimes w,a)\\
&\Big((v\otimes w,a)/(v'\otimes w',b)\Big)\cdot(v'\otimes w',b)\\
&\qquad=(va^{-1}bab^{-1}\otimes w-v'b^{-1}a^2b^{-1}\otimes w'ba^{-1},ab^{-1})\cdot(v'\otimes w',b)\\
&\qquad=(va^{-1}bab^{-1}ba^{-1}b^{-1}ab^{-1}b\otimes w-v'b^{-1}a^2b^{-1}ba^{-1}b^{-1}ab^{-1}b\otimes w'ba^{-1}\\
&\qquad+v'b^{-1}ab^{-1}ab^{-1}b\otimes w'ba^{-1},ab^{-1}b)\qquad=(v\otimes w,a)\\
&(v\otimes w,a)\backslash\Big((v\otimes w,a)\cdot(v'\otimes w',b)\Big)\\
&\qquad=(v\otimes w,a)\backslash(va^{-1}b^{-1}ab\otimes w+v'b^{-1}a^2b\otimes w'a^{-1},ab)\\
&\qquad=(-va^{-1}b^{-1}a^{-1}a^{-1}ab\otimes wa+v'b^{-1}a^2bb^{-1}a^{-2}b\otimes w'a^{-1}a\\
&\qquad+va^{-1}b^{-1}abb^{-1}a^2b\otimes wa,b)\qquad=(v'\otimes w',b)\\
&(v\otimes w,a)\cdot\Big((v\otimes w,a)\backslash(v'\cdot w',b)\Big)\\
&\qquad=(v\otimes w,a)\cdot(-va^{-1}b^{-1}a^{-1}\otimes wa+v'b^{-1}a^{-2}b\otimes w'a,a^{-1}b)\\
&\qquad=(va^{-1}b^{-1}aaa^{-1}b\otimes w-va^{-1}b^{-1}a^{-1}bb^{-1}aa^2a^{-1}b\otimes waa^{-1}\\
&\qquad+v'b^{-1}a^{-2}bb^{-1}aa^2a^{-1}b\otimes w'aa^{-1},aa^{-1}b)\qquad=(v'\otimes w',b).
\end{aligned}
$$

Note that given two elements $a, c \in G$ we have that

$$\begin{aligned}(0,c)\cdot\Big((0,a)\cdot(v'\otimes w',b)\Big) &= (0,c)\cdot(v'b^{-1}a^2b\otimes w'a^{-1},ab)\\ &= (v'b^{-1}ac^2ab\otimes w'a^{-1}c^{-1},cab)\\ \Big((0,c)\cdot(0,a)\Big)\cdot(v'\otimes w',b) &= (0,ca)\cdot(v'\otimes w',b) = (v'b^{-1}cacab\otimes w'(ca)^{-1},cab).\end{aligned}$$

Thus associativity of the elements of G with the elements of $V\otimes W$ holds if and only if

$$v'b^{-1}ac^2ab = v'b^{-1}cacab$$

or, equivalently, if and only if $v'ac = v'ca$.
Thus if V is a faithful representation and G is a non-abelian group the the elements of G do not associate in E (i.e., they are strict Moufang elements). □

We now present the new definitions of modules for Moufang loops and Malcev algebras.

Definition 5.1.16. Let Q be a Moufang loop and V be an abelian group. We say that a loop E is a **relative module for** Q if we have a split short exact sequence

$$V \hookrightarrow E \underset{\iota}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} Q,$$

where V is an abelian group and a $U(Q;\mathcal{V})_e$-module, the product in E is given by

$$(x,a)\cdot(y,b) = (xr(a,b)+ys(a,b),ab)$$

and $\iota(Q)\subseteq M(E)$, the set of Moufang elements of E.

The tangent algebra of a loop E wich is a relative module for Q is a Sabinin algebra. The simplest of the operations in this Sabinin algebra is the commutator $[x+a,y+b] = [x,b]-[y,a]-[a,b]$, where the adjoint map $r_a : x\mapsto [x,a]$ verifies

$$[[r_a,r_b],r_c] = -[r_{[a,b]},r_c] + r_{[[a,b],c]+[[a,c],b]+[a,[b,c]]}, \tag{5.1.4}$$

because E is a relative modules for Q, so $\iota(\mathfrak{M}_Q)$ acts as Malcev elements on E (this identity is one the properties verified by the adjoint operators in Malcev algebras, see [Sag61, lemma 2.10]). As we will see later, we can reconstruct E only from $U(\mathfrak{M}_Q)$ and this operation.

Remark 5.1.17. Note that in the previous formula 5.1.4 we use the same notation [,] for the product of the Malcev algebra and the commutator of the maps r_a. This will be usual along the chapter: if there is no ambiguity we will use the brackets to denote both products.

Definition 5.1.18. Let $\mathfrak{M}$ be a Malcev algebra . A **relative representation of** $\mathfrak{M}$ is a lineal map $r : \mathfrak{M} \to \mathrm{End}(V)$ which verifies

$$[[r_a, r_b], r_c] = -[r_{[a,b]}, r_c] + r_{[[a,b],c]+[[a,c],b]+[a,[b,c]]},$$

The main goal of this chapter is to prove that starting with a relative module for a Malcev algebra we obtain a relative module for the corresponding Moufang loop of which it is the tangent algebra (more precisely, of the Moufang loop of the bialgebra of distributions with support at the identity element that we obtain by formally integrating the Malcev algebra). Formal integration firt appeared for Lie algebras in [Ser65]. Given a Lie algebra $\mathfrak{g}$, the Campbell-Baker-Hausdorff formula gives a formal group. If we consider the universal enveloping algebra of $\mathfrak{g}$, $U(\mathfrak{g})$, then we can contruct the map

$$U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \overset{\mathrm{Prim}}{\to} \mathfrak{g},$$

where the first arrow represents the product in $U(\mathfrak{g})$ and the second arrow is the projection onto the space of primitive elements. If we identify $U(\mathfrak{g})$ with $S(\mathfrak{g})$ via the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem, the we obtain a formal group such that its tangent algebra in the identity element coincides with the initial Lie algebra $\mathfrak{g}$. Since we can extend the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem to Malcev (resp. Sabinin) algebras [PIS04] (resp. [PI07]), we can use this second method of formal integration to obtain formal Moufang (resp. formal) loops.

Thus the main result of this chapter is the following:

Theorem (Theorem of formal integration of relative modules)**.** *Let $\mathfrak{M}$ be a Malcev algebra and V be a relative module for $\mathfrak{M}$. We have that $F[V] \otimes U(\mathfrak{M})$ with product given by*

$$pb \cdot p'b' = \sum \Big(p\, r(b_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot p' s(b_{(2)}, b'_{(2)})\Big) \cdot b_{(3)} b'_{(3)}$$

for any elements $p, p' \in F[V]$ and $b, b' \in U(\mathfrak{M})$, is a connected pointed bialgebra whose primitive elements are $V \oplus \mathfrak{M}$ and which contains $\mathfrak{M}$ in the generalized alternative nucleus.

First we need to study the properties of certain Lie algebra $\mathcal{L}(\mathfrak{M})$ associated to the Malcev algebra $\mathfrak{M}$ and the properties of its universal enveloping algebra $U(\mathcal{L}(\mathfrak{M}))$ to understand the elements $r(b,b')$ y $s(b,b')$ in the theorem and how they act over $F[V]$.

We finally apply the obtained results to the classical examples: semisimple Lie algebras and the algebra $\mathbb{O}_0$ of the traceless octonions to check that this new representation theory is really more general and provides more modules than the previous existing theory.

5.2. Integración formal de módulos relativos para álgebras de Malcev

5.2.1. El álgebra de Lie $\mathcal{L}(\mathfrak{M}) = \mathcal{L}(\mathfrak{M})_+ \oplus T_{\mathfrak{M}}$

Definición 5.2.1. Sea $\mathfrak{M}$ un álgebra de Malcev. Se define

$$\mathcal{L}(\mathfrak{M}_Q)_+ = Lie\left\langle \mathrm{ad}_a \;\middle|\; \begin{array}{l} a \in \mathfrak{M}_Q, \quad \mathrm{ad}_{\alpha a+\beta b} = \alpha\,\mathrm{ad}_a + \beta\,\mathrm{ad}_b \;\; \forall a,b \in \mathfrak{M}_Q, \alpha,\beta \in F \\ \left[[\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b], \mathrm{ad}_c\right] + \left[\mathrm{ad}_{[a,b]}, \mathrm{ad}_c\right] - \mathrm{ad}_{[[a,b],c]+[[a,c],b]+[a,[b,c]]} \end{array} \right\rangle.$$

Nota 5.2.2. En la definición anterior los diferentes ad_a son símbolos abstractos, aunque se pueden especializar a las aplicaciones adjuntas usuales

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{M} &\to \mathrm{End}(\mathfrak{M}) \\ a &\mapsto \mathrm{ad}_a : x \to [xa], \end{aligned}$$

ya que $\mathfrak{M}_Q$ es un módulo relativo para sí misma.

Proposición 5.2.3. *Se tiene que la categoría de módulos relativos para $\mathfrak{M}_Q$ es equivalente a la categoría de módulos para $\mathcal{L}(\mathfrak{M}_Q)_+$.*

Demostración. Es inmediata de la fórmula 5.1.2. □

Nota 5.2.4. Notar que la condición que define a $\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+$ se verifica para los operadores adjuntos $\mathrm{ad}_a : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M},\ x \mapsto [xa]$ ([Sag61, lema 2.10]). Esta condición permite que el conjunto

$$\{\mathrm{ad}_a, [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b] \mid a, b \in \mathfrak{M}\}$$

genere linealmente el álgebra $\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+$. El conjunto

$$\{\mathrm{ad}_a, D_{a,b} \mid a, b \in \mathfrak{M}\},$$

donde los operadores $D_{a,b}$ están definidos por la fórmula

$$D_{a,b} = -\tfrac{1}{2}(\mathrm{ad}_{[a,b]} + [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b]). \tag{5.2.1}$$

también genera linealmente esta álgebra de Lie.

Definimos el conjunto $T_{\mathfrak{M}} = \{T_x \mid x \in \mathfrak{M}\}$, donde los elementos T_x son símbolos abstractos subindicados por los elementos de álgebra de Malcev $\mathfrak{M}$.

Lema 5.2.5. *El conjunto $\mathcal{L}(\mathfrak{M}) = \mathcal{L}(\mathfrak{M})_+ \oplus T_{\mathfrak{M}}$ es un álgebra de Lie con el producto definido por las fórmulas*

$$\begin{aligned}
&[T_x, \mathrm{ad}_a] = T_{[x,a]}\\
&[T_x, [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b]] = T_{[[x,a],b]-[[x,b],a]}\\
&[T_a, T_b] = \tfrac{1}{3}(\mathrm{ad}_{[a,b]} + 2D_{[a,b]}) = \tfrac{1}{3}(2\,\mathrm{ad}_{[a,b]} + [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b]).
\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Demostración. Notar que el producto definido es antisimétrico. Comprobemos que se verifica la identidad de Jacobi:

$$\begin{aligned}
&[[T_a, T_b], T_c] + [[T_b, T_c], T_a] + [[T_c, T_a], T_b]\\
&\quad = \tfrac{1}{3}\Big([2\,\mathrm{ad}_{[a,b]} + [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b], T_c] + [2\,\mathrm{ad}_{[b,c]} + [\mathrm{ad}_b, \mathrm{ad}_c], T_a] + [2\,\mathrm{ad}_{[c,a]} + [\mathrm{ad}_c, \mathrm{ad}_a], T_b]\Big)\\
&\quad = \tfrac{1}{3}\Big(2T_{[[a,b],c]} - T_{[[c,a],b]-[[c,b],a]} + 2T_{[[b,c],a]} - T_{[[a,b],c]-[[a,c],b]}\\
&\qquad + 2T_{[[c,a],b]} - T_{[[b,c],a]-[[b,a],c]}\Big) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[[T_a, T_b], \mathrm{ad}_x] + [[T_b, \mathrm{ad}_x], T_a] + [[\mathrm{ad}_x, T_a], T_b]\\
&\quad = \tfrac{1}{3}[2\,\mathrm{ad}_{[a,b]} + [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b], \mathrm{ad}_x] + [T_{[b,x]}, T_a] + [T_{[x,a]}, T_b]\\
&\quad = \tfrac{1}{3}\Big(2[\mathrm{ad}_{[a,b]}, \mathrm{ad}_x] - [\mathrm{ad}_{[a,b]}, \mathrm{ad}_x] + \mathrm{ad}_{[[a,b],x]+[[a,x],b]+[a,[b,x]]}\\
&\qquad + 2\,\mathrm{ad}_{[[b,x],a]} + [\mathrm{ad}_{[b,x]}, \mathrm{ad}_a] + 2\,\mathrm{ad}_{[[x,a],b]} + [\mathrm{ad}_{[x,a]}, \mathrm{ad}_b]\Big)\\
&\quad = \mathrm{ad}_{[a,[b,x]]+[b,[x,a]]+[x,[a,b]]} + \mathrm{ad}_{[[a,b],x]+[[b,x],a]+[[x,a],b]} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[[T_x, \mathrm{ad}_a], \mathrm{ad}_b] + [[\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b], T_x] + [[\mathrm{ad}_b, T_x], \mathrm{ad}_a]\\
&\quad = [T_{[x,a]}, \mathrm{ad}_b] - T_{[[x,a],b]-[[x,b],a]} + [T_{[b,x]}, \mathrm{ad}_a]\\
&\quad = T_{[[x,a],b]} - T_{[[x,a],b]-[[x,b],a]} + T_{[[b,x],a]} = 0.
\end{aligned}$$

Los demás productos se deducen de la definición de $D_{a,b}$:

$$[\mathrm{ad}_x, D_{a,b}] = \mathrm{ad}_{xD_{a,b}}$$

$$[T_x, D_{a,b}] = T_{xD_{a,b}}$$
$$[D_{x,y}, D_{a,b}] = D_{xD_{a,b},y} + D_{x,yD_{a,b}},$$

donde $xD_{a,b} = -\frac{1}{2}\Big([x,[a,b]] + [[x,a],b] - [[x,b],a]\Big) \in \mathfrak{M}$. Recordar que los operadores actúan por la derecha.

$$\begin{aligned}[]
[\mathrm{ad}_x, D_{a,b}] &= -\tfrac{1}{2}[\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_{[a,b]} + [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b]] = -\tfrac{1}{2}\Big([\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_{[a,b]}] + [\mathrm{ad}_{[a,b]}, \mathrm{ad}_x] \\
&\qquad - \mathrm{ad}_{[[a,b],x]+[[a,x],b]+[a,[b,x]]}\Big) = \mathrm{ad}_{\frac{1}{2}([[a,b],x]+[[a,x],b]+[a,[b,x]])} = \mathrm{ad}_{xD_{a,b}} \\
[T_x, D_{a,b}] &= -\tfrac{1}{2}[T_x, \mathrm{ad}_{[a,b]} + [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b]] = -\tfrac{1}{2}\Big(T_{[x,[a,b]]} + T_{[[x,a],b]-[[x,b],a]}\Big) = T_{xD_{a,b}} \\
[D_{x,y}, D_{a,b}] &= -\tfrac{1}{2}[\mathrm{ad}_{[x,y]} + [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y], D_{a,b}] \\
&= -\tfrac{1}{2}\Big([\mathrm{ad}_{[x,y]}, D_{a,b}] + [[\mathrm{ad}_x, D_{a,b}], \mathrm{ad}_y] + [\mathrm{ad}_x, [\mathrm{ad}_y, D_{a,b}]]\Big) \\
&= -\tfrac{1}{2}\Big(\mathrm{ad}_{[x,y]D_{a,b}} + [\mathrm{ad}_{xD_{a,b}}, \mathrm{ad}_y] + [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_{yD_{a,b}}]\Big) \\
&= -\tfrac{1}{2}\Big(\mathrm{ad}_{[xD_{[a,b]}],y} + \mathrm{ad}_{x,yD_{[a,b]}} + [\mathrm{ad}_{xD_{a,b}}, \mathrm{ad}_y] + [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_{yD_{a,b}}]\Big) \\
&= D_{xD_{a,b},y} + D_{x,yD_{a,b}}.
\end{aligned}$$

Para las últimas igualdades se han usado la identidad del Jacobi de $\mathcal{L}(\mathfrak{M})$ y el hecho de que $D_{a,b}$ son derivaciones del álgebra de Malcev $\mathfrak{M}$ ([Sag61]). □

Proposición 5.2.6. *El álgebra de Lie $\mathcal{L}(\mathfrak{M})$ es isomorfa al álgebra de Lie $\mathcal{L}(\mathfrak{M})$ definida por Pérez-Izquierdo y Shestakov en [PIS04].*

Demostración. En el trabajo de Pérez-Izquierdo y Shestakov se utiliza notación a izquierda para los operadores, mientras que en este capítulo se trabaja con notación a derecha. Para probar el isomorfismo del enunciado, primero debemos escribir las relaciones que verifican los operadores de multiplicación por elementos del núcleo alternativo de un álgebra no necesariamente asociativa A y, por tanto, las relaciones que definen el álgebra $\mathcal{L}(\mathfrak{M})$ en [PIS04]. Dados $a, b \in \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$, $x \in A$,

- La condición a izquierda $[L_a, R_b] = [R_a, L_b]$ se expresa en A como

  $$a \cdot xb - ax \cdot b = bx \cdot a - b \cdot xa$$

  y se reescribe con notación a derecha como $[R_b, L_a] = [L_b, R_a]$.

- La condición a izquierda $[L_a, L_b] = L_{[a,b]} - 2[L_a, R_b]$ se expresa en A como

$$a \cdot bx - b \cdot ax = [a, b] \cdot x - 2(a \cdot xb - ax \cdot b)$$

  y se reescribe con notación a derecha como $[L_b, L_a] = L_{[a,b]} - 2[R_b, L_a]$.

- La condición a izquierda $[R_a, R_b] = -R_{[a,b]} - 2[L_a, R_b]$ se expresa en A como

$$xb \cdot a - xa \cdot b = -x \cdot [a, b] - 2(a \cdot xb - ax \cdot b)$$

  y se reescribe con notación a derecha como $[R_b, R_a] = -R_{[a,b]} - 2[R_b, L_a]$.

Por tanto, el álgebra $\mathcal{L}(\mathfrak{M})$ de [PIS04] se reescribe con notación a derecha como el álgebra de Lie generada por $\{\lambda_a, \rho_a \mid a \in \mathfrak{M}\}$ y sujeta a las relaciones

$$\begin{aligned} &\lambda_{\alpha a+\beta b} = \alpha\lambda_a + \beta\lambda_b, && \rho_{\alpha a+\beta b} = \alpha\rho_a + \beta\rho_b, \\ &[\lambda_a, \lambda_b] = -\lambda_{[a,b]} - 2[\lambda_a, \rho_b], && [\rho_a, \rho_b] = \rho_{[a,b]} - 2[\lambda_a, \rho_b], \\ &[\lambda_a, \rho_b] = [\rho_a, \lambda_b]. \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Así, podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathfrak{M}) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{M})_+ \oplus \mathfrak{M} \\ \lambda_a &\mapsto \bar{\lambda}_a = \tfrac{1}{2}(T_a - \mathrm{ad}_a) \\ \rho_a &\mapsto \bar{\rho}_a = \tfrac{1}{2}(T_a + \mathrm{ad}_a). \end{aligned}$$

Notar que la aplicación es lineal y está bien definida, ya que

$$\begin{aligned} &[\bar{\lambda}_a, \bar{\lambda}_b] + \bar{\lambda}_{[a,b]} + 2[\bar{\lambda}_a, \bar{\rho}_b] \\ &\quad = \tfrac{1}{4}[T_a - \mathrm{ad}_a, T_b - \mathrm{ad}_b] + \tfrac{1}{2}(T_{[a,b]} - \mathrm{ad}_{[a,b]}) + \tfrac{1}{2}[T_a - \mathrm{ad}_a, T_b + \mathrm{ad}_b] \\ &\quad = \tfrac{1}{4}\Big([T_a, T_b] - [\mathrm{ad}_a, T_b] - [T_a, \mathrm{ad}_b] + [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b] + 2T_{[a,b]} - 2\,\mathrm{ad}_{[a,b]} \\ &\qquad\quad + 2[T_a, T_b] + 2[T_a, \mathrm{ad}_b] - 2[\mathrm{ad}_a, T_b] - 2[\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b]]\Big) \\ &\quad = \tfrac{1}{4}\Big(3[T_a, T_b] - T_{[a,b]} - T_{[a,b]} - [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b] + 2T_{[a,b]} - 2\,\mathrm{ad}_{[a,b]} + 2T_{[a,b]} - 2T_{[a,b]} \\ &\quad = \tfrac{1}{4}\Big(3[T_a, T_b] - [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b] - 2\,\mathrm{ad}_{[a,b]}\Big) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[\bar{\rho}_a, \bar{\rho}_b] - \bar{\rho}_{[a,b]} + 2[\bar{\lambda}_a \bar{\rho}_b] \\ &\quad = \tfrac{1}{4}[T_a + \mathrm{ad}_a, T_b + \mathrm{ad}_b] - \tfrac{1}{2}(T_{[a,b]} + \mathrm{ad}_{[a,b]}) + \tfrac{1}{2}[T_a - \mathrm{ad}_a, T_b + \mathrm{ad}_b] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{4}\Big([T_a, T_b] + [\mathrm{ad}_a, T_b] + [T_a, \mathrm{ad}_b] + [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b] - 2T_{[a,b]} - 2\,\mathrm{ad}_{[a,b]} \\
&\qquad + 2[T_a, T_b] + 2[T_a, \mathrm{ad}_b] - 2[\mathrm{ad}_a, T_b] - 2[\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b]]\Big) \\
&= \tfrac{1}{4}\Big(3[T_a, T_b] + T_{[a,b]} + T_{[a,b]} - [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b] - 2T_{[a,b]} - 2\,\mathrm{ad}_{[a,b]} + 2T_{[a,b]} - 2T_{[a,b]} \\
&= \tfrac{1}{4}\Big(3[T_a, T_b] - [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b] - 2\,\mathrm{ad}_{[a,b]}\Big) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[\bar{\lambda}_a, \bar{\rho}_b] - [\bar{\rho}_a, \bar{\lambda}_b] \\
&\quad = \tfrac{1}{4}\Big([T_a - \mathrm{ad}_a, T_b + \mathrm{ad}_b] - [T_a + \mathrm{ad}_a, T_b - \mathrm{ad}_b]\Big) \\
&\quad = \tfrac{1}{4}\Big([T_a, T_b] + [T_a, \mathrm{ad}_b] - [\mathrm{ad}_a, T_b] - [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b] - [T_a, T_b] + [T_a, \mathrm{ad}_b] \\
&\qquad - [\mathrm{ad}_a, T_b] + [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b]\Big) \\
&\quad = \tfrac{1}{4}\Big(T_{[a,b]} - T_{[a,b]} + T_{[a,b]} - T_{[a,b]}\Big) = 0.
\end{aligned}
$$

La aplicación es suprayectiva, ya que los generadores de $\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+ \oplus \mathfrak{M}$ pueden ser recuperados a partir de $\bar{\lambda}_a$ y $\bar{\rho}_a$ y sus productos de Lie. Además, esta aplicación tiene inversa

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{L}(\mathfrak{M}) & \longleftarrow & \mathcal{L}(\mathfrak{M})_+ \oplus \mathfrak{M} \\
\rho_a + \lambda_a & \hookleftarrow & T_a \\
\rho_a - \lambda_a & \hookleftarrow & \mathrm{ad}_a\,.
\end{array}
$$

Por lo tanto, el álgebra de Lie $\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+ \oplus \mathfrak{M}$ que hemos definido resulta ser isomorfa al álgebra $\mathcal{L}(\mathfrak{M})$ de [PIS04]. □

Nota 5.2.7. En lo que sigue denotaremos $\mathcal{L} := \mathcal{L}(\mathfrak{M})_+ \oplus \mathfrak{M}$.

Proposición 5.2.8. *Sea A un álgebra (no necesariamente asociativa) tal que $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(A)$. Se tiene que A es un $\mathcal{L}$-módulo con la acción dada por*

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L} \to \mathrm{End}(A) \\
&\bar{\rho}_a \mapsto R_a : x \mapsto xa \\
&\bar{\lambda}_a \mapsto L_a : x \mapsto ax.
\end{aligned}
$$

Demostración. Por ser $\mathcal{L}$ isomorfa al álgebra de Lie $\mathcal{L}(\mathfrak{M})$ definida por Pérez-Izquierdo y Shestakov en [PIS04], se tiene que $\bar{\rho}_a$ y $\bar{\lambda}_a$ cumplen las relaciones que verifican los operadores de multiplicación por elementos del núcleo alternativo:

$$
R_{ay} = R_a R_y + [L_a, R_y], \qquad L_{xa} = L_a L_x - [L_x, R_a], \qquad [L_a, R_b] = [R_a, L_b].
$$

$\square$

5.2.2. La acción de $U(\mathcal{L}(\mathfrak{M}))$ en $U(\mathfrak{M})$

La acción de $\mathcal{L}$ definida en la proposición 5.2.8 anterior se puede aplicar en $U(\mathfrak{M})$ y se extiende a una acción de $U(\mathcal{L})$ en $U(\mathfrak{M})$. Dada $\{((a_{i_1}a_{i_2})\cdots)a_{i_n} \mid i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq a_n,\ n \geq 0\}$ una base de Poicaré-Birkhoff-Wiff de $U(\mathfrak{M})$, definimos los elementos

$$\begin{aligned}\lambda_{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}} &= \lambda_{a_{i_n}}\lambda_{a_{i_1}\cdots a_{i_{n-1}}} - [\lambda_{a_{i_1}\cdots a_{i_{n-1}}}, \rho_{a_{i_n}}] \qquad (5.2.4)\\ \rho_{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}} &= \rho_{a_{i_1}\cdots a_{i_{n-1}}}\rho_{a_{i_n}} + [\rho_{a_{i_1}\cdots a_{i_{n-1}}}, \lambda_{a_{i_n}}],\end{aligned}$$

donde $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n} = ((a_{i_1}a_{i_2})\cdots)a_{i_n}$ y se asume que $\lambda_1 = 1 = \rho_1$. Al no haber confusión con elementos de otras álgebras, denotamos los operadores $\lambda, \rho \in U(\mathcal{L})$ sin barras.

Lema 5.2.9. *Para cualesquiera elementos $x \in U(\mathfrak{M})$, $a \in \mathfrak{M}$ se tiene que*

$$\begin{aligned}\lambda_{xa} &= \lambda_a\lambda_x - [\lambda_x, \rho_a]\\ \rho_{xa} &= \rho_x\rho_a + [\rho_x, \lambda_a].\end{aligned}$$

Demostración. Por inducción en $|x|$, el grado de filtración de x (ver definición en [PIS04, sección 2]) probaremos que

$$\lambda_{xb} = \lambda_b\lambda_x - [\lambda_x, \rho_b] \qquad (1)$$

$$[\lambda_x, \lambda_b + 2\rho_b] = \lambda_{[b,x]} \qquad (2)$$

para $x \in U(\mathfrak{M})$ y $b \in \mathfrak{M}$. Si $x = 1$ es obvio por la definición 5.2.4 y si $x \in \mathfrak{M}$ entonces es consecuencia de la definición 5.2.4 y de las propiedades de los operadores. Suponemos que es cierto hasta $|x| < n$ y sea $|x| = n$, $x = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}$. Consideramos $y = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{n-1}}$ y $a = a_{i_n}$. Comenzamos probando (2).

$$\begin{aligned}[\lambda_{ya}, \lambda_b + 2\rho_b] &= [\lambda_a\lambda_y - [\lambda_y, \rho_a], \lambda_b + 2\rho_b]\\ &= \lambda_{[b,a]}\lambda_y + \lambda_a\lambda_{[b,y]} - [\lambda_{[b,y]}, \rho_a] - [\lambda_y, [\rho_a, \lambda_b + 2\rho_b]]\\ &= \lambda_{[b,a]}\lambda_y + \lambda_{[b,y]a} - [\lambda_y, [\rho_a, \lambda_b + 2\rho_b]]\\ &= \lambda_{y[b,a]} + [\lambda_y, \rho_{[b,a]}] + \lambda_{[b,y]a} - [\lambda_y, [\rho_a, \lambda_b + 2\rho_b]]\\ &= \lambda_{y[b,a]+[b,y]a} + [\lambda_y, \rho_{[b,a]} - [\rho_a, \lambda_b] - 2[\rho_a, \rho_b]]\end{aligned}$$

$$= \lambda_{y[b,a]+[b,y]a} + [\lambda_y, 3\rho_{[b,a]} + 3[\rho_a, \lambda_b]],$$

donde la primera igualdad se tiene por hipótesis de inducción en (1) usando que $|y| < |x|$, la segunda igualdad se obtiene de la identidad de Jacobi e inducción y la tercera igualdad es debida a que $[b, y]$ tiene grado de filtración menor que n. Ahora

$$\begin{aligned}[\lambda_a + 2\rho_a, \lambda_b + 2\rho_b] &= -\lambda_{[a,b]} + 2[\rho_a, \lambda_b] + 4\rho_{[a,b]} - 8[\rho_a, \lambda_b] \\ &= -\lambda_{[a,b]} + 4\rho_{[a,b]} - 6[\lambda_a, \rho_b] \\ &= -\lambda_{[a,b]} - 2\rho_{[a,b]} - 6(\rho_{[b,a]} + [\rho_a, \lambda_b])\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow 3(\rho_{[b,a]} + [\rho_a, \lambda_b]) = -\tfrac{1}{2}[\lambda_a + 2\rho_a, \lambda_b + 2\rho_b] - \tfrac{1}{2}(\lambda_{[a,b]} + 2\rho_{[a,b]}), \qquad (*)$$

por lo que usando Jacobi y $(*)$ se tiene que

$$[\lambda_y, 3\rho_{[b,a]} + 3[\rho_a, \lambda_b]] = -\tfrac{1}{2}\lambda_{[b,[a,y]]-[a,[b,y]]+[[a,b],y]}$$

y, por tanto,

$$[\lambda_{ya}, \lambda_b + 2\rho_b] = \lambda_{y[b,a]+[b,y]a-\frac{1}{2}\left([b,[a,y]]-[a,[b,y]]+[[a,b],y]\right)}.$$

Haciendo actuar estos elementos sobre $1 \in U(\mathfrak{M})$ se obtiene que

$$[\lambda_{ya}, \lambda_b + 2\rho_b] = \lambda_{b(ya)+2(ya)b-ya\cdot 3b} = \lambda_{[b,ya]}$$

como se buscaba. Esto prueba el paso de inducción para (2). Ahora vamos a probar el paso de inducción para (1). Podemos suponer que b es un elemento básico $a_{i_{n+1}}$. Si $a_{i_n} \leq a_{i_{n+1}}$ entonces el resultado es consecuencia de la definición. Por tanto, asumimos que $a_{i_{n+1}} < a_{i_n}$, es decir, $b < a$.

$$\begin{aligned}\lambda_{xb} - \lambda_b\lambda_x + [\lambda_x, \rho_b] &= \lambda_{ya\cdot b} - \lambda_b\lambda_a\lambda_y + \lambda_b[\lambda_y, \rho_a] + [\lambda_a\lambda_y - [\lambda_y, \rho_a], \rho_b] \\ &= \lambda_{ya\cdot b - yb\cdot a} + \lambda_{yb\cdot a} - \lambda_b\lambda_a\lambda_y + \lambda_b[\lambda_y, \rho_a] + [\lambda_a\lambda_y - [\lambda_y, \rho_a], \rho_b],\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se sigue de la hipótesis de inducción. Como

$$yb = a_{i_1} \cdots b \cdots a_{i_{n-1}} + \text{ términos de menor grado}$$

entonces de la hipótesis de inducción y la definición

$$\lambda_{yb\cdot a} = \lambda_a\lambda_{yb} - [\lambda_{yb}, \rho_a].$$

Así pues,

$$\begin{aligned}
\lambda_{xb} - \lambda_b\lambda_x + [\lambda_x, \rho_b] &= \lambda_{ya\cdot b - yb\cdot a} + \lambda_a(\lambda_b\lambda_y - [\lambda_y, \rho_b]) - [\lambda_b\lambda_y - [\lambda_y, \rho_b], \rho_a] \\
&\quad - \lambda_b\lambda_a\lambda_y + \lambda_b[\lambda_y, \rho_a] + [\lambda_a\lambda_y - [\lambda_y, \rho_a], \rho_b] \\
&= \lambda_{ya\cdot b - yb\cdot a} + [\lambda_a, \lambda_b]\lambda_y - [\lambda_b, \rho_a]\lambda_y + [\lambda_a, \rho_b]\lambda_y + [\lambda_y, [\rho_b, \rho_a]] \\
&= \lambda_{ya\cdot b - yb\cdot a} - \lambda_{[a,b]}\lambda_y + [\lambda_y, [\rho_b, \rho_a]] \\
&= \lambda_{ya\cdot b - yb\cdot a} - \lambda_{y[a,b]} - [\lambda_y, \rho_{[a,b]}] + [\lambda_y, [\rho_b, \rho_a]] \\
&= \lambda_{ya\cdot b - yb\cdot a - y[a,b]} + [\lambda_y, \rho_{[b,a]} + [\rho_b, \rho_a]] \\
&= \lambda_{ya\cdot b - yb\cdot a - y[a,b]} + [\lambda_y, 2\rho_{[b,a]} - 2[\lambda_b, \rho_a]],
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se tiene por inducción, la tercera usando que

$$-\lambda_{[a,b]} = [\lambda_a, \lambda_b] - [\lambda_b, \rho_a] + [\lambda_a, \rho_b]$$

y la cuarta por hipótesis de inducción. Usando $(*)$ para escribir $\rho_{[b,a]} - [\lambda_b, \rho_a]$ se tiene que

$$\lambda_{xb} - \lambda_b\lambda_x + [\lambda_x, \rho_b] = \lambda_z \text{ para algún } z.$$

Haciendo actuar este elemento de $U(\mathcal{L})$ en $1 \in U(\mathfrak{M})$ se tiene que

$$z = xb - bx + xb - bx = 0,$$

por lo que se tiene el paso de inducción para (1). La otra igualdad se tiene debido a que $\mathcal{L}$ es un álgebra de Lie con trialdad (ver proposición 1.6.1). □

Lema 5.2.10. *Dados $a \in \mathfrak{M}$, $x \in U(\mathfrak{M})$, se tiene que*

$$\rho_{ax} = \rho_a\rho_x + [\lambda_a, \rho_x] \qquad y \qquad \lambda_{ax} = \lambda_x\lambda_a - [\rho_a, \lambda_x].$$

Demostración. Notar que las identidades del enunciado, así como las del lema 5.2.9 son identidades en la envolvente universal $U(\mathcal{L}(\mathfrak{M}))$, que es un álgebra de Hopf. La antípoda S en $U(\mathcal{L}(\mathfrak{M}))$ está definida por su acción los generadores

$$S(\lambda_x) = \lambda_{S(x)} \text{ y } S(\rho_x) = \rho_{S(x)},$$

donde $x \in U(\mathfrak{M})$. El álgebra de Moufang-Hopf $U(\mathfrak{M})$ también tiene antípoda. Como $U(\mathfrak{M})$ está generada por el conjunto de sus elementos primitivos, es decir, por $\mathfrak{M}$, basta definir su acción sobre estos elementos: $S(a) = -a$, $a \in \mathfrak{M}$ y extender antimultiplicativamente.

Por tanto, si aplicamos la antípoda a las igualdades del lema 5.2.9 obtenemos:

$$\begin{aligned} S(\lambda_{xa}) = S(\lambda_a\lambda_x) - S([\lambda_x,\rho_a]) &\leftrightarrow \lambda_{S(xa)} = \lambda_{S(x)}\lambda_{S(a)} - [\rho_{S(a)},\lambda_{S(x)}] \\ &\leftrightarrow -\lambda_{aS(x)} = -\lambda_{S(x)}\lambda_a + [\rho_a,\lambda_{S(x)}] \\ S(\rho_{xa}) = S(\rho_x\rho_a) + S([\rho_x,\lambda_a]) &\leftrightarrow \rho_{S(xa)} = \rho_{S(a)}\rho_{S(x)} - [\rho_{S(x)},\lambda_{S(a)}] \\ &\leftrightarrow -\rho_{aS(x)} = -\rho_a\rho_{S(x)} + [\rho_{S(x)},\lambda_a], \end{aligned}$$

luego se tiene el resultado. $\square$

Se definen también en $U(\mathcal{L})$ los elementos

$$r(b,b') = \sum \rho_{b_{(1)}}\rho_{b'_{(1)}}\rho_{S(b'_{(2)})S(b_{(2)})} \quad \text{y} \quad s(b,b') = \sum \rho_{b'_{(1)}}\lambda_{b_{(1)}}\rho_{S(b'_{(2)})S(b_{(2)})}, \tag{5.2.5}$$

donde $b, b' \in U(\mathfrak{M})$ y S es la antípoda en $U(\mathfrak{M})$.

