



**UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA**

Física de la Materia Condensada

Ciencia de los Materiales e Ingeniería Metalúrgica

**TESIS DOCTORAL**

**Diseño de materiales  
multicapa resistentes  
al daño por contacto**

Pedro Miranda González

Badajoz, 10 de abril de 2003





**GRUPO ESPECIALIZADO DE  
MATERIALES**  
UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Este trabajo se enmarca en el contexto de la línea de investigación **Estudio del daño por contacto y simulación numérica de estructuras multicapa** desarrollada en el Grupo Especializado de Materiales de la Universidad de Extremadura, en colaboración con el National Institute of Standards & Technology (NIST), Gaithersburg (USA).



**D<sup>a</sup>. Antonia Pajares Vicente**, Profesora Titular de Universidad del Área Física de la Materia Condensada del Departamento de Física de la Universidad de Extremadura, **D. Fernando Guiberteau Cabanillas**, Catedrático de Universidad del Área de Ciencia de Materiales e Ingeniería Metalúrgica del Departamento de Electrónica e Ingeniería Electromecánica y **D. Brian R. Lawn**, NIST Fellow en el National Institute of Standards & Technology en Gaithersburg, MD (E.E.U.U.)

## INFORMAN

que el presente trabajo, “**Diseño de materiales multicapa resistentes al daño por contacto**”, ha sido realizada por Pedro Miranda González bajo nuestra dirección, en los laboratorios de las áreas de Física de la Materia Condensada y Ciencia de los Materiales e Ingeniería Metalúrgica de la Universidad de Extremadura, así como en el Materials Science and Engineering Laboratory, NIST (Gaithersburg, MD, EEUU).

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firmamos la presente a 13 de enero de dos mil tres.

Fdo. Antonia Pajares Vicente.

Fdo. Fernando Guiberteau Cabanillas.

Fdo. Brian R. Lawn.



# TRIBUNAL

**Dr. Manuel Elices Calafat**  
Catedrático de Universidad.  
Departamento de Ciencia de Materiales.  
Universidad Politécnica de Madrid.

**Dr. J. A. Planell Estany**  
Catedrático de Universidad.  
Departamento de Ciencia de Materiales.  
Universidad Politécnica de Cataluña.

**Dr. G. V. Guinea Tortuero**  
Catedrático de Universidad.  
Departamento de Ciencia de Materiales.  
Universidad Politécnica de Madrid.

**Dr. F. L. Cumbreira Hernández**  
Catedrático de Universidad.  
Departamento de Física.  
Universidad de Extremadura.

**Dr. J. J. Meléndez Martínez**  
Profesor Ayudante.  
Departamento de Física.  
Universidad de Extremadura.

Badajoz, a 10 de abril de 2003.



*A mi damita*



Un experto es aquél que ya ha cometido todos los errores posibles en una materia muy concreta.

NIELS BOHR

Nunca te das cuenta de lo que ya has hecho; sólo puedes ver lo que te queda por hacer.

MARIE CURIE



# Agradecimientos

Al concluir la escritura de una memoria que resume de alguna forma casi cuatro años de trabajo y esfuerzo, de éxitos y fracasos, te invade una cierta sensación de orgullo, de satisfacción por haber alcanzado un objetivo. Sin embargo, te asalta también una cierta nostalgia y recuerdas cada uno de los momentos y etapas que has atravesado. Es precisamente al echar la vista atrás cuando valoras en toda su magnitud el apoyo que has recibido en cada momento de las personas que te rodean y el orgullo se torna en gratitud. Tengo la absoluta certeza de que la realización de este trabajo de investigación, así como la elaboración de la presente memoria, no hubiera sido posible sin el concurso de un numeroso grupo de personas que no deben quedar en el anonimato. Es por tanto una obligación y un placer expresar mi profundo agradecimiento a todas esas personas, que me han acompañado en el transcurso de estos años.

En primer lugar, deseo expresar mi más sincero agradecimiento a los directores de este trabajo, la Dra. Antonia Pajares Vicente, el Dr. Fernando Guiberteau Cabanillas y el Dr. Brian R. Lawn, por su apoyo continuo y por guiarme en estos mis primeros pasos como investigador:

No sería exagerado decir que Toni ha sido como una segunda madre para mí, pero la diferencia de edad es insuficiente para tal tipo de parentesco; lo que con toda seguridad sí ha sido es una gran amiga, mucho más que una directora de tesis o una compañera de trabajo; alguien en quien siempre he podido confiar, incluso en aspectos que van más allá de lo estrictamente profesional. Por todo ello deseo, Toni, darte las gracias y espero tener la suerte de seguir trabajando siempre contigo.

Es también un placer trabajar con Fernando. No todos los doctorandos tienen la suerte de poder hablar con total confianza y de tú a tú con el catedrático del área, de poder contarle entre sus compañeros y no entre sus jefes. Fernando, tengo

que agradecerte sinceramente tu disponibilidad y el esfuerzo que derrochas por todos nosotros de forma totalmente altruista. Es una gran tranquilidad saber que estás ahí, trabajando por nuestro futuro y en pro del grupo. También, aunque quizá no lo creas, te agradezco las múltiples correcciones y apreciaciones, que han aportado claridad y sencillez a esta memoria.

Y qué puedo decir de Brian..., estoy convencido de ser una persona privilegiada por contar con su ayuda y sus conocimientos, dada su enorme capacidad e internacional prestigio. Es reconfortante el poder compartir una relación de compañerismo con una gran figura de la ciencia de materiales como Brian. Deseo darle las gracias por todos los conocimientos adquiridos a su lado y por sus inestimables aportaciones e ideas referentes al curso de la investigación. Espero en el futuro poder continuar trabajando en colaboración con él, tanto en esta línea de investigación como en futuros proyectos.

No puedo olvidar agradecer al Dr. Francisco Luis Cumbreira Hernández por haberme introducido de forma tan didáctica en el complejo mundo de la simulación numérica. Deseo agradecerle además sus originales aportaciones al trabajo de investigación y sus siempre enriquecedores comentarios y consejos.

Vaya también mi agradecimiento al resto de compañeros del Grupo Especializado de Materiales de la Universidad de Extremadura por el extraordinario ambiente de amistad que existe entre nosotros y por estar siempre dispuestos a echar una mano. No debo olvidar tampoco a Yan Deng, Herzl Chai, Do Kyung Kim, Hae-Won Kim y Susan Roth, compañeros del NIST (EEUU), por su amistad y por ayudarme a sentirme casi como en casa estando lejos de mi hogar.

Finalmente, agradecer a mi familia su comprensión y su apoyo inquebrantables. Espero algún día poder llegar a compensar, especialmente a mis padres, por mis ausencias y por sus desvelos.

Tampoco puedo olvidar a Susana, que en breve me convertirá en feliz esposo. Gracias a su amor, comprensión y ayuda he llegado hasta aquí y sé que a su lado podré afrontar cualquier cosa que me depare el futuro. Te quiero. Chuck.

Todas estas personas y algunas más que seguro quedan en el tintero han contribuido, con su cariño y su apoyo, a la feliz conclusión de esta Tesis Doctoral.

# Índice general

Agradecimientos	XIII
Índice general	XV
Índice de figuras	XIX
Índice de tablas	XXV
Nomenclatura	XXVII
Introducción	1
<b>1. Contacto hertziano</b>	<b>7</b>
1.1. Teoría de Hertz del contacto elástico . . . . .	7
1.2. Campo de tensiones hertziano . . . . .	12
1.3. Curvas tensión-deformación de indentación . . . . .	16
1.4. Mecanismos de daño por contacto hertziano . . . . .	20
1.4.1. Modo frágil: Fractura cónica . . . . .	21
Carga crítica para el inicio de fisuras cónicas . . . . .	24
1.4.2. Modo dúctil: Deformación subsuperficial irreversible . . . . .	27
Carga crítica de inicio de deformación irreversible . . . . .	31
1.4.3. Índice de fragilidad . . . . .	32
<b>2. Teoría de la flexión de láminas</b>	<b>35</b>
2.1. Aspectos básicos de la teoría de la flexión de láminas . . . . .	35
2.1.1. Hipótesis básicas de la teoría de la flexión de láminas delgadas sometidas a pequeños desplazamientos . . . . .	36
2.1.2. Extensión de la teoría de la flexión a casos más generales . . . . .	37

Láminas con grandes desplazamientos . . . . .	37
Láminas gruesas y cargas concentradas . . . . .	38
2.2. Flexión de láminas circulares bajo cargas axisimétricas . . . . .	39
2.3. Flexión de láminas sobre sustratos elásticos semi-infinitos . . . . .	43
<b>3. El método de los elementos finitos aplicado a mecánica de sólidos</b>	<b>47</b>
3.1. El problema general de la mecánica de sólidos . . . . .	48
3.1.1. Formulación débil del problema . . . . .	50
3.1.2. Método de Galerkin . . . . .	51
3.1.3. Discretización del problema . . . . .	53
3.2. El método de los elementos finitos. Formulación del problema . . . . .	54
3.3. El modelo de elementos finitos . . . . .	58
3.3.1. Los elementos . . . . .	58
Funciones de forma . . . . .	59
Algoritmos de evaluación de integrales . . . . .	61
Otras consideraciones . . . . .	62
3.3.2. Modelos constitutivos . . . . .	64
3.3.3. Resolución del sistema de ecuaciones ( <i>solver</i> ) . . . . .	65
Métodos directos o matriciales . . . . .	65
Métodos indirectos, vectoriales o iterativos . . . . .	66
3.3.4. Errores en FEM . . . . .	67
3.4. El programa ABAQUS <sup>©</sup> . . . . .	68
<b>4. Materiales y método experimental</b>	<b>75</b>
4.1. Materiales y preparación de muestras . . . . .	76
4.2. Ensayos mecánicos . . . . .	79
4.2.1. Ensayos Hertz estáticos . . . . .	79
Curvas tensión-deformación de indentación. Determinación del módulo elástico, $E$ . . . . .	81
Determinación de la tensión de límite elástico, $Y$ . . . . .	83
Determinación de cargas críticas de fractura. Ensayos <i>in situ</i> . . . . .	83
4.2.2. Ensayos Hertz cíclicos . . . . .	86
4.2.3. Técnicas auxiliares de caracterización de materiales monolíticos. . . . .	87
Ensayos de flexión en cuatro puntos . . . . .	87

	Técnica de medida de constantes elásticas mediante vibración inducida por impulsos . . . . .	89
4.3.	Simulación numérica (FEM) . . . . .	90
4.3.1.	Simulación de materiales monolíticos. Ajuste de las curvas de indentación . . . . .	93
4.3.2.	Simulación de materiales multicapa. Predicción de cargas críticas . . . . .	94
<b>5.</b>	<b>Resultados y Discusión: I. Bicapas</b>	<b>97</b>
5.1.	Modos de daño en estructuras bicapa . . . . .	98
5.1.1.	Modos frágiles . . . . .	99
	Fisuras cónicas . . . . .	100
	Fisuras radiales . . . . .	101
	Fisuras circulares . . . . .	103
5.1.2.	Modos dúctiles . . . . .	105
5.2.	Análisis de tensiones y predicción de cargas críticas en sistemas bicapa	109
5.2.1.	Análisis de tensiones en sistemas bicapa . . . . .	112
	Limitaciones del análisis . . . . .	122
5.2.2.	Predicción de cargas críticas . . . . .	124
5.3.	Influencia de la distribución de defectos en las cargas críticas . . . . .	126
5.3.1.	Relaciones fundamentales y estadística de defectos . . . . .	128
5.3.2.	Distribución de defectos en vidrio erosionado . . . . .	133
5.3.3.	Cálculo de cargas críticas para el sistema vidrio/policarbonato	134
5.4.	Fatiga en sistemas bicapa cerámico/polímero . . . . .	138
5.4.1.	Crecimiento subcrítico de fisuras en sistemas bicapa . . . . .	139
5.4.2.	Aplicación al sistema vidrio/policarbonato . . . . .	142
	Ensayos de flexión en cuatro puntos . . . . .	142
	Ensayos Hertz en bicapas . . . . .	143
5.5.	Diagramas para el diseño de estructuras bicapa . . . . .	148
<b>6.</b>	<b>Resultados y Discusión: II. Tricapas</b>	<b>157</b>
6.1.	Modos de daño en estructuras tricapa . . . . .	158
6.1.1.	Modos frágiles . . . . .	158
	Observaciones <i>in situ</i> . . . . .	158
	Perfiles de fisura . . . . .	161

Justificación del daño observado en base al campo de tensiones . . . . .	163
6.1.2. Modos dúctiles . . . . .	168
6.2. Análisis de tensiones y predicción de cargas críticas en sistemas tricapa	171
6.2.1. Análisis de tensiones en sistemas tricapa . . . . .	172
6.2.2. Validación del análisis mediante FEM . . . . .	175
6.2.3. Predicción de cargas críticas . . . . .	184
Validación de las predicciones . . . . .	185
6.2.4. Diseño de estructuras tricapa . . . . .	190
<b>A. Caracterización de materiales monolíticos</b>	<b>195</b>
A.1. Carburo de wolframio . . . . .	195
A.2. Vidrio y zafiro . . . . .	197
A.3. Policarbonato . . . . .	198
A.4. Adhesivo . . . . .	199
A.5. Tabla resumen . . . . .	200
<b>Conclusiones</b>	<b>203</b>
<b>Investigaciones futuras</b>	<b>207</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>209</b>

# Índice de figuras

1.1. Geometría del contacto hertziano . . . . .	8
1.2. Distribución de presiones en un contacto hertziano . . . . .	10
1.3. Componentes del tensor de tensiones en coordenadas cilíndricas . .	13
1.4. Distribución en profundidad y en superficie de las tensiones en un contacto hertziano . . . . .	14
1.5. Tensiones principales del campo hertziano . . . . .	15
1.6. Configuraciones geoméricamente similares que corresponden a es- tados macroscópicos de deformación equivalentes . . . . .	17
1.7. Ejemplo de curva tensión-deformación de indentación . . . . .	19
1.8. Modos de daño en materiales monolíticos bajo contacto hertziano .	21
1.9. Trayectorias de las tensiones principales en un contacto hertziano .	22
1.10. Micrografías de una fisura cónica en $Si_3N_4$ producida por un ensayo de indentación Hertz . . . . .	22
1.11. Fotografía de una fisura cónica en vidrio . . . . .	23
1.12. Fisuras cónicas en un monocristal de silicio . . . . .	23
1.13. Trazas superficiales de fisuras cónicas parciales generadas en vidrio por una esfera que desliza . . . . .	24
1.14. Cargas críticas experimentales de inicio de fisuras cónicas en función del radio del impresor . . . . .	25
1.15. Micrografías de la deformación plástica generada en un acero blando mediante ensayo Hertz . . . . .	27
1.16. Esquema de la evolución de la zona deformada plásticamente en un ensayo hertziano . . . . .	28
1.17. Ejemplos de deformación cuasi-plástica producida por contacto hert- ziano . . . . .	29

1.18. Micrografía ampliada del daño generado por deformación cuasi-plástica . . . . .	30
1.19. Esquema de un defecto de deslizamiento con microfisuras asociadas	31
1.20. Parámetro de fragilidad frente a la razón de cargas críticas $\frac{P_Y}{P_C}$ para algunos materiales cerámicos . . . . .	33
2.1. Esquema de una lámina sometida a flexión . . . . .	36
2.2. Lámina circular sometida a flexión biaxial . . . . .	39
2.3. Fuerzas y momentos que actúan sobre el elemento de lámina . . . . .	42
2.4. Esquema de las fuerzas que actúan sobre una lámina que descansa sobre sustrato elástico . . . . .	44
3.1. Esquema del problema de la mecánica de sólidos . . . . .	49
3.2. Ejemplo de la división de un sistema 2D en elementos finitos . . . . .	55
3.3. Transformación paramétrica de coordenadas de un elemento . . . . .	59
3.4. Funciones de forma para un elemento unidimensional . . . . .	61
4.1. Sección transversal de una muestra tricapa . . . . .	78
4.2. Máquina de ensayos Instron 5565 y detalle de un ensayo de indentación Hertz . . . . .	80
4.3. Microscopio óptico invertido y reloj-comparador . . . . .	82
4.4. Esquema del montaje y fotografía del sistema de observación <i>in situ</i>	85
4.5. Máquina de ensayos Instron 8511 y montaje para ensayo de indentación Hertz cíclico . . . . .	86
4.6. Fotografía y esquema de un ensayo de flexión en cuatro puntos . . . . .	88
4.7. Instrumento de medida de la frecuencia natural de vibración . . . . .	89
4.8. Ejemplo de mallado empleado en las simulaciones . . . . .	91
5.1. Modos de daño en sistemas bicapa bajo contacto hertziano . . . . .	99
5.2. Morfología de las fisuras cónicas en un sistema bicapa . . . . .	100
5.3. Contornos de la tensión $\sigma_1$ en un sistema bicapa . . . . .	100
5.4. Morfología de las fisuras radiales en sistemas bicapa . . . . .	102
5.5. Contornos de la tensión $\sigma_2$ en un sistema bicapa . . . . .	102
5.6. Morfología de las fisuras circulares en un sistema bicapa . . . . .	103
5.7. Contornos de la tensión $\sigma_1$ en un sistema bicapa con recubrimiento delgado . . . . .	104

5.8. Secuencia <i>in situ</i> mostrando la evolución del daño en muestras bicapa vidrio/policarbonato con ambas superficies erosionadas . . . .	105
5.9. Daño cuasi-dúctil en un recubrimiento de $Al_2O_3-TiO_2$ sobre acero	106
5.10. Contornos de la tensión de von Mises en un sistema bicapa $Al_2O_3-TiO_2$ /acero con $d = 450$ . . . . .	107
5.11. Daño cuasi-dúctil en un recubrimiento delgado de $Al_2O_3-TiO_2$ sobre acero . . . . .	107
5.12. Contornos de la tensión de von Mises en un sistema bicapa $Al_2O_3-TiO_2$ /acero con $d = 125$ . . . . .	108
5.13. Fisura radial iniciada tras la deformación plástica del sustrato . . .	108
5.14. Contornos de la tensión de von Mises en un sistema bicapa $Al_2O_3-TiO_2$ /policarbonato con $d = 125$ . . . . .	109
5.15. Modos de daño interfaciales en sistemas bicapa . . . . .	110
5.16. Distribución de tensiones en el eje de carga en sistemas bicapa . .	113
5.17. Dependencia de las tensiones interfaciales con el espesor en sistemas bicapa . . . . .	114
5.18. Tensión $\sigma_1^c$ frente a $P/d^2$ en un sistema vidrio/policarbonato . . .	115
5.19. Tensiones normalizadas en la superficie inferior del recubrimiento en función de la razón de módulos elásticos . . . . .	116
5.20. Tensiones normalizadas en la superficie superior del sustrato en función de la razón de módulos elásticos . . . . .	119
5.21. Tensiones normalizadas responsables del daño interfacial en función de la razón de módulos elásticos . . . . .	121
5.22. Tensiones normalizadas responsables del daño interfacial en función de la razón de módulos elásticos para sistemas con diferentes coeficientes de Poisson . . . . .	123
5.23. Cargas críticas para el inicio de fisuras radiales en bicapas vidrio/policarbonato . . . . .	126
5.24. Esquema de la distribución de tensiones de tracción en la superficie inferior del recubrimiento . . . . .	127
5.25. Tensión relativa en función de la distancia radial relativa para el sistema vidrio/policarbonato . . . . .	129
5.26. Inicio de una fisura radial en un bicapa vidrio/policarbonato . . .	130
5.27. Micrografía mostrando la distribución de defectos en una superficie de vidrio erosionada . . . . .	133
5.28. Distribución de tamaño de los defectos en vidrio erosionado . . . .	134

5.29. Cargas críticas para fisuras radiales calculadas teniendo en cuenta consideraciones estadísticas . . . . .	135
5.30. Resistencia a la fractura efectiva del vidrio erosionado en sistemas bicapa . . . . .	137
5.31. Resistencia a la fractura frente a velocidad de tensión para vidrio y silicio bajo flexión pura . . . . .	143
5.32. Micrografías <i>in situ</i> de las fisuras radiales generadas en vidrio/policarbonato y silicio/policarbonato . . . . .	144
5.33. Cargas críticas de inicio de fisuras radiales en sistemas bicapa en función de la velocidad de carga . . . . .	145
5.34. Cargas críticas de inicio de fisuras radiales en función del tiempo a fractura para ensayos cíclicos en el sistema vidrio/policarbonato . . . . .	145
5.35. Cargas críticas de inicio de fisuras radiales en el sistemas vidrio/policarbonato en función del tiempo a fractura . . . . .	147
5.36. Mapas de predicción de primer modo de daño interfacial . . . . .	150
5.37. Mapas de predicción de primer modo de daño interfacial (cont.) . . . . .	152
5.38. Diagrama de diseño para sistemas bicapa . . . . .	154
6.1. Secuencia <i>in situ</i> de la evolución del daño en un sistema vidrio/zafiro/policarbonato con la superficie superior del vidrio erosionada . . . . .	159
6.2. Secuencia <i>in situ</i> de la evolución del daño en un sistema vidrio/zafiro/policarbonato con la superficie inferior del vidrio erosionada . . . . .	159
6.3. Secuencia <i>in situ</i> de la evolución del daño en un sistema vidrio/zafiro/policarbonato con la superficie inferior del zafiro erosionada . . . . .	160
6.4. Micrografía de una fisura cónica en el vidrio de una muestra tricapa vidrio/zafiro/policarbonato con la superficie superior del vidrio erosionada (sección transversal) . . . . .	161
6.5. Micrografía de una fisura radial en el vidrio de una muestra tricapa vidrio/zafiro/policarbonato con la superficie inferior del vidrio erosionada (sección transversal) . . . . .	162
6.6. Micrografía de una fisura radial en el zafiro de una muestra tricapa vidrio/zafiro/policarbonato con la superficie inferior del zafiro erosionada (sección transversal) . . . . .	163
6.7. Contornos de la tensión $\sigma_1$ en el sistema vidrio/zafiro/policarbonato	163
6.8. Contornos de la tensión $\sigma_2$ en el sistema vidrio/zafiro/policarbonato	164

---

6.9. Contornos de la tensión $\sigma_2$ en el sistema vidrio/adhesivo/zafiro/policarbonato . . . . .	165
6.10. Contornos de la tensión $\sigma_2$ en un sistema zafiro/vidrio/policarbonato	166
6.11. Contornos de la tensión $\sigma_1$ en un sistema zafiro/vidrio/policarbonato	167
6.12. Contornos de la tensión $\sigma_{13}$ en un sistema tricapa . . . . .	169
6.13. Modos de daño identificados en sistemas tricapa bajo contacto hertziano . . . . .	171
6.14. Modos de daño interfacial en sistemas tricapa . . . . .	173
6.15. Distribución de tensiones en el eje de carga en sistemas tricapa . . . . .	176
6.16. Dependencia de las tensiones interfaciales con el espesor en sistemas tricapa . . . . .	177
6.17. Tensiones interfaciales frente a $P/d^2$ en sistemas tricapa . . . . .	178
6.18. Tensiones normalizadas en función de las razones de módulos elásticos en sistemas tricapa . . . . .	180
6.19. Módulo elástico efectivo de un recubrimiento bicapa . . . . .	183
6.20. Comparación de las predicciones de cargas críticas con resultados FEM . . . . .	186
6.21. Comparación de las predicciones de cargas críticas con resultados experimentales . . . . .	188
6.22. Comparación de las predicciones de cargas críticas con resultados experimentales (Cont.) . . . . .	189
6.23. Predicciones de cargas críticas en sistemas dentales . . . . .	192
A.1. Curva tensión-deformación de indentación del carburo de wolframio	196
A.2. Curvas tensión-deformación de indentación del vidrio y del zafiro . . . . .	197
A.3. Curva tensión-deformación de indentación del policarbonato . . . . .	199
A.4. Curva tensión-deformación de indentación del adhesivo . . . . .	200



# Índice de tablas

5.1. Parámetros de ajuste de las expresiones para las tensiones interfaciales. . . . .	118
5.2. Parámetros de ajuste de las expresiones simplificadas para las tensiones interfaciales. . . . .	122
5.3. Dependencia de los parámetros de ajuste con los coeficientes de Poisson. . . . .	123
A.1. Propiedades mecánicas de los materiales utilizados en este estudio	201



# Nomenclatura

---

## A

---

$\hat{A}$	Operador ensamblaje, ver ecuación (3.16).
$\mathbf{A}$	Matriz, ver ecuación (3.28).
$A$	Parámetro, ver ecuación (5.25).
$A_0$	Parámetro, ver ecuación (5.29).
$A_T$	Superficie o contorno externo total del sólido.
$A_f$	Porción de la superficie o contorno externo del sólido sobre la que actúan fuerzas externas.
$A_f^e$	Porción de la superficie o contorno externo del elemento sobre la que actúan fuerzas externas.
$A_u$	Porción de la superficie o contorno externo del sólido con desplazamientos impuestos.
$a$	Radio de contacto.
$a$	Parámetro, ver ecuación (5.2).
$\mathbf{a}_i$	Vector de coeficientes incógnita en el método de Galerkin, ver ecuación (3.8).
$\alpha$	Parámetro de endurecimiento, ver pag. 93.

---

## B

---

$\mathbf{B}$	Matriz de derivadas parciales de las funciones de forma, ver ecuación (3.15).
$B$	Parámetro, ver ecuación (5.1).
$B'$	Parámetro, ver ecuación (2.25).

---

$\mathbf{b}$	Vector de fuerzas másicas por unidad de volumen.
$b$	Parámetro, ver ecuación (5.2).
$\beta$	Parámetro de ajuste, ver ecuación (5.6).

---

**C**


---

$\mathbb{C}$	Tensor de constantes elásticas.
$C$	Parámetro, ver ecuación (5.1).
$C'$	Parámetro, ver ecuación (2.25).
$c$	Tamaño del defecto.
$c^*$	Tamaño de defecto crítico.
$c_i$	Tamaño inicial del defecto.
$\chi$	Parámetro de ajuste, ver ecuación (5.6).

---

**D**


---

$D$	Razón de espesores $d_o/d_i$ , ver ecuación (6.6).
$D$	Rigidez a flexión de la lámina, ver ecuación (2.7).
$\mathbf{d}$	Vector de desplazamientos nodales global, ver ecuación (3.23).
$\mathbf{d}^e$	Vector de desplazamientos nodales del elemento $e$ .
$d$	Espesor o espesor total.
$d^*$	Espesor efectivo.
$d_i$	Espesor de la capa intermedia en un tricapa.
$d_o$	Espesor de la capa externa en un tricapa.
$\delta$	Desplazamiento del centro de la esfera en un contacto hertziano, ver ecuación (1.2).
$\delta\tilde{\epsilon}$	Deformaciones virtuales.
$\delta\mathbf{u}$	Vector o campo de desplazamientos virtuales.
$\Delta$	Operador, ver ecuación (2.15).

---

**E**


---

$\mathcal{E}$	Razón de módulos elásticos $E_o/E_i$ , ver ecuación (6.6).
$E$	Módulo elástico.
$E'$	Módulo elástico del indentor esférico, ver pag. 9.

$E^*$	Módulo elástico efectivo, ver ecuación (1.8).
$E_c$	Módulo elástico del recubrimiento.
$E_c^*$	Módulo elástico efectivo del recubrimiento compuesto.
$E_i$	Módulo elástico de la capa intermedia en un tricapa.
$E_o$	Módulo elástico de la capa externa en un tricapa.
$E_s$	Módulo elástico del sustrato.
$E_s^*$	Módulo elástico efectivo del sustrato compuesto.
$e$	Constante de proporcionalidad entre $H$ e $Y$ .
$\epsilon$	Deformación.
$\epsilon_1^c, \epsilon_1^s$	Deformaciones radiales del recubrimiento y el sustrato, respectivamente, en la interfase.
$\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z$	Deformaciones en coordenadas cilíndricas.
$\tilde{\epsilon}$	Tensor de deformaciones.
$\dot{\epsilon}$	Velocidad de deformación.
$\eta$	Parámetro de ajuste, ver ecuación (5.8).

---

**F**


---

$\mathcal{F}$	Transformada de Fourier-Bessel de la función de influencia, ver ecuación (2.19).
$F, F', F''$	Funciones.
$\mathbf{f}$	Vector de fuerzas externas global, ver ecuación (3.22).
$\mathbf{f}_{ext}^e$	Vector de fuerzas externas que actúan sobre el elemento $e$ , ver ecuación (3.19).
$f$	Frecuencia de los ensayos cíclicos.
$f_c, f_s$	Funciones, ver pag. 175.
$f_i$	Función de influencia, ver ecuación (2.20).
$f_n$	Frecuencia natural de vibración.
$f_r$	Distribución normalizada de las tensiones en dirección radial, ver ecuación (5.14).
$\Phi$	Densidad de probabilidad de que se inicie una fisura radial a cierta carga y no antes.
$\phi$	Ángulo de giro de la normal al plano neutro de una lámina.
$\phi_i$	Funciones de forma en el método de Galerkin, ver ecuación (3.8).

$\varphi$  Parámetro de ajuste, ver ecuación (5.5).

---

**G**

---

$g$  Función genérica, ver ecuación (3.26).

$\Gamma$  Densidad de probabilidad de que se satisfaga la condición de Griffith.

$\gamma$  Parámetro de ajuste, ver ecuación (5.5).

---

**H**

---

$H$  Dureza.

$H_s$  Dureza del sustrato.

$H_{ij}$  Coeficientes, ver ecuación (3.26).

$h$  Distancia entre las superficies sin deformar en un contacto hertziano, ver ecuación (1.2).

$h_e$  Tamaño característico del elemento.

---

**I**

---

$I$  Momento de inercia.

---

**J**

---

$J_0$  Función de Bessel de orden cero.

---

**K**

---

**K** Matriz de rigidez global, ver ecuación (3.21).

**K<sup>e</sup>** Matriz de rigidez del elemento  $e$ , ver ecuación (3.20).

$K$  Factor de intensidad de tensiones.

$K_{IC}$  Factor de intensidad de tensiones crítico para el modo I.

$k$  Parámetro, ver ecuación (1.15).

$k_0$  Parámetro, ver ecuación (2.23).

$\kappa$  Parámetro de ajuste, ver ecuación (5.6).

---

**L**


---

$L$	Parámetro de ajuste, ver ecuación (5.9b).
$L_0, L_\infty$	Límites de la tensión normalizada para $E_c/E_s \rightarrow 0$ y $E_c/E_s \rightarrow \infty$ , respectivamente, ver ecuación (5.5).
$l$	Longitud.
$l_0$	Longitud inicial.
$l_1, l_2$	Distancias entre cilindros en un ensayo de flexión en cuatro puntos.
$\Lambda$	Parámetro, ver ecuación (1.20).
$\Lambda'$	Parámetro, ver ecuación (1.22).
$\lambda$	Variable, ver ecuación (2.24).

---

**M**


---

$M$	Parámetro de ajuste, ver ecuación (5.9b).
$M_r, M_\theta, M_z$	Momentos flectores en coordenadas cilíndricas.
$m$	Masa.
$\mu$	Pendiente de la recta elástica en una curva tensión-deformación de indentación.

---

**N**


---

$\mathbf{N}^T$	Matriz de funciones de forma.
$N$	Exponente de crecimiento de fisura, ver ecuación (5.22).
$N(c)$	Distribución de tamaños de defectos.
$N_j$	Función de forma correspondiente al nodo $j$ .
$\mathbf{n}$	Vector normal a la superficie.
$n$	Parámetro, ver ecuación (1.18).
$n_{nod}^e$	Número de nodos del elemento $e$ .
$n_{elm}$	Número de elementos.
$\nu$	Coefficiente de Poisson.
$\nu'$	Coefficiente de Poisson del indenter esférico, ver pag. 9.
$\nu_c$	Coefficiente de Poisson del recubrimiento.
$\nu_i$	Coefficiente de Poisson de la capa intermedia en un tricapa.

---

$\nu_o$	Coefficiente de Poisson de la capa externa en un tricapa.
$\nu_s$	Coefficiente de Poisson del sustrato.
$\nabla^s$	Parte simétrica del gradiente (operador), ver ecuación (3.3).

---

**O**


---

$\mathcal{O}$	Símbolo matemático que significa: del orden de...
$o$	Orden de las funciones de forma.
$\Omega$	Probabilidad de supervivencia hasta cierta carga.

---

**P**


---

$\mathcal{P}$	Transformada de Fourier-Bessel de la distribución de cargas externas, ver ecuación (2.18).
$P$	Carga.
$\dot{P}$	Velocidad de aplicación de la carga.
$P_C$	Carga crítica para el inicio de fisuras cónicas.
$P_C^t$	Carga crítica de inicio de fisuras cónicas en la superficie superior del recubrimiento.
$P_m$	Carga máxima.
$P_R^c$	Carga crítica de inicio de fisuras radiales en el recubrimiento.
$P_R^i$	Carga crítica de inicio de fisuras radiales en la capa intermedia.
$P_R^o$	Carga crítica de inicio de fisuras radiales en la capa externa.
$P_Y$	Carga crítica de inicio de plasticidad.
$P_Y^c$	Carga crítica de inicio de deformación plástica en la superficie inferior del recubrimiento.
$P_Y^o$	Carga crítica de inicio de plasticidad en la superficie inferior en la capa externa.
$P_Y^s$	Carga crítica de inicio de deformación plástica en la superficie superior del sustrato.
$P_Y^t$	Carga crítica de inicio de plasticidad en la superficie superior del recubrimiento.
$P_Y^{i\downarrow}$	Carga crítica de inicio de plasticidad en la superficie inferior de la capa intermedia.

---

$P_Y^{i\uparrow}$	Carga crítica de inicio de plasticidad en la superficie superior de la capa intermedia.
$P_{crit}$	Carga crítica.
$p$	Presión.
$p_0$	Presión media de contacto.
$p_Y$	Presión de inicio de plasticidad.
$p_{m\acute{a}x}$	Presión máxima en un contacto hertziano.
$\psi$	Parámetro adimensional que depende de la geometría del defecto.
$\psi_j$	Funciones de transformación de coordenadas.

---

**Q**


---

$Q$	Parámetro, ver ecuación (1.30).
$q$	Fuerzas de reacción del sustrato por unidad de área.

---

**R**


---

<b>R</b>	Residuo, ver ecuación (3.27).
$R$	Radio de la esfera o radio de contacto efectivo, ver ecuación (1.1), en un contacto hertziano.
$R^*$	Radio crítico de la transición frágil-dúctil, ver ecuación (1.33).
$R_a, R_b$	Radios de curvaturas de los cuerpos en un contacto hertziano, ver ecuación (1.1).
<b>r</b>	Vector posición.
$r$	Dirección radial en coordenadas cilíndricas o distancia al eje de carga.
$r_0$	Radio de la circunferencia, ver pag. 45.
$\rho$	Densidad de la población de defectos.

---

**S**


---

<b>S</b>	Superficie de contacto.
$S$	Densidad de probabilidad de que un defecto determinado tenga un cierto tamaño.
$s$	Distancia al punto de aplicación de la carga puntual, ver pag. 44.

$\sigma$	Tensión normal.
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensiones principales.
$\sigma_{13}$	Tensión de von Mises, ver pag. 107.
$\sigma_1^c, \sigma_3^c, \sigma_{13}^c$	Tensiones principales y tensión de von Mises en la intersección del eje de carga con la superficie inferior del recubrimiento.
$\sigma_1^i$	Tensión radial en la intersección del eje de carga con la superficie inferior de la capa intermedia.
$\sigma_{13}^{i\uparrow}, \sigma_{13}^{i\downarrow}$	Tensión de von Mises en la superficie superior e inferior, respectivamente, de la capa intermedia.
$\sigma_1^o, \sigma_{13}^o$	Tensión radial y de von Mises en la intersección del eje de carga con la superficie inferior de la capa externa.
$\sigma_1^s, \sigma_3^s, \sigma_{13}^s$	Tensiones principales y tensión de von Mises en la intersección del eje de carga con la superficie superior del sustrato.
$\sigma_F$	Resistencia a fractura.
$\sigma_F^c$	Resistencia a fractura del recubrimiento.
$\sigma_F^i$	Resistencia a fractura de la capa intermedia.
$\sigma_F^o$	Resistencia a fractura de la capa externa.
$\sigma_m$	Tensión máxima.
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$	Tensiones en coordenadas cilíndricas, ver ecuación (1.16).
$\sigma_{\text{máx}}$	Máximo valor de la tensión $\sigma_1$ , ver ecuación (1.26).
$\sigma_{\text{crit}}$	Tensión crítica.
$\sigma_{ef}^c$	Resistencia a fractura efectiva del recubrimiento.
$\sigma_{is}$	Tensiones en la interfase $i/s$ .
$\sigma_{oi}$	Tensiones en la interfase $o/i$ .
$\dot{\sigma}$	Velocidad de aplicación de la tensión.
$\sigma^*$	Tensión en un bicapa efectivo.
$\tilde{\sigma}$	Tensor de tensiones.
$\bar{\sigma}$	Tensión normalizada, $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{P/d^2}$ .
$\bar{\sigma}_1^c, \bar{\sigma}_3^c, \bar{\sigma}_{13}^c$	Tensiones principales y tensión de von Mises normalizadas en la intersección del eje de carga con la superficie inferior del recubrimiento.
$\bar{\sigma}_1^i$	Tensión radial normalizada en la intersección del eje de carga con la superficie inferior de la capa intermedia.

$\bar{\sigma}_{13}^{i\uparrow}, \bar{\sigma}_{13}^{i\downarrow}$	Tension de von Mises normalizada en la superficie superior e inferior, respectivamente, de la capa intermedia.
$\bar{\sigma}_1^o, \bar{\sigma}_{13}^o$	Tension radial y de von Mises normalizadas en la intersección del eje de carga con la superficie inferior de la capa externa.
$\bar{\sigma}_1^s, \bar{\sigma}_3^s, \bar{\sigma}_{13}^s$	Tensiones principales y tensión de von Mises normalizadas en la intersección del eje de carga con la superficie superior del sustrato.
$\bar{\sigma}_{is}$	Tensiones normalizadas en la interfase $i/s$ .
$\bar{\sigma}_{oi}$	Tensiones normalizadas en la interfase $o/i$ .

---

**T**


---

$\mathcal{T}$	Tensiones de cizalladura en una lámina.
$T$	Tenacidad.
$T_1$	Termino de corrección, ver ecuación (4.6).
$\bar{\mathbf{t}}$	Vector de fuerzas por unidad de superficie que actúan en el contorno.
$t$	Tiempo.
$t_R$	Tiempo a fractura.
$\tau$	Tension de cizalladura.
$\tau_{13}$	Tension de cizalladura máxima.
$\tau_{\text{máx}}$	Máximo de la tensión $\tau_{13}$ , ver ecuación (1.23).

---

**U**


---

$\mathbf{u}$	Vector o campo de desplazamientos.
$\mathbf{u}^e$	Vector de desplazamientos del elemento $e$ .
$\bar{\mathbf{u}}$	Vector de desplazamientos impuestos sobre el contorno.
$u, v, w$	Componentes del vector desplazamiento, ver ecuación (3.3).
$u$	Parámetro, ver ecuación (1.16).
$u_{z1}, u_{z2}$	Desplazamientos de las superficies en un contacto hertziano, ver ecuación (1.2).

---

**V**


---

$V$	Volumen del sólido.
-----	---------------------

---

$V^e$	Volumen del elemento $e$ .
$V_j$	Región formada por los elementos que comparten el nodo $j$ .
$v$	Velocidad de crecimiento de fisura, ver ecuación (5.22).
$v_0$	Coefficiente de crecimiento de fisura, ver ecuación (5.22).

---

<b>W</b>	
$\widetilde{W}$	Trabajo virtual.
$w$	Deflexión de la lámina.
$\omega$	Anchura.

---

<b>X</b>	
$\boldsymbol{x}$	Coordenadas de un punto en el espacio real.
$\boldsymbol{x}_j$	Coordenadas del nodo $j$ en el espacio real.
$\boldsymbol{\xi}$	Coordenadas de un punto en el espacio paramétrico.
$\xi^x, \xi^y$	Coordenadas en el espacio paramétrico.
$\xi_i^x, \xi_j^y$	Coordenadas de los puntos de integración en el espacio paramétrico, ver ecuación (3.26).

---

<b>Y</b>	
$Y$	Tensión de límite elástico.
$Y_c$	Tensión de límite elástico del recubrimiento.
$Y_i$	Tensión de límite elástico de la capa intermedia.
$Y_o$	Tensión de límite elástico de la capa externa.
$Y_s$	Tensión de límite elástico del sustrato.

---

<b>Z</b>	
$z$	Dirección axial en coordenadas cilíndricas, distancia en esta dirección.
$\Theta$	Parámetro, ver ecuación (1.28).
$\theta$	Dirección angular en coordenadas cilíndricas.
$\vartheta$	Variable, ver ecuación (2.17).
$\zeta$	Parámetro, ver ecuación (1.18).

---

# Introducción

La idea de recubrir ciertos materiales con otros más duros tiene importantes aplicaciones tecnológicas. Entre los ejemplos prácticos más comunes de estructuras multicapa, destacan las herramientas de corte, barreras de protección térmica, parabrisas, restauraciones dentales y prótesis biomecánicas. En éstas y otras aplicaciones, los materiales multicapa están sometidos a fuertes tensiones de contacto, limitadas a pequeñas regiones, que pueden provocar la fractura catastrófica del sistema. Existe, pues, la necesidad de identificar y caracterizar de forma sistemática los mecanismos de daño por contacto en sistemas multicapa prototipo.

Entre las posibles metodologías disponibles para el estudio de las propiedades mecánicas de estos sistemas, las técnicas de indentación presentan numerosas ventajas. En particular, los ensayos Hertz resultan idóneos para el estudio de las propiedades de contacto, ya que permiten controlar la presión ejercida sobre el material desde valores muy pequeños (contacto elástico) hasta valores próximos a su dureza,  $H$ . Estos ensayos consisten en aplicar una cierta carga,  $P$ , sobre la superficie del material, utilizando para ello impresores esféricos de un material duro (acero, carburo de tungsteno, diamante, etc.).

Los ensayos de indentación Hertz han sido tradicionalmente utilizados para investigar la deformación plástica de materiales dúctiles, como los metales<sup>[1]</sup>. Más recientemente, su utilización se ha extendido al dominio de los materiales duros y frágiles, e incluso al dominio de los cerámicos avanzados<sup>[2]</sup>. Trabajos recientes sobre cerámicos monolíticos, en los que ha participado el Grupo de Materiales de

la Universidad de Extremadura, han puesto de manifiesto que el daño introducido por contacto está íntimamente relacionado con la microestructura del material<sup>[3]</sup> (sección 1.4). En los materiales homogéneos se originan fisuras tipo anillo, en la región exterior e inmediatamente próxima al círculo de contacto, que se propagan hacia el interior del material dando lugar a las clásicas fisuras cónicas. Cuando la microestructura del material es heterogénea, las fisuras anillo se deflectan a través de las interfases débiles, alejándose de las regiones sometidas a tracción, lo que imposibilita su desarrollo hacia la configuración de fisura cónica. Simultáneamente, las tensiones de cizalladura generan una zona de deformación plástica que se inicia a una cierta profundidad bajo el contacto, similar a la generada en materiales dúctiles como los metales. En materiales cerámicos esta deformación cuasiplástica se produce por defectos o fallas de cizalladura generadas en las interfases débiles.

Trabajos previos han mostrado que las estructuras bicapa pueden ofrecer mayor tolerancia al daño por contacto que cualquiera de sus materiales constituyentes<sup>[4]</sup>. Sin embargo, como se detalla en el Capítulo 5, en estos sistemas el número de posibles modos de daño es mayor (fisuras cónicas, radiales, circulares, etc.<sup>[5]</sup>). Los modos de daño por contacto en estructuras bicapa no se conocen suficientemente bien, por lo que su análisis constituye un primer objetivo de este trabajo. En particular, se proponen expresiones semiempíricas para las cargas críticas de inicio de cada uno de los modos de daño, en función de variables clave como el espesor del recubrimiento, la razón entre los módulos elásticos, resistencia a fractura y tensiones de límite elástico de los materiales constituyentes. Para ello, se efectúa un análisis detallado del campo de tensiones generado durante el contacto, mediante simulación por elementos finitos (FEM). La bondad de estas expresiones se verifica mediante comparación con los valores experimentales de cargas críticas. Además, se realiza un estudio preliminar sobre la fatiga de estas estructuras bicapa. Finalmente, a partir de las expresiones de cargas críticas se proponen diagramas de diseño que facilitan la selección de estructuras bicapa óptimas para cada aplicación.

El segundo grupo de objetivos de este trabajo consiste en analizar las propiedades de contacto de sistemas tricapa. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto la capacidad de las capas intermedias rígidas para proteger a las capas adyacentes. Así, por ejemplo, las estructuras utilizadas en restauraciones dentales consisten en un recubrimiento cerámico (0.5-1.5 mm de espesor) sobre un sustrato blando

(1-4 mm), siendo la porcelana el material cerámico que se utiliza con más frecuencia debido a razones estéticas. Sin embargo, la porcelana es demasiado frágil, de forma que la diferencia entre las propiedades elasto-plásticas de los dos materiales origina su fractura cuando se somete a contactos repetidos. Por ello, la tendencia actual consiste en introducir una tercera capa de un material duro, generalmente alúmina o alguna aleación metálica, entre la porcelana y el sustrato blando. Esta capa proporciona un soporte rígido a la capa de porcelana, evitando su flexión, a la vez que suministra protección adicional al sustrato. En principio, al aumentar el número de capas se incrementa la tolerancia al daño de la estructura. Sin embargo, el número de posibles modos de daño también aumenta. En este trabajo se ha efectuado un estudio sistemático para identificar estos posibles modos de daño, utilizando nuevamente ensayos Hertz y simulación FEM. Se pretende, además, extender el análisis de tensiones realizado en sistemas bicapa a estructuras tricapa con el fin de obtener relaciones semianalíticas para las cargas críticas de inicio de daño en estos sistemas.

Conviene destacar que en este trabajo se ha adoptado una filosofía basada en la prevención del daño y no en su contención. Es decir, se considera que aunque la activación de un determinado modo de daño no implica necesariamente el fallo de la estructura, sí que supone el comienzo del fin de su vida útil. Esta es la filosofía adoptada frecuentemente al diseñar numerosos sistemas multicapa, especialmente en aquellas estructuras destinadas a aplicaciones biomecánicas, donde el ambiente químico agresivo y las sollicitaciones cíclicas a las que se ven sometidas las prótesis favorecen enormemente los fenómenos de fatiga. Conviene notar que generalmente la utilización de estructuras multicapa mejora enormemente la tolerancia al daño, siendo éste generalmente el objetivo que se persigue al utilizar estructuras laminadas. Desafortunadamente, este aumento en la tolerancia al daño conlleva una disminución de la resistencia al inicio del daño. Es precisamente este último aspecto el que motiva el presente estudio: la necesidad de optimizar la resistencia (que no la tolerancia) al daño de estructuras multicapa. Por ello, este trabajo se orienta hacia la determinación de las cargas críticas de inicio del primer modo de daño, sin prestar atención a los modos de daño secundarios. Sin duda, los resultados obtenidos en este estudio, permitirán establecer las bases científicas para el diseño inteligente de estructuras multicapa resistentes al daño por contacto, aspecto este de gran relevancia tecnológica.

La presente memoria se ha estructurado de la siguiente forma:

En el Capítulo 1 se revisan las características del contacto hertziano en materiales masivos, por su relevancia para el posterior análisis de estructuras multicapa. En particular se resume la teoría del contacto elástico de Hertz, describiendo detalladamente el campo de tensiones que se genera, así como los diferentes modos de daño que pueden desarrollarse.

El Capítulo 2 se dedica a recopilar los resultados de la teoría de la flexión de láminas que son más relevantes para este estudio. En concreto se describe el procedimiento para determinar las tensiones de flexión generadas por cargas concentradas aplicadas sobre láminas que descansan en sustratos deformables. Esta expresión tiene interés para el análisis de tensiones en estructuras multicapa.

En el Capítulo 3 se describen los fundamentos del método de los elementos finitos. En particular, se analiza su aplicación a la resolución del problema general de la mecánica de sólidos. Además, se detallan las diferentes partes que configuran un modelo de elementos finitos y se describe brevemente el programa ABAQUS<sup>®</sup>, utilizado en este trabajo.

Los materiales y procedimientos experimentales utilizados en la realización de este estudio se describen en el Capítulo 4. Así, se especifican los diferentes materiales empleados, el proceso de fabricación de muestras multicapa, los ensayos mecánicos realizados y los modelos de simulación numérica utilizados.

Los dos últimos capítulos se dedican al análisis y discusión de los resultados. En el Capítulo 5 se presentan y discuten los resultados relativos a sistemas bicapa. En primer lugar, se revisan los modos de daño por contacto en estos sistemas, justificándolos en base al campo de tensiones calculado mediante FEM. A continuación, se analizan las dependencias funcionales de las tensiones de contacto y se establecen las bases para la predicción de cargas críticas. Se discute también el origen de ciertas discrepancias entre las cargas críticas calculadas y las determinadas experimentalmente. Seguidamente se estudian los fenómenos de fatiga y, finalmente, se proponen ciertos diagramas de diseño que permiten la optimización de estas estructuras.

En el Capítulo 6 se muestran y analizan los resultados relativos a sistemas tricapa, siguiendo un esquema similar al utilizado en el capítulo precedente. En primer lugar se revisan los modos de daño por contacto, seguidamente se analizan las dependencias funcionales del campo de tensiones y, finalmente, se proponen relaciones semiempíricas para la predicción de cargas críticas. Las cargas críticas así obtenidas se comparan con los resultados experimentales y se discuten algunos aspectos relativos al diseño y optimización de estructuras tricapa.

Los resultados correspondientes a la caracterización mecánica de los materiales que constituyen las diferentes estructuras multicapa se muestran en el Apéndice A.

Finalmente, se resumen las conclusiones e implicaciones más relevantes de este trabajo y se proponen, a modo de continuación lógica, futuros trabajos en esta línea de investigación.



# Capítulo 1

## Contacto hertziano

En este capítulo se revisan las principales características del contacto hertziano por su relevancia para el análisis de resultados de indentación con impresores esféricos (ensayos Hertz). Tras una breve revisión de la teoría del contacto elástico de Hertz, se describen detalladamente las componentes del campo de tensiones que se desarrolla alrededor del área de contacto. Finalmente, se analizan los modos de daño que se generan en materiales monolíticos sometidos a ensayos Hertz.

### 1.1. Teoría de Hertz del contacto elástico

Los ensayos de indentación Hertz, también denominados Brinell, consisten en la aplicación de una cierta carga  $P$  sobre la superficie del material objeto de estudio, utilizando para ello esferas de un material rígido. Estos ensayos han sido tradicionalmente utilizados para investigar la deformación plástica de materiales dúctiles, como los metales<sup>[1]</sup>. Más recientemente, su utilización se ha extendido a los materiales duros y frágiles (vidrio, porcelana, etc.) e, incluso, al dominio de los cerámicos tenaces<sup>[2,6]</sup>. La diferencia esencial entre estos ensayos y los realizados

con impresores puntiagudos, tipo Vickers, Knoop, etc., estriba en que, en estos últimos, la concentración de tensiones alrededor de la punta provoca deformación plástica desde el inicio del contacto. En cambio, en los ensayos Hertz existe siempre un cierto rango de cargas para el que la deformación es exclusivamente elástica. De este modo, estos ensayos pueden ser utilizados para estudiar las propiedades elásticas de los materiales involucrados en el contacto. Además, los ensayos Hertz permiten simular cualquier tipo de contacto real seleccionando adecuadamente el radio del impresor y la carga aplicada al objeto de ejercer una determinada presión de contacto.

El problema del contacto elástico entre dos cuerpos ha sido ampliamente tratado en la literatura<sup>[7-10]</sup>, debido a su interés teórico y práctico. La solución analítica correspondiente al caso de superficies de revolución se debe a Hertz\* y data de 1880<sup>[11,12]</sup>. El contenido de esta sección se centra en el estudio del contacto elástico entre un sólido esférico de radio  $R$  y otro plano (Figura 1.1). No obstante, el análi-

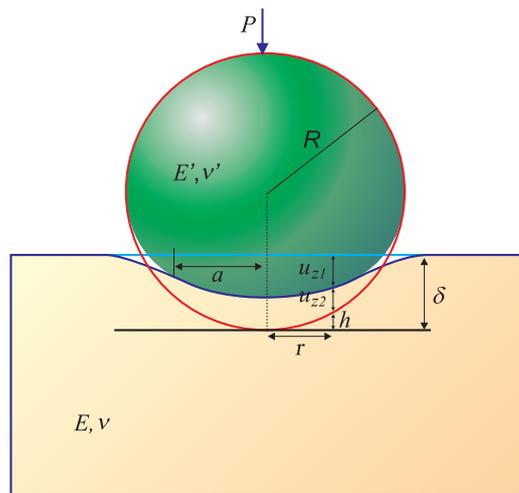


Figura 1.1: Geometría del contacto hertziano. Las deformaciones se han exagerado por razones de claridad.

sis efectuado es también válido para el contacto entre dos superficies de revolución de radios de curvatura  $R_a$  y  $R_b$ , en cuyo caso el parámetro  $R$  que aparece en las

\*La teoría de Hertz surge a raíz de sus estudios sobre la influencia de las deformaciones elásticas de dos lentes en contacto en su diagrama de interferencias.

expresiones representa un radio de curvatura efectivo<sup>[9]</sup>, dado por la expresión

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} \quad (1.1)$$

En este análisis se supone que no existe fricción y que la carga aplicada es normal a las dos superficies y, por tanto, no existe deslizamiento relativo entre ellas.

Considérese el contacto entre un sólido plano ( $R_a \rightarrow \infty$ ), de módulo elástico  $E$  y coeficiente de Poisson  $\nu$ , y otro esférico de radio  $R$ , y constantes elásticas  $E'$  y  $\nu'$ , sobre el que se aplica una fuerza  $P$ , tal y como se ilustra en la Figura 1.1. Para el cálculo de las deformaciones locales Hertz consideró que los dos cuerpos podían tratarse como sólidos elásticos semiinfinitos sometidos a presiones distribuidas sobre la superficie circular de contacto. Para que esta simplificación pueda aceptarse, se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. El área de contacto debe ser pequeña en comparación con las dimensiones de ambos cuerpos, para ignorar los efectos debidos a las superficies libres.
2. El radio del área de contacto,  $a$ , debe ser considerablemente menor que  $R$ . De este modo, se puede considerar que la superficie de contacto es plana y que las deformaciones son muy pequeñas, i.e. exclusivamente elásticas.

Esta aproximación permite utilizar los métodos de resolución de problemas de contorno válidos para semiespacios elásticos.

A continuación se deducen los resultados obtenidos por Hertz, aunque no se sigue estrictamente el razonamiento efectuado por este autor. De hecho, al objeto de efectuar un tratamiento algo más exhaustivo, se utilizan conocimientos posteriores a su época.

La condición de contorno para los desplazamientos se obtiene fácilmente a partir de la configuración geométrica ilustrada en la Figura 1.1

$$u_{z1} + u_{z2} = \delta - h \quad (1.2)$$

donde  $u_{z1}$  y  $u_{z2}$  son los desplazamientos, respecto a las superficies sin deformar,

de puntos de la superficie plana y esférica, respectivamente, que se encuentran en contacto a una distancia  $r$  del eje de carga. El desplazamiento del centro de la esfera se denota por  $\delta$ , mientras que  $h$  es la distancia entre las superficies sin deformar a la distancia  $r$  del eje al inicio del contacto. Puede comprobarse fácilmente que  $h = \frac{r^2}{2R}$ , y por tanto se obtiene

$$u_{z1} + u_{z2} = \delta - \frac{r^2}{2R} \quad (1.3)$$

Por analogía con soluciones de potencial electrostático, Hertz comprobó que una distribución de presiones elíptica genera desplazamientos compatibles con la condición (1.3)<sup>[6,9,13]</sup>. Esta distribución de presiones (Figura 1.2) puede expresarse

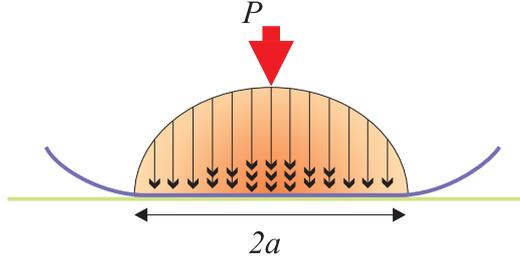


Figura 1.2: Distribución de presiones en un contacto hertziano.

matemáticamente en la forma

$$p(r) = \begin{cases} p_{\text{máx}} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (1.4)$$

donde  $p_{\text{máx}}$  es la presión máxima, localizada en el eje de carga, y  $a$  el radio del contacto. Conviene resaltar que cualquier otra distribución de presiones no satisface la condición (1.3) y, por tanto, la distribución de presiones de Hertz es solución única del problema<sup>[9]</sup>.

Conocida la distribución de presiones, los desplazamientos normales se calculan a partir de la expresión<sup>[7,9,13]</sup>

$$u_z = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint_{\mathcal{S}} p \, d\mathcal{S} \quad (1.5)$$

que se obtiene utilizando la solución de Boussinesq correspondiente a un semiespacio sometido a una carga puntual<sup>[8,14]</sup> y el principio de superposición. La integral se extiende a toda la superficie de contacto,  $\mathcal{S}$ . A partir de esta expresión se obtienen los desplazamientos  $u_{z1}$  y  $u_{z2}$  en la forma

$$u_{zi} = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} \frac{\pi p_{\text{máx}}}{4a} (2a^2 - r^2) \quad (1.6)$$

para  $r \leq a$ , y siendo  $E_i$  y  $\nu_i$  el módulo de Young y el coeficiente de Poisson del cuerpo considerado. Sustituyendo los desplazamientos  $u_{z1}$  y  $u_{z2}$  calculados de esta forma en la ecuación (1.3) se obtiene

$$\frac{\pi p_{\text{máx}}}{4aE^*} (2a^2 - r^2) = \delta - \frac{r^2}{2R} \quad (1.7)$$

donde se ha definido el módulo efectivo  $E^*$  como

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu^2}{E} + \frac{1 - \nu'^2}{E'} \quad (1.8)$$

Puesto que (1.7) tiene que verificarse para cualquier  $r$ , igualando términos se obtiene

$$\begin{cases} a = \frac{\pi R}{2E^*} p_{\text{máx}} \\ \delta = \frac{\pi a}{2E^*} p_{\text{máx}} \end{cases} \quad (1.9)$$

Teniendo en cuenta además que

$$P = \int_0^a p(r) 2\pi r \, dr = \frac{2}{3} p_{\text{máx}} \pi a^2 \quad (1.10)$$

se obtienen finalmente las expresiones del radio de contacto,  $a$ , y el desplazamiento,  $\delta$ , en función de la carga aplicada

$$\begin{cases} a = \left( \frac{3PR}{4E^*} \right)^{1/3} \\ \delta = \frac{a^2}{R} = \left( \frac{9P^2}{16RE^{*2}} \right)^{1/3} \end{cases} \quad (1.11)$$

Por otro lado, se obtiene que la presión media en la superficie de contacto, que denotaremos  $p_0$ , verifica

$$p_0 = \frac{P}{\pi a^2} = \frac{2}{3} p_{\text{máx}} = \left( \frac{16PE^{*2}}{9\pi^3 R^2} \right)^{1/3} \quad (1.12)$$

Combinando la ecuación (1.12) con la expresión de  $a$  en (1.11), se obtiene

$$p_0 = \left( \frac{4E^*}{3\pi} \right) \frac{a}{R} \quad (1.13)$$

o, como es más habitual,<sup>[2]</sup>

$$p_0 = \left( \frac{3E}{4\pi k} \right) \frac{a}{R} \quad (1.14)$$

donde

$$k = \frac{9E}{16E^*} = \frac{9}{16} \left[ (1 - \nu^2) + (1 - \nu'^2) \frac{E}{E'} \right] \quad (1.15)$$

La expresión (1.14) es la ecuación fundamental de la teoría de Hertz que, como se detalla en la sección 1.3, relaciona tensiones y deformaciones en régimen elástico. En esencia, se trata de la expresión de la ley de Hooke para el contacto hertziano.

## 1.2. Campo de tensiones hertziano

El análisis de Hertz se centra exclusivamente en la distribución de presiones y desplazamientos en la zona de contacto, siendo Huber en 1904 quien determinó el campo de tensiones en cualquier punto del sólido semiinfinito<sup>[15]</sup>. Las expresiones para las componentes del campo de tensiones generado en el contacto elástico hertziano se encuentran recogidas en la literatura<sup>[2,6,9,13]</sup>.

Considerando un sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  con el eje  $z$  en la dirección del eje de carga (Figura 1.3), las componentes del campo de tensiones se

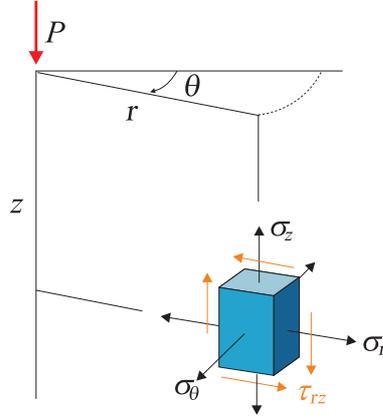


Figura 1.3: Componentes del tensor de tensiones en coordenadas cilíndricas.

expresan en la forma<sup>[2]</sup>

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma_r}{p_0} &= \frac{1}{2} (1 - 2\nu) \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left[ 1 - \left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right)^3 \right] + \\
 &+ \frac{3}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right) \left[ \frac{(1 - \nu)u}{a^2 + u} + (1 + \nu) \frac{\sqrt{u}}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{u}} - 2 \right] \\
 \frac{\sigma_\theta}{p_0} &= \frac{1}{2} (1 - 2\nu) \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left[ 1 - \left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right)^3 \right] + \frac{3}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right)^3 \frac{a^2 u}{u^2 + a^2 z^2} + \\
 &+ \frac{3}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right) \left[ \frac{(1 - \nu)u}{a^2 + u} + (1 + \nu) \frac{\sqrt{u}}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{u}} + 2\nu \right] \\
 \frac{\sigma_z}{p_0} &= \frac{3}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right)^3 \frac{a^2 u}{u^2 + a^2 z^2} \\
 \frac{\tau_{rz}}{p_0} &= \frac{3}{2} \frac{r z^2}{u^2 + a^2 z^2} \frac{a^2 \sqrt{u}}{a^2 + u}
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

donde

$$u = \frac{1}{2} \left[ (r^2 + z^2 - a^2) + \sqrt{(r^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2} \right]$$

Como puede apreciarse, todas las tensiones se escalan con la presión media de contacto,  $p_0$ . En la Figura 1.4 se muestra la distribución de tensiones a lo largo del eje de carga y en la superficie del sólido elástico.

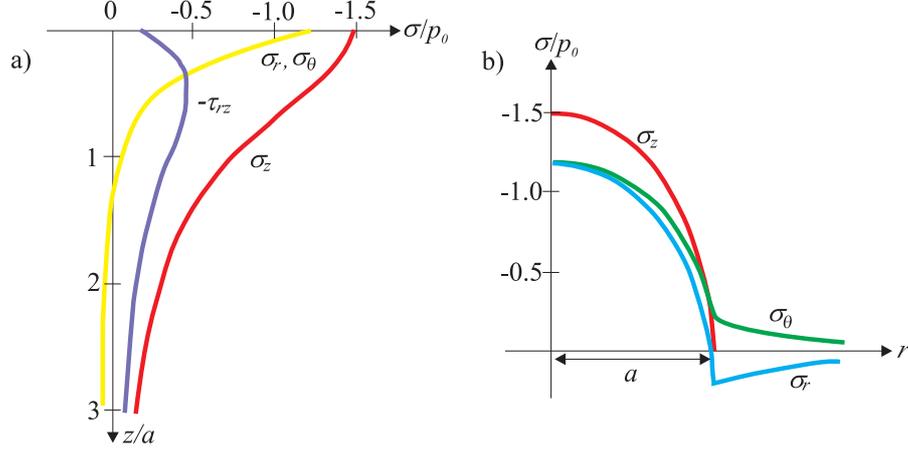


Figura 1.4: Distribución de tensiones en un contacto hertziano en unidades de  $p_0$ : a) en el eje de carga y b) en la superficie. (Elaboración propia a partir de Johnson<sup>[9]</sup>).

