



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

Título
Aplicación de técnicas estadísticas y de inteligencia computacional al problema de la propagación de órbitas
Autor/es
Iván Pérez Barrón
Director/es
Juan Félix San Juan Díaz y Montserrat San Martín Pérez
Facultad
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial
Titulación
Departamento
Ingeniería Eléctrica
Curso Académico
2014-2015



Aplicación de técnicas estadísticas y de inteligencia computacional al problema de la propagación de órbitas, tesis doctoral de Iván Pérez Barrón , dirigida por Juan Félix San Juan Díaz y Montserrat San Martín Pérez (publicada por la Universidad de La Rioja), se difunde bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported. Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los titulares del copyright.

© El autor
© Universidad de La Rioja, Servicio de Publicaciones, 2015
publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

Aplicación de técnicas estadísticas y de
inteligencia computacional al problema
de la propagación de órbitas



TESIS DOCTORAL

2015

Iván Pérez Barrón

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial
Universidad de La Rioja

Aplicación de técnicas estadísticas y
de inteligencia computacional al
problema de la propagación de
órbitas

*Memoria que presenta para optar al título de
Doctor Ingeniero Industrial*

Iván Pérez Barrón

Dirigida por los Doctores

Juan Félix San Juan Díaz

Montserrat San Martín Pérez

**Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial
Universidad de La Rioja**

A mi madre

Agradecimientos

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a Juan Félix San Juan, cabeza del Grupo de Computación Científica, trabajador infatigable, investigador brillante y persona de excelente calidad humana, por su apoyo permanente e incondicional en cualquier circunstancia.

Deseo asimismo expresar mi reconocimiento hacia mis compañeros del Grupo de Computación Científica, Rosario López, Montserrat San Martín y David Ortigosa, pues gracias a todos ellos he podido desarrollar mi actividad investigadora y elaborar esta Tesis Doctoral.

Este trabajo ha sido financiado a través de los Proyectos de I+D+I *Fomenta 2010/16* (Consejería de Educación, Cultura y Turismo, Gobierno de La Rioja) y *ESP2014-57071-R* (Programa Estatal de Investigación, Desarrollo e Innovación Orientada a los Retos de la Sociedad, Ministerio de Economía y Competitividad, Gobierno de España), así como a través de las ayudas para la realización de Tesis Doctorales en la Universidad de La Rioja *ATUR13/28*, *ATUR14/30* y *ATUR15/26* (Vicerrectorado de Investigación, Transferencia del Conocimiento y Posgrado, Universidad de La Rioja).

Índice

Agradecimientos	VII
Introducción	XV
Antecedentes	XV
Publicaciones	XVII
Continuación de los trabajos	XVIII
Estructura del documento	XIX
1. Propagadores Híbridos e Interpolación	1
Resumen	1
1.1. Introducción	1
1.2. Metodología híbrida de perturbaciones	3
1.3. Método de suavizado exponencial en predicción de series temporales	4
1.4. Aplicación de la metodología híbrida	7
1.5. Creación de una malla a partir de los datos de control	12
1.6. Propagación de nuevas órbitas	14
2. Validación Numérica: Delaunay vs KBM	23
Resumen	23
2.1. Introducción	24
2.2. Teorías analíticas	25
2.3. Metodología	27
2.3.1. Datos para el estudio	27
2.3.2. Análisis exploratorio de datos (EDA)	27
2.4. DN vs KBM para el modelo J_2 - J_4	28
2.4.1. Horizonte de propagación de 7 días	29
2.4.2. Horizonte de propagación de 30 días	35
2.5. Outliers en el entorno de la inclinación crítica	37
2.5.1. Perturbaciones J_2 - J_4	40
2.5.2. Perturbaciones J_2 - J_{12}	43

3. Resultados	49
3.1. Métodos híbridos de propagación de órbitas	49
3.2. Interpolación de propagadores híbridos	50
3.3. Delaunay vs KBM	51
4. Conclusiones y trabajos futuros	53
4.1. Conclusiones	53
4.2. Líneas de trabajo futuras	55
A. Artículo I	57
B. Artículo II	75
C. Artículo III	89
Bibliografía	105

Índice de figuras

1.1.	Excentricidad e inclinación inicial del satélite estudiado.	7
1.2.	Gráficos de secuencia de las series ε_t^l , ε_t^h y ε_t^I	9
1.3.	Periodogramas (izquierda) y funciones de autocorrelación (derecha) de las series ε_t^l , ε_t^h y ε_t^I	10
1.4.	Diferencia entre los elementos orbitales correspondientes a las propagaciones numérica e híbrida del satélite estudiado.	11
1.5.	Errores en distancia, along-track, cross-track y radial correspondientes a la propagación híbrida del satélite estudiado.	13
1.6.	Malla de condiciones iniciales construida alrededor del satélite estudiado.	13
1.7.	Diagramas de caja de los errores en distancia, along-track, cross-track y radial correspondientes a la propagación híbrida de las condiciones iniciales de la malla para diferentes horizontes de propagación.	15
1.8.	Condiciones iniciales intermedias a propagar en el entorno del satélite estudiado.	16
1.9.	Errores en distancia, along-track, cross-track y radial correspondientes a la propagación híbrida mediante interpolación spline de las tres condiciones iniciales intermedias, frente a los diagramas de caja con las distribuciones de los correspondientes errores de posición de la malla.	18
1.10.	Errores en distancia, along-track, cross-track y radial correspondientes a las propagaciones híbrida (rojo) e híbrida mediante interpolación spline (azul) de las condiciones iniciales intermedias I_{e2}	20
1.11.	Errores en distancia, along-track, cross-track y radial correspondientes a las propagaciones híbrida (rojo) e híbrida mediante interpolación spline (azul) de las condiciones iniciales intermedias I_{ei}	21
2.1.	Dos métodos de integración del intermediario radial \mathcal{H}''	26

2.2. Diagramas de caja de los errores en distancia de DN y KBM para un horizonte de propagación de 7 días.	29
2.3. Distribución de excentricidad frente a inclinación para un horizonte de propagación de 7 días.	30
2.4. Método de normalización de Delaunay para un horizonte de propagación de 7 días.	32
2.5. Método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky para un horizonte de propagación de 7 días.	33
2.6. Diagramas de caja de errores de los elementos orbitales para DN y KBM con $e < 0.01$ para un horizonte de propagación de 7 días.	34
2.7. Outliers de KBM ($e > 0.5$ e $i < 1.5^\circ$) para un horizonte de propagación de 7 días.	34
2.8. Diagramas de caja de los errores en distancia de DN y KBM para un horizonte de propagación de 30 días.	35
2.9. Distribución de excentricidad frente a inclinación para un horizonte de propagación de 30 días.	36
2.10. Método de normalización de Delaunay para un horizonte de propagación de 30 días.	38
2.11. Método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky para un horizonte de propagación de 30 días.	39
2.12. Diagramas de caja de los errores en distancia de DN y KBM, en diferentes intervalos de excentricidad, para un horizonte de propagación de 30 días.	40
2.13. Comparación entre los errores en distancia de DN2 y KBM2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días.	42
2.14. Errores en distancia, along-track, cross-track y radial de DN2 y KBM2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días.	43
2.15. Diagramas de caja de los errores en distancia de KBMJ12 y KBMJ12_2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días.	44
2.16. Errores en distancia, along-track, cross-track y radial de KBMJ12_2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días.	46
2.17. Diagramas de caja de los errores en distancia de KBMJ12, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días.	46
2.18. Diagramas de caja de los errores en distancia de KBMJ12 y KBMJ12_2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días.	47

Índice de Tablas

1.1. Error en distancia (km) tras la propagación del satélite estudiado.	12
1.2. Error en distancia (km) tras la propagación híbrida interpolada de las condiciones iniciales intermedias I_{e2} mediante diferentes métodos de interpolación.	17
1.3. Error en distancia (km) tras la propagación de las condiciones iniciales intermedias I_{e2}	19
1.4. Error en distancia (km) tras la propagación de las condiciones iniciales intermedias I_{4i}	19
1.5. Error en distancia (km) tras la propagación de las condiciones iniciales intermedias I_{ei}	19
2.1. Parámetros estadísticos de los errores en distancia (m) de DN y KBM para un horizonte de propagación de 7 días.	29
2.2. Parámetros estadísticos de los errores en distancia (m) de DN y KBM para un horizonte de propagación de 30 días.	35
2.3. Parámetros estadísticos de los errores en distancia (m) de DN y KBM, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días.	41
2.4. Parámetros estadísticos de los errores en distancia (m) de DN2 y KBM2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días.	41
2.5. Parámetros estadísticos de los errores en distancia (m) de DN, DN2, KBM y KBM2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días, excluidos los outliers originales.	42
2.6. Parámetros estadísticos de los errores en distancia (m) de DN, DN2, KBM y KBM2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días, correspondientes a los outliers originales.	42

-
- 2.7. Parámetros estadísticos de los errores en distancia (m) de KBMJ12 y KBMJ12_2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días. 44
 - 2.8. Parámetros estadísticos de los errores en distancia (m) de KBMJ12 y KBMJ12_2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días, clasificados según el modelo con mejor comportamiento (destacado en azul). 45
 - 2.9. Parámetros estadísticos de los errores en distancia (m) de KBMJ12 y KBMJ12_2 en el entorno de la inclinación crítica. 48

Introducción

Antecedentes

Durante los últimos años se ha producido un renovado interés por el perfeccionamiento de los métodos de propagación de órbitas, derivado de las necesidades propias de la denominada *Space Situational Awareness* (SSA), literalmente *Conciencia de la Situación Espacial*, que podría ser traducida como *Gestión Segura del Espacio*.

Tras algo más de medio siglo de actividad espacial por parte del hombre, miles de objetos de diversos tamaños permanecen en la órbita terrestre. Los satélites operativos son sólo una minoría; el resto constituye la conocida como *basura espacial*, o *space debris*: restos de satélites fuera de servicio, de lanzamientos, de explosiones y de colisiones, que, debido a su gran velocidad, tienen un elevado potencial destructivo para los vehículos espaciales y satélites operativos.

Ante este panorama, y con el fin de poder seguir garantizando una utilización segura del espacio en un futuro cada vez más cercano, el *Inter-Agency Space Debris Coordination Committee*, IADC, ha dictado una serie de recomendaciones, que están siendo incorporadas a la legislación de los países con mayor actividad espacial. De este modo, por ejemplo, Francia ha aprobado en 2008 la *Loi relative aux opérations spatiales*, que define cuatro criterios que obligatoriamente debe cumplir todo satélite para poder recibir la necesaria autorización para su lanzamiento. Tales criterios determinan el tiempo máximo durante el cual los satélites y lanzadores pueden cruzar o permanecer en dos regiones protegidas de especial interés, definidas por el IADC en las zonas LEO (*Low Earth Orbit*) y GEO (*Geostationary Earth Orbit*), tras su final de misión.

La estimación de la duración en órbita de un objeto es un complejo problema, sujeto a fenómenos altamente no lineales, que requiere de métodos de propagación muy precisos, pues para ciertas órbitas de elevada excentricidad, como las GTO (*Geostationary Transfer Orbit*), existe una dependencia muy sensible a las condiciones iniciales.

El movimiento de un satélite artificial en órbita alrededor de la Tierra está sometido a una serie de perturbaciones, las más importantes de las cua-

les están constituidas por las diversas componentes armónicas del potencial gravitatorio terrestre, el frenaje atmosférico, la presión de radiación solar y la atracción gravitatoria por parte de terceros cuerpos celestes como el Sol y la Luna. El problema de la propagación de órbitas se encarga de determinar la posición y velocidad de un satélite artificial para un instante determinado, a partir de su posición y velocidad en un instante inicial. En este proceso se maneja un sistema de ecuaciones diferenciales que, en general, no es integrable. La teoría especial de perturbaciones [35, 40] hace uso de métodos numéricos de integración, permitiendo resultados muy precisos, para lo cual se requiere, sin embargo, de pequeños pasos de integración, del orden de unos pocos minutos o segundos, que se traducen en largos procesos de cálculo, especialmente cuando se desea conocer la posición y velocidad del orbitador al cabo de cien años, como determina la aplicación de la Ley francesa.

La teoría especial de perturbaciones ha sido ampliamente utilizada para el análisis y diseño de misiones espaciales [68]. Sin embargo, las necesidades en SSA son diferentes. La valoración del riesgo de colisiones entre restos de basura espacial y satélites operativos requiere de la continua propagación de las órbitas de miles de objetos [33], para lo cual los métodos numéricos de integración no aportan la suficiente velocidad de cálculo.

Otra alternativa más ágil reside en la teoría general de perturbaciones [2, 6, 34, 36, 42]; en ella la integración se lleva a cabo de forma analítica, obteniéndose por tanto un conjunto de expresiones en función del tiempo, que permiten determinar la posición y velocidad del orbitador en cualquier instante a través de una sola evaluación de las mismas. Sin embargo, como se ha mencionado, el problema no es integrable, lo cual obliga a aplicar ciertas transformaciones y a considerar aproximaciones en la forma de desarrollos en serie. Para que el número de términos a manejar permanezca dentro de unos márgenes asequibles, con este tipo de métodos sólo pueden considerarse modelos simplificados de fuerzas, y no de todas, lo que, junto con el orden de aproximación elegido para los desarrollos, y el hecho de que los modelos matemáticos tampoco son un reflejo completamente fiel de los fenómenos físicos, compromete la exactitud de los resultados que se pueden alcanzar.

Existe, por último, otro método, la técnica semianalítica [11, 38, 45], que constituye una solución de compromiso entre las teorías general y especial de perturbaciones. Al igual que en la primera, se aplican ciertas transformaciones analíticas y, en este caso, se lleva a cabo un proceso de promediado que convierte los elementos orbitales oscultrices en elementos medios. Una vez eliminadas las variaciones de corto periodo, que no son trascendentes para la propagación a largo plazo, se puede llevar a cabo una integración de las variaciones seculares y de largo periodo mediante métodos numéricos, tomando un paso de integración largo, del orden de un día, que contribuye a una drástica reducción del tiempo de cálculo respecto de la teoría especial de perturbaciones. La realización de una transformación inversa en el instante

final permite recuperar los elementos orbitales osculatrices, necesarios para poder ofrecer un resultado preciso.