Lema 5.2.11. *Dado $x \in U(\mathfrak{M})$ se verifica que*

$$r(1,x) = r(x,1) = s(1,x) = \epsilon(x)\cdot 1.$$

Demostración. Por inducción en el grado de x. Si $x = b$ es primitivo, entonces

$$\begin{aligned} r(1,b) &= \rho_1\rho_b\rho_{S(1)S(1)} + \rho_1\rho_1\rho_{S(b)S(1)} = \rho_b - \rho_b = 0 = \epsilon(b)\cdot 1 \\ r(b,1) &= \rho_b\rho_1\rho_{S(1)S(1)} + \rho_1\rho_1\rho_{S(1)S(b)} = \rho_b - \rho_b = 0 = \epsilon(b)\cdot 1 \\ s(1,b) &= \rho_b\lambda_1\rho_{S(1)S(1)} + \rho_1\lambda_1\rho_{S(b)S(1)} = \rho_b - \rho_b = 0 = \epsilon(b)\cdot 1. \end{aligned}$$

Si $x = yb$ con b primitivo, entonces

$$\begin{aligned} r(1,yb) &= \sum \rho_1\rho_{(yb)_{(1)}}\rho_{S((yb)_{(2)})S(1)} = \sum \Big(\rho_{y_{(1)}b}\rho_{S(y_{(2)})} + \rho_{y_{(1)}}\rho_{S(b)S(y_{(2)})}\Big) \\ &= \sum \Big(\rho_{y_{(1)}}\rho_b\rho_{S(y_{(2)})} + [\rho_{y_{(1)}},\lambda_b]\rho_{S(y_{(2)})} + \rho_{y_{(1)}}\rho_{S(b)}\rho_{S(y_{(2)})} + \rho_{y_{(1)}}[\lambda_{S(b)},\rho_{S(y_{(2)})}]\Big) \\ &= \sum \Big(\rho_{y_{(1)}}\lambda_b\rho_{S(y_{(2)})} - \lambda_b\rho_{y_{(1)}}\rho_{S(y_{(2)})} + \rho_{y_{(1)}}\lambda_{S(b)}\rho_{S(y_{(2)})} - \rho_{y_{(1)}}\rho_{S(y_{(2)})}\lambda_{S(b)}\Big) \\ &= -\lambda_b r(1,y) + r(1,y)\lambda_b = -\epsilon(y)\cdot\lambda_b + \epsilon(y)\cdot\lambda_b = 0 = \epsilon(yb)\cdot 1 \\ r(yb,1) &= \sum \rho_{(yb)_{(1)}}\rho_1\rho_{S(1)S((yb)_{(2)})} = r(1,yb) = \epsilon(yb)\cdot 1 \\ s(1,yb) &= \sum \rho_{(yb)_{(1)}}\lambda_1\rho_{S((yb)_{(2)})S(1)} = r(1,yb) = \epsilon(yb)\cdot 1. \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 5.2.12. *Para cualesquiera $b, b' \in U(\mathfrak{M})$, los elementos $r(b,b')$ y $s(b,b')$ están en $U(\mathcal{L}_+)$.*

Demostración. Notar que, como espacios vectoriales, $U(\mathcal{L}) \cong U(\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+) \otimes F[T_{\mathfrak{M}}]$. Para probar el resultado, demostraremos que $U(\mathcal{L}_+)$ es la mayor subcoálgebra de $U(\mathcal{L})$ contenida en el conjunto $I = \{\varphi \in U(\mathcal{L}) \mid 1\varphi = \epsilon(\varphi) \cdot 1\}$.
Claramente $U(\mathcal{L}_+) \subseteq I$, ya que para cualquier $a \in \mathfrak{M}$, ad_a anula al $1 \in U(\mathfrak{M})$. Notar que I no es coálgebra, ya que $\mathrm{ad}_a T_b \in I$ y

$$\begin{aligned}\Delta(\mathrm{ad}_a T_b) &= (\mathrm{ad}_a \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_a)(T_b \otimes 1 + 1 \otimes T_b)\\ &= \mathrm{ad}_a T_b \otimes 1 + \mathrm{ad}_a \otimes T_b + T_b \otimes \mathrm{ad}_a + 1 \otimes \mathrm{ad}_a T_b.\end{aligned}$$

Como $T_b \notin I$, $\Delta(\mathrm{ad}_a T_b) \notin I \otimes I$. Si se tienen C_1, C_2 dos subcoálgebras de $U(\mathcal{L})$ contenidas en I, $C_1 + C_2$ es subcoálgebra de $U(\mathcal{L})$ y $C_1 + C_2 \subseteq I$, luego se puede considerar la mayor subcoálgebra C de $U(\mathcal{L})$ contenida en I. $U(\mathcal{L})$ admite una base de tipo Poincaré-Birkhoff-Witt con elementos de la forma

$$\theta_{a_{i_1},\dots,a_{i_n}} T_{a_{i_1}} \cdots T_{a_{i_n}},$$

donde $\theta_{a_{i_1},\dots,a_{i_n}} \in U(\mathcal{L}_+)$ y $\{T_{a_{i_1}} \cdots T_{a_{i_n}} \mid n \geq 0, a_{i_1} \leq \cdots \leq a_{i_n}\}$ es una base de $F[T_{\mathfrak{M}}]$. Sea $\sum_{\substack{n \\ a_{i_1} \leq \cdots \leq a_{i_n}}} \theta_{a_{i_1},\dots,a_{i_n}} T_{a_{i_1}} \cdots T_{a_{i_n}} \in C$. Se tiene que

$$\begin{aligned}&\Delta\Big(\sum_{\substack{n \\ a_{i_1} < \cdots < a_{i_n}}} \theta_{a_{i_1},\dots,a_{i_n}} T_{a_{i_1}} \cdots T_{a_{i_n}}\Big)\\ &\quad = \sum_{\substack{n \\ a_{i_1} < \cdots < a_{i_n}}} T_{a_{i_1}} \cdots T_{a_{i_n}} \otimes \theta_{a_{i_1},\dots,a_{i_n}} + \cdots + \sum_{\substack{n \\ a_{i_1} < \cdots < a_{i_n}}} \theta_{a_{i_1},\dots,a_{i_n}} \otimes T_{a_{i_1}} \cdots T_{a_{i_n}},\end{aligned}$$

donde los sumandos representados por los puntos suspensivos tienen parte de $U(\mathfrak{M}_+)$ en cada factor tensorial (ad_a, T_a son primitivos y los elementos de $U(\mathcal{L}_+)$ son productos de ad_a). Ahora bien, como $\{T_{a_{i_1}} \cdots T_{a_{i_n}} \mid n \geq 0, a_{i_1} \leq \cdots \leq a_{i_n}\}$ es libre, para que el elemento que estamos considerando esté en $C \otimes C$, n debe ser cero y, por tanto, $C \subseteq U(\mathcal{L}_+)$.
Para concluir la demostración, veamos que los subespacios generados por $\{r(b,b') \mid b, b' \in U(\mathfrak{M})\}$ y $\{s(b,b') \mid b, b' \in U(\mathfrak{M})\}$ son coálgebras contenidas en I (y, por tanto, contenidas en $U(\mathcal{L}_+)$). Para ello basta ver que los conjuntos $\{\rho_x \mid x \in U(\mathfrak{M})\}$ y $\{\lambda_x \mid x \in U(\mathfrak{M})\}$ son coálgebras, puesto que se tiene que

$$1r(b,b') = \sum b_{(1)} b'_{(1)} S(b_{(2)} b'_{(2)}) = \epsilon(bb') = \epsilon(b)\epsilon(b') = \epsilon(r(b,b')) \cdot 1$$

$$1s(b,b') = \sum b_{(1)}b'_{(1)}S(b_{(2)}b'_{(2)}) = \epsilon(bb') = \epsilon(b)\epsilon(b') = \epsilon(r(b,b')) \cdot 1.$$

Si $a, b \in \mathfrak{M}$ (son primitivos) entonces, usando la definición recursiva de ρ_{xa} y λ_{xa}

$$\begin{aligned}
\Delta(\rho_{ba}) &= \Delta(\rho_b)\Delta(\rho_a) + [\Delta(\rho_b), \Delta(\lambda_a)] \\
&= (1\otimes\rho_b + \rho_b\otimes 1)(1\otimes\rho_a + \rho_a\otimes 1) + [1\otimes\rho_b + \rho_b\otimes 1, 1\otimes\lambda_a + \lambda_a\otimes 1] \\
&= 1\otimes\rho_b\rho_a + \rho_a\otimes\rho_b + \rho_b\otimes\rho_a + \rho_b\rho_a\otimes 1 + [\rho_b,\lambda_a]\otimes 1 + 1\otimes\rho_b\rho_a \\
\sum \rho_{(ba)_{(1)}}\otimes\rho_{(ba)_{(2)}} &= \rho_1\otimes\rho_{ba} + \rho_a\otimes\rho_b + \rho_b\otimes\rho_a + \rho_{ba}\otimes\rho_1 \\
&= 1\otimes(\rho_b\rho_a + [\rho_b,\lambda_a]) + \rho_a\otimes\rho_b + \rho_b\otimes\rho_a + (\rho_b\rho_a + [\rho_b,\lambda_a])\otimes 1 \\
&\implies \Delta(\rho_{ba}) = \sum \rho_{(ba)_{(1)}}\otimes\rho_{(ba)_{(2)}} \\
\Delta(\lambda_{ba}) &= \Delta(\lambda_a)\Delta(\lambda_b) - [\Delta(\lambda_b), \Delta(\rho_a)] \\
&= (1\otimes\lambda_a + \lambda_a\otimes 1)(1\otimes\lambda_b + \lambda_b\otimes 1) - [1\otimes\lambda_b + \lambda_b\otimes 1, 1\otimes\rho_a + \rho_a\otimes 1] \\
&= 1\otimes\lambda_a\lambda_b + \lambda_a\otimes\lambda_b + \lambda_b\otimes\lambda_a + \lambda_a\lambda_b\otimes 1 - [\lambda_b,\rho_a]\otimes 1 - 1\otimes[\lambda_b,\rho_a] \\
\sum \lambda_{(ba)_{(1)}}\otimes\lambda_{(ba)_{(2)}} &= \lambda_1\otimes\lambda_{ba} + \lambda_a\otimes\lambda_b + \lambda_b\otimes\lambda_a + \lambda_{ba}\otimes\lambda_1 \\
&= 1\otimes(\lambda_a\lambda_b - [\lambda_b,\rho_a]) + \lambda_a\otimes\lambda_b + \lambda_b\otimes\lambda_a + (\lambda_a\lambda_b - [\lambda_b,\rho_a])\otimes 1 \\
&\implies \Delta(\lambda_{ba}) = \sum \lambda_{(ba)_{(1)}}\otimes\lambda_{(ba)_{(2)}}.
\end{aligned}$$

Por inducción en el grado de x,

$$\begin{aligned}
\Delta(\rho_{xa}) &= \Delta(\rho_x)\Delta(\rho_a) + [\Delta(\rho_x), \Delta(\lambda_a)] \\
&\underset{a\text{ prim.}}{\overset{\text{ind. }x}{=}} \sum \Big((\rho_{x_{(1)}}\otimes\rho_{x_{(2)}})(1\otimes\rho_a + \rho_a\otimes 1) + [\rho_{x_{(1)}}\otimes\rho_{x_{(2)}}, 1\otimes\lambda_a + \lambda_a\otimes 1]\Big) \\
&= \sum \Big(\rho_{x_{(1)}}\otimes\rho_{x_{(2)}}\rho_a + \rho_{x_{(1)}}\rho_a\otimes\rho_{x_{(2)}} + \rho_{x_{(1)}}\otimes[\rho_{x_{(2)}},\lambda_a] + [\rho_{x_{(1)}},\lambda_a]\otimes\rho_{x_{(2)}}\Big) \\
&= \sum \Big(\rho_{x_{(1)}}\otimes(\rho_{x_{(2)}}\rho_a + [\rho_{x_{(2)}},\lambda_a]) + (\rho_{x_{(1)}}\rho_a + [\rho_{x_{(1)}},\lambda_a])\otimes\rho_{x_{(2)}}\Big) \\
&= \sum \Big(\rho_{x_{(1)}}\otimes\rho_{x_{(2)}a} + \rho_{x_{(1)}a}\otimes\rho_{x_{(2)}}\Big) \overset{a\text{ prim.}}{=} \sum \Big(\rho_{(xa)_{(1)}}\otimes\rho_{(xa)_{(2)}}\Big) \\
\Delta(\lambda_{xa}) &= \Delta(\lambda_a)\Delta(\lambda_x) - [\Delta(\lambda_x), \Delta(\rho_a)] \\
&\underset{a\text{ prim.}}{\overset{\text{ind. }x}{=}} \sum \Big((1\otimes\lambda_a + \lambda_a\otimes 1)(\lambda_{x_{(1)}}\otimes\lambda_{x_{(2)}}) - [\lambda_{x_{(1)}}\otimes\lambda_{x_{(2)}}, 1\otimes\rho_a + \rho_a\otimes 1]\Big) \\
&= \sum \Big(\lambda_{x_{(1)}}\otimes\lambda_a\lambda_{x_{(2)}} + \lambda_a\lambda_{x_{(1)}}\otimes\lambda_{x_{(2)}} - \lambda_{x_{(1)}}\otimes[\lambda_{x_{(2)}},\rho_a] - [\lambda_{x_{(1)}},\rho_a]\otimes\lambda_{x_{(2)}}\Big) \\
&= \sum \Big(\lambda_{x_{(1)}}\otimes\lambda_{x_{(2)}a} + \lambda_{x_{(1)}a}\otimes\lambda_{x_{(2)}}\Big) \overset{a\text{ prim.}}{=} \sum \Big(\lambda_{(xa)_{(1)}}\otimes\lambda_{(xa)_{(2)}}\Big)
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\Delta(r(b,b')) &= \Delta\Big(\sum \rho_{b_{(1)}}\rho_{b'_{(1)}}\rho_{S(b'_{(2)})S(b_{(2)})}\Big) = \sum \Delta(\rho_{b_{(1)}})\Delta(\rho_{b'_{(1)}})\Delta(\rho_{S(b'_{(2)})S(b_{(2)})})\\
&= \sum (\rho_{b_{(1)}}\otimes\rho_{b_{(2)}})(\rho_{b'_{(1)}}\otimes\rho_{b'_{(2)}})(\rho_{S(b'_{(3)})S(b_{(3)})}\otimes\rho_{S(b'_{(4)})S(b_{(4)})})\\
&= \sum (\rho_{b_{(1)}}\rho_{b'_{(1)}}\rho_{S(b'_{(2)})S(b_{(2)})})\otimes(\rho_{b_{(3)}}\rho_{b'_{(3)}}\rho_{S(b'_{(4)})S(b_{(4)})})\\
&= \sum r(b_{(1)},b'_{(1)})\otimes r(b_{(2)},b'_{(2)})\\
\Delta(s(b,b')) &= \Delta\Big(\sum \rho_{b'_{(1)}}\lambda_{b_{(1)}}\rho_{S(b'_{(2)})S(b_{(2)})}\Big) = \sum \Delta(\rho_{b'_{(1)}})\Delta(\lambda_{b_{(1)}})\Delta(\rho_{S(b'_{(2)})S(b_{(2)})})\\
&= \sum (\rho_{b'_{(1)}}\otimes\rho_{b'_{(2)}})(\lambda_{b_{(1)}}\otimes\lambda_{b_{(2)}})(\rho_{S(b'_{(3)})S(b_{(3)})}\otimes\rho_{S(b'_{(4)})S(b_{(4)})})\\
&= \sum (\rho_{b'_{(1)}}\lambda_{b_{(1)}}\rho_{S(b'_{(2)})S(b_{(2)})})\otimes(\rho_{b'_{(3)}}\lambda_{b_{(3)}}\rho_{S(b'_{(4)})S(b_{(4)})})\\
&= \sum s(b_{(1)},b'_{(1)})\otimes s(b_{(2)},b'_{(2)}),
\end{aligned}$$

por lo que los subespacios generados por $\{\rho_x \mid x\in U(\mathfrak{M})\}$ y $\{\lambda_x \mid x\in U(\mathfrak{M})\}$ respectivamente son coálgebras y están contenidas en I y, por tanto, en $U(\mathcal{L}_+)$. $\square$

5.2.3. Integración formal de módulos relativos para álgebras de Malcev

Ahora podemos definir un producto en $F[V]\otimes U(\mathfrak{M})$ de manera que $\mathfrak{M}$ esté contenido en su núcleo alternativo. Este resultado nos da solución al problema que planteábamos al principio del capítulo acerca de la integración formal de módulos relativos para álgebras de Malcev.

Teorema 5.2.13 (Teorema de integración formal de módulos relativos)**.** *Sean $\mathfrak{M}$ un álgebra de Malcev y V un módulo relativo para $\mathfrak{M}$. Se tiene que $F[V]\otimes U(\mathfrak{M})$ con el producto dado por la fórmula*

$$pb\cdot p'b' = \sum \Big(p\, r(b_{(1)},b'_{(1)})\cdot p's(b_{(2)},b'_{(2)})\Big)\cdot b_{(3)}b'_{(3)}$$

para cualesquiera elementos $p,p'\in F[V]$ y $b,b'\in U(\mathfrak{M})$, es una biálgebra punteada conexa cuyos elementos primitivos son $V\oplus\mathfrak{M}$ y que contiene a $\mathfrak{M}$ en el núcleo alternativo.

Demostración. Notar que el producto está bien definido, ya que si V es módulo para $\mathfrak{M}$ entonces es un módulo para el álgebra de Lie $\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+$ y acabamos de probar en la proposición 5.2.12 que $r(b,b')$ y $s(b,b')$ son elementos de la envolvente universal de esta álgebra de Lie. Veamos ahora que $\mathfrak{M}$ está contenida en el núcleo alternativo de $F[V] \otimes U(\mathfrak{M})$. Para ello, probaremos que dado un elemento $a \in \mathfrak{M}$, las identidades

$$(a, p'b', p''b'') = -(p'b', a, p''b'') = (p'b', p''b'', a)$$

se verifican para cualesquiera $p'b', p''b'' \in F[V] \otimes U(\mathfrak{M})$. Las igualdades

$$\begin{aligned} a \cdot p'b' &= \sum p's(a, b'_{(1)}) \cdot b'_{(2)} + p's(1, b'_{(1)}) \cdot ab'_{(2)} = \sum p's(a_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot a_{(2)}b'_{(2)} \\ p'b' \cdot a &= \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, a_{(1)}) \cdot 1s(b'_{(2)}, a_{(2)})\Big) \cdot b'_{(3)}a_{(3)} = \sum p'r(b'_{(1)}, a_{(1)}) \cdot b'_{(2)}a_{(2)} \end{aligned}$$

serán de utilidad en los cálculos que siguen. Para la condición de núcleo alternativo a derecha:

$$\begin{aligned} (a \cdot p'b') \cdot p''b'' &= \sum \Big((p's(a_{(1)}, b'_{(1)}) \cdot a_{(2)}b'_{(2)}\Big) \cdot p''b'' \\ &= \sum \Big(p's(a_{(1)}, b'_{(1)})r(a_{(2)}b'_{(2)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(a_{(3)}b'_{(3)}, b''_{(2)})\Big) \cdot (a_{(4)}b'_{(4)})b''_{(3)} \\ a \cdot (p'b' \cdot p''b'') &= \sum a \cdot \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(2)}, b''_{(2)}) \cdot b'_{(3)}b''_{(3)}\Big) \\ &= \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)})s(a_{(1)}, b'_{(2)}b''_{(2)}) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(3)})s(a_{(2)}, b'_{(4)}b''_{(4)})\Big) \cdot a_{(3)}(b'_{(5)}b''_{(5)}) \\ (p'b' \cdot a) \cdot p''b'' &= \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, a_{(1)}) \cdot b'_{(2)}a_{(2)}\Big) \cdot p''b'' \\ &= \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, a_{(1)})r(b'_{(2)}a_{(2)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(3)}a_{(3)}, b''_{(2)})\Big) \cdot (b'_{(4)}a_{(4)})b''_{(3)} \\ p'b' \cdot (a \cdot p''b'') &= \sum p'b' \cdot \Big(p''s(a_{(1)}, b''_{(1)}) \cdot a_{(2)}b''_{(2)}\Big) \\ &= \sum p'r(b'_{(1)}, a_{(1)}b''_{(1)}) \cdot p''s(a_{(2)}, b''_{(2)})s(b'_{(2)}, a_{(3)}b''_{(3)}) \cdot b'_{(3)}(a_{(4)}b''_{(4)}) \\ (a, p'b', p''b'') &+ (p'b', a, p''b'') \\ &= \sum \Big(p's(a_{(1)}, b'_{(1)})r(a_{(2)}b'_{(2)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(a_{(3)}b'_{(3)}, b''_{(2)})\Big) \cdot (a_{(4)}b'_{(4)})b''_{(3)} \\ &\quad - \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)})s(a_{(1)}, b'_{(2)}b''_{(2)}) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(3)})s(a_{(2)}, b'_{(4)}b''_{(4)})\Big) \cdot a_{(3)}(b'_{(5)}b''_{(5)}) \\ &\quad + \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, a_{(1)})r(b'_{(2)}a_{(2)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(3)}a_{(3)}, b''_{(2)})\Big) \cdot (b'_{(4)}a_{(4)})b''_{(3)} \\ &\quad - \sum p'r(b'_{(1)}, a_{(1)}b''_{(1)}) \cdot p''s(a_{(2)}, b''_{(2)})s(b'_{(2)}, a_{(3)}b''_{(3)}) \cdot b'_{(3)}(a_{(4)}b''_{(4)}). \end{aligned}$$

Expandimos los sumandos aplicando el coproducto a a las veces que sea necesario en cada término:

$$\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes a_{(3)} = a \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes a$$

$$\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes a_{(3)} \otimes a_{(4)} = a \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes a \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes a.$$

$$\begin{aligned}
(a, p'b', p''b'') &+ (p'b', a, p''b'') \\
&= \sum \Big(p's(a, b'_{(1)})r(b'_{(2)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(2)})\Big) \cdot b'_{(4)}b''_{(3)} \\
&+ \sum \Big(p's(1, b'_{(1)})r(ab'_{(2)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(2)})\Big) \cdot b'_{(4)}b''_{(3)} \\
&+ \sum \Big(p's(1, b'_{(1)})r(b'_{(2)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(ab'_{(3)}, b''_{(2)})\Big) \cdot b'_{(4)}b''_{(3)} \\
&+ \sum \Big(p's(1, b'_{(1)})r(b'_{(2)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(2)})\Big) \cdot (ab'_{(4)})b''_{(3)} \\
&- \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)})s(a, b'_{(2)}b''_{(2)}) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(3)})s(1, b'_{(4)}b''_{(4)})\Big) \cdot b'_{(5)}b''_{(5)} \\
&- \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)})s(1, b'_{(2)}b''_{(2)}) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(3)})s(a, b'_{(4)}b''_{(4)})\Big) \cdot b'_{(5)}b''_{(5)} \\
&- \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)})s(1, b'_{(2)}b''_{(2)}) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(3)})s(1, b'_{(4)}b''_{(4)})\Big) \cdot a(b'_{(5)}b''_{(5)}) \\
&+ \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, a)r(b'_{(2)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(2)})\Big) \cdot b'_{(4)}b''_{(3)} \\
&+ \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, 1)r(b'_{(2)}a, b''_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(2)})\Big) \cdot b'_{(4)}b''_{(3)} \\
&+ \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, 1)r(b'_{(2)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(3)}a, b''_{(2)})\Big) \cdot b'_{(4)}b''_{(3)} \\
&+ \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, 1)r(b'_{(2)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(2)})\Big) \cdot (b'_{(4)}a)b''_{(3)} \\
&- \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, ab''_{(1)}) \cdot p''s(1, b''_{(2)})s(b'_{(2)}, b''_{(3)})\Big) \cdot b'_{(3)}b''_{(4)} \\
&- \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(a, b''_{(2)})s(b'_{(2)}, b''_{(3)})\Big) \cdot b'_{(3)}b''_{(4)} \\
&- \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(1, b''_{(2)})s(b'_{(2)}, ab''_{(3)})\Big) \cdot b'_{(3)}b''_{(4)} \\
&- \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(1, b''_{(2)})s(b'_{(2)}, b''_{(3)})\Big) \cdot b'_{(3)}(ab''_{(4)}).
\end{aligned}$$

Notar que los sumandos que contienen una a en el último factor se anulan, ya que el primer factor es en ambos el mismo: $\sum p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(2)}, b''_{(2)})$ y como $a \in \mathfrak{M} \subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(U(\mathfrak{M}))$, se tiene (abusando de la notación de Sweedler por claridad) que

$$(ab'_{(3)})b''_{(3)} - a(b'_{(3)}b''_{(3)}) + (b'_{(3)}a)b''_{(3)} - b'_{(3)}(ab''_{(3)}) = (a, b'_{(3)}, b''_{(3)}) + (b'_{(3)}, a, b''_{(3)}) = 0.$$

El resto de sumandos que no se anulan los separamos en dos grupos, atendiendo al cuál sea el factor en el que no aparece a: $p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)})$ a la izquierda o $p''s(b'_{(2)}, b''_{(2)})$ a la derecha. El objetivo ahora es probar que la suma en de cada uno de estos grupos es cero. Para el primer grupo, si escribimos $r(b, b')$ y $s(b, b')$ en términos de ρ's y λ's obtenemos (también haciendo abuso de la notación de Sweedler)

$$\begin{aligned}
&\sum \Big(s(a, b'_{(1)}) r(b'_{(2)}, b''_{(1)}) + r(ab'_{(1)}, b''_{(1)}) - r(b'_{(1)}, b''_{(1)}) s(a, b'_{(2)} b''_{(2)}) \\
&\quad + r(b'_{(1)}, a) r(b'_{(2)}, b''_{(1)}) + r(b'_{(1)} a, b''_{(1)}) - r(b'_{(1)}, ab''_{(1)}) \Big) \\
&= \sum \Big(\rho_{b'_{(1)}} \lambda_{a_{(1)}} \rho_{S(b'_{(2)}) S(a_{(2)})} \rho_{b'_{(3)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)}) S(b'_{(4)})} + \rho_{a_{(1)} b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)}) S(a_{(2)} b'_{(2)})} \\
&\quad - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)}) S(b'_{(2)})} \rho_{b'_{(3)} b''_{(3)}} \lambda_{a_{(1)}} \rho_{S(b'_{(4)} b''_{(4)}) S(a_{(2)})} \\
&\quad + \rho_{b'_{(1)}} \rho_{a_{(1)}} \rho_{S(a_{(2)}) S(b'_{(2)})} \rho_{b'_{(3)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)}) S(b'_{(4)})} \\
&\quad + \rho_{b'_{(1)} a_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)}) S(b'_{(2)} a_{(2)})} - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{a_{(1)} b''_{(1)}} \rho_{S(a_{(2)} b''_{(2)}) S(b'_{(2)})} \Big)
\end{aligned}$$

Si expandimos cada sumando utilizando que $\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} = a \otimes 1 + 1 \otimes a$, aplicando que $S(a) = -a$ y que $\sum \rho_{x_{(1)}} \rho_{S(x_{(2)})} = \epsilon(x) \cdot 1$ y usando el lema 5.2.11 para simplificar tenemos:

$$\begin{aligned}
&\sum \Big(\rho_{b'_{(1)}} \lambda_a \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)}) S(b'_{(2)})} - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{S(b'_{(2)}) a} \rho_{b'_{(3)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)}) S(b'_{(4)})} \\
&\quad + \rho_{ab'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)}) S(b'_{(2)})} - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)}) \cdot S(b'_{(2)}) a} \\
&\quad - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \lambda_a \rho_{S(b'_{(2)} b''_{(2)})} + \rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b'_{(2)} b''_{(2)}) a} \\
&\quad + \rho_{b'_{(1)}} \rho_a \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)}) S(b'_{(2)})} - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{a S(b'_{(2)})} \rho_{b'_{(3)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)}) S(b'_{(4)})} \\
&\quad + \rho_{b'_{(1)} a} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)}) S(b'_{(2)})} - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)}) \cdot a S(b'_{(2)})} \\
&\quad - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{ab''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)}) S(b'_{(2)})} + \rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)}) a \cdot S(b'_{(2)})} \Big).
\end{aligned}$$

Notar que hay dos tipos de sumandos: los que terminan en $\rho_{S(b''_{(2)}) S(b'_{(2)})}$ y los que no. Estos últimos se anulan entre sí, ya que comienzan por el mismo factor $\rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}}$ y, como $a \in \mathfrak{M} \subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(U(\mathfrak{M}))$, de nuevo abusando de la notación de Sweedler, se tiene que

$$\begin{aligned}
&- S(b''_{(2)}) \cdot S(b'_{(2)}) a + S(b'_{(3)} b''_{(3)}) a - S(b''_{(2)}) \cdot a S(b'_{(2)}) + S(b''_{(2)}) a \cdot S(b'_{(2)}) \\
&= \Big(S(b''_{(2)}), S(b'_{(2)}), a \Big) + \Big(S(b''_{(2)}), a, S(b'_{(2)}) \Big) = 0.
\end{aligned}$$

Para operar con el resto de los sumandos omitiremos el factor común y usaremos las identidades recursivas (5.2.4) que definen a los operadores λ y ρ y las del lema 5.2.10, de donde se tiene que $\rho_{xa} + \rho_{ax} = \rho_x \rho_a + \rho_a \rho_x$. Haciendo abuso de la notación de Sweedler:

$$\sum \Big(\rho_{b'_{(1)}} \lambda_a \rho_{b''_{(1)}} - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{S(b'_{(2)}) a} \rho_{b'_{(3)}} \rho_{b''_{(1)}} + \rho_{ab'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \lambda_a$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \rho_{b'_{(1)}}\rho_a\rho_{b''_{(1)}} - \rho_{b'_{(1)}}\rho_{aS(b'_{(2)})}\rho_{b'_{(3)}}\rho_{b''_{(1)}} + \rho_{b'_{(1)}a}\rho_{b''_{(1)}} - \rho_{b'_{(1)}}\rho_{ab''_{(1)}}\Big) \\
&= \sum \Big(\rho_{b'_{(1)}}\lambda_a\rho_{b''_{(1)}} - \rho_{b'_{(1)}}\Big(\rho_{S(b'_{(2)})}\rho_a + \rho_a\rho_{S(b'_{(2)})}\Big)\rho_{b'_{(3)}}\rho_{b''_{(1)}} + \Big(\rho_a\rho_{b'_{(1)}} + \rho_{b'_{(1)}}\rho_a\Big)\rho_{b''_{(1)}} \\
&\quad - \rho_{b'_{(1)}}\rho_{b''_{(1)}}\lambda_a + \rho_{b'_{(1)}}\rho_a\rho_{b''_{(1)}} - \rho_{b'_{(1)}}\rho_{ab''_{(1)}}\Big) \\
&= \sum \Big(\rho_{b'_{(1)}}\lambda_a\rho_{b''_{(1)}} - \rho_a\rho_{b'_{(1)}}\rho_{b''_{(1)}} - \rho_{b'_{(1)}}\rho_a\rho_{b''_{(1)}} + \rho_a\rho_{b'_{(1)}}\rho_{b''_{(1)}} \\
&\quad + \rho_{b'_{(1)}}\rho_a\rho_{b''_{(1)}} - \rho_{b'_{(1)}}\rho_{b''_{(1)}}\lambda_a + \rho_{b'_{(1)}}\rho_a\rho_{b''_{(1)}} - \rho_{b'_{(1)}}\rho_{ab''_{(1)}}\Big) \\
&= \sum \Big(\rho_{b'_{(1)}}[\lambda_a, \rho_{b''_{(1)}}] + \rho_{b'_{(1)}}\rho_a\rho_{b''_{(1)}} - \rho_{b'_{(1)}}\rho_{ab''_{(1)}}\Big) = 0
\end{aligned}
$$

Análogamente en el segundo grupo, si escribimos $r(b,b')$ y $s(b,b')$ en términos de ρ's y λ's se obtiene (abusando de la notación de Sweedler)

$$
\begin{aligned}
&\sum \Big(s(ab'_{(1)}, b''_{(1)}) - s(b'_{(1)}, b''_{(1)})s(a, b'_{(2)}b''_{(2)}) + s(b'_{(1)}a, b''_{(1)}) \\
&\qquad - s(a, b''_{(1)})s(b'_{(1)}, b''_{(2)}) - s(b'_{(1)}, ab''_{(1)})\Big) \\
&= \sum \Big(\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{a_{(1)}b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})S(a_{(2)}b'_{(2)})} \\
&\qquad - \rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})}\rho_{b'_{(3)}b''_{(3)}}\lambda_{a_{(1)}}\rho_{S(b'_{(4)}b''_{(4)})S(a_{(2)})} \\
&\qquad + \rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}a_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)}a_{(2)})} \\
&\qquad - \rho_{b''_{(1)}}\lambda_{a_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})S(a_{(2)})}\rho_{b''_{(3)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(4)})S(b'_{(2)})} \\
&\qquad - \rho_{a_{(1)}b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(a_{(2)}b''_{(2)})S(b'_{(2)})}\Big)
\end{aligned}
$$

Si expandimos cada sumando utilizando que $\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} = a \otimes 1 + 1 \otimes a$, aplicando que $S(a) = -a$ y que $\sum \rho_{x_{(1)}}\rho_{S(x_{(2)})} = \epsilon(x) \cdot 1$ y usando el lema 5.2.11 para simplificar tenemos:

$$
\begin{aligned}
&\sum \Big(\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{ab'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})} - \rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})\cdot S(b'_{(2)})a} \\
&\quad - \rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})}\rho_{b'_{(3)}b''_{(3)}}\lambda_a\rho_{S(b'_{(4)}b''_{(4)})} \\
&\quad + \rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})}\rho_{b'_{(3)}b''_{(3)}}\rho_{S(b'_{(4)}b''_{(4)})a} \\
&\quad + \rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}a}\rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})} - \rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})\cdot aS(b'_{(2)})} \\
&\quad - \rho_{b''_{(1)}}\lambda_a\rho_{S(b''_{(2)})}\rho_{b''_{(3)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(4)})S(b'_{(2)})} \\
&\quad + \rho_{b''_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})a}\rho_{b''_{(3)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(4)})S(b'_{(2)})} \\
&\quad - \rho_{ab''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})} + \rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})a\cdot S(b'_{(2)})}\Big)
\end{aligned}
$$

Notar que otra vez aparecen dos tipos de sumandos: los que terminan en $\rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})}$ y los que no. Estos últimos se anulan entre sí, ya que comienzan por el mismo factor $\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}$ y, como $a \in \mathfrak{M} \subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(U(\mathfrak{M}))$, abusando de la notación de Sweedler:

$$\begin{aligned}
&- S(b''_{(2)}) \cdot S(b'_{(2)})a + S(b'_{(3)}b''_{(3)})a - S(b''_{(2)}) \cdot aS(b'_{(2)}) + S(b''_{(2)})a \cdot S(b'_{(2)}) \\
&\quad = \Big(S(b''_{(2)}), S(b'_{(2)}), a\Big) + \Big(S(b''_{(2)}), a, S(b'_{(2)})\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Para operar con el resto de los sumandos omitiremos el factor común y usaremos las identidades recursivas (5.2.4) que definen a los operadores λ y ρ y las del lema 5.2.10, de donde se tiene que $\rho_{xa} + \rho_{ax} = \rho_x\rho_a + \rho_a\rho_x$ y $\lambda_{xa} + \lambda_{ax} = \lambda_x\lambda_a + \lambda_a\lambda_x$ (aquí también hacemos abuso de la notación de Sweedler).

$$\begin{aligned}
&\sum \Big(\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{ab'_{(1)}} - \rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\lambda_a + \rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}a} - \rho_{b''_{(1)}}\lambda_a\lambda_{b'_{(1)}} \\
&\qquad + \rho_{b''_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})a}\rho_{b''_{(3)}}\lambda_{b'_{(1)}} - \rho_{ab''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\Big) \\
=&\sum \Big(\rho_{b''_{(1)}}\lambda_a\lambda_{b'_{(1)}} + \rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\lambda_a - \rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\lambda_a - \rho_{b''_{(1)}}\lambda_a\lambda_{b'_{(1)}} \\
&\qquad + \rho_{b''_{(1)}}\Big(\rho_{S(b''_{(2)})}\rho_a + [\rho_{S(b''_{(2)})}, \lambda_a]\Big)\rho_{b''_{(3)}}\lambda_{b'_{(1)}} - \Big(\rho_a\rho_{b''_{(1)}} + [\lambda_a, \rho_{b''_{(1)}}]\Big)\lambda_{b'_{(1)}}\Big) \\
=&\sum \Big(\rho_a\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}} + \lambda_a\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}} - \rho_{b''_{(1)}}\lambda_a\lambda_{b'_{(1)}} - \rho_a\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}} - [\lambda_a, \rho_{b''_{(1)}}]\lambda_{b'_{(1)}}\Big) = 0
\end{aligned}$$

Procedemos análogamente para la condición de núcleo alternativo a derecha.