A partir de las expresiones (1.16) es posible calcular las tensiones principales resolviendo el correspondiente problema de autovalores, obteniéndose finalmente

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) + \left\{ \left[ \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) \right]^2 + \tau_{rz}^2 \right\}^{1/2} \\ \sigma_2 &= \sigma_\theta \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) - \left\{ \left[ \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) \right]^2 + \tau_{rz}^2 \right\}^{1/2}\end{aligned}\quad (1.17)$$

Definidas de esta forma se verifica que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  en todas partes, salvo en una pequeña región cercana a la superficie, justo bajo el círculo de contacto ( $0.97a \leq r \leq a$ ), donde  $\sigma_3 > \sigma_2$ <sup>[17]</sup>. También se verifica que en el eje de carga  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_\theta = \sigma_r$  (Figura 1.4a). La tensión tangencial máxima viene dada por

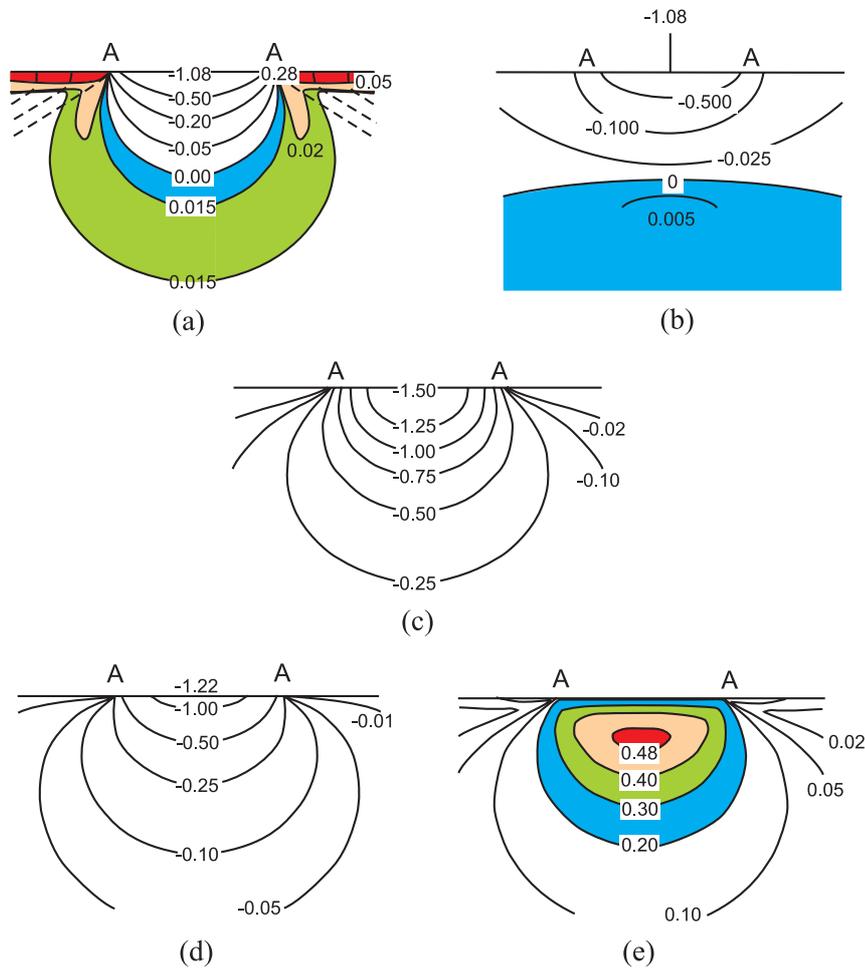


Figura 1.5: Tensiones principales del campo hertziano en unidades de  $p_0$  para  $\nu = 0.22$ : a) tensión principal máxima,  $\sigma_1$ , b) tensión principal  $\sigma_2$ , c) tensión principal mínima,  $\sigma_3$ , d) tensión hidrostática,  $\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ , y e) tensión máxima de cizalladura,  $\tau_{13}$ . Los límites del área de contacto se han indicado con una A. (Elaboración propia a partir de las referencias<sup>[2,6,16]</sup>).

$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$  y coincide con  $\tau_{rz}$  en el eje de carga. En la Figura 1.5 se muestran contornos de algunas de estas tensiones; se han coloreado las regiones sometidas a tensiones de tracción y de cizalladura, que son las causantes de los procesos inelásticos que sufre un material real, ya sea fractura o deformación plástica (ver sección 1.4). En la figura 1.5 se aprecia que el campo hertziano tiene una importante componente hidrostática, así como fuertes tensiones de cizalladura en una región subsuperficial bajo el contacto. Por el contrario, las tensiones de tracción son relativamente modestas y están localizadas en una pequeña región superficial, situada justo en el exterior del círculo de contacto.

### 1.3. Curvas tensión-deformación de indentación

Al igual que sucede con los ensayos uniaxiales, los ensayos de indentación Hertz permiten obtener curvas tensión-deformación características de cada material. Si en aquéllos la tensión es uniforme y viene dada por el cociente entre la carga y el área transversal de la probeta, en los ensayos Hertz el campo de tensiones es mucho más complejo. No obstante, las tensiones se escalan con la presión media\*,  $p_0 = \frac{P}{\pi a^2}$ , por lo que ésta sería la magnitud a utilizar si se pretende efectuar una representación en la forma de curva tensión-deformación<sup>[2,16]</sup>. Por otro lado, la deformación en el ensayo uniaxial también es uniforme y se define por  $\Delta l/l_0$ , de forma que las dos situaciones de la Figura 1.6a, que difieren exclusivamente en un factor de escala, corresponden a estados de deformación equivalentes. Análogamente, en los ensayos Hertz las dos situaciones de la Figura 1.6b corresponden a estados de deformación equivalentes, puesto que solamente se diferencian en un factor de escala (principio de similitud geométrica). Las dos situaciones (Figura 1.6b) tienen en común un valor idéntico para la razón entre el radio de contacto y el radio de curvatura de la huella, que es prácticamente igual al radio de la esfera<sup>[1]</sup>. Por consiguiente, se puede concluir que el campo de deformaciones es función de la magnitud adimensional,  $a/R$ , por lo que sería ésta la magnitud a utilizar en la representación tensión-deformación correspondiente a ensayos Hertz<sup>[2,16,18]</sup>.

---

\*Ver ecuación (1.16).

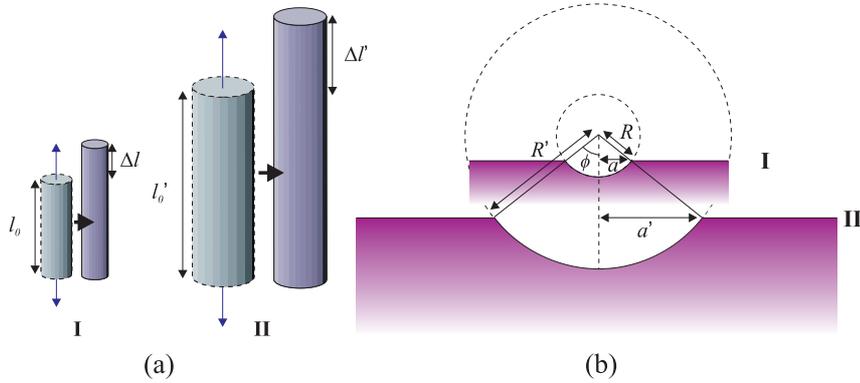


Figura 1.6: Configuraciones geoméricamente similares que corresponden a estados macroscópicos de deformación equivalentes en: a) ensayos uniaxiales y b) ensayos de indentación Hertz. En ambos casos las situaciones I y II difieren exclusivamente en un factor de escala.

También es posible justificar la elección de la razón  $a/R$  como variable representativa de las deformaciones en el material analizando la expresión (1.14). Esta expresión pone de manifiesto que existe una relación lineal entre  $p_0$  y la razón  $a/R$  en condiciones de contacto elástico, siendo la constante de proporcionalidad función exclusivamente de las constantes elásticas de los dos materiales en contacto. Si se tiene en cuenta que  $p_0$  es la magnitud representativa de las tensiones en el material, la relación (1.14) no es más que una expresión de la Ley de Hooke, sugiriendo que la razón  $a/R$  es la magnitud representativa del campo de deformaciones. Al ser dichas magnitudes las adecuadas en condiciones elásticas, se puede admitir que también serán adecuadas en contacto elástico-plástico, si bien la relación entre ambas será más compleja.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, es posible obtener una curva experimental tensión-deformación de indentación (i.e.  $p_0$  frente a  $a/R$ ), conociendo la carga aplicada  $P$ , el radio de contacto  $a$  y el radio del impresor  $R$ . Esta curva caracteriza la respuesta mecánica del material sometido a un ensayo de indentación Hertz y es única, i.e. independiente de los radios de los impresores utilizados<sup>[1,2]</sup>. Esta independencia respecto al radio del impresor puede justificarse en base a la Ley de Meyer (1908)<sup>[1]</sup>. De acuerdo con esta ley empírica, para un valor de  $R$  determinado, la carga aplicada y el radio de la huella residual cumplen una ley

simple de la forma

$$P = \zeta a^n \quad (1.18)$$

siendo  $\zeta$  y  $n$  constantes propias del material estudiado, con  $2 \leq n \lesssim 2.5$  en régimen plástico. Si se aplica la misma carga  $P$  utilizando dos esferas de radios distintos, se verifica

$$P = \zeta_1 a_1^{n_1} = \zeta_2 a_2^{n_2} \quad (1.19)$$

Meyer comprobó que el índice  $n$  es independiente del radio de la esfera, mientras que  $\zeta$  varía con  $R$  en la forma

$$\zeta_1 R_1^{n-2} = \zeta_2 R_2^{n-2} = \Lambda \quad (1.20)$$

siendo  $\Lambda$  una constante. Por tanto, combinando (1.19) y (1.20) se obtiene

$$P = \frac{\Lambda a_1^n}{R_1^{n-2}} = \frac{\Lambda a_2^n}{R_2^{n-2}} \quad (1.21)$$

que conduce finalmente a

$$\frac{P}{\pi a^2} = \Lambda' \left( \frac{a}{R} \right)^{n-2} \quad (1.22)$$

siendo  $\Lambda'$  una constante que depende del material. Por consiguiente, la presión media de contacto depende exclusivamente del estado de deformación (i.e. de  $a/R$ ). Ello justifica que para un material dado la curva tensión-deformación de indentación sea universal, es decir, independiente del radio de la esfera utilizada.

En la Figura 1.7 se muestra un ejemplo de curva tensión-deformación de indentación. El tramo lineal corresponde al régimen elástico y, de acuerdo con las ecuaciones de Hertz (sección 1.1), su pendiente es función exclusivamente de las constantes elásticas del material ensayado y del impresor. Por ello, estos ensayos pueden ser utilizados para determinar las propiedades elásticas del material, si se conocen las del impresor, tal y como se describe en la sección 4.2.1.

A partir de una cierta presión de contacto,  $p_Y$ , la repuesta deja de ser lineal, sugiriendo el inicio de procesos de deformación irreversibles. De acuerdo con la

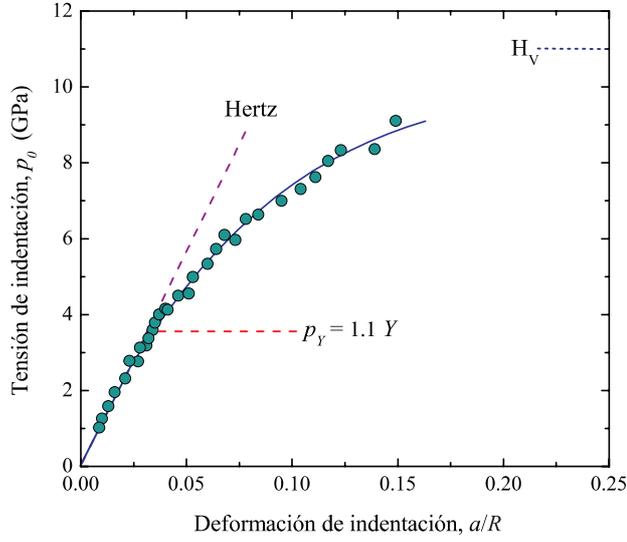


Figura 1.7: Ejemplo de curva tensión-deformación de indentación. La curva corresponde a carburo de silicio sinterizado con fase líquida. Se han marcado en línea discontinua la recta elástica de Hertz y la presión crítica de inicio de plasticidad,  $p_Y$ , para este material. La línea horizontal punteada representa la dureza Vickers obtenida independientemente para este SiC. (Elaboración propia a partir de Ortiz<sup>[19]</sup>)

Figura 1.4, la tensión de cizalladura,  $\tau_{13}$ , alcanza su valor máximo en el eje de carga a una profundidad  $\simeq 0.5a$ , siendo este valor<sup>[2]</sup>

$$\tau_{\text{máx}} \simeq 0.47p_0 \quad (1.23)$$

Lógicamente, la deformación plástica se inicia cuando  $\tau_{\text{máx}}$  alcanza un cierto valor crítico. En el caso particular de contacto hertziano, los dos criterios de plasticidad más habituales, i.e. el criterio de Tresca y el de Von Mises, coinciden\*. De acuerdo con estos criterios, el comienzo del régimen plástico tendrá lugar cuando

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Y}{2} \quad (1.24)$$

donde  $Y$  es la tensión de límite elástico. Teniendo en cuenta la ecuación (1.23), se

\*Ello se debe a que el inicio de plasticidad tiene lugar en el eje de carga, donde  $\sigma_1 = \sigma_2$  (ver sección 1.2) y cuando esto sucede ambos criterios son equivalentes<sup>[20–22]</sup>.

llega finalmente a que la presión de contacto crítica para el inicio de plasticidad viene dada por

$$p_y \simeq 1.1 Y \quad (1.25)$$

De este modo, los ensayos de indentación Hertz pueden ser también utilizados para determinar la tensión de límite elástico,  $Y$ <sup>[23]</sup> (ver sección 4.2.1). Por otro lado, conviene destacar que el límite asintótico al que tiende la curva tensión-deformación para valores elevados de  $a/R$  corresponde a una presión de contacto igual a la dureza del material (Figura 1.7).

Según lo expuesto, es evidente que los ensayos Hertz constituyen un método experimental de gran interés para la caracterización mecánica de materiales muy diversos. A diferencia de los ensayos de indentación con impresores puntiagudos (Vickers, Knoop, etc.), en el ensayo Hertz es posible controlar la presión de contacto, provocando en el material deformaciones tanto reversibles como irreversibles y, por tanto, obtener una curva tensión-deformación completa. Así, estos ensayos permiten evaluar las propiedades elásticas ( $E$ ) y plásticas ( $Y$ ), así como investigar los modos de daño por contacto que se generan en el material.

## 1.4. Mecanismos de daño por contacto hertziano

Las tensiones generadas mediante ensayos de indentación están concentradas en pequeñas regiones y pueden ser suficientemente elevadas para provocar procesos irreversibles (deformación permanente o fractura) a cargas relativamente bajas. En materiales monolíticos sometidos a ensayos Hertz se han identificado dos modos de daño básicos (Figura 1.8)<sup>[1-3,24]</sup>:

- Fisuras cónicas que se inician en la superficie superior del material, justo en el exterior del círculo de contacto.
- Deformación plástica o *cuasi-plástica* (ver sección 1.4.2) que se produce en una región subsuperficial, aproximadamente hemisférica, situada bajo el contacto.

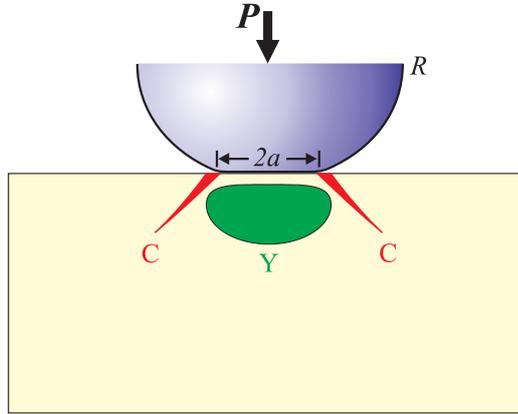


Figura 1.8: Modos de daño que pueden generarse en materiales monolíticos bajo contacto hertziano: modo frágil, fisura cónica (C); modo dúctil, deformación irreversible (Y).

A continuación se justifican y analizan detalladamente ambos modos de daño en base al campo de tensiones hertziano. En particular, se muestran expresiones analíticas para las cargas críticas de inicio de estos modos de daño, en función de parámetros geométricos (p. ej.  $R$ ) y de las propiedades mecánicas de los materiales involucrados.

#### 1.4.1. Modo frágil: Fractura cónica

La aparición de fisuras cónicas en materiales frágiles, debido a contactos romos, es un fenómeno bien conocido y ampliamente estudiado tanto en vidrios<sup>[25-27]</sup> como en monocristales<sup>[28,29]</sup>. Estas fisuras tienen su origen en las tensiones de tracción que se desarrollan durante el contacto en la superficie del material, justo en la región exterior e inmediatamente próxima al círculo de contacto (Figura 1.5). La tensión responsable es la tensión principal máxima  $\sigma_1$ , que en la superficie tiene dirección radial (Figura 1.9). El máximo valor de la tensión  $\sigma_1$  se alcanza justo en el límite del círculo de contacto y resulta igual a

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{1}{2}(1 - 2\nu)p_0 \quad (1.26)$$

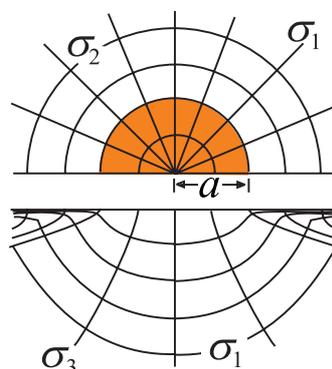


Figura 1.9: Trayectorias de las tensiones principales generadas mediante contacto hertziano en la superficie (arriba) y en sección (abajo). La región coloreada representa la superficie de contacto. (Elaboración propia a partir de Lawn<sup>[29]</sup>).

A partir de algún defecto preexistente en esta región se inicia una fisura que crece en superficie hasta cerrarse formando un anillo en torno al contacto. Posteriormente esta fisura anillo se propaga hacia el interior del material (Figura 1.10), siguiendo aproximadamente las trayectorias de la tensión  $\sigma_3$  (Figura 1.9), dando

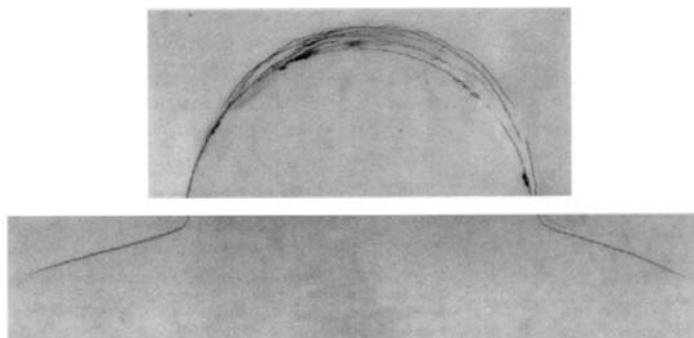


Figura 1.10: Micrografías de una fisura cónica en  $Si_3N_4$  producida por un ensayo de indentación Hertz. Se muestra la superficie del material (imagen superior) y una sección de éste (imagen inferior). (Según Lee et al.<sup>[30]</sup>).

lugar a la típica fisura cónica característica de materiales frágiles y homogéneos, como el vidrio común (Figura 1.11). Debido a que la tensión  $\sigma_1$  decrece muy rápidamente con la distancia a la región de contacto, la fisura se detiene tras alcanzar

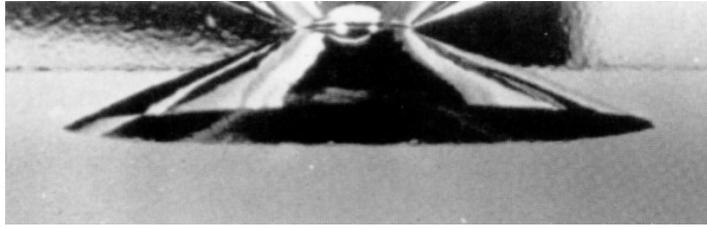


Figura 1.11: Fotografía de una fisura cónica en vidrio originada por un indenteor cilíndrico. La configuración de la fisura es similar a la producida en un contacto hertziano. (Según Roesler<sup>[26]</sup>).

una cierta longitud, por lo que las fisuras cónicas constituyen un ejemplo típico de fisura estable<sup>[31]</sup>. Este hecho permite determinar la tenacidad del material a partir de medidas de la longitud de fisuras cónicas para diferentes cargas<sup>[27,32]</sup>. Si se incrementa la carga lo suficiente el círculo de contacto acaba atrapando y cerrando la fisura anillo original, si bien se originan nuevas fisuras anillo. Al descargar, las fisuras se cierran, pero todavía pueden ser observadas mediante microscopía óptica<sup>[33]</sup>.

La morfología de las fisuras cónicas se puede alterar bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, en monocristales los patrones de clivaje característicos del cristal se superponen a la geometría general de la fisura cónica (Figura 1.12). Por otro lado, si la carga aplicada tiene componente tangencial, es decir, si la esfera desliza

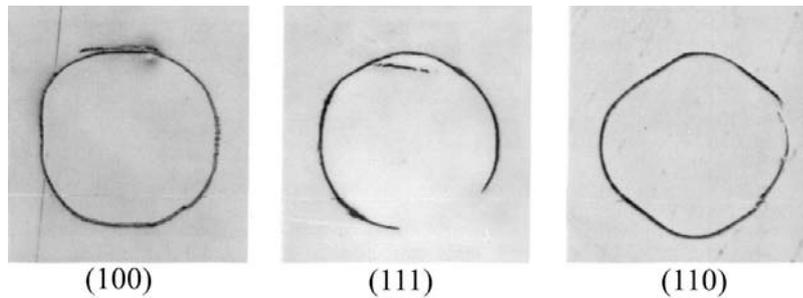


Figura 1.12: Micrografías de fisuras cónicas desarrolladas sobre diferentes caras de un monocristal de silicio. Los segmentos más rectos corresponden a planos de clivaje  $\{111\}$  del silicio. (Según Lawn<sup>[29]</sup>).

sobre la superficie del material, la fricción modifica el campo de tensiones en la región cercana al contacto<sup>[34,35]</sup>. En particular, las tensiones de tracción aumentan a ambos lados de la esfera y el desplazamiento del círculo de contacto inhibe el crecimiento de fisuras en la región frontal. Como resultado se generan numerosas fisuras cónicas parciales<sup>[36]</sup> (Figura 1.13). En cambio, la fricción tiene escasa influencia en el campo de tensiones lejos de la superficie y, por ello, no modifica apreciablemente la profundidad de las fisuras cónicas parciales generadas.

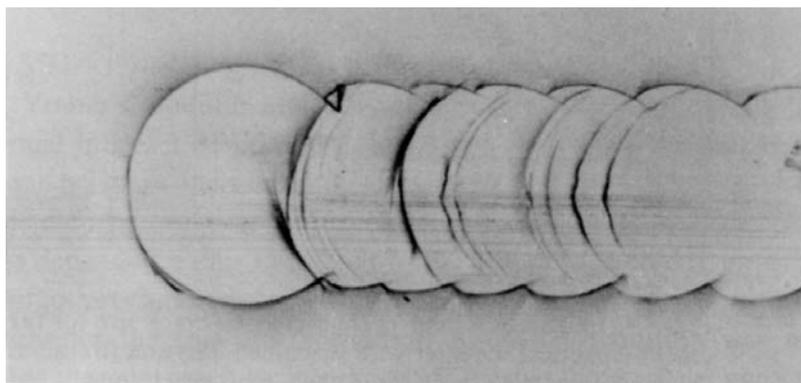


Figura 1.13: Trazas superficiales de fisuras cónicas parciales generadas en vidrio por una esfera que desliza de izquierda a derecha. El coeficiente de fricción en el contacto es 0.1. (Según Lawn et al.<sup>[35]</sup>).

### Carga crítica para el inicio de fisuras cónicas

Los estudios relativos al inicio de fisuras cónicas en materiales monolíticos bajo contacto hertziano se remontan a 1891, cuando Auerbach estableció su famosa ley empírica que relaciona la carga crítica para el inicio de fisuras cónicas,  $P_C$ , con el radio de la esfera utilizada:  $P_C \propto R^{37}$ . Los límites de validez de esta ley fueron establecidos por Tillet<sup>[2,25]</sup>, quién mostró la existencia de dos regiones (Figura 1.14): la región de Auerbach correspondiente a valores de  $R$  pequeños, donde  $P_C \propto R$ , y una segunda región, correspondiente a valores elevados de  $R$ , en la que la curva se desvía de esa dependencia, tendiendo asintóticamente a  $P_C \propto R^2$ . Estos resultados constituyen una de las paradojas más célebres de la mecánica de la fractura. Efectivamente, si se admite que la fisura se inicia cuando la tensión

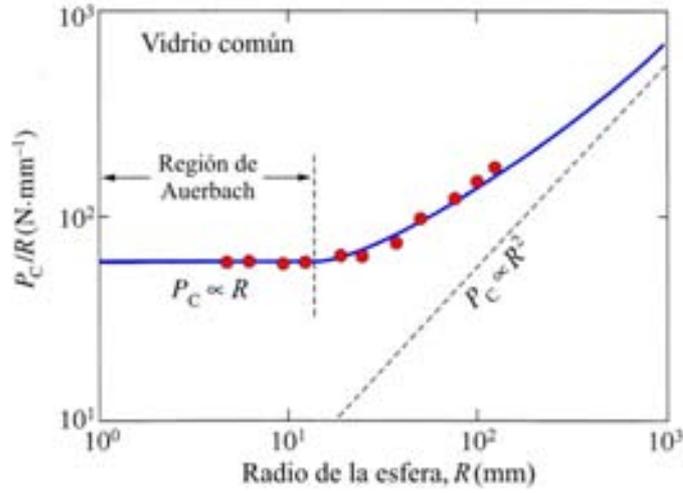


Figura 1.14: Cargas críticas experimentales para el inicio de fisuras cónicas en función del radio del impresor. Se muestra  $P_C/R$  en función de  $R$  para el vidrio pulido. La línea discontinua es la predicción a partir de la ecuación (1.27). (Según Lawn<sup>[2]</sup>).

de tracción máxima es igual a la resistencia a fractura del material ( $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_F$ ), combinando las ecuaciones (1.26) y (1.12) se obtiene

$$P_C = \frac{9}{128} \frac{[\pi(1-2\nu)\sigma_F]^3}{E^2} R^2 \quad \Rightarrow \quad P_C \propto R^2 \quad (1.27)$$

Sin embargo, de acuerdo con los resultados experimentales, esta dependencia sólo se verifica para  $R \rightarrow \infty$ . De hecho las cargas críticas estimadas mediante esta expresión son muy inferiores a los valores experimentales.

La explicación de esta paradoja ha sido motivo de controversia durante años<sup>[2,27]</sup>. Algunos autores proponían una explicación basada en la distribución estadística de los defectos precursores en la superficie del material<sup>[38,39]</sup>. Efectivamente, las tensiones de tracción en la superficie superior del material se localizan en una región anular cuya área disminuye con  $R$  o, más concretamente, con el radio de contacto. Al disminuir el tamaño de la región sometida a tracción disminuye la probabilidad de encontrar en su interior defectos precursores de cierto tamaño. Ello implicaría que las fisuras se desarrollarían a partir de defectos de menor ta-

maño y, por tanto, la tensión crítica sería más elevada. En consecuencia, la carga crítica para el inicio de fisuras cónicas aumenta al disminuir el radio de la esfera. Sin embargo, esta explicación no es satisfactoria ya que experimentalmente se ha puesto de manifiesto la insensibilidad de  $P_C$  respecto al tamaño de los defectos precursores en la región de Auerbach<sup>[40]</sup>.

En 1967 Frank y Lawn<sup>[17]</sup> se propusieron derivar la ley de Auerbach a partir de primeros principios haciendo uso de la mecánica de fractura de Griffith-Irwin. Según estos autores, para valores pequeños de  $R$  la tensión de tracción disminuye dramáticamente conforme aumenta la profundidad. Esto implica que la aparición (*pop-in*) de la fisura cónica viene precedida de un complejo proceso de crecimiento estable hasta un cierto tamaño crítico,  $c^*$ , lo que justificaría la independencia de  $P_C$  respecto al tamaño de los defectos precursores. La condición crítica de inicio es que el factor de intensidad de tensiones,  $K(c)$ , sea igual a la tenacidad del material,  $T$ , supuesta ésta constante (i.e.  $K(c) = T$ ) y que  $\frac{dK}{dc} > 0$ . Utilizando este criterio de Griffith-Irwin se obtiene<sup>[2,6,17,27,32]</sup>

$$P_C = \Theta \frac{T^2}{E^*} R \quad (1.28)$$

que no es más que una expresión de la ley de Auerbach, donde  $\Theta = \Theta(\nu)$  es un parámetro adimensional que puede ser determinado experimentalmente.

Para los radios de indentor utilizados habitualmente en ensayos Hertz se verifica que  $P_C \propto R$  (región de Auerbach), lo cual justifica que en adelante se utilice la expresión (1.28) para evaluar las cargas críticas de inicio de fisuras cónicas.

Cuando la fuerza aplicada tiene componente tangencial las cargas críticas se reducen considerablemente, debido al ya mencionado aumento de las tensiones en superficie<sup>[34-36]</sup>.

La aparición de fisuras cónicas en materiales frágiles rara vez conduce al fallo definitivo del material debido a su gran estabilidad. Sin embargo, provoca fenómenos de fatiga en el material, especialmente bajo contactos cíclicos y en ambientes húmedos o agresivos, debido a procesos de crecimiento lento de fisuras<sup>[41,42]</sup>. En condiciones extremas la acumulación de este tipo de fisuras puede provocar la extracción de material en la superficie<sup>[2]</sup>.

### 1.4.2. Modo dúctil: Deformación subsuperficial irreversible

La elevada tenacidad de los materiales dúctiles inhibe la generación de fisuras cónicas durante el contacto hertziano, siendo por ello el modo de daño más habitual la deformación plástica localizada. Las tensiones responsables de este tipo de daño son las tensiones de cizalladura, cuyos valores más elevados corresponden a la tensión  $\tau_{13}$  y se localizan en una región aproximadamente hemisférica situada bajo el contacto (Figura 1.5). Como ya se ha mencionado en la sección 1.3, el valor máximo de  $\tau_{13}$  (ecuación (1.23)) se alcanza en el eje de carga a una profundidad de  $\simeq 0.5a$ <sup>[1,2]</sup>.

En la Figura 1.15 se muestran micrografías del daño generado en un acero



*Figura 1.15: Deformación plástica generada en un acero blando sometido a un ensayo Hertz. Micrografías obtenidas a partir de muestras preparadas mediante de la técnica de intercaras unidas (bonded-interface)<sup>[43,44]</sup>. Imagen superior: superficie del material. Imagen inferior: sección.*

blando mediante un ensayo de indentación Hertz. Como puede apreciarse, la región deformada plásticamente se sitúa bajo la zona de contacto y presenta una geometría similar a la de los contornos correspondientes a la tensión  $\tau_{13}$ . En la Figura 1.16 se ilustra esquemáticamente la evolución de la zona deformada al aumentar la carga. Como puede apreciarse, la deformación se inicia en una región

hemisférica situada a una profundidad  $\simeq 0.5a$  (Figura 1.16a) que, posteriormente, crece lateralmente y hacia el interior del material, y sólo muy levemente hacia la superficie (Figura 1.16b). Cuando la carga es suficientemente elevada, la zona deformada alcanza la superficie superior y su tamaño lateral coincide con el diámetro del contacto (Figura 1.16c). Llegado a este punto, la región deformada crece en superficie aproximadamente como el radio de contacto y más rápidamente en regiones alejadas del contacto, de modo que al final adopta una característica forma de caldero (Figura 1.16d)

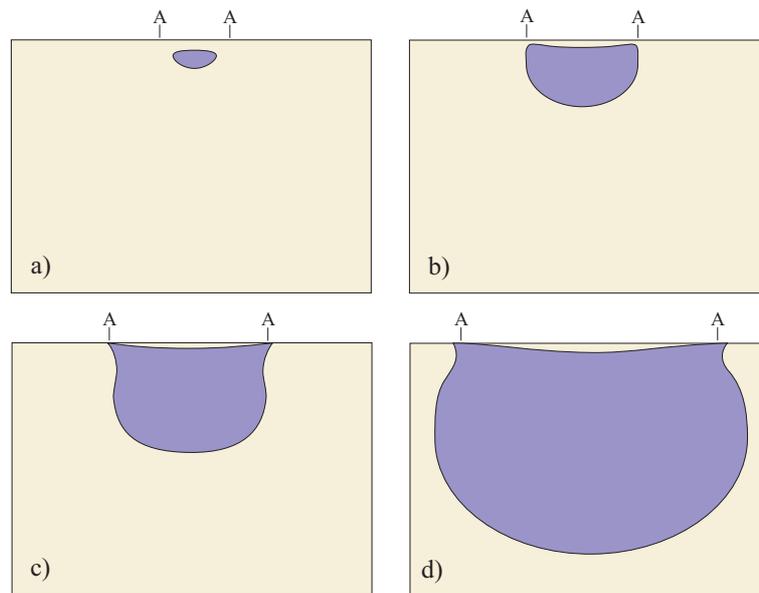


Figura 1.16: Esquema de la evolución de la zona deformada plásticamente al aumentar la carga en un ensayo hertziano. Los límites del área de contacto se han indicado con una A. (Elaboración propia a partir de Fischer-Cripps y Lawn<sup>[45]</sup>)

Recientemente se ha observado que ciertos materiales *a priori* frágiles, presentan un comportamiento macroscópicamente análogo al descrito anteriormente, que puede calificarse de *cuasi-dúctil* <sup>[3]</sup>. Efectivamente, cuando la microestructura del material es inhomogénea y con *fronteras de grano débiles*<sup>[2,3,30,43,46]</sup>, las fisuras anillo se deflectan a lo largo de las interfases débiles, alejándose de las regiones

sometidas a tensiones de tracción. Ello impide su desarrollo hacia la configuración de fisura cónica. Simultáneamente, en estos materiales las tensiones de cizalladura generan una zona de deformación *cuasi-plástica* bajo el contacto, cuya evolución es similar a la esquematizada en la Figura 1.16 <sup>[43,45]</sup>. En las micrografías de la Figura 1.17, correspondientes a materiales que presentan este tipo de comportamiento, se

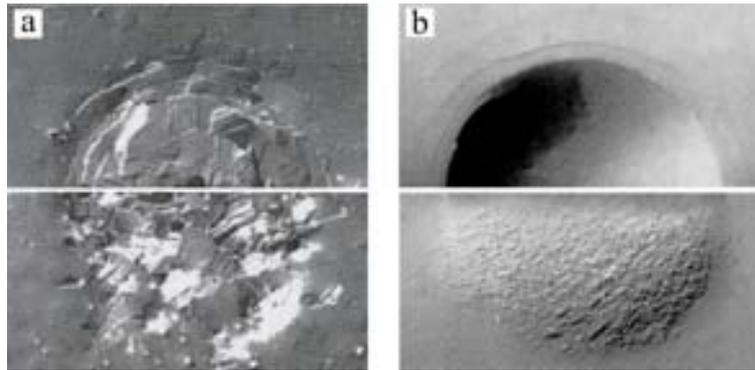


Figura 1.17: Ejemplos de deformación cuasi-plástica producida por contacto hertziano en: a) alúmina y b) nitruro de silicio con tamaños de grano elevados. Vistas superficiales (arriba) y secciones (abajo). (Según Guiberteau et al.<sup>[44]</sup> y Lee et al.<sup>[30]</sup>.)

observan la regiones deformadas plásticamente y también, aunque débilmente, las fisuras anillo.

A pesar de la semejanza aparente entre este tipo de daño y la deformación plástica de materiales dúctiles, su origen es completamente diferente. La deformación *cuasi-plástica* se produce por defectos de deslizamiento o fallas de cizalladura microscópicas generadas en las interfases débiles<sup>[2,3]</sup>. En algunos materiales, como la alúmina, la deformación cuasi-plástica está favorecida por procesos de maclaje en el interior de los granos<sup>[44]</sup>, como se aprecia claramente en la Figura 1.17a. En la zirconia, el mecanismo de transformación tenaz inhibe la formación de fisuras cónicas, favoreciendo la aparición de daño cuasi-dúctil<sup>[47,48]</sup>.

Los defectos de deslizamiento se encuentran distribuidos de forma discreta y confinados por la estructura de granos (Figura 1.18). Este confinamiento tiene dos consecuencias importantes. Por un lado, explica el papel determinante que

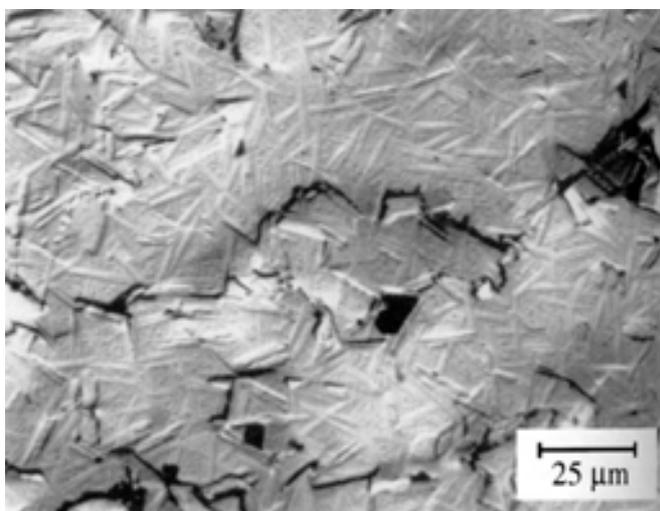


Figura 1.18: Micrografía ampliada de la zona deformada cuasi-plásticamente en un material vitrocerámico. Pueden observarse los defectos de deslizamiento entre la fase vítrea y las plaquetas de mica. (Según Cai et al.<sup>[43]</sup>.)

juega la microestructura en la evolución del daño en materiales cerámicos bajo tensiones de contacto. Así, al aumentar el tamaño medio de grano tiene lugar una transición frágil-dúctil en la respuesta de un determinado material<sup>[3,30,44,49]</sup> (cf. Figuras 1.10 y 1.17b ambas correspondientes a muestras de  $Si_3N_4$ , pero con diferente tamaño de grano)\*. Por otro lado, el confinamiento de los defectos de deslizamiento en la microestructura impide su crecimiento. Por ello, el único modo de relajar incrementos posteriores en la tensión es la generación de microfisuras<sup>[50]</sup> en los extremos de los defectos, como se esquematiza en la Figura 1.19. Estas microfisuras degradan la resistencia a la fractura<sup>[51,52]</sup> y al desgaste del material\*\*. Además, cuando se acumulan en una región pueden llegar a coalescer (Figura 1.18) formando fisuras macroscópicas que crecen en dirección radial y pueden conducir al fallo definitivo del material. Esta degradación mecánica a nivel microestructural aumenta bajo contactos cíclicos, por lo que estos materiales son muy susceptibles a la fatiga mecánica<sup>[16,43]</sup>.

---

\*En muestras con tamaño de grano intermedio pueden generarse simultáneamente fisuras cónicas y daño cuasi-plástico.

\*\*A cambio, los materiales que exhiben este comportamiento cuasi-dúctil presentan una tenacidad a la fractura mayor.

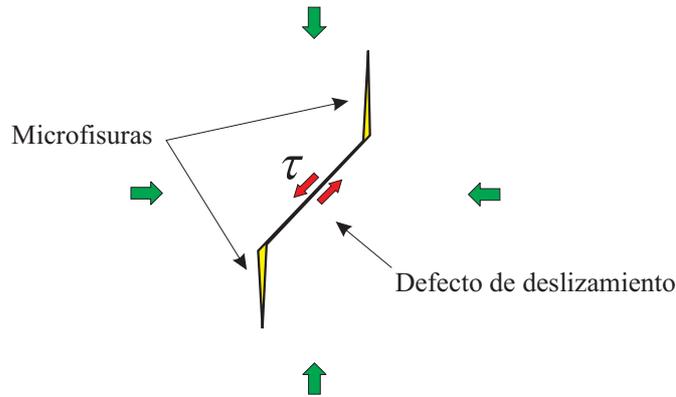


Figura 1.19: Esquema de un defecto de deslizamiento con microfisuras asociadas. (Elaboración propia a partir de Lawn<sup>[2]</sup>.)

Por último, se debe mencionar que la superposición de cargas tangenciales en el contacto incrementa las tensiones de cizalladura en la región frontal<sup>[6,27]</sup>, modificando ligeramente la forma de la región deformada.

### Carga crítica de inicio de deformación irreversible

La carga crítica para el inicio de plasticidad o *cuasi-plasticidad* puede obtenerse simplemente combinando las expresiones (1.12) y (1.25), lo que conduce a:

$$P_Y = \frac{9}{16} \frac{(1.1\pi Y)^3}{E^{*2}} R^2 \quad (1.29)$$

Esta expresión puede escribirse en función de la dureza del material<sup>[24]</sup>,  $H$ , sin más que considerar que  $H = eY$ , donde  $e$  es una constante adimensional que para metales suele ser  $e \approx 3$ <sup>[1]</sup>. Así, finalmente se obtiene

$$P_Y = QH \left( \frac{H}{E^*} \right)^2 R^2 \quad (1.30)$$

con  $Q$  una constante adimensional. Si la fuerza aplicada tiene componente tangencial, la carga crítica para el inicio de plasticidad disminuye, debido al incremento

de las tensiones de cizalladura en la zona frontal.

### 1.4.3. Índice de fragilidad

En las secciones precedentes, se ha puesto de manifiesto la competición entre un modo de daño frágil y otro dúctil en materiales monolíticos sometidos a tensiones de contacto. En base a esta competencia, algunos autores han analizado el concepto de fragilidad<sup>[24,27,53,54]</sup>. Recientemente Rhee *et al.*<sup>[24]</sup> han propuesto utilizar el cociente entre las cargas críticas para el inicio de estos modos de daño como índice de fragilidad del material. Combinando las ecuaciones (1.28) y (1.30) se obtiene

$$\frac{P_Y}{P_C} = \frac{Q}{\Theta} \left( \frac{H}{E^*} \right) \left( \frac{H}{T} \right)^2 R \quad (1.31)$$

Los materiales con  $\frac{P_Y}{P_C} > 1$  pueden considerarse frágiles y aquellos con  $\frac{P_Y}{P_C} < 1$  dúctiles. Estos autores han realizado una calibración experimental de los parámetros  $Q$  y  $\Theta$ , utilizando para ello datos de ensayos Hertz correspondientes a un amplio grupo de materiales cerámicos. En la Figura 1.20 se representa el parámetro de fragilidad de estos materiales,  $\left( \frac{H}{E^*} \right) \left( \frac{H}{T} \right)^2$ , frente a la razón de cargas críticas,  $\frac{P_Y}{P_C}$ , calculada a partir de (1.31) para esferas de radio  $R = 3.18$  mm. En principio, sorprende el gran número de materiales cerámicos (*a priori* frágiles) que se encuentran en la región cuasi-dúctil. Este hecho puede explicarse teniendo en cuenta que en un ensayo Hertz las tensiones de cizalladura son prácticamente el doble de intensas que las de tracción. Efectivamente, a partir de las expresiones (1.23) y (1.26) se obtiene:

$$\frac{\tau_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{máx}}} \approx \frac{0.47}{0.5(1-2\nu)} \approx 2 \quad (1.32)$$

En la representación de la Figura 1.20 la recta se desplaza a derecha o izquierda conforme  $R$  crece o decrece, trasladando materiales de la zona dúctil a la frágil o viceversa. Es por tanto evidente que existe un efecto importante del radio de la esfera,  $R$ , en la competición entre ambos modos de daño. Este hecho está relacionado con la diferente dimensionalidad de cada modo de daño: la plasticidad es un fenómeno volumétrico, mientras que la fractura cónica es un proceso superficial. Para cuantificar este efecto de tamaño es útil definir, para cada material, el radio

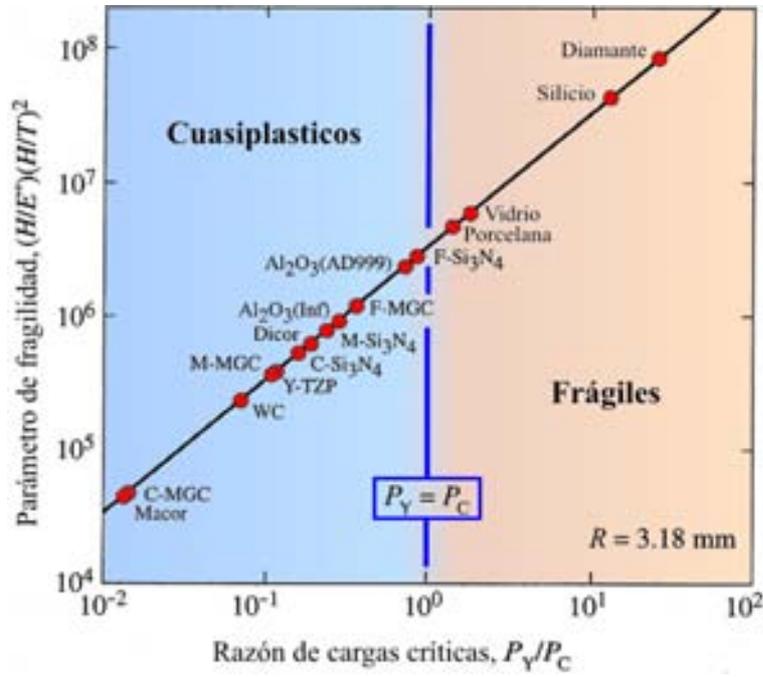


Figura 1.20: Parámetro de fragilidad  $\left(\frac{H}{E^*}\right)\left(\frac{H}{T}\right)^2$  frente a la razón de cargas críticas  $\frac{P_Y}{P_C}$  obtenida con impresores esféricos de radio  $R = 3.18$  mm para un amplio grupo de materiales cerámicos. Los materiales a la izquierda de la línea  $\frac{P_Y}{P_C} = 1$  son cuasi-dúctiles; a la derecha, frágiles. Cualquier incremento en  $R$  desplazará la posición de la recta hacia la derecha, y viceversa. (Elaboración propia a partir de Rhee et al.<sup>[24]</sup>.)

crítico de la transición dúctil-frágil (i.e.  $R^*$  tal que  $\frac{P_Y}{P_C} = 1$ ). Utilizando la ecuación (1.31),  $R^*$  puede escribirse como

$$R^* = \frac{\Theta}{Q} \left(\frac{E^*}{H}\right) \left(\frac{T}{H}\right)^2 \quad (1.33)$$

Si el indentor tiene un radio  $R < R^*$  el material deforma plásticamente, pero si  $R > R^*$  el modo frágil será dominante. Esto explica que, si se utilizan impresores puntiagudos ( $R \rightarrow 0$ ), los materiales siempre deforman plásticamente antes de que se generen fisuras. Por otro lado, los materiales intrínsecamente dúctiles, como los metales y polímeros, sufrirían también una transición dúctil-frágil aunque para

radios de impresor muy grandes ( $R \sim 10 - 10^4 m$ )<sup>[24]</sup>. No obstante, conviene destacar que en ese rango de radios de impresor la ley de Auerbach deja de ser válida, así como las expresiones (1.4.2), (1.31) y (1.33).

En este capítulo se han descrito los diferentes procesos inelásticos (i.e. fractura y deformación irreversible) que tienen lugar en materiales masivos sometidos a contacto hertziano, justificando su aparición en base al campo de tensiones elástico. Evidentemente, los procesos inelásticos modifican el campo de tensiones y por tanto, desde el momento de su aparición, deja de ser válida la teoría del contacto elástico. Si bien el campo de tensiones elástico constituye una referencia de partida para la descripción de estos fenómenos<sup>[6]</sup>, sería deseable conocer el nuevo campo de tensiones. Para ello se han desarrollado diferentes modelos, como el de la *cavidad expandiéndose* en el caso de la deformación plástica<sup>[34,55]</sup> o diversos modelos de fractura<sup>[17,27]</sup>. Sin embargo, ninguno de estos modelos resulta totalmente satisfactorio. En este sentido, los métodos numéricos, en particular la simulación por elementos finitos, son las herramientas más adecuadas y efectivas para abordar los problemas derivados de los comportamientos inelásticos de los materiales.

## Capítulo 2

# Teoría de la flexión de láminas

El campo de tensiones en materiales multicapa bajo contacto hertziano es más complejo que el descrito en la sección 1.2. Por ejemplo, como se discute en los capítulos 5 y 6, en estos sistemas suelen generarse tensiones adicionales de flexión. Debido a la importancia que tiene esta componente en el caso de recubrimientos rígidos sobre sustratos deformables, en este capítulo se revisan de los fundamentos de la teoría elástica de la flexión de láminas. En particular, se recopilan los resultados que conducen a una expresión para las tensiones de flexión en láminas que descansan sobre sustratos deformables, cuando se encuentran sometidas a cargas concentradas. Esta expresión será utilizada como punto de partida para predecir las cargas críticas de fractura en sistemas multicapa (capítulos 5 y 6).

### 2.1. Aspectos básicos de la teoría de la flexión de láminas

En esta sección se exponen las hipótesis de la teoría de la flexión de láminas delgadas en el régimen de pequeños desplazamientos y, posteriormente, se analiza

su extensión al caso de láminas gruesas o sometidas a grandes desplazamientos.

### 2.1.1. Hipótesis básicas de la teoría de la flexión de láminas delgadas sometidas a pequeños desplazamientos

El comportamiento de una lámina sometida a flexión depende fuertemente de la razón entre el espesor y las otras dimensiones de la lámina, así como de la magnitud de los desplazamientos. Si los desplazamientos verticales,  $w$ , son pequeños en comparación con el espesor de la lámina,  $d$ , y éste es, a su vez, sensiblemente inferior al resto de dimensiones, se puede establecer una teoría aproximada para la flexión adoptando las siguientes hipótesis<sup>[56]</sup>:

1. No existen deformaciones en el plano medio de la lámina durante la flexión. A este plano se le denomina *plano neutro* (Figura 2.1).
2. Los puntos situados en planos normales al plano neutro permanecen en planos normales al plano neutro durante la flexión. Esta hipótesis se conoce como hipótesis de Bernoulli (Figura 2.1).
3. Las tensiones en dirección perpendicular a la lámina son despreciables.

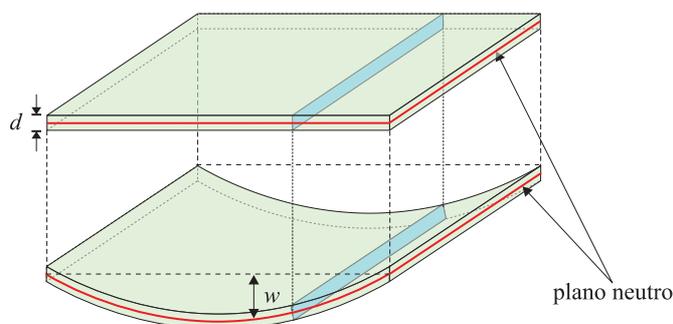


Figura 2.1: Esquema de una lámina sometida a flexión. Se ha marcado la posición del plano neutro (rojo) y de un plano perpendicular a éste (azul) antes y después de la flexión (las deformaciones se han exagerado).

Admitiendo estas hipótesis, las tensiones y deformaciones en cualquier punto de la lámina pueden expresarse en función de los desplazamientos  $w$  de los puntos del plano neutro. Además, en el marco de esta teoría el cálculo de  $w$  es relativamente sencillo, ya que sólo requiere la resolución de una ecuación lineal en derivadas parciales sujeta a unas determinadas condiciones de contorno.

### 2.1.2. Extensión de la teoría de la flexión a casos más generales

La teoría de la flexión de láminas delgadas sometidas a pequeños desplazamientos es ampliamente utilizada debido a su sencillez. Sin embargo, a menudo conduce a resultados erróneos a causa de las aproximaciones que conlleva. Afortunadamente se pueden realizar correcciones que permiten extender esta teoría a situaciones que no verifican las hipótesis enumeradas en la sección anterior.

#### Láminas con grandes desplazamientos

La primera de las hipótesis de la teoría de la flexión sólo se satisface estrictamente cuando la lámina flexionada adopta la forma de una superficie *desarrollable*\*. En cualquier otro caso, se originan deformaciones y tensiones en el plano neutro de la lámina, si bien éstas son despreciables cuando los desplazamientos son pequeños en comparación al espesor de la lámina. Evidentemente, si no es así, es necesario incluir en la teoría estas tensiones, denominadas *tensiones de membrana*. En este caso, la resolución del problema se complica ya que conlleva resolver ecuaciones diferenciales no lineales<sup>[56,58]</sup>. En ocasiones, las tensiones de membrana dominan sobre las de flexión, por ejemplo en láminas muy delgadas que presentan una resistencia a la flexión despreciable. En otros casos, a pesar de que se producen grandes desplazamientos, no se originan tensiones de membrana y la teoría de la flexión lineal sigue siendo aplicable. Esto sucede, por ejemplo, en láminas que se flexionan para formar una superficie cilíndrica (superficie desarrollable). En

---

\*Por definición, se dice que una superficie es desarrollable cuando su curvatura gaussiana es cero<sup>[57]</sup>.

general, la importancia relativa de estas dos contribuciones a las tensiones en la lámina vendrá determinada por las condiciones de contorno.

### Láminas gruesas y cargas concentradas

La hipótesis de Bernouilli equivale a ignorar cualquier efecto de las tensiones de cizalladura en los desplazamientos de la lámina. Esta hipótesis se viola cuando el espesor de la lámina es grande, especialmente, si las cargas están concentradas en pequeñas regiones\*. En estos casos, es necesario aplicar la teoría de láminas gruesas, que considera el problema de la flexión de láminas como un problema elástico tridimensional. De nuevo, el cálculo de las tensiones en este tipo de problemas es más complejo. En general, es necesario recurrir a soluciones numéricas o aproximadas, existiendo soluciones analíticas sólo para determinados casos particulares<sup>[56]</sup>. La utilización de análisis tridimensionales permite incorporar correcciones a la teoría lineal, por ejemplo, para adecuarla al cálculo de las tensiones en puntos próximos a la región de aplicación de las cargas concentradas.

Las hipótesis de la teoría de la flexión de láminas delgadas se violan en otras muchas situaciones reales, en particular en aquellas que involucren la aplicación de cargas tangenciales al plano neutro. En esos casos, para el cálculo de las tensiones es necesario modificar las ecuaciones de la flexión, introduciendo términos adicionales, o bien recurrir a la teoría elástica tridimensional (i.e. como en el caso de láminas gruesas).

En las secciones subsiguientes se desarrollan los aspectos de la teoría de la flexión de láminas delgadas más relevantes para este estudio. Posteriormente se incorporan las correcciones pertinentes sin realizar un análisis exhaustivo de las teorías no lineales de las que provienen.

---

\*También es necesario considerar el efecto de las tensiones de cizalladura para determinadas condiciones de contorno, por ejemplo, cuando existen huecos en la lámina.

## 2.2. Flexión de láminas circulares bajo cargas axisimétricas

En esta sección se revisa la aplicación de la teoría de láminas delgadas a la resolución del problema de una lámina circular sobre la que actúa una distribución de cargas con simetría axial\*. Sea una lámina circular de espesor,  $d$ , considerablemente menor que su radio y sobre cuya superficie superior actúa una distribución de cargas transversales (por unidad de área),  $p(r)$ , simétrica respecto al eje de revolución de la lámina (Figura 2.2). Se considera un sistema de coordenadas cilíndricas

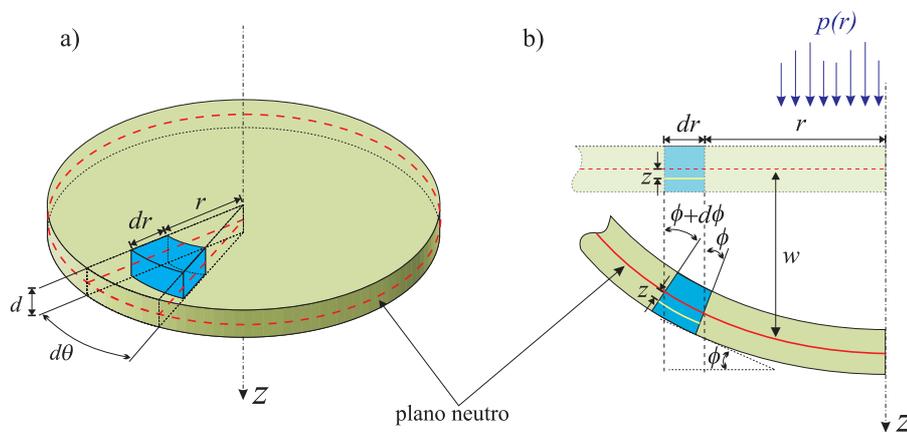


Figura 2.2: Lámina circular sometida a flexión por la acción de cargas distribuidas axisimétricamente en su superficie superior: a) vista tridimensional y b) sección mostrando la lámina sin deformar y una vez deformada (las deformaciones se han exagerado).

como el que se muestra en la Figura 2.2, de forma que el plano  $z = 0$  coincide con el plano neutro de la lámina (en rojo) antes de la flexión. Para cada punto de dicho plano se denotan por  $w$  y  $\phi$ , el desplazamiento en la dirección  $z$  y el ángulo de giro de la normal al plano neutro, respectivamente. Dada la simetría del problema, ambas magnitudes dependen exclusivamente de la distancia al eje,  $r$ , y

\*La solución a este tipo de problemas de flexión se debe a Poisson<sup>[59]</sup>.

puede verificarse fácilmente que están relacionadas entre sí a través de la expresión

$$\phi = -\frac{dw}{dr} \quad (2.1)$$

Considérese un elemento de dicha lámina como el que se representa en azul en la Figura 2.2a. La deformación radial  $\epsilon_r$  que experimenta un plano de dicho elemento situado a una distancia  $z$  del plano neutro (representado en amarillo en la Figura 2.2b) viene dada, en el régimen de pequeños desplazamientos, por<sup>[60]</sup>

$$\epsilon_r = \frac{z(\phi + d\phi) - z\phi}{dr} = z\frac{d\phi}{dr} \quad (2.2)$$

De forma análoga, considerando la distancia al eje del elemento antes y después de la flexión puede comprobarse fácilmente que la deformación tangencial  $\epsilon_\theta$  del plano puede expresarse como<sup>[60]</sup>

$$\epsilon_\theta = \frac{(r + z\phi)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = z\frac{\phi}{r} \quad (2.3)$$

Como puede apreciarse, las deformaciones crecen al aumentar la distancia al plano neutro de la lámina y son nulas en éste, de acuerdo con las hipótesis de la sección 2.1.1. Conocidas las deformaciones se calculan las tensiones que actúan sobre el elemento a partir de la ley de Hooke y teniendo en cuenta que  $\sigma_z = 0$ , de acuerdo con las hipótesis iniciales. Es decir,

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E} - \frac{\nu\sigma_\theta}{E} \\ \epsilon_\theta &= \frac{\sigma_\theta}{E} - \frac{\nu\sigma_r}{E} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_r + \nu\epsilon_\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_\theta + \nu\epsilon_r) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3) se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{d\phi}{dr} + \nu\frac{\phi}{r} \right) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\phi}{r} + \nu\frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2w}{dr^2} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Conocidas las tensiones, es inmediato calcular los momentos flectores que actúan

sobre el elemento de lámina a partir de

$$\begin{aligned} M_r &= \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_r z dz = D \left( \frac{d\phi}{dr} + \nu \frac{\phi}{r} \right) = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \\ M_\theta &= \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_\theta z dz = D \left( \frac{\phi}{r} + \nu \frac{d\phi}{dr} \right) = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde

$$D = \frac{E d^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.7)$$

es la denominada *rigidez a flexión* de la lámina, que juega un papel análogo al del producto  $EI$  en una viga\*<sup>[56,60,61]</sup>.

Además de los momentos flectores, sobre el elemento pueden actuar directamente las fuerzas externas,  $p(r)$ , y fuerzas de cizalladura en las caras  $r = r + dr$ , que denotaremos por  $\mathcal{T}$ . En la Figura 2.3 se representan esquemáticamente todas las fuerzas y momentos que actúan sobre el elemento, despreciando la pequeña diferencia entre las fuerzas de cizalladura en las caras  $r = r$ . Para que el elemento esté en equilibrio es necesario que se anulen entre sí todas las fuerzas y pares que actúan sobre él. Por tanto, considerando los pares que actúan en el plano medio  $\theta = \theta$  del elemento con sus respectivos signos, se obtiene<sup>[56]</sup>

$$(M_r + dM_r)(r + dr) d\theta - M_r r d\theta - M_\theta dr d\theta + \mathcal{T} r d\theta dr = 0 \quad (2.8)$$

donde se ha despreciado, por conducir a infinitésimos de orden superior, el par de fuerzas creado por las cargas externas<sup>[56,60]</sup>. Desarrollando (2.8) y despreciando de nuevo infinitésimos de orden superior se obtiene

$$M_r + \frac{dM_r}{dr} r - M_\theta + \mathcal{T} r = 0 \quad (2.9)$$

que utilizando las expresiones (2.6) conduce a

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi}{r^2} = \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\phi) \right] = -\frac{\mathcal{T}}{D} \quad (2.10)$$

\*Donde  $I$  es el momento de inercia de la viga.

\*\*Por razones de simetría no es posible que existan fuerzas de cizalladura en caras  $\theta = \theta$  y la hipótesis de Bernoulli equivale a despreciar las tensiones de cizalladura en caras  $z = z$ .

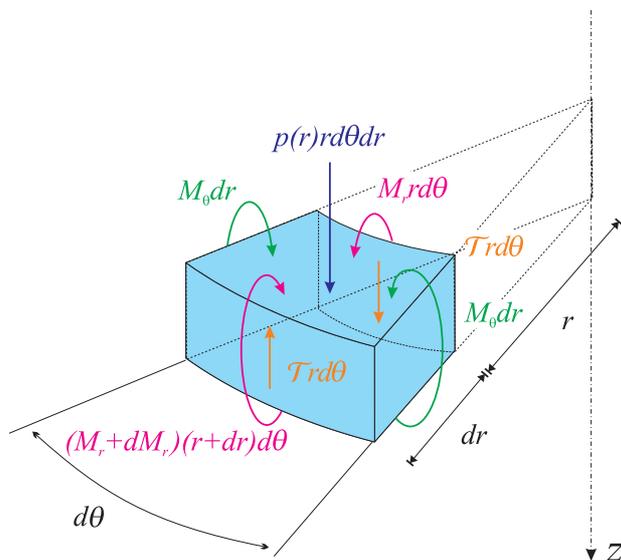


Figura 2.3: Fuerzas y momentos que actúan sobre el elemento de lámina. (Elaboración propia a partir de Feodosiev<sup>[60]</sup>)

que, a su vez, haciendo uso de (2.1) puede escribirse como

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{T}{D} \quad (2.11)$$

Considerando ahora el equilibrio de las fuerzas que actúan en dirección  $z$  se obtiene

$$p(r)r d\theta dr + T r d\theta - (T + dT)(r + dr) d\theta = 0 \quad (2.12)$$

que despejando conduce a

$$p(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (T r) \quad (2.13)$$

A partir de las expresiones (2.11) y (2.13) se obtiene finalmente

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p(r)}{D} \quad (2.14)$$

que se denomina *ecuación de la flexión* de la lámina. Esta ecuación permite calcular los desplazamientos verticales  $w$  que experimentan los puntos del plano neutro, si se conoce la distribución de fuerzas  $p(r)$  que actúa sobre la lámina. Como ya se ha comentado anteriormente, conocer  $w$  implica conocer las tensiones y deformaciones en cualquier punto de la lámina flexionada. Definiendo el operador  $\Delta \equiv \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right)$ , es posible escribir la ecuación (2.14) en forma compacta como

$$D\Delta\Delta w = p(r) \quad (2.15)$$

### 2.3. Flexión de láminas sobre sustratos elásticos semi-infinitos

En esta sección se aplica la ecuación de la flexión de láminas (2.15) a la determinación de las tensiones generadas en láminas que descansan sobre sustratos elásticos, cuando son sometidas a la acción de cargas concentradas. Estas tensiones son relevantes para el estudio del daño generado por tensiones de contacto en sistemas multicapa.

Sea, pues, una lámina infinita de espesor  $d$ , con módulo de elasticidad  $E$  y coeficiente de Poisson  $\nu$ , que descansa *sin fricción* sobre un sustrato elástico semi-infinito e isótropo, de constantes elásticas  $E_s$  y  $\nu_s$  (Figura 2.4). Se supone que el contacto entre ambos materiales es perfecto, incluso aunque ello implique reacciones del sustrato,  $q(r)$ , negativas<sup>[56]</sup> (Figura 2.4). Si las fuerzas externas,  $p(r)$ , que actúan sobre la lámina presentan simetría axial, la ecuación de la lámina puede escribirse a partir de (2.15) como

$$D\Delta\Delta w = p(r) - q(r) \quad (2.16)$$

Haciendo uso de las propiedades de las funciones de Bessel puede demostrarse<sup>[62]</sup> que esta ecuación admite una solución de la forma

$$w(r) = \int_0^\infty \frac{\mathcal{P}(\vartheta)\mathcal{F}(\vartheta)J_0(\vartheta r)\vartheta d\vartheta}{1 + D\vartheta^4\mathcal{F}(\vartheta)} \quad (2.17)$$

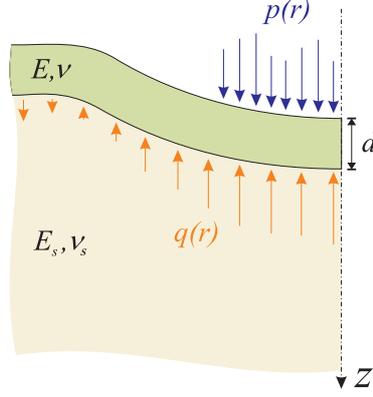


Figura 2.4: Representación esquemática de las fuerzas que actúan sobre una lámina que se apoya sobre un sustrato elástico: presión externa,  $p(r)$ , y reacción del sustrato,  $q(r)$ .

donde  $J_0$  es la función de Bessel de orden cero y siendo

$$\mathcal{P}(\vartheta) = \int_0^{\infty} p(r) J_0(\vartheta r) r dr \quad (2.18)$$

la transformada de Fourier-Bessel de la distribución de cargas externas  $p(r)$ . A su vez, la función

$$\mathcal{F}(\vartheta) = \int_0^{\infty} 2\pi s f_i(s) J_0(\vartheta s) ds \quad (2.19)$$

es la transformada de la *función de influencia*,  $f_i(s)$ , que representa el desplazamiento vertical de un punto de la superficie superior del sustrato, debido a una carga puntual unitaria aplicada a una distancia  $s$  del punto. La función de influencia depende exclusivamente de las propiedades del sustrato y, en el caso de un medio isótropo semi-infinito, viene dada por<sup>[13,14]</sup>

$$f_i(s) = \frac{1 - \nu_s^2}{\pi E_s s} \quad (2.20)$$

y por tanto, según la ecuación (2.19)

$$\mathcal{F}(\vartheta) = \frac{2(1 - \nu_s^2)}{E_s \vartheta} \quad (2.21)$$

Por consiguiente, la solución (2.17) puede escribirse como

$$w(r) = \frac{k_0^3}{D} \int_0^\infty \frac{\mathcal{P}(\vartheta) J_0(\vartheta r) d\vartheta}{1 + k_0^3 \vartheta^3} \quad (2.22)$$

donde

$$k_0^3 = \frac{2D(1 - \nu_s^2)}{E_s} \quad (2.23)$$

En el caso de una carga concentrada en el origen, puede verificarse\* que  $\mathcal{P} = \frac{P}{2\pi}$  y haciendo el cambio de variable  $\lambda = k_0 \vartheta$  se obtiene finalmente

$$w(r) = \frac{Pk_0^2}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{J_0\left(\frac{\lambda r}{k_0}\right) d\lambda}{1 + \lambda^3} \quad (2.24)$$

Desafortunadamente, las tensiones y momentos calculados, a partir de las relaciones (2.5) y (2.6), haciendo uso de (2.24) presentan una singularidad para  $r = 0$  [56].