En este contexto, desde el Grupo de Computación Científica de la Universidad de La Rioja se ha propuesto una nueva metodología, la teoría híbrida de perturbaciones [49, 57, 58, 59, 60, 61]. Este método consta de dos etapas: una primera fase de integración, en la que se obtiene una aproximación inicial a la solución por medio de una de las tres técnicas clásicas, seguida por una fase de predicción en la que, una vez modelizada la dinámica no contenida en la aproximación inicial, se estima su valor para un instante futuro, con el objeto de complementar dicha aproximación y generar un resultado más preciso. De este modo, el método puede recoger no sólo el efecto de las simplificaciones introducidas en las expresiones matemáticas, sino también las diferencias entre los modelos y los fenómenos físicos reales.

Publicaciones

En el primero de los artículos que se incorporan en esta Tesis Doctoral, “*An economic hybrid J_2 analytical orbit propagator program based on SARI-MA models*” [58], se presenta la metodología híbrida y se diseña un propagador con el objetivo de mejorar la precisión de los métodos analíticos (teoría general de perturbaciones) sin incurrir en la elevada carga computacional propia de los métodos numéricos (teoría especial de perturbaciones).

Se propone un método híbrido de propagación formado por la asociación de un método analítico básico, y computacionalmente eficiente, junto con una segunda etapa de compensación del error de dicha aproximación analítica por medio de modelos SARIMA [5] aplicados a la predicción de series temporales. Para poder evaluar los resultados, se determina una solución precisa por medio de un método numérico [20], computacionalmente intensivo, respecto de la cual se comparan los errores cometidos tanto por la aproximación analítica como por el método híbrido.

El segundo artículo, “*Application of computational intelligence in order to develop hybrid orbit propagation methods*” [49], supone un nuevo avance en el desarrollo de los métodos híbridos de propagación de órbitas. En este caso, la novedad radica en el uso de la inteligencia computacional [25, 48, 71, 72, 73, 74] en la segunda etapa del método. El objetivo es analizar si la utilización de este tipo de técnicas puede ser viable en el campo de la propagación orbital mediante métodos híbridos.

Para ello se considera la serie temporal del error de la aproximación de partida durante un intervalo inicial de datos de control. Dicha serie recoge la dinámica no contenida en la aproximación de partida, debido a que, con el fin de mantener la complejidad y carga computacional dentro de unos márgenes aceptables, en su modelo no han sido incluidas todas las perturbaciones existentes, y los desarrollos en serie se han limitado a un orden reducido.

Se entrena una red neuronal con dicha serie temporal, logrando modelizar de esta forma la dinámica que falta en la aproximación de partida. Ello permite utilizar la red neuronal para predecir los valores que habrán de complementar a las aproximaciones de la primera etapa una vez finalizado el periodo de control.

Según se ha descrito, los métodos híbridos parten de una aproximación inicial, que en una segunda etapa es complementada mediante técnicas de procesamiento de series temporales, capaces de determinar el error de la aproximación de partida. Una vez comprobada la viabilidad de este tipo de métodos mediante la utilización en la segunda etapa de técnicas tanto de tipo estadístico (primer artículo, “*An economic hybrid J_2 analytical orbit propagator program based on SARIMA models*” [58]) como de inteligencia computacional (segundo artículo, “*Application of computational intelligence in order to develop hybrid orbit propagation methods*” [49]), en el tercer artículo (“*Numerical validation of the Delaunay normalization and the Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky method*” [47]) se profundiza en el estudio de la etapa inicial que proporciona la aproximación de partida.

Concretamente, se analizan dos de las técnicas que pueden ser utilizadas en la teoría general de perturbaciones para la eliminación de los términos de corto periodo, y que están siendo estudiadas para derivar a partir de ellas métodos híbridos de propagación: la normalización de Delaunay (DN) [18] y el método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky (KBM) [4, 37]. En ambos casos se lleva a cabo un análisis exploratorio de datos [66], a partir de un catálogo espacial formado por 14208 órbitas de objetos reales, con el objetivo de evaluar el comportamiento de ambos métodos en función del tipo de órbita.

Continuación de los trabajos

El doctorando, junto con otros miembros del Grupo de Computación Científica, ha continuado trabajando en la línea de investigación presentada en esta Tesis Doctoral con posterioridad a la publicación de los artículos que incorpora, e incluye en la misma contenidos adicionales de dichos trabajos.

Por una parte, se está estudiando el efecto de la aplicación de los propagadores híbridos a condiciones iniciales ligeramente diferentes de aquéllas para las que fueron diseñados. Se ha comprobado que la interpolación de los parámetros propios de la etapa predictiva de un propagador híbrido, a partir de los parámetros equivalentes de otros propagadores desarrollados para condiciones iniciales del entorno, conduce a unos resultados de precisión comparable a la de los propagadores híbridos no interpolados. La ventaja de esta técnica radica en la posibilidad de tener preparada con antelación una malla de propagadores híbridos para una región de interés del espacio fásico, de modo que cualquier condición inicial intermedia pueda ser propagada en cualquier momento sin tener que diseñar un propagador híbrido específico,

y consiguientemente, sin necesidad de disponer de datos de control.

Por otra parte, se está trabajando en la implementación de una metodología automática de validación de propagadores de órbitas en el lenguaje de programación R [51]. De modo análogo al procedimiento ilustrado en el tercero de los artículos incorporados en esta Tesis Doctoral, el objetivo es desarrollar un programa que, utilizando técnicas de computación paralela, aplique un propagador en proceso de validación, de comportamiento inicialmente desconocido, sobre un catálogo espacial compuesto por un número representativo de objetos, y sea capaz de llevar a cabo de forma autónoma un análisis exploratorio de datos como el mostrado en el artículo, para llegar a generar un informe que recoja las condiciones de aplicabilidad del propagador.

Estructura del documento

El Capítulo 1 es una muestra de la primera de las líneas de trabajo descritas en la sección anterior, y constituye un avance en la teoría híbrida de perturbaciones: el estudio de propagadores híbridos interpolados en una malla de condiciones iniciales con variaciones en excentricidad e inclinación. Este avance ha sido recientemente presentado en el 25th *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, que tuvo lugar en Williamsburg, Virginia (USA), entre el 11 y el 15 de enero de 2015 [59]. En el Capítulo 2 se ilustra con detalle la metodología de validación de propagadores de órbitas, publicada en el tercero de los artículos incorporados en esta Tesis Doctoral [47, 56], sobre la que se fundamenta el programa automático de validación que constituye la segunda de las líneas actuales de trabajo descritas en la sección anterior. En el Capítulo 3 se procede al resumen y discusión de los resultados más relevantes, tanto de los artículos incorporados como de las líneas actuales de trabajo recogidas en los capítulos precedentes. El Capítulo 4 presenta las conclusiones de la investigación realizada, junto con las vías previstas de continuación. Por último, los Apéndices A, B y C recogen los tres artículos integrados en la Tesis Doctoral.

Capítulo 1

Propagadores Híbridos e Interpolación

Resumen

En este capítulo se diseña inicialmente un propagador orbital híbrido, basado en la integración analítica del problema de Kepler, para la determinación de la posición y velocidad futuras de un orbitador cualquiera, generalmente un satélite artificial o un fragmento de basura espacial. El propagador consta de dos partes: por un lado, un método de integración, del que se obtiene una aproximación inicial, y por el otro, una técnica de predicción, que genera una estimación del error a partir del modelizado y reproducción de la dinámica ausente en la aproximación inicial. A continuación se estudia el efecto de introducir una pequeña variación sobre las condiciones iniciales para las que se desarrolló un determinado propagador híbrido. Se explora la posibilidad de generar un nuevo propagador híbrido a partir de otros desarrollados para condiciones iniciales cercanas [59], y se comprueba que la interpolación de los parámetros propios de la técnica de predicción utilizada, que en el presente caso es un método de Holt-Winters aditivo, conduce a resultados de precisión comparable a los de un propagador híbrido no interpolado cuando se modeliza el efecto de J_2 en la propagación del *problema principal* de la teoría del satélite artificial.

1.1. Introducción

La propagación de órbitas es un conocido problema que viene determinado por un sistema de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden, o seis de primer orden, necesarias para poder llegar a determinar la posición y velocidad de un orbitador en un instante final t_f a partir de su posición y velocidad en el instante inicial t_1 .

Estas ecuaciones no son directamente integrables, por lo que existen diversos métodos para aproximar la solución del problema. La teoría general de perturbaciones [2, 6, 34, 36, 42] aplica técnicas de perturbaciones a la determinación de una solución analítica. Esta solución, que es una función explícita del tiempo, junto con algunas constantes físicas, permite una rápida determinación de las coordenadas en t_f mediante una única evaluación del conjunto de ecuaciones. Además, puesto que se trata de una expresión analítica, contiene la dinámica del problema. Sin embargo, con el fin de reducir la complejidad hasta un nivel razonable, la expresión analítica suele ser habitualmente una aproximación de bajo orden en la que sólo se consideran modelos básicos de fuerzas.

Por el contrario, la teoría especial de perturbaciones [35, 40] lleva a cabo la integración numérica del problema. Su ventaja reside en la capacidad para incluir cualquier efecto en el modelo, incluso los más complejos, lo cual conduce a soluciones muy precisas. Sin embargo, tiene la desventaja de requerir pasos de integración muy reducidos, lo cual se traduce en elevados tiempos de cómputo.

Una tercera aproximación, de carácter intermedio, la constituye la técnica semianalítica [11, 38, 45], que combina las ventajas de ambas teorías. Permite considerar perturbaciones complejas en el modelo, el cual es simplificado mediante métodos analíticos para eliminar la componente de corto periodo. Como resultado se obtienen expresiones que pueden ser integradas numéricamente a través de pasos más largos, reduciendo de este modo el tiempo de cómputo.

Más recientemente se ha presentado la teoría híbrida de perturbaciones [49, 57, 58, 59, 60, 61], que se basa en la combinación de cualquiera de los métodos de integración previamente expuestos junto con una técnica de predicción. La primera etapa genera una solución que es sólo aproximada, debido tanto a las simplificaciones asumidas como a la imperfección de los modelos de las perturbaciones consideradas. Por su parte, la segunda etapa emplea técnicas de predicción, bien sea basadas en modelos estadísticos de series temporales [5, 12, 30, 39, 65, 69] o en métodos de inteligencia computacional [25, 48, 71, 72, 73, 74], con el fin de proporcionar una predicción del error que, sumada a la aproximación inicial, constituya la solución del problema.

La etapa predictiva de un propagador híbrido necesita un conjunto de datos de control, obtenidos a partir de observaciones precisas o bien a partir de coordenadas calculadas con elevada precisión, de modo que la técnica estadística o de inteligencia computacional pueda modelizar la dinámica no contenida en la primera etapa del método.

Sin embargo, puede construirse una malla de propagadores híbridos para un conjunto de condiciones iniciales relativamente cercanas, de modo que los propagadores híbridos para los casos intermedios puedan ser deducidos directamente de la malla, sin necesidad de datos de control. De esta forma,

se puede llevar a cabo fácilmente el estudio de las condiciones iniciales en el entorno de un orbitador sin tener que recalculer los parámetros de la etapa predictiva del método híbrido.

En este capítulo se considera el denominado *problema principal* de la teoría del satélite artificial, constituido por el problema de Kepler perturbado solamente por el achatamiento terrestre. Se crea un propagador híbrido, compuesto por una teoría general de perturbaciones, derivada del problema de Kepler, más el método de Holt-Winters aditivo para modelizar el efecto de J_2 sobre un determinado orbitador. Con el objeto de poder admitir pequeñas variaciones, tanto de excentricidad como de inclinación, se construye una malla de propagadores híbridos alrededor del satélite estudiado. Finalmente se comprueba que las etapas predictivas de propagadores híbridos adaptados a pequeñas variaciones de excentricidad y/o inclinación pueden ser deducidas directamente a partir de la malla, mediante la interpolación de los coeficientes del método de Holt-Winters.

Este capítulo se estructura en seis secciones. La Sección 1.2 presenta los principios de la teoría híbrida de perturbaciones, mientras que la Sección 1.3 expone el uso de una técnica de suavizado exponencial, el método de Holt-Winters, como etapa predictiva de los propagadores híbridos. Los conceptos descritos son aplicados a la implementación de un propagador híbrido para un determinado satélite en la Sección 1.4. Con el propósito de analizar su entorno, en la Sección 1.5 se construye una malla de condiciones iniciales, junto con sus correspondientes propagadores híbridos, alrededor del satélite estudiado. Por último, la Sección 1.6 describe cómo desarrollar nuevos propagadores híbridos, para condiciones iniciales cercanas, mediante la interpolación de sus parámetros a partir de los de los otros propagadores de la malla.

1.2. Metodología híbrida de perturbaciones

Una teoría híbrida de perturbaciones es una metodología para la estimación de la posición y velocidad de un orbitador, que puede ser un satélite artificial o un fragmento de basura espacial, en un instante final dado t_f , $\hat{\mathbf{x}}_{t_f}$, a partir de la posición y velocidad conocidas en un instante inicial t_1 , \mathbf{x}_{t_1} . Cabe mencionar que cualquier conjunto de variables, canónicas o no canónicas, puede ser utilizado para este propósito.

En una primera etapa, se utiliza un método de integración \mathcal{I} para calcular una aproximación inicial de $\hat{\mathbf{x}}_{t_f}$:

$$\mathbf{x}_{t_f}^{\mathcal{I}} = \mathcal{I}(t_f, \mathbf{x}_{t_1}). \quad (1.1)$$

El método de integración suele ser aplicado habitualmente sobre un modelo matemático que, por simplicidad y manejabilidad de las expresiones

analíticas resultantes, sólo incluye las fuerzas más determinantes. También debe tenerse en cuenta que los fenómenos físicos no siempre son descritos con la suficiente precisión mediante sus modelos. Además, cuando se emplean la teoría general de perturbaciones o las técnicas semianalíticas, sólo suelen considerarse aproximaciones de bajo orden, para evitar la obtención de expresiones extraordinariamente extensas y difíciles de manejar. Como consecuencia de todas estas circunstancias, $\mathbf{x}_{t_f}^{\mathcal{I}}$ es simplemente una aproximación inicial que necesita verse complementada, en una segunda etapa, para llegar a obtener $\hat{\mathbf{x}}_{t_f}$.