$$\begin{aligned}
(p'b' \cdot p''b'') \cdot a &= \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(2)}, b''_{(2)}) \cdot b'_{(3)}b''_{(3)}\Big) \cdot a \\
&= \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)})r(b'_{(2)}b''_{(2)}, a_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(3)})r(b'_{(4)}b''_{(4)}, a_{(2)})\Big) \cdot (b'_{(5)}b''_{(5)})a_{(3)} \\
p'b' \cdot (p''b'' \cdot a) &= \sum p'b' \cdot \Big(p''r(b''_{(1)}, a_{(1)}) \cdot b''_{(2)}a_{(2)}\Big) \\
&= \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)}a_{(1)}) \cdot p''r(b''_{(2)}, a)s(b'_{(2)}, b''_{(3)}a_{(2)})\Big) \cdot b'_{(3)}(b''_{(4)}a_{(3)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(p'b', a, p''b'') + (p'b', p''b'', a) \\
&\qquad = \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, a_{(1)})r(b'_{(2)}a_{(2)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(3)}a_{(3)}, b''_{(2)})\Big) \cdot (b'_{(4)}a_{(4)})b''_{(3)} \\
&\qquad - \sum p'r(b'_{(1)}, a_{(1)}b''_{(1)}) \cdot p''s(a_{(2)}, b''_{(2)})s(b'_{(2)}, a_{(3)}b''_{(3)}) \cdot b'_{(3)}(a_{(4)}b''_{(4)}) \\
&\qquad + \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)})r(b'_{(2)}b''_{(2)}, a_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(3)})r(b'_{(4)}b''_{(4)}, a_{(2)})\Big) \cdot (b'_{(5)}b''_{(5)})a_{(3)} \\
&\qquad - \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)}a_{(1)}) \cdot p''r(b''_{(2)}, a_{(2)})s(b'_{(2)}, b''_{(3)}a_{(3)})\Big) \cdot b'_{(3)}(b''_{(4)}a_{(4)}).
\end{aligned}$$

Expandimos los sumandos aplicando el coproducto a a las veces que sea necesario en cada término:

$$\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes a_{(3)} = a \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes a$$

$$\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes a_{(3)} \otimes a_{(4)} = a \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes a \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes a.$$

$$\begin{aligned}
&(p'b', p''b'', a) + (p'b', a, p''b'') \\
&\quad = \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)})r(b'_{(2)}b''_{(2)}, a) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(3)})r(b'_{(4)}b''_{(4)}, 1)\Big) \cdot b'_{(5)}b''_{(5)} \\
&\quad + \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)})r(b'_{(2)}b''_{(2)}, 1) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(3)})r(b'_{(4)}b''_{(4)}, a)\Big) \cdot b'_{(5)}b''_{(5)} \\
&\quad + \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)})r(b'_{(2)}b''_{(2)}, 1) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(3)})r(b'_{(4)}b''_{(4)}, 1)\Big) \cdot (b'_{(5)}b''_{(5)})a \\
&\quad - \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)}a) \cdot p''r(b''_{(2)}, 1)s(b'_{(2)}, b''_{(3)})\Big) \cdot b'_{(3)}b''_{(4)} \\
&\quad - \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)}) \cdot p''r(b''_{(2)}, a)s(b'_{(2)}, b''_{(3)})\Big) \cdot b'_{(3)}b''_{(4)} \\
&\quad - \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)}) \cdot p''r(b''_{(2)}, 1)s(b'_{(2)}, b''_{(3)}a)\Big) \cdot b'_{(3)}b''_{(4)} \\
&\quad - \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)}) \cdot p''r(b''_{(2)}, 1)s(b'_{(2)}, b''_{(3)})\Big) \cdot b'_{(3)}(b''_{(4)}a) \\
&\quad + \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, a)r(b'_{(2)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(2)})\Big) \cdot b'_{(4)}b''_{(3)} \\
&\quad + \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, 1)r(b'_{(2)}a, b''_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(2)})\Big) \cdot b'_{(4)}b''_{(3)} \\
&\quad + \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, 1)r(b'_{(2)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(3)}a, b''_{(2)})\Big) \cdot b'_{(4)}b''_{(3)} \\
&\quad + \sum \Big(p'r(b'_{(1)}, 1)r(b'_{(2)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(3)}, b''_{(2)})\Big) \cdot (b'_{(4)}a)b''_{(3)} \\
&\quad - \sum p'r(b'_{(1)}, ab''_{(1)}) \cdot p''s(1, b''_{(2)})s(b'_{(2)}, b''_{(3)}) \cdot b'_{(3)}b''_{(4)} \\
&\quad - \sum p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(a, b''_{(2)})s(b'_{(2)}, b''_{(3)}) \cdot b'_{(3)}b''_{(4)} \\
&\quad - \sum p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(1, b''_{(2)})s(b'_{(2)}, ab''_{(3)}) \cdot b'_{(3)}b''_{(4)} \\
&\quad - \sum p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(1, b''_{(2)})s(b'_{(2)}, b''_{(3)}) \cdot b'_{(3)}(ab''_{(4)}).
\end{aligned}$$

Notar que los sumandos que contienen una a en el último factor se anulan, ya que el primer factor es en todos el mismo: $\sum p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)}) \cdot p''s(b'_{(2)}, b''_{(2)})$ y como $a \in \mathfrak{M} \subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(U(\mathfrak{M}))$, se tiene (abusando de la notación de Sweedler por claridad) que

$$(b'_{(3)}b''_{(3)})a - b'_{(3)}(b''_{(3)}a) + (b'_{(3)}a)b''_{(3)} - b'_{(3)}(ab''_{(3)}) = (b'_{(3)}, b''_{(3)}, a) + (b'_{(3)}, a, b''_{(3)}) = 0.$$

El resto de sumandos que no se anulan los separamos en dos grupos, atendiendo al cuál sea el factor en el que no aparece a: $p'r(b'_{(1)}, b''_{(1)})$ a la izquierda o $p''s(b'_{(2)}, b''_{(2)})$ a la derecha.

El objetivo ahora es probar que la suma en de cada uno de estos grupos es cero. Para el primer grupo, si escribimos $r(b,b')$ y $s(b,b')$ en términos de ρ's y λ's obtenemos (también haciendo abuso de la notación de Sweedler)

$$\begin{aligned}
&\sum \Big(r(b'_{(1)}, b''_{(1)}) r(b'_{(2)} b''_{(2)}, a) - r(b', b''a) + r(b'_{(1)}, a) r(b'_{(2)}, b'') + r(b'a, b'') - r(b', ab'') \Big) \\
&= \sum \Big(\rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})} \rho_{b'_{(3)} b''_{(3)}} \rho_{a_{(1)}} \rho_{S(a_{(2)})S(b'_{(4)} b''_{(4)})} - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)} a_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)} a_{(2)}) S(b'_{(2)})} \\
&\quad + \rho_{b'_{(1)}} \rho_{a_{(1)}} \rho_{S(a_{(2)})S(b'_{(2)})} \rho_{b'_{(3)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(4)})} + \rho_{b'_{(1)} a_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)} a_{(2)})} \\
&\quad - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{a_{(1)} b''_{(1)}} \rho_{S(a_{(2)} b''_{(2)}) S(b'_{(2)})} \Big)
\end{aligned}$$

Si expandimos cada sumando utilizando que $\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} = a \otimes 1 + 1 \otimes a$, aplicando que $S(a) = -a$ y que $\rho_x \rho_{S(x)} = \epsilon(x) \cdot 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum \Big(&\rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_a \rho_{S(b'_{(2)} b''_{(2)})} - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{aS(b'_{(2)} b''_{(2)})} \\
&- \rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)} a} \rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})} + \rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{aS(b''_{(2)}) \cdot S(b'_{(2)})} \\
&+ \rho_{b'_{(1)}} \rho_a \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})} - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{aS(b'_{(2)})} \rho_{b'_{(3)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(4)})} \\
&+ \rho_{b'_{(1)} a} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})} - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)}) \cdot aS(b'_{(2)})} \\
&- \rho_{b'_{(1)}} \rho_{ab''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})} + \rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_{S(b''_{(2)}) a \cdot S(b'_{(2)})} \Big).
\end{aligned}$$

Notar que hay dos tipos de sumandos: los que terminan en $\rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})}$ y los que no. Estos últimos se anulan entre sí, ya que comienzan por el mismo factor $\rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}}$ y, como $a \in \mathfrak{M} \subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(U(\mathfrak{M}))$, de nuevo abusando de la notación de Sweedler, se tiene que

$$\begin{aligned}
&- a \cdot S(b''_{(2)}) S(b'_{(2)}) + aS(b''_{(3)}) \cdot S(b''_{(3)}) - S(b''_{(2)}) \cdot aS(b'_{(2)}) + S(b''_{(2)}) a \cdot S(b'_{(2)}) \\
&= \Big(a, S(b''_{(2)}), S(b'_{(2)}) \Big) + \Big(S(b''_{(2)}), a, S(b'_{(2)}) \Big) = 0.
\end{aligned}$$

Para operar con el resto de los sumandos omitiremos el factor común y usaremos las identidades recursivas (5.2.4) que definen a los operadores λ y ρ y las del lema 5.2.10, de donde se tiene que $\rho_{xa} + \rho_{ax} = \rho_x \rho_a + \rho_a \rho_x$ (de nuevo se abusa de la notación de Sweedler).

$$\begin{aligned}
&\sum \Big(\rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_a - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)} a} + \rho_{b'_{(1)}} \rho_a \rho_{b''_{(1)}} \\
&\qquad - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{aS(b'_{(2)})} \rho_{b'_{(3)}} \rho_{b''_{(1)}} + \rho_{b'_{(1)} a} \rho_{b''_{(1)}} - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{ab''_{(1)}} \Big) \\
&= \sum \Big(\rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_a - \rho_{b'_{(1)}} \rho_{b''_{(1)}} \rho_a - \rho_{b'_{(1)}} \rho_a \rho_{b''_{(1)}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\rho_{b'_{(1)}}\rho_a\rho_{b''_{(1)}}-\rho_{b'_{(1)}}\rho_{aS(b'_{(2)})}\rho_{b'_{(3)}}\rho_{b''_{(1)}}+\rho_{b'_{(1)}a}\rho_{b''_{(1)}}\Big)\\
=&\sum\Big(-\rho_{b'_{(1)}}\Big(\rho_a\rho_{S(b'_{(2)})}+[\lambda_a,\rho_{S(b'_{(2)})}]\Big)\rho_{b'_{(3)}}\rho_{b''_{(1)}}+\Big(\rho_{b'_{(1)}}\rho_a+[\rho_{b'_{(1)}},\lambda_a]\Big)\rho_{b''_{(1)}}\Big)\\
=&\sum\Big(-\rho_{b'_{(1)}}\lambda_a\rho_{b''_{(1)}}+\lambda_a\rho_{b'_{(1)}}\rho_{b''_{(1)}}+[\rho_{b'_{(1)}},\lambda_a]\rho_{b''_{(1)}}\Big)=0
\end{aligned}
$$

De la misma manera en el segundo grupo, si escribimos $r(b,b')$ y $s(b,b')$ en términos de ρ's y λ's se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\sum\Big(s(b'_{(1)},b''_{(1)})r(b'_{(2)}b''_{(2)},a)-r(b''_{(1)},a)s(b',b''_{(2)})-s(b',b''a)+s(b'a,b'')\\
&\quad-s(a,b''_{(1)})s(b',b''_{(2)})-s(b',ab'')\Big)\\
=&\sum\Big(\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{s(b''_{(2)})S(b'_{(2)})}\rho_{b'_{(3)}b''_{(3)}}\rho_{a_{(1)}}\rho_{S(a_{(2)})S(b'_{(4)}b''_{(4)})}\\
&\quad-\rho_{b''_{(1)}}\rho_{a_{(1)}}\rho_{S(a_{(2)})S(b''_{(2)})}\rho_{b''_{(3)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(4)})S(b'_{(2)})}\\
&\quad-\rho_{b''_{(1)}a_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)}a_{(2)})S(b'_{(2)})}+\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}a_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)}a_{(2)})}\\
&\quad-\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{a_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})S(a_{(2)})}\rho_{b''_{(3)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(4)})S(b'_{(2)})}-\rho_{a_{(1)}b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(a_{(2)}b''_{(2)})S(b'_{(2)})}\Big)
\end{aligned}
$$

Si expandimos cada sumando utilizando que $\sum a_{(1)}\otimes a_{(2)}=a\otimes 1+1\otimes a$, aplicando que $S(a)=-a$ y que $\rho_x\rho_{S(x)}=\epsilon(x)\cdot 1$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
&\sum\Big(\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_a\rho_{S(b'_{(2)}b''_{(2)})}-\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{aS(b'_{(2)}b''_{(2)})}\\
&\quad-\rho_{b''_{(1)}}\rho_a\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})}+\rho_{b''_{(1)}}\rho_{aS(b''_{(2)})}\rho_{b''_{(3)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(4)})S(b'_{(2)})}\\
&\quad-\rho_{b''_{(1)}a}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})}+\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{aS(b''_{(2)})\cdot S(b'_{(2)})}\\
&\quad+\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}a}\rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})}-\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})\cdot aS(b'_{(2)})}\\
&\quad-\rho_{b''_{(1)}}\lambda_a\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})}+\rho_{b''_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})a}\rho_{b''_{(3)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(4)})S(b'_{(2)})}\\
&\quad-\rho_{ab''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})}+\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})a\cdot S(b'_{(2)})}\Big)
\end{aligned}
$$

Notar que otra vez aparecen dos tipos de sumandos: los que terminan en $\rho_{S(b''_{(2)})S(b'_{(2)})}$ y los que no. Estos últimos se anulan entre sí, ya que comienzan por el mismo factor $\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}$ y, como $a\in\mathfrak{M}\subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{alt}}(U(\mathfrak{M}))$, de nuevo abusando de la notación de Sweedler, se tiene que

$$
\begin{aligned}
&-aS(b'_{(2)}b''_{(2)})+aS(b''_{(2)})\cdot S(b'_{(2)})-S(b''_{(2)})\cdot aS(b'_{(2)})+S(b''_{(2)})a\cdot S(b'_{(2)})\\
&\quad=\Big(a,S(b''_{(2)}),S(b'_{(2)})\Big)+\Big(S(b''_{(2)}),a,S(b'_{(2)})\Big)=0.
\end{aligned}
$$

Para operar con el resto de los sumandos omitiremos el factor común y usaremos las identidades recursivas (5.2.4) que definen a los operadores λ y ρ y las del lema 5.2.10, de donde se tiene que $\rho_{xa}+\rho_{ax}=\rho_x\rho_a+\rho_a\rho_x$ y $\lambda_{xa}+\lambda_{ax}=\lambda_x\lambda_a+\lambda_a\lambda_x$. Haciendo abuso de la notación de Sweedler,

$$\begin{aligned}
&\sum\Big(\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_a-\rho_{b''_{(1)}}\rho_a\lambda_{b'_{(1)}}+\rho_{b''_{(1)}}\rho_{aS(b''_{(2)})}\rho_{b''_{(3)}}\lambda_{b'_{(1)}}-\rho_{b''_{(1)}}\lambda_a\lambda_{b'_{(1)}}\\
&\qquad-\rho_{b''_{(1)}a}\lambda_{b'_{(1)}}+\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}a}+\rho_{b''_{(1)}}\rho_{S(b''_{(2)})a}\rho_{b''_{(3)}}\lambda_{b'_{(1)}}-\rho_{ab''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\Big)\\
=&\sum\Big(\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}}\rho_a-\rho_{b''_{(1)}}\rho_a\lambda_{b'_{(1)}}+\rho_{b''_{(1)}}\Big(\rho_a\rho_{S(b''_{(2)})}+\rho_{S(b''_{(2)})}\rho_a\Big)\rho_{b''_{(3)}}\lambda_{b'_{(1)}}\\
&\qquad-\Big(\rho_{b''_{(1)}}\rho_a+\rho_a\rho_{b''_{(1)}}\Big)\lambda_{b'_{(1)}}+\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}a}-\rho_{b''_{(1)}}\lambda_a\lambda_{b'_{(1)}}\Big)\\
=&\sum\Big(\rho_{b''_{(1)}}[\lambda_{b'_{(1)}},\rho_a]++\rho_{b''_{(1)}}\lambda_{b'_{(1)}a}-\rho_{b''_{(1)}}\lambda_a\lambda_{b'_{(1)}}\Big)=0.
\end{aligned}$$

□

5.3. Módulos relativos para las álgebras de Lie semisimples y los octoniones de traza cero

En esta sección vamos a estudiar los casos particulares en que el álgebra de Malcev $\mathfrak{M}$ es un álgebra de Lie semisimple o al álgebra de los octoniones de traza cero. Veremos que aparecen más módulos que los enunciados por Carlsson en [Car76] y Elduque [Eld90].

Nota 5.3.1. Dados $\mathfrak{M}$ un álgebra de Malcev y $a,b\in\mathfrak{M}$, los operadores $D_{a,b}$ definidos en 5.2.1 mediante la fórmula

$$D_{a,b}=-\tfrac{1}{2}(\mathrm{ad}_{[a,b]}+[\mathrm{ad}_a,\mathrm{ad}_b])$$

son derivaciones de $\mathfrak{M}$ [Sag61, proposición 8.3]. Además,

$$[\mathrm{ad}_x,D_{a,b}]=\mathrm{ad}_{xD_{a,b}},$$

donde

$$xD_{a,b}=-\tfrac{1}{2}\Big([x,[a,b]]+[[x,a],b]-[[x,b],a]\Big).$$

5.3.1. Módulos relativos para álgebras de Lie semisimples

Proposición 5.3.2. *Si $\mathfrak{M}$ es un álgebra de Lie entonces se tiene que*

$$I_M:=F\langle\mathrm{ad}_{[a,b]}+D_{a,b}\mid a,b\in\mathfrak{M}\rangle$$

$$I_L := F\langle \operatorname{ad}_{[a,b]} - 2D_{a,b} \mid a, b \in \mathfrak{M}\rangle$$

son ideales de $\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+$ y $[I_M, I_L] = 0$.

Demostración. Si $\mathfrak{M}$ es álgebra de Lie, entonces, aplicando la identidad de Jacobi, se tiene que

$$[[a,b],c] + [[a,c],b] + [a,[b,c]] = 2[[a,b],c],$$

luego $xD_{a,b} = -[x,[a,b]] = -x\operatorname{ad}_{[a,b]}$. Sean $a, a', b, b', c \in \mathfrak{M}$. Usando la identidad 5.1.2 se tiene:

$$\begin{aligned}
[\operatorname{ad}_{[a,b]} + D_{a,b}, \operatorname{ad}_c] &= \tfrac{1}{2}[\operatorname{ad}_{[a,b]} - [\operatorname{ad}_a, \operatorname{ad}_b], \operatorname{ad}_c] \\
&= \tfrac{1}{2}\Big([\operatorname{ad}_{[a,b]}, \operatorname{ad}_c] + [\operatorname{ad}_{[a,b]}, \operatorname{ad}_c] - 2\operatorname{ad}_{[[a,b],c]}\Big) \\
&= [\operatorname{ad}_{[a,b]}, \operatorname{ad}_c] - \operatorname{ad}_{[[a,b],c]} = -2\Big(\operatorname{ad}_{[[a,b],c]} + D_{[a,b],c}\Big) \in I_M \\
[\operatorname{ad}_{[a,b]} - 2D_{a,b}, \operatorname{ad}_c] &= [2\operatorname{ad}_{[a,b]} + [\operatorname{ad}_a, \operatorname{ad}_b], \operatorname{ad}_c] \\
&= 2[\operatorname{ad}_{[a,b]}, \operatorname{ad}_c] - [\operatorname{ad}_{[a,b]}, \operatorname{ad}_c] + 2\operatorname{ad}_{[[a,b],c]} \\
&= [\operatorname{ad}_{[a,b]}, \operatorname{ad}_c] + 2\operatorname{ad}_{[[a,b],c]} \in I_L \\
[\operatorname{ad}_{[a,b]} + D_{a,b}, \operatorname{ad}_{[c,d]} - 2D_{c,d}] &= \tfrac{1}{2}[\operatorname{ad}_{[a,b]} - [\operatorname{ad}_a, \operatorname{ad}_b], 2\operatorname{ad}_{[c,d]} + [\operatorname{ad}_c, \operatorname{ad}_d]] \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(2[\operatorname{ad}_{[a,b]}, \operatorname{ad}_{[c,d]}] - 2[[\operatorname{ad}_a, \operatorname{ad}_b], \operatorname{ad}_{[c,d]}] \\
&\qquad + [\operatorname{ad}_{[a,b]}, [\operatorname{ad}_c, \operatorname{ad}_d]] - [[\operatorname{ad}_a, \operatorname{ad}_b], [\operatorname{ad}_c, \operatorname{ad}_d]]\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(2[\operatorname{ad}_{[a,b]}, \operatorname{ad}_{[c,d]}] + 2([\operatorname{ad}_{[a,b]}, \operatorname{ad}_{[c,d]}] - 2\operatorname{ad}_{[[a,b],[c,d]]}) \\
&\qquad + [\operatorname{ad}_{[c,d]}, \operatorname{ad}_{[a,b]}] - 2\operatorname{ad}_{[[c,d],[a,b]]} \\
&\qquad - [[[\operatorname{ad}_a, \operatorname{ad}_b], \operatorname{ad}_c], \operatorname{ad}_d] - [\operatorname{ad}_c, [[\operatorname{ad}_a, \operatorname{ad}_b], \operatorname{ad}_d]]\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(3[\operatorname{ad}_{[a,b]}, \operatorname{ad}_{[c,d]}] - 2\operatorname{ad}_{[[a,b],[c,d]]} + [[\operatorname{ad}_{[a,b]}, \operatorname{ad}_c], \operatorname{ad}_d] \\
&\qquad - 2[\operatorname{ad}_{[[a,b],c]}, \operatorname{ad}_d] + [\operatorname{ad}_c, [\operatorname{ad}_{[a,b]}, \operatorname{ad}_d]] - 2[\operatorname{ad}_c, \operatorname{ad}_{[[a,b],d]}]\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(3[\operatorname{ad}_{[a,b]}, \operatorname{ad}_{[c,d]}] - 2\operatorname{ad}_{[[a,b],[c,d]]} - [\operatorname{ad}_{[[a,b],c]}, \operatorname{ad}_d] \\
&\qquad + 2\operatorname{ad}_{[[[a,b],c],d]} - 2[\operatorname{ad}_{[[a,b],c]}, \operatorname{ad}_d] + [\operatorname{ad}_{[[a,b],d]}, \operatorname{ad}_c] \\
&\qquad - 2\operatorname{ad}_{[[[a,b],d],c]} - 2[\operatorname{ad}_c, \operatorname{ad}_{[[a,b],d]}]\Big) \\
&= \tfrac{3}{2}\Big([\operatorname{ad}_{[a,b]}, \operatorname{ad}_{[c,d]}] - [\operatorname{ad}_{[[a,b],c]}, \operatorname{ad}_d] - [\operatorname{ad}_c, \operatorname{ad}_{[[a,b],c]}]\Big) = 0,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene porque

$$[\mathrm{ad}_{[[a,b],c]}, \mathrm{ad}_d] - [\mathrm{ad}_{[[a,b],d]}, \mathrm{ad}_c] = [\mathrm{ad}_d, [\mathrm{ad}_{[a,b]}, \mathrm{ad}_c]] + 2\,\mathrm{ad}_{[[[a,b],c],d]}$$
$$- [\mathrm{ad}_c, [\mathrm{ad}_{[a,b]}, \mathrm{ad}_d]] - 2\,\mathrm{ad}_{[[[a,b],d],c]}$$
$$= [\mathrm{ad}_d, [\mathrm{ad}_{[a,b]}, \mathrm{ad}_c]] + 2\,\mathrm{ad}_{[[[a,b],c],d]}$$
$$- [[\mathrm{ad}_c, \mathrm{ad}_{[a,b]}], \mathrm{ad}_d]] - [\mathrm{ad}_d, [\mathrm{ad}_{[a,b]}, \mathrm{ad}_c]] - 2\,\mathrm{ad}_{[[[a,b],d],c]}$$
$$= 2\,\mathrm{ad}_{[[[a,b],c],d]} - 2\,\mathrm{ad}_{[[[a,b],d],c]} - [\mathrm{ad}_{[c,d]}, \mathrm{ad}_{[a,b]}] + 2\,\mathrm{ad}_{[[c,d],[a,b]]} = [\mathrm{ad}_{[a,b]}, \mathrm{ad}_{[c,d]}].$$

□

Notar que, como hemos observado al inicio de la sección 5.2.1, el conjunto

$$\{\mathrm{ad}_a, [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b] \mid a, b \in \mathfrak{M}\}$$

genera linealmente el álgebra $\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+$. Por tanto,

$$\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+ \cong \mathrm{ad}_{\mathfrak{M}} \oplus D_{\mathfrak{M},\mathfrak{M}}.$$

Lema 5.3.3. *Si $\mathfrak{M}$ es un álgebra de Lie semisimple entonces*

$$\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+ \overset{\cong}{\rightrightarrows} I_M \oplus I_L \tag{5.3.1}$$

$$ad_{[a,b]} \leftrightarrow (-2[a,b], [a,b]) \tag{5.3.2}$$

induce un isomorfismo de álgebras de Lie.

Demostración. De la definición de $D_{a,b}$ se tiene que $[\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b] = -(2D_{a,b} + \mathrm{ad}_{[a,b]})$, y de la identidad de Jacobi en $\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+$ se deduce que $D_{[a,b],c} + D_{[b,c],a} + D_{[c,a],b} = 0$, por lo que $-D_{[a,b],[c,d]} = -D_{[a,[c,d]],b} - D_{a,[b,[c,d]]}$. Ahora

$$[\mathrm{ad}_{[a,b]} + D_{a,b}, \mathrm{ad}_{[c,d]} + D_{c,d}]$$
$$= [\mathrm{ad}_{[a,b]}, \mathrm{ad}_{[c,d]}] + [\mathrm{ad}_{[a,b]}, D_{c,d}] + [D_{a,b}, \mathrm{ad}_{[c,d]}] + [D_{a,b}, D_{c,d}]$$
$$= -(2D_{[a,b],[c,d]} + \mathrm{ad}_{[[a,b],[c,d]]}) - \mathrm{ad}_{[[a,b],[c,d]]} + \mathrm{ad}_{[[c,d],[a,b]]} - D_{a,[b,[c,d]]} - D_{[a,[c,d]],b}$$
$$= -3(\mathrm{ad}_{[[a,b],[c,d]]} + D_{[a,b],[c,d]}).$$

Por tanto, $[-\frac{1}{3}\,\mathrm{ad}_{[a,b]} + D_{a,b}, -\frac{1}{3}\,\mathrm{ad}_{[c,d]} + D_{c,d}] = -\frac{1}{3}(ad_{[[a,b],[c,d]]} + D_{[a,b],[c,d]})$, luego la asignación $[a,b] \leftrightarrow -\frac{1}{3}(ad_{[a,b]} + D_{a,b})$ es un isomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{M} \cong I_M$. De manera similar,

$$[\mathrm{ad}_{[a,b]} - 2D_{a,b}, \mathrm{ad}_{[c,d]} - 2D_{c,d}]$$

$$= [\mathrm{ad}_{[a,b]}, \mathrm{ad}_{[c,d]}] - 2[\mathrm{ad}_{[a,b]}, D_{c,d}] - 2[D_{a,b}, \mathrm{ad}_{[c,d]}] + 4[D_{a,b}, D_{c,d}]$$
$$= -(2D_{[a,b],[c,d]} + \mathrm{ad}_{[[a,b],[c,d]]}) + 2\,\mathrm{ad}_{[[a,b],[c,d]]} - 2\,\mathrm{ad}_{[[c,d],[a,b]]} - 4D_{a,[b,[c,d]]} - 4D_{[a,[c,d]],b}$$
$$= 3(\mathrm{ad}_{[[a,b],[c,d]]} - 2D_{[a,b],[c,d]}).$$

Por tanto, la asignación $[a,b] \leftrightarrow \frac{1}{3}(ad_{[a,b]} - 2D_{a,b})$ es un isomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{M} \cong I_L$. Finalmente, la asignación

$$\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+ \overset{\cong}{\to} I_M \oplus I_L$$
$$[a,b] \leftrightarrow (-2[a,b],[a,b])$$

induce el isomorfismo de álgebras de Lie que buscábamos. □

Proposición 5.3.4. *Sea $\mathfrak{M}$ un álgebra de Lie semisimple. Se tiene que toda representación relativa irreducible de $\mathfrak{M}$ como álgebra de Malcev es isomorfa a un módulo $V_M \otimes V_L$ con V_M, V_L módulos irreducibles del álgebra de Lie $\mathfrak{M}$ y que*

$$(v_M \otimes v_L)r_a = -2v_M a \otimes v_L + v_M \otimes v_L a.$$

Demostración. Por la proposición 5.2.3, toda representación irreducible V de $\mathfrak{M}$ es isomorfa a una representación de $\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+$. Si $\mathfrak{M}$ es un álgebra de Lie semisimple, entonces $\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+ \cong \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}$, por lo que $V = V_M \otimes V_L$, con V_M y V_L módulos para el álgebra de Lie $\mathfrak{M}$. La acción $r : \mathfrak{M} \to End(V)$ viene dada por

$$vr_a = v\ \mathrm{ad}_a = (v_M \otimes v_L)\ \mathrm{ad}_a \overset{(*)}{=} -2(v_M \cdot a) \otimes v_L + v_M \otimes (v_L \cdot a),$$

donde $(*)$ se tiene identificando $\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+$ con $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}$ mediante el isomorfismo 5.3.1 y utilizando que

$$(v_M \otimes v_L) \cdot (a,b) = (v_M \otimes v_L) \cdot \Big((a,0) + (0,b)\Big) = v_M \cdot a \otimes v_L + v_M \otimes v_L \cdot b.$$

En el último miembro de la igualdad, $\cdot$ denota la acción de $\mathfrak{M}$ en V_M y V_L. □

Notar que si el módulo V_M es trivial, entonces se recuperan los módulos de Lie para las álgebras de Lie semisimples y si el módulo V_L es trivial, el álgebra de Lie es $sl(2,F)$ y se recupera el módulo M_2 descrito por Carlsson.

Corolario 5.3.5. *Si V_M es trivial, entonces $V \cong V_L$ es un módulo de Lie para el álgebra de Lie $\mathfrak{M}$.*

Corolario 5.3.6. *Si V_L es trivial, entonces $V = V_M$ y $[r_a, r_b] = -2r_{[a,b]}$, es decir, $\rho_a = -\frac{1}{2}r_a$ es una representación de Lie.*

5.3.2. Módulos relativos para $\mathbb{O}_0$

En el caso en que $\mathfrak{M} = \mathbb{O}_0$, el álgebra de los octoniones de traza cero, se tiene que las representaciones relativas para $\mathfrak{M}$ están en correspondencia biunívoca con las representaciones del álgebra de Lie simple B_3. Veamos por qué.

Por la proposición 5.2.3, los módulos relativos para $\mathfrak{M}$ están en correspondencia biunívoca con los módulos para el álgebra de Lie $\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+$. Se tiene que

$$\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+ = \mathrm{ad}_{\mathfrak{M}} + [\mathrm{ad}_{\mathfrak{M}}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{M}}] = \mathrm{ad}_{\mathfrak{M}} + D_{\mathfrak{M},\mathfrak{M}},$$

donde $\mathrm{ad}_{\mathfrak{M}} = \{\mathrm{ad}_x \in \mid x \in \mathfrak{M}\}$ y $D_{\mathfrak{M},\mathfrak{M}} = \{D_{a,b} \mid a, b \in \mathfrak{M}\}$ con ad_x y $D_{a,b}$ símbolos abstractos subindicados por los elementos de $\mathfrak{M}$.

Los elementos $D_{a,b}$ son derivaciones de $\mathbb{O}_0$ [Sag61, proposición 8.3] y las derivaciones de los octoniones de traza cero forman un álgebra de Lie isomorfa al álgebra de Lie simple excepcional de tipo G_2 [Jac62].

Como $\dim \mathrm{ad}_{\mathfrak{M}} = \dim\mathfrak{M} = 7$ y por antisimetría $\dim D_{\mathfrak{M},\mathfrak{M}} \leq 21$, se tiene que $\dim\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+ \leq 28$.

Consideramos el homomorfismo de álgebras de Lie

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}(\mathfrak{M})_+ &\to \mathfrak{gl}(\mathfrak{M}) \\ \mathrm{ad}_x &\mapsto \mathrm{ad}_x : y \mapsto [y, x]. \end{aligned}$$

Se tiene que $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Lie}\langle \mathrm{ad}_x \mid x \in \mathfrak{M}\rangle \cong B_3$, el álgebra de Lie simple [MPIP01, proposición 4.9], por lo que $\dim\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+ \geq 21$.

Notar que en $D_{\mathfrak{M},\mathfrak{M}}$ se pueden encontrar dependencias lineales entre los elementos, ya que la identidad de Jacobi aplicada a la condición que define a $\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+$ implica que

$$D_{[a,b],c} + D_{[b,c],a} + D_{[c,a],b} = 0.$$

Si consideramos la tabla de multiplicación en el álgebra $\mathbb{O}_0$

[-,-]	e	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
e	0	$2x_1$	$2x_2$	$2x_3$	$-2y_1$	$-2y_2$	$-2y_3$
x_1	$-2x_1$	0	$2y_3$	$-2y_2$	e	0	0
x_2	$-2x_2$	$-2y_3$	0	$2y_1$	0	e	0
x_3	$-2x_3$	$2y_2$	$-2y_1$	0	0	0	e
y_1	$2y_1$	$-e$	0	0	0	$-2x_3$	$2x_2$
y_2	$2y_2$	0	$-e$	0	$2x_3$	0	$-2x_1$
y_3	$2y_3$	0	0	$-e$	$-2x_2$	$2x_1$	0

y sustituimos adecuadamente, obtenemos las siguientes 7 dependencias lineales:

$$
\begin{aligned}
0 &= D_{[e,x_1],x_2} + D_{[x_1,x_2],e} + D_{[x_2,e],x_1} = 2(D_{x_1,x_2} + D_{y_3,e} - D_{x_2,x_1}) \\
&\implies 2D_{x_1,x_2} + D_{y_3,e} = 0 \\
0 &= D_{[e,x_1],x_3} + D_{[x_1,x_3],e} + D_{[x_3,e],x_1} = 2(D_{x_1,x_3} - D_{y_2,e} - D_{x_3,x_1}) \\
&\implies 2D_{x_1,x_3} - D_{y_2,e} = 0 \\
0 &= D_{[e,x_2],x_3} + D_{[x_2,x_3],e} + D_{[x_3,e],x_2} = 2(D_{x_2,x_3} + D_{y_1,e} - D_{x_3,x_2}) \\
&\implies 2D_{x_2,x_3} + D_{y_1,e} = 0 \\
0 &= D_{[e,y_1],y_2} + D_{[y_1,y_2],e} + D_{[y_2,e],y_1} = 2(-D_{y_1,y_2} - D_{x_3,e} + D_{y_2,y_1}) \\
&\implies 2D_{y_1,y_2} + D_{x_3,e} = 0 \\
0 &= D_{[e,y_1],y_3} + D_{[y_1,y_3],e} + D_{[y_3,e],y_1} = 2(-D_{y_1,y_3} + D_{x_2,e} + D_{y_3,y_1}) \\
&\implies 2D_{y_1,y_3} - D_{x_2,e} = 0 \\
0 &= D_{[e,y_2],y_3} + D_{[y_2,y_3],e} + D_{[y_3,e],y_2} = 2(-D_{y_2,y_3} - D_{x_1,e} + D_{y_3,y_2}) \\
&\implies 2D_{y_2,y_3} + D_{x_1,e} = 0 \\
0 &= D_{[x_1,x_2],x_3} + D_{[x_2,x_3],x_1} + D_{[x_3,x_1],x_2} = 2(D_{y_3,x_3} + D_{y_1,x_1} + D_{y_2,x_2}).
\end{aligned}
$$

Con estas dependencias, se tiene que $21 \leq \dim\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+ \leq 21$, por lo que se tiene la igualdad y, por tanto, $\mathcal{L}(\mathfrak{M})_+ \cong B_3$. Así, los módulos relativos para el álgebra $\mathbb{O}_0$ están en correspondencia biunívoca con los módulos del álgebra de Lie simple B_3.

5.4. En breve / Summarizing

5.4.1. En breve

La aproximación clásica a la teoría de representación de lazos y álgebras de Sabinin resulta ser muy restrictiva, por lo que se ha introducido el concepto de representación relativa, que propone que la estructura escindida resultante no tiene porqué estar en la misma variedad que el objeto representado, sino que únicamente los elementos de este último presentan el comportamiento de la variedad. Esta idea se desarrolla en el caso de los lazos de Moufang y las álgebras de Malcev, obteniéndose una familia de módulos que contiene los descritos por Carlsson [Car76] y Elduque [Eld90].

5.4.2. Summarizing

Since the classical approach to representation theory of loops and Sabinin algebras seems to be very restrictive we introduced the notion of relative representation. It proposes that the resulting split structure need not to be in the same variety of the representated object: only the elements of this last object present the behavior of the variety. This idea was specialized to the case of Moufang loops and Malcev algebras to obtain a family of modules for Malcev algebras which contains those described by Carlsson [Car76] and Elduque [Eld90].