Este problema es inherente a la teoría de la flexión de láminas delgadas, ya que se desprecian los efectos en los desplazamientos de las tensiones transversales a la lámina y las tensiones de cizalladura, cuando en realidad éstas dominan sobre las de flexión en las regiones cercanas al punto de aplicación de la carga. Por tanto, para obtener la máxima tensión real que actúa sobre la lámina es necesario recurrir a la teoría de láminas gruesas (ver sección 2.1.2), ya que dicho máximo se localiza precisamente en el eje de carga. En el contexto de esta teoría la resolución del problema de láminas que descansan sobre sustratos elásticos, y que están sometidas a cargas concentradas, conduce a la siguiente expresión aproximada para la tensión máxima en la lámina<sup>[56,63]</sup>

$$\sigma_{\text{máx}} = B'(1 + \nu) \frac{P}{d^2} \log \left[ C' \frac{E}{E_s} \right] \quad (2.25)$$

donde  $B'$  y  $C'$  son constantes adimensionales.

---

\*Basta con considerar, por ejemplo, una carga  $P$  uniformemente distribuida sobre una circunferencia de radio  $r_0$ , i.e.  $p(r) = \frac{P}{2\pi r_0} \delta(r - r_0)$ , integrar la ecuación (2.18) y tomar finalmente  $r_0 = 0$ .

Esta expresión es de gran utilidad en la presente Tesis Doctoral, en especial para la búsqueda de una expresión para las cargas críticas de inicio de fisuras radiales en sistemas multicapa. A pesar de todo, esta solución no es estrictamente aplicable al problema real de un sistema bicapa recubrimiento/sustrato. En efecto, se ha supuesto que las láminas *descansan sin fricción* sobre sustratos elásticos, mientras que en la práctica se encuentran *unidas* de una u otra forma a éstos. Esto significa que se han ignorado las tensiones tangenciales que se generan en la interfase recubrimiento/sustrato, cuando ambas capas se encuentran perfectamente unidas. Resolver de forma analítica este problema es inviable y es necesario recurrir al análisis numérico\*. Las técnicas de cálculo numérico mediante el método de los elementos finitos, cuyos fundamentos se describen brevemente en el siguiente capítulo, son especialmente adecuadas para evaluar las tensiones generadas en este y en cualquier otro tipo de problema de mecánica de sólidos.

---

\*Existen soluciones exactas para el problema de dos capas elásticas perfectamente unidas, pero vienen dadas en forma de integrales que sólo pueden ser resueltas numéricamente<sup>[64]</sup>. Incluso la resolución del problema, *a priori* más simple, de una lámina unida a un sustrato perfectamente rígido encuentra este mismo tipo de dificultades<sup>[65-67]</sup>.

## Capítulo 3

# El método de los elementos finitos aplicado a mecánica de sólidos

En los capítulos precedentes se han analizado de forma independiente las componentes dominantes (i.e. hertziana y de flexión) del campo de tensiones que se genera en estructuras multicapa bajo contacto. Sin embargo, aunque es sencillo identificar las componentes del campo de tensiones, no es posible determinar su forma analítica completa. En este contexto, los métodos de elementos finitos se presentan como una excelente alternativa para resolver este problema.

En este capítulo se describen brevemente los fundamentos del método de los elementos finitos, uno de los procedimientos de cálculo y simulación más potentes en la actualidad. En particular, se analiza su aplicación a la resolución del problema general de la mecánica de sólidos que fue, de hecho, una de sus primeras aplicaciones de utilidad práctica<sup>[68]</sup>. El enorme potencial del método provocó una auténtica revolución en el campo del diseño de estructuras. En la actualidad, la aplicación de esta metodología traspasa el ámbito de la mecánica de sólidos continuos, siendo ampliamente utilizada en otros campos tales como: mecánica de

fluidos, conducción eléctrica o de calor, problemas dinámicos, etc.

En la primera sección del capítulo se enuncia formalmente el problema general de la mecánica de sólidos. A continuación se describe la formulación de este problema en el contexto del método de los elementos finitos. Posteriormente se detallan cada una de las partes que componen un modelo de elementos finitos. Finalmente se realiza una breve descripción del programa utilizado en este trabajo para la realización de las simulaciones mediante elementos finitos: ABAQUS<sup>®</sup>.

### 3.1. El problema general de la mecánica de sólidos

El objetivo principal de la mecánica de sólidos\* es la resolución de un problema de contorno que puede enunciarse del siguiente modo<sup>[22]</sup>:

*”Dado un sólido continuo que ocupa una región  $V$  del espacio, cuyo contorno viene dado por  $A_T = A_f \cup A_u$  (Figura 3.1), y conocidas:*

- *las fuerzas másicas  $\mathbf{b}$  que actúan en su volumen  $V$ ,*
- *las fuerzas por unidad de superficie  $\bar{\mathbf{t}}$  que actúan en  $A_f$ , y los desplazamientos  $\bar{\mathbf{u}}$  impuestos para cada uno de los puntos de  $A_u$ ,*

*determinar el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$  que verifica:*

$$\mathbf{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{en } V \quad (3.1a)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } A_f \quad (3.1b)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{en } A_u \quad (3.1c)$$

*donde  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  es el tensor de tensiones y  $\mathbf{n}$  el vector normal a la superficie  $A_f$  en cada punto.*

---

\*En realidad, aunque se hable de mecánica de sólidos, esta sección se dedica a enunciar el problema general de la estática de sólidos, i.e. no se abordan aspectos cinemáticos ni dinámicos.

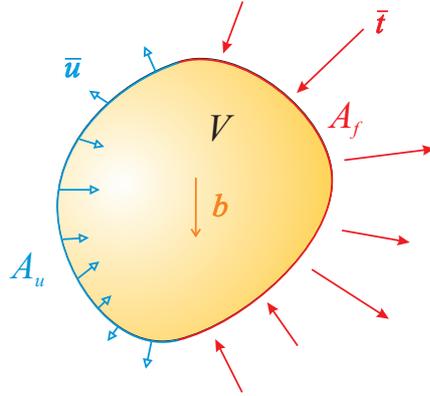


Figura 3.1: Esquema del problema de la mecánica de sólidos.

La ecuación (3.1a) representa la condición de equilibrio mecánico en el interior del sólido, mientras que (3.1b) y (3.1c) constituyen las condiciones de contorno impuestas al problema.

El tensor de tensiones,  $\tilde{\sigma}$ , puede calcularse a partir del campo de desplazamientos,  $\mathbf{u}$ , a través de la ecuación constitutiva del material que constituye el sólido

$$\tilde{\sigma} = \mathbb{C} \tilde{\epsilon} \quad (3.2)$$

donde  $\tilde{\epsilon}$  es el tensor de deformaciones, que viene dado por la parte simétrica del gradiente de  $\mathbf{u}$

$$\tilde{\epsilon} = \nabla^s \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

y  $\mathbb{C}$  un tensor que determina el comportamiento mecánico del material\*.

Así pues, conocido el campo de desplazamientos, es inmediato calcular las

\*Si el material es elástico,  $\mathbb{C}$  no es más que el tensor de constantes elásticas.

deformaciones y tensiones en cada punto del sólido, así como las fuerzas de reacción que se generan en  $A_u$  y los desplazamientos en  $A_f$ .

### 3.1.1. Formulación débil del problema

El enunciado del problema general de la mecánica de medios continuos en los términos descritos anteriormente se denomina comúnmente *formulación fuerte* del problema. Formulado de esa manera, no siempre es posible encontrar solución al problema<sup>[22]</sup>. Éste es el caso, por ejemplo, cuando se tienen cargas puntuales o discontinuas, ya que generan desplazamientos que no son dos veces derivables (por tanto, no satisfacen la ecuación (3.1a), que involucra derivadas primeras de las tensiones o, lo que es lo mismo, derivadas segundas de los desplazamientos). Para englobar estos casos se extiende el concepto de solución, definiendo como *solución débil* del problema aquel campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$  que verifica las condiciones de contorno (3.1b) y (3.1c) y que para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales  $\delta\mathbf{u}$ , nulo en  $A_u$  y derivable en  $V$ , cumple la condición

$$\int_V (\mathbf{div} \tilde{\sigma}) \delta\mathbf{u} dV + \int_V \mathbf{b} \delta\mathbf{u} dV = 0 \quad (3.4)$$

que se obtiene a partir de (3.1a) sin más que multiplicar por  $\delta\mathbf{u}$  en integrar a todo el volumen. Operando en la primera integral y haciendo uso del teorema de la divergencia se llega a la siguiente expresión\*

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{div} \tilde{\sigma}) \delta\mathbf{u} dV &= \int_V [\mathbf{div}(\tilde{\sigma} \delta\mathbf{u}) - \tilde{\sigma} \nabla^s \delta\mathbf{u}] dV \\ &= \int_{A_T} (\tilde{\sigma} \mathbf{n}) \delta\mathbf{u} dA - \int_V \tilde{\sigma} \nabla^s \delta\mathbf{u} dV \end{aligned} \quad (3.5)$$

y sustituyendo en (3.4) se obtiene

$$\int_{A_f} \bar{\mathbf{t}} \delta\mathbf{u} dA + \int_V \mathbf{b} \delta\mathbf{u} dV - \int_V \tilde{\sigma} \nabla^s \delta\mathbf{u} dV = 0 \quad (3.6)$$

---

\*En la expresión (3.5) aparece  $\nabla^s \delta\mathbf{u}$  y no simplemente  $\nabla \delta\mathbf{u}$  debido a la simetría del tensor de tensiones,  $\tilde{\sigma}$ .

donde se ha tenido en cuenta que  $\delta \mathbf{u} = 0$  en  $A_u$  y la condición (3.1b). De este modo se relajan las condiciones que tiene que cumplir la solución, puesto que ahora  $\mathbf{u}$ , y también  $\delta \mathbf{u}$ , sólo han de ser derivables una vez. Puede verificarse que toda solución del problema en su formulación fuerte es también solución débil y verifica, por tanto, la ecuación (3.6). Por el contrario, la proposición inversa no siempre es cierta.

La ecuación (3.6) no es más que el principio de los trabajos virtuales aplicado a un sólido que experimenta unos desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{u}$  que provocan unas deformaciones virtuales  $\delta \tilde{\epsilon} = \nabla^s \delta \mathbf{u}$ . Las dos primeras integrales en (3.6) constituyen el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas, mientras que la tercera es el trabajo virtual interno producido por las tensiones. Por tanto, la expresión (3.6) puede escribirse como

$$\widetilde{W}_{\text{externo}} = \widetilde{W}_{\text{interno}} \quad (3.7)$$

Debido a su mayor generalidad, el problema de la mecánica de sólidos suele plantearse habitualmente en su forma débil. Uno de los métodos más efectivos para abordar su resolución es el *método de Galerkin*, que además constituye el punto de partida para el método de los elementos finitos.

### 3.1.2. Método de Galerkin

El método de Galerkin<sup>[69]</sup> propone como solución aproximada del problema una expresión para el campo de desplazamientos en forma de combinación lineal de funciones

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{a}_i \phi_i(\mathbf{r}) \quad (3.8)$$

donde los  $\mathbf{a}_i$  son coeficientes incógnita y las funciones  $\phi_i(\mathbf{r})$  se denominan *funciones de forma*. Esta aproximación es común a otros métodos de resolución de

problemas mecánicos<sup>[20,22]</sup>. Lo característico del método de Galerkin es que expresa también los desplazamientos virtuales,  $\delta \mathbf{u}(\mathbf{r})$ , como combinación lineal de las mismas funciones de forma, i.e.

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_i \delta \mathbf{a}_i \phi_i(\mathbf{r}) \quad (3.9)$$

De este modo, sustituyendo esta expresión en (3.6) se obtiene

$$\sum_i \left[ \int_{A_f} \bar{\mathbf{t}} \phi_i(\mathbf{r}) dA + \int_V \mathbf{b} \phi_i(\mathbf{r}) dV - \int_V \tilde{\sigma} \nabla^s \phi_i(\mathbf{r}) dV \right] \delta \mathbf{a}_i = 0 \quad (3.10)$$

donde  $\tilde{\sigma}$ , en virtud de las relaciones (3.2),(3.3) y (3.8), puede escribirse como

$$\tilde{\sigma} = \mathbb{C} \nabla^s \left[ \sum_j \mathbf{a}_j \phi_j(\mathbf{r}) \right] \quad (3.11)$$

Considerando que los desplazamientos virtuales, y por tanto las constantes  $\delta \mathbf{a}_i$ , son arbitrarios, los términos entre corchetes en la ecuación (3.10) han de anularse independientemente, dando lugar al sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \int_{A_f} \bar{\mathbf{t}} \phi_1(\mathbf{r}) dA + \int_V \mathbf{b} \phi_1(\mathbf{r}) dV - \int_V \tilde{\sigma} \nabla^s \phi_1(\mathbf{r}) dV &= 0 \\ \int_{A_f} \bar{\mathbf{t}} \phi_2(\mathbf{r}) dA + \int_V \mathbf{b} \phi_2(\mathbf{r}) dV - \int_V \tilde{\sigma} \nabla^s \phi_2(\mathbf{r}) dV &= 0 \\ &\vdots \\ \int_{A_f} \bar{\mathbf{t}} \phi_i(\mathbf{r}) dA + \int_V \mathbf{b} \phi_i(\mathbf{r}) dV - \int_V \tilde{\sigma} \nabla^s \phi_i(\mathbf{r}) dV &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Se trata de un sistema en el que las ecuaciones están acopladas a través del tensor de tensiones, ecuación (3.11), y por ello su resolución conlleva cierta dificultad. Sin embargo, el sistema tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas ( $\mathbf{a}_j$ ) y, por consiguiente, la existencia y unicidad de la solución está asegurada.

El método de Galerkin, aparentemente sencillo, requiere conocer de antemano las funciones de forma  $\phi_i(\mathbf{r})$ . Estas funciones varían de un problema a otro, ya que la solución global tiene que verificar las condiciones de contorno. Por ello, su determinación puede ser una tarea ardua, especialmente si las condiciones de contorno o la geometría del problema son complejas. A pesar de todo, el método de Galerkin tiene un gran interés, ya que es el punto de partida de muchos métodos de discretización y, en particular, del método de elementos finitos.

### 3.1.3. Discretización del problema

Las limitaciones de la mente humana impiden abordar globalmente el comportamiento de los sistemas complejos que existen en la naturaleza. Por este motivo, el estudioso de cualquier campo acostumbra a dividir los problemas en componentes más simples, que puede comprender básicamente y que le permiten posteriormente reconstruir el comportamiento del sistema global. Este es el modo habitual en que se construyen numerosos modelos teóricos: a partir de un número finito de componentes bien definidos. Esta división sucesiva, llevada al límite, conduce al concepto matemático de *infinitesimal* como constituyente elemental de un sistema continuo. Sin embargo, ni la mente humana ni las computadoras, por muy potentes que sean, pueden tratar el número infinito de elementos infinitesimales que constituyen un sistema continuo, salvo en problemas simples que permitan una manipulación matemática exacta. Para sortear estos obstáculos se han desarrollado cierto número de *métodos de discretización*. Todos ellos involucran aproximaciones, pero, afortunadamente, la solución aproximada puede acercarse todo lo que se desee a la solución exacta, sin más que aumentar el número de variables discretas definidas.

Los procesos de discretización de los problemas continuos han seguido caminos convergentes en matemática e ingeniería. Los matemáticos han desarrollado técnicas generales que se aplican directamente a las ecuaciones diferenciales que gobiernan los diferentes problemas, tales como las técnicas de diferencias finitas, ciertos procedimientos de residuos pesados<sup>[70,71]</sup>, métodos variacionales aproximados<sup>[72,73]</sup>, etc. El ingeniero ha buscado representar porciones de sistemas continuos mediante sistemas discretos reales como, por ejemplo, representar

un sólido elástico continuo mediante un conjunto de barras elásticas<sup>[73]</sup>. A partir de esta analogía, en los años 50 nació el método de *elementos finitos* <sup>[74,75]</sup>. Esta potente técnica de discretización, cuya aplicación al problema de la mecánica de sólidos se describe a continuación, ha tenido un importantísimo auge desde su aparición. Debido a su gran versatilidad, su aplicación se ha extendido a múltiples campos tecnológicos y científicos. De hecho, en la actualidad, esta técnica constituye una de las principales herramientas de cálculo y simulación numérica de sistemas o procesos industriales complejos, especialmente, en problemas dinámicos o no lineales.

### **3.2. El método de los elementos finitos. Formulación del problema**

Como ya se ha mencionado, las aplicaciones del método de elementos finitos se extienden a gran número de problemas de contorno de diversa naturaleza<sup>[68,73]</sup>, incluidos múltiples problemas en derivadas parciales (p. ej. problemas dinámicos<sup>[76,77]</sup>). En esta sección se exponen los fundamentos de este método, aplicándolo al problema general de la mecánica de sólidos (sección 3.1).

En la mayoría de los métodos de resolución de las ecuaciones de la mecánica de sólidos, incluido el de Galerkin (sección 3.1.2), es necesario escoger una base de funciones de forma,  $\phi_i(\mathbf{r})$ , tal que la solución global verifique las condiciones de contorno. La búsqueda de las funciones de forma puede resultar compleja, especialmente cuando estas condiciones son muy heterogéneas o cuando la geometría es muy irregular. Además, la base de funciones escogidas es específica para cada tipo particular de problema. Por el contrario, en el método de los elementos finitos la definición de las funciones de forma es independiente de la geometría del problema y de las condiciones de contorno. Por este motivo, este método constituye una potente herramienta de cálculo muy versátil para la resolución de numerosos problemas de interés práctico.

La generalidad del método de elementos finitos reside en la elección de unas

funciones de forma locales que se anulan en todo punto, salvo en una región determinada del sólido. Cada función de forma queda definida por una expresión analítica (generalmente polinómica) y por la región donde toma valores no nulos. Al objeto de utilizar estas funciones de forma, se divide el dominio  $V$  en una serie de regiones  $V^e$ , que se denominan *elementos finitos*, o simplemente *elementos*, y que dan nombre al método. En la frontera de cada elemento se sitúan una serie de puntos denominados *nodos* o *nudos*. La rejilla de nodos y elementos resultante de esta división se conoce como *mallado*, o simplemente *mall*. La elección del mallado y de la geometría de los elementos depende de muchos factores: geometría del problema, minimización de errores, parámetros que se desean conocer, etc. Un ejemplo de mallado bidimensional se muestra en la Figura 3.2. Como puede apreciarse, los nodos se encuentran en la frontera entre dos o más elementos contiguos o en el contorno del sólido.

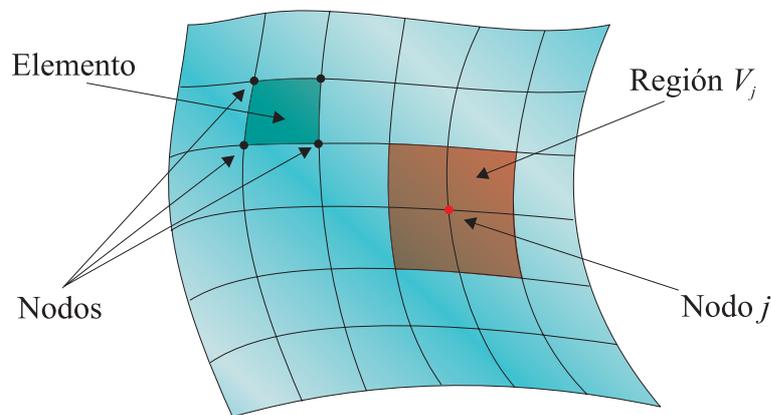


Figura 3.2: Ejemplo de la división de un sistema 2D en elementos finitos. Se han resaltado algunos nodos mediante círculos rellenos. Se destaca en rojo la región  $V_j$  de los elementos que rodean al nodo  $j$ .

Para cada nodo  $j$  se define una función,  $N_j$ ,\* con valores no nulos en la región  $V_j$  formada por los elementos que comparten dicho nodo (Figura 3.2). La función  $N_j$  se elige de forma que sea igual a la unidad en el nodo  $j$  y nula en el resto de nodos de la región  $V_j$ . Esta elección simplifica notablemente la resolución del sistema de ecuaciones (3.12), ya que las integrales se transforman en suma de

\*Notar que las funciones  $N_j$  son equivalentes a las  $\phi_i(\mathbf{r})$  de las ecuaciones (3.8) a (3.12).

integrales extendidas a cada elemento. De esta forma en la ecuación  $j$ -ésima sólo son no nulas las integrales correspondientes a elementos que contienen al nodo  $j$ . Además, de este modo se desacoplan gran número de ecuaciones, ya que en cada elemento  $V^e$  sólo toman valores no nulos las funciones  $N_j$  correspondientes a cada uno de sus nodos. Este hecho permite automatizar y simplificar notablemente la resolución del sistema de ecuaciones mediante métodos numéricos tradicionales (ver sección 3.3.3).

Para facilitar la resolución numérica del sistema de ecuaciones resultante conviene expresarlo en forma matricial. Así, en notación matricial los desplazamientos en cada elemento se definen como

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n_{nod}^e} \mathbf{d}_i^e N_i(\mathbf{r}) = \mathbf{N}^T \mathbf{d}^e \quad (3.13)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector de posición de cualquier punto del elemento,  $\mathbf{d}^e$  el vector de desplazamientos nodales del elemento y  $\mathbf{N}^T$  la matriz de funciones de forma, que es independiente del elemento (sección 3.3.1). La expresión (3.13) es análoga a la ecuación (3.8), pero en este caso los coeficientes,  $\mathbf{d}_i^e$ , representan los desplazamientos de los nodos del elemento. Del mismo modo,

$$\delta \mathbf{u}^e = \sum_{i=1}^{n_{nod}^e} \delta \mathbf{d}_i^e N_i(\mathbf{r}) = \mathbf{N}^T \delta \mathbf{d}^e \quad (3.14)$$

Por consiguiente, denotando\*

$$\nabla^s \mathbf{u}^e = \mathbf{B} \mathbf{d}^e; \quad \nabla^s \delta \mathbf{u}^e = \mathbf{B} \delta \mathbf{d}^e \quad (3.15)$$

donde  $\mathbf{B}$  es una matriz cuyos elementos involucran derivadas parciales de las funciones de forma, es posible escribir la ecuación (3.6) (i.e. el sistema de ecuaciones (3.12)) en forma matricial como

$$\sum_{e=1}^{n_{elm}} \left[ \int_{A_f^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dA + \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV - \int_{V^e} \mathbf{B}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} dV \right] = 0 \quad (3.16)$$

---

\*El operador  $\nabla^s$  en  $\nabla^s \mathbf{u}^e$  afecta sólo a las funciones de forma puesto que los desplazamientos nodales son constantes.

siendo  $\mathbf{A}$  el operador de ensamblaje<sup>[73,78,79]</sup> que permite reproducir el sistema de ecuaciones global a partir de las integrales correspondientes a cada elemento (entre corchetes en (3.16)). El operador ensamblaje depende exclusivamente del mallado escogido. Efectivamente, el mallado determina qué elementos son comunes a qué nodos y por tanto qué integrales elementales dan lugar a términos no nulos en cada ecuación del sistema.

Considerando que para cada elemento

$$\tilde{\sigma} = \mathbb{C}^e \nabla^s \mathbf{u}^e = \mathbb{C}^e \mathbf{B} \mathbf{d}^e \quad (3.17)$$

la ecuación (3.16) puede escribirse como

$$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \left[ \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbb{C}^e \mathbf{B} dV \right] \mathbf{d}^e = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \mathbf{f}_{ext}^e \quad (3.18)$$

donde

$$\mathbf{f}_{ext}^e = \int_{A_f^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dA + \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV \quad (3.19)$$

es el vector de fuerzas externas que actúan sobre el elemento  $e$ . A su vez, la matriz

$$\mathbf{K}^e \equiv \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbb{C}^e \mathbf{B} dV \quad (3.20)$$

se denomina *matriz de rigidez* del elemento y determina la relación entre las fuerzas externas aplicadas y los desplazamientos que se generan en el elemento. Definiendo la matriz de rigidez global

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \mathbf{K}^e \quad (3.21)$$

y el vector de fuerzas externas global

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \mathbf{f}_{ext}^e \quad (3.22)$$

es posible escribir la ecuación matricial (3.18) de forma simplificada como

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (3.23)$$

donde  $\mathbf{d}$  es el vector de desplazamientos nodales completo. Los desplazamientos nodales son las incógnitas que, una vez conocidas, permiten calcular el resto de parámetros de interés. A partir de la ecuación (3.23) se obtiene

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} \quad (3.24)$$

Por tanto, para resolver el sistema basta con invertir la matriz de rigidez. Algunos de los métodos existentes para realizar esta inversión o, lo que es lo mismo, para resolver este sistema de ecuaciones, se describen brevemente en la sección 3.3.3.

### 3.3. El modelo de elementos finitos

La resolución de cualquier problema, ya sea mecánico o de cualquier otro tipo, mediante el método de los elementos finitos requiere definir previamente el mallado de elementos (i.e. discretizar el problema). El modelado mediante elementos finitos (FEM\*) involucra, además, la elección del tipo de elementos (i.e. las funciones de forma), del modelo constitutivo correspondiente a cada elemento y del tipo de algoritmo numérico (*solver*) que se utilizará para resolver el sistema de ecuaciones. Estos ingredientes (mallado, tipo de elementos, modelo de material y *solver*) suelen programarse de forma independiente, en subrutinas o librerías modulares, en los programas comerciales más potentes (p. ej. ABAQUS<sup>©</sup>, ver sección 3.4) de manera que pueden combinarse entre sí a placer. En las siguientes subsecciones se analizan brevemente estos componentes del modelo de elementos finitos.

#### 3.3.1. Los elementos

Un elemento es algo más que una determinada región en una malla. Cuando se programa un elemento hay que definir la expresión analítica de las funciones de forma de sus nodos, así como implementar el algoritmo de evaluación de las

---

\* *Finite Element Modelling.*

integrales involucradas en la ecuación (3.16).

### Funciones de forma

El primer problema para definir las funciones de forma,  $\mathbf{N} \equiv (N_j)$ , de un elemento es que, en principio, dichas funciones dependen de su geometría\*. Sin embargo, este problema se evita de manera sencilla mediante una transformación de coordenadas. Por ejemplo, un elemento cuadrilátero de forma arbitraria se transforma en un cuadrado regular como se muestra en la Figura 3.3. Para ello

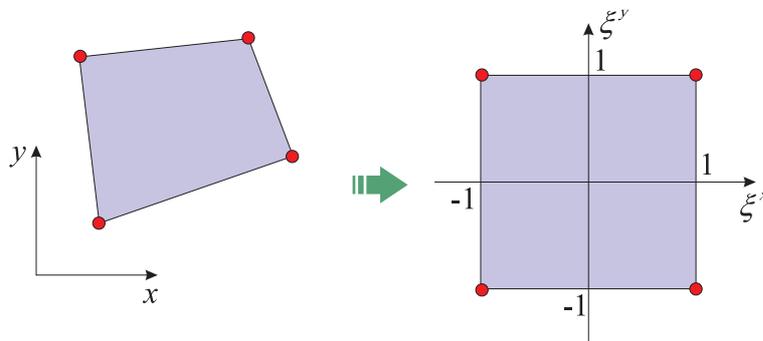


Figura 3.3: Ejemplo de transformación paramétrica de coordenadas en un elemento cuadrilátero de 4 nodos.

basta con utilizar unas funciones de transformación  $\psi_j(\boldsymbol{\xi})$ , de forma que

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{n_{nod}} \mathbf{x}_j \psi_j(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.25)$$

donde  $\mathbf{x}$  y  $\boldsymbol{\xi}$  son, respectivamente, las coordenadas de un punto cualquiera del elemento en el espacio real y en el paramétrico, y donde  $\mathbf{x}_j$  son las coordenadas de los nodos en el espacio real. Las funciones de forma se definen en el espacio paramétrico  $(\xi^x, \xi^y)$ , donde todos los elementos tienen la misma geometría. Por ello, las funciones de forma son las mismas para todos los elementos, siempre que no se modifique el tipo de elemento. Evidentemente, una vez terminados los

---

\*Conviene recordar que se exige a las funciones de forma que tomen valor unidad en un nodo del elemento y se anulen en el resto.

cálculos numéricos en el espacio paramétrico, i.e. evaluadas las integrales en (3.16), es necesario deshacer el cambio de coordenadas para obtener los resultados en el espacio real.

Es posible escoger como base de funciones para la transformación de coordenadas las propias funciones de forma que se emplean para interpolar los desplazamientos, i.e.  $\psi_j = N_j$ . Los elementos que utilizan este tipo de transformación se denominan *isoparamétricos* y, aunque tienen cierto interés didáctico, generalmente no se utilizan debido a su escasa robustez numérica\*.

La elección de la expresión analítica de las funciones de forma es hasta cierto punto arbitraria\*\*. Las funciones de forma lineales son las más simples, siendo deseables por la sencillez con que se traducen al lenguaje de programación. Las funciones de forma cuadráticas y otras más complejas<sup>[73,80]</sup>, si bien permiten realizar una interpolación local más precisa, requieren definir nodos intermedios para determinar unívocamente la forma de cada función  $N_j$ . Además, este tipo de elemento puede sufrir problemas de bloqueo\*\*\*. Un ejemplo de funciones de forma lineales y cuadráticas para un elemento unidimensional se muestra en la Figura 3.4. En general, la disminución en precisión local que supone la elección de elementos lineales se ve compensada por su robustez numérica. Además, el error cometido puede reducirse empleando un mallado más denso (ver sección 3.3.4). De hecho, la utilización de elementos lineales es habitual en FEM, salvo en ciertos casos específicos (p. ej. en simulación de fenómenos de fractura).

Por tanto, dependiendo de su geometría y grado de interpolación (i.e. del número de lados y nodos que contienen) los elementos se clasifican en: triangulares de 3 nodos (2D lineales), cuadriláteros de 8 nodos (2D cuadráticos), hexaédricos de 8 nodos (3D lineales), etc.

---

\*Este tipo de elemento puede colapsarse bajo determinadas condiciones en problemas no lineales o con materiales incompresibles<sup>[78]</sup>.

\*\*Han de verificarse ciertas condiciones, para asegurar la posibilidad de desplazamientos rígidos y a evitar incompatibilidades de las deformaciones en las fronteras de elementos contiguos<sup>[73]</sup>.

\*\*\*El bloqueo de elementos es un fenómeno numérico que acontece cuando el número de ligaduras iguala al número de grados de libertad del elemento. Cuando esto sucede, el elemento no puede sufrir ningún tipo de deformación, i.e. se vuelve irrealmente rígido<sup>[78]</sup>. Los elementos no lineales son más susceptibles de sufrir bloqueo, porque al aumentar el número de nodos aumenta el número de ligaduras.

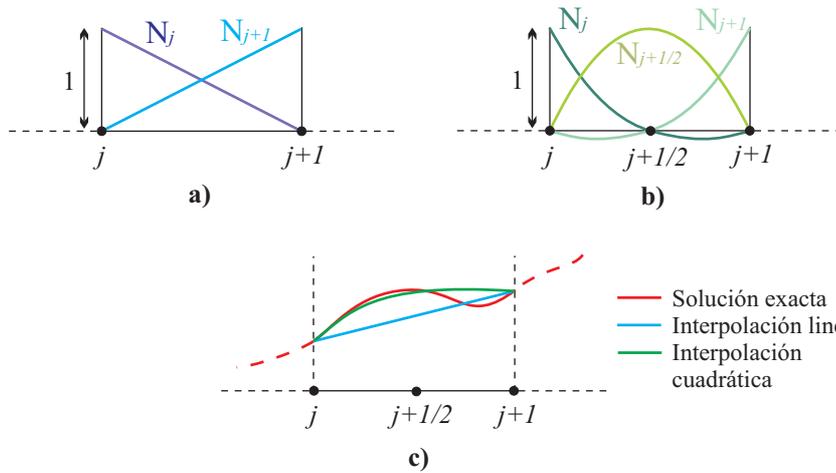


Figura 3.4: Funciones de forma para un elemento unidimensional: a) Funciones de forma lineales (2 nodos, 2 funciones), b) funciones de forma cuadráticas (3 nodos, 3 funciones). Las soluciones obtenidas empleando cada una de ellas se muestran en c). Elaboración propia a partir de Pepper y Heinrich<sup>[68]</sup>.

### Algoritmos de evaluación de integrales

La evaluación analítica de las integrales elementales en (3.16) puede resultar muy compleja, por ello es habitual recurrir a métodos de integración numérica. Los métodos de cuadratura más tradicionales (i.e. regla del trapecio, método de Simpson, etc.), agrupados bajo el nombre genérico de métodos de Newton-Cotes<sup>[81]</sup>, se basan en aproximar el integrando a un polinomio que es posteriormente integrado analíticamente. Los coeficientes polinomiales se determinan igualando el valor del polinomio al de la función a integrar en determinados puntos (generalmente situados a intervalos regulares). Procediendo de esta forma, la integral de una determinada función  $g(\xi^x, \xi^y)$  puede expresarse como

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi^x, \xi^y) d\xi^x d\xi^y = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p H_{ij} g(\xi_i^x, \xi_j^y) \quad (3.26)$$

donde  $H_{ij}$  son coeficientes adimensionales.

Los métodos de cuadratura de Gauss<sup>[68,73,80,81]</sup> son similares a los Newton-

Cotes, pero, en lugar de escoger de forma arbitraria los puntos de integración <sup>\*</sup>,  $(\xi_i^x, \xi_j^y)$ , se determinan y utilizan los puntos que conducen a una mayor precisión en la estimación de la integral. Determinar los puntos de integración óptimos requiere una manipulación matemática compleja, pero finalmente se obtiene la solución en función de los polinomios de Legendre <sup>\*\*</sup>. Las cuadraturas de Gauss permiten obtener un elevado grado de precisión en la integración numérica con un reducido número de evaluaciones del integrando. Por ello, estos métodos son los más empleados en FEM. Existen diversos tipos de elementos según el orden de polinomio utilizado en la integración. Sin embargo, puesto que cuanto mayor es el grado del polinomio mayor es el número de evaluaciones necesarias, el orden de integración escogido suele ser el mínimo necesario para garantizar una convergencia adecuada en la simulación<sup>[73]</sup>.

Puede demostrarse que en cada elemento existen ciertos puntos en los cuales la precisión en la evaluación numérica de las tensiones es máxima<sup>[80]</sup>. Estos puntos son precisamente los puntos de integración de Gauss-Legendre. Por tanto, es una práctica habitual en los programas de simulación FEM (p. ej. ABAQUS<sup>©</sup>) evaluar las tensiones y otros parámetros de interés en dichos puntos y, *a posteriori*, extrapolar esos valores a los nodos (como parte del postprocesado de resultados).

### Otras consideraciones

Uno de los objetivos en el desarrollo del método de elementos finitos es reducir el número de elementos necesarios para realizar un cálculo preciso, al objeto de disminuir el tiempo de cálculo y las necesidades de almacenamiento en memoria. Esto es especialmente importante en problemas tridimensionales donde, incluso en modelos relativamente sencillos, el número de elementos se dispara rápidamente si se desea cierta precisión. Afortunadamente existen situaciones en las que se puede reducir un problema tridimensional a uno en dos dimensiones, gracias a las simetrías existentes. Este es el caso de problemas que presentan simetría de revolución (p. ej. un contacto hertziano), ya que el estado tensional es el mismo en cualquier plano perteneciente al haz generado por el eje de simetría. También es

---

<sup>\*</sup>Es decir, los puntos donde se evalúa el integrando.

<sup>\*\*</sup>Por ello estos métodos de integración se denominan en ocasiones cuadraturas de Gauss-Legendre.

posible realizar este tipo de reducción cuando se trata de un estado de deformación plana o de tensión plana. Es decir, cuando las deformaciones o las tensiones son independientes de una de las coordenadas y se producen exclusivamente en planos perpendiculares al eje correspondiente<sup>\*[13,21]</sup>. Reducciones similares en la dimensión del problema, o al menos de ciertos elementos, son también posibles cuando el modelo incluye vigas o membranas. Para efectuar estas reducciones es necesario reformular las ecuaciones (i.e. modificar el algoritmo de evaluación) y, por consiguiente, se requieren elementos específicos: axisimétricos, tipo viga, de membrana, de deformación plana, etc. También puede disminuirse el número de elementos haciendo uso de elementos infinitos, que simulan una porción infinita de material.

Como ya se ha mencionado, ciertos tipos de elementos pueden sufrir fenómenos de inestabilidad numérica<sup>\*\*</sup> que dan lugar a errores durante la computación o conducen a resultados erróneos. La búsqueda de elementos que eviten este tipo de problemas es un campo (denominado tecnología de elementos) actualmente en desarrollo. Estos elementos avanzados, muchos de ellos sujetos a patente, recurren a subintegrar las ecuaciones o utilizan formulaciones alternativas de éstas<sup>[78,82,83]</sup>. Dentro de estos elementos cabe destacar, entre otros, los elementos de integración reducida, mixtos, de modos incompatibles, etc.

Dado que el método de los elementos finitos se aplica a un gran número de problemas que involucran ecuaciones diferentes, ha sido necesario desarrollar elementos específicos para cada uno de ellos: elementos térmicos, termomecánicos, difusivos, acústicos, etc. El desarrollo formal de las ecuaciones que rigen estos elementos se puede encontrar en la literatura<sup>[68,73,80,84]</sup>.

Por último, conviene destacar que las clasificaciones de elementos no son excluyentes, siendo posible tener, por ejemplo, elementos termomecánicos, cuadriláteros, axisimétricos, de 4 nodos y con integración reducida.

---

\*Situaciones de tensión plana se dan, por ejemplo, en placas delgadas sometidas a tensiones laterales uniformes a lo largo del espesor de ésta. Análogamente, una barra larga cargada uniformemente en direcciones perpendiculares a su eje constituye una situación modelo de deformación plana<sup>[13]</sup>.

\*\*Además del bloqueo, está el fenómeno de *hourglassing* que es debido a la generación de modos de deformación con energías nulas, la generación de matrices de rigidez definidas negativas (ver sección 3.3.3), etc.<sup>[78]</sup>

### 3.3.2. Modelos constitutivos

Todo elemento representa una porción de sistema con unas determinadas propiedades físicas. Por ejemplo, en un problema mecánico las propiedades físicas determinan la relación entre tensiones y deformaciones en el medio. Las expresiones que relacionan causa y efecto a través de propiedades físicas del medio se denominan ecuaciones o modelos constitutivos (también modelos de material). En la formulación expuesta en las secciones 3.1 y 3.2 las propiedades del material están representadas por el tensor  $\mathbb{C}$ , que en régimen elástico se corresponde con el tensor de constantes elásticas<sup>[21]</sup>. Introducir las propiedades del material en ese caso es tan simple como dar valores a las constantes elásticas que forman dicho tensor.

Sin embargo, el gran potencial del análisis mediante elementos finitos reside precisamente en que no está restringido al estudio de problemas elásticos lineales, sino que es capaz de abordar cualquier tipo de no linealidad, ya sea geométrica o debida al comportamiento del material. La no linealidad en las ecuaciones constitutivas puede expresarse, en general, como una dependencia del tensor  $\mathbb{C}$  respecto de algún parámetro mecánico:  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $\dot{\epsilon}$ , etc. Para calcular cualquiera de estas variables mecánicas es necesario conocer previamente  $\mathbb{C}$  que a su vez depende de estas variables. La solución a este dilema se obtiene abordando el problema de forma iterativa: se asignan valores iniciales a  $\mathbb{C}$ , se calculan  $\sigma$ ,  $\epsilon$ , etc. y se utilizan estos valores para refinar el valor de  $\mathbb{C}$ ... y así sucesivamente. En cada iteración se busca reducir sucesivamente el valor del residuo

$$\mathbf{R} = \mathbf{f} - \mathbf{Kd} \quad (3.27)$$

hasta que, finalmente, éste sea inferior a un cierto límite de tolerancia. Procedimientos iterativos análogos son imprescindibles al abordar cualquier tipo de problema no lineal, es decir, incluso en problemas puramente elásticos puede ser necesario debido a no linealidades de tipo geométrico.

Los modelos de material existentes abarcan prácticamente todos los tipos de comportamiento: modelos de plasticidad, elásticos no lineales (hiperelásticos e hipoeelásticos), viscoelásticos, de materiales porosos y un largo etcétera. La descripción de cada uno de estos modelos y de la forma en que se implementan escapa al

objetivo de este capítulo y, por ello, se remite al lector a la bibliografía<sup>[73,78,85]</sup>.

Si bien inicialmente los modelos constitutivos formaban parte de la propia definición del elemento, en la actualidad se programan en forma de subrutinas o librerías independientes. De esta forma los modelos constitutivos pueden combinarse con cualquier tipo de elemento, lo cual dota a los programas de una mayor versatilidad. Más aún, la separación entre la tecnología del elemento y el modelo constitutivo permite a los usuarios construir sus propios modelos de material, en forma de subrutinas de usuario, sin necesidad de acceder al código fuente del elemento que suele estar patentado.

### 3.3.3. Resolución del sistema de ecuaciones (*solver*)

El análisis de cualquier problema mediante FEM requiere resolver un sistema de ecuaciones análogo al expresado en forma matricial en (3.23). Este sistema tiene un número finito de incógnitas, tantas como desplazamientos nodales posibles\*. Algunas de las incógnitas se determinan directamente al aplicar las condiciones de contorno a los nodos de la superficie  $A_u$ , y el resto se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones mediante métodos de cálculo computerizado<sup>[70,86-88]</sup>.

El procedimiento de resolución del sistema de ecuaciones, comúnmente denominado *solver*, es el corazón de cualquier programa de simulación FEM. Los métodos de resolución numérica de sistemas de ecuaciones se clasifican en dos grandes grupos: métodos matriciales o directos y métodos vectoriales o indirectos.

#### Métodos directos o matriciales

Los métodos matriciales construyen la matriz de rigidez global del sistema,  $\mathbf{K}$ , de ahí su nombre, y la invierten (ver ecuación (3.24)). Estos métodos son los más tradicionales y extendidos, entre otras razones porque desde el punto de vista

---

\*Es decir, el número de incógnitas es igual al número de grados de libertad de cada nodo por el número de nodos.

numérico son incondicionalmente estables. Entre sus desventajas destaca el elevado número de operaciones que es necesario realizar,  $\mathcal{O}(n_{elm}^{7/3})$ , y la gran cantidad de memoria que se requiere para almacenar los datos,  $\mathcal{O}(n_{elm}^{3/2})$ <sup>[86]</sup>.

La eficiencia de los métodos matriciales depende fuertemente de la forma en que se ensambla la matriz de rigidez, es decir, del mallado. La forma en que se numeran los nodos y elementos en la malla determina qué componentes de  $\mathbf{K}$  son nulos (conviene notar que el número de componentes nulos en  $\mathbf{K}$  es muy elevado). Un ensamblaje óptimo conduce a una matriz en banda (i.e. con valores no nulos situados en torno a la diagonal principal), lo que permite reducir considerablemente las necesidades de espacio y el número de operaciones a realizar\*. La mayoría de los programas comerciales realizan una reenumeración interna de nodos y elementos para obtener matrices en banda y optimizar así el rendimiento. En ocasiones, debido a la complejidad del modelo, esto no es posible y los valores no nulos se encuentran dispersos en la matriz  $\mathbf{K}$ . Afortunadamente, incluso en estos casos, no es necesario almacenar todos los elementos de  $\mathbf{K}$ . Por ejemplo, los métodos denominados de *skyline* o de *columna activa* almacenan la matriz  $\mathbf{K}$  por columnas a partir del primer elemento no nulo y hasta la diagonal principal.

Tanto los métodos de matriz en banda como los de matriz dispersa utilizan procedimientos numéricos tradicionales para la resolución del sistema de ecuaciones: básicamente, los métodos de Gauss o de Cholesky. Si se trata de un problema no lineal, el proceso iterativo de minimización del residuo, ecuación (3.27), se realiza mediante el método de Newton-Raphson o alguna modificación de éste<sup>[86,89]</sup>. En general, los métodos directos requieren que las matrices de rigidez sean definidas positivas<sup>[86]</sup>. Por ello, la generación de matrices con determinantes negativos en determinados tipos de elementos da lugar a errores de cálculo, como ya se comentó en la sección 3.3.1.

### Métodos indirectos, vectoriales o iterativos

Los métodos indirectos no precisan construir la matriz de rigidez global del sistema,  $\mathbf{K}$ , sino que formulan el problema en forma de ecuaciones desacopladas y

---

\*En efecto, teniendo en cuenta que  $\mathbf{K}$  es simétrica, solamente sería preciso almacenar los elementos de la diagonal principal y los pertenecientes a las bandas superiores no nulas.

operan de forma iterativa directamente sobre el vector de desplazamientos nodales (de ahí el nombre de métodos vectoriales):

$$\mathbf{d}^{(i+1)} = \mathbf{A}\mathbf{d}^{(i)} \quad (3.28)$$

donde  $\mathbf{A}$  es una matriz cuya construcción y significado depende del tipo de método indirecto<sup>[86]</sup>. Al no necesitar ensamblar la matriz de rigidez global, las necesidades de cálculo disminuyen ostensiblemente; el número de operaciones se reduce hasta  $\mathcal{O}(n_{elm}^{3/2})$ , y la capacidad de almacenamiento de datos necesaria hasta  $\mathcal{O}(n_{elm})$ . A pesar de estas innegables ventajas, la aplicación de estos métodos no está muy extendida debido, principalmente, a que muchos de ellos son sólo condicionalmente estables<sup>[86]</sup>. Además, cuando el problema no es muy complejo y requiere pocas iteraciones, el tiempo de cálculo suele ser menor utilizando un método directo. Es en problemas no lineales complejos donde las virtudes de los métodos indirectos se ponen de manifiesto. Dado que cada vez se abordan problemas más complejos y con mayor número de elementos los métodos indirectos están experimentando un gran auge en la actualidad.

Entre los métodos indirectos más conocidos están los de Jacobi, de Gauss-Seidel, de relajación, SOR, SSOR, de gradiente, de la máxima pendiente, de gradiente conjugado (MGC), etc. Este último es el más utilizado debido a su rapidez de convergencia y elevada estabilidad<sup>[86]</sup>. También se clasifican dentro del grupo de métodos vectoriales los métodos explícitos de resolución de problemas dinámicos.

### 3.3.4. Errores en FEM

Siempre que se resuelve un problema de forma numérica se generan errores. En el método de los elementos finitos la magnitud del error cometido depende no sólo del grado de la interpolación de las funciones de forma, sino también del tamaño de los elementos utilizados. La justificación de esta afirmación es simple: La solución exacta del problema puede desarrollarse en serie de Taylor en el entorno de cada nodo, i.e.

$$\mathbf{u} = \mathbf{d}_i + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)_i (x - x_i) + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)_i (y - y_i) + \dots \quad (3.29)$$

Si el elemento tiene un tamaño característico  $h_e$ , al utilizar un polinomio (i.e. una función de forma) de orden  $o$  para aproximar (3.29), el error cometido en los desplazamientos es del orden de  $\mathcal{O}(h_e^{o+1})$ . Por otra parte, el error cometido en las deformaciones y tensiones, que son función de las derivadas primeras de  $\mathbf{u}$  será del orden  $\mathcal{O}(h_e^o)$ . De este modo, el error de discretización\* cometido al emplear elementos lineales ( $o = 1$ ) es del orden de  $\mathcal{O}(h_e^2)$  en los desplazamientos y  $\mathcal{O}(h_e)$  en tensiones y deformaciones. Por tanto, si se reduce a la mitad el tamaño de los elementos lineales, se reduce a  $\frac{1}{4}$  el error en los desplazamientos calculados y a  $\frac{1}{2}$  en las deformaciones y tensiones. La magnitud exacta del error depende de la *suavidad* con que varían las funciones a calcular (i.e. de las derivadas de éstas). Por ello, para minimizar los errores cometidos sin aumentar desmesuradamente el número de elementos conviene emplear mallados irregulares, que sean más densos en las regiones donde los gradientes de tensión y deformación sean mayores (ver sección 4.3).

### 3.4. El programa ABAQUS<sup>©</sup>

En esta sección se expone de forma detallada el funcionamiento del código de simulación mediante elementos finitos que se ha utilizado en este trabajo (ABAQUS<sup>©</sup>). Este *software* comercial, que pertenece a la compañía Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc. y se encuentra actualmente en su versión 6.2, es uno de los programas de simulación FEM más extendidos, potentes y versátiles. Se trata de un programa de FEM multipropósito ampliamente utilizado en la simulación de problemas científicos y en el diseño de prototipos, tanto por instituciones académicas como por organizaciones industriales.

El paquete ABAQUS<sup>©</sup> consta de varios programas, algunos de ellos específicos para determinados tipos de problemas. De entre ellos cabe destacar los dos motores de simulación FEM o *solver*: ABAQUS<sup>©</sup>/Standard y ABAQUS<sup>©</sup>/Explicit. ABAQUS<sup>©</sup>/Standard formula el problema de elementos finitos en forma implícita,

---

\* A éste hay que sumar los errores de integración (pág. 61) y los de redondeo debido al número finito de cifras que utiliza la computadora. Estos errores son en general pequeños en las computadoras modernas que operan con gran número de dígitos.

tal y como se ha descrito en la sección 3.2, mientras que ABAQUS<sup>©</sup>/Explicit está orientado a la resolución de problemas dinámicos formulados de forma explícita. Puesto que este trabajo se orienta al estudio del comportamiento mecánico de sistemas multicapa bajo cargas estáticas, el *solver* utilizado ha sido ABAQUS<sup>©</sup>/Standard.

La evolución de ABAQUS<sup>©</sup> ha sido considerable, pasando de la necesidad de editar manualmente los ficheros de entrada, a poseer un entorno gráfico amigable desde donde elaborar el modelo FEM, monitorizar el proceso de cálculo y visualizar los resultados. Esta interfaz gráfica recibe el nombre de ABAQUS<sup>©</sup>/CAE y está diseñada en forma de módulos que permiten realizar todas esas tareas de forma relativamente simple\*. A continuación se describe el funcionamiento de cada uno de los módulos de ABAQUS<sup>©</sup>/CAE en el orden en que aparecen en el menú, aunque éste no se corresponda necesariamente con el orden de utilización\*\*.

- **Módulo de creación de partes (*Part module*).**

Un modelo de elementos finitos puede constar de varios cuerpos o *partes*. Este módulo permite definir cada uno de ellos, bien creando su geometría con la ayuda del módulo de diseño (pág.72) o bien importándola desde otros programas\*\*\*. En este módulo se define si la pieza es rígida o deformable, tridimensional, axisimétrica, etc. Además, es posible dividir una pieza en *particiones* para la posterior asignación de propiedades o condiciones de contorno.

- **Módulo de asignación de propiedades (*Property module*).**

En este módulo se asigna a cada una de las partes (o particiones) el modelo constitutivo o de material que se desee (sección 3.3.2)\*\*\*\*, y se introducen los parámetros de entrada necesarios en dicho modelo (p. ej.  $E$  y  $\nu$  para un modelo elástico lineal isótropo). Además de asignar las propiedades del material que conforma una pieza es necesario definir su sección y, en ocasio-

---

\*Por supuesto, el procedimiento tradicional aún puede utilizarse, siendo posible, por ejemplo crear un modelo con ABAQUS<sup>©</sup>/CAE y modificar después el fichero de entrada editándolo manualmente.

\*\*De hecho la programación independiente de cada módulo permite al usuario pasar de un módulo a otro en cualquier momento del proceso.

\*\*\*Mediante ficheros compatibles ACIS, IGES, STEP o VDA-FS.

\*\*\*\*Bien sea escogiéndolo de entre la extensa librería de ABAQUS<sup>©</sup>, o bien definiéndolo mediante subrutinas de usuario.

nes, también orientación. En este módulo se asignan también a cada pieza las propiedades másicas y de inercia, especialmente relevantes en problemas cinemáticos o dinámicos.

- **Módulo de ensamblaje del modelo (*Assembly module*).**

Cada parte del modelo de elementos finitos se crea en un sistema de coordenadas propio. En este módulo se ensambla el modelo completo definiendo las posiciones de cada pieza en un sistema de coordenadas común a todas ellas. El proceso de ensamblaje se realiza creando imágenes (*instances*) de las partes que luego son posicionadas mediante traslaciones y rotaciones o aplicando ligaduras en determinadas caras o aristas. Una de las ventajas de este método es que se pueden crear varias imágenes a partir de una misma parte, de tal manera que cualquier modificación posterior de la parte afectará a todas sus imágenes.

- **Módulo de creación de pasos (*Step module*).**

Una simulación FEM puede constar de varios *pasos*: carga + descarga, calentamiento + presión + enfriamiento, etc. En este módulo se definen las características generales de cada paso (tiempo, número y tamaño de los incrementos\*, etc.). Además, en este módulo se especifican los parámetros de salida (tensiones, deformaciones, temperatura, etc) que se desea obtener como resultado de la simulación y cada cuantos incrementos han de almacenarse estos datos. La elección correcta de los parámetros de salida permite reducir el tamaño de los ficheros de salida y también el tiempo de cálculo. Existen dos tipos de salidas: de campo (*field output*) o históricas (*history output*). El primer tipo almacena los valores de los parámetros indicados en todos los elementos\*\* del modelo, de forma que posteriormente es posible visualizar la distribución geométrica de los valores de dicho parámetro (ver módulo de visualización, pág.72). Por el contrario, la salida histórica almacena cómo varían a lo largo de la simulación los valores de los parámetros en

---

\*ABAQUS<sup>®</sup>/Standard divide cada paso en una serie de incrementos de tiempo, que va resolviendo de forma sucesiva. El usuario controla en este módulo el tamaño inicial del incremento, el tiempo total de cada paso y el tamaño de incremento máximo y mínimo permitido. Dentro de estos límites ABAQUS<sup>®</sup>/Standard varía el tamaño de los incrementos en función de la velocidad de convergencia de la solución. De esta forma, si tras varias tentativas el programa no ha encontrado una solución de equilibrio satisfactoria, automáticamente disminuye el paso de tiempo todo lo que sea necesario hasta conseguirlo. Del mismo modo, si la convergencia ha sido muy rápida, ABAQUS<sup>®</sup>/Standard aumenta el paso de tiempo hasta que encuentra problemas o llega al límite máximo impuesto por el usuario.

\*\*Más concretamente en todos los puntos de integración.

un cierto conjunto de nodos o elementos.

- **Módulo de definición de interacciones (*Interaction module*).**

Como su propio nombre indica, este módulo permite definir contactos e interacciones entre piezas del modelo. En el caso de contactos se especifican las superficies que están o pueden entrar en contacto durante la simulación y se definen las propiedades de éste (fricción, adhesión, etc). También es posible establecer otros tipos de interacción, condiciones de movimiento, uniones, etc, por ejemplo, a través de ecuaciones de ligaduras aplicadas sobre los desplazamientos nodales.

- **Módulo de aplicación de fuerzas y condiciones de contorno (*Load/BC/IC module*).**

Este módulo permite imponer las condiciones de contorno y definir las fuerzas externas que actúan sobre el modelo. Tanto unas como otras pueden modificarse de un paso a otro o incluso, dependiendo del tipo de condición, variar (p. ej. linealmente) a lo largo de cada uno de ellos<sup>[90,91]</sup>. Las condiciones de contorno y las fuerzas aplicadas aparecen esquemáticamente representadas en pantalla sobre el modelo para facilitar su visualización.

- **Módulo de generación de mallado (*Mesh module*).**

Una vez definida la geometría del modelo es necesario definir la malla de elementos finitos que lo representará en la simulación. El proceso de mallado en sí, así como la numeración optimizada de nodos y elementos, es realizado por el programa. Es decir, el usuario se limita a escoger, dependiendo de la forma de la pieza o partición, la técnica de mallado (libre, estructurada o por barrido) y a indicar el número de elementos que desea en las aristas (semillar). Asimismo, ha de escoger el tipo de elementos más adecuado para su modelo (ver sección 3.3.1) de entre la amplia biblioteca de elementos que maneja ABAQUS<sup>©</sup>. Además, el usuario puede comprobar la bondad de la malla mediante la herramienta de verificación de mallado, que informa de la existencia de elementos con factor de forma demasiado elevado o excesivamente distorsionados\*.

- **Módulo de control y monitorización (*Job module*).**

Este módulo permite lanzar y monitorizar el progreso de la simulación. En

---

\*Para evitar problemas o errores numéricos es conveniente evitar los elementos con factores de forma superiores a 10 o con ángulos menores de 45° o superiores a 135°.

primer lugar se define el tipo de análisis a realizar (completo, continuación de otro o sólo test del modelo) y se asignan los recursos hardware (memoria, *buffers*, número de procesadores, etc). Posteriormente se escribe el fichero de entrada y se lanza el análisis, ejecutando el *solver* propiamente dicho. ABAQUS<sup>®</sup>/Standard se encarga, en primer lugar, de comprobar la validez de los datos de entrada (test del modelo), informando al usuario de los posibles errores y sugiriendo en cada caso posibles soluciones\*. En segundo lugar, efectúa los cálculos, escogiendo el método más adecuado para resolver el sistema de ecuaciones (ABAQUS<sup>®</sup>/Standard incorpora en realidad 2 *solver* optimizados: uno de matriz en banda y otro de matriz dispersa). Finalmente, determina los valores de las variables de salida requeridas por el usuario (ver módulo de creación de pasos) y los transcribe a los diferentes ficheros de salida. Además, se crea un fichero de *restart* que permite iniciar un segundo análisis a partir de los resultados del anterior. Durante todo el proceso es posible monitorizar los progresos del análisis e incluso visualizar (con la ayuda del módulo de visualización) resultados intermedios sin necesidad de esperar a que finalice la simulación.

- **Módulo de visualización (*Visualization module*).**

Este módulo, que también puede adquirirse de forma independiente bajo el nombre de ABAQUS<sup>®</sup>/Viewer, constituye un completo interfaz o postprocesador gráfico destinado a la visualización de los resultados de la simulación. El módulo permite el tratamiento visual de la información masiva generada por ABAQUS<sup>®</sup>/Standard, mediante la creación de diagramas de contorno (o de isolíneas), diagramas vectoriales, etc. También permite visualizar los resultados *históricos* mediante representaciones gráficas que pueden combinarse entre sí. Así mismo, es posible definir *caminos o paths* y representar gráficamente cómo varía un determinado parámetro a lo largo de dicho camino, etc<sup>[92]</sup>.

- **Módulo de diseño (*Sketch module*).**

Se trata de un módulo de creación de geometrías que puede ser llamado desde otros módulos (p. ej. el módulo de creación de partes) o de forma independiente para crear figuras geométricas que luego serán importadas

---

\* Durante dicho test se verifican, entre otras cosas, posibles errores de sintaxis en el fichero de entrada, la consistencia geométrica del modelo y la compatibilidad de las condiciones de contorno impuestas.

por otros módulos. Es por tanto un módulo de dibujo similar a un programa CAD que permite diseñar la geometría del modelo FEM.

En esta sección se ha descrito la columna central sobre la que se articula ABAQUS<sup>®</sup>. Para adquirir un conocimiento más detallado del programa y de su manejo se recomienda consultar los manuales<sup>[90-92]</sup>.



## Capítulo 4

# Materiales y método experimental

Como ya se ha mencionado, el objetivo principal de este trabajo es estudiar los modos de daño que se generan en estructuras multicapa (2 y 3 capas) sometidas a tensiones de contacto. Para ello, se han realizado diferentes ensayos mecánicos, así como cálculos mediante simulación numérica (FEM). Si bien los ensayos se realizaron sobre muestras prototipo, el estudio mediante simulación numérica es completamente general. Por ello, las conclusiones de este trabajo son aplicables a cualquier sistema multicapa. En este capítulo se describen tanto los materiales como los procedimientos experimentales que se han utilizado para la realización del estudio. En primer lugar, se especifican los materiales que constituyen las muestras multicapa prototipo, así como el proceso de fabricación de estas estructuras. Seguidamente, se describen los ensayos mecánicos realizados, indicando tanto los equipos como las condiciones particulares de ensayo. Finalmente, se detalla el modelo de simulación numérica utilizado.

## 4.1. Materiales y preparación de muestras

Los ensayos mecánicos se han realizado sobre sistemas prototipo constituidos por una o dos capas frágiles sobre un sustrato polimérico. Así pues, en estos sistemas, las capas son considerablemente más rígidas que el sustrato. El estudio de estos sistemas tiene un gran interés práctico, dada la importancia tecnológica que han adquirido los recubrimientos cerámicos por su capacidad para proteger a otros materiales (frente a impactos, fricción, temperaturas elevadas, corrosión, etc.)<sup>\*</sup>.

Los materiales utilizados para preparar las muestras multicapa son:

- Vidrio sódico-cálcico (*soda-lime glass*):  
Portamuestras suministradas por Daigger & Company, Wheeling, IL (EEUU). En lo sucesivo, se utilizará la denominación genérica de *vidrio* para este material, por ser el más empleado en este trabajo. Composición: 72 %  $SiO_2$ , 14 %  $Na_2O$ , 7 %  $CaO$ , 4 %  $MgO$ , 2 %  $Al_2O_3$ , 1 %  $K_2O$ .
- Vidrio de boro:  
Bloques suministrados por el Dr. Douglas Blackburn del National Institute of Standards and Technology (NIST) en Gaithersburg, MD (EEUU). Composición: 86.5 %  $B_2O_3$ , 9.1 %  $Na_2O$ , 4.4 %  $SiO_2$ .
- Vidrio de plomo:  
Muestras suministradas por el Dr. Douglas Blackburn (NIST). Composición: 70 %  $PbO$ , 30 %  $SiO_2$ .
- Vidrio de bismuto:  
Bloques suministrados por el Dr. Douglas Blackburn (NIST). Composición: 45 %  $BiO_2$ , 22 %  $MgO$ , 20 %  $Al_2O_3$ , 13 %  $BeO$ .
- Zafiro:  
Láminas comerciales de zafiro monocristalino ( $Al_2O_3$  99.9 %) orientadas al azar y pulidas por ambas caras, suministradas por Goodfellow, Huntingdon (Inglaterra).

---

<sup>\*</sup> Algunos de los ejemplos más significativos incluyen herramientas de corte, barreras térmicas, parabrisas, vidrios ópticos, restauraciones dentales, etc.

- Policarbonato:

Planchas de 12.5 mm de espesor y superficies pulidas, suministradas por AIN Plastics, Norfolk, VA (EEUU).

La elección de estos materiales obedece a una doble motivación. En primer lugar, se trata de materiales transparentes que permiten la observación *in situ* del desarrollo de fisuras (sección 4.2.1). Además, sus módulos elásticos cubren un amplio rango de valores (ver Apéndice A), lo que permite analizar la dependencia de las cargas críticas de inicio de fractura con este parámetro.

Por otro lado, también se han utilizado obleas de silicio monocristalino orientadas en direcciones  $\langle 100 \rangle$ , de 1 mm espesor y pulidas por una cara (suministradas por Virginia Semiconductors, Fredericksburg, VA (EEUU)). Este material se empleó para fabricar muestras silicio/policarbonato, que se utilizaron como referencia para estudiar los fenómenos de fatiga en bicapas (sección 5.4).

A partir de los materiales masivos citados, se prepararon numerosas muestras bicapa y tricapa utilizando siempre como sustrato un bloque de policarbonato, de aproximadamente 75 mm x 25 mm x 12.5 mm, y variando tanto los espesores como los materiales constituyentes de las capas superiores. Estas capas fueron cortadas y pulidas (acabado final 1  $\mu\text{m}$ ) hasta alcanzar los espesores deseados (0.3-2.0 mm), utilizando para ello una cortadora automática Struers Accutom-50 y una pulidora Motopol 2000. Posteriormente, determinadas superficies de las capas frágiles fueron erosionadas, utilizando una suspensión de partículas de carburo de silicio de grado 600. De este modo se favorece el inicio de fisuras en la superficie erosionada y es posible estudiar de manera aislada los diferentes modos de fractura. Por otro lado, la erosión garantiza que las poblaciones de defectos preexistentes, y por tanto la resistencia a fractura, sean similares en todos los casos. Además, de esta forma se reducen tanto las cargas críticas como su dispersión, lo que facilita el análisis de los resultados.

Las diferentes capas se unieron utilizando un adhesivo industrial epoxy suministrado por Harcos chemicals, Bellesville, NJ. Este adhesivo permite la fabricación de muestras multicapa a temperatura ambiente y, además, es también transparente. Para minimizar el espesor de la capa de adhesivo, las muestras se colocan en una mordaza bajo presión uniaxial ligera durante 48 h. De esta forma el espesor final

de la capa de adhesivo es de aproximadamente  $15 \pm 5 \mu\text{m}$ . En la Figura 4.1 se muestra un sistema tricapa preparado siguiendo este procedimiento. Se trata de una

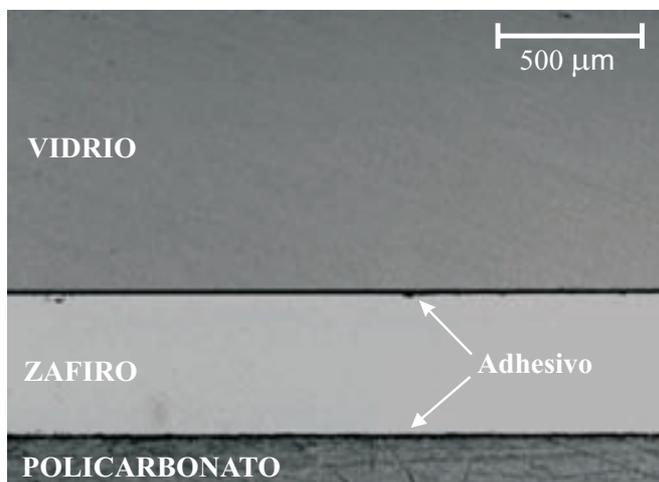


Figura 4.1: Sección transversal de una muestra tricapa obtenida mediante corte y pulido. Las capas de adhesivo son de aproximadamente  $15 \mu\text{m}$ . Solamente se muestra una pequeña porción del sustrato.

micrografía de la sección transversal de una muestra vidrio/zafiro/policarbonato con 1 mm de vidrio como capa superior y 0.5 mm de zafiro como capa intermedia. Pueden observarse claramente las 2 capas de adhesivo, una entre el vidrio y el zafiro y otra entre el zafiro y el policarbonato. Aunque la mayoría de las muestras fueron preparadas en aire, algunas muestras vidrio/policarbonato se fabricaron en atmósfera seca (humedad  $< 20\%$ ) utilizando para ello una bolsa hermética.