La información que esta segunda etapa necesita para modelizar y reproducir la dinámica no presente en la aproximación de partida debe ser deducida a partir del periodo de control $[t_1, t_T]$, con $t_T < t_f$, que es un intervalo de instantes temporales t_i para los cuales han de conocerse tanto la aproximación inicial $\mathbf{x}_{t_i}^{\mathcal{I}}$, como la posición y velocidad exactas \mathbf{x}_{t_i} , generalmente a partir de observaciones reales o bien de procesos computacionales intensivos y de elevada precisión. Consecuentemente, el error, que contiene la dinámica buscada, puede ser determinado, para cada instante del periodo de control, como

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{t_i} = \mathbf{x}_{t_i} - \mathbf{x}_{t_i}^{\mathcal{I}}, \quad (1.2)$$

de modo que puede procederse a construir la serie temporal del error durante el periodo de control, que será denominada *datos de control*, como $\boldsymbol{\varepsilon}_{t_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{t_T}$.

El procesado de esta serie temporal en la segunda etapa del método híbrido, por medio de técnicas estadísticas o métodos de inteligencia computacional, permite el modelizado de su dinámica, así como su reproducción para cualquier instante posterior al periodo de control. Por consiguiente, puede determinarse una estimación del error en el instante final t_f , $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t_f}$, y, consecuentemente, el valor deseado de $\hat{\mathbf{x}}_{t_f}$ puede ser calculado como

$$\hat{\mathbf{x}}_{t_f} = \mathbf{x}_{t_f}^{\mathcal{I}} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t_f}. \quad (1.3)$$

1.3. Método de suavizado exponencial en predicción de series temporales

Los métodos de suavizado exponencial consideran a una serie temporal ε_t como la combinación de tres componentes: la tendencia μ_t , o variación secular, la componente estacional S_t , u oscilación periódica, y la componente irregular o no predecible ν_t . En el caso de una composición aditiva, ε_t puede ser expresada como

$$\varepsilon_t = \mu_t + S_t + \nu_t. \quad (1.4)$$

Particularmente, el método de Holt-Winters [69] considera una tendencia lineal con nivel A y pendiente B :

$$\mu_t = A + Bt. \quad (1.5)$$

Según este método, y teniendo en cuenta que ν_t no puede predecirse, el siguiente valor de una serie temporal puede ser estimado, a partir de los valores anteriores, como

$$\hat{\varepsilon}_t = A_{t-1} + B_{t-1} + S_{t-s}, \quad (1.6)$$

donde s es el periodo de la componente estacional, y A , B y S pueden ser determinados, a partir de los valores previos, mediante las siguientes expresiones iterativas

$$\begin{aligned} A_t &= \alpha(\varepsilon_t - S_{t-s}) + (1 - \alpha)(A_{t-1} + B_{t-1}), \\ B_t &= \beta(A_t - A_{t-1}) + (1 - \beta)B_{t-1}, \\ S_t &= \gamma(\varepsilon_t - A_t) + (1 - \gamma)S_{t-s}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

en las cuales α , β y γ son tres constantes de suavizado con valores comprendidos en el intervalo $[0, 1]$.

Algoritmo 1 Holt-Winters

Entrada: s , c , h y $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^T$

Salida: $\hat{\varepsilon}_{T+h|T}$

- 1: Estimar los valores de $A_0, B_0, S_{-s+1}, \dots, S_{-1}, S_0$
 - 2: **para** $t = 1$; $t \leq T$; $t = t + 1$ **hacer**
 - 3: $A_t = \alpha(\varepsilon_t - S_{t-s}) + (1 - \alpha)(A_{t-1} + B_{t-1})$
 - 4: $B_t = \beta(A_t - A_{t-1}) + (1 - \beta)B_{t-1}$
 - 5: $S_t = \gamma(\varepsilon_t - A_t) + (1 - \gamma)S_{t-s}$
 - 6: $\hat{\varepsilon}_t = A_{t-1} + B_{t-1} + S_{t-s}$
 - 7: **fin para**
 - 8: Seleccionar $\text{medida_de_error} \in \{\text{MSE}, \text{MAE}, \text{MAPE}\}$ y obtenerla en función de las constantes de suavizado
 - 9: Obtener las constantes de suavizado que minimicen medida_de_error con el algoritmo L-BFGS-B
 - 10: Calcular $A_T, B_T, S_{T-s+1}, \dots, S_{T-1}, S_T$ para las constantes de suavizado óptimas
 - 11: $\hat{\varepsilon}_{T+h|T} = A_T + hB_T + S_{T-s+1+h \bmod s}$
 - 12: **devolver** $\hat{\varepsilon}_{T+h|T}$
-

El Algoritmo 1 [61] muestra el modo de aplicar el método de Holt-Winters a la predicción de los valores futuros de la serie temporal. Las entradas al

algoritmo son el número de datos por revolución, s , el número de revoluciones en el periodo de control, c , el número de pasos temporales posteriores al periodo de control al cabo de los cuales debe ser estimado el valor de la serie temporal, h , y los datos de control, $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^T$, con $T = s \times c$. La salida es $\hat{\varepsilon}_{T+h|T}$, esto es, la predicción de la serie temporal en el instante final $t_f = t_{T+h}$, basada en el último dato de control, ε_T .

El algoritmo comienza con la estimación de los parámetros iniciales A_0 , B_0 , S_{-s+1}, \dots, S_{-1} y S_0 , proceso que se lleva a cabo mediante una descomposición aditiva clásica en tendencia y variación estacional sobre las tres primeras revoluciones. Una regresión lineal aplicada sobre la tendencia permite deducir los valores iniciales de nivel A_0 y pendiente B_0 , mientras que la componente estacional proporciona los valores de S_{-s+1}, \dots, S_{-1} y S_0 .

A continuación tiene lugar un proceso iterativo mediante la aplicación de las ecuaciones (1.6) y (1.7) al periodo de control (líneas 2–7). Como resultado, se obtienen las expresiones de los parámetros A_t , B_t y S_t , así como la predicción a un solo paso de la serie temporal, $\hat{\varepsilon}_t$, en función de las constantes de suavizado α , β y γ .

Posteriormente se selecciona una medida del error entre el error cuadrático medio, MSE (*mean square error*), el error absoluto medio, MAE (*mean absolute error*), y el error porcentual absoluto medio, MAPE (*mean absolute percentage error*):

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\varepsilon_t - \hat{\varepsilon}_t)^2, \\ \text{MAE} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |\varepsilon_t - \hat{\varepsilon}_t|, \\ \text{MAPE} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \frac{\varepsilon_t - \hat{\varepsilon}_t}{\varepsilon_t} \right| 100. \end{aligned} \tag{1.8}$$

La aplicación de la medida del error seleccionada sobre el periodo de control conduce a una expresión que es función de las constantes de suavizado. Seguidamente se necesita un método de optimización para determinar los valores de las constantes de suavizado que minimizan dicha medida del error. El algoritmo de memoria limitada L-BFGS-B [7], que es una modificación del método BFGS [64], permite imponer restricciones sobre las constantes de suavizado, razón por la que es aplicable al presente problema.

Una vez determinados los valores óptimos de las constantes de suavizado, se procede a deducir los parámetros de la serie temporal A_T , B_T , $S_{T-s+1}, \dots, S_{T-1}, S_T$ para la última revolución de los datos de control, a partir de la cual se puede calcular la predicción del valor de la serie temporal en el instante final, es decir, h pasos temporales más adelante, $\hat{\varepsilon}_{t_f} = \hat{\varepsilon}_{T+h|T}$ (línea 11).

1.4. Aplicación de la metodología híbrida

En esta sección se aplica la metodología híbrida descrita a la propagación de una órbita con las siguientes condiciones iniciales: semieje mayor $a = 7228$ km, excentricidad $e = 0.06$ e inclinación $i = 49^\circ$ (figura 1.1). La primera etapa del método está constituida por una teoría analítica derivada del problema de Kepler, no considerando, por tanto, perturbación alguna, mientras que la segunda etapa corresponde a un método de Holt-Winters aditivo, diseñado para modelizar la perturbación originada por el achatamiento terrestre, que corresponde al término J_2 de su potencial gravitatorio. Por consiguiente, el propagador híbrido completo está adaptado al *problema principal* de la teoría del satélite artificial; consecuentemente, sus resultados serán comparados con los de una integración numérica de elevada precisión del *problema principal* mediante un método Runge-Kutta de 8° orden [20].

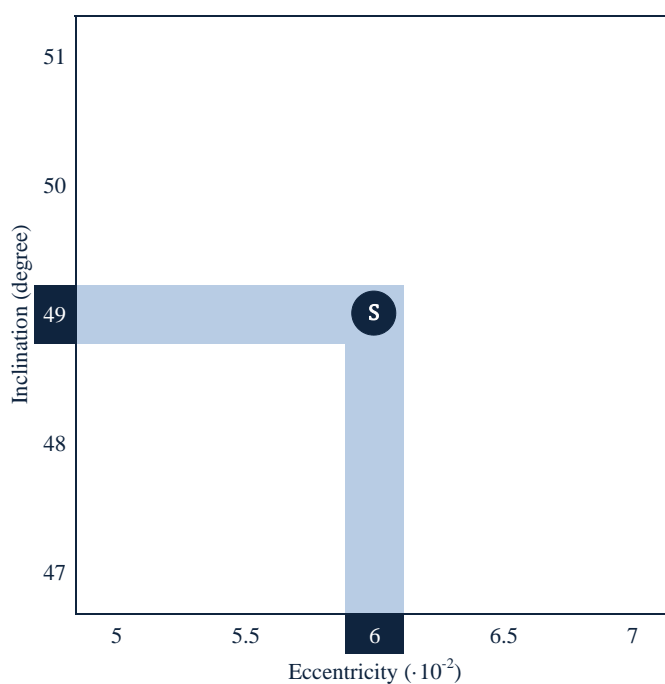


Figura 1.1: Excentricidad e inclinación inicial del satélite estudiado.

La solución al problema de Kepler proporcionada por la expresión analítica en la primera etapa del propagador híbrido se caracteriza por unos valores constantes de los elementos orbitales clásicos, a excepción de la anomalía media, cuyos valores evolucionan siguiendo la posición angular del orbitador. Por el contrario, cuando se considera la acción de J_2 , ninguno de los elementos orbitales permanece constante, de modo que aparecen efectos tanto seculares como de corto y largo periodo en su evolución. El objetivo

del método de Holt-Winters presente en la segunda etapa del propagador híbrido es el modelizado y reproducción de esa dinámica. La diferencia entre la solución inicial del problema de Kepler y la solución deseada del *problema principal* se traduce en un error de posición de alrededor de 14500 km tras 20 días de propagación, magnitud que representa aproximadamente la distancia entre el apogeo y el perigeo de la órbita.

La metodología híbrida puede ser aplicada con cualquier sistema de coordenadas, si bien en este caso se emplean las variables de Delaunay (l, g, h, L, G, H) . El primer paso consiste en la preparación de los datos de control a partir de dos series temporales: la de aproximaciones iniciales, generada por la expresión analítica derivada del problema de Kepler, y la de soluciones precisas, calculada mediante un método Runge-Kutta de 8° orden. Esta última serie temporal podría ser sustituida por un conjunto de observaciones precisas, caso de estar disponibles. Efectuando la diferencia entre ambos conjuntos de datos se obtiene la serie temporal del error, que contiene la dinámica ausente de la aproximación inicial. Cabe mencionar que el conjunto de datos de control debe ser lo suficientemente extenso como para incluir cualquier patrón que haya de ser modelizado por la segunda etapa del método. Para el caso presente se ha tomado un periodo de control de 10 revoluciones, que corresponde a un intervalo temporal de casi 17 horas teniendo en cuenta que los elementos orbitales enumerados con anterioridad corresponden a un periodo orbital de 101.926 minutos. Como frecuencia de muestreo de la serie temporal se han tomado 12 muestras por cada revolución del orbitador, que corresponde a un periodo de muestreo de $101.926/12 = 8.494$ minutos.

Antes de procesar los datos, se unifican las variables angulares en el intervalo $(-\pi, \pi]$, mediante la adición o substracción de vueltas completas a los valores comprendidos fuera de ese intervalo. Seguidamente se considera un modelo de Holt-Winters unidimensional para la serie temporal del error de cada variable de Delaunay, excepto para el caso de ε_t^H , que en el caso presente es nulo, lo cual significa que la aproximación analítica es perfecta para esta variable, y consiguientemente no es necesario complementarla en la segunda etapa del propagador híbrido.

A continuación se lleva a cabo un análisis preliminar de las cinco restantes series temporales, mediante el estudio de sus gráficos de secuencia, periodogramas y funciones de autocorrelación (ACF). Las figuras 1.2 y 1.3 sólo muestran los gráficos para las series temporales ε_t^l , ε_t^h y ε_t^L , puesto que el comportamiento de ε_t^g y ε_t^G es muy similar al de ε_t^l y ε_t^L , respectivamente.