Capítulo 6

Fórmula de tipo Weyl para la dimensión de módulos irreducibles para sistemas triples de Lie internos simples

6.1. Introducción / Introduction

6.1.1. Introducción

Definición 6.1.1. Un **sistema triple de Lie** es un espacio vectorial T dotado de un producto trilineal abc que verifica las identidades

$(LTS1)$ $abc = -bac$

$(LTS2)$ $abc + bca + cab = 0$

$(LTS3)$ $ab(cde) = (abc)de + c(abd)e + cd(abe)$

Se tiene que cualquier subespacio de un álgebra de Lie $(L, [x, y])$ cerrado por el producto triple $xyz = [[x, y], z]$ es un sistema triple de Lie. En particular, toda álgebra de Lie es un sistema triple de Lie.

En [Ber00, capítulo I, sección 2], se prueba que para un espacio simétrico homogéneo dado M, el tensor de curvatura $R_o(x, y)$ en un punto fijado $o \in M$ asociado a su conexión canónica define un sistema triple de Lie en el correspondiente espacio tangente $T_o(M)$ a través del producto trilineal $xyz = -R_o(x, y)z$. En este sentido, se tiene que

Teorema 6.1.2. *([Ber00], teorema I.2.9) La categoría de los espacios simétricos conexos simplemente conexos con punto base es equivalente a la categoría de sistemas triples reales finitodimensionales. La equivalencia está dada por la evaluación del tensor de curvatura en el punto base.*

Desde un punto de vista estructural, cualquier *álgebra de Lie con involución* (L, σ), esto es, un álgebra de Lie con un automorfismo de orden dos distinguido σ (la involución), induce en $skew(L, \sigma) = \{x \in L \mid \sigma(x) = -x\}$ una estructura de sistema triple de Lie con el producto triple $abc = [[a, b], c]$, luego los sistemas triples de Lie son muy comunes. Notar también que las álgebras de Lie con involución son lo mismo que álgebras de Lie $\mathbb{Z}_2$-graduadas $L = L_0 \oplus L_1$ con $L_1 \neq 0$, donde la involución es la responsable de la $\mathbb{Z}_2$-graduación.

Cualquier sistema triple de Lie T admite una descripción de este tipo: se toma el espacio vectorial $\mathrm{IDer}(T) = span\langle D_{a,b} \mid a, b \in T\rangle$, donde $D_{a,b}$ es la derivación $D_{a,b} : c \mapsto abc$. Por la identidad $(LTS3)$, este espacio es una subálgebra de Lie del álgebra de Lie general $\mathfrak{gl}(T)$, llamada *álgebra de Lie de las derivaciones internas de* T. Ahora, definiendo $L_s(T) = \mathrm{IDer}(T) \oplus T$, la *envolvente estándar de* T, se tiene un álgebra de Lie con involución con el producto determinado por las condiciones

(1) $\mathrm{IDer}(T)$ es una subálgebra de Lie de $L_s(T)$

(2) $[D_{a,b}, c] = abc = -[c, D_{a,b}]$

(3) $[a, b] = D_{a,b}$

y automorfismo involutivo $\sigma : D_{a,b} + c \mapsto D_{a,b} - c$. El sistema triple de Lie T se recupera como $skew(L_s(T), \sigma)$. Más aún, T genera $L_s(T)$ y la aplicación de inclusión $\iota : T \to L_s(T)$ verifica $\iota(abc) = [[\iota(a), \iota(b)], \iota(c)]$, luego es un homomorfismo de sistemas triples de Lie.

En [Lis52, definición 1.6] se define la *envolvente universal de un sistema triple de Lie* T, $L_u(T)$ como un álgebra de Lie para la cual existe un homomorfismo de sistemas triples de Lie $\eta : T \to L_u(T)$ de tal manera que $\eta(T)$ genera $L_u(T)$ y para cualquier álgebra de Lie

L y $\varphi : T \to L$ homomorfismo de sistemas triples de Lie, existe un único homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : L_u(T) \to L$ que verifica $\varphi = \phi\eta$. Para sistemas triples de Lie semisimples (esto es, con radical cero) sobre cuerpos de característica cero, las envolventes estándar y universal coinciden. Esto es falso en característica prima (ver 6.3.3); de hecho, sobre cuerpos de característica distinta de 2, se tiene que $L_u(T)/Z(L_u(T)) \cong L_s(T)$ para cualquier sistema triple de Lie con centro nulo (ver [Hod01, teorema 2.1.10]). Ambas álgebras envolventes juegan un papel importante en la teoría de representación de los sistemas triples de Lie.

Definición 6.1.3. Dado un sistema triple de Lie T con producto abc, un espacio vectorial M se dice **módulo para el sistema triple de Lie** T si existe una aplicación bilineal $\theta : T \times T \to \mathrm{End}_F(M)$ tal que el espacio vectorial $E_M = T \oplus M$ es un sistema triple de Lie con producto determinado por $MMM = TMM = MTM = MMT = 0$, T es un subsistema triple de Lie de $T \oplus M$ y

$$mab = \theta(a,b)(m),\ amb = -mab,\ abm = -mab + mba \quad \forall m \in M, a, b \in T$$

En [HP02, sección 3] (consultar [BMPI10a] para una demostración), se explicitan las condiciones que debe cumplir la aplicación bilineal θ para garantizar que M es un T-módulo:

$$(M1)\ [\lambda(a,b), \theta(c,d)] = \theta(abc,d) + \theta(c,abd)$$
$$(M2)\ \theta(d,abc) = \theta(b,c)\theta(d,a) - \theta(a,c)\theta(d,b) + \lambda(a,b)\theta(d,c),$$

donde $\lambda(a,b) = -\theta(a,b) + \theta(b,a)$ y $a,b,c,d \in T$. La categoría de los T-módulos (respectivamente T-módulos finito-dimensionales) se denota por $T - Mod$ (respectivamente, $T - mod$).

Según [BD09, definición 1.4], un *fibrado simétrico* (o fibrado vectorial simétrico) es un fibrado vectorial $\pi : F \to M$ tal que

$(FS1)$ (F,μ) y (M,μ) son espacios simétricos tales que $\pi : F \to M$ es un homomorfismo de espacios simétricos

$(FS2)$ $\forall (p,q) \in M \times M,$ la aplicación inducida por $\mu : F \times F \to F$ en cada fibra

$$F_q \oplus F_p \to F_{\mu(p,q)}$$

$$(v, w) \mapsto \mu(u, w)$$

es lineal.

Esta definición está basada en el hecho de que las representaciones lineales de los grupos de Lie son fibrados vectoriales en la categoría de los grupos de Lie. Dado un punto base $o \in M$, el espacio tangente del fibrado vectorial F en 0_o (el elemento cero del espacio vectorial $F_o = \pi^{-1}(o)$) es un sistema triple de Lie $\mathfrak{f} = \mathfrak{m} \oplus V$, donde $\mathfrak{m}$ se identifica, vía la aplicación tangente de la sección en cero, con el sistema triple de Lie determinado por el espacio tangente de M en o; además, V, que es isomorfo a la fibra F_o, hereda la estructura de módulo para el sistema triple de Lie $\mathfrak{m}$. Por tanto, los módulos para sistemas triples de Lie son el análogo infinitesimal de los fibrados vectoriales simétricos.

Teorema 6.1.4. *([BD09, teorema 3.4]) Sea M un espacio simétrico conexo, simplemente conexo de dimensión finita con punto base o y sean $\mathfrak{m}$ su sistema triple de Lie asociado y $\mathfrak{g}$ su incrustación estándar con involución σ. Entonces, los siguientes objetos estan en correspondencia biunívoca:*

(1) *fibrados vectoriales simétricos (finito-dimensionales) sobre M*

(2) $(\mathfrak{g}, \sigma)$*-módulos con involución (finito-dimensionales)*

(3) $\mathfrak{m}$*-módulos (finito-dimensionales)*

La biyección entre (1) *y* (3) *es una equivalencia de categorías.*

En este capítulo se explora la idea natural de [Har61] de relacionar la teoría de representación de los sistemas triples de Lie simples con la de las álgebras de Lie simples. En este sentido, en la sección 6.2 se introducen los módulos con involución. En [HP02] se prueba que en el caso finito-dimensional tales módulos están en correspondencia biunívoca con las representaciones para sistemas triples de Lie. La sección también incluye una descripción completa de los módulos para sistemas triples relacionados con álgebras de Lie simples. En la sección 6.3 se clasifican las representaciones 1-dimensionales de los sistemas triples de Lie sobre cuerpos arbitrarios de característica distinta de 2 y de 3. Por el teorema 6.1.4, esta clasificación puede ser usada para obtener la clasificación de los fibrados simétricos de la recta sobre espacios simétricos reales conexos, simplemente conexos de dimensión finita. En la sección se da una fórmula tipo Weyl para la dimensión de los módulos de sistemas triples de Lie obtenidos de automorfismos internos de álgebras de Lie simples. En la sección 6.5 se dan explícitamente las fórmulas para algunos ejemplos. En la sección 6.6 se expone otro método de aproximación a la fórmula para el caso más sencillo: el álgebra de Lie simple A_2.

A lo largo de este capítulo las álgebras y sistemas triples se consideran de dimensión finita sobre un cuerpo F.

6.1.2. Introduction

Definition 6.1.5. A **Lie triple system** is a vector space T endowed with a trilinear product abc which verifies the following identities

$$(LTS1)\ abc = -bac$$

$$(LTS2)\ abc + bca + cab = 0$$

$$(LTS3)\ ab(cde) = (abc)de + c(abd)e + cd(abe)$$

We have that any subspace of a Lie algebra $(L, [x, y])$ closed under the triple product $xyz = [[x, y], z]$ is a Lie triple system. In particular, any Lie algebra is a Lie triple system.

In [Ber00, capítulo I, sección 2], it is proved that for a homogeneous symmetric space M, its tensor of curvature $R_o(x, y)$ at a fixed point $o \in M$ associated to its canonical connection defines a Lie triple system on the corresponding tangent space $T_o(M)$ by means of the trilinear product $xyz = -R_o(x, y)z$. In this sense, we have the following result

Theorem 6.1.1. *([Ber00], theorem I.2.9) The category of the connected and simply connected symmetric spaces based on a point is equivalent to the category or finite dimensional real Lie triple systems. The evaluation of the tensor of curvature on the base point gives the equivalence.*

From an structural point of view, any *Lie algebra with involution* (L, σ), that is, a Lie algebra with a distinguished automorphism of order 2 σ (the involution), induces a Lie triple system structure in $skew(L, \sigma) = \{x \in L \mid \sigma(x) = -x\}$ with triple product $abc = [[a, b], c]$, so Lie triple systems are very common. Note also that Lie algebras with involution are the same as $\mathbb{Z}_2$-graded Lie algebras $L = L_0 \oplus L_1$ with $L_1 \neq 0$ and the involution being responsible of the $\mathbb{Z}_2$-grading.

Any Lie triple system T admits a description of this type: one takes the vector space $\mathrm{IDer}(T) = F\langle D_{a,b} \mid a, b \in T\rangle$, where $D_{a,b}$ is the derivation $D_{a,b} : c \mapsto abc$. By $(LTS3)$, this space is a Lie subalgebra of the general Lie algebra $\mathfrak{gl}(T)$, called *Lie algebra of the inner derivations of* T. Now, defining $L_s(T) = \mathrm{IDer}(T) \oplus T$, the *standard envelope of* T, we have a Lie algebra with involution with product determined by

(1) $\mathrm{IDer}(T)$ is a Lie subalgebra of $L_s(T)$

(2) $[D_{a,b}, c] = abc = -[c, D_{a,b}]$

(3) $[a, b] = D_{a,b}$

and involutive automorphism $\sigma : D_{a,b} + c \mapsto D_{a,b} - c$. The Lie triple system T is recovered as $skew(L_s(T), \sigma)$. Moreover, T generates $L_s(T)$ and the inclusion map $\iota : T \to L_s(T)$ verifies $\iota(abc) = [[\iota(a), \iota(b)], \iota(c)]$, so it is a homomorphism of Lie triple systems.

In [Lis52, definition 1.6] they define the *universal envelope for a Lie triple system* T $L_u(T)$ as the Lie algebra for which there exists a homomorphism of Lie triple systems $\eta : T \to L_u(T)$ such that $\eta(T)$ generates $L_u(T)$ and for any Lie algebra L and $\varphi : T \to L$ homomorphism of Lie triple systems there exists a unique homomorphism of Lie algebras $\phi : L_u(T) \to L$ which verifies $\varphi = \phi\eta$. For semisimple Lie triple systems (those with trivial radical) over fields of characteristic cero, standard and universal envelopes coincide. This is not true over fields of prime characteristic (see example 6.3.3). Indeed, over fields of characteristic not 2 we have that $L_u(T)/Z(L_u(T)) \cong L_s(T)$ for any Lie triple system with trivial centre (see [Hod01, theorem 2.1.10]). Both envelopes play an important role in the representation theory of Lie triple systems.

Definition 6.1.6. Given a Lie triple system T with product abc, a vector space M is said to be a **module for the Lie triple system** T if there exists a bilineal map $\theta : T \times T \to \mathrm{End}_F(M)$ such that the vector space $E_M = T \oplus M$ is a Lie triple system with the product determined by the following conditions $MMM = TMM = MTM = MMT = 0$, T is a Lie subtriple of $T \oplus M$ and

$$mab = \theta(a, b)(m),\ amb = -mab,\ abm = -mab + mba \quad \forall m \in M, a, b \in T.$$

In [HP02, section 3] (see [BMPI10a] for a proof), they give the conditions over the bilinear map θ to guarantee that M is a T-module:

$(M1)$ $[\lambda(a, b), \theta(c, d)] = \theta(abc, d) + \theta(c, abd)$

$$(M2)\ \theta(d, abc) = \theta(b, c)\theta(d, a) - \theta(a, c)\theta(d, b) + \lambda(a, b)\theta(d, c),$$

where $\lambda(a, b) = -\theta(a, b) + \theta(b, a)$ and $a, b, c, d \in T$. The category of T-modules (resp. finite dimensional T-modules) is denoted by $T - Mod$ (resp. $T - mod$).

Following [BD09, definition 1.4], a *symmetric bundle* (or symmetric vector bundle) is a vector bundle $\pi : F \to M$ such that

$(FS1)$ (F, μ) y (M, μ) are symmetric spaces such that $\pi : F \to M$ is a homomorphism of symmetric spaces

$(FS2)$ $\forall (p, q) \in M \times M,$ the map induced by $\mu : F \times F \to F$ in each fiber

$$F_q \oplus F_p \to F_{\mu(p,q)}$$
$$(v, w) \mapsto \mu(u, w)$$

is linear.

This definition is based on the fact that linear representations of Lie groups are vector bundles in the category of Lie groups. Fixed a base point $o \in M$, the tangent space of the vector bundle F at 0_o (the zero element of the vector space $F_o = \pi^{-1}(o)$) is a Lie triple system $\mathfrak{f} = \mathfrak{m} \oplus V$, where $\mathfrak{m}$ is identified, via the tangent map of the section in zero, with the Lie triple system determined by the tangent space of M at o. Moreover, V is isomorphic to the fiber F_o and inherits the module structure for the Lie triple system $\mathfrak{m}$. Thus modules for Lie triple systems are the infinitesimal analogue of symmetric vector bundles.

Theorem 6.1.2. *([BD09, theorem 3.4]) Let M be a finite dimensional connected and simply connected symmetric space with base point o, $\mathfrak{m}$ be its associated Lie triple system and $\mathfrak{g}$ be its standard embedding with involution σ. The following objects are in one to one correspondence:*

(1) *(finite dimensional) symmetric vector bundles over M*

(2) *(finite dimensional) $(\mathfrak{g}, \sigma)$-modules with involution*

(3) *(finite dimensional) $\mathfrak{m}$-modules*

The bijection between (1) *and* (3) *is an equivalence of categories.*

In this chapter we investigate the natural idea from [Har61] of relating representation theory of simple Lie triple systems with representation theory of simple Lie algebras. In this way, we introduce modules with involution. In [HP02] they show that in the finite dimensional case such modules are in one to one correspondence with representations for Lie triple systems. We also completely describe the modules for Lie triple systems related to simple Lie algebras. We give a classification of the 1-dimensional representations of Lie triple systems over arbitrary characteristic not 2 or 3. By the previous theorem, we can use this classification to get a classification of the symmetric bundles of the real line over finite dimensional connected and simply connected real symmetric spaces. We also construct a Weyl-type formula for the dimension of the modules for Lie triple systems obtained from inner automorphisms of simple Lie algebras. We work out these formulas for some examples. Finally, we give another approach to the formula in a simple case: the simple Lie algebra A_2.

In this chapter all the algebras and triple systems are considered to be finite dimensional over a field F.

6.2. Módulos para álgebras de Lie con involución

Según [HP02] (ver también [Har61]), dada un álgebra de Lie con involución (L, σ), un L-módulo V se dice (L, σ)-*módulo* en el caso en que σ actúe linealmente sobre V de manera que además $\sigma(xv) = \sigma(x)\sigma(v)$ para todo $x \in L$ y $v \in V$.

Estos módulos se corresponden exactamente los módulos para el álgebra $K(U(L), \sigma) = U(L) \times U(L)$, donde $U(L)$ es el álgebra envolvente universal de L, con producto dado por

$$(a, b)(c, d) = (ac + b\sigma(d), b\sigma(c) + ad).$$

Para evitar confusiones, escribiremos $\phi(v)$ en lugar de $\sigma(v)$.

Por tanto, un (L, σ)-módulo (V, ϕ) es un L-módulo V dotado de una aplicación lineal ϕ tal que $\phi^2 = \mathrm{Id}_V$ y

$$\phi(xv) = \sigma(x)\phi(v) \tag{6.2.1}$$

para todo $x \in L$ y $v \in V$. La categoría de (L, σ)-módulos (respectivamente (L, σ)-módulos finito-dimensionales) se denota por (L, σ)-Mod (respectivamente, (L, σ)-mod).

La condición (6.2.1) admite una interesante interpretación: para cualquier módulo V, el automorfismo σ proporciona una nueva estructura de módulo en V (llamado módulo torcido a partir de V mediante σ y que denotaremos por V_σ) definiendo $x \bullet v = \sigma(x)v$. La condición (6.2.1) dice que ϕ es un L-isomorfismo entre V y V_σ. Este hecho será importante más adelante.

Dado un $(L_u(T), \sigma)$-módulo (V, ϕ) para un sistema triple de Lie arbitrario, el subespacio

$$skew(V, \phi) = \{v \in V \mid \phi(v) = -v\}$$

es un T-módulo con la acción $\theta(a, b) : v \mapsto b \cdot (a \cdot v)$, donde $\cdot$ denota la acción de $L_u(T)$ en V. Esta construcción determina un functor

$$j^* : (L_u(T), \sigma)\text{-Mod} \to T\text{-Mod}$$

Recíprocamente, dado un T-módulo M con acción θ, se tiene que

$$L_u(E_M) = F\langle D_{a,b}, D_{u,a} \mid a, b \in T, u \in M\rangle \oplus (T \oplus M).$$

El subespacio

$$j_*(M) = F\langle D_{u,a} \mid a \in T, u \in M\rangle \oplus M$$

es un ideal de $L_u(E_M)$, luego $L_u(T)$ actúa en este espacio mediante

$$b \cdot (D_{u,a} + v) = [b, D_{u,a} + v] = D_{b,v} - \theta(a, b)(u)$$

para todo $b \in T$. Con esta acción y la aplicación $\phi : D_{u,a} + v \mapsto D_{u,a} - v$, se obtiene un $(L_u(T), \sigma)$-módulo $(J_*(M), \phi)$, la *extensión estándar de M*. Por tanto, se tiene un functor (que llamaremos *functor de Harris*)

$$j_* : T\text{-Mod} \to (L_u(T), \sigma)\text{-Mod}$$

Observar que el $(L_u(T), \sigma)$-módulo trivial, esto es, (F, Id_F), donde $L_u(T)$ actúa trivialmente en F no puede ser alcanzado mediante j_*. El functor j_* envía el conjunto de T-módulos irreducibles biyectivamente al conjunto de los $(L_u(T), \sigma)$-módulos irreducibles no triviales [HP02, corolario 3.7], donde los módulos irreducibles isomorfos están identificados. Por tanto, el estudio de los T-módulos irreducibles se reduce al estudio de los $(L_u(T), \sigma)$-módulos irreducibles no triviales.

Nuestro estudio se centra en las representaciones de los sistemas triples de Lie simples. Estos módulos se obtienen de las álgebras de Lie graduadas simples, como se prueba en el siguiente resultado extraído de [MH06]:

Lema 6.2.1. *Sea $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ un álgebra de Lie $\mathbb{Z}_2$-graduada sobre un cuerpo arbitrario. Entonces, L es graduada simple si y solo si $L_{\bar{1}}$ es un sistema triple de Lie simple con el producto $xyz = [[x, y], z]$, $L_{\bar{0}} = [L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}]$ y $L_{\bar{1}}$ es un $L_{\bar{0}}$-módulo fiel (con la acción definida por el producto de L). En el caso en que la característica del cuerpo sea distinta de 2, entonces se tiene uno de los siguientes casos:*

a) $L = S \times S$ es una suma directa de dos ideales simples isomorfos

b) L es un álgebra de Lie simple

Además, se tiene que L y $L_{\bar{0}}$ son isomorfas respectivamente a la envolvente estándar y al álgebra de Lie de derivaciones internas del sistema triple de Lie $L_{\bar{1}}$.

Salvo isomorfismo, los sistemas triples de Lie simples con álgebras envolventes no simples son exactamente la clase de las álgebras de Lie simples (en característica distinta de 2). De hecho, dada un álgebra de Lie simple L, la suma directa $(L \times L, \sigma)$, donde σ es el automorfismo de intercambio

$$\begin{aligned} \sigma : & L \times L \to L \times L \\ & (x, y) \mapsto (y, x) \end{aligned}$$

determina el sistema triple de Lie $skew(L \times L, \sigma) = \{(x, -x) \mid x \in L\}$ con producto triple

$$(x, -x)(y, -y)(z, -z) = ([[x, y], z], -[[x, y], z]).$$

Este sistema triple de Lie es isomorfo al sistema triple de Lie T_L que tiene como espacio vectorial subyacente a L y como producto triple $xyz = [[x, y], z]$. Los módulos irreducibles para estos sistemas triples de Lie se describen de manera sencilla en términos de los módulos $V(\lambda)$ irreducibles para L, los tensores simétricos $S^2V(\lambda)$ o los tensores antisimétricos $\Lambda^2V(\lambda)$.

Proposición 6.2.2. *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Salvo isomorfismo, los módulos irreducibles de* *dimensión finita para el sistema triple de Lie* L *con producto triple* $xyz = [[x, y], z]$ *son* $\Lambda^2 V(\lambda)$ $(\lambda \neq 0)$*,* $S^2V(\lambda)$ *y* $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ $(\lambda \neq \mu)$ *con las acciones dadas por*

$$\theta(a, b)(u \star v) = (b \cdot a \cdot u) \star v - (a \cdot u) \star (b \cdot v) - (b \cdot u) \star (a \cdot v) + u \star (b \cdot a \cdot v),$$

donde $u \star v = u \otimes v - v \otimes u$ *en* $\Lambda^2 V(\lambda)$*,* $u \star v = u \otimes v + v \otimes u$ *en* $S^2V(\lambda)$ *y* $u \star v = u \otimes v$ *en* $V(\lambda) \otimes V(\mu)$*.*

Demostración. Primeramente, recordar que cualquier $L_s(L) = L \times L$-módulo W es, salvo isomorfismo, de la forma $W = V(\lambda) \otimes V(\mu)$. Como $\sigma((x, y)) = (y, x)$, entonces el módulo torcido W_σ es isomorfo a $V(\mu) \otimes V(\lambda)$. Por tanto, $W \cong W_\sigma$ si y solo si $\lambda = \mu$ y, en este caso, por el lema de Schur, existe $\epsilon = \pm 1$ tal que $\phi(u \otimes v) = \epsilon v \otimes u$ para todo $u \in V(\lambda)$, $v \in V(\mu)$.

Sea (V, ϕ) un $(L \times L, \sigma)$-módulo. Si V es irreducible para la acción de $L \times L$, entonces $V \cong V(\lambda) \otimes V(\lambda)$ y $\phi(u \otimes v) = \epsilon v \otimes u$ para todo $u, v \in V(\lambda)$ y $\epsilon = 1$ o $\epsilon = -1$. Por tanto, $skew(V, \phi)$ es o bien $S^2V(\lambda)$ $(\epsilon = 1)$ o bien $\Lambda^2 V(\lambda)$ $(\epsilon = -1)$. La acción del sistema triple de Lie $L \cong \{(a, -a) \mid a \in L\}$ es

$$\theta((a, -a), (b, -b))(u \star v) = (b, -b)(a, -a)(u \star v),$$

que coincide con la acción dada en el enunciado. Notar que el módulo trivial para (L, σ) corresponde a $(V(0) \otimes V(0), \mathrm{Id}_{V(0)})$, luego la posibilidad $\lambda_{V(0)}$ debe ser descartada.

En el caso en que V no sea irreducible para la acción de $L \times L$, existe un $L \times L$-submódulo irreducible W. Por irreducibilidad, $V = W \oplus \phi(W)$. La acción del sistema triple de Lie $L \cong \{(a, -a) \mid a \in L\}$ en $skew(V, \phi) = \{w - \phi(w) \mid w \in W\}$ está dada por

$$\begin{aligned}&\theta((a, -a), (b, -b))(w - \phi(w)) \\ &\qquad = (b, -b)(a, -a)(w - \phi(w)) = (b, -b) \cdot (a, -a) \cdot w - \phi((b, -b) \cdot (a, -a) \cdot w).\end{aligned}$$

Como el $L \times L$-módulo W es isomorfo a $V(\lambda) \otimes V(\mu)$, se obtiene el módulo $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ del enunciado. Notar que en el caso $\lambda = \mu$, la diagonal $F\langle (u \otimes v, v \otimes u) \mid u, v \in V(\lambda)\rangle$ es un submódulo de V estable por ϕ, luego $\lambda \neq \mu$. □

Nota 6.2.3. Como dos (L_s, σ)-módulos (V, ϕ), (V', ϕ') son isomorfos si y solo si existe un isomorfismo $\varphi : V \to V'$ como L_s-módulos tal que $\varphi\phi = \phi'\varphi$, es fácil probar que los módulos de la proposición anterior forman un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de los T_L-módulos irreducibles de dimensión finita.

6.3. Clasificación de módulos de dimensión 1 para sistemas triples de Lie simples

En esta sección se clasifican las representaciones irreducibles de dimensión 1 de los sistemas triples de Lie sobre cuerpos arbitrarios de característica distinta de 2 y de 3. Por el teorema 6.1.4, esta clasificación puede ser usada para obtener una clasificación de los fibrados simétricos de la recta sobre espacios simétricos reales conexos simplemente conexos de dimensión finita.

Dado un sistema triple de Lie T, se puede identificar el espacio vectorial subyacente a un T-módulo M de dimensión 1 con el cuerpo base F y la correspondiente representación con una forma bilineal

$$\begin{aligned} \theta :& T \times T \to F \\ &(a,b) \mapsto \theta(a,b) \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

Lema 6.3.1. *Una forma bilineal $\theta : T \times T \to F$ define una representación del sistema triple de Lie T en F si y solamente si se verifican las siguientes identidades:*

$$\begin{aligned} &(M1)\ \theta(abc,d) + \theta(c,abd) = 0 \\ &(M2)\ \theta(d,abc) = \theta(d, \theta(b,c)a - \theta(a,c)b + \lambda(a,b)c) \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

para todo $a,b,c,d \in T$, donde $\lambda(a,b) = \theta(b,a) - \theta(a,b)$. El correspondiente módulo se denota por F_θ.

Lema 6.3.2. *Dada un sistema triple de Lie T, dos T-módulos unidimensionales F_θ y $F_{\theta'}$ son isomorfos si y solo si $\theta = \theta'$.*

Demostración. Un isomorfismo de T-módulos unidimensionales está determinado por un escalar no nulo ξ tal que $\xi\theta(a,b) = \theta'(a,b)\xi$, luego existirá si y solamente si $\theta = \theta'$. □

Los siguientes ejemplos presentan los sistemas triples de Lie que aparecen en esta clasificación y sus correspondientes representaciones de dimensión 1.

Ejemplo 6.3.3. *Considerar el espacio vectorial $V = Fv_0 \oplus W$, donde W es un espacio vectorial de dimensión $n \geq 2$, dotado de una forma bilineal simétrica no degenerada q tal* *que* $q(v_0, v_0) = 1$ *y* $q(v_0, W) = 0$. *La aplicación*

$$\begin{aligned}\sigma : \mathfrak{so}(V,q) &\to \mathfrak{so}(V,q)\\ x &\mapsto \phi x \phi^{-1}\end{aligned}$$

con $\phi : V \to V$ *la aplicación definida por* $\phi(v_0) = -v_0$ *y* $\phi|_W = \mathrm{Id}_W$, *es una involución del álgebra de Lie ortogonal* $\mathfrak{so}(V,q)$ *y define un sistema triple de Lie* $E_n(q) = skew(\mathfrak{so}(V,q), \sigma)$.

Sea $q_{v,v'}(v'') = q(v', v'')v - q(v, v'')v'$. *El conmutador de estas aplicaciones satisface*

$$[q_{u,u'}, q_{v,v'}] = q_{q_{u,u'}(v),v'} + q_{v,q_{u,u'}(v')}.$$

El sistema triple de Lie $E_n(q)$ *se corresponde con el conjunto de aplicaciones*

$$\{q_{v_0,w} \mid w \in W\}$$

con el producto triple

$$[[q_{v_0,w}, q_{v_0,w'}], q_{v_0,w''}] = -q_{v_0,q_{w,w'}(w'')}.$$

Por tanto, podemos identificar $E_n(q)$ *con el espacio vectorial* W *con producto triple*

$$ww'w'' = q(w, w'')w' - q(w', w'')w.$$

El álgebra de Lie envolvente universal $L_u(E_n(q))$ *contiene una copia de* $E_n(q)$, *ya que*

$$L_u(E_n(q)) = [E_n(q), E_n(q)] \oplus E_n(q),$$

luego

$$\dim L_u(E_n(q)) \leq \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2} = \dim \mathfrak{so}(V,q).$$

Además, la propiedad universal de $L_u(E_n(q))$ *muestra que existe un homomorfismo de álgebras de Lie* $L_u(E_n(q)) \to \mathfrak{so}(V,q)$. *Como* $\mathfrak{so}(V,q)$ *está generado como álgebra de Lie por* $E_n(q)$, *entonces este homomorfismo es sobreyectivo. Por dimensiones, se tiene que*

$$(L_u(E_n(q)), \sigma) \cong (\mathfrak{so}(V,q), \sigma).$$

La representación natural V *de* $\mathfrak{so}(V,q)$ *verifica*

$$\phi(x \cdot v) = \phi x \phi^{-1}(v) = \sigma(x)\phi(v),$$

luego el conjunto skew$(V, \phi) = kv_0$ *es un módulo de dimensión* 1 *para el sistema triple de Lie* $E_n(q) = W$. *La acción viene dada por la forma bilineal* $\theta : W \times W \to F(= Fv_0)$

$$\theta(w, w')(v_0) = w' \cdot (w \cdot v_0) = q_{v_0,w'}(q_{v_0,w}(v_0)) = -q(w', w)v_0,$$

luego $\theta = -q$.

Ejemplo 6.3.4. *Sea* W *un espacio vectorial de dimensión* $n \geq 1$ *y* $V = Fv_0 \oplus W$. *La aplicación* σ *definida por* $\sigma : x \mapsto \phi x \phi^{-1}$ *con* $\phi(v_0) = -v_0$ *y* $\phi|_W = \mathrm{Id}_W$ *es una involución del álgebra* $\mathfrak{sl}(V)$, *luego determina un sistema triple de Lie* $T_n = skew(\mathfrak{sl}(V), \sigma)$.

Dada $f \in V^*$, *el espacio dual de* V, *y* $v \in V$, *definimos* $\tau_{v,f} \in \mathrm{End}_F(V)$ *como* $\tau_{v,f}(u) = f(u)v$ *para todo* $u \in V$. *Identificamos* W^* *con el conjunto* $\{f \in V^* \mid f(v_0) = 0\}$ *y sea* $f_0 \in V^*$ *definida por* $f_0(v_0) = 1$ *y* $f_0(W) = 0$. *Podemos descomponer* T_n *como* $T_n = T_n^+ \oplus T_n^-$ *con* $T_n^+ = \tau_{v_0,W}$ *y* $T_n^- = \tau_{W,f_0}$. *La regla del conmutador*

$$[\tau_{v,f}, \tau_{v',f'}] = f(v')\tau_{v,f'} - f'(v)\tau_{v',f}$$

muestra que el producto triple en T_n *está determinado por* $T_n^+ T_n^+ T = 0 = T_n^- T_n^- T$ *y*

$$\begin{aligned} \tau_{v_0,f}\tau_{w,f_0}\tau_{v_0,f'} &= f(w)\tau_{v_0,f'} + f'(w)\tau_{v_0,f} \\ \tau_{v_0,f}\tau_{w,f_0}\tau_{w',f_0} &= -f(w)\tau_{w',f_0} - f'(w')\tau_{w,f_0} \end{aligned}$$

para cualesquiera $f, f' \in W^*$ *y* $w, w' \in W$. *Claramente, se puede identificar* T_n^- *con* W *y* T_n^+ *con* W^* *de manera que el producto triple está determinado por las reglas* $WWW^* = 0 = W^*W^*W$ *y*

$$\begin{aligned} fwf' &= f(w)f' + f'(w)f \\ fww' &= -f(w)w' - f(w')w. \end{aligned}$$

Determinemos ahora el álgebra de Lie envolvente universal $(L_u(T_n), \sigma)$ *de* T_n. *Identificando* T_n *con el subespacio de* $L_u(T_n)$ *de valor propio* -1 *para* σ *se tiene que*

$$L_u(T_n) = [T_n, T_n] \oplus T_n.$$

Sean $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *una base de* W *y la correspondiente base dual* $\{f_1, \ldots, f_n\}$ *de* W^*. *Para cualesquiera* $a, b, c, d \in T_n$, *en* $L_u(T_n)$ *se tiene*

$$[abc, d] + [c, abd] = [[a, b], [c, d]] = -[cda, b] - [a, cdb].$$

En particular, $[fwf', f''] + [f', fwf''] = 0$ *para cualesquiera* $f, f', f'' \in W^*$ *y* $w \in W$. *Tomando* $f = f_i$, $w = e_i$, $f' = f_i$ *y* $f'' = f_j$ $(i \neq j)$ *se tiene*

$$0 = [f_i e_i f_i, f_j] + [f_i, f_i e_i f_j] = 2[f_i, f_j] + [f_i, f_j] = 3[f_i, f_j],$$

luego $[f_i, f_j] = 0$ *para todo* i, j. *De la misma manera,* $[e_i, e_j] = 0$ *para cualesquiera* i, j. *Esta observación prueba que*

$$L_u(T_n) = [T_n^+, T_n^-] \oplus T_n$$

y se tiene que $n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1$ *es una cota superior para la dimensión de* $L_u(T_n)$. *La imagen del homomorfismo* $L_u(T_n) \to \mathfrak{sl}(V)$ *que proporciona la propiedad universal de* $L_u(T_n)$ *es la subálgebra generada por* T_n *dentro de* $\mathfrak{sl}(V)$, *que es la propia* $\mathfrak{sl}(V)$ *entera. Por tanto,* $(L_u(T_n), \sigma)$ *es isomorfa a* $(\mathfrak{sl}(V), \sigma)$.