Para el estudio de simulación numérica (sección 4.3) se precisan como parámetros de entrada las propiedades mecánicas de los materiales que constituyen el sistema multicapa (incluido el adhesivo), así como del material utilizado como impresor (carburo de wolframio). Para su determinación se utilizaron muestras monolíticas de todos los materiales\*. Como muestra masiva de carburo de wolframio se utilizó un disco de aproximadamente 12 mm de radio y 3.5 mm de espesor,

\*Las muestras monolíticas de vidrio y silicio utilizadas en los ensayos de flexión (sección 4.2.3) fueron previamente erosionadas para reproducir las mismas condiciones superficiales de las muestras multicapa.

obtenido cortando un impresor esférico de 12.7 mm de radio. En el caso del adhesivo, la resina epoxy obtenida mezclando los componentes precursores se introdujo en una cámara de vacío para minimizar la presencia de burbujas de aire. A continuación se dejó endurecer la resina durante aproximadamente 48 horas en un recipiente cilíndrico de plástico. Transcurrido ese tiempo se recuperó la muestra y se preparó un disco de 3 cm de diámetro y 2 cm de espesor.

## 4.2. Ensayos mecánicos

Para la caracterización mecánica tanto de las estructuras multicapa como de sus materiales constituyentes se han realizado principalmente ensayos de indentación Hertz. Como técnicas complementarias se han efectuado también ensayos de flexión en 4 puntos para la determinación de la resistencia a la fractura, así como métodos vibracionales para determinar el módulo elástico de algunos materiales masivos. A continuación se describen detalladamente estos ensayos, así como las condiciones utilizadas en cada caso.

### 4.2.1. Ensayos Hertz estáticos

En este trabajo se han realizado numerosos ensayos de indentación Hertz (sección 1.3) tanto sobre muestras monolíticas como sobre estructuras multicapa. En el caso de muestras masivas se han utilizado impresores esféricos de carburo de wolframio de radios  $R = 1.98, 3.18, 3.96, 4.76, 7.94$  y  $12.70$  mm. En cambio, para las muestras multicapa el radio de los impresores (WC) se fijó en  $R = 3.18$  mm\*. Los ensayos mecánicos se han realizado en una máquina Instron modelo 5565 (Figura 4.2), controlada mediante ordenador a través de un software (MERLIN) que permite almacenar en un fichero los datos relativos al ensayo (tiempo, carga, des-

---

\*Este radio se encuentra en el rango de radios de curvatura (2-4 mm) de las superficies que entran en contacto durante el proceso de masticación<sup>[4,93,94]</sup> y es, por tanto, relevante en el estudio de estructuras multicapa para aplicaciones dentales.



Figura 4.2: Máquina de ensayos Instron 5565 (imagen superior) y detalle de un ensayo de indentación Hertz con una esfera de 12.7 cm de radio (imagen inferior).

plazamiento de la traviesa, etc.). Todos los ensayos se realizaron a temperatura y humedad ambiente, en el rango de cargas 25-4000 N y a velocidades de traviesa comprendidas entre 0.001 y 1 mm/min.

Como ya se ha mencionado, los ensayos Hertz estáticos permiten obtener los parámetros de entrada necesarios para la simulación FEM (sección 4.3), i.e. módulo elástico, tensión de límite elástico y endurecimiento por deformación de los materiales monolíticos que constituyen los sistemas multicapa. Además, la observación *in situ* de los ensayos en sistemas multicapa permite identificar los modos de fractura que se generan en esas estructuras, así como determinar las correspondientes cargas críticas de inicio. A continuación se detallan los procedimientos experimentales que se han utilizado para la determinación de estos parámetros.

#### **Curvas tensión-deformación de indentación. Determinación del módulo elástico, $E$**

Para obtener las curvas tensión-deformación de algunos de los materiales masivos (vidrio, zafiro, policarbonato, adhesivo epoxy y carburo de tungsteno) se han realizado ensayos de indentación Hertz con radios de impresor y cargas máximas variables. En todos los casos la duración del ensayo fue aproximadamente de 45 s, de forma que la velocidad de traviesa seleccionada depende de la carga aplicada, aumentando a medida que ésta aumenta\*. Las superficies de ensayo fueron previamente recubiertas con oro, utilizando un equipo de recubrimiento por *sputtering* (Scancoat Six, Edwards), a fin de determinar el radio de contacto en carga máxima,  $a$ , a partir de la huella residual que se visualiza en la capa de oro. Este método permite determinar el tamaño de la zona de contacto, incluso en régimen elástico donde, de otro modo, no se apreciaría huella residual. El espesor de la capa de oro depositada fue de aproximadamente 0.01  $\mu m$ . Esta técnica no es adecuada para las muestras de policarbonato y adhesivo, ya que las pequeñas presiones de contacto involucradas son insuficientes para dañar la capa de oro de manera apreciable. En estos casos, se pintó la superficie de ensayo con un rotulador. Durante el ensayo se adhiere tinta al impresor, dejando en la muestra una zona circular menos marcada que revela la superficie de contacto. El radio de contacto se determinó con

---

\*Esta precaución es especialmente importante en el caso del policarbonato y el adhesivo, para minimizar el posible efecto de su comportamiento viscoelástico en los resultados.

un reloj-comparador acoplado a un microscopio óptico de reflexión Nikon Epiphot 300 (Figura 4.3).



Figura 4.3: Microscopio óptico invertido Nikon Epiphot 300 y reloj-comparador acoplado.

De esta forma, se obtiene el diámetro de la huella,  $2a$ , con una precisión de  $\pm 5 \mu m$ . Conocido el radio del área de contacto, la carga y el radio del indentor, se puede obtener la curva tensión-deformación de indentación (i.e.  $p_0$  frente a  $a/R$ ) para cada material como se ha descrito en la sección 1.3.

De acuerdo con la teoría de la elasticidad lineal de Hertz, para tensiones inferiores a la tensión de límite elástico la relación entre  $p_0$  y  $a/R$  es lineal (sección 1.1). A partir de la pendiente,  $\mu$ , del tramo lineal de la curva tensión-deformación y utilizando las ecuaciones (1.14) y (1.15), es posible determinar el módulo elástico de materiales monolíticos mediante de la expresión

$$E = \frac{1 - \nu^2}{\frac{4}{3\pi\mu} - \frac{1 - \nu'^2}{E'}} \quad (4.1)$$

La utilización de la expresión (4.1) requiere conocer el módulo elástico y el coeficiente de Poisson del impresor ( $E'$  y  $\nu'$  respectivamente), así como el coeficiente

de Poisson del material objeto de estudio,  $\nu$ . En este trabajo se asume que el valor del coeficiente de Poisson es 0.22 para todos los materiales cerámicos (incluido el carburo de wolframio) y 0.35 para metales y polímeros. El módulo elástico del indente se determinó a partir de la curva de tensión-deformación correspondiente al carburo de wolframio. En este caso  $E = E'$  y  $\nu = \nu'$ , por lo que  $E'$  puede expresarse exclusivamente en función del coeficiente de Poisson y de la pendiente,  $\mu$ , en la forma:

$$E' = \frac{3\pi\mu}{2}(1 - \nu'^2) \quad (4.2)$$

### Determinación de la tensión de límite elástico, $Y$

La tensión de límite elástico,  $Y$ , de los materiales monolíticos dúctiles se ha obtenido a partir de la presión de indentación crítica necesaria para iniciar la deformación plástica,  $p_Y$ , utilizando  $Y = p_Y/1,1$ , (1.25). Estimar  $p_Y$  a partir del punto en el que la curva tensión-deformación de indentación se desvía del comportamiento lineal es un método algo subjetivo y poco preciso. Por ello, en este trabajo se ha determinado  $p_Y$  a partir de la carga mínima,  $P_Y$ , que genera una impresión residual detectable en la superficie del material<sup>[23]</sup> y del correspondiente radio de contacto. Para determinar  $P_Y$  se realizaron una serie de ensayos con un indente de 3.18 mm de radio a cargas crecientes para, a continuación, observar la muestra en el microscopio utilizando contraste interferencial Nomarski. Este tipo de contraste permite revelar cualquier cambio en la orografía de la superficie del material y, por tanto, detectar cualquier depresión residual. Conviene mencionar que los valores obtenidos a partir de este método son, en realidad, un límite superior para la tensión de límite elástico, ya que  $P_Y$  suele estar evaluada por exceso. Efectivamente, para cargas algo inferiores a  $P_Y$  puede producirse deformación plástica, localizada en una región tan pequeña que no genere una impresión residual detectable mediante microscopía óptica.

### Determinación de cargas críticas de fractura. Ensayos *in situ*

Aprovechando la transparencia de los materiales constituyentes, se efectuaron observaciones *in situ* durante la realización de ensayos Hertz sobre materiales mul-

ticapa. Para ello, se utilizó un sistema óptico de inspección (Zoom 70 Optical System, OPTEM International), diseñado *ex profeso* para la realización de estas experiencias. El montaje (Figura 4.4) consta de un prisma de  $45^\circ$  acoplado a un tubo extensor dotado de un sistema de zoom y de una entrada para guía de luz. Una fuente de iluminación se conecta a esta entrada mediante fibra óptica, de modo que la luz y la imagen viajan por el mismo camino, consiguiéndose así una iluminación óptima. El sistema está conectado a una cámara CCD de alta resolución que, a su vez, se conecta a un monitor y a un equipo de grabación-edición de vídeo. Como se muestra en la Figura 4.4, el equipo óptico y la cámara están montados sobre un soporte regulable, que permite localizar la zona en la que se produce el contacto impresor/muestra y enfocar la imagen. La muestra se coloca sobre la superficie de una mesa metálica rígida de forma paralelepípedica, cuya superficie superior tiene un orificio circular de aproximadamente 6 mm de diámetro para el paso de la luz y de la imagen. Esta mesa tiene una apertura frontal para introducir el sistema óptico, al objeto de visualizar la zona de contacto desde abajo, enfocando a través de la muestra transparente. La superficie de ensayo se recubre previamente con oro para facilitar la reflexión de la luz y mejorar así la calidad de la imagen.

Utilizando este montaje se grabaron en vídeo las secuencias de inicio y propagación de las fisuras generadas durante los ensayos Hertz en las capas frágiles de los sistemas multicapa estudiados. Las cargas críticas para el inicio de las fisuras se determinaron mediante el siguiente procedimiento:

- a) Se sincroniza la puesta en marcha del equipo de grabación con el inicio del ensayo.
- b) Al finalizar el ensayo, se revisa detenidamente la grabación con la ayuda del sistema de parada de imagen, al objeto de determinar el instante preciso en que aparece la primera fisura.
- c) La carga correspondiente a dicho instante se obtiene utilizando el fichero de datos registrado por el ordenador que controla la máquina de ensayos.

En el caso particular de las fisuras radiales, las cargas críticas de inicio se determinaron directamente a partir de los ficheros de datos, ya que se produce una caída apreciable en la carga ( $\sim 5 - 10$  N). Las cargas críticas que se muestran en este

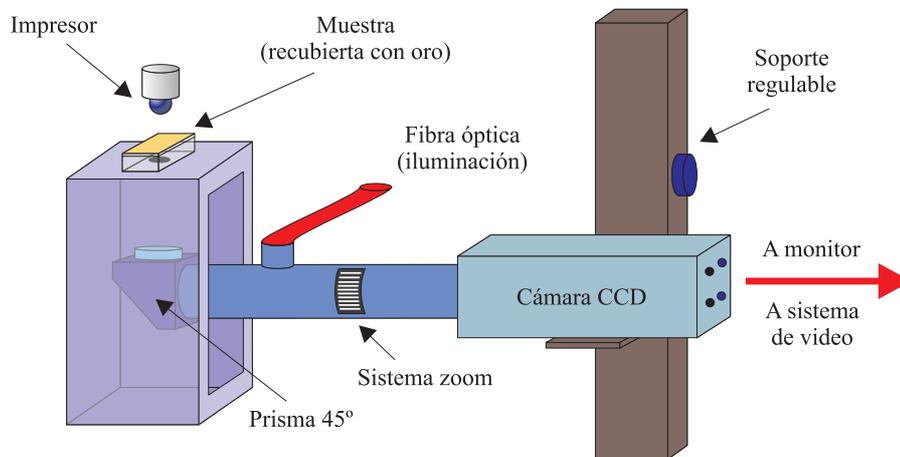


Figura 4.4: Esquema del montaje y fotografía del sistema de observación in situ.

trabajo corresponden al valor medio de un mínimo de 8 ensayos.

Tras los ensayos, algunas muestras fueron seccionadas transversalmente para observar al microscopio la morfología de las fisuras. El corte se realizó cerca de la fisura\* y la superficie resultante fue posteriormente pulida. De este modo se determinó la capa en la que se inicia la fisura, así como su morfología.

#### 4.2.2. Ensayos Hertz cíclicos

Se realizaron ensayos Hertz cíclicos sobre muestras vidrio/policarbonato y silicio/policarbonato, al objeto de estudiar fenómenos de fatiga en sistemas bicapa (sección 5.4). Estos ensayos se realizaron con una maquina servo-hidráulica Instron modelo 8511 (Figura 4.5) utilizando el mismo radio de impresor que en los ensayos estáticos ( $R = 3.18$  mm). El equipo se programó para aplicar la carga de

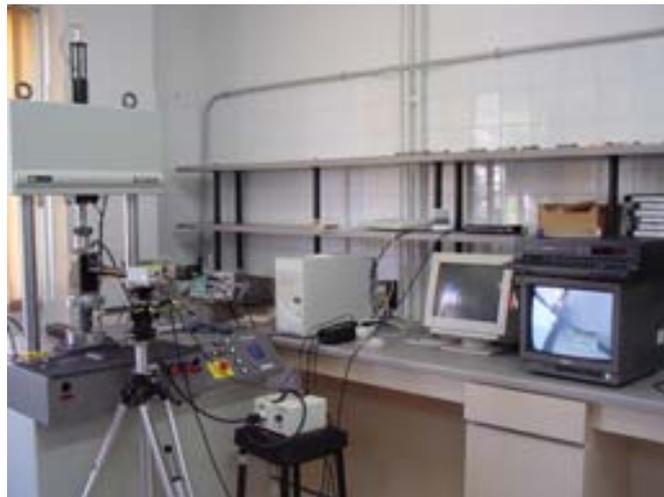


Figura 4.5: Máquina de ensayos Instron 8511 y montaje para la observación y grabación de ensayos de indentación Hertz cíclicos.

---

\*Previamente se pegó una lámina de vidrio de 1 mm en la superficie superior de la capa externa para evitar que se desconche (*chipping*) durante el proceso de corte y pulido.

forma cíclica según una función *medio-seno*\* a frecuencia y carga máxima fijas. Las frecuencias utilizadas fueron  $f = 0.1, 1$  y  $10$  Hz, y para cada una de ellas se realizaron ensayos con cargas máximas  $P_m = 75, 90, 110$  y  $120$  N. Para cada una de las 12 condiciones resultantes se realizaron un mínimo de 10 ensayos, generalmente, en condiciones ambientales. No obstante, al objeto de investigar la influencia del ambiente en la fatiga de sistemas bicapa, se realizaron también algunos ensayos en agua y en atmósfera de nitrógeno. Además, algunas muestras se prepararon en atmósfera de nitrógeno (sección 4.1).

Los ensayos fueron monitorizados *in situ* y grabados en video utilizando el sistema óptico descrito anteriormente (Figura 4.4), al objeto de determinar el número de ciclos y el tiempo necesario para producir la fractura. Con este fin, se incorporó al montaje una segunda cámara de video para registrar simultáneamente\*\* la pantalla de visualización de la máquina de ensayos en la que se muestra el número de ciclos efectuados (Figura 4.5).

### 4.2.3. Técnicas auxiliares de caracterización de materiales monolíticos.

Para completar la caracterización de los materiales monolíticos, además de los ensayos de indentación Hertz se han empleado las técnicas que se describen a continuación.

#### Ensayos de flexión en cuatro puntos

Estos ensayos destructivos permiten determinar la resistencia a fractura de materiales frágiles,  $\sigma_F$ , a partir de la carga de fractura,  $P_m$ , de barras o láminas sometidas a flexión. Los ensayos de flexión se han empleado para determinar la resistencia a fractura del silicio y del vidrio previamente erosionados, en función de la velocidad de aplicación de la carga (sección 5.4). Para ello se ha utilizado

---

\*La función medio-seno equivale a la función  $|\sin x|$ .

\*\*Gracias a un sistema PIP (*Picture In Picture*) de inserción de imágenes.

una maquina de ensayos universal Instron modelo 5565 (Figura 4.2) acoplado el dispositivo experimental que se muestra en la Figura 4.6. Las distancias entre

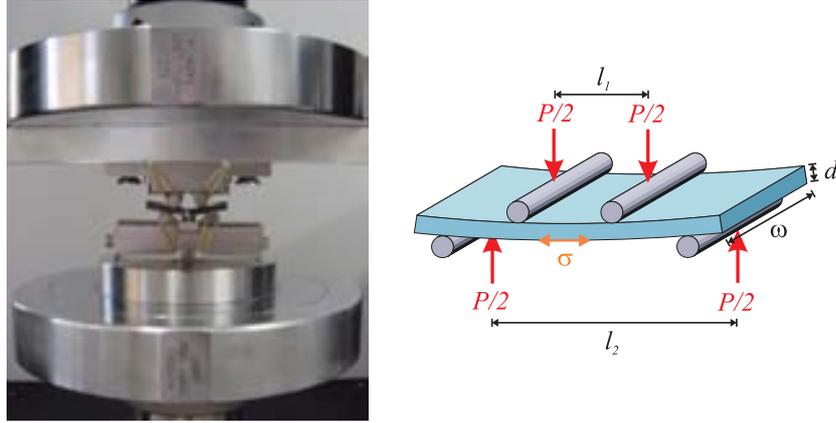


Figura 4.6: Fotografía del dispositivo experimental y esquema de un ensayo de flexión en cuatro puntos. En la fotografía se aprecia una muestra fracturada tras uno de estos ensayos destructivos.

cilindros son  $l_1 = 15$  mm y  $l_2 = 24$  mm y las dimensiones de las muestras utilizadas fueron  $d = 1$  mm y  $\omega \simeq 10$  mm. Antes de realizar los ensayos las muestras fueron biseladas mediante pulido con pasta de diamante de  $6 \mu\text{m}$  para eliminar los defectos en las aristas de corte. Los ensayos se realizaron a temperatura y humedad ambiente, y a velocidades de traviesa en el rango  $0.0005 - 5$  mm/min. En todos los casos se realizaron un mínimo de 5 ensayos. La resistencia a fractura se obtiene aplicando la expresión<sup>[27]</sup>

$$\sigma_F = \sigma(P_m) = \frac{3P_m(l_2 - l_1)}{8\omega d^2} \quad (4.3)$$

Análogamente, la velocidad de aplicación de la tensión,  $\dot{\sigma}$ , viene dada por la expresión

$$\dot{\sigma} = \frac{3\dot{P}(l_2 - l_1)}{8\omega d^2} \quad (4.4)$$

donde  $\dot{P}$  es la velocidad de carga, que se obtiene a partir de la pendiente de la curva de carga,  $P(t)$ .

### Técnica de medida de constantes elásticas mediante vibración inducida por impulsos

Aunque es posible determinar el módulo elástico de un material monolítico a partir de su curva tensión-deformación de indentación, el procedimiento es laborioso, pues requiere de la realización de un número elevado de ensayos Hertz. Por ello, y dada la gran cantidad de materiales utilizados en este trabajo, se ha empleado una técnica de medida de módulos elásticos más rápida basada en la norma ASTM E-1876<sup>[95]</sup>. Este método consiste básicamente en medir la frecuencia natural de vibración del material a partir de su respuesta transitoria a un ligero impulso mecánico. El procedimiento es extremadamente sencillo: En primer lugar se coloca una muestra paralelepípedica sobre un par de almohadillas, para aislarla de las vibraciones de la mesa de medida. A continuación, se coloca el sensor acústico (Grindosonic, LemmensNV) en contacto con una de las superficies laterales de la muestra y se golpea ligeramente su superficie superior (Figura 4.7). El disposi-



Figura 4.7: Instrumento de medida de la frecuencia natural de vibración y esquema de utilización.

tivo registra automáticamente y con gran precisión (hasta 5 cifras significativas) la frecuencia natural de vibración del material,  $f_n$ .

Conocida  $f_n$ , el módulo elástico se obtiene utilizando la expresión<sup>[95]</sup>

$$E = 0.9465 \frac{m f_n^2}{\omega} \left( \frac{l}{d} \right)^3 T_1 \quad (4.5)$$

donde  $l$ ,  $\omega$  y  $d$  son respectivamente la longitud, anchura y espesor de la muestra

expresados en milímetros,  $m$  es la masa en gramos y  $E$  el módulo elástico resultante expresado en pascuales. El factor  $T_1$  es un término corrector que tiene en cuenta las dimensiones finitas de la muestra. Si, como es el caso, las muestras utilizadas verifican que  $l/d > 20$ , dicho término puede expresarse como

$$T_1 = 1.000 + 6.585 \left( \frac{d}{l} \right)^2 \quad (4.6)$$

### 4.3. Simulación numérica (FEM)

Al objeto de determinar las tensiones generadas mediante ensayos Hertz en los diferentes materiales (monolíticos y multicapas) se han realizado cálculos mediante simulación numérica por elementos finitos. Para ello se ha utilizado el programa ABAQUS<sup>®</sup>/Standard (Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc.), instalado en una estación de trabajo biprocesadora HP Kayak XU800.

El modelo empleado considera el contacto sin fricción entre una semiesfera de carburo de tungsteno de radio  $R$  (con  $R = 3.18$  mm, salvo indicación al contrario) y la superficie plana del material problema. La simulación de una semiesfera en lugar de una esfera completa simplifica notablemente el modelo y no modifica apreciablemente los resultados. A su vez, la simetría axial del contacto permite reducir el problema tridimensional a uno bidimensional.

El indenteor semiesférico se ha modelizado con mallados irregulares de un mínimo de 3500 elementos cuadriláteros, lineales, axisimétricos y de cuatro nodos (denotados CAX4 en ABAQUS<sup>®</sup>). Como se observa en la Figura 4.8, la densidad de elementos es mucho mayor en la zona próxima al contacto, siendo el tamaño mínimo de  $12 \times 25 \mu\text{m}$ . A su vez, la muestra es un disco de radio 16 mm y espesor 14 mm, con un mínimo de 50000 elementos CAX4. De nuevo, se utilizaron mallas irregulares (Figura 4.8) más densas en las regiones próximas a la superficie de contacto y al eje de carga, siendo el tamaño mínimo de elemento de  $4 \times 4 \mu\text{m}^*$ . En el caso de sistemas multicapa es necesario modificar el mallado en cada simulación,

---

\* Cuando se simularon capas de adhesivo, se utilizaron elementos de menor tamaño debido a su reducido espesor.

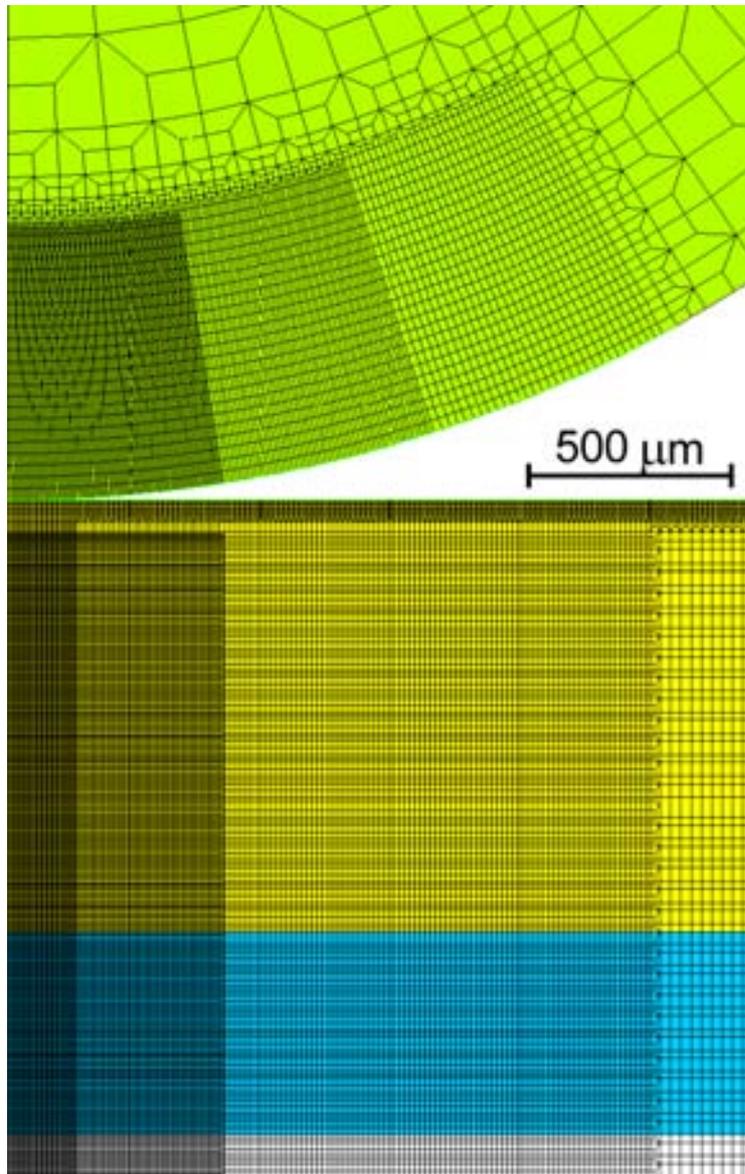


Figura 4.8: Ejemplo de mallado empleado en las simulaciones. Se han coloreado las regiones correspondientes a las distintas capas, suponiendo una capa externa de 1 mm de espesor (amarillo), una capa intermedia de 500  $\mu\text{m}$  (azul) y un sustrato de 12 mm (blanco).

para poder definir correctamente las capas de diferentes espesores  $d_j$ . Finalmente, se admite que la unión entre capas es infinitamente fuerte y, por tanto, no se contempla la posibilidad de delaminación.

Para que cada capa represente un material en concreto, sólo es necesario especificar en el fichero de entrada de ABAQUS<sup>®</sup> sus constantes elásticas ( $E$  y  $\nu$ ) y su curva tensión deformación uniaxial,  $\sigma(\epsilon)$ . Por simplicidad, se considera que los materiales deforman plásticamente de acuerdo con el criterio de von Mises<sup>[21,22]</sup> y que presentan un endurecimiento por deformación lineal. Es decir, se asume una curva tensión deformación uniaxial, en la forma

$$\begin{cases} \sigma = E\epsilon, & (\sigma < Y) \\ \sigma = Y + \alpha(\epsilon E - Y), & (\sigma > Y) \end{cases} \quad (4.7)$$

donde  $Y$  es la tensión de límite elástico,  $E$  el módulo de Young, y  $\alpha$  es un parámetro adimensional que mide la consolidación del material<sup>[45,96]</sup>. El valor de este parámetro de endurecimiento varía entre  $\alpha = 1$  (comportamiento elástico lineal) y  $\alpha = 0$  (comportamiento perfectamente plástico). Los valores de  $E$  e  $Y$  se ha obtenido experimentalmente siguiendo los procedimientos descritos en la sección 4.2.1. El parámetro  $\alpha$  se determina mediante simulación numérica, siguiendo el procedimiento que se describe en la sección 4.3.1.

La aplicación de la carga se ha realizado mediante una superficie rígida en contacto con la superficie plana de la semiesfera. En todos los casos, la simulación se ha realizado en 2 pasos (*steps*):

1. En un primer paso se aplica gradualmente 1/20 de la carga total. Esta etapa permite que ABAQUS<sup>®</sup> resuelva las inestabilidades y singularidades producidas en el contacto inicial. La duración asignada a este proceso es 1 s, y suele constar de 15 a 25 incrementos de duración variable.
2. En un segundo paso se aumenta gradualmente la carga hasta el máximo prefijado, en 19 incrementos de 1 s, lo que supone un tiempo total de 19 s para esta etapa y de 20 s para la simulación completa\*.

---

\*Conviene notar que estos tiempos carecen de significado real en tanto que ninguna de las propiedades mecánicas asignadas se consideró dependiente del tiempo. Por supuesto, tampoco están relacionados con el tiempo total de cálculo, que fue por término medio de unas 3-4 horas por cada simulación.

Según lo expuesto, las simulaciones corresponden a ensayos a velocidad de carga constante. Sin embargo, los resultados son también aplicables a ensayos realizados a velocidad de travesía constante (sección 4.2), ya que no se ha considerado en las simulaciones ninguna dependencia de las propiedades mecánicas con el tiempo (i.e viscoelasticidad). En ningún caso ha sido preciso simular la descarga, ya que el daño se inicia siempre en carga.

Aunque el estudio experimental se ha limitado a materiales multicapa con capas externas frágiles sobre sustratos deformables, la simulación numérica se ha aplicado también al estudio de sistemas multicapa con capas dúctiles (p. ej. acero, aluminio, aleaciones de Co, Pd y Au, etc.). El número total de simulaciones realizadas en el transcurso de este trabajo se aproxima al millar.

#### 4.3.1. Simulación de materiales monolíticos. Ajuste de las curvas de indentación

La simulación de ensayos Hertz en materiales monolíticos se ha realizado para reproducir las curvas tensión-deformación de indentación. De esta forma, se obtiene una confirmación de los valores de módulo elástico, coeficiente de Poisson y tensión de límite elástico utilizados en la simulación. Además, estas simulaciones permiten determinar el valor del parámetro,  $\alpha$ , de cada material, mediante un procedimiento de ajuste por el método de prueba y error. Para ello, se introduce en el fichero de entrada de ABAQUS<sup>®</sup> el módulo elástico y la tensión de límite elástico obtenidos experimentalmente, así como un cierto valor inicial de  $\alpha$  comprendido entre 0 y 1. Seguidamente, se determina el área de contacto en función de la carga aplicada con la ayuda de ABAQUS<sup>®</sup>/CAE. A partir de estos datos, se obtiene  $p_0$  y  $a/R$  ( $R = 3.18$ ), y se construye la curva tensión-deformación de indentación. Si dicha curva no se ajusta a la obtenida experimentalmente, se repite el procedimiento utilizando otro valor de  $\alpha$ , mayor o menor que el inicial dependiendo del resultado de la comparación con la curva experimental, y así sucesivamente. Cuando no es posible realizar el ajuste modificando exclusivamente el valor de  $\alpha$ , se procede a reducir progresivamente el valor de  $Y$ , ya que, como se ha mencionado en la sección 4.2.1, su valor inicial es en realidad un límite superior para la tensión de límite

elástico.

El proceso de ajuste de las curvas de indentación para la determinación de  $\alpha$  es un proceso tedioso, que requiere muchas horas de cálculo. Sin embargo, es indispensable para garantizar la fiabilidad de los resultados correspondientes a las simulaciones de sistemas multicapa.

### 4.3.2. Simulación de materiales multicapa. Predicción de cargas críticas

Para simular los sistemas multicapa se utilizaron los valores de las propiedades mecánicas de sus correspondientes muestras monolíticas. Las simulaciones de sistemas tricapa permiten obtener el campo de tensiones generado durante el contacto hertziano en estas estructuras. Conocido el campo de tensiones es posible interpretar, de forma cualitativa y también cuantitativa, las observaciones experimentales, e incluso efectuar predicciones de cargas críticas para el inicio de cada modo de daño.

El procedimiento para determinar las cargas críticas es simple. Se comienza representando la tensión responsable del daño en función de la carga de contacto, a partir de los datos almacenados en el fichero de salida de ABAQUS<sup>®</sup>. A continuación, se ajusta dicha curva a un polinomio de 1º o 2º orden utilizando el método de mínimos cuadrados. Por último, se sustituye en la expresión resultante el valor de la tensión crítica (resistencia a fractura o tensión de límite elástico) del material para obtener el valor de la carga crítica. Este procedimiento equivale a suponer que el daño se produce cuando la tensión responsable iguala un cierto valor crítico. Las limitaciones de este método están ligadas a la validez de este criterio de tensión crítica; por ejemplo, en fractura sólo es aplicable cuando el campo de tensiones es uniforme en la región correspondiente al defecto precursor<sup>[27]</sup>.

En los siguientes capítulos se exponen y discuten los resultados obtenidos a partir de estos procedimientos experimentales y de simulación numérica. Los resultados se han agrupado por sistemas, es decir, se dedica un capítulo a sistemas

bicapa y otro a sistemas tricapa. Los resultados correspondientes a la caracterización de los materiales monolíticos utilizados en la fabricación de estas estructuras multicapa se recogen en el apéndice A.



## Capítulo 5

# Resultados y Discusión: I. Bicapas

En este capítulo se presentan y discuten exclusivamente los resultados relativos a sistemas recubrimiento/sustrato. En primer lugar, se describen los diferentes modos de daño que se generan en estos sistemas bicapa bajo la acción de tensiones de contacto, justificándolos en base al campo de tensiones obtenido mediante simulación numérica (FEM). En la sección 5.2 se analizan detalladamente las dependencias funcionales de las tensiones principales con parámetros clave como el espesor del recubrimiento y las propiedades mecánicas de los materiales constituyentes. A partir de estas relaciones se establecen las bases para la predicción de cargas críticas. La sección 5.3 se dedica a la explicación de ciertas discrepancias entre las cargas críticas predichas y obtenidas experimentalmente. Para ello se establece un modelo teórico, basado en la distribución estadística de defectos y la inhomogeneidad del campo de tensiones, cuya aplicación permite reproducir fielmente los resultados experimentales. En la sección 5.4 se estudia la fatiga, tanto dinámica como cíclica, de sistemas bicapas. Finalmente, la sección 5.5 se dedica a la elaboración de diagramas de diseño que permitan la selección de la estructura bicapa óptima para cada aplicación.

## 5.1. Modos de daño en estructuras bicapa

En esta sección se revisan los modos de daño que se generan en sistemas recubrimiento/sustrato sometidos a tensiones de contacto. El análisis y justificación de estos modos de daño se realiza en base al campo de tensiones calculado mediante FEM, haciendo uso del modelo descrito en la sección 4.3.

Como se verá en la sección 5.2, la respuesta mecánica de sistemas bicapa bajo tensiones de contacto depende del espesor del recubrimiento,  $d$ , y de las propiedades elástico-plásticas de los materiales constituyentes. Dependiendo de los valores de estos parámetros se pueden generar hasta seis modos de daño diferentes (Figura 5.1):

- Modos frágiles:

1. Fisuras *cónicas* (C) similares a las que se generan en materiales monolíticos.
2. Fisuras *radiales* (R) que se inician en la superficie inferior del recubrimiento.
3. Fisuras *circulares o anillo* (A) que se inician en la superficie superior del recubrimiento, al igual que las fisuras cónicas, pero en zonas alejadas del contacto.

- Modos dúctiles:

Deformación plástica o cuasi-plástica (Y) que se produce en:

4. el recubrimiento, bajo la superficie de contacto, como sucede en materiales monolíticos,
5. el recubrimiento, cerca de la interfase, y
6. el sustrato en regiones próximas a la interfase.

En esta revisión de modos de daño se ha supuesto que el radio del contacto es menor que el espesor del recubrimiento y que la unión entre las capas es perfecta. En caso contrario los modos de daño pueden variar considerablemente. En particular, cuando el radio de contacto es sensiblemente superior al espesor del recubrimiento (p. ej. en películas delgadas), se generan múltiples fisuras transversales

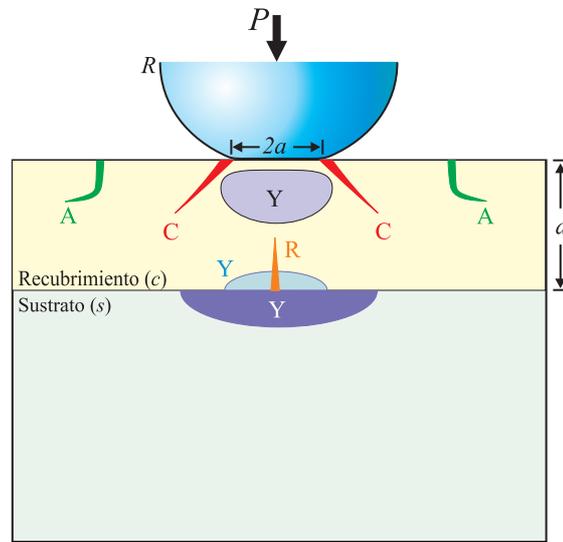


Figura 5.1: Modos de daño en sistemas bicapa bajo contacto hertziano: fisuras cónicas ( $C$ ), radiales ( $R$ ) y circulares ( $A$ ); y regiones de deformación plástica localizada ( $Y$ ).

concéntricas en dicha capa<sup>[97]</sup>. Por otro lado, si la unión recubrimiento/sustrato no es perfecta puede producirse delaminación<sup>[98]</sup>, i.e. separación de ambas capas.

A continuación, se describen detalladamente estos seis modos de daño, justificando su inicio y posterior desarrollo en base al campo de tensiones generado durante el contacto.

### 5.1.1. Modos frágiles

En recubrimientos frágiles las tensiones de tracción que se generan durante el contacto pueden provocar su fractura. El modo de fractura que se inicia depende principalmente del espesor del recubrimiento y de su estado superficial. Es posible que una fractura originada en el recubrimiento penetre posteriormente en un sustrato frágil o, incluso, que se generen fisuras en esta capa<sup>[99]</sup>. Este tipo de fisuras no se consideran en este estudio, debido a que son poco frecuentes.

### Fisuras cónicas

Como sucede en materiales monolíticos, las tensiones de tracción hertzianas que se generan cerca del círculo de contacto pueden provocar la aparición de fisuras cónicas en el recubrimiento. La morfología de estas fisuras (Figura 5.2) es similar

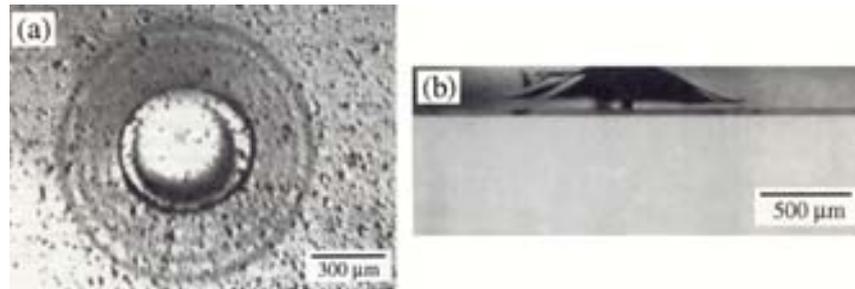


Figura 5.2: Morfología de las fisuras cónicas generadas en sistemas bicapa vidrio/policarbonato con la superficie superior del vidrio erosionada: a) micrografía in situ, vista inferior, y b) micrografía de sección. (Según Chai et al.<sup>[5]</sup>).

a la observada en materiales monolíticos (sección 1.4.1), si bien su profundidad de penetración puede ser diferente.

La Figura 5.3 muestra los contornos de la tensión radial,  $\sigma_1$ , obtenidos mediante

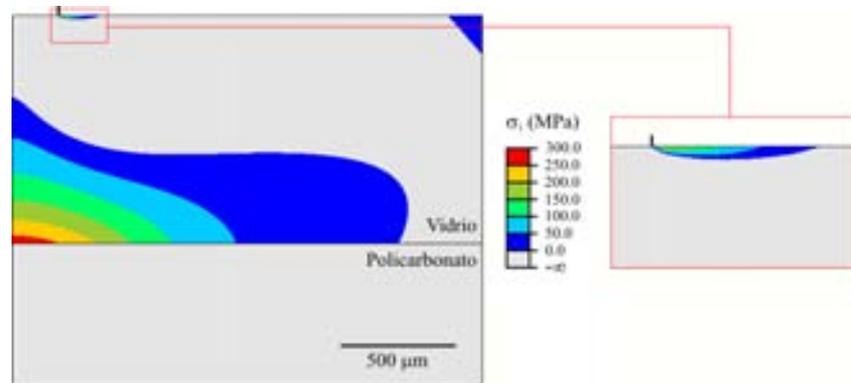


Figura 5.3: Contornos FEM de la tensión  $\sigma_1$  en un sistema bicapa vidrio/policarbonato con  $d = 1 \text{ mm}$  para  $P = 250 \text{ N}$ . Notar la región de tensiones de tracción próxima al contacto (cuyo límite se ha marcado con una línea vertical).

FEM para  $P = 250$  N en un sistema bicapa vidrio/policarbonato con  $d = 1$  mm. Como puede apreciarse, aparecen fuertes tensiones de tracción en la superficie superior, justo en el exterior de la zona de contacto. Estas tensiones son las responsables de la aparición de fisuras cónicas, que son el primer modo de fractura en sistemas bicapa con sustratos rígidos o con recubrimientos gruesos.

### Fisuras radiales

En sistemas bicapa constituidos por recubrimientos frágiles sobre sustratos *blandos* o *deformables*<sup>\*</sup>, se ha observado un tipo de fisura que no se origina en materiales monolíticos bajo contacto hertziano<sup>\*\*</sup>: las fisuras radiales<sup>[5,98-101]</sup> (Figura 5.4). Se trata de fisuras que nacen en la superficie inferior del recubrimiento y se propagan verticalmente y en dirección radial (de ahí su nombre) en planos que contienen al eje de carga. Al aumentar la carga aplicada, aparecen nuevas fisuras bisectando los ángulos formados por las ya existentes (Figuras 5.4a y 5.4b). Salvo casos extremos, las fisuras radiales no alcanzan la superficie superior del recubrimiento (Figura 5.4c).

Estas fisuras se originan debido a las tensiones de flexión que se generan en el recubrimiento como consecuencia de la deformación del sustrato (sección 2.3). En particular, la tensión responsable del inicio y posterior propagación de las fisuras radiales es la tensión principal  $\sigma_2$  (*hoop stress*), que tiene dirección  $\theta$  (Figura 1.9) y es por tanto normal a la superficie de la fisura. En la figura 5.5 se muestran los contornos FEM correspondientes a esta tensión para un sistema vidrio/policarbonato con  $d = 1$  mm y a una carga  $P = 250$  N. Como se discutirá posteriormente, el tamaño de la región de tensiones de tracción se escala con el espesor del recubrimiento (sección 5.3). El valor máximo de  $\sigma_2$  se alcanza en la superficie inferior del recubrimiento, en su intersección con el eje de carga. Por ello, las fisuras radiales se inician bajo el contacto (Figura 5.4a). Estas tensiones de flexión aumentan conforme disminuye el espesor del recubrimiento, dando lugar a una disminución en la carga crítica de inicio de fisuras radiales<sup>[5]</sup>. Conviene resaltar que estas tensiones también se incrementan considerablemente cuando se produce deformación plástica en el sustrato.

---

<sup>\*</sup>En lo sucesivo, se utiliza el término *deformable* en oposición a *rígido* y por material *blando* se entiende aquél que deforma plásticamente a tensiones relativamente bajas.

<sup>\*\*</sup>En cerámicos monolíticos cuasi-dúctiles se generan, en realidad, fisuras morfológicamente similares, aunque tienen su origen en la coalescencia de microfisuras (ver sección 1.4.2).

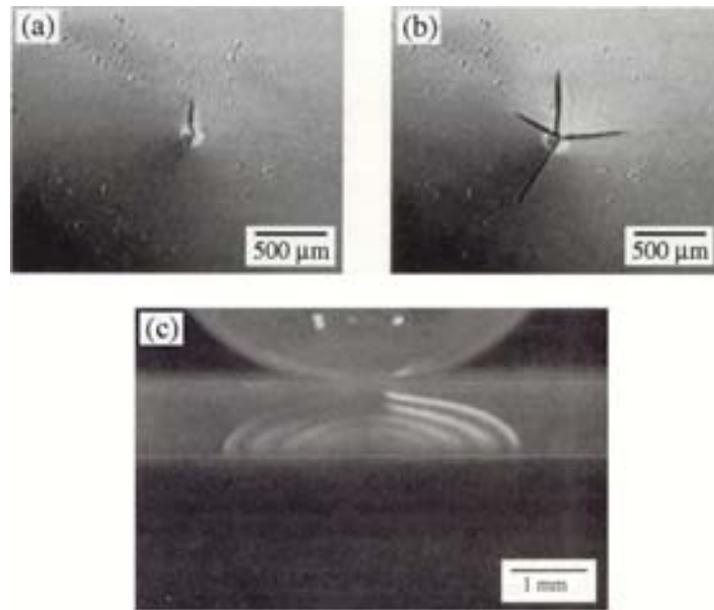


Figura 5.4: Morfología de las fisuras radiales generadas en un sistema bicapa vidrio/policarbonato con la superficie inferior del vidrio erosionada: a) y b) micrografías in situ mostrando su evolución (vista inferior), c) micrografía tomada in situ enfocando la muestra desde un lateral. (Según Chai et al.<sup>[5]</sup>).

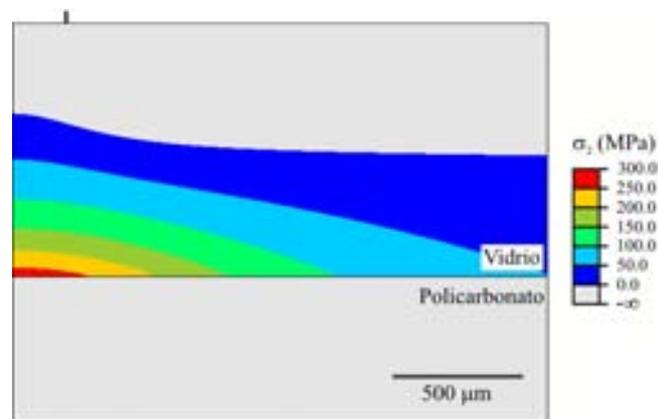


Figura 5.5: Contornos FEM de la tensión  $\sigma_2$  en un sistema bicapa vidrio/policarbonato con  $d = 1$  mm para  $P = 250$  N. El límite del contacto se ha marcado con una línea vertical.

Las fisuras radiales son especialmente peligrosas para la integridad del sistema bicapa, debido a su tendencia a crecer y multiplicarse bajo contactos sucesivos. Así, por ejemplo, se ha demostrado que las fisuras radiales son la primera causa de fallo en coronas dentales cerámicas<sup>[102]</sup>. Además, otro inconveniente de estas fisuras es la dificultad que presenta su detección en materiales opacos, dado su carácter subsuperficial. Por todo ello, en este trabajo se ha prestado una atención especial al estudio de este modo de daño.

### Fisuras circulares

La flexión que experimentan los recubrimientos dispuestos sobre sustratos deformables, además de ser responsable de la generación de fisuras radiales, modifica la distribución de tensiones en la superficie superior. En efecto, la flexión introduce tensiones de compresión en esta superficie que reducen las tensiones radiales ( $\sigma_1$ ) cerca del contacto, llegando incluso a inhibir el inicio de fisuras cónicas. Simultáneamente, aparecen tensiones de tracción en regiones alejadas del contacto que pueden llegar a provocar la fractura de la capa, generando un nuevo modo de daño: las fisuras circulares.

La morfología y desarrollo de las fisuras circulares es similar a la de las fisuras cónicas (ver sección 1.4.1). Sin embargo, a diferencia de éstas, se inician lejos del contacto, a una distancia proporcional al espesor del recubrimiento<sup>[5]</sup>, y su trayectoria es casi perpendicular a la superficie externa (Figura 5.6). Un incremento en la

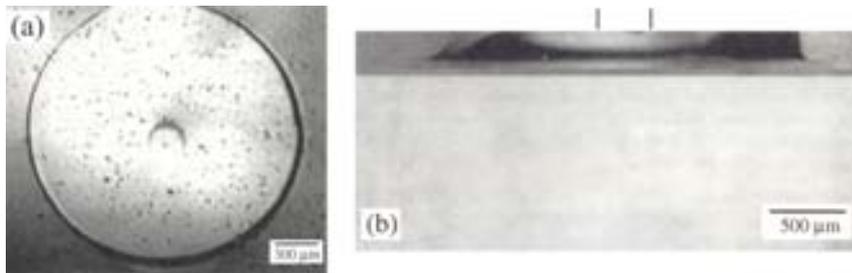


Figura 5.6: Morfología de las fisuras circulares en sistemas bicapa vidrio/polycarbonato con la superficie superior del vidrio erosionada: a) vista inferior, micrografía in situ, y b) micrografía de sección obtenida mediante corte y pulido (se han marcado los límites del contacto). (Según Chai et al.<sup>[5]</sup>).

carga provoca la aparición de nuevas fisuras que rara vez atraviesan completamente la capa, puesto que se deflectan antes de alcanzar la superficie inferior.

La tensión responsable del inicio de las fisuras circulares es, al igual que para las cónicas, la tensión radial  $\sigma_1$ . En la Figura 5.7 se muestra un diagrama de

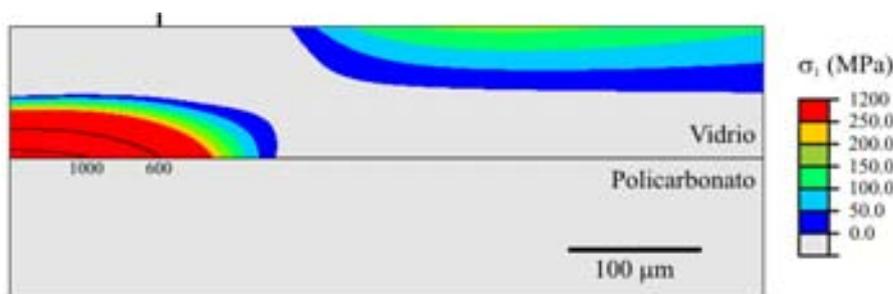


Figura 5.7: Contornos FEM de la tensión  $\sigma_1$  en un sistema bicapa vidrio/policarbonato con  $d = 100 \mu\text{m}$  para  $P = 25 \text{ N}$ . El límite del contacto se ha marcado con una línea vertical.

contorno FEM correspondiente a esta tensión, para  $P = 25 \text{ N}$ , en un sistema vidrio/policarbonato con  $d = 100 \mu\text{m}$ . En este recubrimiento delgado (cf. Figura 5.3) no se aprecian tensiones de tracción en la superficie superior del recubrimiento próximas al contacto, por lo que no pueden generarse fisuras cónicas. En cambio, se observa una región de tensiones de tracción alejada del contacto que ya era apreciable, aunque menos intensa, en la Figura 5.3. La tensión máxima en la superficie superior se alcanza a una distancia del eje que es aproximadamente cuatro veces el espesor de la capa de vidrio (i.e.  $\sim 4d$ ), y que se corresponde con la localización de las fisuras circulares<sup>[5]</sup>. El hecho de que las tensiones de tracción en la superficie superior se desplacen a regiones alejadas del contacto indica que las tensiones de flexión dominan sobre las hertzianas (Capítulo 1). Así pues, a pesar de su similar morfología, el origen de las fisuras circulares es distinto al de las fisuras cónicas. De hecho, las fisuras circulares se originan debido a la flexión del recubrimiento sobre el sustrato, al igual que las fisuras radiales.

Conviene notar que las tensiones debidas a la flexión son mucho más elevadas en la superficie inferior que en la superficie superior del recubrimiento (Figura 5.7). En consecuencia, las fisuras circulares constituyen un modo de daño secundario, es

decir, se inician generalmente después de las fisuras radiales, como puede apreciarse en la secuencia de la Figura 5.8. En la muestra correspondiente a la Figura 5.6 se

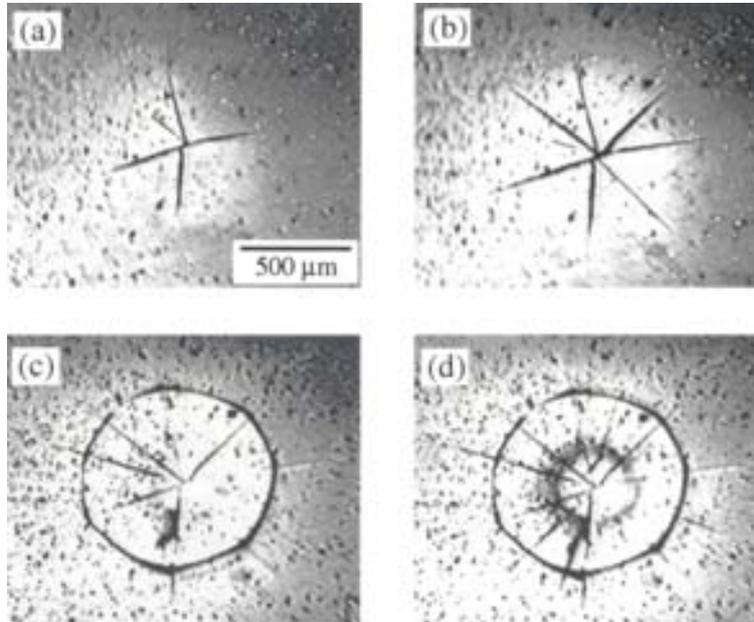


Figura 5.8: Secuencia in situ mostrando la evolución del daño en muestras bicapa vidrio/policarbonato ( $d = 140 \mu\text{m}$ ) con ambas superficies erosionadas: a) inicio de fisuras radiales ( $P = 11.3 \text{ N}$ ), b) multiplicación y crecimiento de fisuras radiales ( $P = 16.0 \text{ N}$ ), c) formación de fisura circular ( $P = 23.8 \text{ N}$ ) y d) posterior multiplicación de fisuras radiales ( $P = 27.0 \text{ N}$ ). (Según Chai et al.<sup>[5]</sup>).

erosionó solamente la superficie superior del vidrio, para evitar el inicio de fisuras radiales antes de que se generen las circulares. Así pues, la erosión selectiva de las superficies permite estudiar de forma independiente los diferentes modos de fractura.

### 5.1.2. Modos dúctiles

En recubrimientos dúctiles, los modos de fractura se inhiben en favor de modos

de deformación plástica o cuasi-plástica en esta capa. Por otro lado, en ocasiones, la capa externa (ya sea frágil o dúctil) no protege suficientemente al sustrato de las tensiones de contacto y el primer daño se genera en el sustrato. Como ya se ha mencionado, este modo de daño es generalmente dúctil, i.e. deformación plástica o cuasi-plástica.

En algunos sistemas bicapa se genera un modo de daño por deformación irreversible en regiones próximas al contacto, similar al observado en materiales monolíticos. Efectivamente, en la Figura 5.9 se observa este daño cuasi-dúctil en un recubrimiento de  $Al_2O_3-TiO_2$  ( $d = 450 \mu m$ ) depositado mediante proyección de plasma sobre acero\*. Este tipo de daño es más frecuente en recubrimientos gruesos.

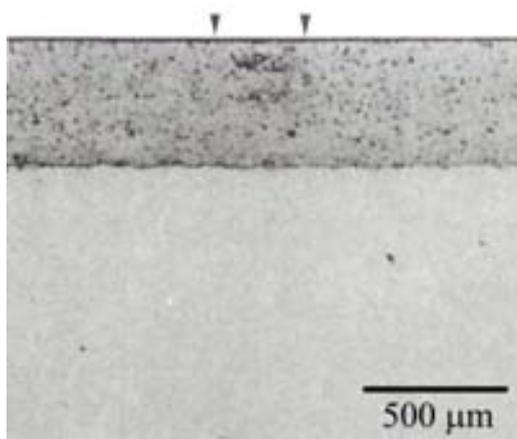


Figura 5.9: Daño cuasi-dúctil en regiones próximas al contacto en un recubrimiento de  $Al_2O_3-TiO_2$  ( $d = 450 \mu m$ ) depositado mediante proyección de plasma sobre acero. La carga aplicada en el ensayo es de  $P = 150 N$ . Las flechas indican el límite del contacto. (Según Pajares et al.<sup>[98]</sup>).

En la Figura 5.10 se muestran los contornos de la tensión de von Mises\*\*,  $\sigma_{13}$ , correspondientes al sistema de la Figura 5.9. Como puede apreciarse, existe una región con elevadas tensiones de cizalladura en el recubrimiento, situada bajo el contacto, similar a la que se genera en muestras monolíticas (Figura 1.5). Estas tensiones son responsables del inicio del daño observado en la Figura 5.9.

\* Las propiedades de estos materiales se encuentran recogidas en la Tabla A.1.

\*\*  $\sigma_{13} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]}$ .

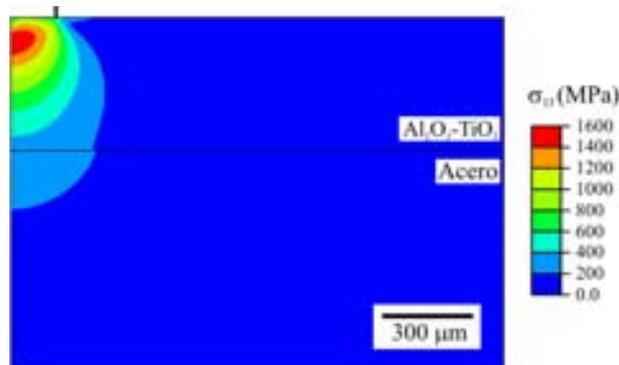


Figura 5.10: Contornos FEM de la tensión de von Mises,  $\sigma_{13}$ , en un sistema bicapa  $Al_2O_3-TiO_2$ /acero con  $d = 450 \mu m$  para  $P = 150 N$ . El límite del contacto se ha marcado con una línea vertical.

En sistemas bicapa con recubrimientos delgados el daño por deformación plástica puede iniciarse en el sustrato<sup>[98,101,103-106]</sup>, como se muestra en la Figura 5.11 correspondiente a un recubrimiento de  $Al_2O_3-TiO_2$  ( $d = 125 \mu m$ ) sobre acero. Se aprecia que la deformación plástica del sustrato se localiza cerca de la interfase. Posteriormente, la zona deformada crece adoptando una forma aproximadamente

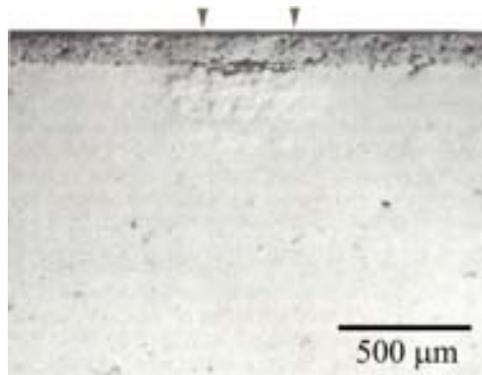


Figura 5.11: Daño por deformación plástica en un sustrato de acero recubierto mediante proyección de plasma con una capa de  $Al_2O_3-TiO_2$  ( $d = 125 \mu m$ ). Las flechas indican el límite del contacto. (Según Pajares et al.<sup>[98]</sup>).

semielíptica. Esta morfología se corresponde con la de las tensiones de von Mises en el sustrato (Figura 5.12).

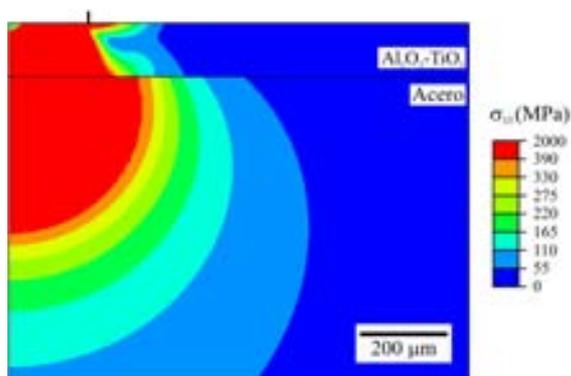


Figura 5.12: Contornos FEM de la tensión de von Mises,  $\sigma_{13}$ , en un sistema bicapa  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-TiO}_2/\text{acero}$  con  $d = 125 \mu\text{m}$  para  $P = 150 \text{ N}$ . Se muestran en rojo las regiones que superan el valor de la tensión de límite elástico del acero ( $Y = 390 \text{ MPa}$ ). El límite del contacto se ha marcado con una línea vertical.

El inicio de daño por deformación irreversible en el sustrato favorece la delaminación del sistema, como puede observarse en la Figura 5.11. Además, induce o incrementa las tensiones de flexión en el recubrimiento, propiciando el inicio de daño en esta capa. De hecho, en sistemas bicapa con sustratos más rígidos, pero más blandos, que el recubrimiento, la generación de fisuras radiales sólo es posible si existe deformación plástica previa del sustrato<sup>[103,104]</sup> (Figura 5.13).

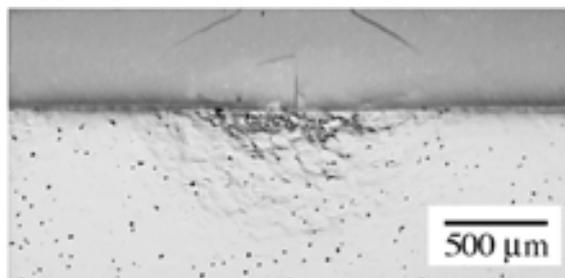


Figura 5.13: Micrografía de sección en un sistema porcelana/paladio(aleación). Se puede apreciar una fisura radial iniciada a consecuencia de la deformación plástica del sustrato. También se aprecia una fisura cónica en la superficie del recubrimiento. (Según Zhao et al.<sup>[103]</sup>).

Por último, las simulaciones mediante elementos finitos predicen la existencia de un tercer modo dúctil (o cuasi-dúctil), que se generaría en sistemas bicapa con recubrimientos dúctiles delgados sobre sustratos deformables\*. En estos sistemas, la flexión del recubrimiento debido a la deformación elástica del sustrato aumenta las tensiones de cizalladura en la superficie inferior del recubrimiento. Estas tensiones de cizalladura originadas por flexión pueden llegar a ser más intensas que las hertzianas, que se localizan en regiones próximas al contacto (Figura 5.14). En consecuencia, el daño se iniciaría en la superficie inferior del recubrimiento y crecería vertical y radialmente adoptando una forma elipsoidal.

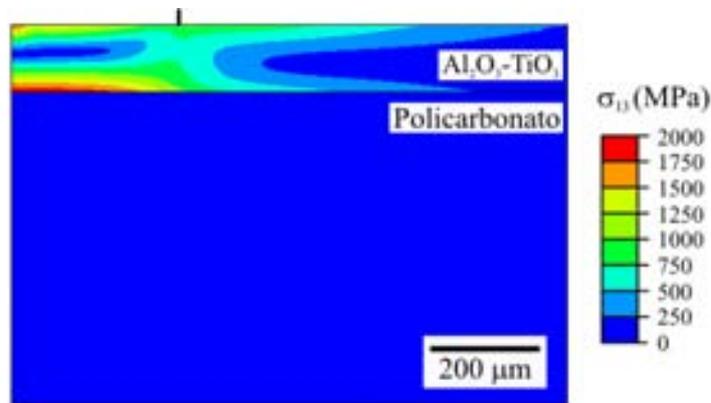


Figura 5.14: Contornos FEM de la tensión de von Mises,  $\sigma_{13}$ , en un sistema bicapa  $Al_2O_3-TiO_2$ /polycarbonato con  $d = 125 \mu m$  para  $P = 150 N$ . Se ha marcado con una línea vertical el límite del contacto.

## 5.2. Análisis de tensiones y predicción de cargas críticas en sistemas bicapa

Algunos de los modos de daño por contacto en sistemas bicapa se inician cerca de la superficie superior del recubrimiento: fisuras cónicas y deformación plástica

\*Este modo de daño no ha sido observado en el laboratorio debido a que los sistemas en los que se generaría no han sido objeto de estudio hasta la fecha.

(al igual que en materiales monolíticos) y fisuras circulares. Los dos primeros dominan únicamente en recubrimientos gruesos y, además, pueden ser evitados si los impresores son suficientemente blandos o romos (i.e. con  $R$  elevado). A su vez, las fisuras circulares son precedidas habitualmente por fisuras radiales (sección 5.1.1). En consecuencia, los tres modos de daño *superficiales* pueden ser considerados como secundarios. Por ello, el resto del capítulo se centra en el análisis del daño en regiones próximas a la interfase recubrimiento/sustrato, especialmente en lo que respecta a las fisuras radiales.