Los gráficos de secuencia muestran la tendencia y las principales componentes periódicas de cada serie. En el caso de ε_t^l , se puede apreciar una tendencia linealmente creciente, así como una variación estacional con un periodo aproximado de 35 minutos. Por el contrario, la tendencia de ε_t^h es linealmente decreciente, y también aparece una variación estacional, aunque

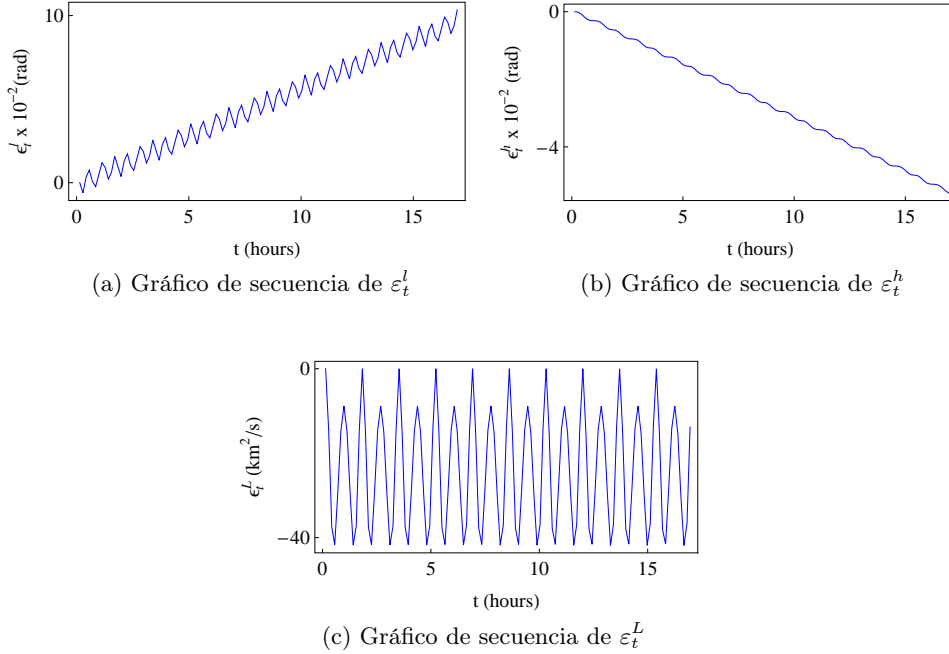


Figura 1.2: Gráficos de secuencia de las series ε_t^l , ε_t^h y ε_t^L .

su periodo no puede ser directamente deducido debido al reducido valor de amplitud. Por último, ε_t^L no presenta una tendencia significativa, aunque sí pueden distinguirse claramente dos fluctuaciones estacionales, con periodos aproximados de 50 y 100 minutos.

Los periodogramas y las funciones de autocorrelación sólo son aplicables a series estacionarias, por lo que se hace necesario diferenciar las series ε_t^l y ε_t^h para eliminar su tendencia. Los periodogramas muestran que las frecuencias más significativas son 0.25 para $\nabla\varepsilon_t^l$ y 0.167 para $\nabla\varepsilon_t^h$ y ε_t^L , que corresponden a periodos de $1/0.25 = 4$ y $1/0.167 = 6$ muestras, esto es, un tercio y la mitad de una revolución completa de 12 muestras, respectivamente. El producto de estos valores por el periodo de muestreo $101.926/12 = 8.494$ minutos proporciona los periodos en el dominio del tiempo: 33.976 minutos para $\nabla\varepsilon_t^l$, y 50.964 minutos para $\nabla\varepsilon_t^h$ y ε_t^L .

Finalmente, aunque las funciones de autocorrelación de $\nabla\varepsilon_t^l$, $\nabla\varepsilon_t^h$ y ε_t^L muestran altas correlaciones para varios retardos, la más elevada corresponde al retardo 12 en los tres casos, el cual representa un periodo kepleriano completo de 101.926 minutos.

Como conclusión, este análisis preliminar revela la existencia de tres componentes estacionales principales, con periodos un tercio, un medio y un periodo kepleriano, esto es, 33.976, 50.964 y 101.926 minutos, aunque el último es el más importante, además de incluir a los otros dos.

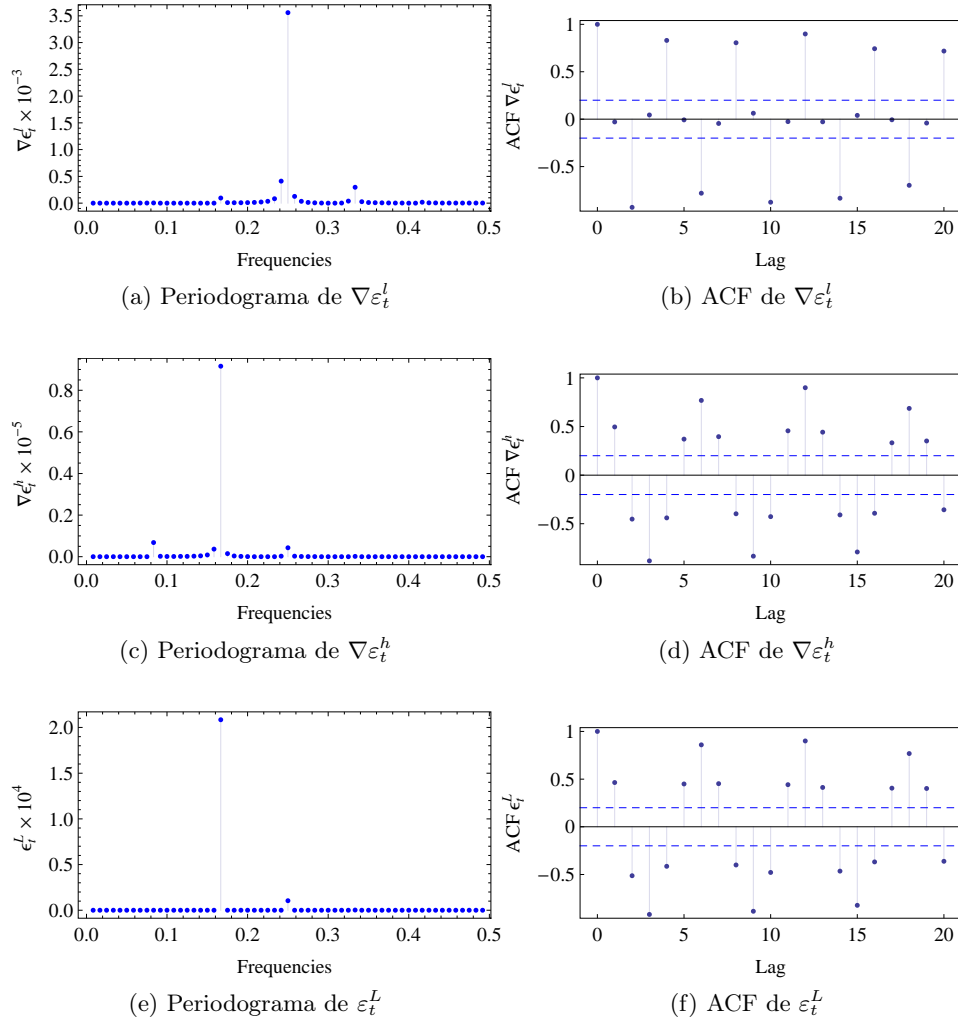


Figura 1.3: Periodogramas (izquierda) y funciones de autocorrelación (derecha) de las series ε_t^l , ε_t^h y ε_t^L .

A continuación se aplica el algoritmo 1, tomando MSE como medida del error para la determinación de los valores óptimos de las constantes de suavizado α , β y γ .

Una vez creados los cinco modelos de Holt-Winters correspondientes a las variables de Delaunay l , g , h , L y G , se integran en el propagador híbrido, y se procede a evaluar su grado de precisión a través de la comparación con una propagación numérica precisa mediante un método Runge-Kutta de 8° orden.

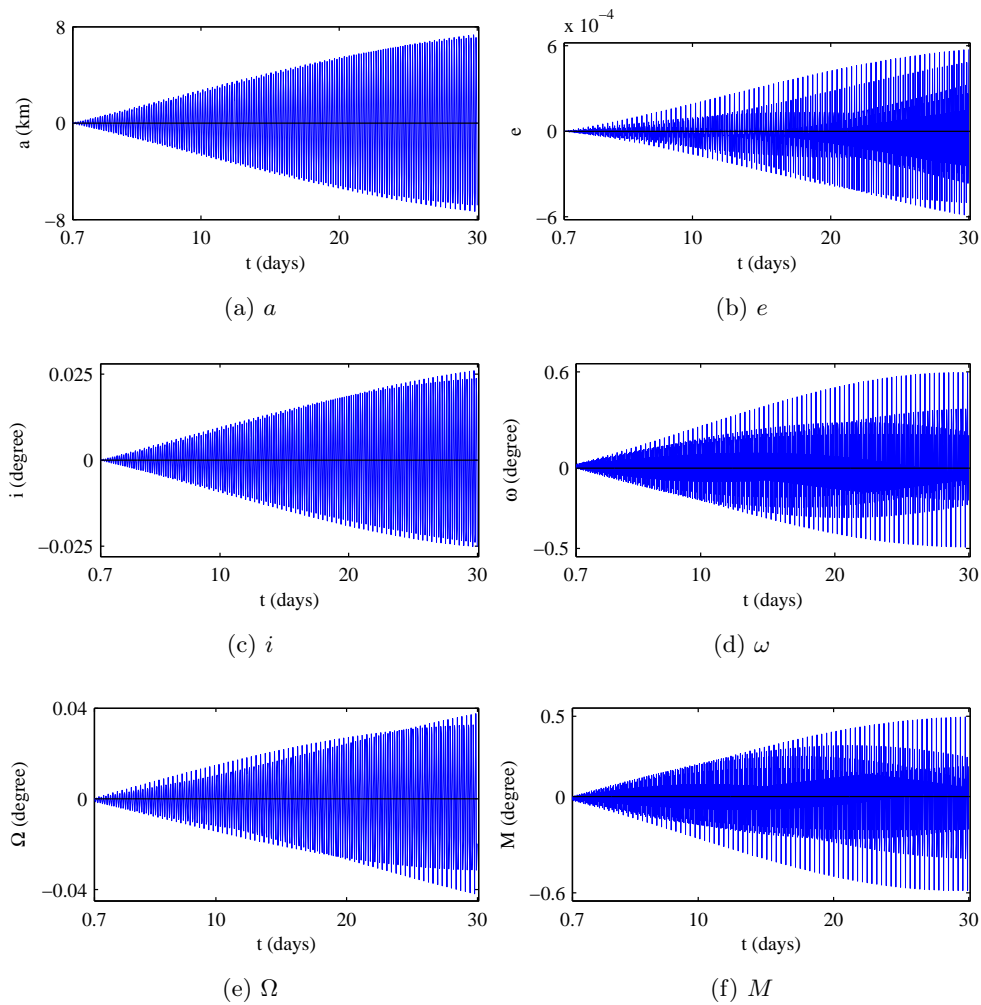


Figura 1.4: Diferencia entre los elementos orbitales correspondientes a las propagaciones numérica e híbrida del satélite estudiado.

La figura 1.4 representa la diferencia entre los elementos orbitales determinados mediante las propagaciones numérica e híbrida de las condiciones iniciales, comenzando tras el periodo de control. Puede apreciarse la capa-

cidad de la etapa predictiva del propagador híbrido, mediante el método de Holt-Winters, para reproducir la dinámica inducida por la perturbación J_2 con un error reducido, incluso al cabo de 30 días de propagación, inferior a 8 km en el semieje mayor, a 6×10^{-4} en la excentricidad, a 0.025° en la inclinación, a 0.6° en el argumento del perigeo, a 0.04° en la ascensión recta del nodo ascendente y a 0.6° en la anomalía media. La tabla 1.1 compara los errores de posición, para diferentes horizontes de propagación, entre la aproximación analítica, que sólo considera el problema de Kepler, y la propagación híbrida, que modeliza el *problema principal*. Como puede percibirse, los errores de esta última permanecen reducidos, incluso tras 30 días de propagación, lo cual implica que la componente predictiva del método híbrido ha sido capaz de modelizar la mayor parte del efecto de J_2 .

Tabla 1.1: Error en distancia (km) tras la propagación del satélite estudiado.

Horizonte de propagación	Método analítico (Kepler)	Método híbrido (Kepler + J_2)
1 día	1197.10	0.45
2 días	2379.94	0.83
7 días	7900.47	3.63
30 días	14504.69	13.73

Finalmente, la figura 1.5 representa la evolución del error de posición en las diferentes direcciones: errores en distancia, along-track, cross-track y radial. Como puede observarse, el error total en distancia, 13.73 km tras una propagación de 30 días, se concentra principalmente en la dirección tangente (along-track), mientras que los errores en las direcciones normal (cross-track) y binormal (radial) son inferiores, como era de esperar.

1.5. Creación de una malla a partir de los datos de control

Tras haber desarrollado un propagador híbrido para el satélite estudiado, se analiza el efecto de una ligera modificación en las condiciones iniciales. Para ello, se consideran pequeñas variaciones de excentricidad e inclinación. Se construye una malla de condiciones iniciales alrededor del satélite estudiado, modificando su excentricidad en pasos de 0.5×10^{-2} y su inclinación en pasos de 1° (figura 1.6).

A continuación se desarrolla un nuevo propagador híbrido para cada condición inicial S_{ei} de la malla, siguiendo los pasos descritos en la sección anterior para el satélite estudiado S_{33} . Cabe resaltar que, para llevar a cabo este proceso, se necesitan datos de control para cada conjunto de condiciones iniciales. El objetivo final, en la siguiente sección, será verificar la posibilidad de desarrollar nuevos propagadores híbridos para condiciones iniciales com-

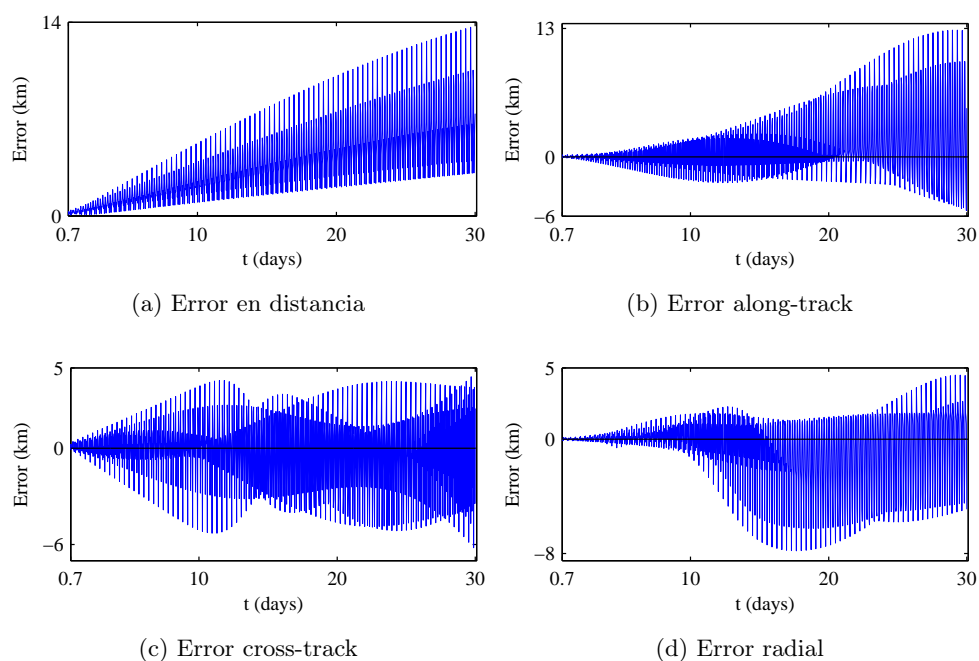


Figura 1.5: Errores en distancia, along-track, cross-track y radial correspondientes a la propagación híbrida del satélite estudiado.