Es conveniente tener precaución en algunos casos. Si la característica de F *divide a* $n+1$, *entonces* $\mathrm{Id}_V \in [T_n, T_n] \subseteq \mathfrak{sl}(V)$, *luego* $\mathrm{IDer}(T_n) \cong [T_n, T_n]/F\,\mathrm{Id}_V$ *y la envolvente estándar de* T_n *es una imagen homomorfa de dimensión* $(n+1)^2 - 2$ *de* $\mathfrak{sl}(V)$, *es decir,* $L_s(T_n) \cong \mathfrak{psl}(V)$, *el álgebra lineal especial proyectiva. Esto prueba que, en el caso modular, las envolventes universal y estándar pueden no coincidir, incluso para sistemas triples de Lie simples, lo que contrasta con el caso de característica cero.*

La representación natural de $\mathfrak{sl}(V)$ *verifica que* $\sigma(x)\phi(v) = \phi x \phi^{-1} \phi v = \phi(xv)$ *para cualquier* $x \in \mathfrak{sl}(V)$ *y* $v \in V$. *Por tanto,* (V, ϕ) *es un* $(L_u(T_n), \sigma)$*-módulo y el conjunto* $Fv_0 = skew(V, \phi)$ *es un* T_n*-módulo. El espacio dual* V^* *con la aplicación dual* ϕ^* *es un* $(L_u(T_n), \sigma)$*-módulo y* $Ff_0 = skew(V^*, \phi^*)$ *es otro* T_n*-módulo de dimensión* 1. *Las correspondientes acciones vienen dadas (identificando* W^* *con* τ_{v_0, W^*} *y* W *con* τ_{W, f_0}*) por las formas bilineales*

$$\begin{aligned} \theta : (W^* \oplus W) \times (W^* \oplus W) &\longrightarrow F(= Fv_0) \\ (f_1 + w_1, f_2 + w_2) &\mapsto f_2(w_1) \\ \theta' : (W^* \oplus W) \times (W^* \oplus W) &\longrightarrow F(= Ff_0) \\ (f_1 + w_1, f_2 + w_2) &\mapsto f_1(w_2). \end{aligned}$$

Por tanto, $\theta'(a, b) = \theta(b, a)$. *Ambos módulos* Fv_0 *y* Ff_0 *no son isomorfos, ya que*

$$\tau_{w, f_0} \tau_{v_0, f} v_0 = 0$$

$$\tau_{w,f_0}\tau_{v_0,f}f_0 = f(w)f_0.$$

Vistos estos ejemplos, se presenta el resultado acerca de módulos unidimensionales para sistemas triples de Lie simples:

Teorema 6.3.5. *Sobre cuerpos de característica distinta de* 2 *y de* 3*, los únicos sistemas triples de Lie simples que poseen módulos no triviales de dimensión* 1 *son* $E_n(q)$ *y* T_n*.*

Demostración. Sea T un sistema triple de Lie simple y k_θ un módulo no trivial de dimensión 1 para T. Definimos los siguientes subespacios, que nos serán de utilidad a lo largo de la demostración:

$$T^+ = \{a \in T \mid \theta(T,a) = 0\}T^- = \{a \in T \mid \theta(a,T) = 0\}$$

Por el lema 6.3.1, se tiene que

$$\begin{aligned} abc - \theta(b,c)a + \theta(a,c)b - \lambda(a,b)c \in T^+ \qquad (6.3.3)\\ abc + \theta(c,a)b - \theta(c,b)a + \lambda(a,b)c \in T^- \end{aligned}$$

para cualesquiera $a, b, c \in T$. Restando las dos relaciones se obtiene que

$$\lambda(a,c)b + \lambda(c,b)a + 2\lambda(a,b)c \in T^+ + T^-.$$

Sustituyendo $c = a$ se tiene que $3\lambda(a,b)a \in T^+ + T^-$. Como la característica del cuerpo es distinta de 3, entonces o bien $a \in T^+ + T^-$ o bien $\lambda(a,T) = 0$. En este último caso,

$$\lambda(a,c)b + \lambda(c,b)a + 2\lambda(a,b)c \in T^+ + T^-$$

implica que $\lambda(c,b)a \in T^+ + T^-$. Por tanto, o bien θ es una forma bilineal simétrica o bien $T = T^+ + T^-$.

Por (6.3.3), para cualquier elemento $a \in T^+ \cap T^-$ se tiene que $abc \in T^+ \cap T^-$ para cualesquiera $b, c \in T$, luego $T^+ \cap T^-$ es un ideal de T. La simplicidad de T junto con la hipótesis $\theta \neq 0$ implican que $T^+ \cap T^- = 0$.

En el caso en que θ sea simétrica, $T^+ = T^- = T^+ \cap T^- = 0$, luego (6.3.3) implica que

$$abc = \theta(b,c)a - \theta(a,c)b$$

y, por tanto, el sistema triple de Lie determina un único módulo unidimensional no trivial. Claramente, este sistema triple de Lie es isomorfo a $E_{\dim T}(-\theta)$.

Supongamos ahora que θ no es simétrica. Notar que $\theta|_{T^+\times T^-}$ induce un isomorfismo entre T^+ y $(T^-)^*$ dado por $a \mapsto \theta(a, -)$. Usaremos esta identificación más tarde. Por (6.3.3), se tiene que $T^+T^+T \subseteq T^+$ y $T^+T^+T \subseteq T^-$, luego $T^+T^+T = 0$. De la misma manera $T^-T^-T = 0$. Además, por (6.3.3), $faf' \in T^+$ y $faf' - f'(a)f - f(a)f' \in T^-$, luego

$$faf' = f(a)f' + f'(a)f.$$

De forma similar se obtiene que $fab = -f(b)a - f(a)b$. Esto prueba que T es isomorfo a T_n con $n = \dim T^-$. Los subespacios T^+ y T^- son módulos irreducibles para la acción de $\mathrm{IDer}(T)$ pero no son isomorfos entre sí. T^+ es isomorfo a $(T^-)^*$ por θ. Como estos módulos son absolutamente irreducibes, por (M1) del lema 6.3.1, θ o $\theta^{op} : (a, b) \mapsto \theta(b, a)$ están únivocamente determinadas por T. Por tanto, en este caso solo aparecen dos módulos irreducibles. $\square$

Nota 6.3.6. El sistema triple de Lie T_1 es isomorfo al sistema triple de Lie $E_n(q)$ con q una forma bilineal de índice de Witt máximo en un espacio vectorial de dimensión 3. Este sistema triple de Lie admite tres módulos no triviales de dimensión 1 no isomorfos entre sí. Los demás sistemas triples de Lie $E_n(q)$ solo tienen un módulo no trivial de simensión 1, mientras que los sistemas triples de Lie T_n, $n \geq 2$ poseen dos.

6.4. Fórmula de la dimensión

Sea L un álgebra de Lie simple de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero y sea σ un automorfismo interno de L de orden 2. Podemos escribir $\sigma = \exp(ad_{x_1}) \cdots \exp(ad_{x_m})$ para ciertos elementos nilpotentes $x_1, \ldots, x_m \in L$, donde ad_x denota la aplicación $y \mapsto [x, y]$. Por tanto, para cualquier representación irreducible

$$\begin{aligned} \rho : L &\to \mathfrak{gl}(V) \\ x &\mapsto \rho_x : v \mapsto xv \end{aligned}$$

la aplicación $\phi = \phi_V = \exp(\rho_{x_1}) \cdots \exp(\rho_{x_m})$ verifica $\phi(xv) = \sigma(x)\phi(v)$ para todo $x \in L$, $v \in V$. Esto prueba que, en el caso en que σ sea un automorfismo interno, $V \cong V_\sigma$.

Como ϕ^2 es un automorfismo del módulo irreducible V, el lema de Schur implica que $\phi^2 \in F\,\mathrm{Id}$ y podemos tomar ϕ con $\phi^2 = \mathrm{Id}$. Por tanto, cualquier L-módulo irreducible V proporciona dos módulos irreducibles para el sistema triple de Lie $skew(L, \sigma)$, que denotaremos $skew(V, \phi)$ y $skew(V, -\phi)$.

Las involuciones de L están clasificadas salvo isomorfismo por los diagramas de Vogan (ver una definición en [Lis52, capítulo 6, sección 8]). En el caso en que la involución sea interna, el diagrama de Vogan es el propio diagrama de Dynkin con un nodo sombreado. Siguiendo [Lis52, apéndice C, sección 3], la lista completa de de automorfismos internos para álgebras de Lie simples está dada en la Tabla 6.1. La involución representada por un diagrama de Vogan con el i_0-ésimo nodo sombreado fija todos los elementos de la subálgebra de Cartan H y los elementos de los subespacios raíces L_α son vectores propios de valor propio 1 (respectivamente -1) si el coeficiente de α_{i_0} en la expansión de α como suma de raíces básicas con coeficientes enteros es par (repectivamente impar).

Dado un L-módulo irreducible $V = V(\lambda)$ de peso máximo λ, como σ fija los elementos de la subálgebra de Cartan H, cualquier isomorfismo ϕ_λ entre V y V_σ con $\phi_\lambda^2 = \mathrm{Id}$ verifica que $\phi_\lambda(v_\lambda) = \pm v_\lambda$ para cualquier vector de peso máximo v_λ de V. El isomorfismo está, por tanto, determinado salvo signo. Denotaremos por ϕ_λ^+ el isomorfismo que fija v_λ y $\phi_\lambda^- = -\phi_\lambda^+$. El objetivo ahora es calcular las dimensiones de $skew(V(\lambda), \phi_\lambda^+)$ y $skew(V(\lambda), \phi_\lambda^-)$. Observar que

$$\dim skew(V(\lambda), \phi_\lambda^+) = \frac{\dim V(\lambda) - \mathrm{traza}(\phi_\lambda^+)}{2}, \tag{6.4.1}$$

por lo que únicamente es necesario calcular la traza de ϕ_λ^+ en $V(\lambda)$.

Sean $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ el conjunto de raíces básicas de L con respecto a la subálgebra de Cartan H, Φ (respectivamente Φ^+ y Φ^-) el conjunto de todas las raíces (repectivamente raíces positivas y raíces negativas) y $\mathcal{W}$ el grupo de Weyl de Φ. Sea $L = L_{\bar 0} \oplus L_{\bar 1}$ la $\mathbb{Z}_2$-graduación inducida por σ. Como σ fija los elementos de H, entonces Φ se descompone como $\Phi = \Phi_{\bar 0} \sqcup \Phi_{\bar 1}$, donde $\Phi_{\bar i} = \{\alpha \in \Phi \mid L_\alpha \subseteq L_{\bar i}\}$, $\bar i = \bar 0, \bar 1$. La subálgebra $L_{\bar 0} = H \oplus (\oplus_{\alpha \in \Phi_{\bar 0}} L_\alpha)$ es o bien semisimple o bien suma directa de un álgebra semisimple y un centro de dimensión 1 [Fau80, proposición 1]. El grupo $\mathcal{W}_{\bar 0}$ generado por $\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \Phi_{\bar 0}\}$, donde σ_α es la reflexión correspondiente a la raíz α, es isomorfo al grupo de Weyl de $[L_{\bar 0}, L_{\bar 0}]$. Sea K un transversal de $\mathcal{W}_{\bar 0}$ en $\mathcal{W}$ de manera que $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\bar 0} K$ y $\mathcal{W}_{\bar 0} \cap K = \{\mathrm{Id}\}$.

Sea Λ el conjunto de todos los pesos relativos a Φ y $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$ los pesos dominantes fundamentales, de manera que $\lambda = m_1\lambda_1 + \cdots + m_l\lambda_l$. Notar que el anillo $\mathbb{Z}[\Lambda]$, visto como las funciones $\mathbb{Z}$-valuadas en Λ con soporte finito, tiene una $\mathbb{Z}$-base $\{\epsilon_\mu \mid \mu \in \Lambda\}$ y producto $\epsilon_\mu * \epsilon_{\mu'} = \epsilon_{\mu+\mu'}$ (el valor de ϵ_μ es 1 en μ y 0 en el resto). Sea $A(\mu) = \sum_{\tau\in\mathcal{W}} sn(\tau)\epsilon_{\tau(\mu)}$, donde $sn(\tau) = (-1)^{l(\tau)}$ y $l(\tau)$ es la longitud de τ relativa a Δ (el número de raíces positivas para las cuales $\tau(\alpha) < 0$, [Hum78, sección 10.3]). La fórmula de Weyl para el carácter formal $ch_\lambda = \sum_{\mu\in H^*} \dim V(\lambda)_\mu \epsilon_\mu$ del módulo irreducible $V(\lambda)$ se expresa como

$$A(\rho) * ch_\lambda = A(\lambda+\rho),$$

con $\rho = \lambda_1 + \ldots, \lambda_l = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+} \alpha$, de acuerdo con [Hum78, teorema de Weyl]. Denotaremos por $\rho_{\bar{0}}$ al elemento $\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+_{\bar{0}}} \alpha$, donde $\Phi^{\pm}_{\bar{0}} = \Phi_{\bar{0}} \cap \Phi^{\pm}$.

Sea $s_i(\tau)$ dada por $\tau(\lambda_{i_0}) - \lambda_{i_0} = \sum_{i=1}^{l} s_i(\tau)\alpha_i$. Se tiene:

Teorema 6.4.1. *La traza de ϕ^+_λ para el sistema triple de Lie correspondiente al diagrama de Vogan con el nodo i_0-ésimo sombreado es*

$$\frac{1}{2^{|\Phi^+_{\bar{1}}|}\prod_{\alpha\in\Phi^+_{\bar{0}}}(\rho_{\bar{0}},\alpha)} \sum_{\tau\in K} sn(\tau)(-1)^{\sum_{i=1}^{l}\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{(\alpha_{i_0},\alpha_{i_0})}s_i(\tau)(m_i+1)} \prod_{\alpha\in\Phi^+_{\bar{0}}}(\lambda+\rho,\tau(\alpha)).$$

Demostración. Sea $\prod(\lambda)$ el conjunto de todos los pesos de $V(\lambda)$. La fórmula de Weyl implica

$$A(\lambda+\rho)*\epsilon_{-(\lambda+\rho)} = A(\rho)*\epsilon_{-\rho}*\left(\sum_{\lambda-(\sum_i k_i\alpha_i)\in\prod(\lambda)} \dim V(\lambda)_{\lambda-\sum_i k_i\alpha_i}(\epsilon^{k_1}_{-\alpha_1}*\cdots*\epsilon^{k_l}_{-\alpha_l})\right) \tag{6.4.2}$$

Como σ fija los elementos de H, entonces ϕ^+_λ preserva los subespacios peso de $V(\lambda)$ actuando con valor propio 1 en aquellos $V(\lambda)_\mu$ con $\mu = \lambda - \sum_i k_i\alpha_i$ y k_{i_0} par y actuando con valor propio -1 en los demás. En particular, la traza de ϕ^+_λ viene dada por la evaluación de la expresión

$$\sum_{\lambda-(\sum_i k_i\alpha_i)\in\prod(\lambda)} \dim V(\lambda)_{\lambda-\sum_i k_i\alpha_i}(\epsilon^{k_1}_{-\alpha_1}*\cdots*\epsilon^{k_l}_{-\alpha_l})$$

en $\epsilon_{\alpha_1} = 1, \ldots, \epsilon_{\alpha_{i_0}} = -1, \ldots, \epsilon_{\alpha_l} = 1$. Notar que la ecuación (6.4.2) se puede interpretar en la subálgebra $\mathbb{Z}[\Phi]$ de $\mathbb{Z}[\lambda]$ generada por $\epsilon_{\pm\alpha_1}, \ldots, \epsilon_{\pm\alpha_l}$, luego la evaluación tiene sentido. Sin embargo, tanto al evaluar $A(\lambda+\rho)*\epsilon_{-(\lambda+\rho)}$ como $A(\rho)*\epsilon_{-\rho}$ el resultado es cero, luego no es posible obtener la traza directamente.

Por [Hum78, sección 24.1, lema A], se tiene que

$$A(\rho) * \epsilon_{-\rho} = \prod_{\alpha \succ 0} (\epsilon_0 - \epsilon_{-\alpha}) = \prod_{\alpha \in \Phi_{\bar{0}}^+} (\epsilon_0 - \epsilon_\alpha) * \prod_{\alpha \in \Phi_{\bar{1}}^+} (\epsilon_0 - \epsilon_{-\alpha}).$$

Notar que la evaluación de ϵ_α en $\epsilon_{\alpha_1} = 1, \ldots, \epsilon_{\alpha_{i_0}} = -1, \ldots, \epsilon_{\alpha_l} = 1$ da 1 si $\alpha \in \Phi_{\bar{0}}^+$ y -1 si $\alpha \in \Phi_{\bar{1}}^+$. Por tanto, $\prod_{\alpha \in \Phi_{\bar{1}}^+} (\epsilon_0 - \epsilon_{-\alpha})$ se evalúa como $2^{|\Phi_{\bar{1}}^+|}$, mientras que cada factor en $\prod_{\alpha \in \Phi_{\bar{0}}^+} (\epsilon_0 - \epsilon_\alpha)$ se anula.

Sea la derivada ∂_α de $\mathbb{Z}[\Phi]$ definida por $\partial_\alpha(\epsilon_\beta) = (\alpha, \beta)\epsilon_\beta$ y $\partial = \prod_{\alpha \in \Phi_{\bar{0}}^+} \partial_\alpha$. Como $\Phi_{\bar{0}}$ es el sistema de raíces del álgebra de Lie semisimple $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}]$ con grupo de Weyl $\mathcal{W}_{\bar{0}}$, entonces el argumento en [Hum78, sección 24.3, página 139] muestra que, tras aplicar ∂ a $A(\rho)*\epsilon_{-\rho}$ y evaluando en $\epsilon_{\alpha_1} = 1, \ldots, \epsilon_{\alpha_{i_0}} = -1, \ldots, \epsilon_{\alpha_l} = 1$ se obtiene $2^{|\Phi_{\bar{1}}^+|} |\mathcal{W}_{\bar{0}}| \prod_{\alpha \in \Phi_{\bar{0}}^+} (\rho_{\bar{0}}, \alpha)$ (notar que estamos usando la misma forma bilineal en H^* para L y para $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}]$).

Por otro lado, si denotamos por v la evaluación de ϵ_α en $\epsilon_{\alpha_1} = 1, \ldots, \epsilon_{\alpha_{i_0}} = -1, \ldots, \epsilon_{\alpha_l} = 1$, se tiene que

$$v(\partial(A(\lambda + \rho) * \epsilon_{-(\lambda+\rho)})) = \sum_{\tau \in \mathcal{W}} sn(\tau) \prod_{\alpha \in \Phi_{\bar{0}}^+} (\tau(\lambda + \rho), \alpha) v(\epsilon_{\tau(\lambda+\rho)-(\lambda+\rho)})$$

porque $v(A(\lambda + \rho) * \epsilon_{-(\lambda+\rho)}) = 0$ por (6.4.2). Por tanto, usando el transversal K de $\mathcal{W}_{\bar{0}}$ en $\mathcal{W}$ se obtiene que $v(A(\lambda + \rho) * \epsilon_{-(\lambda+\rho)})$ es igual a

$$\sum_{\tau'' \in K} sn(\tau'') \left(\sum_{\tau' \in \mathcal{W}_{\bar{0}}} sn(\tau') \prod_{\alpha \in \Phi_{\bar{0}}^+} \left(\tau''(\lambda + \rho), (\tau')^{-1}(\alpha)\right) v(\epsilon_{\tau'\tau''(\lambda-\rho)-(\lambda-\rho)}) \right)$$

La función sn en $\mathcal{W}_{\bar{0}}$ es la restricción de la correspondiente función en $\mathcal{W}$ (ver [Hum78, ejercicios 5 y 6, página 54]), luego $sn(\tau') = sn((\tau')^{-1})$ es -1 en el caso en que $(\tau')^{-1}$ cambie un número impar de raíces positivas en $\Phi_{\bar{0}}^+$ a negativas y 1 si cambia un número par de ellas. En particular,

$$\begin{aligned} &v(\partial(A(\lambda + \rho) * \epsilon_{-(\lambda+\rho)})) \\ &\qquad = \sum_{\tau'' \in K} \left(sn(\tau'') \prod_{\alpha \in \Phi_{\bar{0}}^+} (\tau''(\lambda + \rho), \alpha) \sum_{\tau' \in \mathcal{W}_{\bar{0}}} v\left(\epsilon_{\sum_{i=1}^{l} (m_i+1)(\tau'\tau''(\lambda_i)-\lambda_i)} \right) \right). \end{aligned}$$

Notar que $\tau'\tau''(\lambda_i) - \lambda_i = (\tau'\tau''(\lambda_i) - \tau''(\lambda_i)) + (\tau''(\lambda_i) - \lambda_i)$ y que el coeficiente de α_{i_0} en $\tau'\tau''(\lambda_i) - \tau''(\lambda_i)$ cuando se escribe como combinación lineal de las raíces básicas en

Δ es par porque $\tau' \in \mathcal{W}_{\bar{0}}$. Por tanto,

$$v\left(\epsilon_{\sum\limits_{i=1}^{l}(m_i+1)(\tau'\tau''(\lambda_i)-\lambda_i)}\right) = v\left(\epsilon_{\sum\limits_{i=1}^{l}(m_i+1)(\tau''(\lambda_i)-\lambda_i)}\right)$$

no depende de τ'. Esto prueba que $v(\partial(A(\lambda+\rho)*\epsilon_{-(\lambda+\rho)}))$ es igual a

$$|\mathcal{W}_{\bar{0}}| \sum_{\tau''\in K} sn(\tau'') \prod_{\alpha\in\Phi_{\bar{0}}^{+}} (\tau''(\lambda+\rho),\alpha) v\left(\epsilon_{\sum\limits_{i=1}^{l}(m_i+1)(\tau''(\lambda_i)-\lambda_i)}\right)$$

El valor de $v\left(\epsilon_{\tau''(\lambda_i)-\lambda_i}\right)$ es $(-1)^{\langle\tau''(\lambda_i)-\lambda_i,\lambda_{i_0}\rangle\frac{(\lambda_{i_0},\lambda_{i_0})}{(\alpha_{i_0},\alpha_{i_0})}}$. Como

$$\begin{aligned}\langle\tau''(\lambda_i)-\lambda_i,\lambda_{i_0}\rangle(\lambda_{i_0},\lambda_{i_0}) =&(\langle\lambda_i,(\tau'')^{-1}(\lambda_{i_0})\rangle-\langle\lambda_{i_0},\lambda_{i_0}\rangle)(\lambda_{i_0},\lambda_{i_0})\\ =&\langle(\tau'')^{-1}(\lambda_{i_0})-\lambda_{i_0},\lambda_i\rangle(\lambda_i,\lambda_i)\\ =&(\alpha_i,\alpha_i)s_i((\tau'')^{-1}),\end{aligned}$$

se concluye que $v(\partial(A(\lambda+\rho)*\epsilon_{-(\lambda+\rho)}))$ es igual a

$$|\mathcal{W}_{\bar{0}}| \sum_{\tau\in K} sn(\tau)(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{l}\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{(\alpha_{i_0},\alpha_{i_0})}s_i(\tau)(m_i+1)} \prod_{\alpha\in\Phi_{\bar{0}}^{+}}(\lambda+\rho,\tau(\alpha)),$$

de donde se sigue el resultado. $\square$

Notar que esta fórmula para la traza de ϕ_λ^+ depende de un sumatorio en K, luego cuando $|K| = \frac{|\mathcal{W}|}{|\mathcal{W}_{\bar{0}}|}$ es grande, el cálculo no es eficiente. Sin embargo, para algunas familias de sistemas triples de Lie simples este tamaño es pequeño. En la siguiente sección se estudian algunos de estos ejemplos.

6.5. Algunos ejemplos de cálculo

Fijamos $\lambda = m_1\lambda_1 + \cdots + m_l\lambda_l$ un peso dominante.

Teorema 6.5.1. *La traza de ϕ_λ^+ para el sistema triple de Lie correspondiente al diagrama de Vogan ●—○⋯⋯○—○ de A_l está dada por la fórmula*

$$\frac{l!}{2^l}\dim V(\lambda)\sum_{i=1}^{l+1}\frac{(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{i-1}m_j}}{\prod\limits_{j=1}^{i-1}\left(\sum\limits_{p=j}^{i-1}(m_p+1)\right)\prod\limits_{j=1}^{l}\left(\sum\limits_{p=i}^{j}(m_p+1)\right)}$$

Demostración. Sea $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{l+1}\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^{l+1}$. Un sistema de raíces de tipo A_l viene dado por $\{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l+1\}$, las raíces básicas son $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ $i = 1, \ldots, l$ y la reflexión σ_{α_i} actúa en la base $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{l+1}\}$ intercambiando ϵ_i y ϵ_{i+1}, luego el grupo de Weyl se identifica con el grupo simétrico en $l+1$ letras $\{1, \ldots, l+1\}$. Como $\epsilon_i - \epsilon_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}$, entonces $\mathcal{W}_{\bar{0}}$ es el grupo generado por las reflexiones $\sigma_{\alpha_2}, \ldots, \sigma_{\alpha_l}$, que es isomorfo al grupo simétrico en l letras $\{2, \ldots, l+1\}$. El conjunto de raíces positivas se descompone como $\Phi^+ = \Phi^+_{\bar{0}} \sqcup \Phi^+_{\bar{1}}$ con $\Phi^+_{\bar{0}} = \{\alpha_i + \cdots + \alpha_j \mid 2 \leq i < j \leq l\}$ y $\Phi^+_{\bar{1}} = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \alpha_1 + \cdots + \alpha_l\}$. Como transversal puede tomarse

$$K = \{\mathrm{Id}, \sigma_{\alpha_1}, \ldots, \sigma_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_l}\}.$$

En este caso que estamos considerando, el diagrama de Dynkin está formado únicamente por enlaces simples, luego todas las raíces tienen la misma longitud, es decir, $\frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{(\alpha_{i_0}, \alpha_{i_0})} = 1$. La fórmula del teorema 6.4.1, por tanto, queda:

$$\frac{1}{2^l \prod\limits_{\alpha \in \Phi^+_{\bar{0}}} (\rho_{\bar{0}}, \alpha)} \sum_{\tau \in K} sn(\tau)(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{l} s_i(\tau)(m_i+1)} \prod_{\alpha \in \Phi^+_{\bar{0}}} (\lambda + \rho, \tau(\alpha)).$$

Notar que $\rho = \rho_{\bar{0}} + \frac{1}{2}(\alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) + \cdots + (\alpha_1 + \cdots + \alpha_l)) = \rho_{\bar{0}} + \frac{1}{2}(l\epsilon_1 - \epsilon_2 - \cdots - \epsilon_{l+1})$. Por tanto, $(\rho, \alpha) = (\rho_{\bar{0}}, \alpha)$ para cualquier $\alpha \in \Phi^+_{\bar{0}}$ y

$$\frac{1}{2^l \prod\limits_{\alpha \in \Phi^+_{\bar{0}}} (\rho_{\bar{0}}, \alpha)} = \frac{1}{2^l \prod\limits_{\alpha \in \Phi^+_{\bar{0}}} (\rho, \alpha)} = \frac{(\rho, \alpha_1) \cdots (\rho, \alpha_1 + \cdots + \alpha_l)}{2^l \prod\limits_{\alpha \in \Phi^+} (\rho, \alpha)} = \frac{l!}{2^l \prod\limits_{\alpha \in \Phi^+_{\bar{0}}} (\rho, \alpha)}.$$

Los coeficientes $s_i(\tau)$ se obtienen de manera sencilla, ya que

$$\sigma_{\epsilon_1 - \epsilon_i}(\lambda_1) - \lambda_1 = -(\lambda_1, \epsilon_1 - \epsilon_i)(\epsilon_1 - \epsilon_i) = -(\epsilon_1 - \epsilon_i) = -\alpha_1 - \cdots - \alpha_{i-1},$$

luego la suma

$$\sum_{\tau \in K} sn(\tau)(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{l} s_i(\tau)(m_i+1)} \prod_{\alpha \in \Phi^+_{\bar{0}}} (\lambda + \rho, \tau(\alpha))$$

puede escribirse como

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+_{\bar{0}}} (\rho + \lambda, \alpha) - \sum_{i=2}^{l+1} (-1)^{m_1 + 1 + \cdots + m_{i-1} + 1} \prod_{\alpha \in \Phi^+_{\bar{0}}} (\lambda + \rho, \sigma_{\epsilon_1 - \epsilon_i}(\alpha)).$$

Notar que, como $sn(\sigma_{\epsilon_1-\epsilon_i}) = -1$, entonces $\prod\limits_{\alpha\in\Phi_{\bar 0}^+}(\lambda+\rho,\sigma_{\epsilon_1-\epsilon_i}(\alpha))$ es

$$-\frac{\prod\limits_{\alpha\in\Phi^+}(\lambda+\rho,\alpha)}{(\lambda+\rho,\sigma_{\epsilon_1-\epsilon_i}(\alpha_1))\cdots(\lambda+\rho,\sigma_{\epsilon_1-\epsilon_i}(\alpha_1+\cdots+\alpha_l))}.$$

El producto $(\lambda+\rho,\sigma_{\epsilon_1-\epsilon_i}(\alpha_1))\cdots(\lambda+\rho,\sigma_{\epsilon_1-\epsilon_i}(\alpha_1+\cdots+\alpha_l))$ es igual a

$$\begin{aligned}\prod_{j=2}^{l+1}(\lambda+\rho,\sigma_{\epsilon_1-\epsilon_i}(\epsilon_1-\epsilon_j)) &= (-1)^{i-1}\prod_{j=1}^{i-1}(\lambda+\rho,\epsilon_j-\epsilon_i)\prod_{j=i+1}^{l+1}(\lambda+\rho,\epsilon_i-\epsilon_j)\\ &= (-1)^{i-1}\prod_{j=1}^{i-1}\left(\sum_{p=j}^{i-1}(m_p+1)\right)\prod_{j=i}^{l}\left(\sum_{p=i}^{j}(m_p+1)\right).\end{aligned}$$

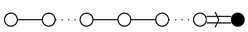
El sumando $\prod\limits_{\alpha\in\Phi_{\bar 0}^+}(\rho+\lambda,\alpha)$ puede escribirse como

$$\prod_{\alpha\in\Phi_{\bar 0}^+}(\rho+\lambda,\alpha) = \frac{\prod\limits_{\alpha\in\Phi^+}(\rho+\lambda,\alpha)}{\prod\limits_{j=1}^{l}\left(\sum\limits_{p=1}^{j}(m_p+1)\right)}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}&\sum_{\tau\in K} sn(\tau)(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{l}s_i(\tau)(m_i+1)}\prod_{\alpha\in\Phi_{\bar 0}^+}(\lambda+\rho,\tau(\alpha))\\ &\qquad= \prod_{\alpha\in\Phi^+}(\lambda+\rho,\alpha)\sum_{i=1}^{l+1}\frac{(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{i-1}m_j}}{\prod\limits_{j=1}^{i-1}\left(\sum\limits_{p=j}^{i-1}(m_p+1)\right)\prod\limits_{j=i}^{l}\left(\sum\limits_{p=i}^{j}(m_p+1)\right)}\end{aligned}$$

y el resultado se sigue de la fórmula de Weyl para $V(\lambda)$. □

Teorema 6.5.2. *La traza de ϕ_λ^+ para el sistema triple de Lie correspondiente al diagrama de Vogan*  *de B_l está dada por la fórmula*

$$\dim V(\lambda)\frac{(1+(-1)^{m_l})\prod\limits_{j=1}^{l}(2(l-j)+1)}{2\prod\limits_{j=1}^{l}\left(m_l+1+\sum\limits_{i=j}^{l-1}2(m_i+1)\right)}.$$

Demostración. Sea $\{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_l\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^l$. El conjunto

$$\Phi = \{\pm(\epsilon_i\pm\epsilon_j) \mid 1\le i<j\le l\}\cup\{\pm\epsilon_1,\ldots,\pm\epsilon_l\}$$

es un sistema de raíces de tipo B_l y las raíces positivas son

$$\{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_l\}.$$

Las raíces $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \alpha_{l-1} = \epsilon_{l-1} - \epsilon_l, \alpha_l = \epsilon_l$ pueden tomarse como las raíces básicas de Φ^+.

Como $\epsilon_i = \alpha_i + \cdots + \alpha_{l-1} + \alpha_l$, entonces $\epsilon_i - \epsilon_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}$ y $\epsilon_i + \epsilon_j = \alpha_i + \cdots + 2\alpha_j + \cdots + 2\alpha_l$, y se tiene que $\Phi_{\bar{0}}^+ = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq l\}$ y $\Phi_{\bar{1}}^+ = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_l\}$. El sistema de raíces $\Phi_{\bar{0}}^+$ se corresponde con un sistema triple de Lie de tipo D_l, luego $\frac{|\mathcal{W}|}{|\mathcal{W}_{\bar{0}}|} = \frac{2^l l!}{2^{l-1} l!} = 2$. Como $\sigma_{\alpha_l} \notin \mathcal{W}_{\bar{0}}$ (ya que los elementos de $\mathcal{W}_{\bar{0}}$ actúan en $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_l\}$ por permutación y cambios de signo pares, pero σ_{α_l} realiza un único cambio de signo), el transversal es $K = \{\mathrm{Id}, \sigma_{\alpha_l}\}$. Además, σ_{α_l} estabiliza $\Phi_{\bar{0}}^+$ y $(\alpha_i, \alpha_i)/(\alpha_l, \alpha_l) = 2$ excepto si $i = l$. Por tanto, la fórmula del teorema 6.4.1 queda:

$$\frac{(1 + (-1)^{m_l})}{2^l} \frac{\prod_{\alpha \in \Phi_{\bar{0}}^+} (\lambda + \rho, \alpha)}{\prod_{\alpha \in \Phi_{\bar{0}}^+} (\rho_{\bar{0}}, \alpha)}. \tag{6.5.1}$$

Los pesos dominantes fundamentales de B_l son $\lambda_1 = \epsilon_1, \lambda_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \dots, \lambda_{l-1} = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{l-1}$ y $\lambda_l = \frac{\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_l}{2}$ mientras que los pesos dominantes fundamentales de D_l son $\lambda'_1 = \epsilon_1, \dots, \lambda'_{l-2} = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{l-2}$, $\lambda'_{l-1} = \frac{\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{l-1} - \epsilon_l}{2}$ y $\lambda'_l = \frac{\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_l}{2}$. Por tanto, $\rho = \rho_{\bar{0}} + \lambda_l$. Usando la fórmula de Weyl para la dimensión, podemos reescribir (6.5.1) como

$$\begin{aligned}
&\frac{(1 + (-1)^{m_l})}{2^l} \frac{\dim V(\lambda) \prod_{\alpha \in \Phi^+} (\rho, \alpha)}{\prod_{i=1}^{l} (\lambda + \rho, \epsilon_i)} \frac{1}{\prod_{\alpha \in \Phi_{\bar{0}}^+} (\rho_{\bar{0}}, \alpha)} \\
&= \dim V(\lambda) \frac{(1 + (-1)^{m_l})}{2^l} \frac{\prod_{i=1}^{l} (\rho, \epsilon_i)}{\prod_{i=1}^{l} (\lambda + \rho, \epsilon_i)} \frac{\prod_{\alpha \in \Phi_{\bar{0}}^+} (\rho_{\bar{0}} + \lambda'_l, \alpha)}{\prod_{\alpha \in \Phi_{\bar{0}}^+} (\rho_{\bar{0}}, \alpha)} \\
&= \dim V(\lambda) \frac{(1 + (-1)^{m_l})}{2^l} \frac{\prod_{i=1}^{l} (\rho, \epsilon_i)}{\prod_{i=1}^{l} (\lambda + \rho, \epsilon_i)} \dim V(\lambda'_l) \\
&= \dim V(\lambda) \frac{(1 + (-1)^{m_l})}{2^l} \frac{\prod_{i=1}^{l} (\rho, \epsilon_i)}{\prod_{i=1}^{l} (\lambda + \rho, \epsilon_i)} 2^{l-1}
\end{aligned}$$

$$= \dim V(\lambda)\frac{(1+(-1)^{m_l})}{2}\frac{\prod\limits_{i=1}^{l}(\rho,\epsilon_i)}{\prod\limits_{i=1}^{l}(\lambda+\rho,\epsilon_i)}.$$

Como el producto interno $(k_1\lambda_1+\cdots+k_l\lambda_l,\epsilon_i)$ es igual a $k_i+k_{i+1}+\cdots+k_{l-1}+\frac{k_l}{2}$, se tiene el resultado. □

Teorema 6.5.3. *La traza de ϕ_λ^+ para el sistema triple de Lie correspondiente al diagrama de Vogan* $\bullet\!-\!\circ\cdots\circ\!-\!\circ\!-\!\circ\cdots\circ\!\Rightarrow\!\circ$ *de B_l está dada por la fórmula*

$$\dim V(\lambda)\frac{(1+(-1)^{m_l})(2l-1)!}{2^{2l}}\sum_{i=1}^{l}\frac{(-1)^{\sum_{j=1}^{i-1}m_j}}{h_i\prod\limits_{j=1}^{i-1}(h_j^2-h_i^2)\prod\limits_{j=i+1}^{l}(h_i^2-h_j^2)}$$

donde $h_i=(m_i+1)+\cdots+(m_{l-1}+1)+\frac{m_l+1}{2}$.

Demostración. El coeficiente en α_1 de una raíz α cuando se expresa como combinación lineal de $\alpha_1,\ldots,\alpha_l$ es el mismo que el coeficiente de ϵ_1 cuando α se escribe en términos de $\{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_l\}$. Por tanto,

$$\Phi_{\bar 0}^+=\{\epsilon_i\pm\epsilon_j\mid 2\le i<j\le l\}\cup\{\epsilon_2,\ldots,\epsilon_l\},$$

esto es, un sistema de raíces de tipo B_{l-1}. Las restantes $2l-1$ raíces positivas son

$$\Phi_{\bar 1}^+=\{\epsilon_1\pm\epsilon_2,\ldots,\epsilon_1\pm\epsilon_l,\epsilon_1\}.$$

El tamaño de K es $\frac{|\mathcal{W}|}{|\mathcal{W}_{\bar 0}|}=\frac{2^l l!}{2^{l-1}(l-1)!}=2l$. Los elementos de $\mathcal{W}$ actúan como permutaciones y cambios de signo en $\{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_l\}$. Sea $\sigma_i=\sigma_{\epsilon_1-\epsilon_i}\in\mathcal{W}$ el elemento de $\mathcal{W}$ que corresponde a la permutación $(1i)$ (se admite el valor $i=1$). Usa posible elección de K es $K=\{\pm\sigma_1,\ldots,\pm\sigma_l\}$. De hecho, $(-1)^s\sigma_i\sigma_j(\epsilon_1)=(-1)^s\sigma_i(\epsilon_j)=(-1)^s\epsilon_i$ en el caso en que $j=1$ y $(-1)^s\epsilon_j$ en otro caso, pero los elementos en $(-1)^s\sigma_i\sigma_j\in\mathcal{W}_{\bar 0}$ no producen cambios en el coeficiente de ϵ_1, luego la única posiblidad para $(-1)^s\sigma_i\sigma_j$ de estar $\mathcal{W}_{\bar 0}$ es $i=j=1$ y $s=0$. Esto prueba que la elección de K da un transversal.