Uno de los objetivos principales de este estudio sobre sistemas bicapa bajo contacto consiste en obtener expresiones semianalíticas para las cargas críticas de inicio de los modos de daño *interfaciales* (Figura 5.15). En particular, se pretende investigar su dependencia con las propiedades mecánicas de los materiales y con el espesor del recubrimiento. Hasta la fecha se han propuesto expresiones sólo

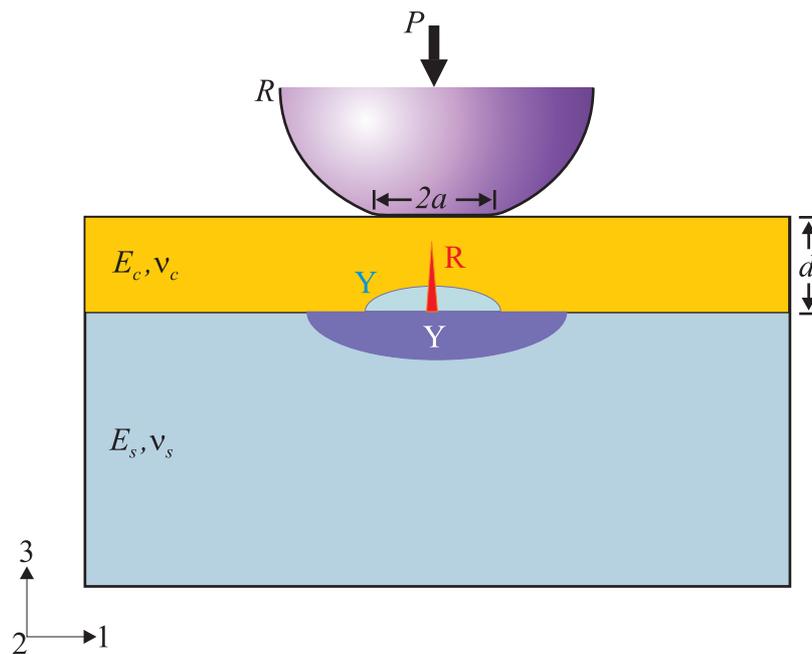


Figura 5.15: Modos de daño interfaciales en sistemas bicapa. Se indican las constantes elásticas del recubrimiento y del sustrato.

para dos de estos modos de daño. Basándose en la teoría de la flexión de láminas, ecuación (2.25), Lawn *et al.* han propuesto una expresión aproximada para la carga crítica de inicio de fisuras radiales en el recubrimiento,  $P_R^c$ , en la forma<sup>[5,107]</sup>

$$P_R^c = \frac{B\sigma_F^c d^2}{\log\left(C\frac{E_c}{E_s}\right)} \quad (5.1)$$

donde  $\sigma_F^c$  es la resistencia a la fractura del recubrimiento, siendo  $B$  y  $C$  parámetros adimensionales, que dependen de los coeficientes de Poisson de ambas capas. Así mismo, Zhao *et al.* han propuesto una expresión empírica para las cargas críticas de inicio de plasticidad\* en el sustrato,  $P_Y^s$ , en la forma<sup>[103]</sup>

$$P_Y^s = Y_s d^2 \left( a + b \frac{E_c}{E_s} \right) \quad (5.2)$$

con  $a$  y  $b$  constantes adimensionales e  $Y_s$  la tensión de límite elástico del sustrato ( $\simeq H_s/3$ , siendo  $H_s$  su dureza).

Las relaciones (5.1) y (5.2) sugieren una dependencia cuadrática de las cargas críticas con el espesor del recubrimiento,  $d$ , y una dependencia más débil con las propiedades elásticas de los materiales constituyentes. Así mismo, predicen una dependencia lineal con la resistencia a la fractura, o con la tensión de límite elástico, del material correspondiente. Sin embargo, estas expresiones están basadas principalmente en observaciones empíricas y no han sido completamente validadas.

En la siguiente subsección se presentan los resultados de un análisis exhaustivo, realizado mediante FEM, de las tensiones generadas en sistemas bicapa bajo contacto. Este estudio permite deducir expresiones semianalíticas para las cargas críticas correspondientes a los tres modos de daño interfaciales (Figura 5.15). A su vez, estas expresiones posibilitan la elaboración de diagramas de diseño que resultan de gran utilidad para la selección inteligente de sistemas bicapa adecuados para las diferentes aplicaciones (sección 5.5).

---

\* En adelante, por simplicidad, no se distinguirá entre plasticidad y cuasi-plasticidad.

### 5.2.1. Análisis de tensiones en sistemas bicapa

Utilizando el modelo descrito en la sección 4.3 se han simulado ensayos Hertz sobre muestras bicapa compuestas por un recubrimiento de espesor  $d$ , con módulo elástico  $E_c$  y coeficiente de Poisson  $\nu_c$ , perfectamente unido a un sustrato de 12.5 mm de espesor y constantes elásticas  $E_s$  y  $\nu_s$  (Figura 5.15). En todos los casos, se ha supuesto un comportamiento elástico para el sistema y se han utilizado como coeficientes de Poisson  $\nu_c = 0.22$  y  $\nu_s = 0.30$ .

En particular, se evaluaron las tensiones principales en el eje de carga,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ ,\* así como de la tensión de von Mises,  $\sigma_{13}$ . Teniendo en cuenta la simetría del problema, en el eje de carga se verifica que  $\sigma_1 = \sigma_2$  y, por tanto,

$$\sigma_{13} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = (\sigma_1 - \sigma_3) = 2\tau_{13} \quad (5.3)$$

En la Figura 5.16 se muestran dos ejemplos de la distribución de tensiones en dicho eje, correspondientes a un recubrimiento de espesor  $d = 2$  mm y módulo elástico  $E_c = 70$  GPa (p. ej. vidrio o porcelana), sobre sustratos de módulo elástico  $E_s = 7$  GPa (Figura 5.16a) y  $E_s = 700$  GPa (Figura 5.16b). Estos resultados corresponden a un radio de impresor  $R = 3.18$  mm y a una carga  $P = 25$  N. En la figura se aprecia claramente la no linealidad de la distribución de tensiones, reflejando que se trata de un estado tensional más complejo que el correspondiente a una flexión pura. Además, se observan discontinuidades en la interfase para las tensiones  $\sigma_1$  y  $\sigma_{13}$ , debido a la diferencia entre las propiedades elásticas del recubrimiento y del sustrato. Obviamente, la tensión  $\sigma_3$  es continua en la interfase debido a la condición de compatibilidad. Se aprecia también que las tensiones más elevadas en la interfase se localizan en la capa más rígida.

Seguidamente se analizan las tensiones en las proximidades de la interfase, que son las responsables de los modos de daño interfaciales. En particular se investiga su dependencia con el espesor del recubrimiento y con la carga aplicada. En la Figura 5.17 se muestran los valores de las tensiones en la superficie inferior del recubrimiento  $\sigma_1^c$ ,  $\sigma_3^c$  y  $\sigma_{13}^c$ , así como en la superficie superior del sustrato  $\sigma_1^s$ ,  $\sigma_3^s = \sigma_3^c$  y  $\sigma_{13}^s$ , en función de  $d^{-2}$ , para  $P = 25$  N,  $R = 3.18$  mm,  $E_c = 70$  GPa y

\*Las direcciones de cada tensión principal se indican en la figura 5.15.

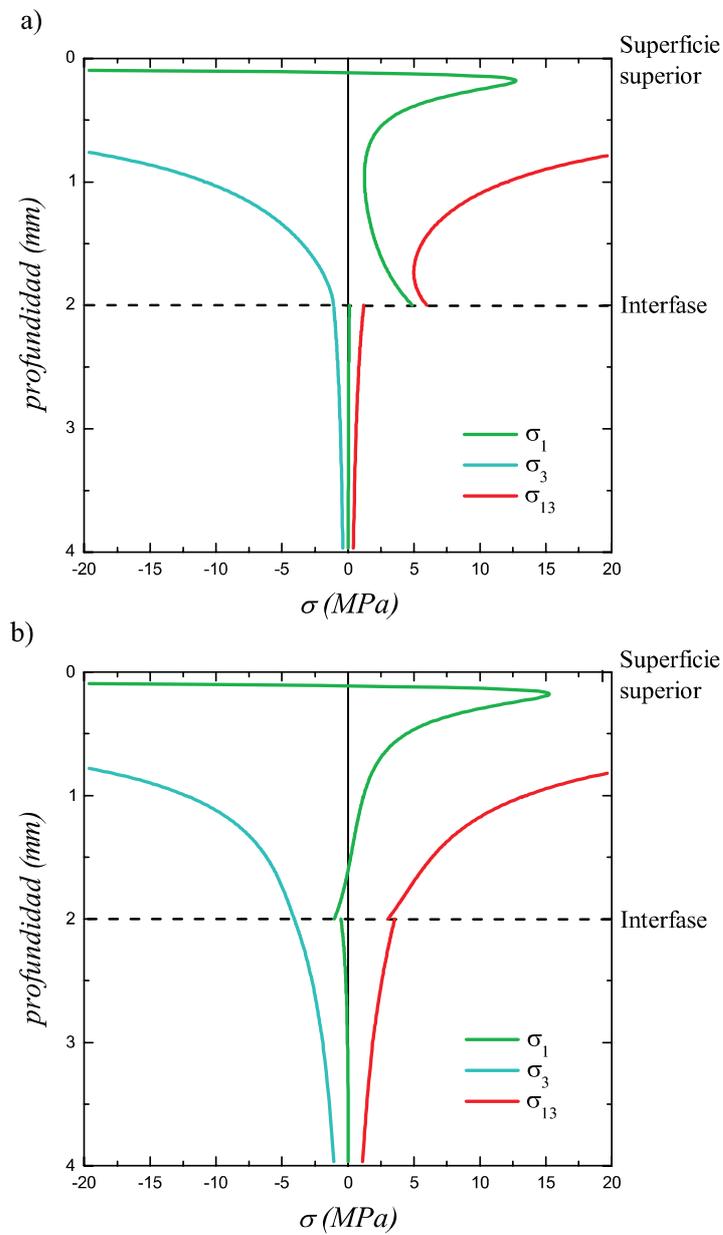


Figura 5.16: Distribución de tensiones en el eje de carga en sistemas bicapa bajo contacto, calculada mediante FEM para  $R = 3.18$  mm,  $P = 25$  N,  $d = 2$  mm,  $E_c = 70$  GPa, con: (a)  $E_s = 7$  GPa, (b)  $E_s = 700$  GPa ( $\nu_c = 0.22$ ,  $\nu_s = 0.30$ ).

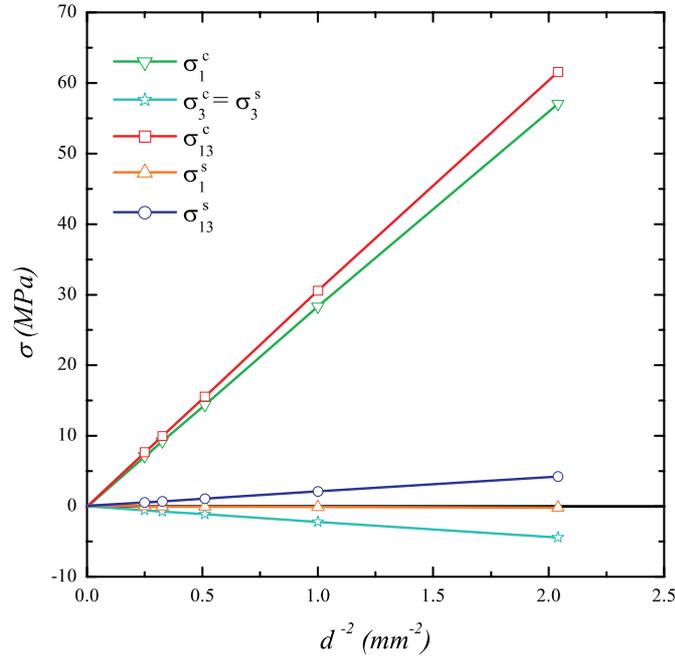


Figura 5.17: Tensiones interfaciales  $\sigma_1^c$ ,  $\sigma_1^s$ ,  $\sigma_3^c = \sigma_3^s$ ,  $\sigma_{13}^c$  y  $\sigma_{13}^s$  en función de  $d^{-2}$ , para  $P = 25 \text{ N}$ ,  $R = 3.18 \text{ mm}$ ,  $E_c = 70 \text{ GPa}$  y  $E_s = 2.23 \text{ GPa}$ . ( $\nu_c = 0.22$ ,  $\nu_s = 0.30$ ). Datos FEM (puntos) y rectas de ajuste (líneas continuas).

$E_s = 2.23 \text{ GPa}$  (vidrio/policarbonato). Los símbolos representan datos obtenidos mediante simulación FEM y las rectas son ajustes lineales a los datos. De acuerdo con estos resultados las tensiones interfaciales exhiben una dependencia cuadrática inversa con el espesor del recubrimiento. Para sistemas con recubrimientos más rígidos que el sustrato las tensiones en el recubrimiento dominan sobre las del sustrato (Figura 5.17), ilustrando su capacidad para proteger al sustrato frente a tensiones de contacto.

En la Figura 5.18 se representa la tensión  $\sigma_1^c$  frente a  $P/d^2$ , para el sistema de la Figura 5.17. Estos resultados se han obtenido mediante FEM, variando  $P$  para determinados valores de  $R/d$ . Aunque se aprecian ciertas desviaciones respecto a la linealidad para cargas elevadas, especialmente para valores de la razón  $R/d$  elevados, se puede concluir que la tensión  $\sigma_1^c$  es proporcional a  $P/d^2$ . Resultados

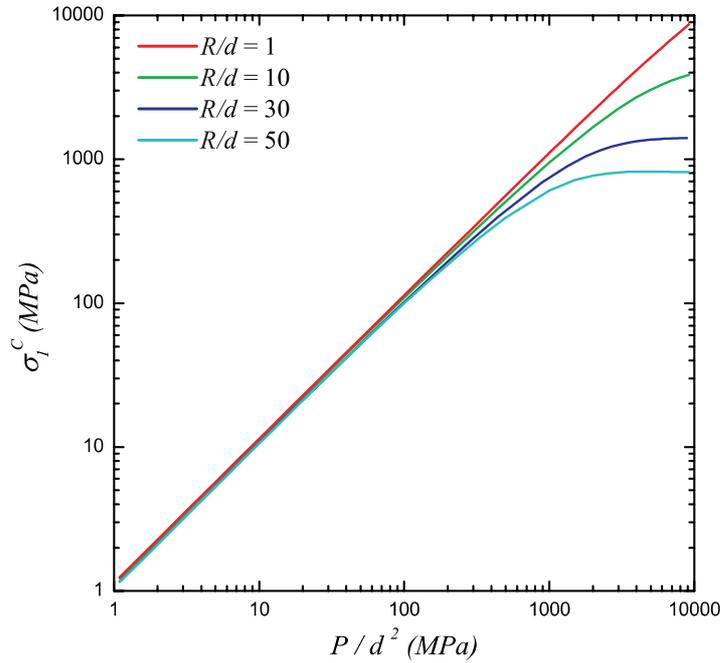


Figura 5.18: Tensión  $\sigma_1^c$  frente a  $P/d^2$  en un sistema vidrio/policarbonato ( $E_c = 70$  GPa,  $E_s = 2.23$  GPa). Curvas calculadas mediante FEM variando  $P$  para valores fijos de  $R/d$ .

análogos se obtienen para las restantes tensiones interfaciales. Por tanto, para contactos reducidos ( $R/d$  pequeños) o cargas suficientemente bajas, es posible expresar estas tensiones en la forma general

$$\sigma = \frac{P}{d^2} \bar{\sigma}(E_c/E_s) \quad (5.4)$$

donde  $\bar{\sigma}(E_c/E_s)$  es una función adimensional que depende de la razón entre los módulos elásticos de las dos capas\*, y que se puede considerarse como una tensión normalizada ( $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{P/d^2}$ ). A continuación se calculan las tensiones normalizadas  $\bar{\sigma}$  correspondientes a las diferentes componentes del campo de tensiones.

---

\*Se ha verificado mediante simulación que no existen dependencias significativas de las tensiones interfaciales con los valores absolutos de  $E_c$  y  $E_s$ , sino exclusivamente con la razón  $E_c/E_s$ .

En la Figura 5.19 se muestran las tensiones normalizadas correspondientes a la superficie inferior del recubrimiento,  $\bar{\sigma}_1^c$ ,  $\bar{\sigma}_3^c$  y  $\bar{\sigma}_{13}^c$ , en función de la razón de módulos elásticos  $E_c/E_s$ , para un valor fijo de  $E_c = 70$  GPa. Los símbolos representan los

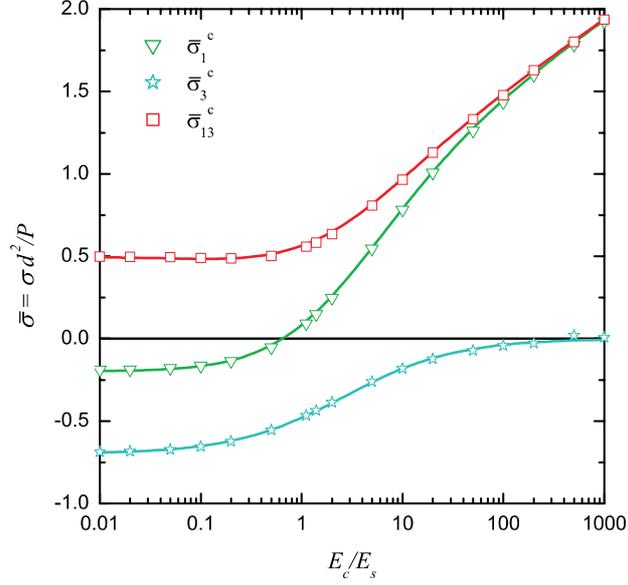


Figura 5.19: Tensiones normalizadas  $\bar{\sigma}_1^c$ ,  $\bar{\sigma}_3^c$  y  $\bar{\sigma}_{13}^c$  frente a la razón de módulos elásticos  $E_c/E_s$  para  $P = 25$  N,  $R = 3.18$  mm y  $E_c = 70$  GPa, con  $E_s$  variable ( $\nu_c = 0.22$ ,  $\nu_s = 0.30$ ). Se muestran los resultados FEM (puntos) y las curvas de mejor ajuste (en trazo continuo).

valores calculados mediante FEM y las líneas en trazo continuo son las curvas de mejor ajuste, obtenidas siguiendo el procedimiento que se detalla seguidamente. Como puede apreciarse la tensión  $\bar{\sigma}_1^c$  experimenta una transición de compresión a tracción para  $E_c/E_s \approx 0.7$  y, además, exhibe un comportamiento asintótico lineal (logarítmico) para valores de  $E_c/E_s$  elevados. Por otro lado, los valores de  $\bar{\sigma}_3^c$  presentan una dependencia sigmoideal para todo el rango de valores de  $E_c/E_s$ .

A partir de estos resultados se propone una expresión general para todas las tensiones interfaciales normalizadas, en la forma

$$\bar{\sigma}(E_c/E_s) = L_\infty + \frac{L_0 - L_\infty}{1 + \gamma \left( \frac{E_c}{E_s} \right)^\varphi} \quad (5.5)$$

donde  $L_0$  y  $L_\infty$  son los límites de  $\bar{\sigma}(E_c/E_s)$  para  $E_c/E_s \rightarrow 0$  y  $E_c/E_s \rightarrow \infty$ , respectivamente; siendo  $\gamma$  y  $\varphi$  parámetros ajustables.

Para la tensión normal  $\bar{\sigma}_3^c$  se verifica que  $L_\infty = 0$ , ya que el límite  $E_c/E_s \rightarrow \infty$  corresponde a una lámina (recubrimiento) libre sometida a flexión. Por otro lado,  $L_0$  es un valor constante, denotado en lo que sigue por  $\kappa$ , que puede ser calculado independientemente simulando (FEM) un recubrimiento sobre un sustrato infinitamente rígido.

Para la tensión  $\bar{\sigma}_1^c$  el límite  $L_\infty$  puede sustituirse por  $\beta \log(\chi E_c/E_s)$ , que corresponde a un recubrimiento en flexión pura sobre un sustrato elástico<sup>[56]</sup> (ecuación (2.25)). Además, es fácil comprobar que para esta tensión  $L_0 = \frac{\nu_c}{1 - \nu_c} \kappa$  \*.

Por tanto, sustituyendo en (5.5) se obtiene finalmente

$$\bar{\sigma}_3^c(E_c/E_s) = \frac{\kappa}{1 + \gamma \left(\frac{E_c}{E_s}\right)^\varphi} \quad (5.6a)$$

$$\bar{\sigma}_1^c(E_c/E_s) = \beta \log\left(\chi \frac{E_c}{E_s}\right) + \frac{\frac{\nu_c}{1 - \nu_c} \kappa - \beta \log\left(\chi \frac{E_c}{E_s}\right)}{1 + \gamma \left(\frac{E_c}{E_s}\right)^\varphi} \quad (5.6b)$$

y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{13}^c(E_c/E_s) &= \bar{\sigma}_1^c(E_c/E_s) - \bar{\sigma}_3^c(E_c/E_s) \\ &= \beta \log\left(\chi \frac{E_c}{E_s}\right) + \frac{\frac{2\nu_c - 1}{1 - \nu_c} \kappa - \beta \log\left(\chi \frac{E_c}{E_s}\right)}{1 + \gamma \left(\frac{E_c}{E_s}\right)^\varphi} \end{aligned} \quad (5.6c)$$

Las curvas de ajuste obtenidas mediante las funciones (5.6) se muestran en la Figura 5.19 en línea continua. Como puede apreciarse, el acuerdo con los resultados

---

\*Efectivamente, para recubrimientos sobre sustratos rígidos ( $E_c/E_s \rightarrow 0$ ) se verifica  $\epsilon_1^s = \epsilon_1^c = 0$ , que haciendo uso de la ley de Hooke conduce a:  $\sigma_1 = \frac{\nu_c}{1 - \nu_c} \sigma_3$ .

FEM es excelente, siendo los errores absolutos del orden de 0.01. Los parámetros de ajuste utilizados se recogen en la Tabla 5.1 y fueron calculados como sigue: (i) se obtuvo el valor de  $\kappa$  a partir de simulaciones FEM correspondientes al caso límite de un recubrimiento sobre sustrato rígido; (ii) utilizando este valor y ajustando la ecuación (5.6a) a los datos FEM (Figura 5.19) se obtuvieron los valores de  $\gamma$  y  $\varphi$ ; finalmente, (iii) sustituyendo estos 3 parámetros en (5.6b) se calcularon  $\beta$  y  $\chi$  ajustando dicha expresión a los datos FEM (Figura 5.19). Como se verá más adelante, los valores de los parámetros de ajuste dependen de los coeficientes de Poisson (sección 5.2.1).

$\kappa$	$\gamma$	$\varphi$	$\beta$	$\chi$	$\eta$
$-0.70 \pm 0.01$	$0.46 \pm 0.01$	$0.79 \pm 0.02$	$0.418 \pm 0.004$	$46 \pm 4$	$0.56 \pm 0.01$

Tabla 5.1: Parámetros de ajuste de las expresiones para las tensiones interfaciales.

Las expresiones semianalíticas para las tensiones en la superficie superior del sustrato pueden obtenerse a partir de  $\bar{\sigma}_1^c$  y  $\bar{\sigma}_3^c$ . En efecto, las condiciones de compatibilidad en la interfase (i.e. continuidad de las tensiones perpendiculares y de las deformaciones tangenciales\* a la interfase) conducen a

$$\bar{\sigma}_3^s(E_c/E_s) = \bar{\sigma}_3^c(E_c/E_s) \quad (5.7a)$$

$$\bar{\sigma}_1^s(E_c/E_s) = \frac{1 - \nu_c}{1 - \nu_s} \left( \frac{E_s}{E_c} \right) \bar{\sigma}_1^c(E_c/E_s) + \frac{\nu_s - \nu_c \left( \frac{E_s}{E_c} \right)}{1 - \nu_s} \bar{\sigma}_3^c(E_c/E_s) \quad (5.7b)$$

y, por tanto,

$$\bar{\sigma}_{13}^s(E_c/E_s) = \frac{1 - \nu_c}{1 - \nu_s} \left( \frac{E_s}{E_c} \right) \bar{\sigma}_1^c(E_c/E_s) + \frac{(2\nu_s - 1) - \nu_c \left( \frac{E_s}{E_c} \right)}{1 - \nu_s} \bar{\sigma}_3^c(E_c/E_s) \quad (5.7c)$$

En la Figura 5.20 se muestran las tensiones normalizadas en la superficie superior del sustrato, en función de  $E_c/E_s$  para las mismas condiciones de la Figura 5.19. Los símbolos son los resultados de las simulaciones FEM, siendo los datos corres-

\*i.e.  $\epsilon_1^s = \epsilon_1^c$ .

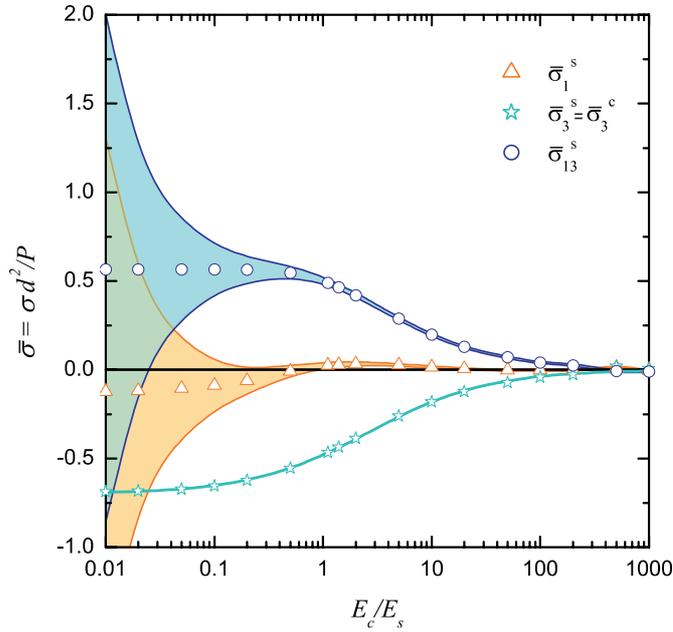


Figura 5.20: Tensiones normalizadas  $\bar{\sigma}_1^s$ ,  $\bar{\sigma}_3^s$  y  $\bar{\sigma}_{13}^s$  frente a la razón de módulos elásticos  $E_c/E_s$  para  $P = 25$  N,  $R = 3.18$  mm y  $E_c = 70$  GPa, con  $E_s$  variable ( $\nu_c = 0.22$ ,  $\nu_s = 0.30$ ). Se muestran los resultados FEM (puntos), la curva de mejor ajuste para la tensión  $\bar{\sigma}_3^s$  (en trazo continuo) y los intervalos de confianza de las expresiones (5.7b) y (5.7c) (regiones sombreadas).

pendiente a  $\bar{\sigma}_3^s$  idénticos a los de la Figura 5.19, de acuerdo con la ecuación (5.7a). Desafortunadamente, las expresiones (5.7b) y (5.7c) son numéricamente inestables para valores pequeños de la razón  $E_c/E_s$ , i.e. pequeñas variaciones (dentro de los errores,  $\approx 0.01$ ) en los valores de entrada de  $\bar{\sigma}_1^s$  y  $\bar{\sigma}_3^s$  conducen a resultados completamente diferentes. Por ello, para las tensiones  $\bar{\sigma}_1^s$  y  $\bar{\sigma}_{13}^s$  se han dibujado zonas sombreadas que representan intervalos de confianza para las expresiones (5.7b) y (5.7c) obtenidos admitiendo un error absoluto de 0.01. Debido a la amplitud de estos intervalos, las expresiones (5.7b) y (5.7c) son prácticamente inaplicables para  $E_c/E_s < 0.5$ . Afortunadamente, la tensión  $\bar{\sigma}_1^s$  no es relevante para el inicio de daño alguno y, en ese rango, los resultados FEM muestran que la tensión  $\bar{\sigma}_{13}^s$  tiene un valor aproximadamente constante, que en lo sucesivo se denota por  $\eta$  (Tabla 5.1). Teniendo en cuenta estas consideraciones y sustituyendo las expresiones (5.6a) y

(5.6b) en (5.7c), se obtiene finalmente la expresión

$$\bar{\sigma}_{13}^s(E_c/E_s) = \begin{cases} \eta, & \frac{E_c}{E_s} \lesssim 0.5 \\ \frac{(2\nu_s - 1)\kappa + (1 - \nu_c)\gamma\beta \left(\frac{E_c}{E_s}\right)^{\varphi-1} \log\left(\chi \frac{E_c}{E_s}\right)}{(1 - \nu_s) \left[1 + \gamma \left(\frac{E_c}{E_s}\right)^\varphi\right]}, & \frac{E_c}{E_s} \gtrsim 0.5 \end{cases} \quad (5.8)$$

De nuevo, el valor del parámetro  $\eta$  depende de los coeficientes de Poisson (sección 5.2.1).

Así pues, centrando el análisis en las tensiones responsables del inicio de modos de daño interfaciales, en la Figura 5.21 se muestran las curvas correspondientes a las tensiones normalizadas  $\bar{\sigma}_1^c$ ,  $\bar{\sigma}_{13}^c$  y  $\bar{\sigma}_{13}^s$ . En primer lugar, conviene notar que la escala en el eje de abscisas es logarítmica, por tanto, la dependencia con los módulos elásticos es suave. Se observa además, que para  $E_c/E_s > 1$  dominan las tensiones de tracción y de cizalladura en el recubrimiento, debido a la flexión de esta capa sobre el sustrato más deformable. En estos casos, se favorece el inicio de daño en el recubrimiento. En cambio, para  $E_c/E_s < 1$  las tensiones de cizalladura en ambas capas dominan sobre las de tracción y, por consiguiente, el daño favorecido es la deformación plástica en una u otra capa. De hecho, el inicio de fisuras radiales se inhibe completamente para  $E_c/E_s < 0.7$ , pues la tensión  $\bar{\sigma}_1^c$  es de compresión. Para un valor dado de  $E_c/E_s$  el modo de daño que se genera en primer lugar depende de los valores relativos de la resistencia a fractura del recubrimiento y de las tensiones de límite elástico de ambas capas (sección 5.5).

El conocimiento de las dependencias funcionales de las tensiones interfaciales permite establecer expresiones semi-analíticas para las cargas críticas de inicio de cada modo de daño (sección 5.2.2). Desafortunadamente, las expresiones (5.6b), (5.6c) y (5.8) son algo engorrosas y difíciles de manejar. Por ello, resulta adecuada la búsqueda de expresiones más simples, aunque no reproduzcan tan fielmente los resultados FEM. Como se muestra en la Figura 5.21, la tensión  $\bar{\sigma}_1^c$  en la región de tracción puede aproximarse de manera razonable por una recta (en trazo

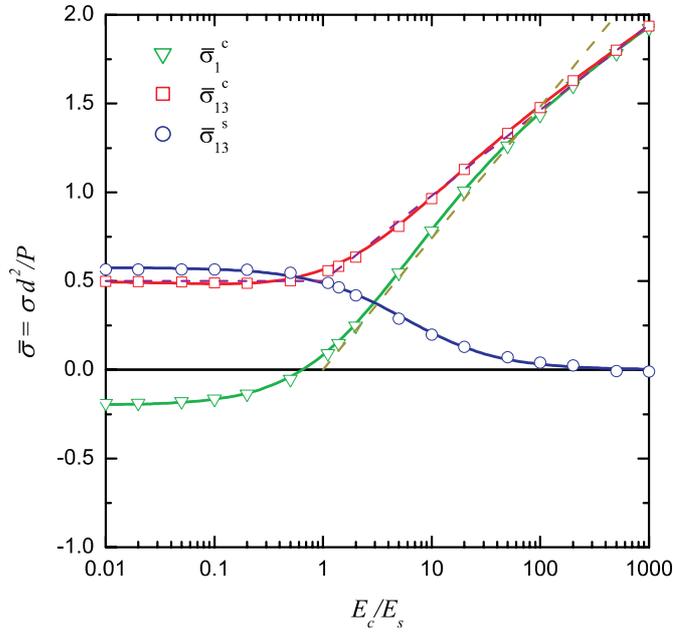


Figura 5.21: Tensiones normalizadas  $\bar{\sigma}_1^c$ ,  $\bar{\sigma}_{13}^c$  y  $\bar{\sigma}_{13}^s$  frente a la razón de módulos elásticos  $E_c/E_s$  para  $P = 25$  N,  $R = 3.18$  mm y  $E_c = 70$  GPa, con  $E_s$  variable ( $\nu_c = 0.22$ ,  $\nu_s = 0.30$ ). Se muestran los resultados FEM (puntos), las curvas de mejor ajuste (en trazo continuo) y las curvas correspondientes a las expresiones simplificadas (5.9a) y (5.9b) (en trazo discontinuo). La curva correspondiente a la expresión (5.9c) es indistinguible de la curva de mejor ajuste para  $\bar{\sigma}_{13}^s$ .

discontinuo) cuya expresión es (cf. (5.1))

$$\bar{\sigma}_1^c = \frac{1}{B} \log \left( C \frac{E_c}{E_s} \right), \quad 1 < \frac{E_c}{E_s} < 100 \quad (5.9a)$$

con  $B = 1.35$  y  $C = 1.00$ . Del mismo modo, los datos correspondientes a la tensión  $\bar{\sigma}_{13}^c$  pueden ajustarse también por líneas rectas (en trazo discontinuo en la Figura 5.21), según la expresión

$$\bar{\sigma}_{13}^c = \begin{cases} \frac{1}{L} \log \left( M \frac{E_c}{E_s} \right), & \frac{E_c}{E_s} > 1 \\ \frac{1}{L} \log(M), & \frac{E_c}{E_s} < 1 \end{cases} \quad (5.9b)$$

con  $L = 2.08$  y  $M = 11.0$ . Finalmente, la expresión

$$\bar{\sigma}_{13}^s = \frac{1}{a + b \frac{E_c}{E_s}} \quad (5.9c)$$

obtenida a partir de la relación empírica propuesta por Hong *et al.*<sup>[103]</sup>, (5.2), conduce a un excelente acuerdo con los resultados obtenidos mediante FEM, utilizando como parámetros  $a = 1.74$  y  $b = 0.31$ . En este caso, la curva correspondiente a la expresión (5.9c) es indistinguible de la curva de mejor ajuste, ecuación (5.8). La simplicidad de las expresiones (5.9) aconseja su utilización en lugar de las relaciones más generales, siempre y cuando los valores de  $E_c/E_s$  se encuentren en su rango de validez. Para facilitar al lector su utilización, en la Tabla 5.2 se resumen los valores de los parámetros adimensionales que intervienen en ellas.

<i>B</i>	<i>C</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
1.35	1.00	2.08	11	1.74	0.31

Tabla 5.2: Parámetros de ajuste de las expresiones simplificadas para las tensiones interfaciales.

### Limitaciones del análisis

En la Figura 5.22 se muestran las tensiones normalizadas responsables del inicio de daño interfacial correspondientes a dos sistemas bicapa con diferentes coeficientes de Poisson: uno con  $\nu_c = 0.22$ ,  $\nu_s = 0.30$  (símbolos huecos, tomados de la Figura 5.21) y otro con  $\nu_c = \nu_s = 0.35$  (símbolos rellenos). Como puede apreciarse, en algunos casos las tensiones normalizadas pueden diferir hasta en un 30%. En la Tabla 5.3 se comparan los valores de los parámetros de ajuste de las expresiones generales (5.6b), (5.6c) y (5.8), correspondientes a estos 2 sistemas. Estos resultados indican que es necesario proceder con cautela al utilizar estos valores específicos de los parámetros de ajuste en sistemas cuyos coeficientes de Poisson difieran sensiblemente de los sistemas mencionados. Sin embargo, conviene resaltar que los valores de los coeficientes de Poisson seleccionados son representativos de un amplio abanico de sistemas, bien cerámico/metal o cerámico/polímero (0.22/0.30), bien metal/polímero o polímero/metal (0.35/0.35). En cualquier caso,

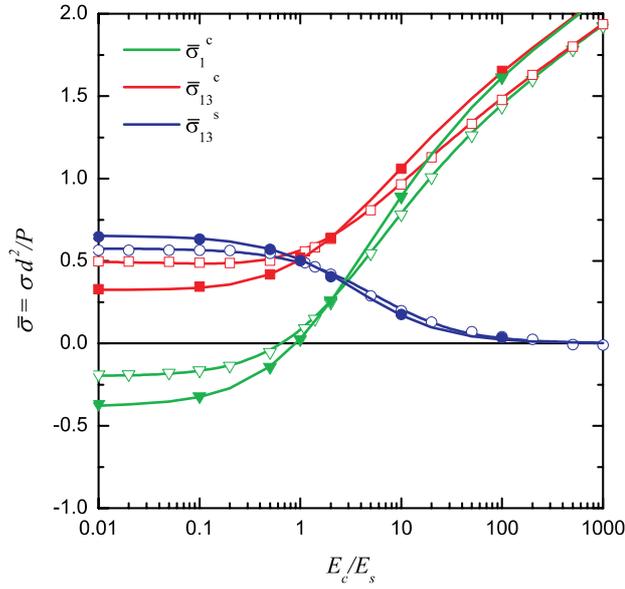


Figura 5.22: Tensiones normalizadas  $\bar{\sigma}_1^c$ ,  $\bar{\sigma}_{13}^c$  y  $\bar{\sigma}_{13}^s$  frente a la razón de módulos elásticos  $E_c/E_s$  para  $P = 25$  N,  $R = 3.18$  mm y  $E_c = 70$  GPa, con  $E_s$  variable. Se muestran los resultados correspondientes a sistemas con  $\nu_c = 0.22$  y  $\nu_s = 0.3$  (símbolos huecos), y con  $\nu_c = \nu_s = 0.35$  (símbolos rellenos). Las líneas en trazo continuo son curvas de ajuste a partir de (5.6b), (5.6c) y (5.8).

hay que destacar que esta dependencia de los parámetros de ajuste con los coeficientes de Poisson no invalida las dependencias funcionales determinadas en este trabajo.

Por otra parte, en el análisis de las tensiones se ha supuesto que el radio del contacto es despreciable frente al espesor del recubrimiento. Obviamente, la extensión de estos resultados a dominios en los que tal aproximación no es válida (p.

	$\kappa$	$\gamma$	$\varphi$	$\beta$	$\chi$	$\eta$
$\nu_c = 0.22, \nu_s = 0.30$	$-0.70 \pm 0.01$	$0.46 \pm 0.01$	$0.79 \pm 0.02$	$0.418 \pm 0.004$	$46 \pm 4$	$0.56 \pm 0.01$
$\nu_c = 0.35, \nu_s = 0.35$	$-0.71 \pm 0.01$	$0.48 \pm 0.02$	$0.82 \pm 0.02$	$0.414 \pm 0.006$	$134 \pm 16$	$0.64 \pm 0.01$

Tabla 5.3: Dependencia de los parámetros de ajuste de las expresiones generales (5.6b), (5.6c) y (5.8) con los coeficientes de Poisson.

ej. a cargas elevadas o valores de  $R/d$  grandes) puede conducir a errores. Afortunadamente, en estos casos las tensiones en la intercara se estimarían por exceso y, en consecuencia, las cargas críticas de fractura por defecto (ver sección 5.2.2). De este modo, las predicciones de cargas críticas constituyen siempre un límite de seguridad.

### 5.2.2. Predicción de cargas críticas

Conocidas las dependencias funcionales de las tensiones generadas por contacto elástico en sistemas bicapa, es posible deducir expresiones para las cargas de inicio del *primer* modo de daño interfacial (Figura 5.15). Para ello, basta con imponer un criterio de tensión crítica para el inicio de cada modo de daño, es decir, suponer que el daño se inicia cuando la tensión responsable alcanza un cierto valor crítico,  $\sigma_{crit}$ . Entonces, según la ecuación (5.4), la carga crítica correspondiente,  $P = P_{crit}$ , viene dada por la expresión

$$P_{crit} = \frac{\sigma_{crit} d^2}{\bar{\sigma}(E_c/E_s)} \quad (5.10)$$

donde  $\sigma_{crit}$  se identifica con la resistencia a fractura del recubrimiento,  $\sigma_F^c$ , o con la tensión de límite elástico del recubrimiento,  $Y_c$ , o del sustrato,  $Y_s$ , dependiendo del modo de daño. Lógicamente, en cada caso se utilizará la tensión normalizada correspondiente, i.e.

$$\begin{aligned} P_{crit} = P_R^c &\quad \Rightarrow \quad \sigma_{crit} = \sigma_F^c, & \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1^c \\ P_{crit} = P_Y^c &\quad \Rightarrow \quad \sigma_{crit} = Y_c, & \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{13}^c \\ P_{crit} = P_Y^s &\quad \Rightarrow \quad \sigma_{crit} = Y_s, & \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{13}^s \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde  $\bar{\sigma}_1^c$ ,  $\bar{\sigma}_{13}^c$  y  $\bar{\sigma}_{13}^s$  vienen dadas por las expresiones (5.6b), (5.6c) y (5.8), o bien por las expresiones simplificadas (5.9). En este último caso, las cargas críticas de inicio de daño interfacial se obtienen mediante las siguientes expresiones:

$$P_R^c = \frac{B\sigma_F^c d^2}{\log\left(C\frac{E_c}{E_s}\right)}, \quad 1 < \frac{E_c}{E_s} < 100 \quad (5.12a)$$

$$P_Y^c = \begin{cases} \frac{LY_c d^2}{\log\left(M \frac{E_c}{E_s}\right)}, & \frac{E_c}{E_s} > 1 \\ \frac{LY_c d^2}{\log(M)}, & \frac{E_c}{E_s} < 1 \end{cases} \quad (5.12b)$$

$$P_Y^s = Y_s d^2 \left( a + b \frac{E_c}{E_s} \right) \quad (5.12c)$$

En ocasiones, conviene reemplazar las tensiones de límite elástico por la dureza del material,  $H = eY$  ( $e \approx 3$ ), parámetro éste más accesible desde el punto de vista experimental, especialmente en materiales cerámicos<sup>[24]</sup>. Puede apreciarse que las ecuaciones (5.12a) y (5.12c) son equivalentes a las expresiones (5.1) y (5.2), respectivamente. Por otro lado, conviene destacar que la ecuación (5.12b) corresponde a un nuevo modo de daño no identificado con anterioridad. Estas expresiones constituyen una excelente herramienta de trabajo para estimar las cargas críticas de inicio de los diferentes modos de daño interfacial en sistemas bicapa.

En principio, sería posible invertir las ecuaciones (5.12) para determinar  $\sigma_F^c$ ,  $Y_c$  o  $Y_s$  a partir de medidas experimentales de las cargas críticas correspondientes. Esto sería especialmente interesante para caracterizar recubrimientos delgados, que son difíciles de obtener en forma masiva. Sin embargo, mientras que el inicio de fractura radial es fácilmente detectable visual o acústicamente, o mediante caídas en la carga aplicada en el ensayo, el inicio de deformación plástica es más difícil de detectar. Además, debido a ciertos efectos estadísticos (ver sección 5.3) y de otra naturaleza\*, es de esperar que las tensiones críticas medidas de esta forma no coincidan con las obtenidas por procedimientos convencionales. Sin embargo, los valores obtenidos mediante esta técnica serían los verdaderamente relevantes para el estudio de estructuras multicapa bajo contacto.

---

\*Por ejemplo: efectos del tamaño finito del contacto, del tiempo y velocidad del ensayo (sección 5.4), de tensiones residuales en la interfase o de la introducción de los adhesivos en los defectos precursores<sup>[108]</sup>.

### 5.3. Influencia de la distribución de defectos en las cargas críticas de inicio de fisuras radiales

En las secciones precedentes se han propuesto expresiones semiempíricas que permiten predecir las cargas críticas de inicio de los modos de daño interfaciales en sistemas bicapa. En el caso de fisuras radiales se han verificado experimentalmente, mediante observación *in situ*, las dependencias con el espesor del recubrimiento<sup>[5]</sup> y con los módulos elásticos de las capas<sup>[109]</sup>. No obstante, se observan diferencias sistemáticas entre los valores experimentales y los calculados mediante la ecuación (5.12a). Para ilustrar estas discrepancias, en la Figura 5.23 se representan las cargas críticas experimentales obtenidas por Chai *et al.*\* para el sistema vidrio/policarbonato, con la superficie inferior del vidrio erosionada, en función del espesor de la capa de vidrio  $d$ . Se incluye en la figura la predicción teórica, ecuación

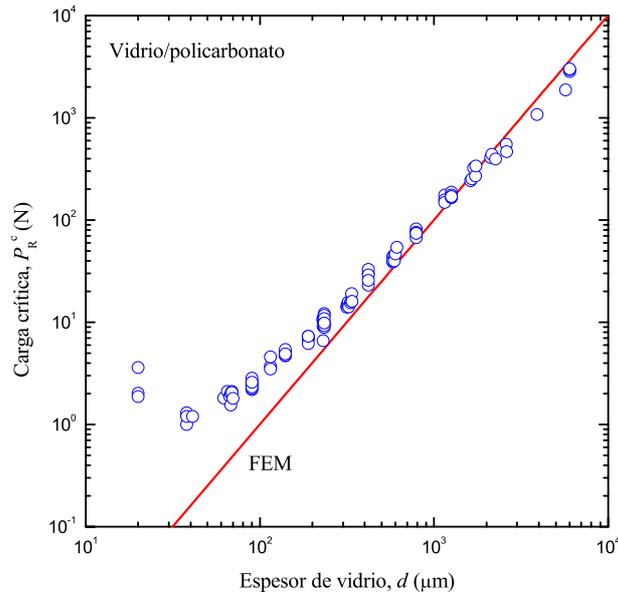


Figura 5.23: Cargas críticas,  $P_R^c$ , para el inicio de fisuras radiales en bicapas vidrio/policarbonato, en función del espesor de la capa de vidrio,  $d$ . Los puntos corresponden a ensayos individuales<sup>[5]</sup>. La recta es la predicción teórica, ecuación (5.12a), validada mediante FEM.

\* Algunos de los valores experimentales han sido reproducidos en nuestros laboratorios.

ción (5.12a) (validada mediante FEM), asumiendo una resistencia a fractura para el vidrio erosionado  $\sigma_F^c = 110$  MPa (Tabla A.1). Como puede apreciarse, los resultados experimentales se desvían respecto de la dependencia cuadrática teórica con el espesor del recubrimiento, especialmente para espesores pequeños. Este tipo de discrepancias se han observado también en otros sistemas bicapa<sup>[110,111]</sup>. La generalidad de estas desviaciones sugiere que son significativas y, en consecuencia, es necesario justificar su origen.

En este estudio se propone que estas desviaciones son consecuencia de la inhomogeneidad del campo de tensiones y de la distribución estadística de defectos, tanto en tamaño como en localización. Efectivamente, en el análisis efectuado en las secciones precedentes se ha supuesto siempre que el defecto crítico responsable del inicio de la fisura está localizado en el eje de carga, donde las tensiones de tracción son máximas. Sin embargo, en la realidad, el defecto crítico estará situado a una cierta distancia  $r > 0$  del eje de carga, donde las tensiones son inferiores. Los resultados de las simulaciones realizadas en este estudio muestran que la tensión  $\sigma_2$  en la superficie inferior del recubrimiento disminuye con la distancia radial,  $r$ , (Figura 5.24) en un rango espacial que se escala con  $d$  (similitud geométrica)<sup>[108]</sup>.

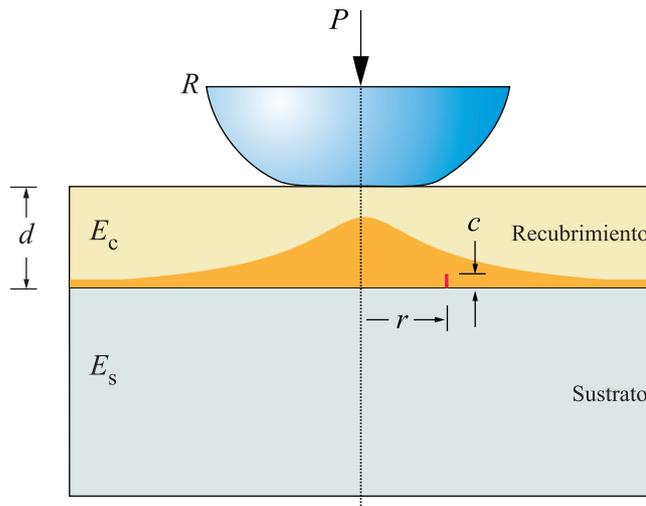


Figura 5.24: Esquema de la distribución de tensiones de tracción ( $\sigma_2$ ) en la superficie inferior del recubrimiento en un bicapa bajo contacto. En el esquema se muestra un defecto de dimensión  $c$  a una distancia  $r$  del eje de carga.

Así pues, la probabilidad de encontrar un defecto grande en la región de tensiones de tracción elevadas se reduce al disminuir el espesor  $d$  y, en consecuencia, la carga crítica aumenta. De esta forma se justifican, al menos cualitativamente, las discrepancias observadas en la Figura 5.23. El objetivo de las siguientes secciones es establecer una nueva expresión para las cargas críticas de inicio de fisuras radiales que tenga en cuenta estas consideraciones de tipo estadístico. La validez de esta expresión se verificará aplicándola al sistema vidrio/policarbonato con la superficie inferior del vidrio erosionada.

### 5.3.1. Relaciones fundamentales y estadística de defectos

Como ya se ha mencionado, la componente del campo de tensiones responsable del inicio de fisuras radiales es la tensión principal perpendicular al plano axial que contiene al defecto precursor,  $\sigma = \sigma_2$ . De acuerdo con los resultados de las secciones precedentes, esta tensión alcanza su valor máximo,  $\sigma_m$ , en la intersección entre la superficie inferior de la lámina y el eje de carga:

$$\sigma_m(P, d) = \frac{P}{Bd^2} \log \left( C \frac{Ec}{Es} \right) \quad (5.13)$$

siendo  $B$  y  $C$  los coeficientes adimensionales definidos anteriormente\*.

El valor de  $\sigma$  disminuye monótonamente con la distancia radial  $r$  al eje de carga, de acuerdo con la expresión

$$\sigma(P, r, d) = \sigma_m(P, d) f_r(r/d) \quad (5.14)$$

Esta relación refleja la similitud geométrica del campo de tensiones, de forma que la tensión relativa  $\sigma/\sigma_m$  a una distancia relativa  $r/d$  está unívocamente determinada para cada sistema bicapa. A modo de ejemplo, la Figura 5.25 representa la función  $f_r(r/d)$  obtenida mediante FEM para el sistema vidrio/policarbonato. Obsérvese la fuerte reducción de la tensión  $\sigma$  con la distancia radial ( $f_r = 1$  para  $r/d = 0$  mientras que  $f_r \simeq 0.5$  para  $r/d = 1$ ).

---

\*Nótese que la ecuación (5.13) se reduce a la ecuación (5.12a) para  $\sigma_m = \sigma_F^c$ .

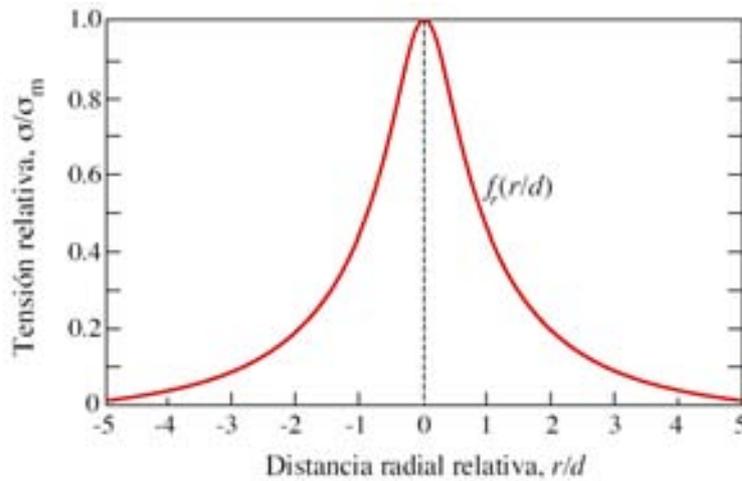


Figura 5.25: Tensión relativa,  $f_r(r/d)$ , obtenida mediante FEM para el sistema vidrio/policarbonato (i.e. considerando  $E_c/E_s = 29.8$ ).

Considérese ahora un defecto situado en la superficie inferior del recubrimiento a una distancia  $r$  del eje de carga (Figura 5.24). Para que se inicie una fisura radial a partir de este defecto, es necesario que éste tenga una cierta longitud crítica,  $c^*$ , de forma que se verifique la condición de Griffith

$$c = c^*(P, r, d) = \left[ \frac{T}{\psi \sigma(P, r, d)} \right]^2 \quad (5.15)$$

siendo  $T$  la tenacidad del recubrimiento (supuesta aquí constante =  $K_{IC}$ , i.e. sin curva  $R$ ) y  $\psi$  un parámetro adimensional que depende de la geometría del defecto. Lógicamente, el defecto crítico será aquél que satisfaga la ecuación (5.15)\* para el menor valor de  $P$  y, en general, estará situado a una cierta distancia  $r$  del eje de carga. Efectivamente, en la Figura 5.26, correspondiente al sistema vidrio/policarbonato, se muestra una fisura radial que se inicia a partir de un defecto situado a una distancia  $r \simeq 40 \mu m \simeq 0.32 d$  del eje de carga.

Llegados a este punto, es necesario introducir elementos estadísticos en el

---

\* Conviene notar que para que un determinado defecto satisfaga la ecuación (5.15) es necesario que se alcance un compromiso adecuado entre su tamaño y la tensión a la que se encuentra sometido (que depende de la distancia al eje  $r$ ).

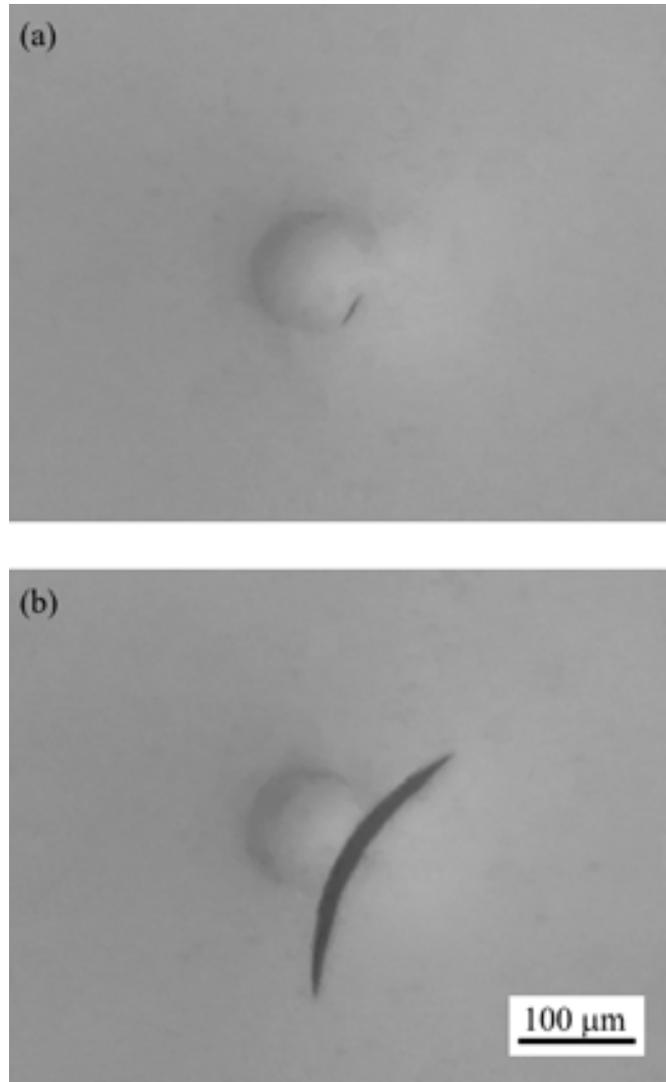


Figura 5.26: Micrografías in situ sucesivas mostrando la secuencia de inicio de una fisura radial a carga  $P = 5.0 \text{ N}$  en un bicapa vidrio/policarbonato con  $d = 140 \mu\text{m}$ . La fisura radial se desarrolla a partir de un defecto situado a una distancia  $r \simeq 40 \mu\text{m} = 0.32 d$  del eje de carga.

análisis. Sea una población de defectos de densidad  $\rho$  con una distribución de tamaños  $N(c)$ . Se define  $\Gamma(P, d)dP$  como la probabilidad de que algún defecto en la superficie inferior del recubrimiento de espesor  $d$  satisfaga la condición de Griffith entre  $P$  y  $P + dP$ . Para que la fisura radial se inicie en dicho intervalo de carga es necesario que el recubrimiento sobreviva sin fracturar hasta alcanzar la carga  $P$ . Por tanto, la probabilidad  $\Phi(P, d)dP$  de que una fisura radial se inicie entre  $P$  y  $P + dP$ , y no antes, puede expresarse como el producto

$$\Phi(P, d) dP = \Omega(P, d) \Gamma(P, d) dP \quad (5.16)$$

donde la función  $\Omega(P, d)$  define la probabilidad de supervivencia hasta la carga  $P$ . Las dos funciones en el segundo término de la ecuación (5.16) están interrelacionadas en la forma\*

$$\Omega(P, d) = e^{-\int_0^P \Gamma(P', d) dP'} \quad (5.17)$$

La función  $\Gamma(P, d)$ , i.e. la densidad de probabilidad de encontrar un defecto de tamaño crítico ( $c = c^*$ ) a la carga  $P$  en un recubrimiento de espesor  $d$ , puede determinarse haciendo uso de la expresión:

$$\Gamma(P, d) = \int_0^\infty 2\pi r \rho S[c^*(P, r, d)] dr \quad (5.18)$$

donde  $\rho$  es la densidad de defectos, supuesta aquí uniforme, y  $S(c)$  la densidad de

---

\*La probabilidad de supervivencia hasta la carga  $P + dP$ ,  $\Omega(P + dP, d)$ , puede escribirse como el producto

$$\Omega(P + dP, d) = \Omega(P, d)\Omega(dP, d)$$

donde  $\Omega(dP, d)$  es la probabilidad de supervivencia entre  $P$  y  $P + dP$ . Entonces

$$\Omega(dP, d) = 1 - \Gamma(P, d) dP$$

Por tanto,

$$\Omega(P + dP, d) = \Omega(P, d)[1 - \Gamma(P, d) dP]$$

Comparando esta última ecuación con el desarrollo en serie de Taylor

$$\Omega(P + dP, d) = \Omega(P, d) + \left[ \frac{d\Omega(P, d)}{dP} \right] dP + \dots$$

tenemos

$$\frac{d\Omega(P, d)}{\Omega(P, d)} = -\Gamma(P, d) dP$$

que integrando conduce finalmente a la ecuación (5.17).

probabilidad para que un defecto determinado tenga tamaño  $c$ , es decir,

$$S(c) = \frac{N(c)}{\int_0^\infty N(c')dc'} \quad (5.19)$$

Conocida la densidad de probabilidad  $\Phi(P, d)$ , se puede determinar la carga crítica promedio  $P_R^c$  para el inicio de una fisura radial en un recubrimiento de espesor  $d$  utilizando la expresión

$$P_R^c(d) = \langle P \rangle = \int_0^\infty P\Phi(P, d) dP \quad (5.20)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.16), (5.17) y (5.18) en (5.20) se obtiene finalmente

$$P_R^c(d) = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty 2\pi r \rho S[c^*(P, r, d)] dr \right\} e^{-\int_0^P \int_0^\infty 2\pi r \rho S[c^*(P', r, d)] dr dP'} P dP \quad (5.21)$$

Por tanto, para determinar la función  $P_R^c(d)$  es necesario integrar numéricamente\* la expresión (5.21). Para ello, es necesario determinar previamente las siguientes magnitudes:

1. La densidad promedio de defectos,  $\rho$ .
2. La función  $S(c)$ , que se determina utilizando la distribución de tamaños de defecto,  $N(c)$ , a través de la ecuación (5.19).
3. La función  $c^*(P, r, d)$  evaluada mediante la ecuación (5.15) para lo que se precisan los valores de  $\psi$  (para fisuras medio-penique,  $\psi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ ) y de  $T$ , así como la función  $\sigma(P, r, d)$ . Esta última se determina a partir de las expresiones (5.13) y (5.14) sustituyendo la función  $f_r(r/d)$  correspondiente.

Para verificar la validez del análisis realizado, a continuación se obtienen las cargas críticas para el inicio de fisuras radiales en el sistema vidrio/policarbonato (cf. Figura 5.23) haciendo uso de la expresión (5.21).

---

\*Desafortunadamente no es posible integrar o simplificar analíticamente la expresión (5.21) debido a su complejidad.

### 5.3.2. Distribución de defectos en vidrio erosionado

La determinación a priori de la distribución de defectos no es siempre factible. Por ejemplo, en cerámicos policristalinos de grano fino los defectos pueden ser submicroscópicos o encontrarse bajo la superficie. Afortunadamente, este no es el caso del sistema vidrio/policarbonato de la Figura 5.23, ya que la superficie inferior del vidrio fue erosionada previamente con una suspensión de partículas de SiC de grado 600<sup>[5]</sup>. Los defectos introducidos en el proceso de erosión son lo suficientemente grandes como para ser observados mediante microscopía óptica convencional. Para determinar experimentalmente la distribución de defectos se realizaron 250 micrografías ópticas de una superficie de vidrio erosionada bajo las mismas condiciones utilizadas por Chai *et al.*<sup>\*</sup> (Figura 5.27). Como puede apreciarse, existe una gran

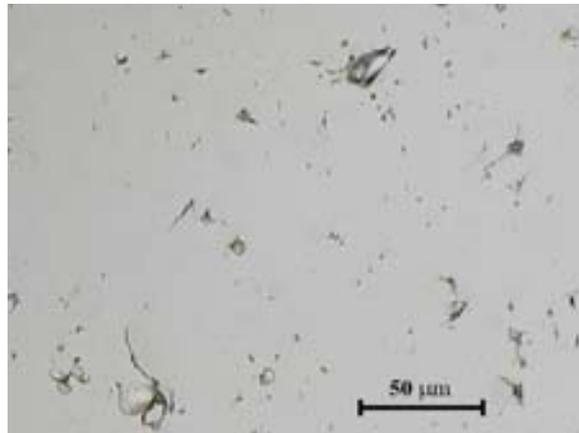


Figura 5.27: Micrografía mostrando la distribución de defectos en una superficie de vidrio erosionada con una suspensión de partículas de SiC de grado 600. Muestra cubierta previamente con oro y observada bajo luz polarizada.

variación tanto en el tamaño como en la distancia entre defectos. Mediante técnicas convencionales de análisis de imágenes, se contabilizaron un total de  $4.4 \cdot 10^5$  defectos, excluidos los de dimensión inferior a  $1 \mu\text{m}$ . Ello equivale a una densidad de defectos promedio  $\rho \simeq 3600 \text{ mm}^{-2}$  y a una separación media entre defectos de  $17 \mu\text{m}$ .

---

<sup>\*</sup>Para verificar que la erosión era similar a la realizada por Chai *et al.*, se comprobó que las cargas críticas experimentales obtenidas con estas muestras coincidían con los resultados de estos autores.

La dimensión característica de cada defecto,  $c$ , se determinó como la mitad de la longitud máxima del grupo de píxeles correspondiente. Esto es, se admite que se trata de defectos de tipo medio penique como cabe esperar en procesos de abrasión con partículas puntiagudas<sup>[112]</sup>. La Figura 5.28 muestra un histograma del número de defectos,  $N(c)$ , agrupados en intervalos de tamaño de  $1 \mu\text{m}$ . Como

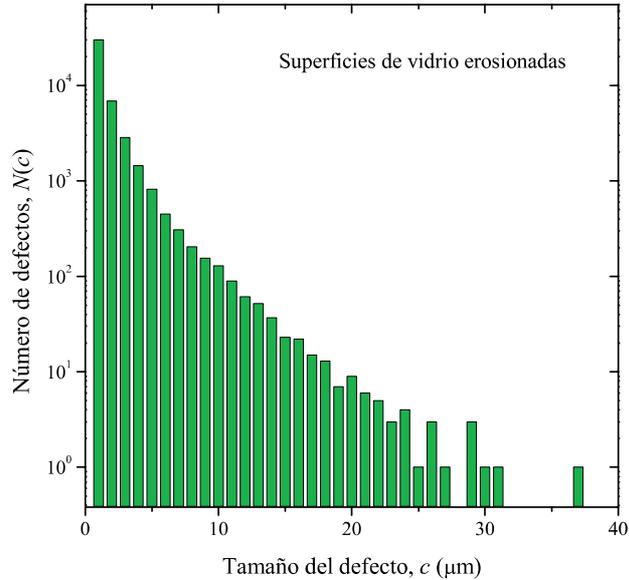


Figura 5.28: Distribución de tamaño de los defectos  $N(c)$  en las superficies de vidrio erosionadas, determinada mediante análisis de imagen. Nótese que los datos se truncan para  $c \approx 30 \mu\text{m}$ .

puede apreciarse, el número de defectos decrece drásticamente con el tamaño. Los datos de la Figura 5.28 pueden ser poco fiables para valores pequeños de  $c$ , ya que el ruido y posibles problemas de resolución pueden afectar a los resultados.

### 5.3.3. Cálculo de cargas críticas para el sistema vidrio/policarbonato

Utilizando los resultados obtenidos en la sección precedente, junto con el valor de tenacidad correspondiente al vidrio ( $T = 0.67 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$  [108]) y la función

$f_r(r/d)$  representada en la Figura 5.25, se puede calcular  $P_R^c(d)$  integrando numéricamente la expresión (5.21). Ello requiere un minucioso método de computación numérica, para evitar problemas de convergencia y errores de redondeo en la integración, sin embargo, no precisa del ajuste de parámetro alguno. En este trabajo se ha utilizado un algoritmo numérico programado en Fortran y desarrollado expresamente con la finalidad de evaluar numéricamente la ecuación (5.21).

En la Figura 5.29 se muestra la función  $P_R^c(d)$  calculada (en trazo continuo) junto con su intervalo de incertidumbre (zona coloreada) estimado a partir de las desviaciones estándar,  $\sqrt{\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2}$ . Como puede apreciarse, existe un buen acuerdo con los resultados experimentales para todo el rango de espesores, salvo quizás en los extremos, donde tanto los cálculos como los experimentos son menos fiables<sup>[5]</sup>. Este buen acuerdo con los resultados experimentales valida la hipótesis

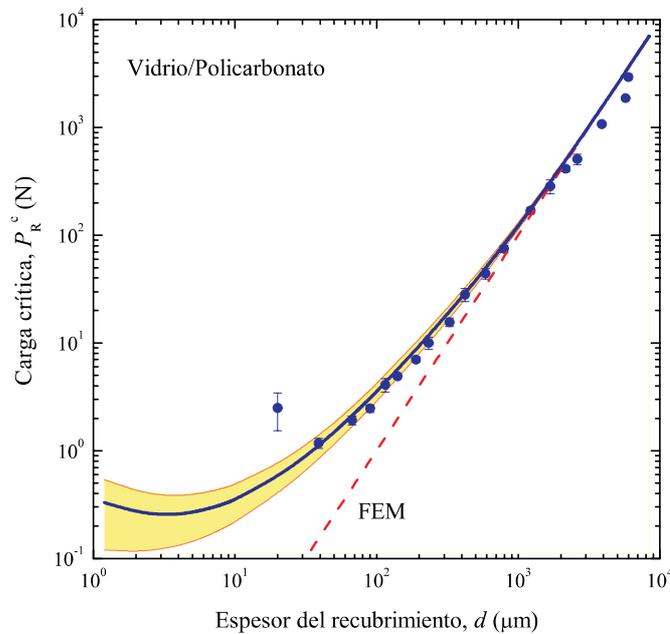


Figura 5.29: Función  $P_R^c(d)$  calculada teniendo en cuenta consideraciones estadísticas a partir de (5.21) (curva continua). La zona coloreada es un intervalo de confianza y la línea en trazo discontinuo la predicción generada por FEM, ecuación (5.12a). Se han incluido también los datos experimentales (Figura 5.23), pero agrupándolos por intervalos de espesor y calculando las correspondientes barras de error.

inicial de que la estadística de defectos, junto con la inhomogeneidad del campo de tensiones, es responsable de las desviaciones observadas en la Figura 5.23.