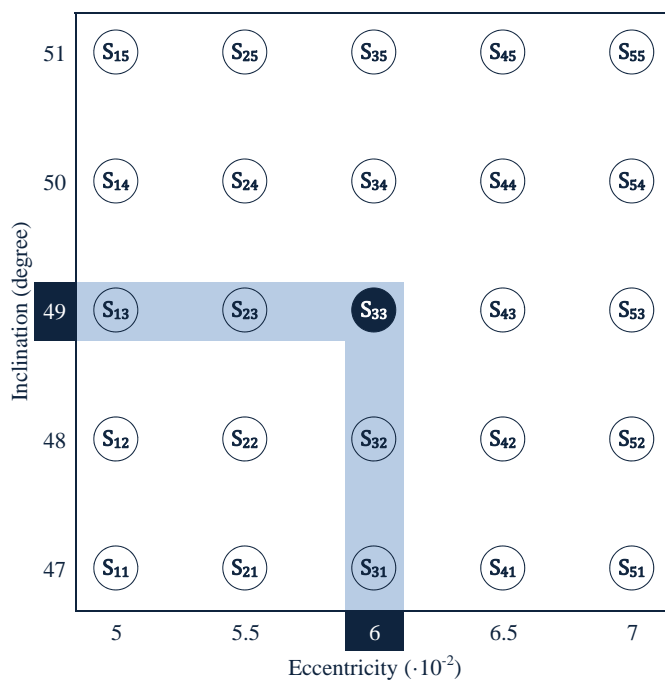


Figura 1.6: Malla de condiciones iniciales construida alrededor del satélite estudiado.

prendidas dentro de los límites de la malla sin tener que seguir el proceso completo y sin necesidad, por tanto, de datos de control.

Se finaliza la creación de los propagadores híbridos de la malla mediante el análisis de sus errores de posición con respecto a la integración numérica precisa de sus condiciones iniciales. La figura 1.7 muestra su distribución por cada componente, para diferentes horizontes de propagación, por medio de diagramas de caja. Como puede comprobarse, los valores promedio del error en distancia total concuerdan con los recogidos en la tabla 1.1 para el satélite estudiado S_{33} . También conviene notar que, si bien la contribución mayoritaria al error en posición procede de la dirección tangente para un horizonte de propagación de 30 días, como se ha mencionado con anterioridad, la principal componente para horizontes de propagación más cortos es la normal, lo cual concuerda con la información contenida en la figura 1.5, en la que el error cross-track es la componente que más rápido aumenta al principio, aunque su valor final es inferior al del error along-track.

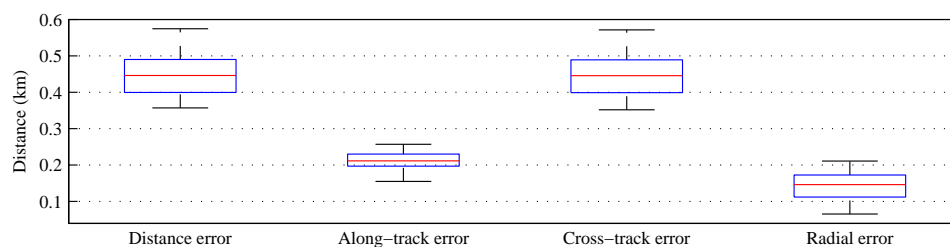
En general, las distribuciones de los errores de posición son simétricas, poco dispersas y con pocos outliers para la mayoría de los horizontes de propagación. Todas las condiciones iniciales presentan un comportamiento dinámico similar, lo cual se traduce en la homogeneidad de los errores de posición obtenidos. Estos resultados constituyen un escenario apropiado para la adaptación de los propagadores híbridos desarrollados a condiciones iniciales cercanas.

1.6. Propagación de nuevas órbitas

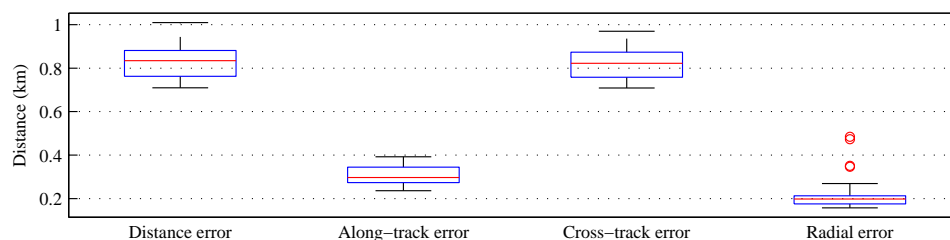
Hasta este punto, se han desarrollado propagadores híbridos tanto para el satélite estudiado S_{33} como para su malla circundante S_{ei} . Ahora se pretende propagar condiciones iniciales cercanas I que ocupan posiciones intermedias dentro de los límites de la malla (figura 1.8).

La teoría analítica de la primera etapa de los propagadores híbridos es común para todos los casos. Sin embargo, cada conjunto de condiciones iniciales requiere un modelo propio de Holt-Winters en la etapa predictiva de su propagador híbrido, adaptado al modelizado y predicción del efecto inducido por la perturbación J_2 sobre sus condiciones particulares. Con el fin de poder aprovechar los propagadores híbridos cercanos desarrollados con antelación, así como para evitar la necesidad de disponer de datos de control, se propone una nueva estrategia: la interpolación de los parámetros A_T , B_T , $S_{T-s+1}, \dots, S_{T-1}, S_T$ de los modelos intermedios I de Holt-Winters a partir de los correspondientes al satélite estudiado S_{33} y a su malla circundante S_{ei} .

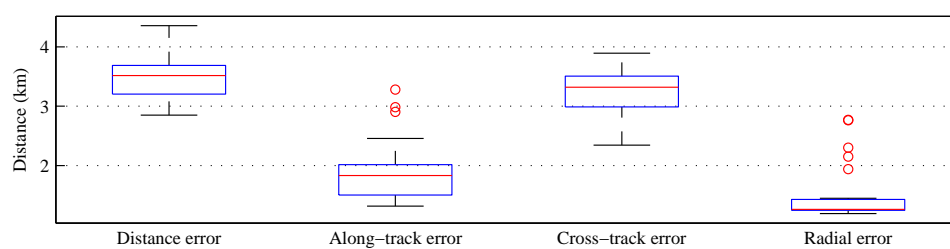
Se han comparado diversos métodos de interpolación. Los algoritmos empleados en algunos de ellos sólo permiten la interpolación unidimensional, mientras que otros están adaptados a múltiples dimensiones. A continuación



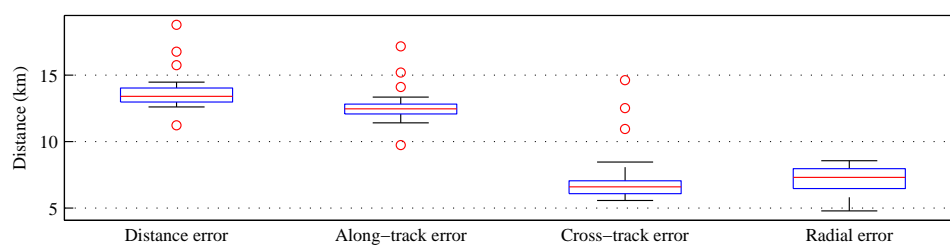
(a) 1 día



(b) 2 días



(c) 7 días



(d) 30 días

Figura 1.7: Diagramas de caja de los errores en distancia, along-track, cross-track y radial correspondientes a la propagación híbrida de las condiciones iniciales de la malla para diferentes horizontes de propagación.

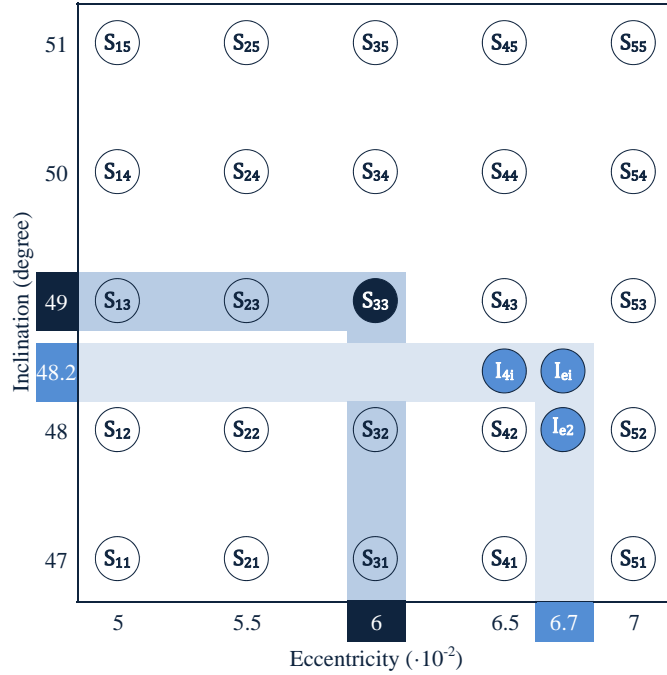


Figura 1.8: Condiciones iniciales intermedias a propagar en el entorno del satélite estudiado.

se procede a realizar comparaciones sobre I_{e2} , que sólo requiere interpolación unidimensional porque sólo uno de sus elementos, la excentricidad, difiere de los valores de la malla.

En primer lugar, se utiliza la técnica de *medias ponderadas*. Se toma el inverso de la diferencia de excentricidad como peso, y se interpolan los parámetros de Holt-Winters de I_{e2} a partir de los de S_{12} , S_{22} , S_{32} , S_{42} y S_{52} , que comparten con I_{e2} el mismo valor de inclinación. En segundo lugar, se aplica el método de *regresión lineal*, deduciendo los parámetros de I_{e2} a partir de las rectas que mejor se ajustan a los correspondientes parámetros de S_{12} , S_{22} , S_{32} , S_{42} y S_{52} . El tercer tipo de interpolación se lleva a cabo mediante *polinomios de Lagrange*, deduciendo los parámetros de I_{e2} a partir de los polinomios de cuarto grado que pasan por los parámetros de S_{12} , S_{22} , S_{32} , S_{42} y S_{52} . Como es sabido, el grado de los polinomios de Lagrange se incrementaría si se dispusiera de un mayor número de condiciones iniciales en la malla. Por último, se aplica el algoritmo de *interpolación spline* propuesto en [22]. Se trata del único método, de los considerados, que permite la interpolación multidimensional. El algoritmo de interpolación spline bidimensional implementado en el lenguaje de programación R [51], que será el aplicado al caso de I_{ei} , ya que tanto su excentricidad como su inclinación difieren de las de todas las condiciones iniciales presentes en la malla, hace uso de la

interpolación lineal en los triángulos delimitados por los datos.

Tabla 1.2: Error en distancia (km) tras la propagación híbrida interpolada de las condiciones iniciales intermedias I_{e2} mediante diferentes métodos de interpolación.

Horizonte de propagación	Medias ponderadas	Regresión lineal	Polinomios de Lagrange	Spline
1 día	9.070	1.772	2.021	0.469
2 días	18.440	3.563	4.070	0.836
7 días	66.222	12.460	14.237	3.498
30 días	272.777	48.653	55.715	13.598

La tabla 1.2 presenta los resultados obtenidos para cada uno de los cuatro métodos de interpolación citados mediante el error en distancia de los propagadores híbridos interpolados desarrollados para I_{e2} . Como puede observarse, la interpolación spline conduce a los mejores resultados para todos los horizontes de propagación, seguida por la regresión lineal, los polinomios de Lagrange y, finalmente, la técnica de medias ponderadas, que produce los peores resultados.

El análisis de la aplicación de estos métodos de interpolación al otro conjunto de condiciones iniciales que también requiere interpolación unidimensional, I_{4i} , conduce a las mismas conclusiones; consiguientemente, se selecciona la interpolación spline como método a utilizar. Por lo tanto, también se desarrolla un propagador híbrido interpolado para I_{ei} haciendo uso de la interpolación spline bidimensional, como se ha mencionado con anterioridad.

La figura 1.9 representa los errores de posición obtenidos para la propagación híbrida mediante interpolación spline de las tres condiciones iniciales intermedias, y los compara con las distribuciones de los correspondientes errores de posición para la propagación híbrida de las condiciones iniciales de la malla (figura 1.7). Como era de esperar, debido al comportamiento homogéneo de todas las condiciones iniciales de la malla, los errores de posición de los casos intermedios son muy similares al promedio de la malla. Cabe destacar el caso de la interpolación bidimensional en excentricidad e inclinación, I_{ei} , para el que los errores son especialmente reducidos, llegando incluso a constituir un outlier favorable para un horizonte de propagación de 30 días.