El exponente de (-1) en la fórmula del teorema 6.4.1 para $\tau=\sigma_i$ es

$$s_1(\sigma_i)(m_1+1)+\cdots+s_{l-1}(\sigma_i)(m_{l-1}+1)+\frac{1}{2}s_l(\sigma_i)(m_l+1).$$

Como

$$\sigma_i(\lambda_1)-\lambda_1=-\langle\epsilon_1,\epsilon_1-\epsilon_i\rangle(\epsilon_1-\epsilon_i)=-(\epsilon_1-\epsilon_i)=-\alpha_1-\cdots-\alpha_{i-1},$$

este exponente es igual a $-(m_1+1)-\cdots-(m_{i-1}+1)$. En el caso en que $\tau=-\sigma_i$, este exponente es

$$-(m_1+1)-\cdots-(m_{i-1}+1)-2(m_i+1)-\cdots-2(m_{l-1}+1)-(m_l+1).$$

El valor de $sn(\tau)$ cambia por un factor $(-1)^l$ cuando se considera $\tau=-\sigma_i$ en lugar de $\tau=\sigma_i$ (notar que $sn(\tau)=(-1)^{n(\tau)}$ donde $n(\tau)$ es el número de raíces positivas que τ envía a raíces negativas, luego $sn(-\operatorname{Id})=(-1)^{l^2}=(-1)^l$). Además, $\prod_{\alpha\in\Phi_{\bar 0}^+}(\lambda+\rho,\tau(\alpha))$ cambia por un factor $(-1)^{(l-1)^2}=(-1)^{l+1}$ cuando se realiza la misma sustitución. Por tanto, podemos reescribir la traza de ϕ_λ^+ como

$$\frac{(1+(-1)^{m_l})}{2^{2l-1}\prod_{\alpha\in\Phi_{\bar 0}^+}(\rho_{\bar 0},\alpha)}\sum_{i=1}^{l} sn(\sigma_i)(-1)^{\sum_{j=1}^{i-1}(m_j+1)}\prod_{\alpha\in\Phi_{\bar 0}^+}(\lambda+\rho,\sigma_i(\alpha)). \qquad (6.5.2)$$

El factor $sn(\sigma_i)\prod_{\alpha\in\Phi_{\bar 0}^+}(\lambda+\rho,\sigma_i(\alpha))$ es igual a

$$\frac{\prod_{\alpha\in\Phi_{\bar 0}^+}(\lambda+\rho,\alpha)}{(\lambda+\rho,\sigma_i(\epsilon_1\pm\epsilon_2))\cdots(\lambda+\rho,\sigma_i(\epsilon_1\pm\epsilon_l))(\lambda+\rho,\sigma_i(\epsilon_1))}.$$

Los pesos dominantes fundamentales de B_l son

$$\lambda_1=\epsilon_1,\dots,\lambda_{l-1}=\epsilon_1+\cdots+\epsilon_{l-1},\ \lambda_l=\frac{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_l}{2},$$

mientras que para el sistema de raíces $\Phi_{\bar 0}^+$ se tiene

$$\lambda_1'=\epsilon_2,\dots,\lambda_{l-1}'=\epsilon_2+\cdots+\epsilon_{l-1},\ \lambda_{l-1}'=\frac{\epsilon_2+\cdots+\epsilon_l}{2}.$$

Por tanto, $\rho=\frac{2l-1}{2}\epsilon_1+\rho_{\bar 0}$ y $(\rho_{\bar 0},\alpha)=(\rho,\alpha)$ para cualesquiera $\alpha\in\Phi_{\bar 0}^+$. Podemos escribir (6.5.2) como

$$\frac{(1+(-1)^{m_l})}{2^{2l-1}}\dim V(\lambda)(\rho,\epsilon_1\pm\epsilon_2)\cdots(\rho,\epsilon_1\pm\epsilon_l)(\rho,\epsilon_1)$$
$$\cdot\sum_{i=1}^{l}\frac{(-1)^{\sum_{j=1}^{i-1}(m_j+1)}}{(\lambda+\rho,\sigma_i(\epsilon_1\pm\epsilon_2))\cdots(\lambda+\rho,\sigma_i(\epsilon_1\pm\epsilon_l))(\lambda+\rho,\sigma_i(\epsilon_1))}.$$

El denominador $(\lambda+\rho,\sigma_i(\epsilon_1\pm\epsilon_2))\cdots(\lambda+\rho,\sigma_i(\epsilon_1\pm\epsilon_l))(\lambda+\rho,\sigma_i(\epsilon_1))$ es igual a

$$(-1)^{i-1}(\lambda+\rho,\epsilon_1\pm\epsilon_i)\cdots(\lambda+\rho,\epsilon_{i-1}\pm\epsilon_i)(\lambda+\rho,\epsilon_i\pm\epsilon_{i+1})\cdots(\lambda+\rho,\epsilon_i\pm\epsilon_l)(\lambda+\rho,\epsilon_i).$$

El valor $(\lambda+\rho,\epsilon_i)$ coincide con h_i definido en el enunciado, luego la traza de ϕ_λ^+ viene dada por

$$\frac{(1+(-1)^{m_l})}{2^{2l-1}}\dim V(\lambda)(\rho,\epsilon_1\pm\epsilon_2)\cdots(\rho,\epsilon_1\pm\epsilon_l)(\rho,\epsilon_1)\sum_{i=1}^{l}\frac{(-1)^{\sum_{j=1}^{i-1}m_j}}{h_i\prod_{j=1}^{i-1}(h_j^2-h_i^2)\prod_{j=i+1}^{l}(h_i^2-h_j^2)}.$$

Como $(\rho,\epsilon_1+\epsilon_i)=2l-i$ y $(\rho,\epsilon_1-\epsilon_i)=i-1$ se tiene que

$$(\rho,\epsilon_1\pm\epsilon_2)\cdots(\rho,\epsilon_1\pm\epsilon_l)(\rho,\epsilon_1)=\frac{(2l-1)!}{2}$$

y esto prueba el resultado. □

6.6. Otra aproximación en el caso A_2

Sea el álgebra de Lie simple A_2 y su diagrama de Vogan $\bullet\!\!-\!\!\circ$. Consideramos en A_2 la involución $\sigma : X\mapsto PXP^{-1}$, donde

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

El correspondiente sistema triple de Lie $skew(A_2,\sigma)$ es el conjunto

$$T=\{X\in A_2\mid PXP^{-1}=-X\}.$$

Para cada L_2-módulo $V(\lambda)$, existe un único isomorfismo lineal $\phi_\lambda^+ : V(\lambda)\to V(\lambda)$ tal que $\phi_\lambda^+(av)=\sigma(a)\phi_\lambda(v)$, $(\phi_\lambda^+)^2=\mathrm{Id}$ y $\phi_\lambda^+(v_\lambda)=v_\lambda$.

Los módulos correspondientes a pesos fundamentales de las álgebras de Lie de tipo A_l son $\wedge^1V,\wedge^2V,\ldots,\wedge^lV$, donde V es el módulo natural. Por tanto, el módulo natural F^3 se corresponde con $V(\lambda_1)$ y el módulo $\wedge^2V$ con $V(\lambda_2)$.

Sea $\phi_{\lambda_1}^+ : V(\lambda_1)\to V(\lambda_1)$ dada por $v\mapsto Pv$ con

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Se tiene que

- $\phi^+_{\lambda_1}(xv) = P \cdot x \cdot v = PXP^{-1}P \cdot v = \sigma(x)\phi^+_{\lambda_1}(v)$, donde $\cdot$ es el producto matricial
- $(\phi^+_{\lambda_1})^2 = \mathrm{Id}$
- $\phi^+_{\lambda_1}(v_{\lambda_1}) = v_{\lambda_1}$, con $v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

En la base canónica $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $V(\lambda_1)$, el isomorfismo $\phi^+_{\lambda_1}$ viene dado por la matriz P anterior. Por tanto,

$$\dim V(\lambda_1)_+ = \dim S(1, \phi_{\lambda_1}) = \dim F\langle v_1\rangle = 1$$
$$\dim V(\lambda_1)_- = \dim S(-1, \phi_{\lambda_1}) = \dim F\langle v_2, v_3\rangle = 2,$$

es decir, las dimensiones de los módulos para el sistema triple de Lie $T = skew(A_2, \sigma)$ correspondientes al módulo $V(\lambda_1)$ de A_2 son 1 y 2. Claramente, estas dimensiones son la solución al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dim V(\lambda_1)_+ + \dim V(\lambda_1)_- = \dim V(\lambda_1) \\ \dim V(\lambda_1)_+ - \dim V(\lambda_1)_- = \mathrm{traza}\, \phi_{\lambda_1} \end{cases}$$

Sea $\phi^+_{\lambda_2} : V(\lambda_2) \to V(\lambda_2)$ dada por $v_i \wedge v_j \mapsto Pv_i \wedge Pv_j$ con P como antes. Se tiene que

- $\phi^+_{\lambda_2}(x(v_i \wedge v_j)) = \sigma(x)\phi^+_{\lambda_2}(v_i \wedge v_j)$
- $(\phi^+_{\lambda_2})^2 = \mathrm{Id}$
- $\phi^+_{\lambda_2}(v_2 \wedge v_3) = v_2 \wedge v_3$

En la base canónica $\{v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_3, v_2 \wedge v_3\}$ de $V(\lambda_2)$ $\phi^+_{\lambda_2}$ viene dada por la matriz

$$P' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\dim V(\lambda_2)_+ = \dim S(1, \phi_{\lambda_2}) = \dim F\langle v_2 \wedge v_3\rangle = 1$$
$$\dim V(\lambda_1)_- = \dim S(-1, \phi_{\lambda_1}) = \dim F\langle v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_3\rangle = 2,$$

es decir, las dimensiones de los módulos para el sistema triple de Lie $T = skew(A_2, \sigma)$ correspondientes al módulo $V(\lambda_2)$ de A_2 son 1 y 2. Claramente, estas dimensiones son la solución al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dim V(\lambda_2)_+ + \dim V(\lambda_2)_- = \dim V(\lambda_2) \\ \dim V(\lambda_2)_+ - \dim V(\lambda_2)_- = \operatorname{traza} \phi_{\lambda_2} \end{cases}$$

$V(k\lambda_1)$ puede modelizarse como los polinomios de grado k en $\{v_1, v_2, v_3\}$ de manera que A_2 actúa como derivaciones:

$$x(v_1^{i_1} v_2^{i_2} v_3^{i_3}) = i_1 v_1^{i_1-1}(x \cdot v_1) v_2^{i_2} v_3^{i_3} + i_2 v_1^{i_1} v_2^{i_2-1}(x \cdot v_2) v_3^{i_3} + i_3 v_1^{i_1} v_2^{i_2} v_3^{i_3-1}(x \cdot v_3),$$

donde $\cdot$ es el producto matricial. El vector de peso maximal sería $v_{\lambda_1}^k$, ya que dado $h \in H$, $hv_{\lambda_1}^k = kv_{\lambda_1}^{k-1}(h \cdot v_{\lambda_1}) = k\lambda_1 v_{\lambda_1}^k$. El automorfismo

$$\begin{aligned} \phi_{k\lambda_1} : V(k\lambda_1) &\to V(k\lambda_1) \\ v_1^{i_1} v_2^{i_2} v_3^{i_3} &\mapsto (Pv_1)^{i_1} (Pv_2)^{i_2} (Pv_3)^{i_3} \end{aligned}$$

cumple:

- $\phi_{k\lambda_1}^2 = \mathrm{Id}$
- $\phi_{k\lambda_1}(x(v_1^{i_1} v_2^{i_2} v_3^{i_3})) = \sigma(x)\phi_{k\lambda_1}(v_1^{i_1} v_2^{i_2} v_3^{i_3})$
- $\phi_{k\lambda_1}(v_1^k) = v_1^k$.

Como $\phi_{k\lambda_1}(v_1^{i_1} v_2^{i_2} v_3^{i_3}) = (-1)^{i_2+i_3} v_1^{i_1} v_2^{i_2} v_3^{i_3}$ se tiene que

$$\dim V(k\lambda_1) = \sum_{i=0}^{k} (k - i + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \text{ y}$$

$$\dim V(k\lambda_1)_+ = \begin{cases} \frac{(k+2)^2}{4} & \text{si } k \text{ es par} \\ \frac{(k+1)^2}{4} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Por tanto, restando se obtiene que

$$\dim V(k\lambda_1)_- = \begin{cases} \frac{k(k+2)}{4} & \text{si } k \text{ es par} \\ \frac{(k+1)(k+3)}{4} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

y, así, la traza del automorfismo queda

$$\operatorname{traza} \phi_{k\lambda_1} - = \begin{cases} \frac{k+2}{2} & \text{si } k \text{ es par} \\ \frac{-(k+1)}{2} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Dados $V(\lambda')$ y $V(\lambda'')$ dos A_2-módulos irreducibles, se tiene que el automorfismo

$$\begin{aligned}\phi_{\lambda'}\otimes\phi_{\lambda''}: V(\lambda')\otimes V(\lambda'') &\to V(\lambda')\otimes V(\lambda'')\\ v'\otimes v'' &\mapsto \phi_{\lambda'}(v')\otimes\phi_{\lambda''}(v'')\end{aligned}$$

verifica

- $(\phi_{\lambda'}\otimes\phi_{\lambda''})^2 = \mathrm{Id}$
- $(\phi_{\lambda'}\otimes\phi_{\lambda''})(x(v'\otimes v'')) = \sigma(x)((\phi_{\lambda'}\otimes\phi_{\lambda''})(v'\otimes v''))$

Además,

$$S(1,\phi_{\lambda'}\otimes\phi_{\lambda''}) = S(1,\phi_{\lambda'})\otimes S(1,\phi_{\lambda''}) + S(-1,\phi_{\lambda'})\otimes S(-1,\phi_{\lambda''}),$$

luego

$$\dim S(1,\phi_{\lambda'}\otimes\phi_{\lambda''}) = \dim S(1,\phi_{\lambda'})\dim S(1,\phi_{\lambda''}) + \dim S(-1,\phi_{\lambda'})\dim S(-1,\phi_{\lambda''}).$$

El submódulo de $V(\lambda')\otimes V(\lambda'')$ generado por $v_{\lambda'}\otimes v_{\lambda''}$ es isomorfo a $V(\lambda'+\lambda'')$, es estable por $\phi_{\lambda'}\otimes\phi_{\lambda''}$ y se cumple que $(\phi_{\lambda'}\otimes\phi_{\lambda''})(v_{\lambda'}\otimes v_{\lambda''}) = v_{\lambda'}\otimes v_{\lambda''}$. Por tanto, la restricción de $\phi_{\lambda'}\otimes\phi_{\lambda''}$ al submódulo generado por $v_{\lambda'}\otimes v_{\lambda''}$ es la aplicación $\phi_{\lambda'+\lambda''}$. En A_2 se verifica que $\phi_{\lambda'}\otimes\phi_{\lambda''}$ estabiliza todos los submódulos de $V(\lambda')\otimes V(\lambda'')$.

Se tiene la descomposición

$$V(k\lambda_1)\otimes V(\lambda_2) = V(k\lambda_1+\lambda_2)\oplus V((k-1)\lambda_1).$$

Por tanto, $\phi_{k\lambda_1}\otimes\phi_{\lambda_2}$ induce (salvo signo) $\phi_{k\lambda_1+\lambda_2}$ en $V(k\lambda_1+\lambda_2)$. Ahora bien, $(k-1)\lambda_1$ debe obtenerse como $\mu'+\mu''$ con el coeficiente de λ_2 en μ' y μ'' de la misma paridad (en realidad dichos coeficientes son opuestos, ya que deben sumar cero). Para determinar el signo, se tiene en cuenta la paridad del coeficiente de α_1 en $(k\lambda_1+\lambda_2)-(k-1)\lambda_1$ $(=\lambda_1+\lambda_2=\alpha_1+\alpha_2)$. En este caso es impar, luego el signo es negativo: induce $-\phi_{k\lambda_1+\lambda_2}$.

Conocida la descomposición en suma de submódulos y los signos de los automorfismos inducidos, contamos las dimensiones de los subespacios de valor propio 1:

$$\begin{aligned}&\dim V(k\lambda_1)_+\dim V(\lambda_2)_+ + \dim V(k\lambda_1)_-\dim V(\lambda_2)_-\\ &\qquad = \dim V(k\lambda_1+\lambda_2)_+ + \dim V((k-1)\lambda_1)_-.\end{aligned}$$

De aquí, se obtiene que

$$\dim V(k\lambda_1+\lambda_2)_+ = \begin{cases} \frac{(k+2)^2}{2} & \text{si } k \text{ es par} \\ \frac{(k+1)(k+3)}{2} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Usando la fórmula de Weyl para la dimensión de $V(k\lambda_1+\lambda_2)$, se deduce que

$$\dim V(k\lambda_1+\lambda_2)_- = \begin{cases} \frac{k^2+4k+2}{2} & \text{si } k \text{ es par} \\ \frac{(k+1)(k+3)}{2} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

En este punto, vamos a utilizar inducción para probar que la traza del automorfismo $\phi_{a\lambda_1+b\lambda_2}$ en función de las paridades de a y b viene dada por la tabla:

	b par	b impar
a par	$\frac{a+b+2}{2}$	$\frac{1+b}{2}$
a impar	$-\frac{a+1}{2}$	0

Una vez probado esto y usando la fórmula de Weyl para la dimensión del A_2-módulo $V(a\lambda_1+b\lambda_2)$, podremos dar las fórmulas para la dimensión de los módulos para el sistema triple de Lie $skew(A_2,\sigma)$: $V(a\lambda_1+b\lambda_2)_+$ y $V(a\lambda_1+b\lambda_2)_-$.

Conocemos para A_2 la descomposición del producto tensorial de módulos

$$\begin{aligned} &V(a\lambda_1+b\lambda_2)\otimes V(\lambda_2) \\ &\qquad \cong V(a\lambda_1+(b+1)\lambda_2)\oplus V((a+1)\lambda_1+(b-1)\lambda_2)\oplus V((a-1)\lambda_1+b\lambda_2) \end{aligned}$$

y también que

$$\operatorname{traza}(\phi_{a\lambda_1}) = \begin{cases} \frac{a+2}{2} & \text{si } a \text{ es par} \\ -\frac{a+1}{2} & \text{si } a \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\operatorname{traza}(\phi_{\lambda_2}) = 1$$

Casos básicos:

$b=1$: A partir de la descomposición $V(a\lambda_1)\otimes V(\lambda_2)\cong V(a\lambda_1+\lambda_2)\oplus V((a-1)\lambda_1)$ se tiene que $\phi_{a\lambda_1}\otimes\phi_{\lambda_2}$ induce $\phi_{a\lambda_1+\lambda_2}-\phi_{(a-1)\lambda_1}$; por tanto:

$$\begin{aligned} \operatorname{traza}(\phi_{a\lambda_1+\lambda_2}) &= \operatorname{traza}(\phi_{a\lambda_1})\operatorname{traza}(\phi_{\lambda_2})+\operatorname{traza}(\phi_{(a-1)\lambda_1}) \\ &= \begin{cases} \frac{a+2}{2}\cdot 1-\frac{(a-1)+1}{2}=1 & \text{si } a \text{ es par} \\ -\frac{a+1}{2}\cdot 1+\frac{(a-1)+2}{2}=0 & \text{si } a \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

$b=2$: De $V(a\lambda_1+\lambda_2)\otimes V(\lambda_2)\cong V(a\lambda_1+2\lambda_2)\oplus V((a+1)\lambda_1)\oplus V((a-1)\lambda_1+\lambda_2)$ se tiene que $\phi_{a\lambda_1+\lambda_2}\otimes\phi_{\lambda_2}$ induce $\phi_{a\lambda_1+2\lambda_2}+\phi_{(a+1)\lambda_1}-\phi_{(a-1)\lambda_1+\lambda_2}$; por tanto:

$$\begin{aligned}\operatorname{traza}(\phi_{a\lambda_1+2\lambda_2}) &= \operatorname{traza}(\phi_{a\lambda_1+\lambda_2})\operatorname{traza}(\phi_{\lambda_2})-\operatorname{traza}(\phi_{(a+1)\lambda_1})+\operatorname{traza}(\phi_{(a-1)\lambda_1+\lambda_2})\\ &= \begin{cases} 1\cdot 1+\frac{(a+1)+1}{2}+0= \quad \frac{a+4}{2} & \text{si } a \text{ es par}\\ 0\cdot 1-\frac{(a+1)+2}{2}+1= \quad -\frac{a+1}{2} & \text{si } a \text{ es impar}\end{cases}\end{aligned}$$

Suponemos cierta la propiedad hasta $b-1$ y veamos que se cumple para b. La descomposición en este caso es:

$$\begin{aligned}&V(a\lambda_1+(b-1)\lambda_2)\otimes V(\lambda_2)\\ &\qquad\cong V(a\lambda_1+b\lambda_2)\oplus V((a+1)\lambda_1+(b-2)\lambda_2)\oplus V((a-1)\lambda_1+(b-1)\lambda_2),\end{aligned}$$

luego $\phi_{a\lambda_1+(b-1)\lambda_2}\otimes\phi_{\lambda_2}$ induce $\phi_{a\lambda_1+b\lambda_2}+\phi_{(a+1)\lambda_1+(b-2)\lambda_2}-\phi_{(a-1)\lambda_1+(b-1)\lambda_2}$.

b impar: la hipótesis de inducción nos proporciona

$$\operatorname{traza}(\phi_{a\lambda_1+(b-2)\lambda_2})=\begin{cases}\frac{b-1}{2} & \text{si } a \text{ es par}\\ 0 & \text{si } a \text{ es impar}\end{cases}$$

$$\operatorname{traza}(\phi_{a\lambda_1+(b-1)\lambda_2})=\begin{cases}\frac{1+a+b}{2} & \text{si } a \text{ es par}\\ \frac{a+1}{2} & \text{si } a \text{ es impar}\end{cases}$$

Así:

$$\begin{aligned}\operatorname{traza}(\phi_{a\lambda_1+b\lambda_2}) &= \operatorname{traza}(\phi_{a\lambda_1+(b-1)\lambda_2})\operatorname{traza}(\phi_{\lambda_2})\\ &\quad -\operatorname{traza}(\phi_{(a+1)\lambda_1+(b-2)\lambda_2})+\operatorname{traza}(\phi_{(a-1)\lambda_1+(b-1)\lambda_2})\\ &= \begin{cases}\frac{1+a+b}{2}\cdot 1-0-\frac{(a-1)+1}{2}=\frac{1+b}{2} & \text{si } a \text{ es par}\\ -\frac{a+1}{2}\cdot 1-\frac{b-1}{2}+\frac{1+(a-1)+b}{2}=0 & \text{si } a \text{ es impar}\end{cases}\end{aligned}$$

b par: la hipótesis de inducción nos proporciona

$$\operatorname{traza}(\phi_{a\lambda_1+(b-2)\lambda_2})=\begin{cases}\frac{a+b}{2} & \text{si } a \text{ es par}\\ -\frac{a+1}{2} & \text{si } a \text{ es impar}\end{cases}$$

$$\operatorname{traza}(\phi_{a\lambda_1+(b-1)\lambda_2})=\begin{cases}\frac{b}{2} & \text{si } a \text{ es par}\\ 0 & \text{si } a \text{ es impar}\end{cases}$$

Así:

$$\begin{aligned}\text{traza}(\phi_{a\lambda_1+b\lambda_2}) &= \text{traza}(\phi_{a\lambda_1+(b-1)\lambda_2})\,\text{traza}(\phi_{\lambda_2}) \\ &\quad - \text{traza}(\phi_{(a+1)\lambda_1+(b-2)\lambda_2}) + \text{traza}(\phi_{(a-1)\lambda_1+(b-1)\lambda_2}) \\ &= \begin{cases} \frac{b}{2}\cdot 1 + \frac{(a+1)+1}{2} + 0 = \frac{2+a+b}{2} & \text{si } a \text{ es par} \\ 0\cdot 1 - \frac{(a+1)+b}{2} + \frac{b}{2} = -\frac{a+1}{2} & \text{si } a \text{ es impar} \end{cases}\end{aligned}$$

como deseábamos. Ahora, conocida la fórmula de Weyl para A_2

$$dimV(\lambda) = \frac{(a+1)(b+2)(a+b+2)}{2},$$

con $\lambda = a\lambda_1 + b\lambda_2$ y resolviendo el sistema de ecuaciones

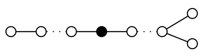
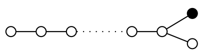
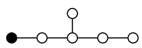
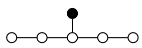
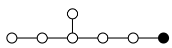
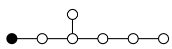
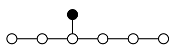
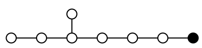
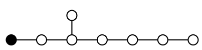
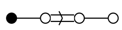
$$\begin{cases} \dim V(\lambda)_+ + \dim V(\lambda)_- = \dim V(\lambda) \\ \dim V(\lambda)_+ - \dim V(\lambda)_- = \text{traza}\,\phi_\lambda \end{cases}$$

dependiendo de la paridad de a y b, se tiene el resultado que buscábamos:

	b par	b impar
a par	$\dim V(\lambda)_+ = \frac{\dim V(\lambda)}{2} + \frac{a+b+2}{4}$ $\dim V(\lambda)_- = \frac{\dim V(\lambda)}{2} - \frac{a+b+2}{4}$	$\dim V(\lambda)_+ = \frac{\dim V(\lambda)}{2} + \frac{1+b}{4}$ $\dim V(\lambda)_- = \frac{\dim V(\lambda)}{2} - \frac{1+b}{4}$
a impar	$\dim V(\lambda)_+ = \frac{\dim V(\lambda)}{2} - \frac{a+1}{4}$ $\dim V(\lambda)_- = \frac{\dim V(\lambda)}{2} + \frac{a+1}{4}$	$\dim V(\lambda)_+ = \frac{\dim V(\lambda)}{2}$ $\dim V(\lambda)_- = \frac{\dim V(\lambda)}{2}$

6.7. Tabla de los automorfismos involutivos internos

Tabla 6.1: Automorfismos involutivos internos

L	$L_{\bar{0}}$[1]	Diagrama de Vogan	$\mid \mathcal{W}_L \mid$	$\mid \mathcal{W}_{\bar{0}} \mid$	$\mid \mathcal{W}_L \mid / \mid \mathcal{W}_{\bar{0}} \mid$
A_l	$A_{p-1} \times A_{l-p} \times \mathcal{Z}$		$(l+1)!$	$(l+1-p)! \cdot p!$	$\binom{l+1}{p}$
		$1 \leq p \leq [\frac{l}{2}]$			
B_l	$D_p \times B_{l-p}$		$2^l \cdot l!$	$2^{l-1} \cdot p! \cdot (l-p)!$	$\binom{l}{r}$
$l \geq 2$		$1 \leq p \leq l$			
C_l	$C_p \times C_{l-p}$		$2^l \cdot l!$	$2^l \cdot p! \cdot (l-p)!$	$\binom{l}{p}$
$l \geq 3$		$1 \leq p \leq [\frac{l}{2}]$			
	$A_{l-1} \times \mathcal{Z}$			$l!$	2^l
D_l	$D_p \times D_{l-p}$		$2^{l-1} \cdot l!$	$2^{l-2} \cdot p! \cdot (l-p)!$	$2\binom{l}{p}$
$l \geq 4$		$1 \leq p \leq [\frac{l}{2}]$			
$l \geq 5$	$A_{l-1} \times \mathcal{Z}$		$2^{l-1} \cdot l!$	$l!$	2^{l-1}
E_6	$D_5 \times \mathcal{Z}$		$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	$2^4 \cdot 5!$	3^2
	$A_5 \times A_1$			$2 \cdot 5!$	$2^3 \cdot 3^2$
E_7	$E_6 \times \mathcal{Z}$		$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	$2^3 \cdot 7$
	$D_6 \times A_1$			$2^6 \cdot 6!$	$3^2 \cdot 7$
	A_7			$8!$	$2^3\, 3^2$
E_8	$E_7 \times A_1$		$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$	$2^{11} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$
	D_8			$2^7 \cdot 8!$	$3^3 \cdot 5$
F_4	B_4		$2^7 \cdot 3^2$	$2^4 \cdot 4!$	3
	$C_3 \times A_1$			$2^4 \cdot 3!$	$2^2 \cdot 3$
G_2	$A_1 \times A_1$		$2^2 \cdot 3$	2^2	3

[1] p denota el nodo sombreado en el diagrama y $\mathcal{Z}$ es el centro de $L_{\bar{0}}$.

6.8. En breve / Summarizing

6.8.1. En breve

En este capítulo se ha usado el functor de Harris para poner en biyección los módulos para un sistema triple de Lie con los módulos con involución para su envolvente estándar. Como los sistemas triples de Lie simples se pueden describir en términos de las álgebras de Lie simples, sus módulos se corresponden con módulos para álgebras de Lie simples con involución, que son bien conocidas. Una vez probado esto, se estudian los módulos de dimensión 1 para sistemas triples de Lie simples y se concluye que los no triviales solo aparecen para dos familias concretas de sistemas triples de Lie. También se da una fórmula general de tipo Weyl para la dimensión de los módulos para sistemas triples de Lie, usando que son los espacios antisimétricos de las involuciones de los respectivos módulos para las correspondientes álgebras de Lie simples. Esta fórmula se particulariza para las familias de álgebras de Lie A_l y B_l.

Los resultados que aparecen en este capítulo han sido recopilados en el artículo "Weyl's dimension formula for modules of simple inner Lie triple systems", que ha sido publicado en la revista "Journal of Algebra" [PBPI12].

6.8.2. Summarizing

In this chapter we used the Harris functor to relate modules for a Lie triple system to modules with involution for its standard envelope by means of a bijection. Since Lie triple systems can be described in terms of simple Lie algebras, their modules correspond to modules for Lie algebras with involution, which are well known. We also studied 1-dimensional modules for simple Lie triple systems and we concluded that the non-trivial ones appear only for two particular families of Lie triple systems. Since modules for Lie triple systems can be described as antisymmetric spaces with respect to the involution of the corresponding modules for the associated Lie algebra with involution, we gave a Weyl-type formula for the dimension of the modules for Lie triple systems. This formula is explicitly computed for the families of Lie algebras A_l and B_l.

The results from this chapter were collected in the paper "Weyl's dimension formula for modules of simple inner Lie triple systems", that was published in the journal "Journal of Algebra" [PBPI12].

Apéndice A

Álgebras de Leibniz n-arias conmutativas

A.1. Introducción / Introduction

A.1.1. Introducción

Un *álgebra de Leibniz n-aria* es un espacio vectorial dotado de un producto n-multilineal $[x_1, \ldots, x_n]$ que satisface la identidad

$$[[x_1, \ldots, x_n], y_2, \ldots, y_n] = \sum_{i=1}^{n} [x_1, \ldots, [x_i, y_2, \ldots, y_n], \ldots, x_n]$$

En el caso en que el producto sea totalmente simétrico, se dice que el álgebra de Leibniz n-aria es *conmutativa.*

Las álgebras de Leibniz binarias ($n = 2$) se conocen como álgebras de Leibniz lineales o *álgebras de Loday* y fueron introducidas por Loday en [Lod93]. Se comprueba fácilmente que toda álgebra de Leibniz lineal simple es un álgebra de Lie y que, por tanto, no es conmutativa [KW01]. Las álgebras de Leibniz ternarias ($n = 3$) son exactamente las llamadas *álgebras simplécticas equilibradas* introducidas por Faulkner y Ferrar en [FF72] (ver también Faulkner [Fau85]) y renombradas por Elduque [Eld06] como *triples nul-simplécticos.* Usando teoría de representacion de álgebras de Lie, Pojidaev probó en 2003 el siguiente resultado:

Teorema A.1.1 (Pojidaev,[Poj03]). *Para $n \geq 3$ no existen álgebras de Leibniz n-arias conmutativas simples de dimensión finita sobre cuerpos de característica cero.*

El resultado de Pojidaev se obtiene reduciendo el problema a una cuestión de teoría de representación de álgebras de Lie y homomorfismos simétricos de módulos. Basándose en Loos [Loo75], Elduque probó que para $n = 3$, el teorema de Pojidaev es válido en característica distinta de 2 y de 3 (Elduque [Eld06]). El autor menciona además la posibilidad de una demostración diferente usando resultados conocidos acerca de pares de Jordan [Eld06, nota 3.13]. La idea se sigue de la proposición 3.6 de dicho trabajo, que establece cómo construir un álgebra de Lie con una 3-graduación corta $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-1} \oplus \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ tomando $\mathcal{L}_{\pm 1}$ dos copias de un álgebra de Leibniz ternaria conmutativa cualquiera. Como las álgebras de Lie 3-graduadas y los pares de Jordan son estructuras íntimamente relacionadas, la proposición 3.6 en Elduque [Eld06] sugiere una conexión entre álgebras de Leibniz ternarias conmutativas de dimensión finita y pares de Jordan.

El objetivo de este capítulo es probar que el resultado de Pojidaev puede ser enunciado en un contexto más general:

Teorema A.1.2. *Para $n \geq 3$ no existen álgebras de Leibniz n-arias conmutativas sobre cuerpos de característica mayor que n.*

Para probar este resultado se usan técnicas diferentes dependiendo de si $n = 3$ o $n > 3$. El concepto de divisor de cero absoluto en pares de Jordan lleva al teorema A.1.2 para $n = 3$. Esto se expone en la sección 2, donde también se prueba la relación entre álgebras de Leibniz ternarias conmutativas y ciertos pares de Jordan. En la sección 3 se trata el caso $n \geq 4$. Para ello, es fundamental la noción de tapas de sandwiches finos introducida por Kostrikin en 1959. Ambas demostraciones están basadas en resultados de Zelmanov acerca de divisores de cero absolutos en pares de Joradan y nilpotencia local de las álgebras envolventes asociativas de ciertas álgebras de Lie (Zelmanov [Zel80]).

A.1.2. Introduction

A *n-ary Leibniz algebra* is a vector space endowed with a n-multilinear product $[x_1, \ldots, x_n]$ which verifies the identity

$$[[x_1, \ldots, x_n], y_2, \ldots, y_n] = \sum_{i=1}^{n} [x_1, \ldots, [x_i, y_2, \ldots, y_n], \ldots, x_n].$$

In the case of the product being totally simmetric, we say that the n-ary Leibniz algebra is *commutative.*

Binary Leibniz algebras ($n = 2$) are known as linear Leibniz algebras or *Loday algebras* and were introduced in [Lod93]. It is easy to check that any simple linear Leibniz algebra is a Lie algebra, so it is not commutative [KW01]. Ternary Leibniz algebras ($n = 3$) are exactly the so-called *balances symplectic algebras* introduced by Faulkner and Ferrar in [FF72] (see also Faulkner [Fau85]) and renamed by Elduque [Eld06] as *null-symplectic triples.* Using representation theory of Lie algebras, Pojidaev proved the following result:

Theorem A.1.1 (Pojidaev,[Poj03])**.** *For $n \geq 3$ there not exist simple commutative n-ary Leibniz algebras of finite dimension over fields of characeristic zero.*

The proof by Pojidaev is obtained by reducing the problem to a question on representation theory of Lie algebras an symmetric homorphisms of modules. Based on Loos [Loo75], Elduque proved that for $n = 3$, Pojidaev's theorem is also valid in characteristic not 2 nor 3 (Elduque [Eld06]). The author also mentioned the possibility of a different proof using some known results regarding Jordan pairs [Eld06, remark 3.13]. The idea follows from proposition 3.6 of this work, where it is proved how to construct a Lie algebra with a short 3-grading $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-1} \oplus \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ by taking as $\mathcal{L}_{\pm 1}$ two copies of an arbitrary commutative ternary Leibniz algebra. Since 3-graded Lie algebras and Jordan pairs are closely related structures, proposition 3.6 in Elduque [Eld06] suggests a connection between finite dimensional commutative ternary Leibniz algebras and Jordan pairs.