Para espesores pequeños la curva  $P_R^c(d)$  presenta un mínimo ( $d \approx 4 \mu m$ ) cuya justificación es inmediata. Efectivamente, si bien la disminución del espesor reduce el valor de  $P_R^c$ , debido a la mayor flexión del recubrimiento, a partir de un cierto espesor esta reducción es insuficiente para compensar el aumento de  $P_R^c$  asociado a la mayor dificultad para encontrar defectos grandes en la región de tensiones elevadas. Por otro lado, conviene destacar que la gran discrepancia entre cálculos y experimentos que se observa para  $d \approx 20 \mu m$  es probablemente debida al fuerte gradiente de tensiones que actúa sobre el defecto precursor cuando el espesor es pequeño (de forma análoga a lo que sucede en fisuras cónicas [17]).

Como cabía esperar, para espesores grandes la curva  $P_R^c(d)$  calculada tiende asintóticamente a la recta límite  $P_R^c \propto \sigma_F^c d^2$  ( $\sigma_F^c = 110$  MPa). Este valor límite de resistencia corresponde, a su vez, a un tamaño de defecto  $c^* \approx 30 \mu m$ , ecuación (5.15). Como puede apreciarse en la Figura 5.28, este valor se corresponde con el tamaño máximo de los defectos en la distribución  $N(c)$ . Es decir, para espesores grandes, al igual que sucede en un ensayo de flexión, los defectos críticos son los de mayor tamaño de la población. Sin embargo, para espesores menores no es posible garantizar la existencia de defectos de gran tamaño en la región donde las tensiones son máximas y, por tanto, la fractura tenderá a iniciarse a partir de defectos menores, pero más próximos al eje de carga. Así pues, la resistencia a fractura "efectiva"  $\sigma(P_R^c) = \sigma_{ef}^c$  (ecuación (5.13)), que para  $d \rightarrow \infty$  coincide con la resistencia medida en ensayos de flexión\*,  $\sigma_F^c$ , tiende a aumentar al disminuir  $d$ , alcanzando valores irrealmente elevados (Figura 5.30). Efectivamente, se llega incluso a superar la resistencia teórica del vidrio ( $\approx 10$  GPa) para  $d < 10 \mu m$ . Esto es debido a que, en el rango de pequeños espesores, la existencia de fuertes gradientes de tensiones actuando sobre los defectos limita la validez del análisis realizado. En cualquier caso, los resultados de la Figura 5.30 tienen importantes implicaciones para películas delgadas ( $d < 10 \mu m$ ) sometidas a cargas concentradas, ya que su resistencia efectiva puede ser considerablemente superior a la del material masivo con idéntica distribución de defectos. Lógicamente, no existirá tal incremento de resistencia cuando el campo de tensiones sea uniforme, p. ej. en el caso de tensiones de origen térmico.

---

\*Dónde las tensiones son uniformes en un área amplia.

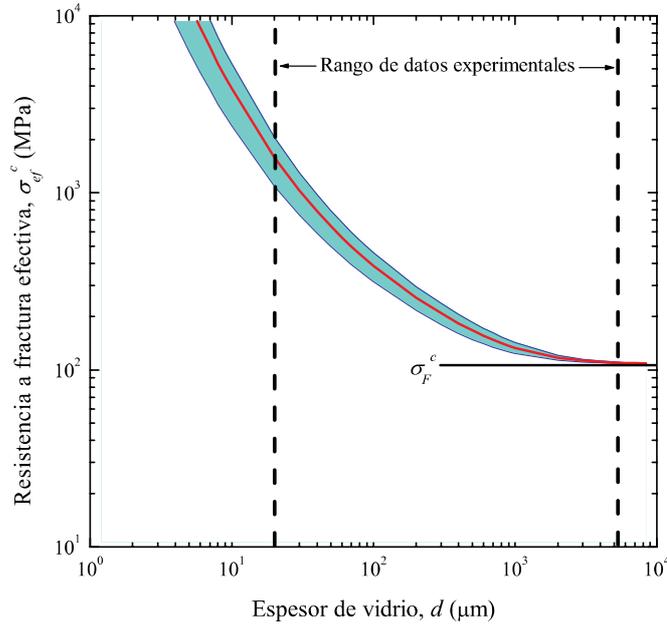


Figura 5.30: Resistencia a la fractura efectiva,  $\sigma_{ef}^c$ , del vidrio erosionado en bicapas vidrio/policarbonato en función del espesor  $d$ . Se muestra en línea continua la curva calculada a partir de (5.13) para  $P = P_R^c(d)$ , usando los valores de  $P_R^c(d)$  calculados a partir de (5.21) y la zona coloreada representa el intervalo de confianza (desviación estándar). Se indica también el rango de los datos experimentales y el límite asintótico para  $d$  grandes,  $\sigma_{ef}^c = \sigma_F^c$ .

Conviene señalar que el buen acuerdo entre teoría y experimentos no implica una validación de los parámetros de entrada empleados, ya que el análisis realizado no está exento de incertidumbre. Así, la determinación de  $\rho$  y  $N(c)$  a partir del análisis de imágenes de superficies erosionadas está sujeta a errores experimentales. Además, el parámetro geométrico  $\psi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$  empleado en la ecuación (5.15) supone defectos con geometría ideal tipo *medio penique*, despreciando posibles tensiones residuales originadas en el proceso de abrasión [113]. Del mismo modo, la tenacidad del vidrio es sensible a múltiples factores, como la velocidad de carga, el entorno, etc [114,115]. Tampoco se han tenido en cuenta correcciones asociadas a la orientación de los defectos, si bien éstas deben ser mínimas dado que el campo de tensiones es prácticamente biaxial. Lógicamente, cualquier variación en estos parámetros provocará un desplazamiento en la curva  $P_R^c(d)$  calculada.

En este trabajo se ha puesto de manifiesto que un tratamiento riguroso de la fractura en recubrimientos frágiles requiere tomar en consideración la distribución estadística de los defectos. Sin embargo, conviene destacar que la ecuación (5.12a) constituye una valiosa aproximación para el diseño de estructuras bicapa resistentes al daño por contacto, ya que proporciona un límite inferior para la carga crítica de fisuras radiales, es decir, un límite de seguridad. Algunos autores han optado por ajustar los valores de los parámetros  $B$  y  $C$  a los datos experimentales, consiguiendo un buen acuerdo en el rango intermedio de espesores ( $100 \mu\text{m} < d < 10 \text{ mm}$ ) para  $B = 2.04$ ,  $C = 0.94$  <sup>[109,111]</sup>. La extensión del análisis estadístico realizado a sistemas más complejos requiere exclusivamente conocer el campo de tensiones y la distribución de defectos.

Un aspecto secundario del análisis realizado es la posibilidad de obtener información sobre las distribuciones de defectos,  $S(c)$  en el recubrimiento a partir de medidas de las cargas críticas de inicio de fisuras radiales,  $P_R^c(d)$ , utilizando la ecuación (5.21). Esto sería especialmente valioso en materiales cerámicos policristalinos en los que es muy complejo caracterizar las poblaciones de defectos utilizando otros métodos. La deconvolución de  $S(c)$  a partir de (5.21) es compleja, pero el interés que tiene su conocimiento justificaría futuras investigaciones sobre estas cuestiones.

## 5.4. Fatiga en sistemas bicapa cerámico/polímero

En las secciones precedentes se han analizado las tensiones y cargas críticas de inicio de daño en sistemas bicapa sometidos a contactos estáticos, o lo que es lo mismo, obviando cualquier posible influencia del tiempo. Sin embargo, el inicio de daño en condiciones de servicio puede producirse de forma prematura cuando los materiales multicapa están sometidos a cargas cíclicas o sostenidas. La aparición prematura de daño tiene importantes repercusiones, ya que reduce la vida en servicio de las estructuras bicapa. Por ello, como parte de esta Tesis Doctoral se ha realizado un estudio preliminar sobre fatiga en sistemas bicapa. En particular, se ha estudiado el efecto del tiempo en el inicio de las fisuras radiales

que, como ya se ha mencionado anteriormente, es uno de los modos de daño más peligrosos.

Es un hecho bien conocido que la resistencia a fractura de materiales monolíticos, evaluada mediante experimentos de flexión, disminuye al aumentar la duración del ensayo debido al crecimiento subcrítico de los defectos precursores (i.e. *slow crack growth*). En general, el crecimiento lento de fisuras es consecuencia de la acción química del agua<sup>[27,115,116]</sup>, siendo este fenómeno el principal mecanismo dependiente del tiempo que afecta al desarrollo de fisuras cónicas\* en cerámicos monolíticos<sup>[42,118]</sup>; debido a que estas fisuras se inician en la superficie del material el agua del ambiente accede fácilmente a la punta de la fisura. Sin embargo, se plantea la cuestión de si el crecimiento lento de fisuras influye en el inicio de las fisuras radiales, ya que el acceso del agua a la región interfacial del sistema bicapa podría verse dificultado. Por otro lado, en sistemas bicapa pueden producirse otros efectos dependientes del tiempo o del número de ciclos de carga, p. ej. viscoelasticidad<sup>[119]</sup> o acumulación de deformación plástica en el sustrato<sup>[120]</sup>, que afectarían al inicio de las fisuras radiales.

#### 5.4.1. Crecimiento subcrítico de fisuras en sistemas bicapa

Sea un recubrimiento frágil de espesor  $d$  y módulo de Young  $E_c$  sobre un sustrato de módulo  $E_s$ . Considérese, además, que este recubrimiento contiene defectos de tamaño característico  $c_i$  a partir de los cuales se inician las fisuras radiales. Admitiendo que la densidad de defectos es lo suficientemente elevada en la región sometida a tensiones de tracción, i.e. despreciando correcciones de tipo estadístico (sección 5.3), la fisura se iniciará cuando la tensión máxima en el recubrimiento, ecuación (5.13), iguale su resistencia a fractura. Hasta ahora, se ha supuesto que la resistencia a la fractura es una magnitud de equilibrio cuando, en realidad y debido principalmente al fenómeno de crecimiento subcrítico de fisuras, se trata de un parámetro dependiente del tiempo<sup>[27]</sup>. Por tanto, es necesario analizar cómo afecta este hecho a las cargas críticas de inicio de fisuras radiales.

---

\*El crecimiento lento de fisuras también afecta en cierta medida al daño cuasi-plástico pero en este caso, la degradación micromecánica de la microestructura es el mecanismo de acumulación de daño dominante<sup>[117]</sup>.

Un defecto de tamaño inicial  $c_i$  crecerá de forma subcrítica bajo la acción de una tensión aplicada  $\sigma(t) \equiv \sigma_1(t)$ , de modo que su tamaño,  $c$ , depende del tiempo. La velocidad de crecimiento del defecto viene dada por<sup>[27,116,121]</sup>

$$v = \frac{dc}{dt} = v_0 \left( \frac{K}{T} \right)^N \quad (5.22)$$

siendo  $K$  el factor de intensidad de tensiones,  $T$  la tenacidad del material (supuesta constante,  $T = K_{IC}$ ), y donde  $v_0$  y  $N$  son coeficientes. Admitiendo que los defectos están libres de tensiones residuales, el factor de intensidad de tensiones que actúa sobre un defecto de tamaño  $c \ll d$  viene dado por

$$K = \psi \sigma c^{\frac{1}{2}} \quad (5.23)$$

donde  $\psi$  es un coeficiente que depende de la geometría del defecto. Combinando (5.23) con (5.13) e integrando sobre la longitud de la fisura entre el tamaño inicial  $c = c_i$  y el crítico  $c = c^*$  (correspondiente a  $K = T$ ) se obtiene, despreciando los términos en  $c^*$  (i.e. suponiendo  $N \gg 1$ ),

$$\int_0^{t_R} [P(t)]^N dt = A \quad (5.24)$$

donde  $t_R$  es el tiempo transcurrido hasta la fractura,  $A$  un parámetro que viene dado por la expresión

$$A = \frac{[BTd^2]^N}{\left[ \psi \log \left( C \frac{E_c}{E_s} \right) \right]^N \left( \frac{N}{2} - 1 \right) v_0 c_i^{\left( \frac{N}{2} - 1 \right)}} \quad (5.25)$$

y  $P(t)$  la carga aplicada, que depende del tipo de ensayo:

- (i) *Ensayos estáticos* (Velocidad de carga constante\*): La carga se aplica a una velocidad  $\dot{P}$  constante hasta que se inicia una fisura radial a carga  $P_R^c$ , por consiguiente

$$P(t) = \dot{P}t = \left( \frac{P_R^c}{t_R} \right) t \quad (5.26)$$

---

\*En realidad lo que se mantiene constante es la velocidad de travesía, sin embargo, ambas condiciones de ensayo son prácticamente equivalentes.

Sustituyendo en (5.24) e integrando se obtiene

$$(P_R^c)^N t_R = A(N + 1) \quad (5.27)$$

o, de forma equivalente,

$$P_R^c = [A(N + 1)\dot{P}]^{\frac{1}{N+1}} \quad (5.28)$$

Utilizando la expresión (5.13), la ecuación (5.28) puede expresarse en la forma utilizada habitualmente para láminas bajo flexión, i.e.

$$\sigma_m = [A_0(N + 1)\dot{\sigma}]^{\frac{1}{N+1}} \quad (5.29)$$

$$\text{con } A_0 = \frac{(T/\psi)^N}{(\frac{N}{2}-1)v_0c_i^{(\frac{N}{2}-1)}}.$$

- (ii) *Ensayos cíclicos* (Frecuencia constante): La muestra se somete a ciclos de carga sinusoidales entre 0 y  $P_R^c$  a frecuencia constante,  $f$ , hasta que se inicia una fisura radial; i.e.

$$P(t) = \left(\frac{P_R^c}{2}\right) [1 - \text{sen}(2\pi ft + \pi/2)] \quad (5.30)$$

En este caso, sustituyendo (5.30) en (5.24) e integrando se obtiene<sup>[42]</sup>

$$(P_R^c)^N t_R = 2AN^{0.47} \quad (5.31)$$

Las expresiones (5.28) y (5.31) pueden utilizarse para cuantificar el efecto del tiempo en la fractura radial de un determinado sistema bicapa, a partir de medidas del exponente  $N^*$ . Conviene resaltar de nuevo que estas ecuaciones se basan en la hipótesis de que la cinética de fractura está controlada exclusivamente por el crecimiento subcrítico de fisuras libres de tensiones residuales. Cualquier otra contribución incrementará el efecto del tiempo y, en consecuencia, conducirá a una estimación por defecto del exponente  $N$ . La existencia de tensiones residuales de tracción actuando sobre los defectos precursores reducirían también el valor de  $N$ <sup>[122-126]</sup>; cuando estos defectos se introducen mediante erosión, esta contribución es despreciable debido a la relajación de tensiones que acompaña a la eliminación

\*A menor valor de  $N$ , mayor efecto del tiempo. De hecho, un valor de  $N = \infty$  indica un sistema donde el tiempo no juega ningún papel.

de material por desconchamiento o *chipping* <sup>[113]</sup>. Por otro lado, en el análisis se ha supuesto un valor de tenacidad constante, es decir, que el material no presenta comportamiento tipo curva-R <sup>[27]</sup>. Sin embargo, esto no supone una gran limitación, pues en muchas aplicaciones prácticas (p. ej. rodamientos o coronas dentales) los materiales cerámicos utilizados como recubrimiento no suelen exhibir este tipo de comportamiento, ya que se escogen por su elevada resistencia a la erosión, dureza y resistencia a fractura y no por su tenacidad.

### 5.4.2. Aplicación al sistema vidrio/policarbonato

Para determinar el efecto del tiempo sobre las cargas de inicio de fisuras radiales en sistemas bicapa vidrio/policarbonato, se realizaron ensayos Hertz estáticos a distintas velocidades de carga y ensayos Hertz cíclicos (sección 4.2), en muestras con la superficie inferior del vidrio erosionada. Aprovechando la inmunidad del silicio al crecimiento lento de fisuras <sup>[122]</sup>, se realizaron también ensayos en muestras silicio/policarbonato, al objeto de investigar la posible existencia de contribuciones adicionales. Para estudiar el efecto de la atmósfera en los fenómenos de fatiga, los ensayos se realizaron utilizando diferentes condiciones ambientales (ver sección 4.2). Antes de analizar los resultados obtenidos, se presentan los valores del exponente  $N$  correspondientes a láminas de vidrio y silicio obtenidos mediante ensayos de flexión pura.

#### Ensayos de flexión en cuatro puntos

Los ensayos de flexión en cuatro puntos realizados en vidrio y silicio monolíticos permiten obtener sus propiedades de fatiga *intrínsecas*, en particular el valor del exponente  $N$ , que será utilizado como referencia para el análisis de los resultados obtenidos en muestras bicapa. En la Figura 5.31 se muestran los resultados de estos ensayos, con las correspondientes desviaciones estándar. Las rectas corresponden a ajustes lineales de los datos en escala logarítmica, de acuerdo con la ecuación (5.29). Estos ajustes conducen a una estimación del exponente  $N = 18 \pm 1$  (pendiente  $0.052 \pm 0.003$ ) para el vidrio y  $N = \infty$  (pendiente  $0.001 \pm 0.003$ ) para el

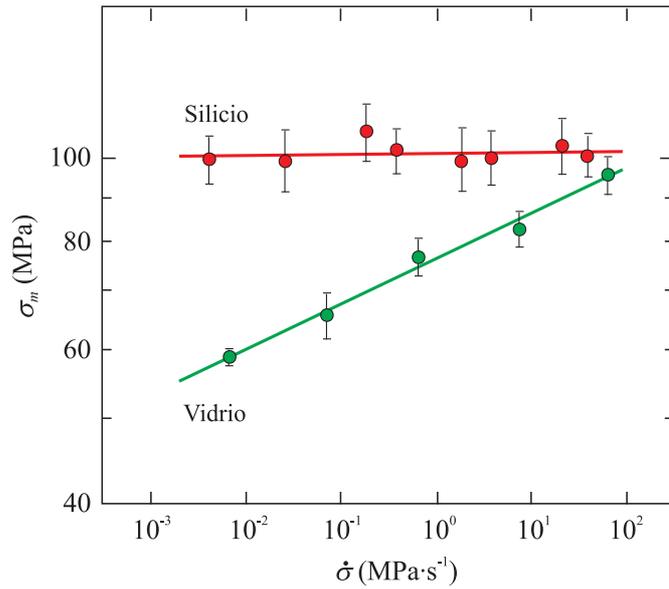


Figura 5.31: Resistencia a fractura,  $\sigma_m$ , frente a velocidad de aplicación de la tensión,  $\dot{\sigma}$ , para vidrio (verde) y silicio (rojo) obtenida mediante ensayos flexión en cuatro puntos. Los puntos representan el valor medio de un mínimo de 5 ensayos y las barras de error las correspondientes desviaciones estándar. Las líneas sólidas son el ajuste de los datos según la expresión (5.29).

silicio. El valor del vidrio se corresponde con los valores de la literatura<sup>[115,125,127]</sup>, sugiriendo que las tensiones residuales en los defectos introducidos por erosión son despreciables. En el caso del silicio, el valor infinito de  $N$  es consistente con la ausencia de fenómenos de crecimiento lento de fisuras en este material<sup>[122]</sup>.

### Ensayos Hertz en bicapas

A continuación se exponen y analizan los resultados obtenidos mediante ensayos Hertz sobre muestras bicapa vidrio/policarbonato y silicio/policarbonato con  $d = 1$  mm. En la Figura 5.32 se muestran micrografías *in situ* para ilustrar la morfología de las fisuras radiales generadas durante los ensayos. En vidrio (Figura 5.32a) las fisuras radiales están orientadas al azar. En cambio, en el silicio

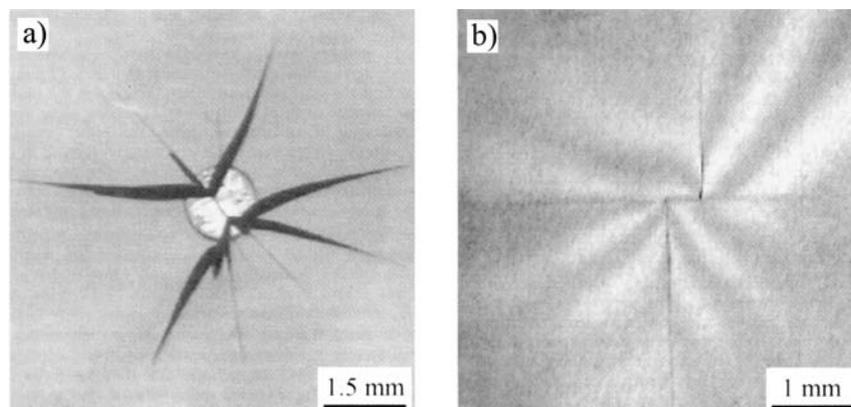


Figura 5.32: Micrografías in situ de las fisuras radiales generadas mediante ensayos Hertz en sistemas bicapa ( $d = 1 \text{ mm}$ ): a) vidrio/policarbonato,  $P = 125 \text{ N}$ , fisuras orientadas aleatoriamente y b) silicio/policarbonato,  $P = 136 \text{ N}$ , fisuras ortogonales entre sí, propagándose en planos de clivaje  $\{111\}$  (la superficie observada es de tipo  $\{001\}$ ).

(Figura 5.32b) éstas se propagan en direcciones ortogonales que se corresponden con la intersección entre los planos de clivaje  $\{111\}$  y la superficie de observación  $\{001\}$ <sup>[29]</sup>.

En la Figura 5.33 se representan las cargas críticas  $P_R^c$ , correspondientes a ensayos Hertz estáticos realizados en aire, frente a la velocidad de aplicación de la carga  $\dot{P}$ . Los ajustes lineales de los datos en escala logarítmica, según la ecuación (5.28), conducen a un valor de  $N = 16.0 \pm 0.7$  para el vidrio y  $N = 66 \pm 11$  para el silicio. Estos valores son inferiores a los obtenidos mediante ensayos de flexión (sección 5.4.2), sugiriendo la existencia de alguna contribución adicional a la fatiga (i.e. al margen del crecimiento subcrítico). Obviamente, esta contribución tiene que estar asociada a la presencia del sustrato o del adhesivo.

En la Figura 5.34 se muestran las cargas máximas de ensayos cíclicos realizados sobre vidrio/policarbonato frente al tiempo a fractura  $t_R$ . Cada símbolo corresponde al valor medio de unos 15 ensayos y se han omitido las barras de error por

\*Calculada a partir de la pendiente de la región cuasi-lineal de la curva  $P(t)$  registrada durante el ensayo.

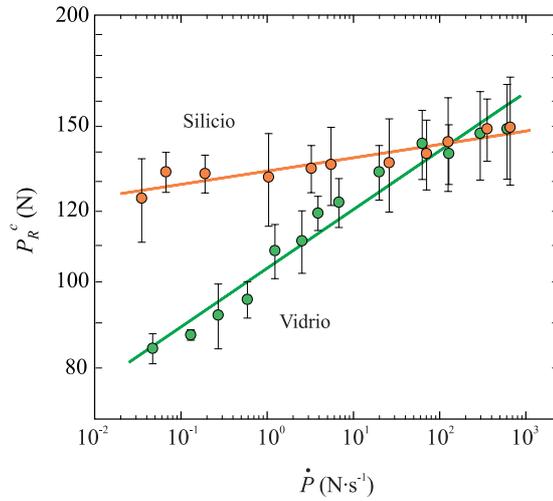


Figura 5.33: Cargas crítica de inicio de fisuras radiales,  $P_R^c$ , frente a velocidad de aplicación de la carga,  $\dot{P}$ , para vidrio (verde) y silicio (rojo) obtenidas mediante ensayos Hertz estáticos realizados en aire. Los puntos representan el valor medio de un mínimo de 5 ensayos con sus correspondientes desviaciones estándar y las líneas sólidas sendos ajustes de los datos según la expresión (5.28).

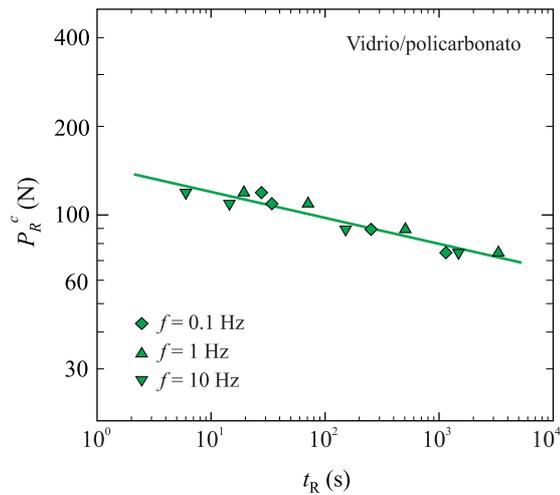


Figura 5.34: Cargas crítica de inicio de fisuras radiales,  $P_R^c$ , frente al tiempo a fractura,  $t_R$ , para ensayos cíclicos realizados en el sistema vidrio/policarbonato a las frecuencias indicadas. Los símbolos representan el valor medio de un mínimo de 15 ensayos y la línea el ajuste de los datos según la expresión (5.31). Por razones de claridad se han omitido las desviaciones estándar de los datos.

razones de claridad. La línea continua representa la predicción obtenida a partir de la ecuación (5.31), utilizando el valor del parámetro  $N$  correspondiente al sistema vidrio/policarbonato obtenido anteriormente (Figura 5.33). Como puede apreciarse, no se observan desviaciones significativas entre esta predicción y los resultados experimentales, para ninguna de las frecuencias de ensayo. La independencia de  $P_R^c$  respecto del número de ciclos realizados, i.e. de la frecuencia, excluye la posibilidad de que exista alguna contribución mecánica acumulativa a la fatiga, al menos para las condiciones de ensayo utilizadas. Este resultado es consistente con los cálculos de elementos finitos que predicen la ausencia de deformación plástica (i.e.  $\sigma_{13} < Y$  en todos los materiales) para los niveles de carga aplicados, eliminando la posibilidad de que se produzcan fenómenos de plasticidad cíclica<sup>[120]</sup>. Así pues, la contribución adicional a la fatiga asociada al adhesivo/sustrato debe ser no acumulativa. La explicación que se propone es que esta contribución se debe al comportamiento viscoelástico de las capas poliméricas. Efectivamente, tal comportamiento conllevaría un aumento de las deformaciones en el sustrato al disminuir la velocidad de ensayo y, por consiguiente, un aumento de las tensiones de flexión en el recubrimiento que explicaría el efecto observado. Conviene destacar que los procesos anelásticos dan lugar a ciclos carga/descarga cerrados, que no ocasionan deformaciones irreversibles y, por tanto, no son acumulativos. Este área se antoja interesante como objetivo para futuras investigaciones, especialmente en sistemas multicapa con capas muy viscoelásticas<sup>[119]</sup> o con recubrimientos inmunes (o poco proclives) al crecimiento subcrítico de fisuras (p. ej el silicio), donde este efecto debe ser dominante.

De cualquier modo, es evidente que también en sistemas bicapa el crecimiento lento de fisuras es el mecanismo dominante de la fatiga en vidrio. Sin embargo, ensayos realizados en muestras sumergidas en agua o en atmósfera de  $N_2$  no muestran diferencia alguna con los resultados obtenidos en aire. Este hecho sugiere que el agua responsable del crecimiento subcrítico no proviene del medio ambiente; i.e. el adhesivo y el sustrato aíslan la superficie inferior del vidrio del ambiente externo impidiendo el acceso del agua a la interfase. Por tanto el crecimiento lento se debe al agua preexistente en regiones próximas a la interfase. El transporte de agua a corta distancia ha sido propuesto por Ritter *et al.* para explicar fenómenos similares en fibras ópticas recubiertas de polímero<sup>[128]</sup>. Para verificar esta hipótesis se realizaron ensayos Hertz estáticos en muestras preparadas íntegramente en atmósfera seca (humedad relativa  $< 20\%$ ). En la Figura 5.35 se muestran las cargas críticas

determinadas a partir de dichos ensayos en función del tiempo a fractura, para su comparación con los resultados correspondientes a muestras fabricadas en aire. Las líneas representan los correspondientes ajustes de los datos según la expresión

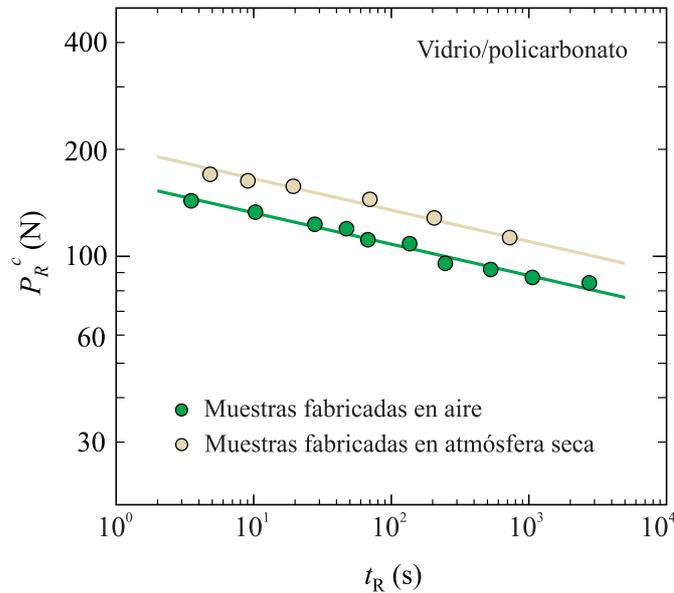


Figura 5.35: Cargas críticas de inicio de fisuras radiales,  $P_R^c$ , frente al tiempo a fractura,  $t_R$ , para el sistema vidrio/policarbonato. Se muestran los resultados obtenidos mediante ensayos Hertz estáticos realizados en aire (verde, Figura 5.33) y en atmósfera seca (beige). Los puntos representan el valor medio de un mínimo de 5 ensayos y las líneas son ajustes de los datos según la expresión (5.31). Por razones de claridad se han omitido las desviaciones estándar de los datos.

(5.27). Como puede apreciarse, ambas rectas presentan la misma pendiente, i.e. el mismo valor de  $N$ , pero se produce un incremento en las cargas de fractura para las muestras preparadas en atmósfera seca. Así, al disminuir la concentración de agua en la interfase no se modifica el mecanismo de fatiga, i.e. crecimiento subcrítico de fisuras asistido por agua, pero se disminuye su eficacia; esto se traduce en un menor valor de  $v_0$  en (5.22), con el consiguiente incremento en las cargas críticas. Estos resultados corroboran la hipótesis de que el agua responsable del crecimiento subcrítico de las fisuras se encuentra en la región próxima a la interfase, debido al proceso de preparación de la muestra.

En resumen, en esta sección se han identificado los mecanismos dependientes del tiempo en el inicio de fisuras radiales en sistemas bicapa cerámico/polímero unidos mediante adhesivo. En aquellos materiales susceptibles de presentar crecimiento subcrítico de fisuras, este fenómeno es dominante y se atribuye al agua presente durante la preparación de la estructura bicapa, o en los propios materiales que la componen. El ambiente externo no juega un papel significativo en la cinética de fractura, ya que las fisuras radiales se inician en regiones donde éste no tiene fácil acceso. Por otro lado, se ha constatado la existencia de un mecanismo dependiente del tiempo adicional, asociado a la viscoelasticidad de los componentes poliméricos. Este efecto, si bien menor, puede llegar a ser dominante en sistemas cuyo recubrimiento sea relativamente inmune al crecimiento lento de fisuras, como es el caso del silicio.

## 5.5. Diagramas para el diseño de estructuras bicapa

En esta sección se aplican los resultados de la sección 5.2 para efectuar predicciones sobre el comportamiento en servicio de estructuras bicapa de naturaleza diversa. En particular, se pretende elaborar mapas para la predicción del primer modo de daño interfacial, así como diagramas de diseño que permitan la selección de los sistemas más adecuados para cada aplicación.

Para determinar si en un sistema bicapa dado se iniciará en primer lugar un modo de daño interfacial frágil o uno dúctil es conveniente dividir las expresiones (5.12b) y (5.12c) por (5.12a), lo que conduce a

$$\frac{P_Y^c}{P_R^c} = \frac{Y_c \bar{\sigma}_1^c}{\sigma_F^c \bar{\sigma}_{13}^c} \quad (5.32)$$

$$\frac{P_Y^s}{P_R^c} = \frac{Y_s \bar{\sigma}_1^c}{\sigma_F^c \bar{\sigma}_{13}^s}$$

para cualquier espesor  $d$ . Las magnitudes  $P_Y^c/P_R^c$  y  $P_Y^s/P_R^c$  pueden considerarse

se como índices de fragilidad para cada sistema bicapa (i.e para cada valor de  $E_c/E_s$ ). Efectivamente, si ambas razones son mayores que 1 la respuesta del sistema es frágil, mientras que si alguna es menor que 1 la respuesta es dúctil. En este contexto, las razones  $Y_c/\sigma_F^c$  y  $Y_s/\sigma_F^c$  (o  $H_c/\sigma_F^c$  y  $H_c/\sigma_F^c$ ) son relevantes para determinar la fragilidad de un sistema con un determinado cociente de módulos elásticos. Estos parámetros juegan un papel análogo al de la razón  $H/T$  que se utiliza para determinar la fragilidad en materiales monolíticos<sup>[24,54]</sup>(sección 1.4.3). El hecho de que la tenacidad del material,  $T$ , se sustituya en este caso por la resistencia a fractura,  $\sigma_F^c$ , refleja simplemente la transición desde un estado tensional hertziano a otro de flexión.

Para discernir si en un bicapa dúctil la plasticidad se inicia primero en el recubrimiento o en el sustrato basta dividir las expresiones (5.12b) y (5.12c):

$$\frac{P_Y^c}{P_Y^s} = \frac{Y_c \bar{\sigma}_{13}^c}{Y_s \bar{\sigma}_{13}^s} \quad (5.33)$$

si  $P_Y^c/P_Y^s > 1$ , la plasticidad ocurre primero en el sustrato y, en caso contrario, en el recubrimiento.

En base a este análisis es posible trazar diagramas que permitan determinar el primer modo de daño interfacial en un sistema bicapa, si se conoce la razón de módulos elásticos,  $E_c/E_s$ , y las tensiones críticas ( $\sigma_F^c$ ,  $Y_c$  e  $Y_s$ ). En primer lugar, imponiendo las condiciones  $P_Y^c = P_R^c$  y  $P_Y^s = P_R^c$  en las ecuaciones (5.32) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{Y_c}{\sigma_F^c} &= \frac{\bar{\sigma}_{13}^c}{\bar{\sigma}_1^c} = F(E_c/E_s) \\ \frac{Y_s}{\sigma_F^c} &= \frac{\bar{\sigma}_{13}^s}{\bar{\sigma}_1^c} = F'(E_c/E_s) \end{aligned} \quad (5.34)$$

La representación gráfica de estas condiciones (Figura 5.36) es la frontera que separa las regiones en las que dominan las fisuras radiales de aquellas en las que predominan los modos dúctiles. En la Figura 5.36 se han incluido los valores correspondientes a sistemas bicapa reales (círculos), usando datos de la Tabla A.1. No se representa ningún bicapa con recubrimiento metálico, debido a la dificultad de estimar su resistencia a la fractura. En cualquier caso, estos sistemas tenderían a

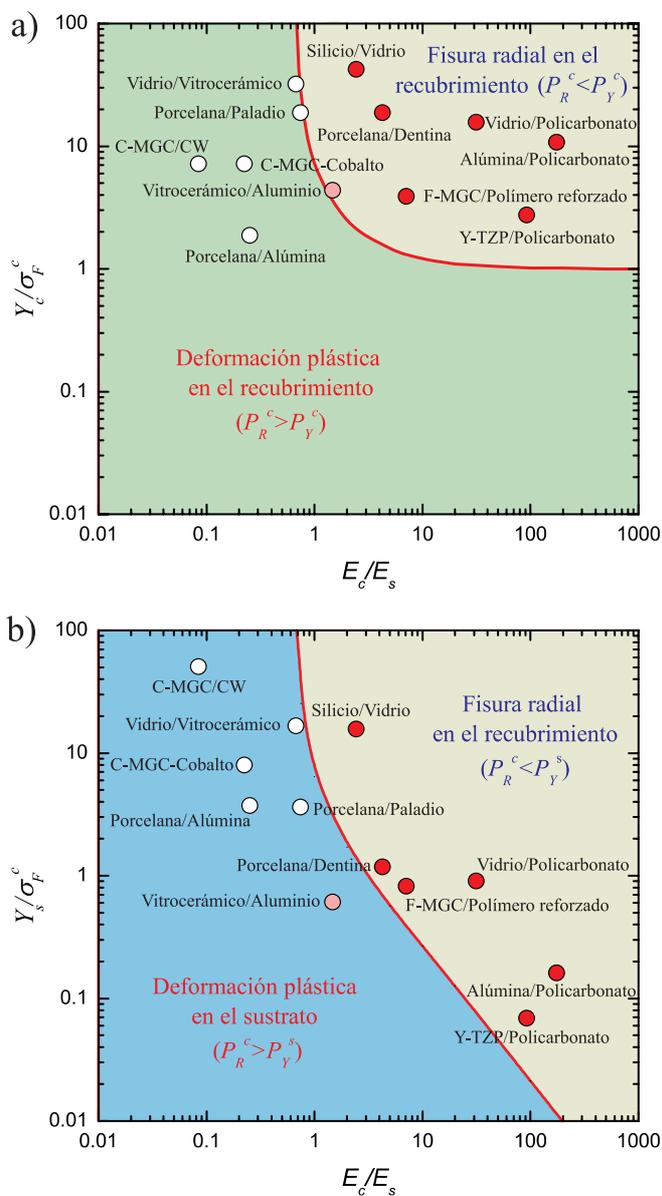


Figura 5.36: Mapas de predicción de primer modo de daño interfacial: a) fisuras radiales frente a deformación plástica en el recubrimiento y b) fisuras radiales frente a deformación plástica en el sustrato. Se han incluido las posiciones que ocuparían en cada diagrama determinados sistemas bicapa reales (puntos). (Diagramas calculados para  $\nu_c = 0.22$  y  $\nu_s = 0.30$ ).

quedar en la parte inferior de las gráficas. Puede apreciarse que las fisuras radiales están excluidas como primer modo de daño interfacial\* en sistemas con sustratos relativamente rígidos, i.e. para  $E_c/E_s \lesssim 1$  (recordar la transición de tracción a compresión que sufre la tensión  $\sigma_1^c$ , Figura 5.19). Para  $E_c/E_s \gtrsim 1$ , se generarán fisuras radiales si las razones  $Y_c/\sigma_F^c$  y  $Y_s/\sigma_F^c$  son lo suficientemente elevadas, y su inicio es más probable conforme aumenta  $E_c/E_s$  y, en consecuencia, las tensiones de flexión en el recubrimiento (Figura 5.36b). Así mismo, conviene notar que si el material del recubrimiento es inherentemente dúctil, i.e. si  $Y_c/\sigma_F^c < 1$ , no se iniciarán fisuras radiales como primer modo de daño, independientemente de la razón de módulos elásticos del sistema. Esta afirmación refleja simplemente el hecho de que las tensiones de cizalladura son siempre superiores a las de tracción en sistemas bicapa bajo contacto ( $\sigma_{13}^c = \sigma_1^c - \sigma_3^c$  con  $\sigma_3^c < 0$ ).

En definitiva, para determinar si el primer modo de daño que tiene lugar en la interfase de un determinado sistema bicapa es frágil o dúctil, basta con conocer las propiedades de los materiales constituyentes y localizar su posición en los diagramas de la Figura 5.36. Por ejemplo, los sistemas representados en rojo en la Figura 5.36, al estar situados en ambos diagramas en la región de fisuras radiales, son sistemas frágiles. En el caso del sistema *vitrocerámico/aluminio* (en rosa), la fisuras radiales dominan sobre la deformación plástica del recubrimiento, pero no sobre la del sustrato; por tanto, el primer modo de daño interfacial en este tipo de sistemas sería este último. Sin embargo, resta por discernir qué tipo de daño dúctil sucede en primer lugar en los sistemas que no se sitúan dentro de la región de fisuras radiales en ninguno de los dos diagramas (puntos blancos). Para ello se representa la condición

$$\frac{Y_s}{Y_c} = \frac{\bar{\sigma}_{13}^s}{\bar{\sigma}_{13}^c} = F''(E_c/E_s) \quad (5.35)$$

como se muestra en la Figura 5.37. En los sistemas situados en la región superior (verde) la deformación plástica se inicia primero en el recubrimiento, mientras que en aquellos situados en la región inferior (azul) se produce primero en el sustrato. Conviene notar que, de nuevo, el daño en el recubrimiento se ve favorecido conforme aumenta la razón  $E_c/E_s$ , debido al incremento de las tensiones de flexión

---

\* Como ya se indicó en la sección 5.1.2, la deformación plástica del sustrato permite o incrementa la flexión del recubrimiento, actuando como precursor del inicio de fisuras radiales, como modo de daño secundario.

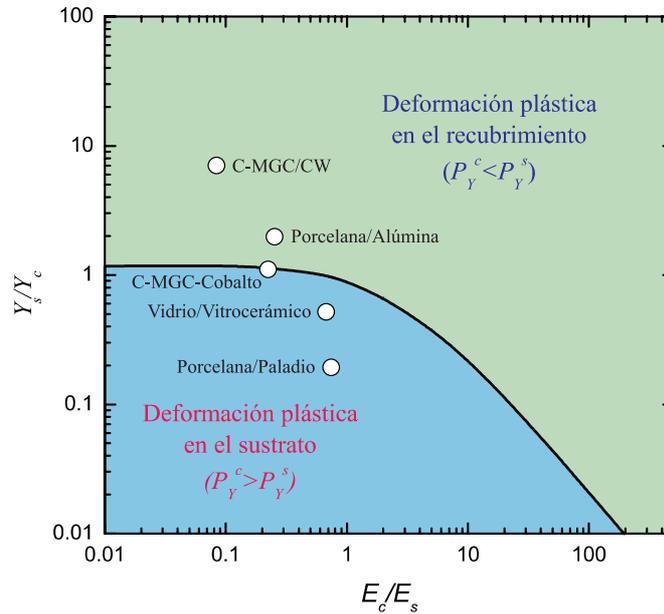


Figura 5.37: Mapas de predicción de primer modo de daño interfacial (cont.): deformación plástica en el recubrimiento frente a deformación plástica en el sustrato. Se han incluido las posiciones que ocuparían determinados sistemas bicapa reales (puntos). (Diagrama calculado para  $\nu_c = 0.22$  y  $\nu_s = 0.30$ ).

en el recubrimiento. En sistemas bicapa con sustratos rígidos ( $E_c/E_s \lesssim 1$ ) el diagrama de la Figura 5.37 es el único necesario para determinar el primer modo de daño interfacial, puesto que las fisuras radiales se inhiben por la ausencia de flexión en el recubrimiento. Generalmente, en estos casos, la deformación plástica se producirá primero en el material más blando (i.e. aquél con menor valor de  $Y$ ), ya que la separación entre ambos dominios se sitúa en  $Y_c/Y_s \approx 1$ . Sin embargo, la localización exacta de esta frontera puede variar ligeramente dependiendo de los coeficientes de Poisson, pudiendo favorecer la deformación en una u otra capa. De hecho, en la Figura 5.37 se observa que, para los coeficientes de Poisson escogidos, puede producirse deformación plástica en el sustrato antes que en el recubrimiento incluso en sistemas con valores de  $Y_c$  ligeramente inferiores a  $Y_s$ .

Una vez identificado el primer modo de daño interfacial, es posible utilizar las ecuaciones (5.12) para calcular la carga crítica a la que se iniciará este daño en la

estructura. Llegados a este punto, conviene notar que estas expresiones solamente son válidas para calcular las cargas críticas correspondientes al primer modo de daño. Efectivamente, una vez que éste se ha generado, se altera el campo de tensiones y las expresiones propuestas, calculadas suponiendo que el sistema es elástico, dejan de ser aplicables. Para estimar las cargas críticas a las que se producen modos de daño secundarios se precisa un análisis no lineal de las tensiones. Este análisis podría realizarse mediante FEM sin excesivas complicaciones\*, pero el número de variables involucradas hace inviable la búsqueda de expresiones semi-analíticas para las cargas críticas de modos de daño secundarios.

De cualquier forma conocer las cargas críticas correspondiente al primer modo de daño interfacial es muy importante para el diseño de sistemas bicapa duraderos. Efectivamente, aunque los sistemas multicapa exhiben cierta tolerancia al daño<sup>[107,110,129]</sup>, una vez que éste se ha iniciado, el que se produzca el fallo definitivo del sistema es sólo cuestión de tiempo. Esto es especialmente cierto en el caso de fisuras radiales que crecen y se multiplican fácilmente bajo solicitaciones posteriores; pero no lo es menos en los modos dúctiles que pueden facilitar la flexión del recubrimiento, con la subsiguiente aparición de fisuras radiales, o provocar la delaminación del sistema.

Con el objeto de prevenir el inicio de daño en estructuras bicapa, es útil establecer los rangos de espesores donde los modos de daño interfaciales dominan sobre los superficiales. Para ello basta con representar gráficamente la carga crítica del primer modo de daño interfacial\*\* ( $P_R^c$ ,  $P_Y^c$  o  $P_Y^s$ ) conjuntamente con la del modo superficial dominante (fisura cónica o deformación plástica\*\*\*) en función del espesor del recubrimiento,  $d$ . Este tipo de representaciones son en la práctica diagramas de diseño útiles para escoger el espesor más adecuado para optimizar el comportamiento de un determinado sistema en servicio. Además, también son de gran utilidad para seleccionar el sistema bicapa más adecuado para una determinada aplicación. En estos diagramas la carga crítica del modo interfacial dominante es siempre una línea recta de pendiente 2 (en escala logarítmica); recordar

---

\*De hecho, en esta Tesis Doctoral se han realizado múltiples simulaciones no lineales, donde los materiales pueden deformar plásticamente.

\*\*Calculadas a partir de las ecuaciones (5.12a), (5.12b) o (5.12c).

\*\*\*Conviene recordar que las fisuras circulares son generalmente un modo secundario, precedidas por fisuras radiales siempre que el estado superficial del recubrimiento sea similar en ambas superficies.

la dependencia cuadrática con el espesor, ecuación 5.10. Por su parte, las cargas críticas correspondientes a los modos superficiales son relativamente independientes del espesor  $d$  y, en primera aproximación, pueden suponerse constantes<sup>[111]</sup>. Así pues estas cargas aparecen en los diagramas como una línea horizontal que establece un límite superior para las funciones  $P_R^c(d)$ ,  $P_Y^c(d)$  o  $P_Y^s(d)$ . Un diagrama de este tipo se muestra como ejemplo en la Figura 5.38 para los sistemas bicapa: alúmina/polycarbonato y porcelana/aleación-Pd. Las propiedades de los materia-

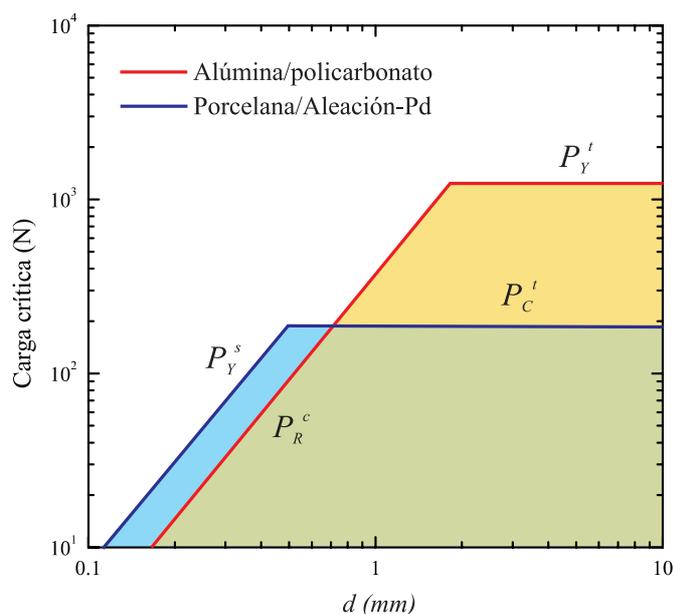


Figura 5.38: Diagrama de diseño para sistemas bicapa. Se muestran para cada espesor las cargas críticas de inicio del primer modo de daño, ya sea interfacial ( $P_R^c$ ,  $P_Y^s$ ) o superficial ( $P_C^t$ ,  $P_Y^t$ ), correspondientes a dos sistemas bicapa: alúmina/polycarbonato y porcelana/aleación-Pd. Se han sombreado las regiones de seguridad para cada sistema.

les constituyentes se encuentran recogidas en la Tabla A.1 y los valores de cargas críticas de los modos de daño superficiales se han tomado de la literatura<sup>[103,111]</sup> (y corresponden a un valor de  $R = 3.96 \text{ mm}^*$ ). Se han coloreado en el diagrama las regiones donde cada uno de estos dos sistemas pueden operar con seguridad.

\* Conviene recordar que los modos de daño superficiales están determinados por las tensiones cercanas al contacto y dependen, por tanto, de su geometría.

A partir de estos resultados es fácil concluir, por ejemplo, que el sistema alúmina/policarbonato es especialmente resistente cuando el espesor del recubrimiento es grande, pero que se ve superado en prestaciones por el porcelana/aleación-Pd cuando se trata de espesores de recubrimiento reducidos. Este ejemplo ilustra la utilidad de este tipo de representaciones a la hora de diseñar y optimizar una estructura bicapa para una determinada aplicación. Como ya se ha mencionado, otra utilidad práctica de este tipo de diagramas es que permiten seleccionar el espesor más adecuado para una cierta aplicación. Por ejemplo, en coronas dentales, el sistema porcelana/aleación-Pd debe soportar cargas de hasta 100 N, por lo que el espesor del recubrimiento de porcelana debe ser al menos de 350-400  $\mu\text{m}$  para evitar la deformación plástica de la aleación de paladio (Figura 5.38) y, con ella, la subsiguiente degradación de la estructura. La importancia de este tipo de predicciones es evidente en numerosas aplicaciones industriales y pone de manifiesto la utilidad práctica del análisis realizado en este trabajo.



## Capítulo 6

# Resultados y Discusión: II. Tricapas

En este capítulo se analizan los resultados relativos a sistemas tricapa, siguiendo un esquema similar al utilizado en el capítulo precedente. En primer lugar se revisan los modos de daño por contacto que se generan en estos sistemas, justificándolos en base al campo de tensiones calculado mediante simulación numérica (FEM). A continuación se analiza la dependencia del campo de tensiones con parámetros tales como los espesores de las capas y las propiedades mecánicas de los materiales constituyentes, lo que permitirá proponer relaciones semiempíricas para las tensiones principales. A partir de estas relaciones se establecen las bases para la predicción de cargas críticas, y se comparan estas predicciones con las cargas críticas experimentales y los resultados FEM. Finalmente se discuten algunos aspectos relativos al diseño y optimización de estructuras tricapa.

## 6.1. Modos de daño en estructuras tricapa

Al igual que en estructuras bicapa, se han investigado los modos de daño que se generan en estructuras tricapa utilizando de forma combinada ensayos Hertz y simulaciones FEM. Seguidamente se analizan estos modos de daño agrupándolos en dos categorías: modos frágiles y modos dúctiles

### 6.1.1. Modos frágiles

Para estudiar los modos de fractura que se desarrollan en estructuras tricapa se ha escogido el sistema prototipo vidrio/zafiro/policarbonato. Esta elección se basa en que los materiales constituyentes son transparentes y, por tanto, es posible observar *in situ* el desarrollo de los modos de fractura (sección 4.2.1). Además las propiedades mecánicas de este sistema son semejantes a las del sistema porcelana/alumina/dentina utilizado en restauraciones dentales, aplicación esta que, en cierta medida, ha motivado la ampliación de este estudio a sistemas tricapa. En particular, se utilizaron muestras tricapa constituidas por láminas de vidrio de 1 mm de espesor como capa superior, láminas de zafiro de 0.5 mm como capa intermedia y bloques de policarbonato de 12.5 mm de espesor como sustrato. Para analizar individualmente cada modo de daño, se erosionaron selectivamente determinadas superficies de las capas frágiles. En cada caso se observó *in situ* el inicio y posterior desarrollo de las fisuras durante los ensayos Hertz estáticos (ver sección 4.2). Posteriormente algunas muestras fueron cortadas transversalmente y pulidas para observar al microscopio la morfología en sección de las fisuras. A continuación se presentan los resultados de estas observaciones.

#### Observaciones *in situ*

En la Figura 6.1 se muestra una secuencia de micrografías *in situ* correspondientes a un ensayo Hertz realizado sobre una muestra con la superficie superior del vidrio erosionada. El área de contacto se distingue claramente en el centro de la

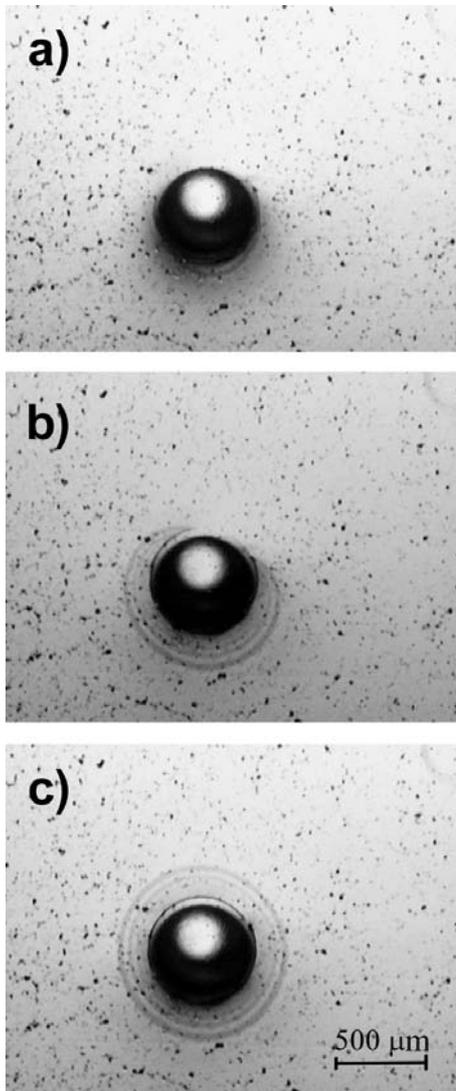


Figura 6.1: Secuencia in situ de la evolución de las fisuras en un sistema vidrio/zafiro/policarbonato con la superficie superior del vidrio erosionada: a)  $P = 348\text{N}$ , b)  $P = 370\text{N}$  y c)  $P = 393\text{N}$ . Se observa el desarrollo de una fisura cónica en el vidrio.

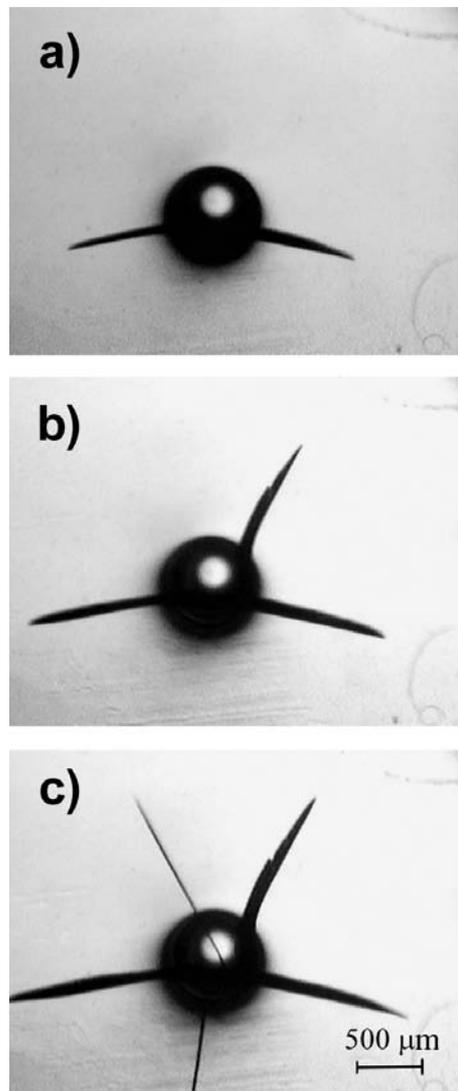


Figura 6.2: Secuencia in situ de la evolución de las fisuras en un sistema vidrio/zafiro/policarbonato con la superficie inferior del vidrio erosionada: a)  $P = 675\text{N}$ , b)  $P = 724\text{N}$  y c)  $P = 766\text{N}$ . Se observa el desarrollo de fisuras radiales en el vidrio.

imagen como una región oscura con una zona interior iluminada; también se aprecian los defectos introducidos durante la erosión. La secuencia muestra una fisura anillo que se inicia a una carga  $P = 348$  N en la superficie erosionada, justo en el exterior de la zona de contacto (Figura 6.1a). Esta fisura se propaga en superficie y hacia el interior del vidrio (Figura 6.1b) hasta adoptar la forma típica de una fisura cónica (Figura 6.1c), similar a las observadas en materiales monolíticos y en bicapas (cf. Figura 5.2a). El inicio de fisuras cónicas se produce gradualmente, sin que se observe caída alguna en la carga aplicada, i.e. se trata de fisuras estables.

Cuando se erosiona la superficie inferior del vidrio el modo de fractura generado es radicalmente distinto. En efecto, en la Figura 6.2 se observa la aparición de fisuras radiales en la superficie inferior del vidrio (ver subsección *Perfiles de fisura*). El inicio de fisuras radiales se produce de forma abrupta, con una caída apreciable de la carga aplicada y acompañada de emisión acústica. Al igual que en sistemas bicapa (cf. Figura 5.4), las fisuras radiales se desarrollan en planos centrales y, al aumentar la carga, crecen establemente en direcciones radiales a la vez que aparecen nuevas fisuras, bisectando los ángulos formados por las ya existentes.

Finalmente, si la superficie erosionada es la superficie inferior de la capa intermedia de zafiro, se observa de nuevo la aparición de fisuras radiales (Figura 6.3), pero, en este caso, localizadas en el zafiro y de mayor longitud (ver subsección *Per-*

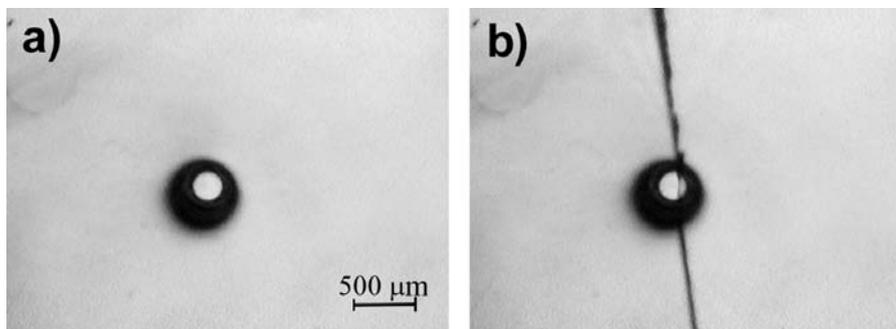


Figura 6.3: Secuencia in situ de la evolución de las fisuras en un sistema vidrio/zafiro/polycarbonato con la superficie inferior del zafiro erosionada. Ambos fotogramas son consecutivos y corresponden a una carga de aproximadamente 435 N.

*files de fisura*). El inicio de estas fisuras conlleva también una fuerte caída de la carga con emisión acústica.

Evidentemente, cuando se erosionan dos superficies de forma simultánea el modo de daño observado es el de menor carga crítica (p. ej. fisuras cónicas en muestras con ambas superficies del vidrio erosionadas). Conviene señalar que no se ha observado la generación de fisuras circulares externas como las observadas en sistemas bicapa (cf. Figura 5.6) en ninguna de las muestras ensayadas.

### Perfiles de fisura

Las observaciones microscópicas en sección, realizadas siguiendo el procedimiento descrito en la sección 4.2.1, permiten precisar la localización y morfología de las fisuras. La Figura 6.4 muestra la sección de un tricapa vidrio/zafiro/policarbonato con la superficie superior del vidrio erosionada, en la que se observa una fisura cónica que parte de la superficie externa del vidrio y penetra aproximadamente unas  $200\ \mu\text{m}$  en esta capa. La carga máxima aplicada en este ensayo,  $700\ \text{N}$ , es muy superior a la carga crítica correspondiente,  $P_C = 336 \pm 30\ \text{N}$ , para provocar el crecimiento de la fisura y facilitar así su observación. Como su-

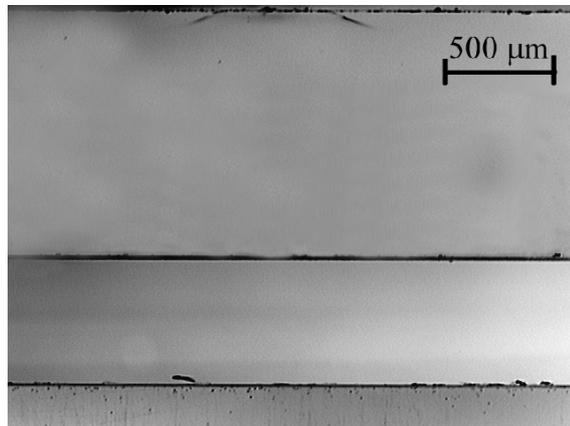


Figura 6.4: Micrografía de una fisura cónica en el vidrio de una muestra tricapa vidrio/zafiro/policarbonato con la superficie superior del vidrio erosionada (sección transversal).

cede en sistemas bicapa, la configuración de la fisura es similar a la observada en materiales monolíticos frágiles (sección 1.4.1).

El análisis post-ensayo de las muestras con la superficie inferior del vidrio erosionada muestra que las fisuras radiales que se generan están localizadas en este material (Figura 6.5). Efectivamente, estas fisuras nacen en la superficie inferior del

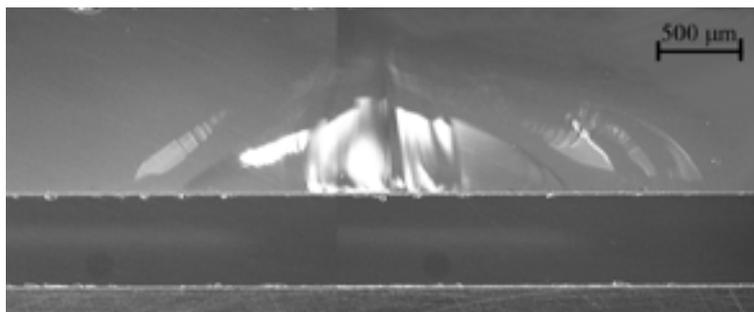


Figura 6.5: Composición de micrografías de una fisura radial en el vidrio de una muestra tricapa vidrio/zafiro/policarbonato con la superficie inferior del vidrio erosionada (sección transversal).

vidrio y se propagan radialmente y hacia la superficie superior de la muestra. Sin embargo, para el rango de cargas aplicadas, estas fisuras no afloran a la superficie superior de la muestra, quedando por tanto confinadas en una región subsuperficial. La carga máxima aplicada en el ensayo correspondiente a la Figura 6.5 fue de 800 N, es decir, 150 N superior a la carga crítica, para provocar, de nuevo, el crecimiento de la fisura y facilitar así su observación.

Finalmente, en las muestras con la superficie inferior del zafiro erosionada las fisuras radiales están localizadas en el zafiro (Figura 6.6). Como puede apreciarse, esta fisura es morfológicamente similar a la observada en el vidrio. En esta ocasión, la fisura nace en la superficie inferior del zafiro y crece radial y verticalmente, sin llegar a penetrar en el vidrio. Puede observarse claramente (Figuras 6.5 y 6.6) que las fisuras radiales en el zafiro tienen una longitud superior a las del vidrio, como se aprecia en las observaciones *in situ* (Figuras 6.2 y 6.3). Por ello, el ensayo correspondiente a la Figura 6.6 se detuvo tras la aparición de la fisura a  $P = 430$  N, para evitar así un mayor deterioro de la muestra.

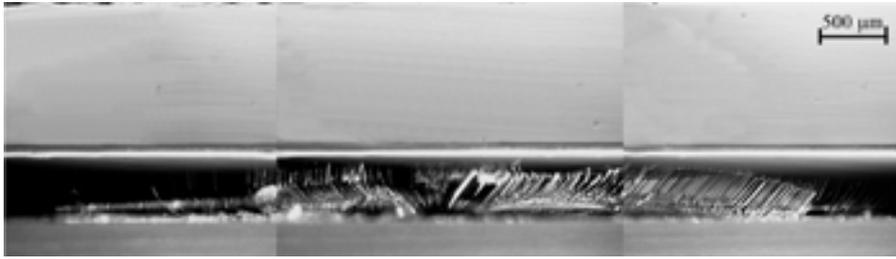


Figura 6.6: Composición de micrografías de una fisura radial en el zafiro de una muestra tricapa vidrio/zafiro/policarbonato con la superficie inferior del zafiro erosionada (sección transversal).