Las tablas 1.3, 1.4 y 1.5 comparan los resultados de la propagación de los tres conjuntos de condiciones iniciales intermedias I_{e2} , I_{4i} y I_{ei} mediante los métodos meramente analítico, híbrido e híbrido mediante interpolación spline. En general, puede comprobarse que los últimos propagadores mejoran los resultados de los híbridos no interpolados, especialmente en el caso del propagador híbrido mediante interpolación spline bidimensional para I_{ei} .

Las figuras 1.10 y 1.11 comparan las propagaciones híbrida e híbrida

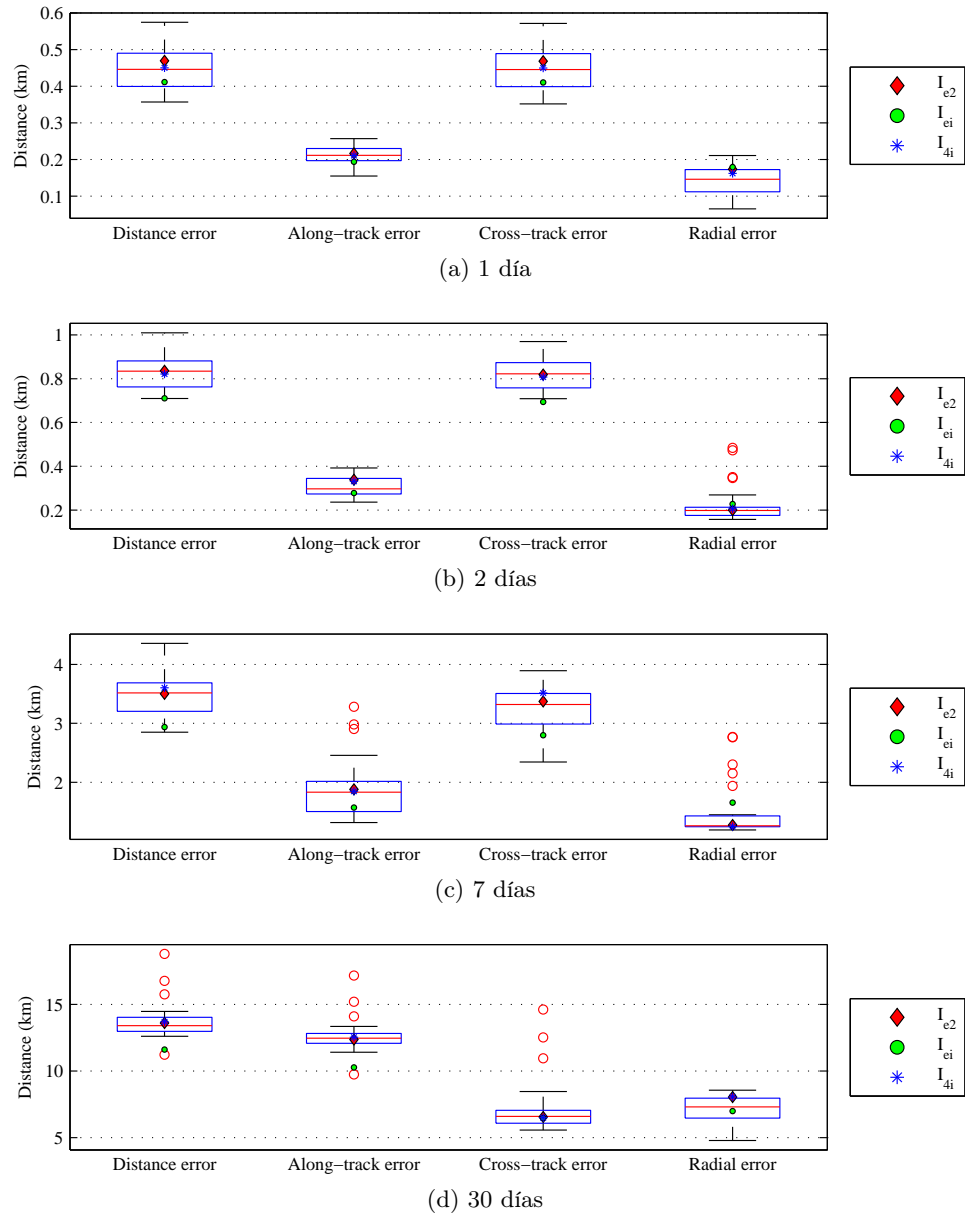


Figura 1.9: Errores en distancia, along-track, cross-track y radial correspondientes a la propagación híbrida mediante interpolación spline de las tres condiciones iniciales intermedias, frente a los diagramas de caja con las distribuciones de los correspondientes errores de posición de la malla.

Tabla 1.3: Error en distancia (km) tras la propagación de las condiciones iniciales intermedias I_{e2} .

Horizonte de propagación	Método analítico (Kepler)	Método híbrido (Kepler + J_2)	Método híbrido con interpolación spline (Kepler + J_2)
1 día	1244.061	0.600	0.469
2 días	2472.668	0.840	0.836
7 días	8165.104	3.711	3.498
30 días	14504.581	14.982	13.598

Tabla 1.4: Error en distancia (km) tras la propagación de las condiciones iniciales intermedias I_{4i} .

Horizonte de propagación	Método analítico (Kepler)	Método híbrido (Kepler + J_2)	Método híbrido con interpolación spline (Kepler + J_2)
1 día	1232.193	0.533	0.451
2 días	2449.259	0.819	0.821
7 días	8098.784	3.828	3.601
30 días	14510.092	15.090	13.691

Tabla 1.5: Error en distancia (km) tras la propagación de las condiciones iniciales intermedias I_{ei} .

Horizonte de propagación	Método analítico (Kepler)	Método híbrido (Kepler + J_2)	Método híbrido con interpolación spline (Kepler + J_2)
1 día	1240.220	0.561	0.411
2 días	2465.050	0.823	0.711
7 días	8143.626	3.724	2.936
30 días	14506.802	14.950	11.619

mediante interpolación spline para I_{e2} y I_{ei} por medio de los gráficos del error en distancia, tanto el error total, como sus tres componentes en las direcciones tangente, normal y binormal. Las figuras confirman la conclusión previamente obtenida a partir de las tablas 1.3, 1.4 y 1.5, según la cual el método híbrido mediante interpolación spline conduce a menores errores en distancia que el no interpolado, especialmente para el caso de I_{ei} .

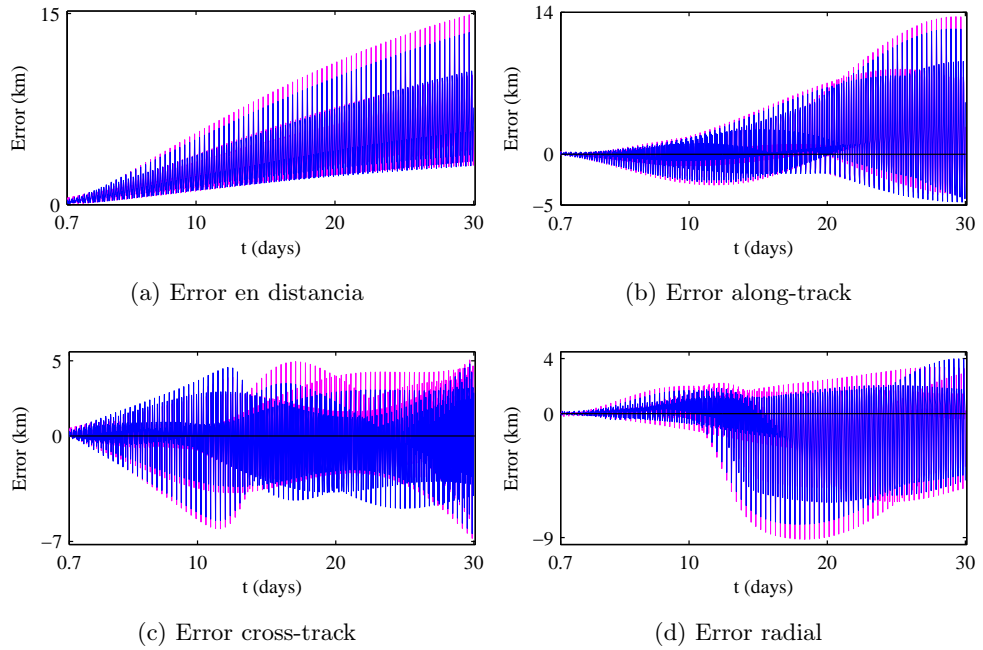


Figura 1.10: Errores en distancia, along-track, cross-track y radial correspondientes a las propagaciones híbrida (rojo) e híbrida mediante interpolación spline (azul) de las condiciones iniciales intermedias I_{e2} .

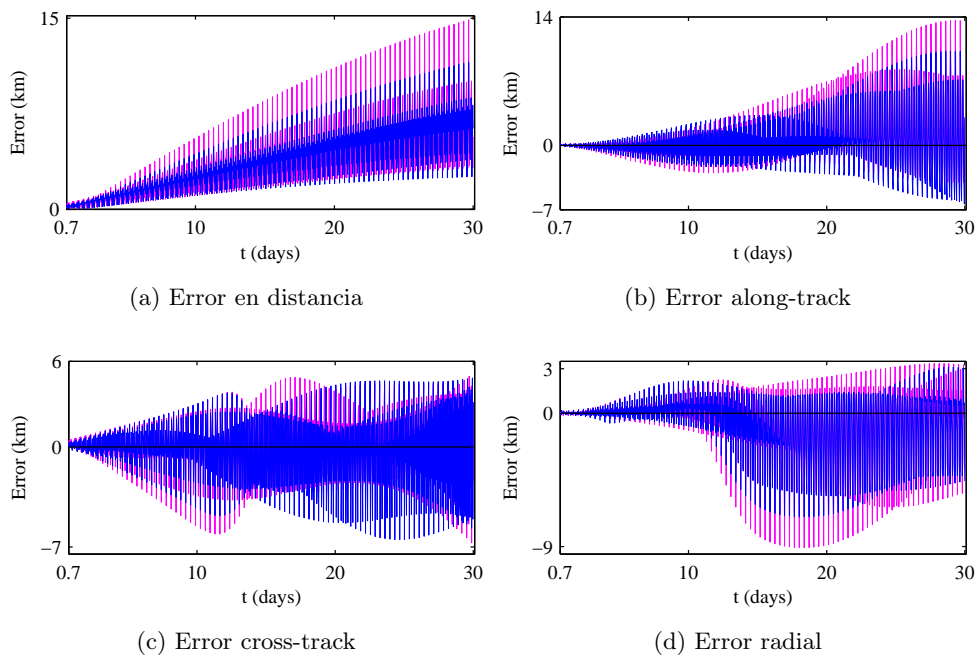


Figura 1.11: Errores en distancia, along-track, cross-track y radial correspondientes a las propagaciones híbrida (rojo) e híbrida mediante interpolación spline (azul) de las condiciones iniciales intermedias I_{ei} .

Capítulo 2

Validación Numérica: Delaunay vs KBM

Resumen

En el capítulo previo se ha ilustrado la teoría híbrida de perturbaciones mediante la construcción de propagadores híbridos compuestos por una teoría general de perturbaciones más una etapa predictiva basada en técnicas estadísticas de series temporales. Se ha focalizado sobre esta última etapa, con el fin de estudiar cómo adaptarla a unas condiciones iniciales ligeramente distintas de las de partida. Este capítulo, por el contrario, se centra en la primera etapa, de naturaleza analítica, y lleva a cabo una validación de dos de los métodos habitualmente utilizados en su desarrollo: la normalización de Delaunay y el método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky [47, 56]. Para desarrollar este proceso de validación sólo se ha considerado la perturbación causada por los coeficientes armónicos zonales del potencial gravitatorio terrestre, con el fin de poder analizar en profundidad el comportamiento de las expresiones matemáticas que intervienen en ambos métodos, y determinar de este modo sus límites y condiciones idóneas de aplicabilidad.

Este proceso ilustra la metodología desarrollada para la validación de cualquier propagador de órbitas, incluidos los propagadores híbridos, basada en un análisis exploratorio de datos [66] sobre los errores de posición, tanto en términos de error total en distancia, como de sus proyecciones sobre las tres direcciones tangente, normal y binormal, resultantes de la aplicación del propagador evaluado sobre un catálogo espacial. Esta metodología, que está siendo implementada en el lenguaje de programación R [51], permitirá la realización automática del proceso de validación, así como la obtención del informe que lo documente.

2.1. Introducción

La mayoría de las teorías analíticas en el problema del satélite artificial comienzan mediante la eliminación de los términos de corto periodo [2, 6, 34, 36]. De hecho, los propagadores analíticos de órbitas más utilizados, SGP4 (*Simplified General Perturbations 4*) [26, 67] y PPT2 (*Position and Partial as functions of Time 2*) [10, 50], han sido desarrollados a partir de la teoría de Brouwer-Lyddane. Sin embargo, otras teorías analíticas, como AOP [14], simplifican el problema mediante una transformación de Lie conocida como *eliminación de la paralaje* [17]. En este capítulo se analizan otras alternativas al enfoque de Brouwer que pueden surgir a partir de la eliminación de la paralaje. Estas técnicas se basan en la eliminación de los términos de largo periodo mediante la *eliminación del perigeo* [3]. El Hamiltoniano transformado presenta un grado de libertad y sólo depende de la distancia radial r y $R = \dot{r}$. Clásicamente, este Hamiltoniano es conocido como el *intermediario radial* [17]. Finalmente, la eliminación de los términos de corto periodo puede ser llevada a cabo mediante la clásica *normalización de Delaunay* (DN) [18] o a través del *método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky* (KBM) [4, 37].

Para llevar a cabo la metodología de validación desarrollada sólo se considera la perturbación producida por los coeficientes armónicos zonales del potencial gravitatorio terrestre, de modo que resulta posible analizar en profundidad la precisión de las expresiones matemáticas que intervienen en cada una de las dos teorías analíticas. De esta forma, pueden determinarse sus límites cuando aparecen problemas clásicos, como la inclinación crítica o los pequeños valores de excentricidad e inclinación.