The goal of this chapter is to prove that Pojidaev's theorem can be stated in a more general setting:

Teorema. *For $n \geq 3$ there not exist commutative n-ary Leibniz algebras over fields of characteristic bigger than n.*

We use different techniques to prove this result, depending on if $n = 3$ or $n > 3$. The notion of absolute zero divisor in Jordan pairs leds to the theorem A.1.2 for $n = 3$. This is exposed in section A.2, where we also show the relation between commutative ternary Leibniz algebras and certain Jordan pairs. In section A.3 we deal with the case $n \geq 4$. To do this, the notion of cover of slim sandwiches introduced by Kostrikin in 1959 is essential. Both proofs are based on results by Zelmanov regarding absolute zero divisors in Jordan pairs and local nilpotency of the associative enveloping algebras of certain Lie algebras (Zelmanov [Zel80]).

A.2. Álgebras de Leibniz ternarias conmutativas

A lo largo de esta sección todos los sistemas algebraicos se consideran de dimensión arbitraria sobre un cuerpo base de característica distinta de 2 y de 3.

Definición A.2.1. Un **álgebra de Leibniz ternaria conmutativa** es un espacio vectorial dotado de un producto triple abc que satisface las identidades:

$$(ALC1)\ xyz = yxz = xzy$$

$$(ALC2)\ xy(uvw) = (xyu)vw + u(xyv)w + uv(xyw)$$

Como el producto es totalmente simétrico, un subespacio $I \subseteq T$ de un álgebra de Leibniz conmutativa se dice **ideal** si verifica $TTI \subseteq I$. Un álgebra de Leibniz conmutativa con producto no nulo se dice **simple** si no tiene ideales no triviales.

Definición A.2.2. Un **par de Jordan** es un par de espacios vectoriales $J = (V^+, V^-)$ junto con dos aplicaciones trilineales $\{x_\sigma y_{-\sigma} z_\sigma\}$ de forma que se cumple:

$$(JP1)\ \{x_\sigma y_{-\sigma} z_\sigma\} = \{z_\sigma y_{-\sigma} x_\sigma\}$$

$$(JP2)\ \{x_\sigma y_{-\sigma}\{u_\sigma v_{-\sigma} w_\sigma\}\} = \{\{x_\sigma y_{-\sigma} u_\sigma\} v_{-\sigma} w_\sigma\} - \{u_\sigma\{y_{-\sigma} x_\sigma v\} w_\sigma\} + \{u_\sigma v_{-\sigma}\{x_\sigma y_{-\sigma} w_\sigma\}\}.$$

Nota A.2.3. En característica distinta de 2 y de 3, esta definición de par de Jordan es equivalente a decir que $J = (V^+, V^-)$ es un par de espacios vectoriales, junto con (Q_+, Q_-), par de aplicaciones cuadráticas $Q_\sigma : V^\sigma \mapsto Hom(V^{-\sigma}, V^\sigma)$ y (D_+, D_-), par de aplicaciones bilineales $D_\sigma : V^\sigma \times V^{-\sigma} \mapsto \mathrm{End}(V^\sigma)$ que verifican las siguientes identidades:

$$(JP1)'\ D_\sigma(x_\sigma, y_{-\sigma})Q_\sigma(x_\sigma) = Q_\sigma(x_\sigma)D_{-\sigma}(y_{-\sigma}, x_\sigma)$$

$$(JP2)'\ D_\sigma(Q_\sigma(x_\sigma)y_{-\sigma}, y_{-\sigma}) = D_\sigma(x_\sigma, Q_{-\sigma}(y_{-\sigma})x_\sigma)$$

$$(JP3)'\ Q_\sigma(Q_\sigma(x_\sigma)y_{-\sigma}) = Q_\sigma(x_\sigma)Q_{-\sigma}(y_{-\sigma})Q_\sigma(x_\sigma).$$

Además, se tiene que

$$\{x_\sigma y_{-\sigma} z_\sigma\} = D_\sigma(x_\sigma, y_{-\sigma})z_\sigma = Q_\sigma(x_\sigma, z_\sigma)y_{-\sigma},$$

donde $Q_\sigma(x_\sigma, z_\sigma)y_{-\sigma} = Q_\sigma(x_\sigma + z_\sigma)y_{-\sigma} - Q_\sigma(x_\sigma)y_{-\sigma} - Q_\sigma(z_\sigma)y_{-\sigma}$

Un par $(U^+, U^-) \subseteq (V^+, V^-)$ se dice *ideal* del par de Jordan si se verifica que

$$Q_\sigma(U^\sigma)V^{-\sigma} + Q_\sigma(V^\sigma)U^{-\sigma} + \{V^\sigma V_{-\sigma} U^\sigma\} \subseteq U^\sigma$$

o, equivalentemente, si

$$\{U^\sigma, V^{-\sigma}, V^\sigma\} + \{V^\sigma, U^{-\sigma}, V^\sigma\} + \{V^\sigma, V^{-\sigma}, U^\sigma\} \subseteq U^\sigma$$

usando los productos trilineales. Un par de Jordan se dice *simple* si sus operadores cuadráticos son no triviales y no posee ideales no triviales.

Lema A.2.4. *En toda álgebra de Leibniz ternaria T se satisfacen las siguientes identidades:*

$$
\begin{array}{rl}
(i) & xy(xxx) = 0 \\
(ii) & x(xyx)x = 0 \\
(iii) & xy(xxz) + xx(xyz) = 0 \\
(iv) & zy(yxx) + zx(xyy) = 0 \\
(v) & 3x(xxz)(xyy) + z(xxx)(xyy) = 0 \\
(vi) & 2x(xyz)(xxy) + y(xxy)(xxz) + z(xxy)(xxy) = 0 \\
(vii) & x(xyy)(xxz) + y(xxy)(xxz) = 0 \\
(viii) & xx(yy(xxz)) = 2y(xxy)(xxz) \\
(ix) & x(yyz)(xxx) + 2y(xxx)(xyz) + z(xxx)(xyy) = 0 \\
(x) & x(xxx)(yyz) = 0 \\
(xi) & 2y(xxx)(xyz) + z(xxx)(xyy) = 0 \\
(xii) & 3x(xxy)(xyz) + y(xxx)(xyz) = 0 \\
(xiii) & (xyx)z(xyx) + x(y(xzx)y)x = 0.
\end{array}
$$

Demostración.

Tomando en la identidad de derivación $y = v = w = x$, $u = y$ se obtiene

$$xx(yxx) = (xxy)xx + y(xxx)x + yx(xxx)$$

De la identidad (ALC1), se tiene que

$$0 = 2xy(xxx)$$

Como trabajamos en característica distinta de 2, concluimos que

$$xy(xxx) = 0 \tag{A.2.1}$$

Por otro lado, la identidad (ALC2) para $u = v = w = x$ nos da

$$xy(xxx) = (xyx)xx + x(xyx)x + x(xyx)x$$

Ahora, usando (1) y que el producto en T es totalmente simétrico, obtenemos

$$0 = 3x(xyx)x$$

Como trabajamos en característica distinta de 3, concluimos que

$$xx(xyx) = 0 \tag{A.2.2}$$

Linealizando (1) se obtiene que $2xy(xxz)+2xx(xyz) = 0$; por tanto, como trabajamos en caraterística distinta de 2, se tiene

$$xy(xxz) + xx(xyz) = 0 \tag{A.2.3}$$

Linealizando (2) se obtiene que $6zy(yxx)+6zx(xyy) = 0$; por tanto, como trabajamos en caraterística distinta de 2 y de 3, se tiene

$$zy(yxx) + zx(xyy) = 0 \tag{A.2.4}$$

Utilizamos la identidad (ALC2) y se tiene:

$$xz(xx(xyy)) = (xzx)x(xyy) + x(xzx)(xyy) + xx(xz(xyy))$$
$$xx(xz(xyy)) = (xxx)z(xyy) + x(xxz)(xyy) + xz(xx(xyy))$$

Sumando ambas expresiones, obtenemos:

$$3x(xxz)(xyy) + z(xxx)(xyy) = 0 \tag{A.2.5}$$

$$xx(yz(xxy)) = (xxy)z(xxy) + y(xxz)(xxy) + yz(xx(xxy))$$

$$yz(xx(xxy)) = (yzx)x(xxy) + x(yzx)(xxy) + xx(yz(xxy))$$

Sumando ambas expresiones, se tiene:

$$2x(xyz)(xxy) + y(xxy)(xxz) + z(xxy)(xxy) = 0 \tag{A.2.6}$$

$$xx(yy(xxz)) = (xxy)y(xxz) + y(xxy)(xxz) + yy(xx(xxz))$$

$$yy(xx(xxz)) = (yyx)x(xxz) + x(yyx)(xxz) + xx(yy(xxz))$$

Sumando y teniendo en cuenta que trabajamos en característica distinta de 2, obtenemos:

$$x(xyy)(xxz) + y(xxy)(xxz) = 0 \tag{A.2.7}$$

Como $xx(xxz) = 0$, también se tiene

$$xx(yy(xxz)) = 2y(xxy)(xxz) \tag{A.2.8}$$

$$xy(zy(xxx)) = (xyz)y(xxx) + z(xyy)(xxx) + zy(xy(xxx))$$

$$zy(xy(xxx)) = (zyx)y(xxx) + x(zyy)(xxx) + xy(zy(xxx))$$

Sumando las dos expresiones, se obtiene:

$$x(yyz)(xxx) + 2y(xxx)(xyz) + z(xxx)(xyy) = 0 \tag{A.2.9}$$

$$xx(xx(yyz)) = (xxx)x(yyz) + x(xxx)(yyz) + xx(xx(yyz))$$

Como trabajamos en característica distinta de 2, se tiene

$$x(xxx)(yyz) = 0 \tag{A.2.10}$$

De (A.2.9) y (A.2.10) se obtiene:

$$2y(xxx)(xyz) + z(xxx)(xyy) = 0 \tag{A.2.11}$$

$$xy(xx(xyz)) = (xyx)x(xyz) + x(xyx)(xyz) + xx(xy(xyz))$$

$$xx(xy(xyz)) = (xxx)y(xyz) + x(xxy)(xyz) + xy(xx(xyz))$$

Sumando, se obtiene:

$$3x(xxy)(xyz) + y(xxx)(xyz) = 0 \tag{A.2.12}$$

Ahora, usando las relaciones (A.2.5)-(A.2.12):

$$\begin{aligned}(xyx)z(xyx)+x(y(xzx)y)x &= z(xxy)(xxy)+2y(xxy)(xxz)\\ &= y(xxy)(xxz)-2x(xyz)(xxy)\\ &= -x(xyy)(xxz)-2x(xyz)(xxy)\\ &= \frac{1}{3}z(xxx)(xyy)-2x(xyz)(xxy)\\ &= \frac{1}{3}z(xxx)(xyy)+\frac{2}{3}y(xxx)(xyz)=0\end{aligned}$$

□

A partir de un álgebra de Leibniz ternaria conmutativa (T,xyz) y una copia isomorfa $\xi^+ : T \to T^-(x \mapsto x_-)$ de T se puede considerar el par de Jordan $J=(T^+,T^-)$, donde se toman $T^+=T$ y los operadores cuadráticos $Q_\sigma(x_\sigma)y_{-\sigma}=\sigma(xyx)_\sigma$ ($x\in T$ se identifica con $x_+\in T^+$). Los operadores $D_\sigma(x_\sigma,y_{-\sigma})$ viene dados por

$$D_\sigma(x_\sigma,y_{-\sigma})z_\sigma=\{x_\sigma y_{-\sigma}z_\sigma\}=2\sigma(xyz)_\sigma \tag{A.2.13}$$

El par de Jordan correspondiente a la elcción canónica $T^-=T$ y ξ^+ la aplicación identidad de T se denomina par de Jordan asociado a T. Se tiene también una forma de pasar de pares de Jordan a álgebas de Leibniz ternarias conmutativas. De hecho, es fácil probar el siguiente resultado:

Lema A.2.5. *Dada un álgebra de Leibniz ternaria conmutativa (T,xyz) sobre un cuerpo de característica distinta de 2 y de 3, dado un isomorfismo $\xi^+ : T \to T^-$ y definiendo $\xi^-=-(\xi^+)^{-1}$, el par $J=(T^+,T^-)$ con $T^+=T$ y con producto trilineal definido como en (A.2.13) es un par de Jordan y los isomorfismos $\xi^\sigma : T^\sigma \to T^{-\sigma}$ verifican*

$$\begin{aligned}\xi^\sigma\xi^{-\sigma}&=-Id_{-\sigma}\\ \xi^\sigma Q_\sigma(x_\sigma)&=Q_{-\sigma}(\xi^\sigma(x_\sigma))\xi^{-\sigma}\\ \xi^\sigma D_\sigma(x_\sigma,\xi^\sigma(y_\sigma))&=-D_\sigma(\xi^\sigma(y_\sigma),x_\sigma)\xi^\sigma\end{aligned} \tag{A.2.14}$$

Además, la simplicidad de ambos sistemas, T y $J=(V^+,V^-)$, es equivalente.

Recíprocamente, dado un par de Jordan $J=(V^+,V^-)$ junto con un par de isomorfismos $\xi^\sigma : V^\sigma \to V^{-\sigma}$ que verifican las identidades (A.2.14), se tiene que el subespacio

$T = V^+$ con el producto trilineal

$$2xyz = D_+(x, \xi^+(y))z \tag{A.2.15}$$

en un álgebra de Leibniz ternaria conmutativa.

Demostración. En primer lugar, notamos que $\{x_\sigma, y_{-\sigma}, z_\sigma\} = 2\sigma(xyz)_\sigma$:

$$\begin{aligned}
\{x_\sigma, y_{-\sigma}, z_\sigma\} &= Q_\sigma(x_\sigma + z_\sigma)y_{-\sigma} - Q_\sigma(x_\sigma)y_{-\sigma} - Q_\sigma(z_\sigma)y_{-\sigma} \\
&= \sigma((x+z)y(x+z))_\sigma - \sigma(xyx)_\sigma - \sigma(zyz)_\sigma \\
&= \sigma((xyx)_\sigma + (zyx)_\sigma + (xyz)_\sigma + (zyz)_\sigma) - \sigma(xyx)_\sigma - \sigma(zyz)_\sigma \\
&= \sigma((zyx)_\sigma + (xyz)_\sigma) = \sigma((xyz)_\sigma + (xyz)_\sigma) = 2\sigma(xyz)_\sigma
\end{aligned}$$

Para ver que (T^+, T^-) es par de Jordan comprobamos las identidades:

(JP1) $\{x_\sigma, y_{-\sigma}, Q_\sigma(x_\sigma)z_{-\sigma}\} = Q_\sigma(x_\sigma)\{y_{-\sigma}x_\sigma z_{-\sigma}\}$:

$$\begin{aligned}
\{x_\sigma, y_{-\sigma}, Q_\sigma(x_\sigma)z_{-\sigma}\} &= \{x_\sigma, y_{-\sigma}, \sigma(xzx)_\sigma\} \\
&= 2\sigma(xy(\sigma xzx))_\sigma \\
&= 2(xy(xzx))_\sigma \\
Q_\sigma(x_\sigma)\{y_{-\sigma}x_\sigma z_{-\sigma}\} &= Q_\sigma(x_\sigma)(-2\sigma(yxz)_{-\sigma}) \\
&= -2\sigma\sigma(x(yxz)x)_\sigma \\
&= -2(x(yxz)x)_\sigma
\end{aligned}$$

Del lema A.2.4 se tiene la igualdad de las dos expresiones.

(JP2) $\{Q_\sigma(x_\sigma)y_{-\sigma}, y_{-\sigma}, z_\sigma\} = \{x_\sigma, Q_{-\sigma}(y_{-\sigma})x_\sigma, z_\sigma\}$:

$$\begin{aligned}
\{Q_\sigma(x_\sigma)y_{-\sigma}, y_{-\sigma}, z_\sigma\} &= \{\sigma(xyx)_\sigma, y_{-\sigma}, z_\sigma\} \\
&= 2\sigma^2((xyx)yz)_\sigma \\
&= 2((xyx)yz)_\sigma \\
\{x_\sigma, Q_{-\sigma}(y_{-\sigma})x_\sigma, z_\sigma\} &= \{x_\sigma, -\sigma(yxy)_{-\sigma}, z_\sigma\} \\
&= -2\sigma^2(x(yxy)z)_\sigma \\
&= -2(x(yxy)z)_\sigma
\end{aligned}$$

La igualdad de las dos expresiones se sigue del lema A.2.4.

(JP3) $Q_\sigma(Q_\sigma(x_\sigma)y_{-\sigma}) = Q_\sigma(x_\sigma)Q_{-\sigma}(y_{-\sigma})Q_\sigma(x_\sigma)$:

$$\begin{aligned}
Q_\sigma(Q_\sigma(x_\sigma)y_{-\sigma})z_{-\sigma} &= Q_\sigma(\sigma(xyx)_\sigma)z_{-\sigma}\\
&= \sigma((xyx)z(xyx))_\sigma\\
Q_\sigma(x_\sigma)Q_{-\sigma}(y_{-\sigma})Q_\sigma(x_\sigma)z_{-\sigma} &= Q_\sigma(x_\sigma)Q_{-\sigma}(y_{-\sigma})(\sigma(xzx)_\sigma)\\
&= Q_\sigma(x_\sigma)(-\sigma y(xzx)y)_{-\sigma}\\
&= -\sigma(x(y(xzx)y)x)_\sigma
\end{aligned}$$

Nuevamente, usando el lema A.2.4, se tiene la igualdad.

Comprobamos que se cumplen las identidades (A.2.14) verificadas por los isomorfismos ξ^σ. La primera identidad se tiene claramente:

$$\begin{aligned}
\xi^+\xi^-(x_-) = -\xi^+(\xi^+)^{-1}(x_-) = -x_- = -Id_-(x_-)\\
\xi^-\xi^+(x_+) = -(\xi^+)^{-1}\xi^+(x_+) = -x_+ = -Id_+(x_+).
\end{aligned}$$

Para ver las demás identidades se consideran dos casos: $\sigma = +$ y $\sigma = -$:

- $\xi^+Q_+(x_+) = Q_-(\xi^+(x_+))\xi^-$:

$$\begin{aligned}
\xi^+Q_+(x_+)y_- = \xi^+(xyx)_+ = (xyx)_-\\
Q_-(\xi^+(x_+))\xi^-(y_-) = -Q_-(x_-)y_- = (xyx)_-
\end{aligned}$$

- $\xi^+D^+(x_+,\xi^+(y_+)) = -D_-(\xi^+(y_+),x_+)\xi^+$:

$$\begin{aligned}
\xi^+D^+(x_+,\xi^+(y_+))z_+ = \xi^+D_+(x_+,y_-)z_+ = 2\xi^+(xyz)_+ = 2(xyz)_-\\
-D_-(\xi^+(y_+),x_+)\xi^+(z_+) = -D_-(y_-,x_+)z_- = 2(yxz)_-
\end{aligned}$$

- $\xi^-Q_-(x_-) = Q_+(\xi^-(x_-))\xi^+$:

$$\begin{aligned}
\xi^-Q_-(x_-)y_+ &= -\xi^-((\xi^+)^{-1}(x_-)y_+(\xi^+)^{-1}(x_-))_-\\
&= (\xi^+)^{-1}(\xi^-(x_-)y_+\xi^-(x_-))_-\\
Q_+(\xi^-(x_-))\xi^+y_+ &= (\xi^-(x_-)y_+\xi^-(x_-))_+
\end{aligned}$$

- $\xi^-D^-(x_-,\xi^-(y_-)) = -D+-(\xi^-(y_-),x_-)\xi^-$:

$$\xi^-D^-(x_-,\xi^-(y_-))z_- = -2(\xi^+)^{-1}((\xi^+)^{-1}(x_-)\xi^-(y_-)(\xi^+)^{-1}(z_-))_-$$

$$
\begin{aligned}
&= -2(\xi^+)^{-1}\xi^+(((\xi^+)^{-1}(x_-)\xi^-(y_-)(\xi^+)^{-1}(z_-))_+ \\
&= 2(\xi^-(x_-)\xi^-(y_-)\xi^-(z_-))_+ \\
-D + -(\xi^-(y_-), x_-)\xi^-(z_-) &= -2(\xi^-(y_-)(\xi^+)^{-1}(x_-)\xi^-(z_-))_+ \\
&= 2(\xi^-(y_-)\xi^-(x_-)\xi^-(z_-))_+
\end{aligned}
$$

La segunda y la cuarta igualdades se tienen por la conmutatividad del álgebra de Leibniz ternaria.

Comprobamos ahora que si T es simple, entonces el par $J = (T, T)$ es simple. Observar que $\{T^\sigma T^{-\sigma} I^\sigma\} \subseteq Q_\sigma(T^\sigma)I^{-\sigma} \subseteq I^\sigma$.

Ahora, para cualquier ideal (I^+, I^-) de J se tiene que los subespacios I^σ, $\sigma = \pm$, son ideales de T. En efecto, de la definición de ideal de un par de Jordan, se tiene que si $x_\sigma \in I^\sigma$, entonces para cualesquiera $y, z \in T$ $\{x_\sigma y_{-\sigma} z_\sigma\} = 2\sigma(xyz)_\sigma \in I^\sigma$. Como estamos en característica distinta de 2, se tiene que $(xyz)_\sigma \in I^\sigma$ $\forall y, z \in T$, luego $I^+ \trianglelefteq T^+$. Como T es simple, se tiene que o bien $I^\sigma = 0$ o bien $I^\sigma = T^\sigma$, lo que implicaría que $(TTT)^{-\sigma} = \{T^{-\sigma}, T^\sigma, T^{-\sigma}\} = \{T^{-\sigma}, I^\sigma, T^{-\sigma}\} \subseteq I^{-\sigma}$. Como T es simple, $T = (TTT) = (TTT)^{-\sigma}$, luego $I^{-\sigma} = T$ en el caso $T^\sigma = T$. Por tanto, $(I^+, I^-) = (0, 0)$ o bien $(I^+, I^-) = (T^+, T^-)$, es decir (T^+, T^-) es simple.

Recíprocamente, si $J = (T, T)$ es simple e I es un ideal de T, el par (I, I) es un ideal de J, ya que $Q_\sigma(I^\sigma)T^{-\sigma} + Q_\sigma(T^\sigma)I^{-\sigma} + \{T^\sigma T_{-\sigma} I^\sigma\} \subseteq I^\sigma T^{-\sigma} T^\sigma + T^\sigma I^{-\sigma} T^\sigma + T^\sigma T^{-\sigma} I^\sigma \subseteq I^\sigma$, luego $(I, I) = (0, 0)$ ó (T, T), de donde $I = 0$ ó $I = T$. Por tanto, T es simple.

Comprobamos ahora la construcción (A.2.15) de álgebra de Leibniz ternaria conmutativa a partir de un par de Jordan:

- El producto es conmutativo:

$$
\begin{aligned}
2yxz &=^{(A.2.15)} D_+(y, \xi^+(x))z =^{(A.2.14)} \xi^- D_-(\xi^+(x), y)\xi^+(z) \\
&=^{A.2.2} \xi^- Q_-(\xi_+(x), \xi^+(z))y =^{A.2.14} Q_+(x, z)\xi^+(y) \\
&=^{(A.2.2)} D_+(x, \xi^+(y))z =^{(A.2.15)} 2xyz
\end{aligned}
$$

$$2zyx =^{(A.2.15)} \{x\xi^+(y)z\} =^{(A.2.2)} \{z\xi^+(y)x\} =^{(A.2.15)} 2xyz$$

Se verifica la identidad de Leibniz:

$$\begin{aligned} 4xy(uvw) &=^{A.2.15} \{x\xi^+(y)\{u\xi^+(v)w\}\} =^{(A.2.2)} \{\{x\xi^+(y)u\}\xi(v)w\} \\ &- \{u\{x\xi^+(y)\xi(v)\}w\} + \{u\xi(v)\{x\xi^+(y)w\}w\} \\ &=^{A.2.15} 4((xyu)vw + u(xyv)w + uv(xyw)), \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} -\{u\{\xi^+(y)x\xi^+(v)\}w\} &=^{A.2.15} -\{uD_-(\xi^+(y), x)\xi^+(v)w\} \\ &=^{A.2.14} \{u\xi^+D_+(x, \xi^+(y))(\xi^+)^{-1}\xi^+(v)w\} \\ &= \{u\xi^+D_+(x, \xi^+(y))vw\} =^{A.2.15} \{u\xi^+(xyv)_+w\} \\ &=^{A.2.15} 2u(xyv)w. \end{aligned}$$

□

En [Zel80], Zelmanov demuestra que los pares de Jordan simples en característica distinta de 2 *y de* 3 *no tienen divisores de cero absolutos.*

Definición A.2.6. Un elemento $x_\sigma \in V^\sigma$ de un par de Jordan $J = (V^+, V^-)$ se dice **divisor de cero absoluto de** J si cumple que $Q_\sigma(x_\sigma) = 0$.

Como $Q_\sigma(x_\sigma)(y_{-\sigma}) = \frac{1}{2}\{x_\sigma y_{-\sigma} x_\sigma\}_\sigma$*, el elemento* $x_\sigma \in T^\sigma$ *es divisor de cero si y solo si para todo* $y_{-\sigma} \in V^{-\sigma}$ *se tiene* $\{x_\sigma y_{-\sigma} x_\sigma\} = 0$*.*

En nuestro caso, si $J = (T, T^-)$ *es el par de Jordan asociado a un álgebra de Leibniz ternaria conmutativa* (T, xyz)*, tenemos que para cualquier* $x \in T$ *el elemento* $\{x_\sigma x_{-\sigma} x_\sigma\}$ *es un divisor de cero absoluto:*

Lema A.2.7. *Si* $J = (T, T^-)$ *es el par de Jordan asociado a un álgebra de Leibniz ternaria conmutativa* (T, xyz)*, para cualquier* $x \in T$ *el elemento* $\{x_\sigma x_{-\sigma} x_\sigma\}$ *es un divisor de cero absoluto.*

Demostración. Usando el lema A.2.4 se tiene que:

$$Q(\{x^\sigma, x^{-\sigma}, x^\sigma\})y^{-\sigma} = Q(2\sigma(xxx)_\sigma)y^{-\sigma}$$

$$= 2\sigma^2((xxx)y(xxx))_\sigma = -2(x(x(xyx)x)x) = 0$$

□

Como consecuencia de los lemas anteriores, se obtiene el siguiente resultado:

Corolario A.2.8. *Sobre un cuerpo de característica distinta de* 2 *y de* 3*, cualquier par de Jordan* $J = (V^+, V^-)$ *dotado de un par de isomorfismos lineales* $\xi^\sigma : V^\sigma \to V^{-\sigma}$ *que verifican las identidades (A.2.14) y* $dim(V^+) \geq 1$ *tiene divisores de cero no nulos. En particular, no existen pares de Jordan simples de este tipo.*

Ahora podemos probar fácilmente el teorema (A.1.2) en el caso $n = 3$*:*

Teorema A.2.9. *Sobre cuerpos de característica distinta de* 2 *y de* 3 *y dimensión arbitraria no existen álgebras de Leibniz ternarias conmutativas simples.*

Demostración. Si (T, xyz) es un álgebra de Leibniz ternaria conmutativa simple, entonces su par de Jordan asociado $J = (T^+, T^-)$ es simple. Por el lema (A.2.7) se tiene que $(xxx)_\sigma$ es un divisor de cero absoluto en J para cada $x \in T$ y, por tanto, $xxx = 0$ para todo $x \in T$ de acuerdo con Zelmanov ([Zel80, corolario en Seccion 4]). Esto implica, por la conmutatividad del álgebra de Leibniz y la característica del cuerpo, que $xyz = 0$ para todo $x, y, z \in T$, lo que contradice la simplicidad de T. □

A.3. Álgebras de Leibniz n-arias conmutativas ($n \geq 4$)

A lo largo de esta sección, todos los sistemas algebraicos se asumen de dimensión arbitraria.

Definición A.3.1. Un **álgebra de Leibniz n-aria conmutativa** es un espacio vectorial A con un producto n-ario $[a_1, \ldots, a_n]$ que satisface las identidades

$$(ALCn1)[[a_1, \ldots, a_n], b_2, \ldots, b_n] = \sum_{i=1}^{n} [a_1, \ldots, [a_i, b_2, \ldots, b_n], \ldots, a_n]] \qquad \text{(A.3.1)}$$

$$(ALCn2)[a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n] = [a_1, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_n], i = 1, \ldots, n$$

Si A es un álgebra de Leibniz n-aria, una aplicación $D \in \mathrm{End}(A)$ se dice *derivación de A* si satisface

$$D([a_1,\ldots,a_n]) = \sum_{i=1}^{n}[a_1,\ldots,D(a_i),\ldots,a_n] \tag{A.3.2}$$

Para cualesquiera $a_1,\ldots,a_{n-1} \in A$, los operadores $L(a_1,\ldots,a_{n-1}) \in \mathrm{End}(A)$ definidos por

$$L(a_1,\ldots,a_{n-1})(a) = [a_1,\ldots,a_{n-1},a] \tag{A.3.3}$$

son derivaciones de A, debido a (A.3.1). Estas derivaciones se dicen *derivaciones internas de A*. Además, como A es conmutativa, se cumple

$$\begin{aligned}
&[L(a_1,\ldots,a_{n-1}),L(b_1,\ldots,b_{n-1})]\\
&\quad = L(a_1,\ldots,a_{n-1})L(b_1,\ldots,b_{n-1}) - L(b_1,\ldots,b_{n-1})L(a_1,\ldots,a_{n-1})\\
&\quad = \sum_{i=1}^{n-1} L(b_1,\ldots,b_{i-1},L(a_1,\ldots,a_{n-1})(b_i),b_{i+1},\ldots,b_{n-1})
\end{aligned}$$

Por tanto, el subespacio vectorial generado por las derivaciones internas,

$$Inder(A) = span\langle L(a_1,\ldots,a_{n-1}) \mid x_i \in A\rangle$$

es una subálgebra de Lie del álgebra de Lie $gl(A) = \mathrm{End}(A)^-$, llamada *álgebra de Lie de las derivaciones internas de A*.

Un álgebra de Leibniz n-aria conmutativa A se dice *simple* si el producto n-ario es no nulo y A no contiene ideales no triviales, esto es, subespacios $I \neq 0, A$ tales que

$$[I,A,\ldots,A] + [A,I,\ldots,A] + \cdots + [A,A,\ldots,I] \subseteq I.$$

Como A es conmutativa, la simplicidad es equivalente a la no existencia de subespacios $I \neq 0, A$ tales que $[A,A,\ldots,I] \subseteq I$.

En esta sección, A denotará un álgebra de Leibniz n-aria conmutativa con $n \geq 4$ de dimensión arbitraria y característica estrictamente mayor que n. El operador $L(a,\ldots,a)$ denotará la derivación interna $L(a_1,\ldots,a_{n-1})$ donde $a_i = a$ para todo $i = 1,\ldots,n-1$.

Lema A.3.2. *El álgebra de Lie de las derivaciones internas de un álgebra de Leibniz n-aria conmutativa A está generada por el conjunto $\{L(a,\ldots,a) \mid a \in A\}$.*

Demostración. Para cualquier $\lambda \in F$, si $b = x_1 + \lambda x_2$ tenemos que

$$\begin{aligned} L(b,\ldots,b) &= L(x_1+\lambda x_2,\ldots,x_1+\lambda x_2) \\ &= L(x_1,\ldots,x_1) + \binom{n-1}{1}\lambda L(x_1,\ldots,x_1,x_2) + \cdots + \binom{n-1}{n-1}\lambda^{n-1}L(x_2,\ldots,x_2) \end{aligned}$$

luego

$$L(b,\ldots,b) = (1,\lambda,\ldots,\lambda^{n-1}) \begin{pmatrix} L(x_1,\ldots,x_1) \\ L(x_1,\ldots,x_1,x_2)\binom{n-1}{1} \\ \vdots \\ L(x_2,\ldots,x_2)\binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix} \tag{A.3.4}$$

Como trabajamos en característica estrictamente mayor que n, podemos tomar $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in F$ escalares distintos y, haciendo $b_i = x_1 + \lambda_i x_2$, de (A.3.4) llegamos a la igualdad

$$\begin{pmatrix} L(b_1,\ldots,b_1) \\ \vdots \\ L(b_n,\ldots,b_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(x_1,\ldots,x_1) \\ L(x_1,\ldots,x_1,x_2)\binom{n-1}{1} \\ \vdots \\ L(x_2,\ldots,x_2)\binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix}$$

Observamos que la matriz $n \times n$ que relaciona las derivaciones internas es una matriz de Van der Monde; por tanto, podemos escribir la derivación $(n-1)L(x_1,\ldots,x_1,x_2)$ como combinación lineal de derivaciones $L(b_i,\ldots,b_i)$, $i = 1,\ldots,n$.

Repitiendo el proceso con el operador $L(x_1+\lambda x_3,\ldots,x_1+\lambda x_3,x_2)$, se tiene que $(n-1)(n-2)L(x_1,\ldots,x_2,x_3)$ es combinación lineal de un número finito de operadores de la forma $L(x,\ldots,x)$. Si iteramos el proceso $(n-1)$ veces, llegamos a que $(n-1)!L(x_1,\ldots,x_{n-1})$ está en *span*$\langle L(x,\ldots,x)\rangle$, lo que prueba el resultado.

□

El concepto de 1-sandwich introducido por Kostrikin en 1959 permite anunciar resultados acerca de nilpotencia local en álgebras asociativas.

Definición A.3.3 (Kostrikin)**.** Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ y $(\mathfrak{U}, xy)$ un álgebra envolvente asociativa de $\mathfrak{L}$, un 1**-sandwich** es una igualdad $c\mathfrak{L}c = 0$ en $\mathfrak{U}$ con $c^2 = 0$. El elemento c se dice **tapa del** 1**-sandwich**.

Si se define $C_1(\mathfrak{L},\mathfrak{A}) = \{c \in \mathfrak{L} \mid c^2 = 0,\ c\mathfrak{L}c = 0\}$, el conjunto de todas las *tapas de grosor* 1, del trabajo de Zelmanov ([Zel80]) se tiene el siguiente corolario:

Corolario A.3.4 (Zelmanov)**.** *Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie sobre un cuerpo de característica distinta de* 2 *y de* 3 *y sea $\mathfrak{U}$ un álgebra envolvente asociativa de $\mathfrak{L}$. Si $\mathfrak{U}$ está generada por el conjunto $C_1(\mathfrak{L},\mathfrak{U})$. Entonces $\mathfrak{U}$ es localmente nilpotente.*

Nuestro objetivo ahora es probar que las álgebras envolventes asociativas

$$\mathfrak{U}_{Inder(A)} = \text{álg}_{\text{asoc}}\langle\{L(a_1,\dots,a_{n-1}) \mid a_1,\dots,a_{n-1} \in A\}\rangle$$

para las álgebras de Lie de derivaciones internas de álgebras de Leibniz n-arias conmutativas son localmente nilpotentes. Este hecho será fundamental para concluir la no existencia de álgebras de Leibniz n-arias conmutativas.

Lema A.3.5. *En un álgebra de Leibniz n-aria conmutativa A se satisfacen las siguientes identidades:*

(i) $L(a,\dots,a)^2 = 0$

(ii) $L(a,\dots,a)L(a,\dots,b) = 0$

(ii)' $L(a,\dots,a)L(b_1,\dots,b_{n-1})L(a,\dots,a) = 0$

Demostración. La igualdad (i) se sigue de forma fácil de la definición (A.3.1):

$$\begin{aligned} L(a,\dots,a)L(a,\dots,a)(b) &= [a,\dots,a,[a,\dots,a,b]] \\ &= (n-1)[[a,\dots,a],a,\dots,a,b] + [[a,\dots,a,b],a,\dots,a] \end{aligned}$$

Luego

$$0 = (n-1)[[a,\dots,a],a,\dots,a,b] = (n-1)n[[a,\dots,a,b],a,\dots,a]$$

y como trabajamos en característica estrictamente mayor que n, se tiene que

$$[[a,\dots,a,b],a,\dots,a] = 0$$

Para probar la identidad (ii)', observamos que, como

$$L(a,\dots,a)L(b_1,\dots,b_{n-1})L(a,\dots,a)(c) = [a,\dots,a,[b_1,\dots,b_{n-1},[a,\dots,a,c]]]$$

$$= (n-1)[a,\dots,a,[[b_1,\dots,b_{n-1},a],a,\dots,a,c]] \\ + [a,\dots,a,[[b_1,\dots,b_{n-1},c],a,\dots,a]],$$

usando (i) para anular el segundo sumando, basta con probar (ii). Por tanto, usando la definición (A.3.1), tenemos:

$$\begin{aligned} [a,\dots,a,[a,\dots,a,b,c]] &= (n-2)[[a,\dots,a],a,\dots,a,b,c] \\ &+ [[a,\dots,a,b],a,\dots,a,c] + [[a,\dots,a,c],a,\dots,a,b] \end{aligned} \tag{A.3.5}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} [[a,\dots,a,b],a,\dots,a,c] =&(n-1)[[a,\dots,a,c],a,\dots,a,b] \\ &+ [[a,\dots,a,b,c],a,\dots,a] \end{aligned} \tag{A.3.6}$$

y también

$$\begin{aligned} [[a,\dots,a,c],a,\dots,a,b] =&(n-1)[[a,\dots,a,b],a,\dots,a,c] \\ &+ [[a,\dots,a,b,c],a,\dots,a] \end{aligned} \tag{A.3.7}$$

Sustituyendo (A.3.6) en (A.3.5) obtenemos que

$$\begin{aligned} [a,\dots,a,[a,\dots,a,b,c]] =&(n-2)[[a,\dots,a],a,\dots,a,b,c] \\ &+ n[[a,\dots,a,c],a,\dots,a,b] + [[a,\dots,a,b,c],a,\dots,a] \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$(n-2)[[a,\dots,a],a,\dots,a,b,c] + n[[a,\dots,a,c],a,\dots,a,b] = 0. \tag{A.3.8}$$

Y, si sustituimos (A.3.7) en (A.3.5), tenemos que

$$\begin{aligned} [a,\dots,a,[a,\dots,a,b,c]] =&(n-2)[[a,\dots,a],a,\dots,a,b,c] \\ &+ n[[a,\dots,a,b],a,\dots,a,c] + [[a,\dots,a,b,c],a,\dots,a], \end{aligned}$$

de donde

$$(n-2)[[a,\dots,a],a,\dots,a,b,c] + n[[a,\dots,a,b],a,\dots,a,c] = 0 \tag{A.3.9}$$

Comparando las expresiones (A.3.8) y (A.3.9), como la característica es estrictamente mayor que n, llegamos a que

$$[[a,\dots,a,c],a,\dots,a,b] = [[a,\dots,a,b],a,\dots,a,c] \tag{A.3.10}$$

Ahora, usando (A.3.8) y (A.3.10), tenemos que

$$\begin{aligned}
[a,\dots,a,[a,\dots,a,b,c]] =& (n-2)[[a,\dots,a],a,\dots,a,b,c] \\
&+ 2[[a,\dots,a,c],a,\dots,a,b] \\
=& \left((n-2) + \frac{-2(n-2)}{n}\right)[[a,\dots,a],a,\dots,a,b,c] \\
=& \frac{n(n-2)-2(n-2)}{n} n[[a,\dots,a,b,c],a,\dots,a] \\
=& (n-2)^2[a,\dots,a,[a,\dots,a,b,c]]
\end{aligned}$$

Como trabajamos en característica estrictamente mayor que n, se tiene que

$$[a,\dots,a,[a,\dots,a,b,c]] = 0,$$

con lo que queda probado el resultado.