### Justificación del daño observado en base al campo de tensiones

Una vez descritos los modos de daño observados experimentalmente, seguidamente se aborda su justificación a partir del campo de tensiones generado durante el ensayo. Con este fin se ha simulado el contacto hertziano en el sistema vidrio/zafiro/policarbonato mediante FEM, utilizando el modelo descrito en la sección 4.3. En la Figura 6.7 se muestran los contornos correspondientes a la tensión principal máxima  $\sigma_1$  para este sistema. En el vidrio se observa claramente que las tensiones de tracción se localizan justo en el exterior de la zona de contacto (región ampliada de la Figura 6.7), siendo estas tensiones las responsables del inicio de las

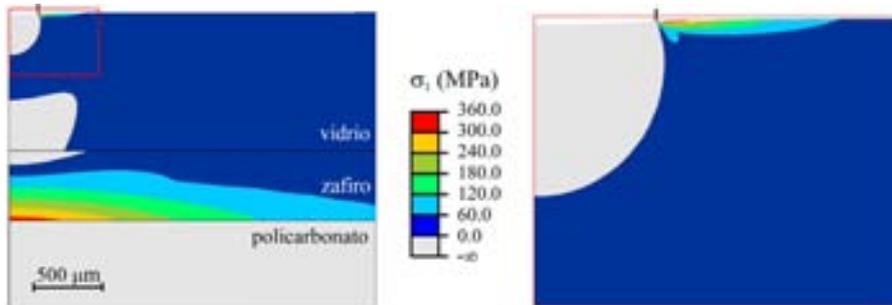


Figura 6.7: Contornos de la tensión principal máxima,  $\sigma_1$ , en el sistema vidrio/zafiro/policarbonato para una carga  $P = 300$  N. Se muestra ampliada la región de contacto ( $a = 216$   $\mu\text{m}$ ).

fisuras cónicas. Por el contrario, no se generan tensiones de tracción ni cerca de la superficie inferior ni en la superficie externa en regiones alejadas del contacto (cf. Figuras 5.3 y 5.7). Este hecho sugiere que el vidrio no está sometido a flexión, debido con toda seguridad al soporte que proporciona la capa rígida de zafiro. Por consiguiente en el vidrio no podrían generarse fisuras radiales ni circulares (sección 5.1). Efectivamente, la Figura 6.8, que muestra los contornos correspondientes a la tensión principal  $\sigma_2$  responsable del inicio de las fisuras radiales, corrobora la ausencia de tensiones de tracción en el vidrio y, por tanto, la imposibilidad de que se desarrollen fisuras radiales en esta capa. En cambio, cerca de la superficie

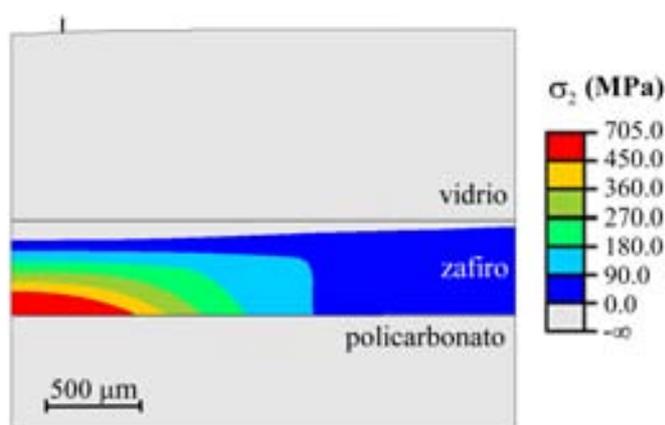


Figura 6.8: Contornos de la tensión principal  $\sigma_2$ , responsable de la aparición de fisuras radiales, en el sistema vidrio/zafiro/policarbonato para una carga  $P = 660\text{ N}$ . Se indica el radio del contacto ( $a = 282\ \mu\text{m}$ ).

inferior del zafiro se desarrollan fuertes tensiones de tracción, sugiriendo que esta capa sí flexiona debido a la deformación del sustrato. Obviamente, esta flexión es la responsable de la aparición de fisuras radiales en el zafiro.

Estos resultados no permiten justificar la aparición de fisuras radiales en la capa de vidrio (cf. Figuras 6.2 y 6.5), sugiriendo que algún elemento presente en los ensayos experimentales no ha sido incorporado en la simulación. Inmediatamente se planteó la hipótesis de que la fina capa de adhesivo epoxy usada para unir las capas (y que puede apreciarse en las Figuras 6.4-6.6) podría ser responsable de esta paradoja. Para verificarlo, se simuló de nuevo el sistema pero incorporando en esta

ocasión la capa de adhesivo epoxy. Para ello fue necesario caracterizar previamente el adhesivo (ver sección A.4), así como determinar el espesor promedio de esta capa. En la Figura 6.9 se muestran los contornos correspondientes a la tensión principal  $\sigma_2$  obtenidos a partir de la simulación del sistema vidrio/zafiro/policarbonato con una capa de adhesivo de  $15 \mu\text{m}$  de espesor entre el vidrio y el zafiro. Comparando

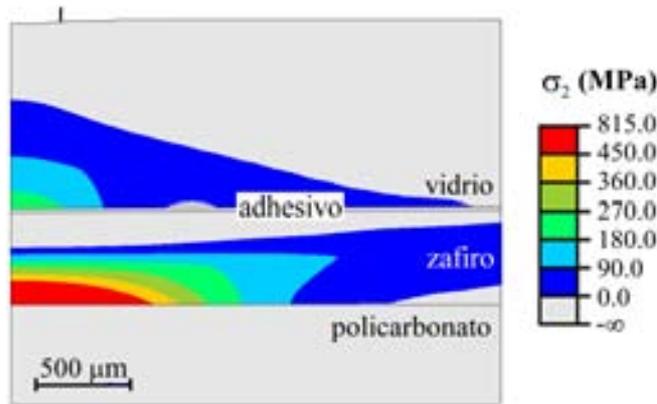


Figura 6.9: Contornos de la tensión principal  $\sigma_2$ , responsable de la aparición de fisuras radiales, en el sistema vidrio/adhesivo/zafiro/policarbonato para una carga  $P = 660 \text{ N}$ . Se indica el radio del contacto ( $a = 275 \mu\text{m}$ ).

las Figuras 6.8 y 6.9 se observa que la capa de adhesivo tiene escasa repercusión sobre las tensiones en el zafiro, pero modifica sustancialmente las del vidrio. En particular, se aprecia la aparición de una región de tensiones de tracción en dicha capa, cerca de la interfase con el adhesivo. Estas tensiones de tracción explicarían la generación de fisuras radiales en el vidrio cuando su superficie inferior está erosionada (Figuras 6.2 y 6.5). El origen de estas tensiones de tracción estriba en que la deformación de la capa blanda de adhesivo provoca la flexión del vidrio, del mismo modo que la deformación del policarbonato produce la flexión del zafiro. Resulta a todas luces sorprendente que la introducción de una capa de adhesivo de tan sólo  $15 \mu\text{m}$  provoque un cambio tan notable en el campo de tensiones y, por ello, en el comportamiento mecánico del sistema multicapa. Este resultado sugiere que parámetros como el espesor de adhesivo y, por supuesto, sus propiedades mecánicas son determinantes para predecir el comportamiento mecánico en condiciones de servicio de sistemas multicapa unidos mediante adhesivo. Este aspecto no ha sido contemplado hasta la fecha en la literatura científica sobre el tema,

probablemente como consecuencia de presuponer, erróneamente, que el papel del adhesivo es irrelevante debido a su reducido espesor.

Otra consecuencia inmediata de estos resultados es que, en ausencia de adhesivo, la introducción de una capa intermedia rígida inhibe el inicio de fisuras radiales en la capa externa. Este hecho tiene gran interés práctico, especialmente cuando la capa externa debe satisfacer una función específica y, por ello, es insustituible. Este es el caso de las estructuras utilizadas en restauraciones dentales, donde la capa externa cumple una función estética y su elección está limitada casi exclusivamente a porcelanas. Por ello, actualmente las coronas dentales se fabrican introduciendo una capa intermedia rígida que actúa de soporte. Sin embargo, los resultados de este estudio sugieren que la introducción de una capa intermedia rígida no elimina la posibilidad de fractura radial en el sistema, sino que tan sólo restringe su aparición a la capa intermedia. Por ello, en lugar de intentar mejorar las propiedades de la capa externa, práctica habitual en restauraciones dentales, el objetivo principal debería ser la optimización de la capa intermedia.

Una situación totalmente distinta se produce cuando la capa intermedia es menos rígida que la externa. En estos casos se produce flexión en ambas capas, incluso en ausencia de adhesivo, como se aprecia en la Figura 6.10, que muestra los

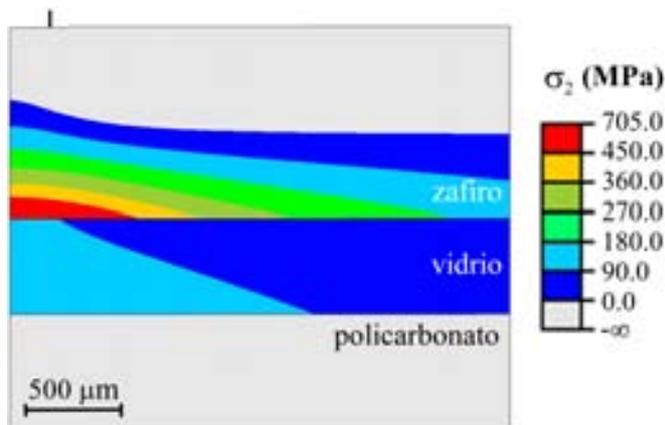


Figura 6.10: Contornos de la tensión principal  $\sigma_2$ , responsable de la aparición de fisuras radiales, en un sistema zafiro(1 mm)/vidrio(0.5 mm)/policarbonato para una carga  $P = 660$  N. Se indica el radio del contacto.

contornos de la tensión  $\sigma_2$  en un sistema zafiro/vidrio/policarbonato. Por tanto, los tricapas con gradiente de módulos elásticos son susceptibles a la generación de fisuras radiales en cualquiera de sus capas frágiles.

Conviene notar que las mayores tensiones de flexión se localizan generalmente en la capa más rígida que (cf. Figuras 6.9 y 6.10), por consiguiente, es más propensa a sufrir daño en primer lugar. Efectivamente, en los ensayos correspondientes al sistema vidrio/zafiro/policarbonato se aprecia que la carga crítica de inicio de fractura radial en zafiro es inferior a la del vidrio, a pesar de que la resistencia a fractura del vidrio es cinco veces inferior a la del zafiro (Tabla A.1).

Finalmente, las simulaciones FEM sugieren que si la capa externa esta sometida a flexión podrían generarse fisuras circulares, al igual que en bicapas. En efecto, en la Figura 6.11, correspondiente a la tensión  $\sigma_1$  en el sistema zafiro/vidrio/policarbonato, se observa una región de tensiones de tracción cerca de la superficie externa, pero alejada del contacto (cf. Figura 6.7). Al igual que en

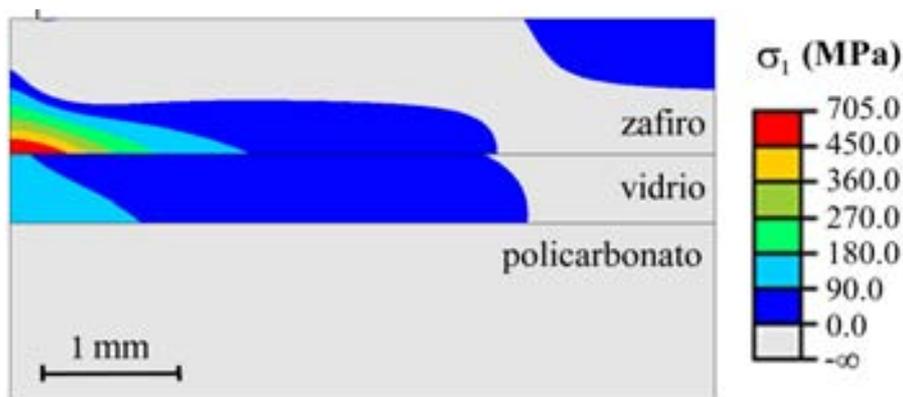


Figura 6.11: Contornos de la tensión principal  $\sigma_1$ , responsable de la aparición de fisuras cónicas y circulares, en un sistema zafiro(1 mm)/vidrio(0.5 mm)/policarbonato para una carga  $P = 660$  N. Se indica el radio del contacto.

bicapas, la intensidad de estas tensiones es muy pequeña en comparación con las que se generan en cerca de la superficie inferior del recubrimiento, por lo que las fisuras circulares serían también un modo de daño secundario en tricapas.

En resumen, las observaciones mediante microscopía óptica y las simulaciones mediante elementos finitos han permitido identificar cuatro modos de fractura en sistemas tricapa: fisuras cónicas, fisuras circulares y fisuras radiales en la capa externa, y fisuras radiales en la capa intermedia. La principal diferencia con respecto a sistemas bicapa es que en tricapas las fisuras radiales se generan tanto en la capa externa como en la capa intermedia.

### 6.1.2. Modos dúctiles

La observación experimental del inicio y evolución de los modos de daño dúctiles es extraordinariamente compleja. Por ello, es aconsejable abordar el estudio del daño en sistemas con capas dúctiles (p. ej. metálicas) mediante simulación numérica. El objetivo de esta sección es identificar las posibles localizaciones donde puede iniciarse algún tipo de deformación irreversible, ya sea plástica o *cuasi-plástica*. Para ello, basta con analizar los contornos correspondientes a las tensiones de cizalladura. En la Figura 6.12 se muestran las tensiones de von Mises,  $\sigma_{13}$ , que se generan en un hipotético sistema dúctil cuyas propiedades elásticas son idénticas a las del sistema zafiro/vidrio/policarbonato. Se aprecian cinco máximos locales de la tensión  $\sigma_{13}$ , todos ellos situados en el eje de carga, más concretamente en:

1. La capa externa en regiones subsuperficiales próximas al contacto, como sucede en materiales monolíticos y en bicapas.
2. La superficie inferior de la capa externa, debido a la flexión de esta capa sobre las subyacentes.
3. La superficie superior de la capa intermedia. Este máximo es consecuencia de la presión que la capa externa ejerce sobre la capa intermedia.
4. La superficie inferior de la capa intermedia, debido a la flexión de esta capa sobre el sustrato.
5. La superficie superior del sustrato, por efecto de la presión que ejercen sobre él las capas que sustenta.

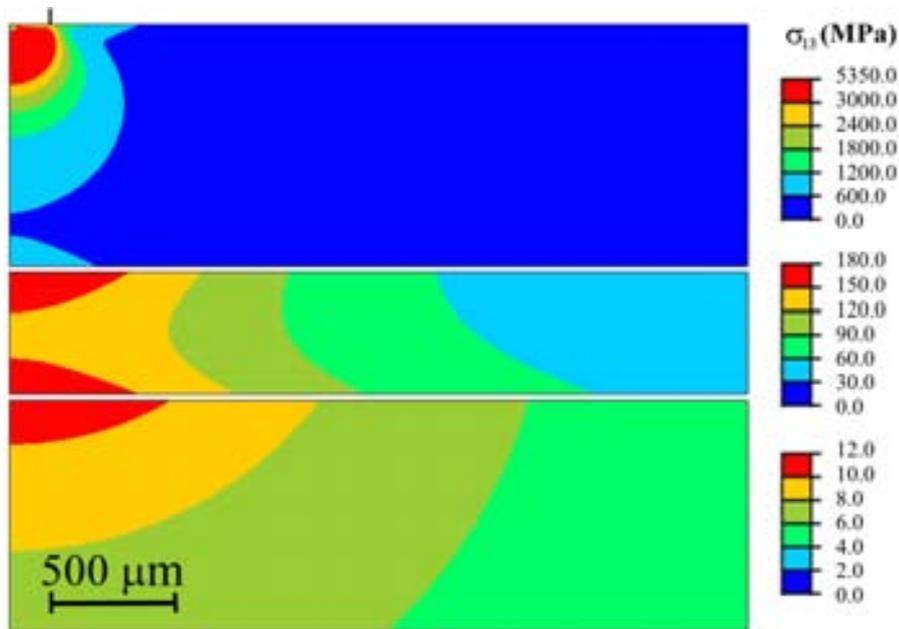


Figura 6.12: Contornos de la tensión de von Mises  $\sigma_{13}$ , responsable del inicio de los modos de daño dúctiles, en un hipotético sistema dúctil cuyas propiedades elásticas son idénticas a las del zafiro/vidrio/policarbonato para una carga  $P = 660 \text{ N}$ . Se han utilizado códigos de colores diferentes en cada capa a fin de identificar con claridad los máximos locales. El radio del contacto se indica por una marca vertical.

Evidentemente, las cinco regiones mencionadas identifican los cinco tipos de daño dúctil que pueden producirse en sistemas tricapa. La localización del primer modo de daño dúctil dependerá de la intensidad relativa de estos cinco máximos locales, así como de las tensiones de límite elástico de los materiales. A su vez, las intensidades relativas de estos máximos dependerán de los espesores y módulos elásticos de cada capa. Conviene además precisar que, bajo determinadas condiciones, algunos de estos máximos pueden desaparecer, eliminándose la posibilidad de que se inicie el correspondiente modo de daño. Este es el caso de los máximos situados cerca de la superficie inferior de las dos capas superiores cuando las capas que las sustentan son más rígidas, ya que, de este modo, se inhibe su flexión.

Según lo expuesto, los modos de daño (frágiles y dúctiles) que se generan en

estructuras tricapa (Figura 6.13) también se pueden clasificar atendiendo a su localización en:

- *Modos superficiales*, localizados en regiones próximas a la superficie externa. En este grupo se incluyen las fisuras cónicas y circulares, así como el modo dúctil típico del contacto hertziano.
- *Modos interfaciales o/i*, localizados en las proximidades de la interfase entre la capa externa (*o*) y la intermedia (*i*). Los dos modos dúctiles adyacentes a esta interfase y las fisuras radiales en la capa externa pertenecen a este grupo.
- *Modos interfaciales i/s*, localizados en las proximidades de la interfase entre la capa interna (*i*) y el sustrato (*s*). Pertenecen a este grupo las fisuras radiales en la capa intermedia, así como los modos dúctiles en la superficie inferior de esta capa y en la superior del sustrato. En realidad, los modos de daño en estructuras tricapa son análogos a los observados en bicapas (cf. Figura 5.1), con la salvedad de que, al existir una capa adicional, el número de posibles localizaciones para el inicio del daño aumenta.

Al igual que en sistemas bicapa, los modos de daño superficiales pueden relegarse a un segundo plano. Efectivamente, como ya se ha mencionado, las fisuras circulares son un modo de daño secundario, ya que generalmente están precedidas por fisuras radiales. Por otro lado, tanto las fisuras cónicas como la deformación subsuperficial (generadas por tensiones de contacto propiamente dichas) pueden ser inhibidas utilizando impresores suficientemente blandos o de radio elevado. Por ello, en adelante el análisis se limitará a los modos de daño interfaciales. La importancia de determinar el inicio de cada modo de daño se ha puesto de relieve en el Capítulo 5: cualquiera de estos modos puede ser origen potencial del fallo de la estructura. En efecto, las fisuras radiales reducen drásticamente la resistencia a fractura del sistema; a su vez, el daño por deformación plástica, aunque puede considerarse relativamente inocuo a corto plazo, puede inducir la generación de fisuras radiales o la delaminación del sistema<sup>[111]</sup>. Por ello, el objetivo final consiste en la obtención de expresiones semianalíticas para las cargas críticas de inicio de estos modos de daño, en función de los espesores y las propiedades mecánicas de cada capa.

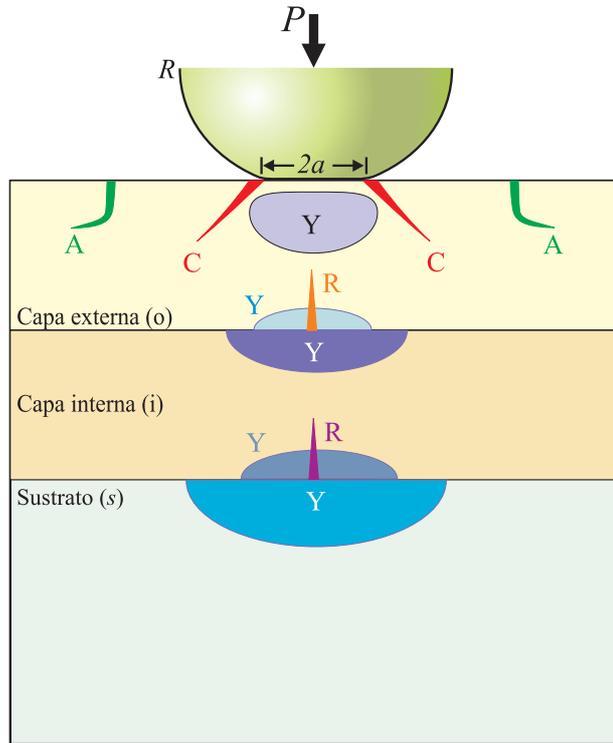


Figura 6.13: Modos de daño identificados en sistemas tricapa bajo contacto hertziano: fisuras cónicas (C), radiales (R) y circulares (A); y regiones de deformación plástica localizada (Y).

## 6.2. Análisis de tensiones y predicción de cargas críticas en sistemas tricapa

En esta sección se analizan las tensiones en las proximidades de las interfaces de sistemas tricapa bajo contacto, siguiendo el esquema utilizado en el Capítulo 5. En la actualidad no existen en la literatura expresiones analíticas para las tensiones en sistemas tricapa. Así pues, el objetivo principal de esta fase del estudio es la obtención de estas expresiones en función de los espesores y constantes elásticas de las capas, a partir de un análisis semiempírico de las tensiones basado en resultados FEM.

### 6.2.1. Análisis de tensiones en sistemas tricapa

Como ya se ha mencionado, los modos de daño en estructuras tricapa son análogos a los que se generan en sistemas bicapa, con la particularidad de que la capa intermedia es también susceptible al daño (ya sea frágil o dúctil). Aprovechando esta analogía, se pueden analizar los modos de daño en tricapas considerando el sistema como un *bicapa efectivo* en el que la capa intermedia forma parte del recubrimiento o del sustrato, dependiendo de la localización del daño (Figura 6.14). De esta forma, es posible extender a sistemas tricapa las relaciones derivadas para bicapas. Así, para modos de daño adyacentes a la interfase *o/i* el sistema puede ser considerado como un recubrimiento de espesor  $d^* = d_o$  y módulo  $E_c = E_o$  sobre un sustrato compuesto de módulo efectivo  $E_s^* = E_i f_s(E_s/E_i, d_o/d_i)$  (Figura 6.14). El sustrato efectivo ha de ser tal que se genere en la capa externa el mismo estado tensional que en el sistema tricapa real. Entonces, según la expresión (5.4), las tensiones interfaciales en el bicapa efectivo pueden expresarse como

$$\sigma^* = \frac{P}{d_o^2} \bar{\sigma}(E_o/E_s^*) \quad (6.1)$$

donde las tensiones normalizadas  $\bar{\sigma}$  son funcionalmente idénticas a las obtenidas en la sección 5.2 para sistemas bicapa. Análogamente, para el daño adyacente a la interfase *i/s*, el sistema tricapa puede ser considerado como un recubrimiento compuesto, de espesor  $d^* = d_o + d_i = d$  y módulo efectivo  $E_c^* = E_i f_c(E_o/E_i, d_o/d_i)$ , sobre un sustrato de módulo  $E_s$  (Figura 6.14). En este caso, el recubrimiento efectivo ha de ser tal que se generen en el sustrato las mismas tensiones que en el sistema tricapa real. De nuevo, haciendo uso de la expresión (5.4), las tensiones en la interfase del sistema bicapa efectivo vienen dadas por

$$\sigma^* = \frac{P}{d^2} \bar{\sigma}(E_c^*/E_s) \quad (6.2)$$

Lógicamente, según la definición de bicapa efectivo, las expresiones (6.1) y (6.2) permiten calcular directamente las tensiones en la capa externa (con un sustrato efectivo) o en el sustrato (con un recubrimiento efectivo), respectivamente. En cambio, no pueden ser utilizadas para evaluar directamente las tensiones en la capa interna, ya que ésta forma parte o bien del recubrimiento efectivo o del sustrato efectivo. Sin embargo, es inmediato determinar las tensiones reales en

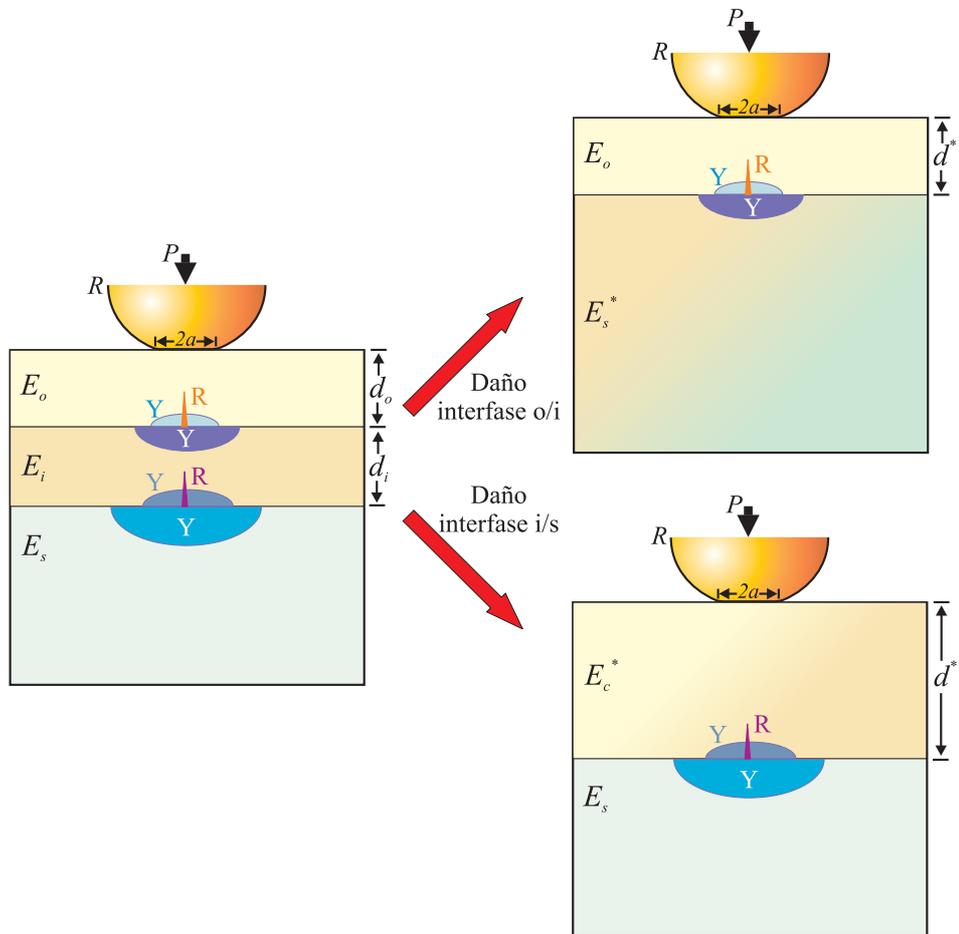


Figura 6.14: Modos de daño interfacial en un sistema tricapa formado por una capa externa de módulo  $E_o$  y espesor  $d_o$ , una capa interna de módulo  $E_i$  y espesor  $d_i$ , sobre un sustrato de módulo  $E_s$ . Se indica la forma en que los diferentes modos de daños pueden analizarse considerando sistemas bicapas efectivos en los que la capa intermedia forma parte del sustrato (Daño en la interfase o/i) o del recubrimiento (Daño en la interfase i/s).

la capa intermedia, imponiendo las condiciones de continuidad de las tensiones normales y de las deformaciones tangenciales en la interfase. Así, las tensiones en la interfase  $o/i$  del sistema tricapa real vienen dadas por

$$\sigma_1^o = \sigma_1^{c*} = \frac{P}{d_o^2} \bar{\sigma}_1^c(E_o/E_s^*) \quad (6.3a)$$

$$\sigma_3 = \sigma_3^* = \frac{P}{d_o^2} \bar{\sigma}_3(E_o/E_s^*) \quad (6.3b)$$

$$\sigma_{13}^o = \sigma_{13}^{c*} = \frac{P}{d_o^2} \bar{\sigma}_{13}^c(E_o/E_s^*) \quad (6.3c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{i\uparrow} &= \frac{E_i}{E_s^*} \sigma_1^{s*} - \sigma_3^* = \frac{E_i}{E_s^*} (\sigma_{13}^{s*} + \sigma_3^*) - \sigma_3^* = \\ &= \frac{P}{d_o^2} \left\{ \frac{E_i}{E_s^*} [\bar{\sigma}_{13}^s(E_o/E_s^*) + \bar{\sigma}_3(E_o/E_s^*)] - \bar{\sigma}_3(E_o/E_s^*) \right\} \end{aligned} \quad (6.3d)$$

donde el superíndice  $(o, i)$  indica la capa y el símbolo  $\uparrow$  en  $\sigma_{13}^{i\uparrow}$  indica que se trata del valor de esta tensión en la superficie superior de la capa  $i$ , al objeto de distinguirla del correspondiente valor en la superficie inferior,  $\sigma_{13}^{i\downarrow}$ . Las funciones  $\bar{\sigma}_1^c$ ,  $\bar{\sigma}_3$ ,  $\bar{\sigma}_{13}^c$  y  $\bar{\sigma}_{13}^s$  están definidas por las expresiones (5.6b), (5.6a), (5.6c) y (5.8), respectivamente, o por sus versiones simplificadas\* (5.9). Análogamente, las tensiones en la interfase  $i/s$  del sistema tricapa se expresan como:

$$\sigma_1^i = \frac{E_i}{E_c^*} \sigma_1^{c*} = \frac{P}{d^2} \frac{E_i}{E_c^*} \bar{\sigma}_1^c(E_c^*/E_s) \quad (6.4a)$$

$$\sigma_3 = \sigma_3^* = \frac{P}{d^2} \bar{\sigma}_3(E_c^*/E_s) \quad (6.4b)$$

$$\sigma_{13}^{i\downarrow} = \sigma_1^i - \sigma_3 = \frac{P}{d^2} \left\{ \frac{E_i}{E_c^*} \bar{\sigma}_1^c(E_c^*/E_s) - \bar{\sigma}_3(E_c^*/E_s) \right\} \quad (6.4c)$$

$$\sigma_{13}^s = \sigma_{13}^{s*} = \frac{P}{d^2} \bar{\sigma}_{13}^s(E_c^*/E_s) \quad (6.4d)$$

Evidentemente, para poder evaluar las tensiones reales en sistemas tricapa a partir de las expresiones (6.3) y (6.4), es necesario conocer los módulos elásticos efectivos

---

\*No se ha derivado expresión simplificada alguna para la ecuación (5.6a).

$E_s^*$  y  $E_c^*$ . Teniendo en cuenta las dependencias de estos módulos efectivos es posible escribir las expresiones (6.3) y (6.4) en forma compacta como

$$\sigma_{oi} = \frac{P}{d_o^2} \bar{\sigma}_{oi}(E_o/E_i, E_s/E_i, d_o/d_i) \quad (6.5a)$$

y

$$\sigma_{is} = \frac{P}{d^2} \bar{\sigma}_{is}(E_o/E_i, E_s/E_i, d_o/d_i), \quad (6.5b)$$

respectivamente.

De acuerdo con este análisis, la dependencia cuadrática de las tensiones con el espesor, típica de sistemas bicapa, se preserva en tricapas, al igual que la dependencia lineal con la carga aplicada. Por otro lado, la dependencia con los módulos elásticos es, como cabía esperar, sustancialmente más compleja en estructuras tricapa. La simplicidad y elegancia formal de este análisis lo hace enormemente atractivo para analizar el comportamiento bajo contacto de estructuras tricapa. Sin embargo, antes de profundizar en sus implicaciones, se hace necesario comprobar su validez mediante simulación FEM.

### 6.2.2. Validación del análisis mediante FEM

Utilizando el modelo descrito en la sección 4.3 se simuló contactos hertzianos sobre muestras tricapa (Figura 6.14), considerando un comportamiento elástico. En cada simulación se evaluaron los valores de las tensiones principales y de la tensión de von Mises. En la Figura 6.15 se muestran las distribuciones, según el eje de carga, de las tensiones  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  y  $\sigma_{13}$  en un contacto hertziano ( $R = 3.18$  mm) sobre un sistema tricapa genérico ( $E_o = 100$  GPa,  $\nu_o = 0.22$ ,  $E_i = 300$  GPa,  $\nu_i = 0.33$ ,  $E_s = 10$  GPa y  $\nu_s = 0.35$ ) de espesores  $d_o = d_i = 1$  mm. Al igual que en bicapas, el perfil de las tensiones es no lineal, especialmente en la capa externa. De nuevo, se aprecian las discontinuidades de las tensiones en las interfases salvo, evidentemente, en el caso de la tensión  $\sigma_3$ .

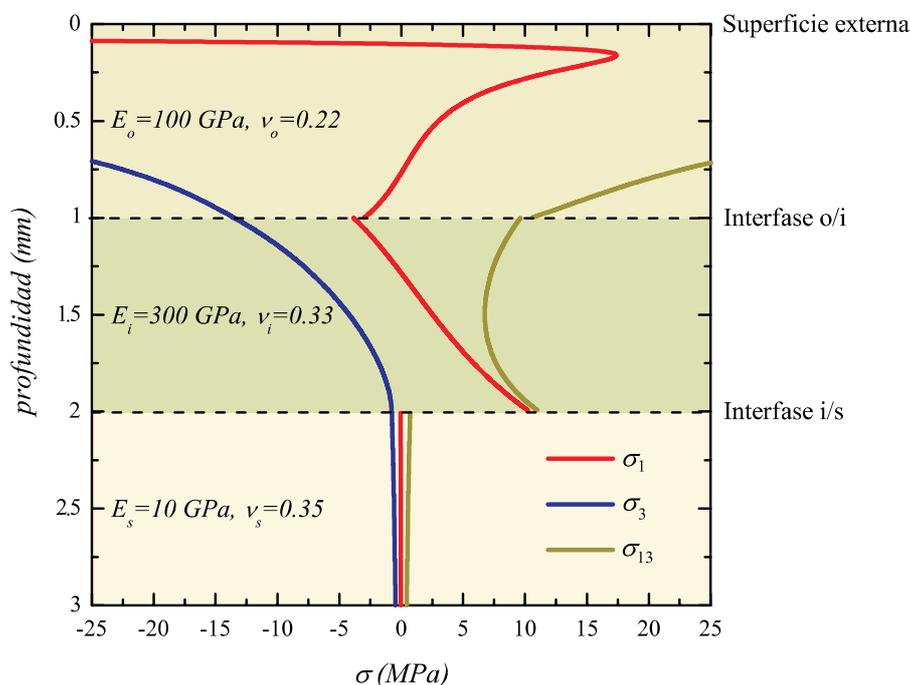


Figura 6.15: Distribución de tensiones en el eje de carga en sistemas tricapa bajo contacto, calculada mediante FEM para  $R = 3.18$  mm,  $P = 25$  N y  $d_o = d_i = 1$  mm. Las propiedades elásticas de cada capa se indican en la figura.

Para verificar la validez de las expresiones (6.5), en la Figura 6.16 se muestran las tensiones correspondientes a la interfase  $o/i$  en función de  $d_o^{-2}$  (Figura 6.16a), y las correspondientes a la interfase  $i/s$  en función de  $d^{-2}$  (Figura 6.16b). Los símbolos representan los resultados de las simulaciones FEM para una razón de espesores  $d_o/d_i = 1$ , y una carga de  $P = 25$  N, para el mismo sistema material que el de la Figura 6.15. Las líneas representan las rectas de mejor ajuste que pasan por el origen. Estos resultados confirman la dependencia cuadrática de las tensiones interfaciales con los espesores, aunque, para espesores pequeños, se observan ciertas desviaciones en las tensiones correspondientes a la interfase  $o/i$  (Figura 6.16a).

En la Figura 6.17 se representan, para el mismo sistema, a) los valores de la tensión  $\sigma_1^o$  frente a  $P/d_o^2$  y b) los valores de la tensión  $\sigma_1^i$  frente a  $P/d^2$ , calculados mediante FEM variando  $P$  para valores fijos de  $R/d$ . De nuevo, se observan des-

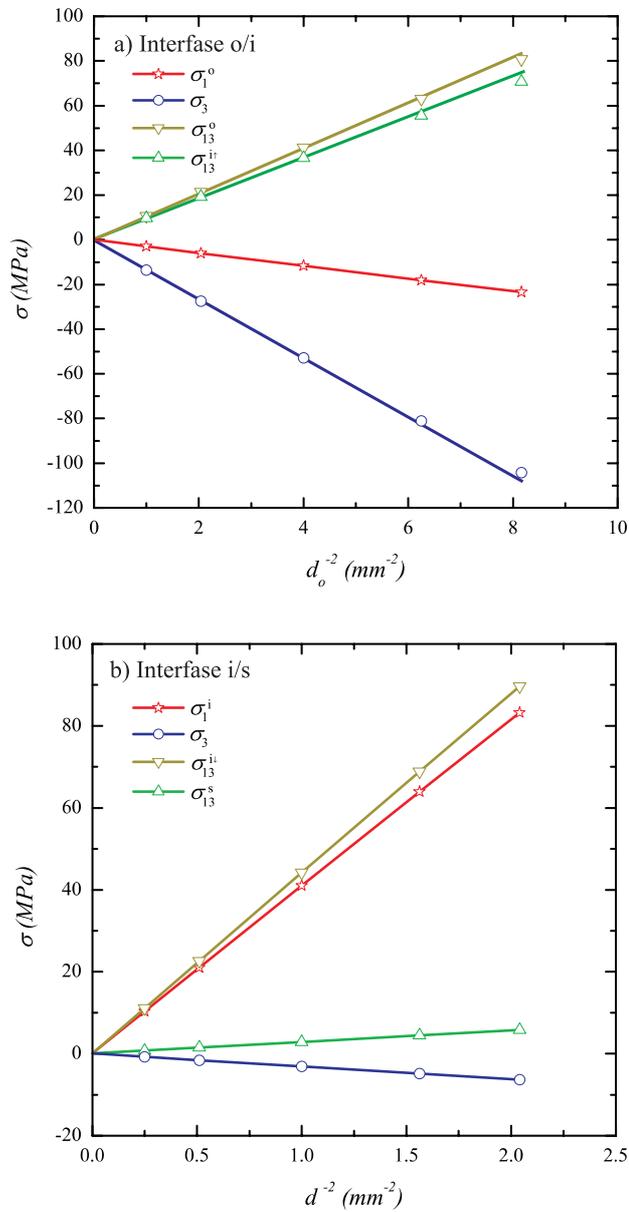


Figura 6.16: Tensiones  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  y  $\sigma_{13}$  en a) la interfase o/i en función de  $d_o^{-2}$ , y b) la interfase i/s en función de  $d^{-2}$ . Valores calculados mediante FEM (símbolos) para  $d_o/d_i = 1$ ,  $R = 3.18$  mm,  $P = 25$  N en el mismo sistema material que el de la Figura 6.15. Las líneas continuas representan las rectas de mejor ajuste a través del origen.

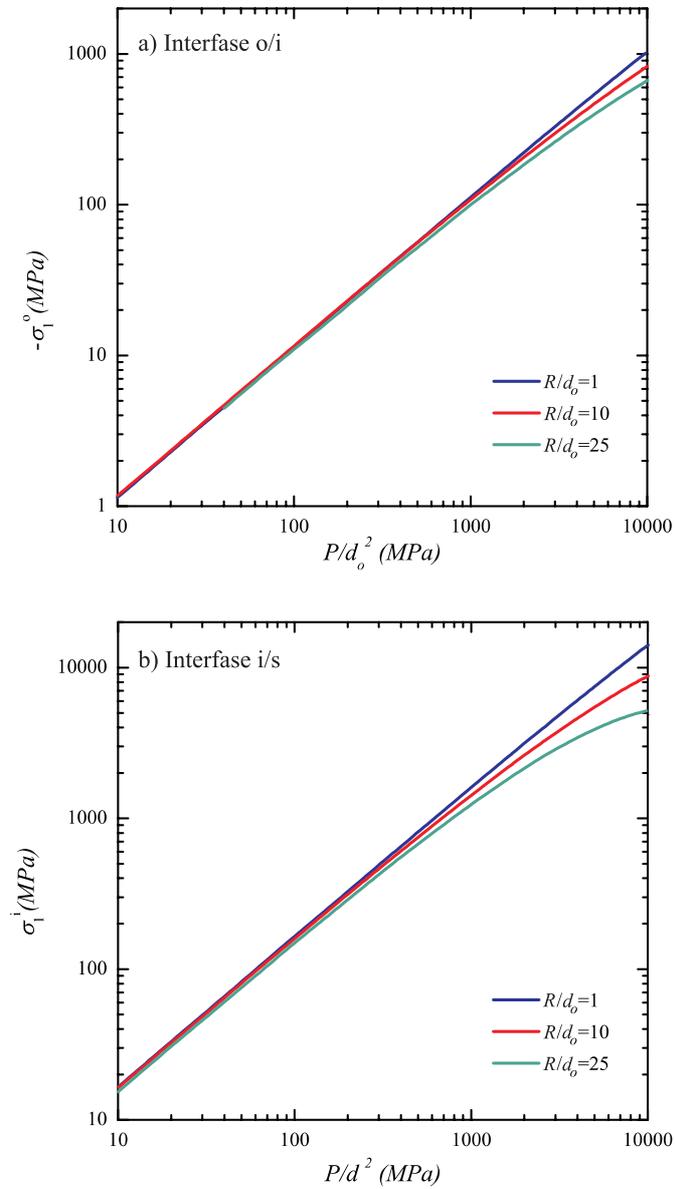


Figura 6.17: Resultados FEM correspondientes a las tensiones a)  $\sigma_1^o$  frente a  $P/d_o^2$ , y b)  $\sigma_1^i$  frente a  $P/d^2$ . Curvas calculadas variando  $P$  para valores fijos de  $R/d$  (indicados) en el mismo sistema material de la Figura 6.15.

viaciones de ambas tensiones respecto de la linealidad a cargas  $P$  elevadas, tanto más pronunciadas cuanto mayor sea el valor de la razón  $R/d$  (cf. Figura 5.18). La Figura 6.17 confirma la proporcionalidad entre tensiones y carga, al menos en el rango de cargas bajas. Resultados similares se obtienen para las restantes componentes del campo de tensiones.

Las Figuras 6.16 y 6.17 constituyen una validación numérica de las relaciones (6.5). Resta aún verificar que las tensiones normalizadas  $\bar{\sigma}$  pueden calcularse a partir de las relaciones (6.3) y (6.4).

En la Figura 6.18a se representan las tensiones normalizadas,  $\bar{\sigma} = \frac{\sigma d_o^2}{P}$ , correspondientes a la interfase  $o/i$  en función de  $E_o/E_i$ , para  $E_i = 300$  GPa y  $E_s = 10$  GPa ( $\nu_o = 0.22$ ,  $\nu_i = 0.30$ ,  $\nu_s = 0.30$ ) con  $d_o = d_i = 1$  mm, en la región lineal (i.e. a carga baja). Del mismo modo, en la Figura 6.18b se muestran las tensiones  $\bar{\sigma} = \frac{\sigma d_i^2}{P}$  correspondientes a la interfase  $i/s$  en función de  $E_i/E_s$ , para  $E_o = 100$  GPa y  $E_i = 300$  GPa ( $\nu_o = 0.22$ ,  $\nu_i = 0.22$ ,  $\nu_s = 0.30$ ), de nuevo con  $d_o = d_i = 1$  mm. En primer lugar, conviene notar la similitud de estos resultados con los correspondientes a sistemas bicapa (Figuras 5.19 y 5.20), lo que justifica, al menos cualitativamente, el considerar los sistemas tricapa como bicapas efectivos. En las Figuras 6.18 se han representado en trazo continuo las curvas obtenidas a partir de las expresiones (6.3) y (6.4), junto con (5.6) y (5.8)\*, utilizando como único parámetro de ajuste los correspondientes módulos elásticos efectivos ( $E_s^* = 12$  GPa y  $E_c^* = 213$  GPa). También se muestran los ajustes (en trazo discontinuo) obtenidos utilizando las expresiones simplificadas (5.9), en lugar de (5.6), para las tensiones normalizadas en los sistemas bicapa efectivos\*\*. Como puede apreciarse, en la Figura 6.18a el acuerdo entre los resultados FEM y las curvas calculadas a partir de las expresiones semianalíticas es pobre (salvo para la tensión  $\sigma_3$ ), aunque éstas reproducen cualitativamente las dependencias. El origen de estas discrepancias es múltiple: por un lado, el efecto de las tensiones hertzianas en la interfase  $o/i$  es importante; por otro lado, parece evidente a la vista de las curvas que determinados parámetros constantes en sistemas bicapa (Tabla 5.1) dejan de serlo cuando el sustrato está compuesto por dos capas. De hecho, ajustando libremente los valores de los parámetros de las expresiones (5.6), o (5.9), es posible obtener un buen ajuste en todo el rango de valores  $E_o/E_i$ .

\*Utilizando los valores de los parámetros incluidos en la Tabla 5.1.

\*\*Utilizando los valores de los parámetros incluidos en la Tabla 5.2.

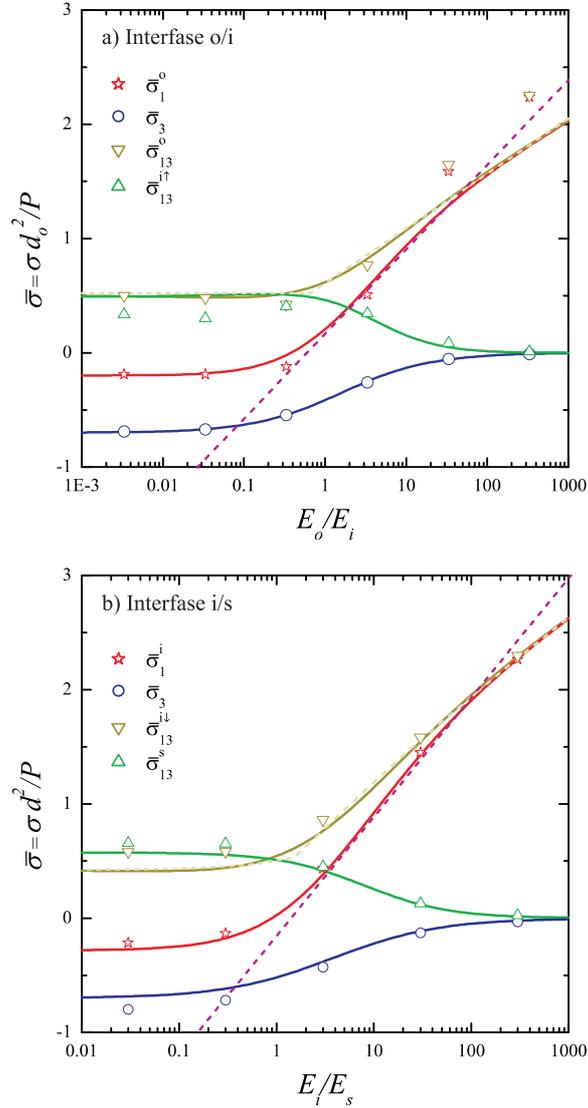


Figura 6.18: Tensiones normalizadas a)  $\bar{\sigma}_1^o$ ,  $\bar{\sigma}_3$ ,  $\bar{\sigma}_{13}^o$ ,  $\bar{\sigma}_{13}^{i\uparrow}$  frente a la razón  $E_o/E_i$  para  $E_i = 300$  GPa y  $E_s = 10$  GPa ( $\nu_o = 0.22$ ,  $\nu_i = 0.30$ ,  $\nu_s = 0.30$ ); y b)  $\bar{\sigma}_1^i$ ,  $\bar{\sigma}_3$ ,  $\bar{\sigma}_{13}^{i\downarrow}$ ,  $\bar{\sigma}_{13}^s$  frente a la razón  $E_i/E_s$  para  $E_o = 100$  GPa y  $E_i = 300$  GPa ( $\nu_o = 0.22$ ,  $\nu_i = 0.22$ ,  $\nu_s = 0.30$ ). Se muestran los resultados FEM (puntos) calculados para  $d_o = d_i = 1$  mm y las curvas (en trazo continuo) de mejor ajuste a las expresiones (6.3) y (6.4). Las líneas discontinuas corresponden a los mejores ajustes utilizando las expresiones simplificadas (5.9).

Todos estos efectos impiden la utilización de las expresiones (6.3) para calcular las tensiones en la interfase  $o/i$ , salvo que se evalúen de forma independiente las dependencias de los citados parámetros con  $E_s/E_i$  y  $d_o/d_i$ .

Por el contrario, para las tensiones en la interfase  $i/s$  (Figura 6.18b) se observa un buen acuerdo entre predicciones y resultados FEM, excepto para  $E_i/E_s < 1$ . Estas discrepancias son atribuibles a que el parámetro  $\kappa$  que era constante en bicapas\*, se torna variable en tricapas. Efectivamente, se ha comprobado mediante FEM que este parámetro depende de los módulos elásticos y espesores de los dos materiales que constituyen el recubrimiento efectivo. Se ha comprobado que ajustando libremente el valor de este parámetro es posible obtener un acuerdo excelente entre las relaciones (6.4) y los resultados FEM en todo el rango de  $E_i/E_s$ . En principio, para determinar de forma precisa las tensiones en la interfase  $i/s$  sería necesario conocer las dependencias de  $\kappa$  con  $E_o/E_i$  y  $d_o/d_i$ \*\* . Sin embargo, en la mayoría de aplicaciones prácticas las capas de recubrimiento son más rígidas que el sustrato, es decir, se encontrarían en el rango  $E_i/E_s > 1$  y, en estos casos, las variaciones en el citado parámetro no son determinantes. Por ello, en estos sistemas es posible predecir las tensiones en la interfase  $i/s$  a partir de las relaciones (6.4), sin más que utilizar las expresiones (5.6) y (5.8) y los valores de los parámetros obtenidos para sistemas bicapa (Tabla 5.1). Esto es, bastaría con conocer el valor del módulo elástico efectivo del recubrimiento compuesto,  $E_c^*(E_o/E_i, d_o/d_i)$ .

El valor de  $E_c^*$  puede obtenerse a partir de las expresiones (6.4), si se conocen las tensiones reales en el sistema tricapa correspondiente. Al objeto de determinar la forma funcional de  $E_c^*$  mediante este tipo de deconvoluciones, se realizaron simulaciones FEM de sistemas tricapa con diferentes razones de espesores y módulos elásticos de sus capas externas (i.e. con diferentes valores de  $d_o/d_i$  y  $E_o/E_i$ ), pero manteniendo constante el espesor total  $d = d_o + d_i = 2$  mm y la razón  $E_i/E_s = 700$  (con  $\nu_o = \nu_i = 0.22$  y  $\nu_s = 0.30$ )\*\*\*. En la Figura 6.19 se muestran los valores de  $E_c^*/E_i$  calculados de esta forma a) en función de la razón de módulos elásticos  $E_o/E_i$  para diferentes valores de  $d_o/d_i$  y b) frente a la razón de espesores

---

\* Conviene recordar que  $\kappa$  representa la tensión  $\bar{\sigma}_3$  en la interfase cuando el sustrato es infinitamente rígido (sección 5.2.1).

\*\* Esta tarea podría abordarse de forma relativamente sencilla, aunque laboriosa, a partir de simulaciones FEM de sistemas tricapa con sustrato infinitamente rígido.

\*\*\* De este modo  $E_i/E_s > 1$  y, por tanto, es posible despreciar cualquier variación en el parámetro  $\kappa$ .

$d_o/d^*$  para diferentes valores de  $E_o/E_i$ . Como puede apreciarse, las desviaciones del módulo efectivo relativo respecto de  $E_i$  aumentan conforme se incrementa el espesor de la capa externa y la diferencia entre los módulos de ambas capas.

El siguiente paso consiste, pues, en obtener una expresión analítica que dé cuenta de las dependencias con  $E_o/E_i$  y  $d_o/d_i$  descritas en el párrafo anterior. A este respecto, en primer lugar se ha tratado de utilizar la expresión obtenida independientemente por T.-J. Chuang *et al.*<sup>[130]</sup> y C.-H. Hsueh *et al.*<sup>[131]</sup> para láminas bicapa en flexión pura sobre sustratos, comprobando que no reproducen satisfactoriamente los resultados FEM. Sin embargo, tomando estas expresiones como punto de partida y realizando un complejo proceso de ajuste, se ha obtenido finalmente la siguiente expresión semianalítica para  $E_c^*/E_i$

$$E_c^*/E_i = \frac{1 + \mathcal{E}^2 \mathcal{D}^3 + \mathcal{E} \mathcal{D}(5.66 + 2.18 \mathcal{D})}{1 + 1.97 \mathcal{D} + \mathcal{E} \mathcal{D}[(5.66 - 1.97) + 2.18 \mathcal{D} + \mathcal{D}^2]} \quad (6.6)$$

con  $\mathcal{E} = E_o/E_i$  y  $\mathcal{D} = d_o/d_i$ . Los valores de  $E_c^*/E_i$  calculados a partir de (6.6) se representan en la Figura 6.19 en trazo continuo. El error entre la expresión propuesta y los resultados FEM es en todos los casos inferior al 10% (coeficiente de Pearson del ajuste  $r^2 = 0,99986$ ).

A la vista de estos resultados, puede afirmarse que es posible predecir las tensiones en la interfase  $i/s$  de un sistema tricapa a partir de (6.4), sin más que calcular el módulo elástico efectivo del recubrimiento compuesto haciendo uso de (6.6), y utilizando las expresiones (5.6) y (5.8). Sin embargo, conviene notar que el presente análisis adolece de las mismas limitaciones que el efectuado en sistemas bicapa: por un lado, la validez del análisis se limita a situaciones donde el radio del contacto es despreciable frente al espesor del recubrimiento (i.e. contactos puntiagudos o cargas suficientemente bajas)\*\*; por otro lado, los valores de los parámetros de ajuste utilizados corresponden a sistemas con coeficientes de Poisson determinados (0.22/0.22/0.30) y pueden variar apreciablemente en otros sistemas. No obstante, conviene destacar que estos valores de los coeficientes de Poisson son representativos de sistemas cerámico/cerámico/metal o cerámico/cerámico/polímero, por lo

---

\*La elección de la razón  $d_o/d = \frac{d_o/d_i}{1+d_o/d_i}$  en lugar de  $d_o/d_i$  permite acotar el dominio del eje de abscisas entre 0 y 1.

\*\*En caso contrario estas expresiones sobreestiman las tensiones interfaciales.

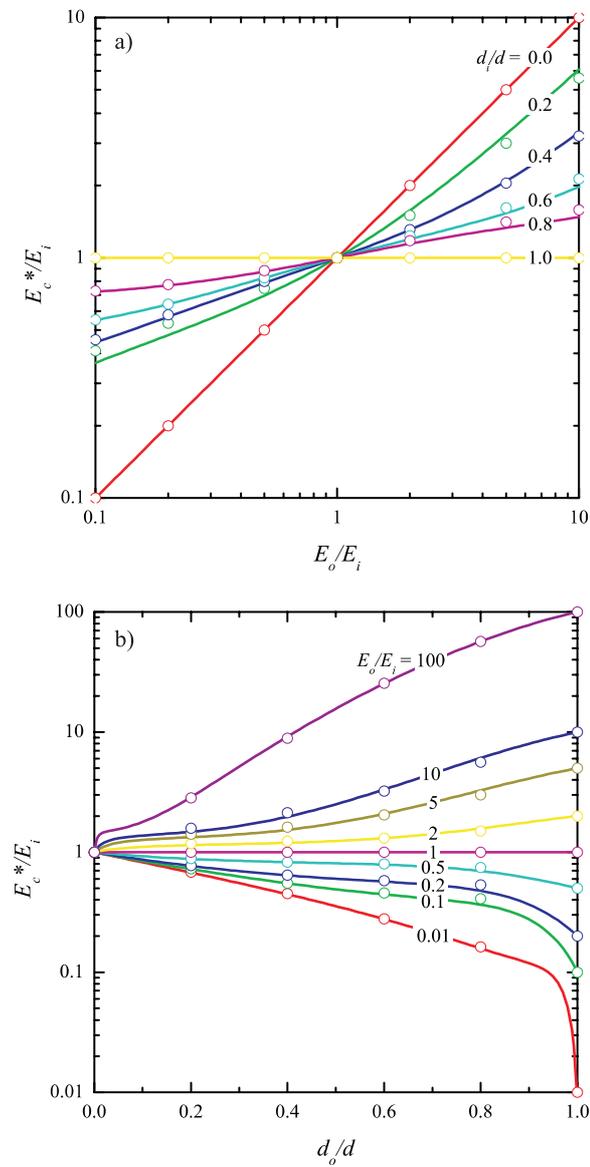


Figura 6.19: Módulo efectivo relativo,  $E_c^*/E_i$ , de un recubrimiento bicapa dispuesto sobre un sustrato frente a: a) la razón de módulos elásticos,  $E_o/E_i$ , y b) la razón de espesores  $d_o/d$ . Los puntos representan resultados FEM calculados para  $d = d_o + d_i = 2$  mm y  $E_i/E_s = 700$  (con  $\nu_o = \nu_i = 0.22$  y  $\nu_s = 0.30$ ) y la línea en trazo continuo el ajuste empírico correspondiente a la ecuación (6.6).

que los resultados obtenidos son directamente aplicables a una amplia variedad de sistemas tricapa reales.

### 6.2.3. Predicción de cargas críticas

El conocimiento de las tensiones en las interfases permite predecir las cargas críticas de inicio de daño en esas regiones. Para ello basta con imponer la condición de tensión crítica en (6.1), es decir, suponer que el daño se inicia cuando la tensión correspondiente alcanza un determinado valor crítico  $\sigma = \sigma_{crit}$ . De esta forma es posible expresar las cargas críticas de inicio de daño en la interfase  $i/s$  en la forma general

$$P_{crit} = \frac{\sigma_{crit} d^2}{\bar{\sigma}_{is}(E_o/E_i, E_s/E_i, d_o/d_i)} \quad (6.7)$$

donde, dependiendo del modo de daño, la tensión crítica es la resistencia a la fractura,  $\sigma_F^i$ , o la tensión de límite elástico,  $Y_i$ , de la capa intermedia; o bien la tensión de límite elástico del sustrato,  $Y_s$ , i.e.

$$\begin{aligned} P_{crit} = P_R^i &\Rightarrow \sigma_{crit} = \sigma_F^i, & \bar{\sigma}_{is} = \bar{\sigma}_1^i &= \frac{\sigma_1^i d^2}{P} \\ P_{crit} = P_Y^{i\downarrow} &\Rightarrow \sigma_{crit} = Y_i, & \bar{\sigma}_{is} = \bar{\sigma}_{13}^{i\downarrow} &= \frac{\sigma_{13}^{i\downarrow} d^2}{P} \\ P_{crit} = P_Y^s &\Rightarrow \sigma_{crit} = Y_s, & \bar{\sigma}_{is} = \bar{\sigma}_{13}^s &= \frac{\sigma_{13}^s d^2}{P} \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde  $\sigma_1^i$ ,  $\sigma_{13}^{i\downarrow}$  y  $\sigma_{13}^s$  vienen dados por las ecuaciones (6.4).

Del mismo modo, es posible expresar las cargas críticas de inicio del daño en la interfase  $o/i$  en la forma

$$P_{crit} = \frac{\sigma_{crit} d_o^2}{\bar{\sigma}_{oi}(E_o/E_i, E_s/E_i, d_o/d_i)} \quad (6.9)$$

con

$$\begin{aligned}
 P_{crit} = P_R^o &\Rightarrow \sigma_{crit} = \sigma_F^o, & \bar{\sigma}_{oi} = \frac{\sigma_1^o d_o^2}{P} &\equiv \bar{\sigma}_1^o \\
 P_{crit} = P_Y^o &\Rightarrow \sigma_{crit} = Y_o, & \bar{\sigma}_{oi} = \frac{\sigma_{13}^o d_o^2}{P} &\equiv \bar{\sigma}_{13}^o \\
 P_{crit} = P_Y^{i\uparrow} &\Rightarrow \sigma_{crit} = Y_i, & \bar{\sigma}_{oi} = \frac{\sigma_{13}^{i\uparrow} d_o^2}{P} &\equiv \bar{\sigma}_{13}^{i\uparrow}
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Sin embargo, en este caso, no se dispone de expresiones semi-analíticas apropiadas para las funciones  $\bar{\sigma}_{oi}$ . Por tanto, las simulaciones mediante elementos finitos se presentan como la única alternativa disponible para predecir el inicio del daño en la interfase  $o/i$ .

Estas expresiones indican que las cargas críticas para el inicio del daño interfacial en sistemas tricapa retienen la dependencia lineal con la tensión crítica correspondiente. Además, las cargas críticas conservan una dependencia cuadrática con el espesor efectivo del recubrimiento (i.e. con  $d_o$  en la interfase  $o/i$  y con  $d = d_o + d_i$  en la interfase  $i/s$ ). En cuanto a las dependencias explícitas con la razón de espesores  $d_o/d_i$  y los módulos relativos  $E_o/E_i$  y  $E_s/E_i$ , resultan ciertamente complejas y sólo han podido ser determinadas para el daño en la interfase  $i/s$ .

### Validación de las predicciones

El objetivo de este apartado es verificar la validez de las expresiones (6.7) comparando sus predicciones para las cargas críticas de inicio de daño en la interfase  $i/s$  con resultados de simulación y medidas experimentales en sistemas tricapa reales. En la Figura 6.20 se muestran las cargas críticas de inicio de daño en esta interfase en función de  $d_o/d$  para  $d = d_o + d_i = 1.5$  mm (espesor típico en aplicaciones dentales) en dos tricapas representativos de coronas dentales que tienen: porcelana como capa externa, dentina como sustrato y a) alúmina o b) zirconia (YTZP) como capa intermedia<sup>\*</sup>. Los símbolos corresponden a resultados FEM, unidos mediante trazo discontinuo, mientras que las líneas en trazo continuo son las predicciones obtenidas a partir de (6.7). El acuerdo entre las expresiones semi-analíticas y los

<sup>\*</sup>Las propiedades de estos materiales se encuentran en la Tabla A.1.

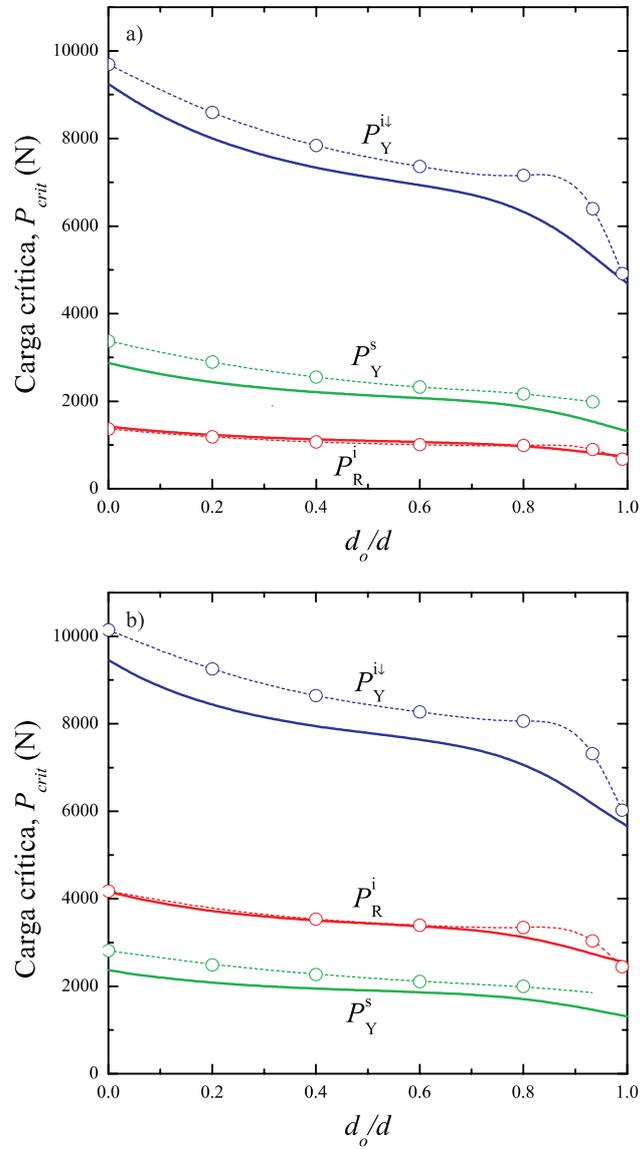


Figura 6.20: Predicciones de cargas críticas de inicio de daño en la interfase i/s en función de  $d_o/d$  para  $d = d_o + d_i = 1.5$  mm en tricapas representativas de coronas dentales: a) porcelana/alúmina/dentina y b) porcelana/YTZP/dentina. Se muestran los resultados obtenidos mediante FEM (puntos), unidos mediante ajustes por splines (en trazo discontinuo), y las predicciones obtenidas a partir de (6.7) (en trazo continuo).

resultados FEM es especialmente notable en lo que se refiere a fisuras radiales. Las discrepancias son algo superiores ( $\sim 20\%$ ) en las predicciones de daño por plasticidad, debido a errores en las expresiones originales de bicapas (ver Figura 6.20 para  $d_o/d = 0$ ). Estos errores pueden tener su origen en las elevadas cargas necesarias para iniciar el daño en estos sistemas, que pueden ser suficientes para que la relación entre cargas y tensiones deje de ser lineal. En cualquier caso, las predicciones obtenidas a partir de (6.7) son muy razonables y, además, siempre inferiores a las obtenidas mediante FEM, con lo cual constituyen un límite de seguridad conservativo. Por ello, si bien las expresiones (6.7) no son totalmente exactas, resultan de gran utilidad para el diseño de estructuras tricapa.

Como ya se ha mencionado, la aplicación de las expresiones (6.7) utilizando los valores de los parámetros recogidos en las Tablas 5.1 (o 5.2) y la expresión (6.6) en sistemas con coeficientes de Poisson significativamente diferentes a los utilizados en este análisis (i.e. 0.22/0.22/0.30) ha de hacerse con precaución.

Conviene también notar que en las simulaciones FEM, e implícitamente en (6.7), se asume que la respuesta de los materiales es siempre elástica. Por ello, para un sistema determinado sólo el valor más bajo de carga crítica tiene significado real. Efectivamente, el inicio del primer modo de daño modifica sensiblemente el campo de tensiones en la estructura y las cargas críticas para los subsiguientes modos de daño serían diferentes a las representadas en la Figura 6.20\*.