El propósito de este estudio es la realización de una evaluación exhaustiva, desde el punto de vista de la precisión y la utilidad operativa, de la normalización de Delaunay y el método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky, una vez eliminados los términos de largo periodo. Se propone una metodología basada en un *análisis exploratorio de datos* (EDA) [66], con el fin de validar ambos métodos de integración y determinar los valores de las condiciones iniciales para los que cada método resulta válido, en función del horizonte de propagación. Se utiliza un catálogo espacial con 14208 *two-line elements* (TLEs) como conjunto suficientemente representativo de condiciones iniciales. Seguidamente, se identifican los outliers y se lleva a cabo un estudio general de los restantes TLEs considerando los coeficientes armónicos zonales J_2 - J_4 . Finalmente, se procede a estudiar los TLEs próximos a la inclinación crítica ($i_c = 63.44^\circ$ ó $i_c = 116.56^\circ$), así como a analizar la modificación implementada en PPT2, HANDE (*Hoots Analytic Dynamic Ephemeris*) [27] y AOP [14] para J_2 - J_4 y J_2 - J_{12} .

2.2. Teorías analíticas

En variables polares-nodales $(r, \theta, \nu, R, \Theta, N)$, el Hamiltoniano para un satélite en órbita alrededor de la Tierra, perturbado por los términos armónicos zonales del potencial gravitatorio, viene dado por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} \sum_{n \geq 2}^m J_n \left(\frac{\alpha}{r} \right)^n P_n(s \sin \theta). \quad (2.1)$$

Este Hamiltoniano define un sistema dinámico con dos grados de libertad. La coordenada r es la distancia radial desde el centro de masas de la Tierra hasta el satélite, $\theta = f + g$ representa el argumento de la latitud (f es la anomalía verdadera y g el argumento del perigeo) y ν es la ascensión recta del nodo ascendente, que es ignorada en \mathcal{H} . El momento R es la velocidad radial del orbitador, mientras que Θ es el módulo, y N la tercera componente, de su momento angular. Las variables R , Θ y N son los momentos conjugados de r , θ y ν , respectivamente. P_n es el polinomio de Legendre de grado n , s es el seno de la inclinación de la órbita, m es el orden máximo de la perturbación armónica zonal considerada, μ es la constante gravitacional, α es el radio ecuatorial del planeta, y J_n son los coeficientes armónicos zonales. Pueden encontrarse más detalles acerca de la formulación Hamiltoniana del problema del satélite artificial en [13, 17].

La figura 2.1 muestra las combinaciones de transformaciones de Lie y técnicas clásicas de promedios utilizadas en el desarrollo de las dos teorías analíticas, la normalización de Delaunay y el método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky. Ambas teorías comienzan con la eliminación de los términos de largo periodo causados por el argumento del perigeo mediante la combinación de dos transformaciones de Lie, la eliminación de la paralaje y la eliminación del perigeo (transformaciones de Lie φ_1 y φ_2 respectivamente), a partir del Hamiltoniano (2.1). El Hamiltoniano transformado \mathcal{H}'' tiene un grado de libertad, pero aún mantiene los términos de corto periodo causados por la anomalía media. Estas dos transformaciones de Lie se aplican en forma cerrada de excentricidad e inclinación, lo cual conduce a un problema que es integrable en las variables (r'', R'') .

El segundo orden del Hamiltoniano, tras la eliminación del perigeo, toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'' &= \frac{1}{2} \left(R''^2 + \frac{\Theta''^2}{r''^2} \right) - \frac{\mu}{r''} + \epsilon \frac{\Theta''^2}{r''^2} \left(\frac{\alpha}{p''} \right)^2 \left(\frac{3}{4} s''^2 - \frac{1}{2} \right) \\ &+ \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\Theta''^2}{r''^2} \left[\left(\frac{\alpha}{p''} \right)^2 \mathcal{P}_{J_0} + \sum_{i=2}^m J'_{2i} \left(\frac{\alpha}{p''} \right)^{2i} \mathcal{P}_{J_{2i}} \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde el pequeño parámetro ϵ representa J_2 , $p'' = \Theta''^2/\mu$, $\mathcal{P}_{J_{2i}}$ son polino-

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}(r, \theta, _, R, \Theta, N) & & \\
\downarrow \varphi_1 & & \\
\mathcal{H}'(r', \theta', _, R', \Theta', N') & & \\
\downarrow \varphi_2 & & \\
\mathcal{H}''(r'', _, _, R'', \Theta'', N'') \equiv \mathcal{H}''(l'', _, _, L'', G'', H'') & & \\
\begin{array}{cc}
\varphi_3 \swarrow & \searrow \varphi_4
\end{array} & & \\
\ddot{u} + \omega^2 u = F(u, \dot{u}; \epsilon) & & \mathcal{H}'''(_, _, _, L''', G''', H''')
\end{array}$$

Figura 2.1: Dos métodos de integración del intermediario radial \mathcal{H}'' .

mios en excentricidad y sus coeficientes son polinomios en s'' .

Tradicionalmente, para completar la teoría y obtener los elementos medios, como hizo Brouwer [6], se lleva a cabo una reducción adicional en variables de Delaunay (l, g, h, L, G, H) mediante la normalización de Delaunay [18] (transformación de Lie φ_4), que promedia el problema sobre la anomalía media. Sin embargo, si se sustituyen el tiempo y la variable r'' por la anomalía media perturbada y u , que se define como el inverso de r'' , en el Hamiltoniano \mathcal{H}'' (transformación φ_3), las ecuaciones del movimiento constituyen un oscilador armónico perturbado unidimensional, en el cual también puede aplicarse el método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky [4, 37, 44] para integrar dichas ecuaciones del movimiento [1, 8, 9, 54, 55, 62]. Cabe resaltar que las variables de Delaunay son singulares para valores nulos de excentricidad y/o inclinación.

En este capítulo, las teorías analíticas se desarrollan manteniendo los parámetros físicos en forma simbólica, de modo que resultan válidas para cualquier modelo del campo gravitatorio. Asimismo, no se realizan cambios de variables, para no hacer desaparecer ningún problema derivado de las pequeñas excentricidades e inclinaciones [42], así como de la inclinación crítica, lo cual permite evaluar su impacto real sobre las expresiones analíticas y, consiguientemente, determinar la región del espacio en la que pueden aparecer estos problemas. Sin embargo, en el caso de la inclinación crítica también se analiza la solución implementada en PPT2.

Las expresiones analíticas que intervienen en este capítulo, y que se integran en la primera etapa de los propagadores híbridos expuestos en el capítulo anterior, han sido codificadas en el lenguaje de programación C a

partir del entorno simbólico-numérico *MathATESAT* [41, 55].

2.3. Metodología

A continuación se describe la metodología básica seguida para la evaluación de la sensibilidad de las dos técnicas analíticas de integración en el caso zonal. Ambos métodos de integración son utilizados en la propagación de un catálogo espacial de TLEs durante un periodo de 30 días, y sus resultados son comparados con los de la integración del problema original por medio de un método Runge-Kutta de 8° orden [20]. Seguidamente se calculan los errores en distancia, along-track, cross-track y radial. Por último, se lleva a cabo un análisis exploratorio de datos [66] consistente en el estudio de estos errores. A continuación se describen los detalles de esta metodología.

2.3.1. Datos para el estudio

Se considera un catálogo espacial compuesto por 14208 TLEs como conjunto de condiciones iniciales sobre las que aplicar ambas técnicas, DN y KBM, para poder obtener de este modo un conocimiento exhaustivo de su comportamiento. Aunque, como es sabido, los TLEs fueron diseñados para ser utilizados en combinación con el propagador de órbitas SGP4, se considera que un catálogo espacial de TLEs contiene un conjunto de órbitas, de diversos tipos, que resulta lo suficientemente extenso y representativo como para poder ser considerado un test fiable e independiente para este estudio.

En primer lugar se extraen los elementos orbitales a partir del catálogo espacial. Un primer análisis de sus distribuciones muestra que, como cabía esperar, aunque Ω , ω y M están uniformemente distribuidas entre 0° y 360° , las distribuciones de a , e , i no son uniformes. Los valores del semieje mayor están comprendidos entre 1.018543 y 109.2196 radios terrestres, aunque el 50% de los objetos presenta un valor de $a < 1.5$ radios terrestres. Los valores de excentricidad se extienden desde 0.000001 hasta 0.9203, aunque casi el 60% presenta $e < 0.01$. La inclinación está comprendida entre 0.00120° y 144.6415° , incluyendo 270 objetos en el entorno de la inclinación crítica. El 95.6% de las órbitas contenidas en el catálogo considerado está integrado por órbitas bajas (LEO) cuasi-circulares, órbitas medias (MEO), órbitas excéntricas (HEO) y órbitas bajas (LEO).

2.3.2. Análisis exploratorio de datos (EDA)

Se propagan los 14208 TLEs durante un periodo de tiempo de 30 días utilizando tanto los métodos DN y KBM como Runge-Kutta. A continuación se determinan los errores en distancia, along-track, cross-track y radial, y se analizan para dos horizontes de propagación, de 7 y 30 días. Seguidamente

se lleva a cabo un análisis exploratorio de datos que consiste en el estudio de los siguientes ítems.

- Un estudio gráfico de los errores de DN y KBM mediante diagramas de caja. Este tipo de gráficos está constituido por un rectángulo dibujado en torno a la mediana, cuyos lados inferior y superior delimitan el primer y tercer cuartil (Q_1 y Q_3), respectivamente. Los segmentos inferior y superior se extienden desde dichos cuartiles hasta los valores mínimo y máximo, respectivamente, sin considerar los outliers (círculos) ni los valores extremos (asteriscos). Los valores $Q_1 - 1.5 \times (Q_3 - Q_1)$ y $Q_3 + 1.5 \times (Q_3 - Q_1)$ delimitan la región en cuyo exterior aparecen los outliers. Conviene señalar que los valores extremos han sido considerados como outliers en el presente estudio.
- Un análisis mediante diagramas de dispersión, destinados a caracterizar las órbitas para las que los propagadores presentan un peor comportamiento global, manifestado a través de una mayor presencia de outliers por encima del límite superior $Q_3 + 1.5 \times (Q_3 - Q_1)$). Este análisis se complementa mediante un estudio de tablas de contingencia referidas al número de outliers, considerando el método empleado, DN o KBM, y las características orbitales, en términos de excentricidad o de inclinación, como variables. Asimismo, se efectúa el cálculo de la Q de Yule [70], una medida del grado de asociación entre ambas variables, cuyos valores van desde 0, cuando las variables son independientes entre sí, hasta -1 ó $+1$, dependiendo de la dirección, cuando la asociación es total.
- Un estudio de los errores en distancia, along-track, cross-track y radial, excluyendo los valores atípicos. En particular, se consideran atípicos aquellos TLEs con un error en distancia superior a 1000 m para un horizonte de propagación de 30 días.
- Finalmente, se exploran los resultados de ambos métodos para órbitas situadas en el entorno de la inclinación crítica.

2.4. DN vs KBM para el modelo J_2 - J_4

En esta sección, el modelo de fuerzas considerado en los propagadores de órbitas que implementan las teorías analíticas bajo estudio sólo tiene en cuenta los coeficientes armónicos zonales J_2 - J_4 , al igual que sucede en el propagador SGP4.

2.4.1. Horizonte de propagación de 7 días

El estudio comienza mediante una representación de diagramas de caja de los errores en distancia correspondientes a ambos métodos, DN y KBM, con el objeto de identificar potenciales outliers. Como puede observarse en la figura 2.2, no existen outliers por debajo del límite inferior, aunque si los hubiera estarían representando casos con un comportamiento excepcionalmente bueno. Con el fin de mejorar la claridad de la figura, no han sido incluidos los outliers superiores a 5 m. La tabla 2.1 recoge los valores de la mediana, mínimo, máximo, primer y tercer cuartiles, así como el límite superior, incluyendo los datos que generan desbordamientos.

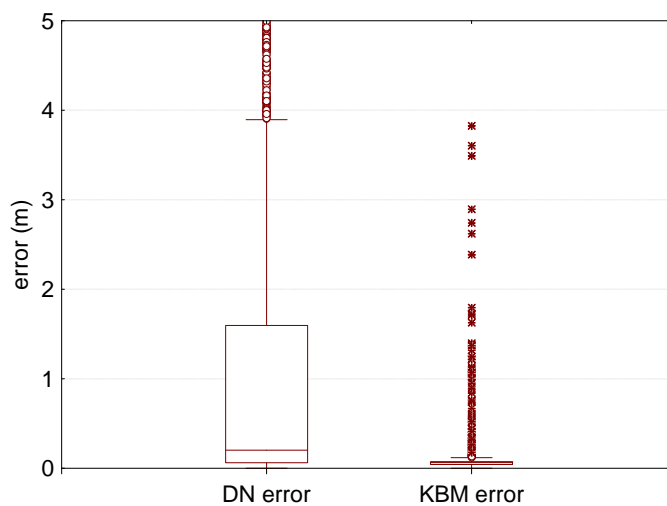


Figura 2.2: Diagramas de caja de los errores en distancia de DN y KBM para un horizonte de propagación de 7 días.

Tabla 2.1: Parámetros estadísticos de los errores en distancia (m) de DN y KBM para un horizonte de propagación de 7 días.

	DN	KBM
Mediana	0.202258	0.063508
Mínimo	0.000002	0.000001
Máximo	83620353	83620353
Q_1	0.061806	0.042548
Q_3	1.595556	0.074012
$Q_3 + 1.5 \times (Q_3 - Q_1)$	3.896181	0.1212079

Los números de outliers obtenidos para los métodos DN y KBM son 2662

y 147 respectivamente, de los cuales sólo 55 son comunes. De entre los TLEs con excentricidad inferior a 0.01, un 33 % resultan ser outliers para el método DN. Esta marcada asociación se ve confirmada por un significativo valor de 0.97 de la Q de Yule. Por su parte, de entre los TLEs con $e \geq 0.01$ e inclinación en el entorno de la inclinación crítica (entre 62.5° y 64.5°), un 47 % constituyen outliers para DN. En este caso, una Q de Yule de 0.997 manifiesta asimismo un alto grado de asociación. En el caso de KBM, un 50 % de los TLEs próximos a la inclinación crítica (entre 62.5° y 64.5°) también constituyen outliers, con un valor de la Q de Yule de 0.998, mientras que 12 de los restantes 16 outliers de KBM corresponden a TLEs con inclinaciones inferiores a 1.5° y $e > 0.5$, en cuyo caso la Q de Yule presenta un valor de 0.985. Cabe mencionar que el error en distancia máximo en estos últimos outliers se encuentra por debajo de 6 m. La figura 2.3 muestra las distribuciones de excentricidad frente a inclinación del catálogo completo, así como de los TLEs cuyos errores en distancia constituyen outliers para DN y KBM.