□

El lema anterior prueba que $L(a,\dots,a)$ es una tapa de 1-sandwich para el álgebra de Lie $Inder(A)$. Como por el lema (A.3.2) estos operadores generan el álgebra envolvente asociativa $\mathfrak{U}_{Inder(A)}$, entonces $\mathfrak{U}_{Inder(A)}$ es localmente nilpotente. Ahora podemos probar el teorema (A.1.2) en el caso $n \geq 4$:

Teorema A.3.6. *Sobre cuerpos de característica cero o mayor que n ($n \geq 4$) no existen álgebras de Leibniz conmutativas simples.*

Demostración. Sea A álgebra de Leibniz comnmutativa de dimensión arbitraria simple. Como $[A,\dots,A] \neq 0$, se tiene que $A = [A,\dots,A]$. Dado un elemento $0 \neq a \in A$, consideramos el ideal I que genera. Es claro que I está formado por todas las combinaciones lineales posibles de $[A,\dots,[A,\dots,[A,\dots,a]]]$ de longitud finita.

Es fácil ver que $\{a \mid [A,\dots,A,a] = 0\}$ es un ideal de A. Por tanto, como A es simple, debe ser $\{0\}$, pues de otro modo $[A,\dots,A]$ sería cero. Por tanto, $I \neq 0$, luego $I = A$.

Ahora bien, $a \in A = I$, luego a puede escribirse como una combinación lineal finita

$$a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [x_1^{(i)}, \ldots, [\ldots, x_{n_i}^{(i)}, a]].$$

Llamamos G al conjunto de todos los $x \in A$ que aparecen en la combinación lineal anterior (notar que se trata de un número finito) y consideramos el álgebra $alg_{asoc}\langle L(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mid x_1, \ldots, x_{n-1} \in G\rangle$, que claramente es finitamente generada (pues G es finito), luego será nilpotente por la observación previa a este teorema. Así pues, al sustituir reiteradamente $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [x_1^{(i)}, \ldots, [\ldots, x_{n_i}^{(i)}, a]]$ se tiene que $a = 0$, lo que contradice la elección inicial de a.

Por tanto, es imposible que A sea simple. $\square$

A.4. En breve / Summarizing

A.4.1. En breve

En este capítulo se ha extendido a característica arbitraria el resultado dado por Pojidaev en [Poj03] que establece la no existencia de álgebras de Leibniz n-arias conmutativas simples. Para ello se han usado resultados acerca de divisores de cero en pares de Jordan y nilpotencia local de envolventes asociativas de ciertas álgebras de Lie dados por Zelmanov en [Zel80].

Los resultados que aparecen en este capítulo han sido recopilados en el artículo "Commutative n-Ary Leibniz Algebras ", que ha sido publicado en la revista "Communications in Algebra" [BMPI10b].

A.4.2. Summarizing

In this chapter we have extended to arbitrary characteristic the result given by Pojidaev in [Poj03] which establishes the non-existence of simple commutative n-ary Leibniz algebras. To do that, we used results from Zelmanov [Zel80] regarding absolute zero divisors in Jordan pairs and local nilpotency of associative envelopes of certain Lie algebras.

The results from this chapter were compiled in the paper "Commutative n-Ary Leibniz Algebras ', that was published in the journal "Communications in Algebra" [BMPI10b].

Conclusiones / Conclusions

Conclusiones

A lo largo de esta tesis se han presentado diversos resultados que suponen contribuciones muy interesantes a la teoría de álgebras no asociativas. Estos aportes aparecen de maneras muy variadas, todas ellas provechosas y enriquecedoras.

En el capítulo 1 se da una nueva interpretación a ciertas estructuras y resultados que aparecen en trabajos de Grishkov y Zavarnitsine [GZ06] y de Mikheev [Mik93] relacionados con la idea de Doro [Dor78] de construir lazos de Moufang a partir de grupos con trialdad. Esto permite una construcción del álgebra envolvente universal de las álgebras de Malcev diferente a la aproximación de Pérez-Izquierdo y Shestakov [PIS04] a través de la introducción de las álgebras de Hopf con trialdad, concepto que unifica los existentes de grupo con trialdad [GZ06] y álgebra de Lie con trialdad [Mik92].

En el capítulo 2 se da respuesta a una cuestión acerca de la rigidez de las álgebras envolventes universales de las álgebras de Malcev simples. Ya que un álgebra de Malcev simple es o bien un álgebras de Lie simple o bien isomorfa a los octoniones de traza cero y las envolventes de las álgebras de Lie se pueden cuantizar (dando lugar a la teoría de los grupos cuánticos), quedaba por estudiar el caso de los octoniones de traza cero. En este sentido, se ha probado que no existen deformaciones coasociativas no triviales de su envolvente universal.

En el capítulo 3 se presenta una aproximación computacional a una variedad de álgebras de Sabinin que generaliza las álgebras de Lie, Malcev y Bol a través de la búsqueda de identidades polinomiales que la definan. Las álgebras de Sabinin son objetos muy complejos, dado que en general tienen dos familias infinitas de operaciones. En algunos casos, *solo un número finito de estas operaciones es independiente, por lo que se puede tratar de hallar el conjunto de identidades que verifican y usarlas para definir la variedad. El uso de la teoría de representación de grupos simétricos demuestra ser una herramienta muy potente en este contexto, como vienen demostrando las series de artículos publicados por Henzel, Peresi y Bremner entre otros.*

En el capítulo 4 se abre una nueva vía hacia el estudio de los lazos formales y las álgebras de Sabinin a través de la definición de representaciones para estos objetos. Se profundiza en la definición categórica de representación escindida o split para cuasigrupos introducida por Smith [Smi92] y se extiende a la categoría de H-biálgebras. Usando la equivalencia entre las categorías de lazos formales, álgebras de Sabinin y biálgebras punteadas probada por Shestakov y Umirbaev [SU02] y Mostovoy y Pérez-Izquierdo [MPI10], se tiene la definición de módulos en las categorías equivalentes.

En el capítulo 5 se particulariza la teoría de representación introducida en el capítulo anterior al caso de lazos de Moufang y álgebras de Malcev. También se introduce una nueva definición de representación: los módulos relativos, con la que se pretende debilitar las condiciones que debe cumplir un módulo para estos objetos y así ampliar la colección de representaciones existente, generalizando así los resultados de Carlsson [Car76] y Elduque [Eld90].

En el capítulo 6 se da un paso más en la teoría de representación: se estudian los módulos para sistemas triples de Lie. Como los módulos para estas estructuras no son tan conocidos, se comienza a trabajar otros aspectos como la dimensión o la descipción en casos de dimsnsión 1. Se usa la relación que existe entre los módulos para sistemas triples de Lie simples y los módulos con involución para álgebras de Lie simples [HP02] para dar una descripción completa de los módulos para los sistemas triples de Lie que son álgebras de Lie simples. También se clasifican los módulos 1-dimensionales para sistemas triples de Lie simples y usando la fórmula de Weyl [Jac62] para la dimensión de los módulos para álgebras de Lie simples se obtiene la fórmula de la dimensión de los módulos para los sistemas triples de Lie obtenidos a partir de automorfismos de álgebras de Lie simples. Estos resultados son útiles para comprender un poco más la estructura de los sistemas triples de Lie y sus representaciones, lo que se traduce en una mejor aproximación a los fibrados vectoriales simétricos (de dimension finita) sobre espacios simétricos basados conexos y simplemente conexos (de dimensión finita) [BD09].

Finalmente, en el anexo A, se generaliza un trabajo existente en característica cero a característica arbitraria: el teorema de Pojidaev [Poj03] que afirma que para $n \geq 3$ *no existen álgebras de Leibniz* n*-arias conmutativas simples de dimensión finita (Elduque [Eld06] ya lo había probado para* $n = 3$*). En este capítulo cabe resaltar que existen diversas aproximaciones a las álgebras de Leibniz dadas por diferentes autores. Pojidaev usa técnicas de teoría de representación en su demostración, mientras que en este caso se sigue la idea de Elduque de utilizar la conexión existente entre álgebras de Leibniz y pares de Jordan, lo que conduce al trabajo de Zelmanov [Zel80].*

Debido al amplio espectro de temas, problemas y técnicas que aparecen en álgebra no asociativa solo se puede decir que queda mucho trabajo que hacer y que toda contribución a la teoría supone un avance. En una línea continuista con los temas que se han trabajado en esta tesis, cabe destacar en particular dos cuestiones: seguir desarrollando la teoría de módulos relativos para proporcionar herramientas de estudio de objetos tan importantes como los lazos formales y las álgebras de Sabinin y profundizar en la presentación de variedades de álgebras a través de conjuntos de identidades polinomiales.

La introducción del concepto de representación relativa permite un acercamiento a la teoría de representación de variedades de lazos y de álgebras para los cuales ni siquiera había definidos módulos. Esta aproximación categórica da, además, un tratamiento homogéneo que permite un estudio general de módulos, posibilitando también la particularización a variedades concretas. Tanto la profundización en el caso general como en las variedades más usuales sería de gran interés y utilidad. En particular, la generalización del estudio de módulos para lazos de Moufang y álgebras de Malcev a lazos de Bruck y sistemas triples de Lie (sus espacios tangentes asociados) parece ser el siguiente paso natural.

Respecto a las identidades polinomiales, en la sección 3.6 del capítulo 3 ya se han propuesto diversas cuestiones que pueden ser investigadas, como buscar todas las identidades que definen la variedad de álgebras tangentes a lazos monoasociativos, encontrar identidades especiales para esta variedad de álgebras o construir su álgebra envolvente universal. También puede ser útil estudiar las propiedades de las álgebras de Sabinin de grado d que se han introducido. Todos estos temas, entre otros, serán investigados en colaboración con el profesor M.R. Bremner gracias al contrato postdoctoral concedido a la autora por el Pacific Institute for Mathematical Sciences (PIMS) y el Departamento de Matemáticas *y Estadística de la Universidad de Saskatchewan.*

Conclusions

All along this thesis we have presented different results that are interesting contributions to the theory of nonassociative algebras. These contributions appear in different ways, all of them helpful and fruitful.

In appendix A we generalized a previous work in characteristic zero to arbitrary characteristic: the theorem by Pojidaev [Poj03] that asserts that for $n \geq 3$ *there not exist finite-dimensional simple commutative* n*-ary Leibniz algebras (Elduque [Eld06] proved the case* $n = 3$*). It is remarkable that there were approaches to Leibniz algebras from different authors. Pojidaev used representation theory in his proof, while in our work we followed the idea from Elduque of using the close relation between Leibniz algebras and Jordan pairs that leads to Zelmanov's work [Zel80].*

In chapter 1 we gave a new interpretation to certain structures and results of Grishkov and Zavarnitsine [GZ06] and Mikheev [Mik93] related to Doro's idea [Dor78] to obtain Moufang loops from groups with triality. This allows another construction of the universal enveloping algebra of a Malcev algebra different from that given by Pérez-Izquierdo and Shestakov [PIS04]. This new construction is obtained by introducting Hopf algebras with triality, a unifying concept for both groups with triality [GZ06] and Lie algebras with triality [Mik92].

In chapter 2 we answered a question about the rigidity fo the universal enveloping algebras of simple Malcev algebras. Since a simple Malcev algebra is either a simple Lie algebra or isomorphic to the traceless octonions and universal enveloping algebras for Lie algebras can be quantized (originating the theory of quantum groups), it lasted to study the latter case. We proved that there not exist nontrivial coassociative deformations of the universal enveloping algebra of the traceless octonions.

In chapter 3 we presented a computational approach to a variety of Sabinin algebras that generalize those of Lie, Malcev and Bol algebras based in the search of defining polynomial identities. Sabinin algebras are very complex objects because in general they have two infinite families of operations. In some cases, only a finite number of them are independent thus one can try to find the set of identities they verify and use them to define the *variety. The use of representation theory of the symmetric group shows up as a powerful tool as it appears in the series of papers by Henzel, Peresi and Bremner among others.*

In chapter 4 we opened up a new way to study formal loops and Sabinin algebras with the definition of representations for these objects. We investigated the categorical definition of split module for quasigroups introducted by Smith [Smi92] and extended it to H-bialgebras. By using the equivalence of categories of formal loops, Sabinin algebras and pointed bialgebras proved by Shestakov and Umirbaev [SU02] and Mostovoy and Pérez-Izquierdo [MPI10], we have the definition of modules in the equivalent categories.

In chapter5 we particularize the representation theory introduced in the previous chapter to the case of Moufang loops and Malcev algebras. We introduce a new definition of representations for these objects: relative modules, with which we weaken the conditions to be a module for these objects. This new definition allows an extension of the existing collection of representations, generalizing the works by Carlsson [Car76] and Elduque [Eld90].

In chapter 6 we step forward in the study of representation theory by investigating modules for Lie triple systems. Since modules for these structures are not very well known, we started by studying different aspects such as the dimension or the description of the modules of dimension 1. We used the relation between modules for simple Lie triple systems and modules with involution for simple Lie algebras [HP02] to give a complete description of the modules for Lie triple systems that are simple Lie algebras. We also classified 1-dimensional modules for simple Lie triple systems and using Weyl's dimension formula [Jac62] for modules of simple Lie algebras we derived a formula for the dimension of modules for Lie triple systems obtained from automorphisms of simple Lie algebras. These results are useful for a better understanding of Lie triple systems and their representations that translates into a better approximation to (finite dimensional) symmetric vector bundles over (finite dimensional) connected and simply connected based symmetric spaces [BD09].

Due to the wide range of topics, problems and techniques that appear in nonassociative algebra one only can say that there is still a lot of work to do and that each contribution to the theory means stepping forward. For a future work, following the topics that appear in this thesis, there are especially two main open problems: to continue with the development of relative representation theory to provide tools for the study of such important objects *as formal loops an Sabinin algebras and also to go further in the definition of varieties of algebras by means of polynomial identities.*

The introduction of relative representation allows an approach to representation theory of certain varieties of loops and algebras for which there were not any previous module definitions. Moreover, the categorical setting gives an homogeneous treatment that allows both a general study of modules and the possibility of particularization to certain varieties. Thus it turns out to be useful and interesting.

Regarding to polynomial identities, we proposed several questions in section 3.6 of chapter 3 that can be investigated: to seek all the identities defining the variety of tangent algebras to monoassociative loops, to find special identities for this variety of algebras or to contruct its universal enveloping algebra. It could also be interesting to study the properties of degree d Sabinin algebras defined in the same chapter. All these topics, among others, will be investigated by the author in collaboration with professor M.R. Bremner thanks to a postdoctoral fellow supported by the Pacific Institute for Mathematical Sciences (PIMS) and the Department of Mathematics and Statistics of the University of Saskatchewan.

Índice alfabético

Bibliografía

[Acz65] J. Aczél. *Quasigroups, nets, and nomograms.* Advances in Math., *1(fasc. 3):383–450 (1965), 1965.*

[AG00] *Maks A. Akivis and Vladislav V. Goldberg. Algebraic aspects of web geometry.* Comment. Math. Univ. Carolin., *41(2):205–236, 2000. Loops'99 (Prague).*

[AG06a] *Maks A. Akivis and Vladislav V. Goldberg. Local algebras of a differential quasigroup.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), *43(2):207–226 (electronic), 2006.*

[AG06b] *Maks A. Akivis and Vladislav V. Goldberg. Local algebras of a differential quasigroup.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), *43(2):207–226 (electronic), 2006.*

[Aki75] *M. A. Akivis. Closed G-structures on a differentiable manifold. In* Problems in geometry, Vol. 7 (Russian), *pages 69–79, 301. Akad. Nauk SSSR Vsesojuz. Inst. Naučn. i Tehn. Informacii, Moscow, 1975.*

[Aki76] *M. A. Akivis. The local algebras of a multidimensional three-web.* Sibirsk. Mat. Ž., *17(1):5–11, 237, 1976.*

[Alb48] *A. A. Albert. On the power-associativity of rings.* Summa Brasil. Math., *2(2):21–32, 1948.*

[AS89] *M. A. Akivis and A. M. Shelekhov. Fourth-order alternators of a local analytic loop and three-webs of multidimensional surfaces.* Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., *(4):12–16, 1989.*

[AS92] *Maks A. Akivis and Alexander M. Shelekhov.* Geometry and algebra of multidimensional three-webs, *volume 82 of* Mathematics and its Applications

(Soviet Series). *Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992. With an appendix by E. V. Ferapontov, Translated from the Russian by Vladislav V. Goldberg.*

[AS02] *Nicolás Andruskiewitsch and Hans-Jürgen Schneider. Pointed Hopf algebras. In* New directions in Hopf algebras*, volume 43 of* Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 1–68. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.*

[BD09] *Wolfgang Bertram and Manon Didry. Symmetric bundles and representations of Lie triple systems.* J. Gen. Lie Theory Appl.*, 3(4):261–284, 2009.*

[BDG00] *M. Beattie, S. Dăscălescu, and L. Grünenfelder. Constructing pointed Hopf algebras by Ore extensions.* J. Algebra*, 225(2):743–770, 2000.*

[Bec67] *Jonathan Mock Beck.* Triples, algebras and cohomology*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1967. Thesis (Ph.D.)–Columbia University.*

[Ber58] *Lipman Bers. Riemann surfaces.* New York University Lecture Notes*, 43(1):63–100, 1957–58.*

[Ber00] *Wolfgang Bertram.* The geometry of Jordan and Lie structures*, volume 1754 of* Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.*

[BH04] *Murray Bremner and Irvin Hentzel. Identities for algebras of matrices over the octonions.* J. Algebra*, 277(1):73–95, 2004.*

[Bla55] *Wilhelm Blaschke.* Einführung in die Geometrie der Waben*. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1955.*

[BM11] *M.R. Bremner and S. Madariaga. Polynomial identities for tangent algebras of monoassociative loops.* ArXiv e-prints*, nov 2011.*

[BMP11] *G. Benkart, S. Madariaga, and J.M. Pérez-Izquierdo. Hopf algebras with triality.* ArXiv e-prints*, jun 2011.*

[BMPI10a] *P Benito, S Madariaga, and J.M. Pérez-Izquierdo. Examples of modules for Lie triple systems.* Jordan Structures in Algebra and Analysis - Almería 2009, Proceedings of the Jordan Structures in Algebra and Analysis Meeting. Tribute to Amin El Kaidi for his 60th birthday*, 72:31–47, 2010.*

[BMPI10b] *Pilar Benito, S. Madariaga, and José M. Pérez-Izquierdo. Commutative n-ary Leibniz algebras.* Comm. Algebra*, 38(8):2843–2850, 2010.*

[BP07] *Murray R. Bremner and Luiz A. Peresi. Classification of trilinear operations.* Comm. Algebra*, 35(9):2932–2959, 2007.*

[BP09a] *Murray R. Bremner and Luiz A. Peresi. An application of lattice basis reduction to polynomial identities for algebraic structures.* Linear Algebra Appl.*, 430(2-3):642–659, 2009.*

[BP09b] *Murray R. Bremner and Luiz A. Peresi. Nonhomogeneous subalgebras of Lie and special Jordan superalgebras.* J. Algebra*, 322(6):2000–2026, 2009.*

[BP11] *Murray R. Bremner and Luiz A. Peresi. Special identities for quasi-Jordan algebras.* Comm. Algebra*, 39(7):2313–2337, 2011.*

[Bru58] *Richard Hubert Bruck.* A survey of binary systems*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge, Heft 20. Reihe: Gruppentheorie. Springer Verlag, Berlin, 1958.*

[Car] *Renate Carlsson. On the exceptional central simple non-Lie Mal′cev algebras.* Trans. Amer. Math. Soc.*, 244:173–184.*

[Car76] *Renate Carlsson. Malcev-Moduln.* J. Reine Angew. Math.*, 281:199–210, 1976.*

[Che82] *Shiing Shen Chern. Web geometry.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6(1):1–8, 1982.*

[Chi11] *Evgeny Chibrikov. On free Sabinin algebras.* Communications in Algebra*, 39(11):4014–4035, 2011.*

[Cli81] *Joseph M. Clifton. A simplification of the computation of the natural representation of the symmetric group S_n.* Proc. Amer. Math. Soc.*, 83(2):248–250, 1981.*

[CP] *Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley.* A guide to quantum groups*. Cambridge University Press. Corrected reprint of the 1994 original.*

[Dor78] *Stephen Doro. Simple Moufang loops.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 83(3):377–392, 1978.*

[Dri] *V. G. Drinfel′d. Quantum groups. pages 798–820.*

[DS95] *A. Dharwadker and J. D. H. Smith. Split extensions and representations of Moufang loops.* Comm. Algebra*, 23(11):4245–4255, 1995.*

[Eil48] *Samuel Eilenberg. Extensions of general algebras.* Ann. Soc. Polon. Math.*, 21:125–134, 1948.*

[Ein05] *Albert Einstein. Zur elektrodynamik bewegter koerper.* Ann. Physik*, 17(1):63–100, 1905.*

[Eld90] *Alberto Elduque. On Malcev modules.* Comm. Algebra*, 18(5):1551–1561, 1990.*

[Eld06] *Alberto Elduque. New simple Lie superalgebras in characteristic 3.* J. Algebra*, 296(1):196–233, 2006.*

[Fau80] *John R. Faulkner. Dynkin diagrams for Lie triple systems.* J. Algebra*, 62(2):384–392, 1980.*

[Fau85] *John R. Faulkner. Identity classification in triple systems.* J. Algebra*, 94(2):352–363, 1985.*

[Fed73] *A. S. Fedenko. Regular spaces with symmetries.* Mat. Zametki*, 14:113–120, 1973.*

[Fed77] *A. S. Fedenko.* Prostranstva s simmetriyami. *Izdat. Belorussk. Gos. Univ., Minsk, 1977.*

[FF72] *John R. Faulkner and Joseph C. Ferrar. On the structure of symplectic ternary algebras.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **75**=Indag. Math.*, 34:247–256, 1972.*

[FH91] *William Fulton and Joe Harris.* Representation theory*, volume 129 of* Graduate Texts in Mathematics. *Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.*

[FP87] *Eric M. Friedlander and Brian J. Parshall. Representations of mod p Lie algebras.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 17(1):129–132, 1987.*

[FP88] *Eric M. Friedlander and Brian J. Parshall. Modular representation theory of Lie algebras.* Amer. J. Math.*, 110(6):1055–1093, 1988.*

[Gaĭ57] *A. T. Gaĭnov. Identical relations for binary Lie rings.* Uspehi Mat. Nauk (N.S.)*, 12(3(75)):141–146, 1957.*

[GH05] *S. M. Gagola, III and J. I. Hall. Lagrange's theorem for Moufang loops.* Acta Sci. Math. (Szeged)*, 71(1-2):45–64, 2005.*

[Gla68] *George Glauberman. On loops of odd order. II.* J. Algebra*, 8:393–414, 1968.*

[Gri] *A. N. Griškov. An analogue of Levi's theorem for Malcev algebras.* Algebra i Logika*, 16(4):389–396, 493.*

[Gri86] *A. N. Grishkov. Binary-Lie algebras and alternative loops (russian), dr.sci. dissertation.* Minsk*, 271:A1152–A1155, 1986.*

[Gri03] *Alexander Grishkov. Lie algebras with triality.* J. Algebra*, 266(2):698–722, 2003.*

[GZ05] *Alexander N. Grishkov and Andrei V. Zavarnitsine. Lagrange's theorem for Moufang loops.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 139(1):41–57, 2005.*

[GZ06] *Alexander N. Grishkov and Andrei V. Zavarnitsine. Groups with triality.* J. Algebra Appl.*, 5(4):441–463, 2006.*

[GZ09] *Alexander N. Grishkov and Andrei V. Zavarnitsine. Sylow's theorem for Moufang loops.* J. Algebra*, 321(7):1813–1825, 2009.*

[Har61] *Bruno Harris. Cohomology of Lie triple systems and Lie algebras with involution.* Trans. Amer. Math. Soc.*, 98:148–162, 1961.*

[Hei25] *W. Heisenberg. über quantentheoretische umdeutung kinematischer und mechanischer beziehungen.* Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 33:879–893, 1925. 10.1007/BF01328377.*

[Hen79] *Irvin Roy Hentzel. Special Jordan identities.* Comm. Algebra*, 7(16):1759–1793, 1979.*

[Hod01] *Terrell L. Hodge. Lie triple systems, restricted Lie triple systems, and algebraic groups.* J. Algebra*, 244(2):533–580, 2001.*

[HP02] *Terrell L. Hodge and Brian J. Parshall. On the representation theory of Lie triple systems.* Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(11):4359–4391 (electronic), 2002.*

[HP11] *Irvin Roy Hentzel and Luiz A. Peresi. Special identities for Bol algebras. 2011.*

[HS86] *Karl H. Hofmann and Karl Strambach. Lie's fundamental theorems for local analytical loops.* Pacific J. Math.*, 123(2):301–327, 1986.*

[Hum78] *James E. Humphreys.* Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9 of* Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1978. Second printing, revised.*

[Jac62] *Nathan Jacobson.* Lie algebras*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 10. Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons), New York-London, 1962.*

[Jim] *Michio Jimbo. A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation.* Lett. Math. Phys.*, 10(1):63–69.*

[Kar72] *Hussein M. Karanda. On geometry of symmetric loops (russian), ph.d. dissertation.* Friendship of Nations University, Moskow*, 5(3):439–446, 1972.*

[Kas95] *Christian Kassel.* Quantum groups*, volume 155 of* Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.*

[Kik64] *Michihiko Kikkawa. On local loops in affine manifolds.* J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math.*, 28:199–207, 1964.*

[Kik75a] *Michihiko Kikkawa. Geometry of homogeneous Lie loops.* Hiroshima Math. J.*, 5(2):141–179, 1975.*

[Kik75b] *Michihiko Kikkawa. A note on subloops of a homogeneous Lie loop and subsystems of its Lie triple algebra.* Hiroshima Math. J., *5(3):439–446, 1975.*

[Kle93] *Felix Klein. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* Math. Ann., *43(1):63–100, 1893.*

[KM] *J. Klim and S. Majid. Hopf quasigroups and the algebraic 7-sphere.* J. Algebra, *323(11):3067–3110.*

[Kow74] *Oldřich Kowalski. Riemannian manifolds with general symmetries.* Math. Z., *136:137–150, 1974.*

[Kuz] *E. N. Kuz′min. Levi's theorem for Mal′cev algebras.* Algebra i Logika, *16(4):424–431, 493.*

[Kuz68] *E. N. Kuz′min. Mal′cev algebras and their representations.* Algebra i Logika, *7(4):48–69, 1968.*

[Kuz70] *E. N. Kuz'min. La relation entre les algèbres de Malcev et les boucles de Moufang analytiques.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, *271:A1152–A1155, 1970.*

[KW01] *Michael K. Kinyon and Alan Weinstein. Leibniz algebras, Courant algebroids, and multiplications on reductive homogeneous spaces.* Amer. J. Math., *123(3):525–550, 2001.*

[Led67] *A. J. Ledger. Espaces de Riemann symétriques généralisés.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, *264:A947–A948, 1967.*

[Lie74] *Sophus Lie. Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen.* Math. Ann., *8(2):215–303, 1874.*

[Lie80] *Sophus Lie. Theorie der Transformationsgruppen I.* Math. Ann., *16(4):441–528, 1880.*

[Lis52] *William G. Lister. A structure theory of Lie triple systems.* Trans. Amer. Math. Soc., *72:217–242, 1952.*

[Lob29] *Nikolai I. Lobachevsky. On the principles of geometry.* Kazan Messenger*, 28:199–207, 1829.*

[Lod93] *Jean-Louis Loday. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. In* R.C.P. 25, Vol. 44 (French) (Strasbourg, 1992)*, volume 1993/41 of* Prépubl. Inst. Rech. Math. Av.*, pages 127–151. Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1993.*

[Log93] *Evgeney K. Loginov. On linear representations of Moufang loops.* Comm. Algebra*, 21(7):2527–2536, 1993.*

[Loo69] *Ottmar Loos.* Symmetric spaces. I: General theory*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.*

[Loo75] *Ottmar Loos.* Jordan pairs*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 460. Springer-Verlag, Berlin, 1975.*

[Mal] *A. I. Mal′cev. Analytic loops.* Mat. Sb. N.S.*, 36(78):569–576.*

[Mal55] *A. I. Malcev. Analytic loops.* Mat. Sb. N.S.*, 36(78):569–576, 1955.*

[MH06] *F. Martín-Herce. Álgebras de Lie-Yamaguti y sistemas algebraicos no asociativos.* Tesis doctoral, Universidad de La Rioja*, 2006.*

[Mik92] *P. O. Mikheev. On the embedding of Mal′tsev algebras into Lie algebras.* Algebra i Logika*, 31(2):167–173, 221, 1992.*

[Mik93] *P. O. Mikheev. Groups that envelop Moufang loops.* Uspekhi Mat. Nauk*, 48(2(290)):191–192, 1993.*

[Mik96] *P. O. Mikheev. On a problem of Chern-Akivis-Shelekhov on hexagonal three-webs.* Aequationes Math.*, 51(1-2):1–11, 1996.*

[Min10] *Hermann Minkowski. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern.* Math. Ann.*, 68(4):472–525, 1910.*

[Mou35] *Ruth Moufang. Zur Struktur von Alternativkörpern.* Math. Ann.*, 110(1):416–430, 1935.*

[MPI10] *J. Mostovoy and J. M. Pérez-Izquierdo. Formal multiplications, bialgebras of distributions and nonassociative Lie theory.* Transform. Groups*, 15(3):625–653, 2010.*

[MPI12] *S. Madariaga and José M. Pérez-Izquierdo. Non-existence of coassociative quantized universal enveloping algebras of the traceless octonions.* Communications in Algebra*, 40(3):1009–1018, 2012.*

[MPIP01] *Patrick J. Morandi, José M. Pérez-Izquierdo, and S. Pumplün. On the tensor product of composition algebras.* J. Algebra*, 243(1):41–68, 2001.*

[Nag01] *Péter T. Nagy. Webs and curvature. In* Web theory and related topics (Toulouse, 1996)*, pages 48–91. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001.*

[PBPI12] *S. Madariaga P. Benito and J.M. Pérez-Izquierdo. Weyl's dimension formula for modules of simple inner Lie triple systems.* Journal of Algebra*, 359(0):104 – 119, 2012.*

[Phi09] *J. D. Phillips. The Moufang laws, global and local.* J. Algebra Appl.*, 8(4):477–492, 2009.*

[PI05] *José M. Pérez-Izquierdo. An envelope for Bol algebras.* J. Algebra*, 284(2):480–493, 2005.*

[PI07] *José M. Pérez-Izquierdo. Algebras, hyperalgebras, nonassociative bialgebras and loops.* Adv. Math.*, 208(2):834–876, 2007.*

[PIS04] *José M. Pérez-Izquierdo and Ivan P. Shestakov. An envelope for Malcev algebras.* J. Algebra*, 272(1):379–393, 2004.*

[Poj03] *Alexandre P. Pojidaev. Solvability of finite-dimensional n-ary commutative Leibniz algebras of characteristic 0.* Comm. Algebra*, 31(1):197–215, 2003.*

[Pro82] *Robert A. Proctor. Solution of two difficult combinatorial problems with linear algebra.* Amer. Math. Monthly*, 89(10):721–734, 1982.*

[Res] *N. Reshetikhin. Quantization of Lie bialgebras.* Internat. Math. Res. Notices*, (7):143–151.*

[Sab72a] L. V. Sabinin. *The geometry of loops.* Mat. Zametki, *12:605–616, 1972.*

[Sab72b] L. V. Sabinin. *On the equivalence of category of loops and the category of homogeneous spaces.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, *205:533–536, 1972.*

[Sab77] L. V. Sabinin. *Odules as a new approach to geometry with a connection.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, *233(5):800–803, 1977.*

[Sag61] Arthur A. Sagle. *Malcev algebras.* Trans. Amer. Math. Soc., *101:426–458, 1961.*

[Sch91] Friedrich Schur. *Zur Theorie der endlichen Transformationsgruppen.* Math. Ann., *38(2):263–286, 1891.*

[Sch95] *Richard D. Schafer.* An introduction to nonassociative algebras. *Dover Publications Inc., New York, 1995. Corrected reprint of the 1966 original.*

[Ser65] *Jean-Pierre Serre.* Lie algebras and Lie groups, *volume 1964 of* Lectures given at Harvard University. *W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965.*

[She89] *A. M. Shelekhov. Classification of multidimensional three-webs according to closure conditions. In* Problems in geometry, Vol. 21 (Russian), *Itogi Nauki i Tekhniki, pages 109–154, 216. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1989. Translated in J. Soviet Math.* **5***5 (1991), no. 6, 2140–2168.*

[She99] Ivan P. Shestakov. *Every Akivis algebra is linear.* Geom. Dedicata, *77(2):215–223, 1999.*

[SM82] *L. V. Sabinin and P. O. Mikheev. Analytic Bol loops. In* Webs and quasigroups, *pages 102–109, 153. Kalinin. Gos. Univ., Kalinin, 1982.*

[SM87] *L. V. Sabinin and P. O. Mikheev. Infinitesimal theory of local analytic loops.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, *297(4):801–804, 1987.*

[Smi86] *Jonathan D. H. Smith.* Representation theory of infinite groups and finite quasigroups, *volume 101 of* Séminaire de Mathématiques Supérieures [Seminar on Higher Mathematics]. *Presses de l'Université de Montréal, Montreal, QC, 1986.*

[Smi92] *J. D. H. Smith. Quasigroup representation theory. In* Universal algebra and quasigroup theory (Jadwisin, 1989)*, volume 19 of* Res. Exp. Math.*, pages 195–207. Heldermann, Berlin, 1992.*

[Smi07] *Jonathan D. H. Smith.* An introduction to quasigroups and their representations. *Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007.*

[SR99] *Jonathan D. H. Smith and Anna B. Romanowska.* Post-modern algebra. *Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1999. A Wiley-Interscience Publication.*

[SU02] *Ivan P. Shestakov and Ualbai U. Umirbaev. Free Akivis algebras, primitive elements, and hyperalgebras.* J. Algebra*, 250(2):533–548, 2002.*

[Thu80] *William P. Thurston. The topology and geomtry of 3 manifolds.* Princeton University Lecture Notes*, 43(1):63–100, 1980.*

[Wey77] *Hermann Weyl.* Gruppentheorie und Quantenmechanik. *Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, second edition, 1977.*

[Yam58a] *Kiyosi Yamaguti. On algebras of totally geodesic spaces (Lie triple systems).* J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A*, 21:107–113, 1957/1958.*

[Yam58b] *Kiyosi Yamaguti. On the Lie triple system and its generalization.* J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A*, 21:155–160, 1957/1958.*

[Zel80] *E. I. Zel'manov. Absolute zero-divisors in Jordan pairs and Lie algebras.* Mat. Sb. (N.S.)*, 112(154)(4(8)):611–629, 1980.*

[ZSSS82] *K. A. Zhevlakov, A. M. Slin′ko, I. P. Shestakov, and A. I. Shirshov.* Rings that are nearly associative*, volume 104 of* Pure and Applied Mathematics. *Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1982. Translated from the Russian by Harry F. Smith.*