Tras analizar el grado de acuerdo entre las expresiones semianalíticas (6.7) y los resultados FEM, queda por verificar la capacidad de estas expresiones para predecir resultados experimentales de cargas críticas. Debido a las dificultades que presenta su determinación experimental cuando se trata de inicio de plasticidad, esta verificación se ha realizado exclusivamente para el caso de fisuras radiales. Para este modo de daño, las ecuaciones (6.7) y (5.9a) conducen a

$$P_R^i = B\sigma_F^i d^2 \frac{E_c^*}{E_i} \log(CE_c^*/E_s), \quad (1 < E_c^*/E_s < 100) \quad (6.11)$$

donde  $E_c^*$  viene dado por la expresión (6.6). En la Figura 6.21 se muestran las cargas críticas experimentales  $P_R^i$  correspondientes a muestras cerámico/vidrio/poli-

---

\* el cálculo de las cargas críticas de modos secundarios requiere de análisis FEM no lineales, no efectuados aquí.

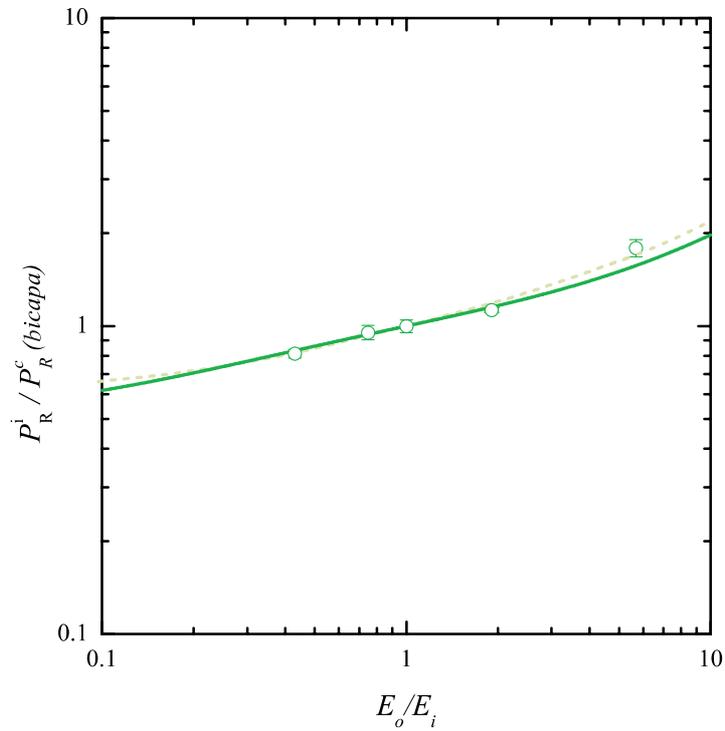


Figura 6.21: Cargas críticas normalizadas,  $P_R^i/P_R^c(\text{bicapa})$ , en función de  $E_o/E_i$  para  $d_o = d_i = 1$  mm. Comparación de los resultados experimentales (puntos) con las predicciones de cargas críticas obtenidas a partir de (6.11) (trazo continuo) y los resultados FEM (trazo discontinuo). La barras de error representan las desviaciones estándar de los resultados experimentales.

carbonato con  $d_o/d_i = 1$  y  $d = 2$  mm, al objeto de verificar la dependencia con la razón de módulos elásticos  $E_o/E_i$  dada por la ecuación (6.11) (en trazo continuo). Los valores de  $P_R^i$  han sido normalizados dividiendo por la carga crítica,  $P_R^c(\text{bicapa})$ , correspondiente a un bicapa vidrio/policarbonato con  $d = 2$  mm\*. Se incluyen para su comparación los correspondientes resultados FEM en trazo discontinuo. Como puede apreciarse, el ajuste entre los resultados experimentales y las predicciones FEM es excelente en todos los casos. Por su parte, la ecuación (6.11) reproduce fielmente los resultados experimentales, si exceptuamos pequeñas des-

\*Esta normalización permite minimizar cualquier posible efecto estadístico en las cargas críticas de inicio de fisuras radiales (ver sección 5.3).

viaciones en el caso del sistema zafiro/vidrio/policarbonato ( $E_o/E_i \simeq 5.68$ ).

Para verificar la dependencia con la razón de espesores  $d_o/d_i$  se escogieron dos sistemas materiales, zafiro/vidrio/policarbonato ( $E_o/E_i \simeq 5.68$ ) y vidrio de boro/vidrio/policarbonato ( $E_o/E_i \simeq 0.43$ ), y se variaron los espesores individuales de cada capa (manteniendo  $d = 2$  mm). Las cargas críticas experimentales normalizadas,  $P_R^i/P_R^c(\text{bicapa})$ , se muestran en la Figura 6.22 en función de la razón de espesores  $d_o/d$ . Se incluyen para su comparación las predicciones a partir de (6.11) (trazo continuo) y los resultados FEM (trazo discontinuo). De nuevo, el acuerdo entre los resultados experimentales y los de simulación FEM es muy bueno. La

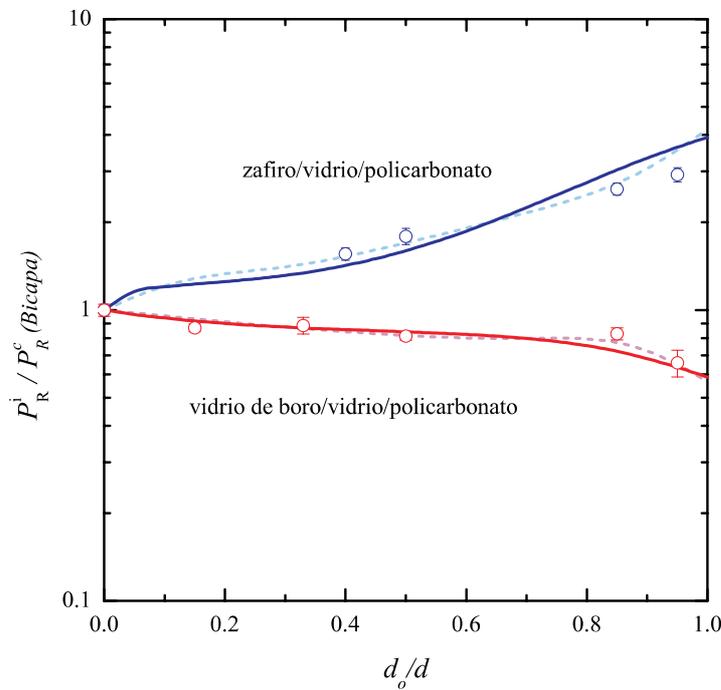


Figura 6.22: Cargas críticas normalizadas,  $P_R^i/P_R^c(\text{bicapa})$ , en función de  $d_o/d$  para los sistemas zafiro/vidrio/policarbonato ( $E_o/E_i \simeq 5.68$ ) y vidrio de boro/vidrio/policarbonato ( $E_o/E_i \simeq 0.43$ ). Comparación de los resultados experimentales (puntos) con las predicciones de cargas críticas obtenidas a partir de (6.11) (trazo continuo) y los resultados FEM (trazo discontinuo). Las barras de error representan las desviaciones estándar de los resultados experimentales.

ecuación (6.11) muestra igualmente un notable acuerdo con los resultados experimentales, si bien, al igual que en la Figura 6.21, se aprecian ciertas desviaciones en los resultados correspondientes al sistema zafiro/vidrio/policarbonato. Evidentemente, las curvas se desvían de la unidad (i.e. del comportamiento propio del sistema bicapa vidrio/policarbonato) conforme aumenta el espesor de la capa externa, disminuyendo cuando la capa externa es menos rígida y viceversa. Esta tendencia se aprecia también en la Figura 6.21, conforme aumenta la rigidez de la capa externa aumenta la carga crítica necesaria para inducir fisuras radiales en la capa intermedia. Sin embargo, es necesario destacar que cuando la capa externa es más rígida que la intermedia, dicha capa flexiona y, por tanto, es también susceptible de sufrir fractura radial.

Conviene hacer notar que, en principio, el inicio de fisuras radiales en tricapas puede verse afectado por el mismo tipo de efectos estadísticos estudiados en la sección 5.3. Tales efectos han sido minimizados aquí mediante la normalización de las cargas críticas, que equivale de algún modo a considerar que la resistencia a fractura efectiva en el tricapa es igual a la de un sistema bicapa de espesor  $d = d_o + d_i$  y con  $E_c = E_i$ . En cualquier caso, los resultados anteriores confirman la utilidad práctica de la ecuación (6.11), y en general de las expresiones (6.7), para predecir cargas críticas de inicio de daño en la interfase  $i/s$  en sistemas tricapa.

#### 6.2.4. Diseño de estructuras tricapa

En principio, a partir de las expresiones de cargas críticas (6.7) y (6.9) sería posible construir mapas de predicción y diagramas de diseño para sistemas tricapa, análogos a los correspondientes a sistemas bicapa (sección 5.5). Obviamente, el incremento en el número de posibles modos de daño se traduciría en la necesidad de aumentar el número de mapas de predicción (de 3 a 6), por lo que su utilización resulta poco práctica. Por ello, el análisis que se realiza a continuación se limita al daño generado en la capa intermedia. Como se discute en la sección 6.1, las dos capas de recubrimiento suelen proteger al sustrato del daño; por otro lado, es posible inhibir la flexión de la capa externa y, por consiguiente, el daño interfacial en esta capa, escogiendo una capa intermedia más rígida. Éste es el caso, por ejemplo, en coronas dentales donde la capa intermedia actúa como soporte rígido,

siendo la más vulnerable al daño interfacial. A partir de las expresiones 6.7 y 6.9 se obtiene\*

$$\frac{P_Y^{i\uparrow}}{P_R^i} = \frac{Y_i}{\sigma_F^i} \left( \frac{d_o}{d} \right)^2 \frac{\bar{\sigma}_1^i}{\bar{\sigma}_{13}^{i\uparrow}} \quad (6.12)$$

$$\frac{P_Y^{i\downarrow}}{P_R^i} = \frac{Y_i}{\sigma_F^i} \frac{\bar{\sigma}_1^i}{\bar{\sigma}_{13}^{i\downarrow}}$$

Si  $\frac{P_Y^{i\uparrow}}{P_R^i} < 1$  o  $\frac{P_Y^{i\downarrow}}{P_R^i} < 1$  el primer modo de daño en la capa intermedia será deformación plástica, en caso contrario, se generarán en primer lugar fisuras radiales. Por otro lado, comparando las ecuaciones (6.12) entre sí podría determinarse si la plasticidad ocurre en primer lugar en la superficie superior o inferior de la capa. El inicio de plasticidad en la superficie superior (que puede inducir fisuras radiales en la capa externa) se ve favorecido para valores pequeños de  $d_o/d$  y, al contrario, valores elevados de  $d_o/d$  favorecen la deformación en la superficie inferior de la capa (aumentando el riesgo de delaminación en la interfase  $i/s$ ). Conviene notar que para realizar estas afirmaciones no es necesario evaluar las expresiones (6.12). Al igual que en bicapas, la razón  $Y/\sigma_F$  (o  $H/\sigma_F$ ) aparece como parámetro determinante de la fragilidad de la capa.

Para finalizar este capítulo, se resumen a continuación ciertas implicaciones de interés para el diseño de estructuras tricapa en general, y de restauraciones dentales en particular, que se deducen del análisis de los resultados FEM de cargas críticas. En la Figura 6.23 se muestran las cargas críticas de todos los modos de daño interfaciales (i.e. tanto en la interfase  $o/i$  como en la  $i/s$ ), para los sistemas porcelana/alúmina/dentina y porcelana/aleación-Co/dentina\*\*. Como puede apreciarse, en ambos casos las simulaciones FEM predicen transiciones en el primer modo de daño conforme aumenta  $d_o/d$ : para valores pequeños, plasticidad en la superficie superior de la capa  $i$ ; para valores intermedios, fisuras radiales (alúmina) o bien plasticidad (aleación-Co) en la superficie inferior de la capa  $i^{***}$ ;

\*Relaciones análogas pueden obtenerse para comparar dos a dos el resto de modos de daño.

\*\*Evidentemente, no se muestra en esta Figura la curva correspondiente a  $P_R^i$  para el sistema porcelana/aleación-Co/dentina, pues la capa metálica no puede romper sin deformar plásticamente con anterioridad.

\*\*\*También podría generarse plasticidad en el sustrato (p. ej en el caso de la YTZP, ver Figura 6.20b).

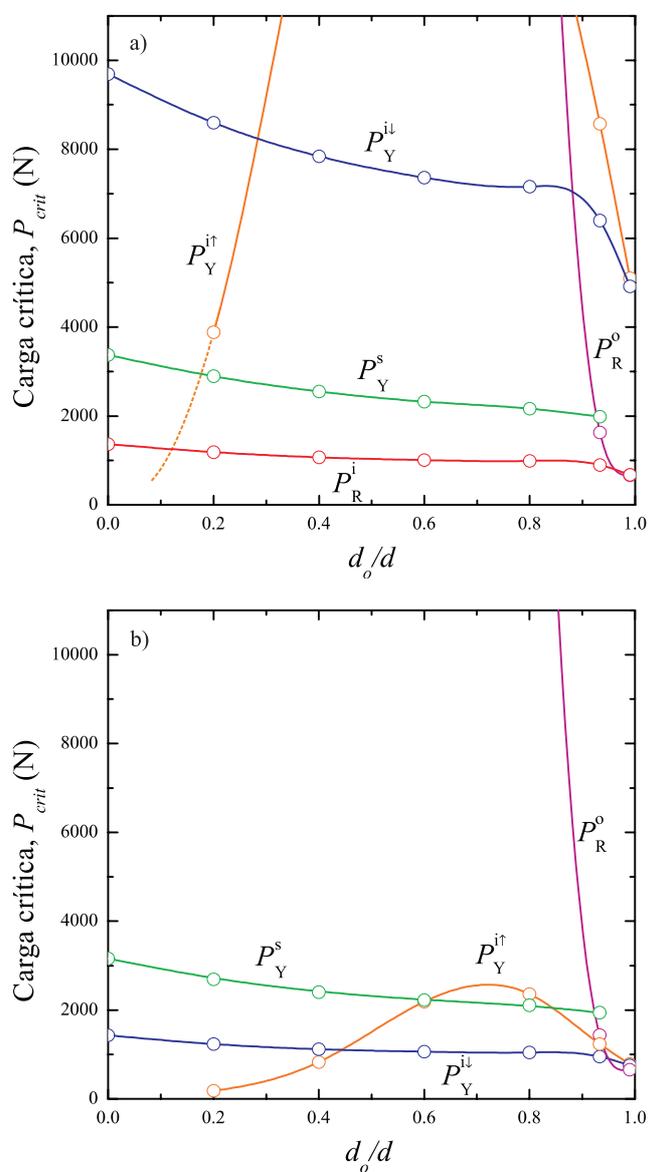


Figura 6.23: Predicciones de cargas críticas de inicio de daño interfacial en función de  $d_o/d$  para  $d = d_o + d_i = 1.5$  mm para tricapas representativas de coronas dentales: a) porcelana/alúmina/dentina y b) porcelana/aleación-Co/dentina. Se muestran los resultados obtenidos mediante FEM (puntos), unidos mediante ajustes por splines (en trazo continuo).

en ocasiones (p. ej. aleación-Co) incluso pueden generarse fisuras radiales en la capa  $o$  a valores suficientemente elevados de  $d_o/d^*$ . A la vista de estos resultados puede concluirse que la relación de espesores más segura es, en general, la situada en el rango intermedio, con  $d_o \approx d_i$  (i.e.  $d_o/d \approx 0,5$ ), donde además, la carga crítica es prácticamente constante. Esta simple regla se antoja de gran relevancia para el diseño de estructuras tricapa en general y para el diseño de restauraciones dentales en particular. Si se comparan los sistemas de las Figuras 6.20b) y 6.23 puede concluirse que en este rango el sistema más resistente al inicio de daño es el que tiene zirconia YTZP como capa intermedia. La elevada resistencia a fractura de este material impide el inicio de fisuras radiales en la intermedia con anterioridad a la deformación plástica en el sustrato\*\*. Los dos sistemas de la Figura 6.23 tienen módulos elásticos prácticamente idénticos, de forma que las pequeñas diferencias entre ellos provienen de sus respectivas tensiones críticas de fractura o de inicio de plasticidad. Por tanto, la clave para fabricar coronas dentales resistentes al daño reside en utilizar como capas intermedias, bien cerámicas de elevada resistencia a fractura, o bien metales con elevada tensión de límite elástico (i.e. elevada dureza). Además, como ya se mencionado, conviene seleccionar espesores aproximadamente iguales para las dos capas de recubrimiento. Finalmente, se plantea la pregunta de qué tipo de capas intermedias (cerámicas o metálicas) son más adecuadas en igualdad de condiciones (i.e. idéntico espesor, módulo elástico y tensión crítica). La respuesta a esta cuestión no es simple: por un lado, las capas cerámicas son menos susceptibles al daño por plasticidad en su superficie superior, debido a su mayor dureza, lo que permite extender el rango de espesores óptimos (cf. Figuras 6.23a y 6.23b); pero por otro lado, el daño por plasticidad en metales es bastante más inocuo, al menos a corto plazo, que las fisuras radiales que aparecen en las capas cerámicas.

---

\* Esto es debido a que cuando la capa intermedia es tan delgada, a pesar de su mayor rigidez, no es capaz de inhibir la flexión de la capa superior. Sin embargo, como puede apreciarse en la Figura 6.23, la carga crítica para el inicio de fisuras radiales en la capa superior crece exponencialmente con el espesor  $d_i$  y para  $d_o \leq 0.8d$  es imposible que se inicien en los 2 sistemas considerados.

\*\* Notar que la relativamente reducida rigidez de la zirconia provoca un doble efecto, por un lado se disminuyen las tensiones de flexión en esta capa (con el consiguiente incremento en  $P_R^i$ ), pero a su vez implica una menor protección del sustrato (observar la reducción en  $P_Y^s$ , comparando las Figuras 6.20a y 6.20b).



## Apéndice A

# Caracterización de materiales monolíticos

Este apéndice se centra en la caracterización mecánica de los materiales monolíticos que constituyen las diferentes estructuras multicapa estudiadas. En primer lugar, se muestran las curvas tensión-deformación de indentación (Hertz) determinadas experimentalmente, así como sus correspondientes ajustes mediante FEM. Finalmente, en la Tabla A.1 se resumen las propiedades mecánicas de todos los materiales, incluyendo también datos obtenidos mediante ensayos de caracterización mecánica auxiliares.

### A.1. Carburo de wolframio

Para determinar las propiedades mecánicas de un material a partir de su curva tensión-deformación de indentación, es necesario conocer previamente las propiedades mecánicas del material utilizado como impresor (carburo de wolframio, WC). Además, estas propiedades son también necesarias como parámetros de entrada en las simulaciones mediante FEM. En la Figura A.1 se muestra la curva tensión-

deformación del WC, obtenida utilizando indentores esféricos del mismo material, de radios 1.59, 1.98, 3.18, 4.76, 7.94 y 12.7 mm, y con cargas máximas en el rango 200-2500 N. A partir de la pendiente del primer tramo lineal ( $\mu = 139.6 \pm 2.7$ ),

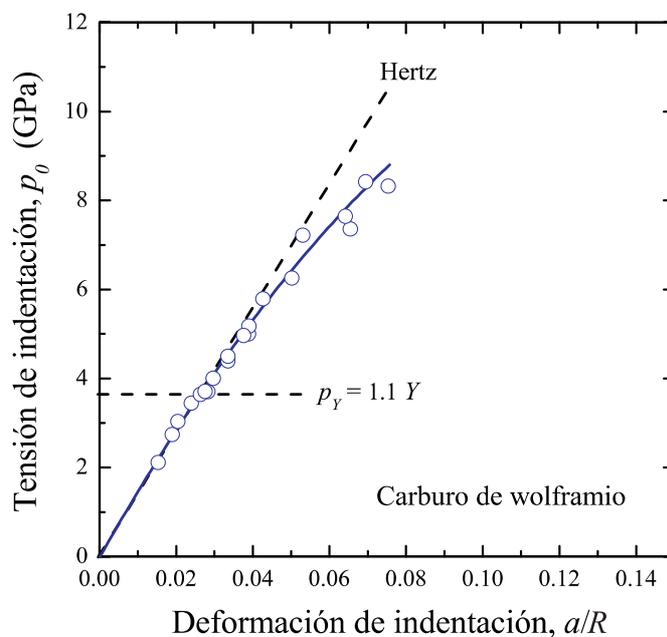


Figura A.1: Curva tensión-deformación de indentación del WC (puntos) y ajuste por simulación FEM (línea continua). Se han representado en línea discontinua la respuesta elástica hertziana ( $E = 626$  GPa) y el punto correspondiente a la presión crítica para el comienzo de plasticidad,  $p_Y = 1.1Y$ .

aplicando la expresión (4.2) y tomando  $\nu' = 0.22$ , se obtiene que el módulo elástico del WC es  $E' = 626 \pm 12$  GPa.

A partir de la presión de contacto mínima para generar una huella residual ( $p_Y = 3.70$  GPa) se obtiene una primera estimación de la tensión de límite elástico para el carburo de wolframio de  $Y \simeq 3.37$  GPa.

Utilizando estos valores ( $E'$ ,  $\nu'$  e  $Y$ ) como datos de entrada en la simulación y siguiendo el procedimiento descrito en la sección 4.3.1, se obtiene la curva FEM que se muestra en línea continua en la Figura A.1. Los valores de los parámetros

que conducen a dicho ajuste son:  $Y = 3.37$  GPa y  $\alpha = 0.5$ . En este caso, el valor de la tensión de límite elástico,  $Y$ , coincide con el estimado experimentalmente. El buen acuerdo entre la curva experimental y la obtenida mediante simulación valida el procedimiento de ajuste.

## A.2. Vidrio y zafiro

Las curvas experimentales tensión-deformación del vidrio y del zafiro se muestran en la Figura A.2. Éstas se obtuvieron utilizando impresores de radios comprendidos entre 3.18 y 12.7 mm, y cargas en el rango 250-750 N para el vidrio, y 250-3750 N para el zafiro. Como puede apreciarse, la respuesta de ambos materiales en el rango de presiones utilizado es lineal. Si se aumenta suficientemente

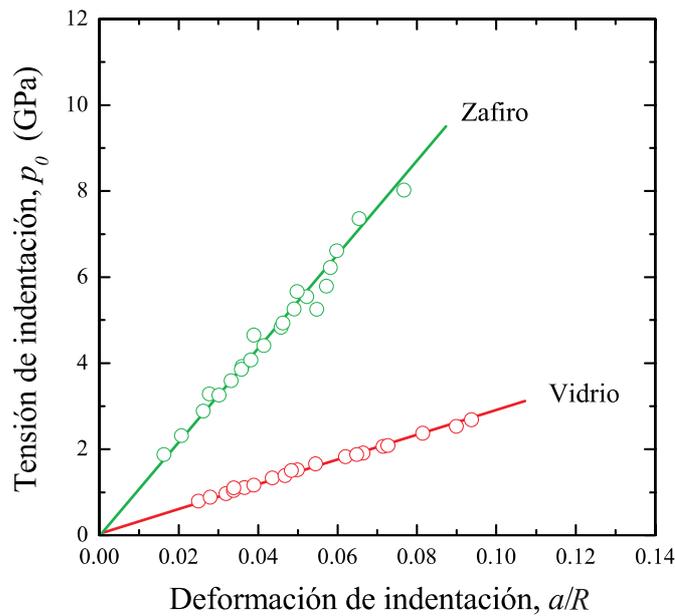


Figura A.2: Curvas tensión-deformación de indentación del vidrio y del zafiro. Datos experimentales (puntos) y curvas obtenidas mediante FEM (líneas), asumiendo una respuesta elástica ideal para el vidrio y el zafiro ( $E = 73.4$  GPa y  $E = 417$  GPa, respectivamente).

la presión aplicada, ambos materiales rompen sin que se produzca una desviación apreciable respecto a su comportamiento lineal. Estos resultados indican que tanto el vidrio como el zafiro presentan un comportamiento perfectamente elástico hasta que se produce la fractura. Los módulos elásticos estimados a partir de estas curvas\* fueron  $E = 73.4 \pm 0.7$  GPa para el vidrio ( $\mu = 29.3 \pm 0.2$ ) y  $E = 417 \pm 18$  GPa para el zafiro ( $\mu = 111 \pm 2$ ), asumiendo en ambos casos que  $\nu = 0.22$ .

La comparación entre las curvas experimentales y las obtenidas mediante simulación FEM para ambos materiales muestra un grado de acuerdo excelente (Figura A.2), garantizando de nuevo la bondad del modelo de simulación utilizado.

### A.3. Policarbonato

En la Figura A.3 se muestra la curva tensión-deformación experimental del policarbonato, obtenida utilizando impresores de radios comprendidos entre 3.18 y 12.7 mm y cargas entre 20 y 3000 N. Se representan asimismo dos rectas en trazo discontinuo que, como en el caso del carburo de wolframio, representan el comportamiento elástico ideal (Hertz) y la presión de inicio de plasticidad. La pendiente de la recta elástica ( $\mu = 1.07 \pm 0.01$ ) y el coeficiente de Poisson del policarbonato,  $\nu = 0.35$ , conducen a un valor para el módulo elástico igual a  $E = 2.23 \pm 0.03$  GPa.

La primera huella residual en el policarbonato se observó a la presión de indentación  $p_Y = 0.123$  GPa, que conduce a una primera estimación de la tensión de límite elástico de  $Y \simeq 0.112$  GPa.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el carburo de wolframio, se ajustó la curva tensión-deformación del policarbonato obtenida mediante FEM. La curva correspondiente se muestra en trazo continuo en la Figura A.3. En esta ocasión, los parámetros que conducen al mejor acuerdo entre simulación y experimentos son:  $Y = 0.065$  GPa y  $\alpha = 0.05$ . Como puede apreciarse, este valor de  $Y$  resulta inferior al estimado experimentalmente que, como ya se ha mencionado, podría estar evaluado por exceso.

---

\*Estos valores han sido confirmados por las medidas vibracionales (sección 4.2.3).

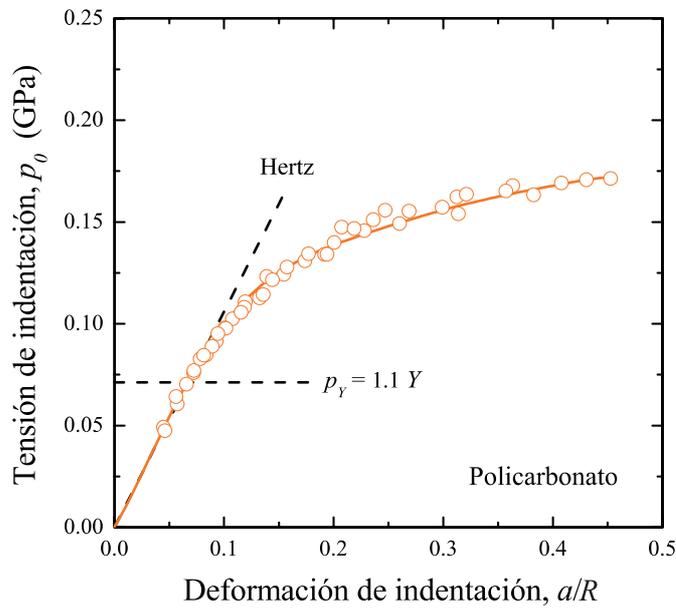


Figura A.3: Curva tensión-deformación de indentación del policarbonato. Datos experimentales (puntos) y curva de ajuste obtenida mediante FEM (línea continua). Las líneas discontinuas indican la respuesta elástica para  $E = 2.23$  GPa y la presión crítica para el comienzo de plasticidad,  $p_Y = 1.1Y$ .

## A.4. Adhesivo

En la Figura A.4 se muestra la curva tensión-deformación experimental del adhesivo obtenida utilizando impresores de radios comprendidos entre 3.18 y 12.7 mm y con cargas entre 25 y 1000 N. De nuevo, se representa en trazo discontinuo el comportamiento elástico ideal (Hertz) y la presión de inicio de plasticidad. La pendiente de la recta elástica ( $\mu = 1.77 \pm 0.04$ ) y el coeficiente de Poisson del epoxy,  $\nu = 0.35$ , conducen a un valor para el módulo elástico igual a  $E = 3.7 \pm 0.1$  GPa.

La primera huella residual se observa a la presión  $p_Y = 0.121$  GPa que conduce a una primera estimación para la tensión de límite elástico del adhesivo epoxy de  $Y \simeq 0.110$  GPa.

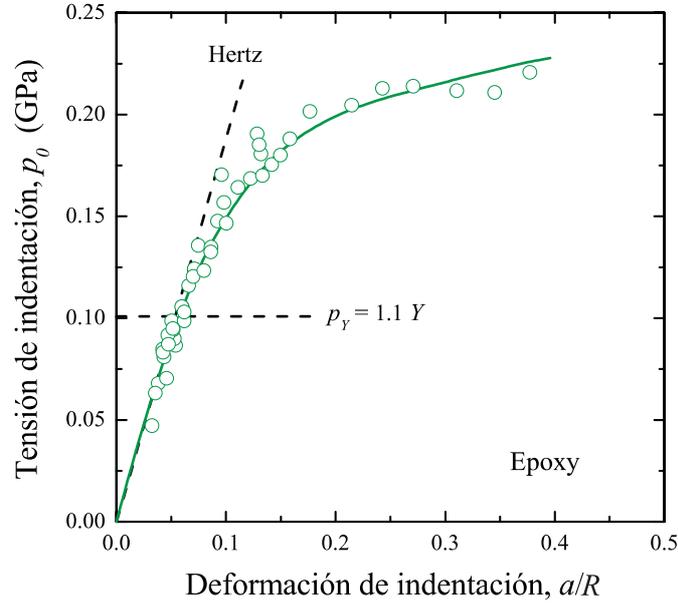


Figura A.4: Curva tensión-deformación de indentación del adhesivo epoxy. Datos experimentales (puntos) y curva de ajuste obtenida mediante FEM (línea continua). Las líneas discontinuas indican la respuesta elástica para  $E = 3.7 \text{ GPa}$  y la presión crítica para el comienzo de plasticidad,  $p_Y = 1.1Y$ .

La curva tensión-deformación obtenida mediante elementos finitos, que se muestra en la Figura A.4, corresponde a unos valores de los parámetros ajuste de  $Y = 0.093 \text{ GPa}$  y  $\alpha = 0.001$ .

## A.5. Tabla resumen

En la Tabla A.1 se resumen todas las propiedades mecánicas de los materiales utilizados en este trabajo. En primer lugar se recogen todos los datos de interés correspondientes a los 9 materiales que se han utilizado para la fabricación de muestras experimentales, descritos en la sección 4.1. Estos datos se han obtenido a partir de las curvas tensión-deformación experimentales y de simulación (secciones A.1-A.4), mediante técnicas auxiliares de caracterización (medidas vibracio-

nales y ensayos de flexión) o directamente de la literatura. Además, se incluyen otros datos de la bibliografía correspondientes a 11 materiales que, si bien no han sido utilizados para la realización de ensayos mecánicos, se han empleado en las simulaciones o para la elaboración de mapas de diseño.

Material	$E$ (GPa)	$\sigma_f$ (MPa)	$T$ (MPa·m <sup>1/2</sup> )	$H$ (GPa)	$Y$ (GPa)	$\alpha$
Vidrio ( <i>soda-lime</i> )	73.4 ± 0.7	110 ± 10	0.67	5.2	-	-
Vidrio de boro	32 ± 1	-	-	-	-	-
Vidrio de plomo	55 ± 1	-	-	-	-	-
Vidrio de bismuto	140 ± 1	-	-	-	-	-
Zafiro	417 ± 18	550	3.0	21	-	-
Silicio	170 ± 1	110 ± 10	-	14	-	-
Polycarbonato	2.23 ± 0.03	-	-	0.3	0.065	0.05
Carburo de wolframio	626 ± 12	-	-	19	3.37	0.5
Adhesivo epoxy	3.7 ± 0.1	-	-	0.4	0.093	0.001
Aleación de Pd	126	-	-	2.0	0.55	0.010
Aleación de Co	231	-	-	3.0	0.37	0.030
Aluminio	71	-	-	18	0.20	0.005
Porcelana (dental)	69	110	0.9	6.2	-	-
Dentina	16	-	3.1	0.6	-	-
Zirconia (Y-TZP)	205	1450	5.4	12.0	-	-
Vitrocerámico de mica (C-MGC)	51.5	125	1.7	2.7	-	-
Vitrocerámico de mica (F-MGC)	70.5	325	1.0	3.8	-	-
Vitrocerámico (disilicato de litio)	104	420	2.9	5.5	-	-
Polímero reforzado con vidrio	10	-	-	0.8	-	-
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> -TiO <sub>2</sub>	70	-	-	-	1.9	-

Tabla A.1: Propiedades mecánicas de los materiales utilizados en este estudio. Los datos que no incluyen el error experimental han sido tomados de la bibliografía<sup>[5,98,103,110]</sup>. Los valores correspondientes a  $\alpha$  e  $Y$  han sido determinados mediante FEM y su error no supera el 5%. Se han adoptado valores estándar para los coeficientes de Poisson: 0.22 para los materiales cerámicos (incluido el WC) y 0.35 para metales y polímeros.



# Conclusiones

En este trabajo se han investigado de forma exhaustiva los mecanismos de daño que se generan en estructuras multicapa bajo la acción de tensiones de contacto. La metodología que se ha utilizado consiste principalmente en la realización de ensayos de indentación Hertz, en combinación con sus simulaciones numéricas (FEM). Los ensayos mecánicos se han realizado sobre estructuras multicapa transparentes, que permiten la observación *in situ* del inicio y posterior evolución del daño. Sin embargo, el análisis efectuado tiene validez general y permite entender las propiedades de contacto de estructuras multicapa de naturaleza muy diversa. Los resultados de este estudio tienen implicaciones de interés para la selección y diseño inteligente de estructuras multicapa que sean adecuadas para las diferentes aplicaciones. Entre las conclusiones más relevantes de este estudio cabe destacar las siguientes:

En relación al estudio sobre estructuras bicapa:

1. Se han revisado de forma sistemática los modos de daño por contacto que pueden generarse en estas estructuras, justificando su origen en base al campo de tensiones calculado mediante FEM.
2. A partir de resultados FEM, se ha realizado un exhaustivo análisis del campo de tensiones generado por contacto, especialmente alrededor de la interfase (tensiones interfaciales). Este análisis ha permitido la obtención de expresiones semianalíticas para las tensiones interfaciales en función de parámetros clave como el espesor de recubrimiento y la razón de módulos elásticos.

3. A partir de estas expresiones, se han propuesto relaciones que permiten determinar las cargas críticas de inicio de los diferentes modos de daño interfaciales. En particular, se ha corroborado su dependencia lineal con la tensión crítica (i.e. con la resistencia a fractura o la tensión de límite elástico correspondiente) y cuadrática con el espesor del recubrimiento.
4. Se ha puesto de manifiesto la importancia de la distribución estadística de defectos y de la inhomogeneidad del campo de tensiones en las cargas críticas de inicio de fisuras radiales, especialmente cuando se trata de recubrimientos delgados. Este aspecto no ha sido tenido en cuenta hasta la fecha en la literatura, aún cuando sus implicaciones pueden ser muy importantes. Los resultados obtenidos muestran que la resistencia a fractura efectiva de recubrimientos delgados puede llegar a ser muy superior a la del material masivo. En este contexto, se propone la realización de ensayos Hertz para determinar la resistencia efectiva de recubrimientos frágiles.
5. Se ha verificado la existencia de fenómenos de fatiga química en estructuras bicapa prototipo vidrio/policarbonato unidas mediante adhesivo. Aunque las capas poliméricas aíslan de forma efectiva la superficie inferior del recubrimiento del ambiente externo, la humedad preexistente en la interfase favorece el crecimiento subcrítico de fisuras en el vidrio, afectando a las cargas críticas de inicio de fisuras radiales. Los resultados obtenidos en recubrimientos inmunes a fatiga química, como el silicio, han puesto de manifiesto una ligera influencia del tiempo en las cargas críticas, que debe estar asociada a la viscoelasticidad del sustrato y del adhesivo.
6. Las expresiones para las cargas críticas de inicio de cada modo de daño permiten la elaboración de mapas de predicción del primer modo de daño, así como de diagramas de diseño. Estos diagramas facilitan la selección inteligente tanto de los materiales que constituyen la estructura bicapa, como del espesor de recubrimiento óptimo para una determinada aplicación. Sin duda este tipo de diagramas serán de gran utilidad en numerosas aplicaciones tecnológicas.

En cuanto al estudio sobre estructuras tricapa:

7. Se han identificado de forma sistemática los modos de daño por contacto que pueden generarse en estas estructuras, a partir de observaciones experimen-

tales en conjunción con simulaciones FEM. La importancia de identificar los modos de daño es evidente, por cuanto su inicio constituye el principio del fin de la vida útil de un sistema.

8. El estado superficial de las capas es un factor determinante en la fractura de sistemas tricapa. En el caso del sistema vidrio/zafiro/policarbonato determina no sólo el modo de fractura que se desarrolla, sino también la capa donde éste se inicia. Así pues, es necesario controlar el proceso de fabricación de estos sistemas para minimizar los defectos que se introducen, especialmente en las superficies donde se inician los modos de fractura más perjudiciales.
9. Se ha demostrado que la introducción de una capa rígida (y suficientemente gruesa) entre el sustrato y el recubrimiento externo impide la flexión de este último, inhibiendo el inicio de fisuras radiales en el recubrimiento. En estas condiciones, la capa rígida es la más susceptible de sufrir daño y, por tanto, es aquélla cuyas propiedades deben optimizarse. Este hecho tiene interés tecnológico en múltiples aplicaciones (p. ej. en restauraciones dentales).
10. Un resultado sorprendente de este trabajo es la gran influencia de la fina capa de adhesivo ( $\sim 15\mu m$ ) en el comportamiento mecánico del sistema tricapa vidrio/zafiro/policarbonato. La introducción de esta capa supone una modificación drástica del campo de tensiones en el sistema, propiciando la aparición de fisuras radiales en el vidrio. Por tanto, la utilización de adhesivos o cementos para unir las diferentes capas en un sistema tricapa puede influir negativamente en sus prestaciones, llegando incluso a destruir el beneficio que, en principio, se pretende aportar al introducir la capa intermedia rígida. En definitiva, en muchas aplicaciones no es aconsejable la utilización de adhesivos y, a pesar de su reducido espesor, no es posible despreciar su papel, especialmente cuando sus propiedades mecánicas son muy diferentes a las de los materiales adyacentes.
11. La consideración de los sistemas tricapa como *bicapas efectivos*, donde la capa intermedia forma parte de un recubrimiento o de un sustrato compuesto, permite extender el análisis de tensiones realizado en sistemas bicapa a estructuras tricapa. La extensión de este análisis ha permitido verificar que la dependencia cuadrática de las tensiones con el espesor, al igual que su proporcionalidad con la carga aplicada, se mantiene en tricapas. La diferencia entre ambos tipos de sistemas se reduce a la dependencia con los

módulos elásticos, sustancialmente más compleja para estructuras tricapa. A pesar de la complejidad de estas dependencias se han obtenido expresiones semianalíticas aproximadas para las tensiones en la interfase entre la capa intermedia y el sustrato.

12. Finalmente, al igual que en sistemas bicapa, el conocimiento de las tensiones interfaciales permite la determinación de las cargas críticas de inicio de los correspondientes modos de daño. Se ha verificado que el acuerdo entre las predicciones de cargas críticas obtenidas mediante estas expresiones, los resultados FEM y las medidas experimentales es notable. Por tanto, estas relaciones constituyen una herramienta de gran utilidad para predecir el comportamiento en servicio de estructuras tricapa y, en consecuencia, para optimizar su diseño.

# Investigaciones futuras

Como es habitual en los trabajos científicos, este estudio ha despejado muchas incógnitas, pero también ha suscitado nuevas cuestiones. A continuación se resumen algunos de estos interrogantes, cuya resolución será objeto de futuros trabajos de investigación.

- En primer lugar, este estudio se ha enfocado al análisis de modos de daño primarios, sin prestar atención a su posterior evolución. Estas cuestiones son ciertamente relevantes cuando el objetivo es optimizar la tolerancia (que no la resistencia) al daño de estructuras multicapa. Una vez iniciado el daño, el análisis de tensiones deja de ser lineal y, por tanto, los elementos finitos son la única alternativa posible para abordar este tipo de estudios.
- Otro aspecto que debería ser objeto de futuras investigaciones es la posibilidad de obtener información de las distribuciones de defectos en el recubrimiento,  $S(c)$ , a partir de medidas de las cargas críticas de inicio de fisuras radiales,  $P_R^c(d)$ , utilizando la ecuación (5.21). Esto sería especialmente valioso en materiales cerámicos policristalinos, en los que resulta muy complejo caracterizar las poblaciones de defectos por otros medios.
- También se plantean incógnitas en cuanto a la fatiga en estructuras multicapa en general. En particular, queda por analizar sistemáticamente los fenómenos de fatiga en sistemas tricapa. También es necesario investigar este tipo de fenómenos en sistemas bicapa distintos del sistema cerámico/polímero analizado en este estudio, muy especialmente en sistemas bicapa fabricados sin adhesivos.

- Algunos de los resultados presentados en este estudio han puesto de manifiesto el importantísimo efecto del adhesivo en el comportamiento mecánico bajo contacto de estructuras multicapa. Por consiguiente, se hace necesario realizar un estudio sistemático sobre la influencia tanto del espesor como de las propiedades mecánicas del adhesivo en las cargas críticas de sistemas multicapa.
- Uno de los modos de daño que más limita la vida útil de sistemas multicapa es la delaminación. Por ello, la extensión del análisis realizado para abarcar este modo de daño tiene un extraordinario interés práctico.
- Por último, sería útil extender el estudio del daño por contacto en estructuras multicapa a temperaturas más elevadas. Por supuesto, un primer paso en esta dirección sería estudiar el daño por contacto a alta temperatura en materiales cerámicos masivos. Este aspecto, constituye el tema central de un proyecto de investigación (MCYT) recientemente solicitado por el Grupo Especializado de Materiales de la Universidad de Extremadura.

# Bibliografía

- [1] D. TABOR. *The Hardness Of Metals*. Oxford University Press, Londres, Reino Unido, 1<sup>a</sup> edición, 1951.
- [2] B. R. LAWN. Indentation of ceramics with spheres: A century after hertz. *J. Am. Ceram. Soc.*, **81**(8):1977–94, 1998.
- [3] B. R. LAWN, N. P. PADTURE, H. CAI, Y F. GUIBERTEAU. Making ceramics 'ductile'. *Science*, **263**:1114–16, 1994.
- [4] Y-G. JUNG, S. WUTTIPHAN, I.M. PETERSON, Y B. R. LAWN. Damage modes in dental layer structures. *J. Dent. Res.*, **78**(4):887–97, 1999.
- [5] H. CHAI, B. R. LAWN, Y S. WUTTIPHAN. Fracture modes in brittle coatings with large interlayer modulus mismatch. *J. Mater. Res.*, **14**(9):3805–17, 1999.
- [6] B. R. LAWN Y R. WILSHAW. Review. indentation fracture: Principles and applications. *J. Mater. Sci.*, **10**(6):1049–1081, 1975.
- [7] I. N. SNEDDON. *Fourier Transforms*. McGraw-Hill, Nueva York, EEUU, 1<sup>a</sup> edición, 1951. Cap. 9 y 10.
- [8] I. N. SNEDDON. The relation between load and penetration in the axisymmetric boussineq problem for a punch of arbitrary profile. *Int. J. Engng. Sci.*, **3**:47–57, 1965.
- [9] K. L. JOHNSON. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Londres, Reino Unido, 1985.

- [10] H. HERTZ. *Hertz's Miscellaneous Papers*. Macmillan, Londres, Reino Unido, 1896. Cap. 5 y 6.
- [11] H. HERTZ. Über die berührung fester elastischer körper (sobre el contacto de los sólidos elásticos). *J. reine und angewandte Mathematik*, (92):156–171, 1881. Traducido al inglés en <sup>[10]</sup>.
- [12] H. HERTZ. Verhandlungen des vereins zur beförderung des gewerbe fleisses. *J. reine und angewandte Mathematik*, (61):449, 1882. Traducido al inglés en <sup>[10]</sup>.
- [13] S. TIMOSHENKO Y J.N. GOODIER. *Teoría De La Elasticidad*. Urmo, Bilbao, España, 2ª edición, 1975.
- [14] J. BOUSSINESQ. *Application Des Potentiels À L'Étude De L'Équilibre Et Du Mouvement Des Solides Élastiques*. Gauthier-Villars, París, Francia, 1885.
- [15] M. T. HUBER. Zur theorie der berührung fester elastische körper. *Ann. Phys. (Leipzig)*, **43**(61):153–63, 1904.
- [16] F. GUIBERTEAU, N.P. PADTURE, H. CAI, Y B. R. LAWN. Indentation fatigue: A simple cyclic hertzian test for measuring damage accumulation in polycrystalline ceramics. *Philos. Mag.*, **A68**(5):1003–16, 1993.
- [17] F. C. FRANK Y B. R. LAWN. On the theory of hertzian fracture. *Proc. R. Soc. London*, **A299**(1458):291–306, 1967.
- [18] M. V. SWAIN Y B. R. LAWN. A study of dislocation arrays at spherical indentations in lif as a function of indentation stress and strain. *Phys. Status Solidi*, **35**(5):909–23, 1969.
- [19] A. L. ORTIZ. *Control Microestructural De Cerámicos Avanzados SiC Sinterizados Con Fase Líquida  $Y_2O_3 - Al_2O_3$* . Tesis doctoral en física, Dpto. Física. Universidad de Extremadura, Badajoz, España, Febrero 2002.
- [20] P. MIRANDA. *Estudio Experimental Y Simulación FEM De Materiales Multicapa Bajo La Acción De Tensiones De Contacto*. Tesis de licenciatura en física, Dpto. Física. Universidad de Extremadura, Badajoz, España, Noviembre 1999.
- [21] I. ORTIZ BERROCAL. *Curso De Elasticidad Y Resistencia De Materiales*. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, España, 2ª edición, 1985.

- [22] A. SAMARTÍN QUIROGA. *Curso De Elasticidad*. Bellisco, Madrid, España, 1ª edición, 1990.
- [23] R. M. DAVIES. Determination of static and dynamic yield stresses using a steel ball. *Proc. R. Soc. London*, **1050**(A197):416–32, 1949.
- [24] Y-W. RHEE, H-W. KIM, Y. DENG, Y B. R. LAWN. Brittle fracture versus quasi plasticity in ceramics: A simple predictive index. *J. Am. Ceram. Soc.*, **84**(3):561–65, 2001.
- [25] J. P. TILLET. Fracture of glass by spherical indenters. *Proc. Phys. Soc. London*, **B69**(433):47–54, 1956.
- [26] F. C. ROESLER. Brittle fractures near equilibrium. *Proc. R. Soc. London*, **B69**:981–992, 1956.
- [27] B. R. LAWN. *Fracture Of Brittle Solids*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2ª edición, 1993.
- [28] S. TOLANSKY Y V. R. HOWES. Induction of ring cracks on diamond surfaces. *Proc. Phys. Soc. London*, **B70**:521–26, 1957.
- [29] B. R. LAWN. Hertzian fracture in single crystal with the diamond structure. *J. Appl. Phys.*, **39**(10):4828–36, 1968.
- [30] S. K. LEE, S. WUTTIPHAN, Y B. R. LAWN. Role of microstructure in hertzian contact damage in silicon nitride: I. mechanical characterization. *J. Am. Ceram. Soc.*, **80**(9):2367–81, 1997.
- [31] G. I. BARENBLATT. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, **7**:55–129, 1962.
- [32] P. D. WARREN. Determining the fracture toughness of brittle materials by hertzian indentation. *J. Eur. Ceram. Soc.*, **15**:201–7, 1995.
- [33] J. S. WILLIAMS, B. R. LAWN, Y M. V. SWAIN. Cone crack closure in brittle solids. *Phys. Status Solidi A*, **2**:7–29, 1970.
- [34] S. S. CHIANG, D. B. MARSHALL, Y A. G. EVANS. The response of solids to elastic/plastic indentation, i. stresses and residual stresses. *J. Appl. Phys.*, **53**:298–311, 1982.

- [35] B. R. LAWN, S. M. WIEDERHORN, Y D. E. ROBERTS. Effect of sliding friction forces on the strength of brittle materials. *J. Mater. Sci.*, **19**:2561, 1984.
- [36] B. R. LAWN. Partial cone crack formation in a brittle material loaded with a sliding spherical indenter. *Proc. R. Soc. London*, **A299**:291, 1967.
- [37] F. AUERBACH. Measurement of hardness. *Ann. Phys. Chem.*, **43**:61, 1891.
- [38] A. S. ARGON. Distribution of cracks on glass surfaces. *Proc. R. Soc. London*, **A250**:482–492, 1959.
- [39] H. L. OH Y I. FINNIE. The ring cracking of glass by spherical indenters. *J. Mech. Phys. Solids*, **15**:401–11, 1967.
- [40] F. B. LANGITAN Y B. R. LAWN. Hertzian fracture experiments on abraded glass surfaces as definitive evidence for an energy balance explanation of auerbach's law. *J. Appl. Phys.*, **40**(10):4009–17, 1969.
- [41] F. B. LANGITAN Y B. R. LAWN. Effect of a reactive enviroment on the hertzian strength of brittle solids. *J. Appl. Phys.*, **41**(8):3357–65, 1970.
- [42] D. K. KIM, Y-G. JUNG, I. M. PETERSON, Y B. R. LAWN. Cyclic fatigue of intrinsically brittle ceramics in contact with spheres. *Acta Mater.*, **47**(18):4711–25, 1999.
- [43] H. CAI, M. A. STEVENS KALCEFF, Y B. R. LAWN. Deformation and fracture of mica-containing glass-ceramics in hertzian contacts. *J. Mater. Res.*, **9**(3), 1994.
- [44] F. GUIBERTEAU, N.P. PADTURE, Y B. R. LAWN. Effect of grain size on hertzian contact in alumina. *J. Am. Ceram. Soc.*, **77**(7):1825–31, 1994.
- [45] A. C. FISCHER-CRIPPS Y B. R. LAWN. Stress analysis of contact deformation in quasi-plastic ceramics. *J. Am. Ceram. Soc.*, **79**(10):2609–18, 1996.
- [46] N. P. PADTURE Y B. R. LAWN. Toughness properties of a silicon carbide with an *in-situ*-induced heterogeneous grain structure. *J. Am. Ceram. Soc.*, **77**(10):2518–22, 1996.

- [47] A. PAJARES, L. WEI, B. R. LAWN, Y D. B. MARSHALL. Damage accumulation and cyclic fatigue in mg-psz at hertzian contacts. *J. Mater. Res.*, **10**(10):2613–25, 1995.
- [48] A. PAJARES, F. GUIBERTEAU, B. R. LAWN, Y S. LATHABAI. Hertzian contact damage in magnesia-partially-stabilized zirconia. *J. Am. Ceram. Soc.*, **78**(4):1083–6, 1995.
- [49] H. H. K. XU, L. WEI, N. P. PADTURE, B. R. LAWN, Y R. L. YECKLEY. Effect of microstructural coarsening on hertzian contact damage in silicon nitride. *J. Mater. Sci.*, **30**:869–78, 1995.
- [50] B. R. LAWN, N. P. PADTURE, F. GUIBERTEAU, Y H. CAI. A model for microcrack initiation and propagation beneath hertzian contacts in polycrystalline ceramics. *Acta Metall. et Mater.*, **42**(5):1683–93, 1994.
- [51] Y-G. JUNG, I.M. PETERSON, D. K. KIM, Y B. R. LAWN. Lifetime-limiting strength degradation from contact fatigue in dental ceramics. *J. Dent. Res.*, **79**(2):722–31, 2000.
- [52] B. R. LAWN, S. K. LEE, I. M. PETERSON, Y S. WUTTIPHAN. A model of strength degradation from hertzian contact damage in tough ceramics. *J. Am. Ceram. Soc.*, **81**(6):1509–20, 1998.
- [53] J. B. QUINN Y G. D. QUINN. Indentation brittleness of ceramics: A fresh approach. *J. Mater. Sci.*, **32**(16):4331–46, 1998.
- [54] B. R. LAWN Y D. B. MARSHALL. Hardness, toughness and brittleness: An indentation analysis. *J. Am. Ceram. Soc.*, **62**:347, 1979.
- [55] E.H. YOFFE. Elastic stress fields caused by indenting brittle materials. *Philos. Mag.*, **A46**(4):617–628, 1982.
- [56] S. P. TIMOSHENKO Y S. WOINOWSKY-KRIGER. *Theory Of Plates And Shells*. McGraw-Hill, Nueva York, EEUU, 2<sup>a</sup> edición, 1959.
- [57] M. SPIVAK. *A Comprehensive Introduction To Differential Geometry*. Publish or Perish, Waltham, EEUU, 1979.
- [58] C. Y. CHIA. *Non-Linear Analysis Of Plates*. McGraw-Hill, 1980.
- [59] *Memoirs Of The Academy*, volume 8. París, Francia, 1829.

- [60] V. I. FEODÓSIEV. *Resistencia De materiales*. URSS, Moscú, Rusia, 1997.
- [61] I. ORTIZ BERROCAL. *Resistencia De Materiales*. McGraw-Hill, Madrid, España, 1997.
- [62] D. L. HOLL. In *Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech.*, Cambridge, Mass. EEUU, 1938.
- [63] H. M. WESTERGAARD. *Ingeniøren*, **32**:513, 1923.
- [64] M. I. PORTER Y D. A. HILLS. Note on the complete contact between a flat rigid punch and an elastic layer attached to a dissimilar substrate. *Int. J. Mech. Sci.*, **44**:509–520, 2002.
- [65] D. NOWELL Y D. A. HILLS. Contact problems incorporating elastic layers. *Int. J. Solids Structures*, **24**(1):105–115, 1988.
- [66] V. M. ALEKSANDROV. An approximate solution of some integral equations of the theory of elasticity and mathematical physics. *PMM*, **31**(6):1117–1131, 1967.
- [67] N. N. LEBEDEV Y I. S. UFLIAND. Axisymmetric contact problems for an elastic layer. *PMM*, **22**(3):320–326, 1958.
- [68] D. W. PEPPER Y J. C. HEINRICH. *The Finite Element Method. Basic Concepts And Applications*. Hemisphere Publishing Corporation, 1ª edición, 1992.
- [69] B. G. GALERKIN. Series solution of some problems of elastic equilibrium of rods and plates. *Vestn. Inzh. Tech.*, (19):897–908, 1915.
- [70] R. COURANT Y D. HILBERT. *Methods Of Mathematical Physics*, volume 1. Wiley Interscience, 1ª edición, 1953.
- [71] D. KINCAID Y W. CHENEY. *Análisis Numérico, Las Matemáticas Del Cálculo Científico*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1ª edición, 1994.
- [72] R. S. SCHECHTER. *The Variational Method In Engineering*. McGraw-Hill, 1ª edición, 1967.
- [73] O. C. ZIENKIEWICZ Y R. L. TAYLOR. *The Finite Element Method*, volume 1. McGraw-Hill, 4ª edición, 1989.

- [74] M. J. TURNER, R. W. CLOUGH, H. C. MARTIN, Y L. J. TOPP. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aeronautical Sci.*, **23**, 1956.
- [75] R. W. CLOUGH. The finite element in plane stress analysis. In *Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation*, Sept. 1960.
- [76] J. BONET Y R. D. WOOD. *Nonlinear Continuum Mechanics For Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, 1997.
- [77] M. A. CRISFIELD. *Nonlinear Finite Element Analysis Of Solids And Structures*. John Wiley and sons, 1991.
- [78] T. J. R. HUGHES. *The Finite Element Method. Linear Static And Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice Hall International Editions, 1987.
- [79] E. OÑATE. *Cálculo De Estructuras Por El Método De Los Elementos Finitos. Análisis Estático Lineal*. CIMNE, 2ª edición, 1995.
- [80] E. HINTON Y D. R. J. OWEN. *An Introduction To Finite Element Computations*. Pineridge Press Limited, Swansea, Reino Unido, 1ª edición, 1979.
- [81] P. J. DAVIS Y P. RABINOWITZ. *Methods Of Numerical Integration*. Academic Press, New York, 1975.
- [82] E. WILSON, R. TAYLOR, W. DOHERTY, Y J. GHABOUSSI. *Incompatible Displacements Models. Numerical And Computer Methods In Structural Mechanics*. Academic Press, 1973.
- [83] J. SIMÓ Y S. RIFAI. A class of mixed assumed methods and the method of incompatible modes. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **29**:1595–1638, 1990.
- [84] Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc. *ABAQUS Theory Manual, Versión 5.8*.
- [85] J. C. SIMÓ Y T. J. R. HUGHES. *Computational Inelasticity*. Springer, 1997.
- [86] J. L. DE LA FUENTE. *Técnicas De Cálculo Para Sistemas De Ecuaciones. Programación Lineal Y Programación Entera*. Reverté, 1998.
- [87] G. ARFKEN. *Mathematical Methods For Physicist*. Academic Press, 3ª edición, 1985.
- [88] G. SIMMONS. *Ecuaciones Diferenciales*. McGraw-Hill, 2ª edición, 1993.

- [89] BURDEN Y FAIRES. *Análisis Numérico*. International Thompson, 1998.
- [90] Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc. *ABAQUS/Standard User's Manual, Versión 6.2*.
- [91] Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc. *ABAQUS/CAE User's Manual, Versión 6.2*.
- [92] Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc. *ABAQUS/Viewer User's Manual, Versión 6.2*.
- [93] I. M. PETERSON, A. PAJARES, B. R. LAWN, V. P. THOMPSON, Y E. D. REKOW. Mechanical characterization of dental ceramics by hertzian contacts. *J. Dent. Res.*, **77**(4):589–602, 1998.
- [94] R. DELONG Y W. H. DOUGLAS. Development of an artificial oral environment for testing of dental restoratives: Bi-axial force and movement control. *J. Dent. Res.*, (62):32–36, 1983.
- [95] ASTM E-1876. Standard test method for dynamic young's modulus, shear modulus, and poisson's ratio by impulse excitation of vibration. *Annual Book of ASTM Standards*, 1997.
- [96] B. R. LAWN Y D. B. MARSHALL. Nonlinear stress-strain curves for solids containing closed cracks with friction. *J. Mech. Phys. Solids*, **1**(46):85–113, 1998.
- [97] J. S. WANG, Y. SUGIMURA, A. G. EVANS, Y W. K. TREDWAY. The mechanical performance of dlc films on steel substrates. *Thin Solid Films*, **325**:163–74, 1998.
- [98] A. PAJARES, L. WEI, Y B. R. LAWN. Contact damage in plasma-sprayed alumina-based coatings. *J. Am. Ceram. Soc.*, **79**(7):1907–14, 1996.
- [99] K. S. LEE, S. WUTTIPHAN, X-Z. HU, S. K. LEE, Y B. R. LAWN. Contact-induced transverse fractures in brittle layers on soft substrates: A study on silicon nitride bilayers. *J. Am. Ceram. Soc.*, **81**(3):571–80, 1998.
- [100] B. R. LAWN Y S. WUTTIPHAN. Analysis of contact-induced transverse fractures in brittle coatings on soft substrates. *J. Am. Ceram. Soc.*, 1999. En publicación.

- [101] A. C. FISCHER-CRIPPS, B. R. LAWN, A. PAJARES, Y L. WEI. Stress analysis of elastic-plastic contact damage in ceramic coatings on metal substrates. *J. Am. Ceram. Soc.*, **79**(10):2619–25, 1996.
- [102] J. R. KELLY. Clinically relevant approach to failure testing of all-ceramic restorations. *J. Prosthet. Dent.*, **81**:652–61, 1999.
- [103] H. ZHAO, X. Z. HU, M. B. BUSH, Y B. R. LAWN. Cracking of porcelain coatings bonded to metal substrates of different modulus and hardness. *J. Mater. Res.*, **16**(5):1471–1478, 2000.
- [104] H. ZHAO, X. Z. HU, M. B. BUSH, Y B. R. LAWN. Contact damage in porcelain/pd-alloy bilayers. *J. Mater. Res.*, **15**(3):676–682, 2000.
- [105] S. WUTTIPHAN, B. R. LAWN, Y N. P. PADTURE. Crack suppression in strongly bonded homogeneous/heterogeneous laminates: A study on glass/glass-ceramic bilayers. *J. Am. Ceram. Soc.*, **79**(3):634–40, 1996.
- [106] S. WUTTIPHAN, A. PAJARES, B. R. LAWN, Y C. C. BERNDT. Effect of substrate and bond coat on contact damage in zirconia-based plasma-sprayed coatings. *Thin Solid Films*, **293**:251–260, 1997.
- [107] B. R. LAWN, K. S. LEE, H. CHAI, A. PAJARES, D. K. KIM, S. WUTTIPHAN, I. M. PETERSON, Y X. HU. Damage-resistant brittle coatings. *Adv. Eng. Mater.*, **2**(11):745–7, 2000.
- [108] H-W. KIM, Y. DENG, P. MIRANDA, A. PAJARES, D. K. KIM, H-E. KIM, Y B. R. LAWN. Effect of flaw state on the strength of brittle coatings on soft substrates. *J. Am. Ceram. Soc.*, **84**(10):2377–84, 2001.
- [109] K. S. LEE, Y-W. RHEE, D. H. BLACKBURN, B. R. LAWN, Y H. CHAI. Cracking of brittle coatings adhesively bonded to substrates of unlike modulus. *J. Mater. Res.*, **15**(83):1653–56, 2000.
- [110] B. R. LAWN, Y. DENG, P. MIRANDA, A. PAJARES, H. CHAI, Y D. K. KIM. Overview: Damage in brittle layer structures from concentrated loads. *J. Mater. Res.*, **17**(12):3019–36, 2002.
- [111] Y-W. RHEE, H-W. KIM, Y. DENG, Y B. R. LAWN. Contact-induced damage in ceramic coatings on compliant substrates: Fracture mechanics and design. *J. Am. Ceram. Soc.*, **84**(5):1066–72, 2001.

- [112] S. M. WIEDERHORN Y B. R. LAWN. Strength degradation of glass impacted with sharp particles: I, annealed surface. *J. Am. Ceram. Soc.*, **62**:66–70, 1979.
- [113] D. B. MARSHALL Y B. R. LAWN. Residual stresses in dynamic fatigue of abraded glass. *J. Am. Ceram. Soc.*, **64**(C-6), 1981.
- [114] S. M. WIEDERHORN. Fracture surface energy of glass. *J. Am. Ceram. Soc.*, **52**(2), 1969.
- [115] S. M. WIEDERHORN Y L. H. BOLZ. Stress corrosion and static fatigue of glass. *J. Am. Ceram. Soc.*, **53**:543–548, 1970.
- [116] S. M. WIEDERHORN. Influence of water vapor on crack propagation in soda-lime glass. *J. Am. Ceram. Soc.*, **50**(8), 1967.
- [117] K. S. LEE, Y-G. JUNG, I. M. PETERSON, B.R. LAWN, D.K. KIM, Y S.K. LEE. Model for cyclic fatigue of quasiplastic ceramics in contact with spheres. *J. Am. Ceram. Soc.*, **83**(9):2255–62, 2000.
- [118] J-G. YEO, K. S. LEE, Y B.R. LAWN. Role of microstructure in dynamic fatigue of glass-ceramics after contact with spheres. *J. Am. Ceram. Soc.*, **83**(6):1545–47, 2000.
- [119] S. J. BENNISON, A. JAGOTA, Y C. A. SMITH. Fracture of glass/poly(vinyl butyral) (butacite®) laminates in biaxial flexure. *J. Am. Ceram. Soc.*, **82**(7):1761–70, 1999.
- [120] S. SURESH. *Fatigue Of Materials*. Cambridge University Press, 1991.
- [121] S. M. WIEDERHORN. *Subcritical Crack Growth In Ceramics en Fracture Mechanics of Ceramics*, volume 2, page 613. Plenum, New York, 1974. Editado por R. C. Bradt, F. F. Lange y D. P. H. Hasselman.
- [122] B. R. LAWN, D. B. MARSHALL, Y P. CHANTIKUL. Mechanics of strength degrading flaws in silicon. *J. Mater. Sci.*, **16**(7):1769–75, 1981.
- [123] D. B. MARSHALL Y B. R. LAWN. Residual stress effect in sharp-contact cracking: I. indentation fracture mechanics. *J. Mater. Sci.*, **14**(8):2001–12, 1979.

- 
- [124] D. B. MARSHALL, B. R. LAWN, Y P. CHANTIKUL. Residual stress effect in sharp-contact cracking: Ii. strength degradation. *J. Mater. Sci.*, **14**(9):2225–35, 1979.
- [125] D. B. MARSHALL Y B. R. LAWN. Flaw characteristics in dynamic fatigue: The influence of residual contact stresses. *J. Am. Ceram. Soc.*, **63**(9-10):532–36, 1980.
- [126] E. R. FULLER, B. R. LAWN, Y R. F. COOK. Theory of fatigue for brittle flaws originating from residual stress concentrations. *J. Am. Ceram. Soc.*, **66**(5):314–21, 1983.
- [127] T. P. DABBS, B. R. LAWN, Y P. L. KELLY. A dynamic fatigue study of soda-lime and borosilicate glasses using small-scale indentation flaws. *Phys. Chem. Glasses*, **23**(2):58–66, 1982.
- [128] J. E. RITTER Y M. R. LIN. Effect of polymer coatings on the strength and fatigue behaviour of indented soda-lime glass. *Glass Tech.*, **32**(2):51–54, 1991.
- [129] H. CHAI Y B. R. LAWN. Cracking in brittle laminates from concentrated loads. *Acta Mater.*, **50**(10):2613–25, 2002.
- [130] T.-J. CHUANG Y S. LEE. Elastic flexure of bilayered beams subject to strain differentials. *J. Mater. Res.*, **15**(12):2780–2788, 2000.
- [131] C.-H. HSUEH Y P. MIRANDA. Modeling of contact-induced radial cracking in ceramic bilayer coatings on compliant substrates. *J. Mater. Res.* En publicación.