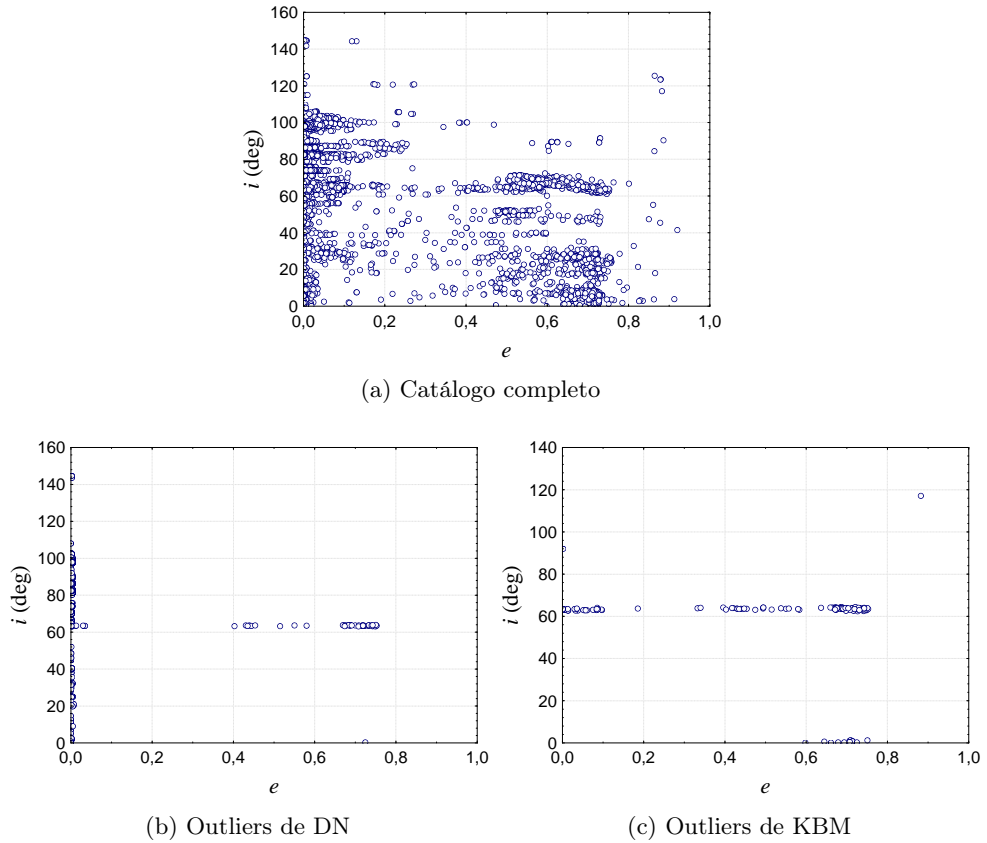


Figura 2.3: Distribución de excentricidad frente a inclinación para un horizonte de propagación de 7 días.

A continuación se analiza el comportamiento de los métodos DN y KBM

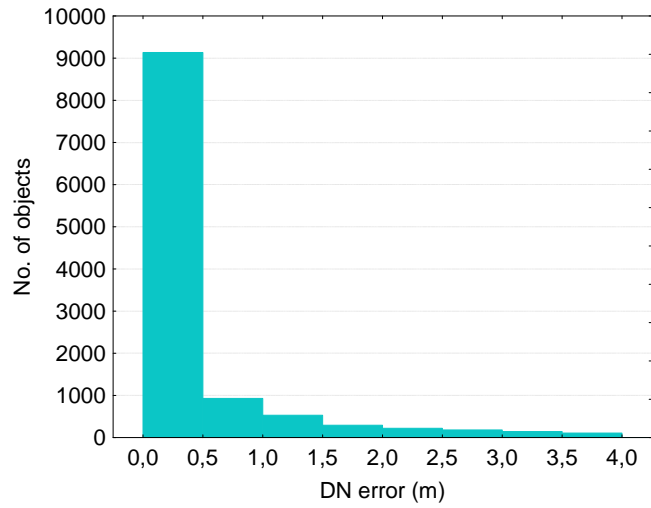
en cuanto a los errores en distancia, along-track, cross-track y radial.

La figura 2.4(a) presenta el histograma de los errores en distancia para DN, en el que puede observarse que la mayor proporción de los errores se sitúa por debajo de 0.5 m. La figura 2.4(b) muestra los diagramas de caja de los errores en distancia, along-track, cross-track y radial, sin incluir los outliers superiores. Los datos se clasifican en tres conjuntos: $e < 0.01$, $e \geq 0.01$ con $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$, y resto de datos. Puede comprobarse que los errores más determinantes para los TLEs con $e < 0.01$ corresponden a las componentes along-track y radial, mientras que para los TLEs con $e \geq 0.01$ e $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$ la principal contribución al error procede de la componente cross-track.

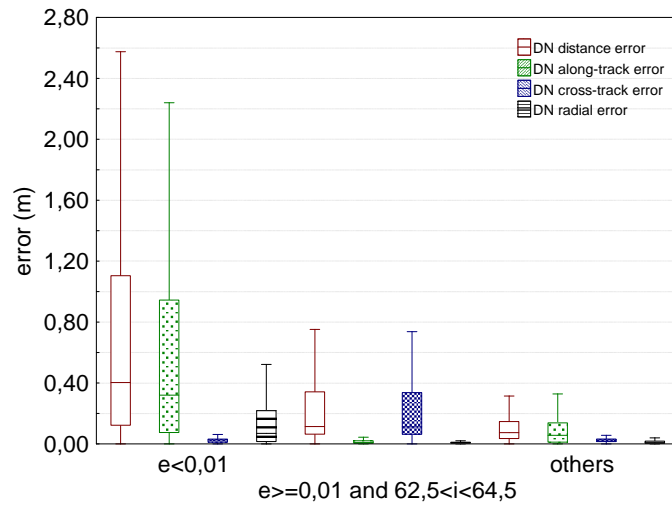
La figura 2.5(a) muestra el histograma de los errores en distancia correspondientes al método KBM, la gran mayoría de los cuales son inferiores a 0.1 m. La figura 2.5(b) recoge los diagramas de caja de los errores en distancia, along-track, cross-track y radial para KBM, sin los outliers superiores. Los datos se clasifican del mismo modo descrito para DN. En este caso, a diferencia de DN, las componentes más determinantes del error en distancia para los TLEs con $e < 0.01$ se encuentran en las direcciones tangente (along-track) y normal (cross-track), mientras que para los TLEs con $e \geq 0.01$ e $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$ la mayor contribución al error en distancia procede de la componente cross-track, al igual que en el caso DN. Cabe mencionar la reducida influencia del error radial en los tres casos.

En general, el peor comportamiento corresponde a la categoría $e < 0.01$ de la normalización de Delaunay. En la figura 2.6 se analizan los errores de los elementos orbitales para esta categoría, tanto para el método DN como para KBM, mediante los diagramas de caja, sin mostrar los outliers. Se ha omitido el diagrama correspondiente a la ascensión recta del nodo ascendente, porque es prácticamente idéntico al de la inclinación, así como el de la anomalía media, muy similar al del argumento del perigeo. El método DN sólo se comporta mejor que KBM en el caso del semieje mayor, con un error ligeramente inferior (0.0035 m frente a 0.0045 m en valores promedio). Sin embargo, los errores de KBM son mucho mejores que los de DN en excentricidad, argumento del perigeo y anomalía media. Los mayores errores en excentricidad y argumento del perigeo (figuras 2.6(b) y 2.6(d)) del método de la normalización de Delaunay explican que el error radial sea superior al error cross-track en esta categoría.

Para finalizar este apartado, se analiza un conjunto de TLEs que constituyen outliers para el método KBM: aquéllos con $e > 0.5$ e $i < 1.5^\circ$. Aunque, tal como muestra la figura 2.7, el comportamiento de ambos métodos, DN y KBM, es muy similar para esta categoría, el método KBM se comporta ligeramente mejor, con un error en distancia promedio de 0.12 m frente a los 0.14 m del método DN.

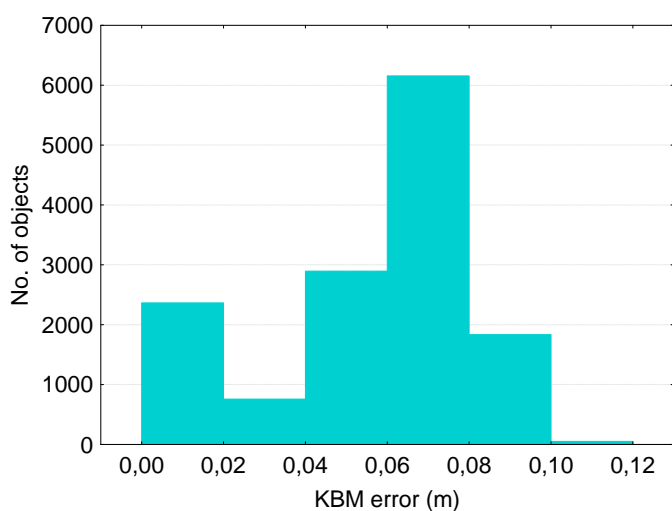


(a) Histograma de errores en distancia de DN

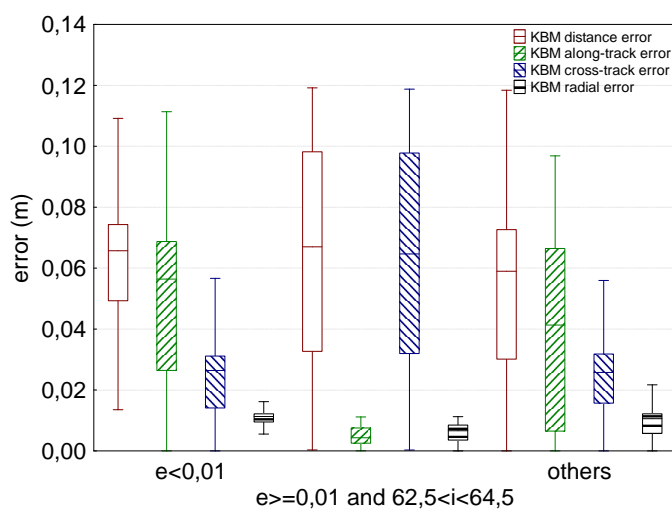


(b) Errores en distancia, along-track, cross-track y radial

Figura 2.4: Método de normalización de Delaunay para un horizonte de propagación de 7 días.



(a) Histograma de errores en distancia de KBM



(b) Errores en distancia, along-track, cross-track y radial

Figura 2.5: Método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky para un horizonte de propagación de 7 días.

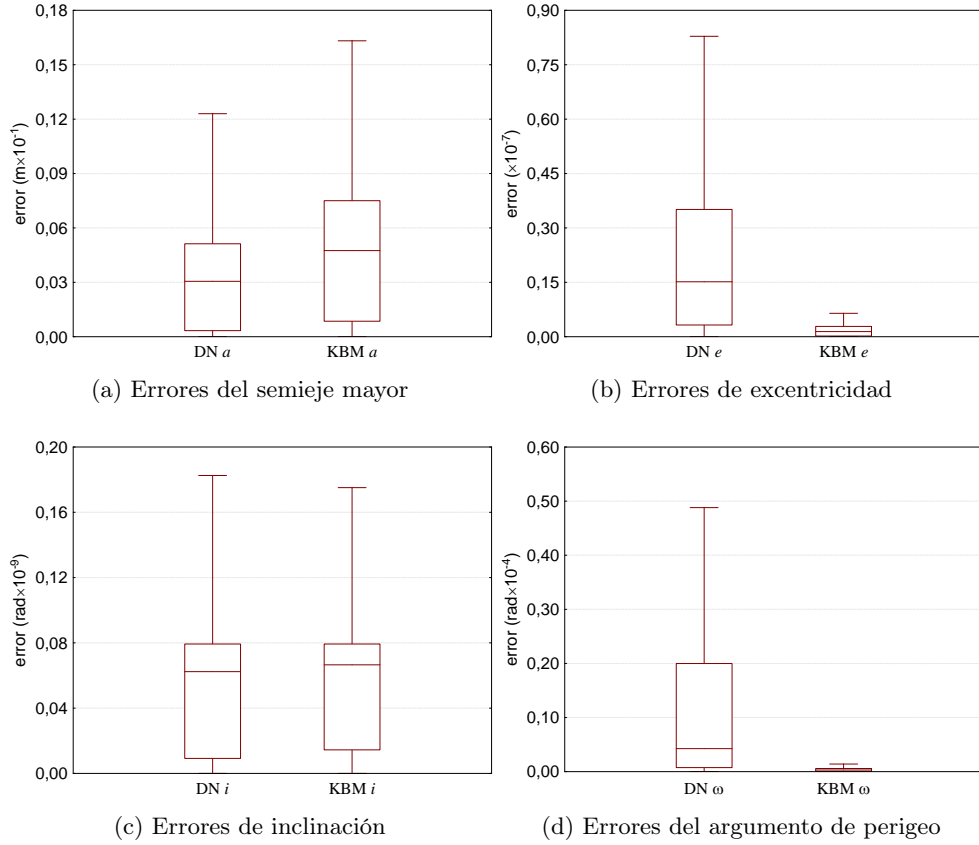


Figura 2.6: Diagramas de caja de errores de los elementos orbitales para DN y KBM con $e < 0.01$ para un horizonte de propagación de 7 días.

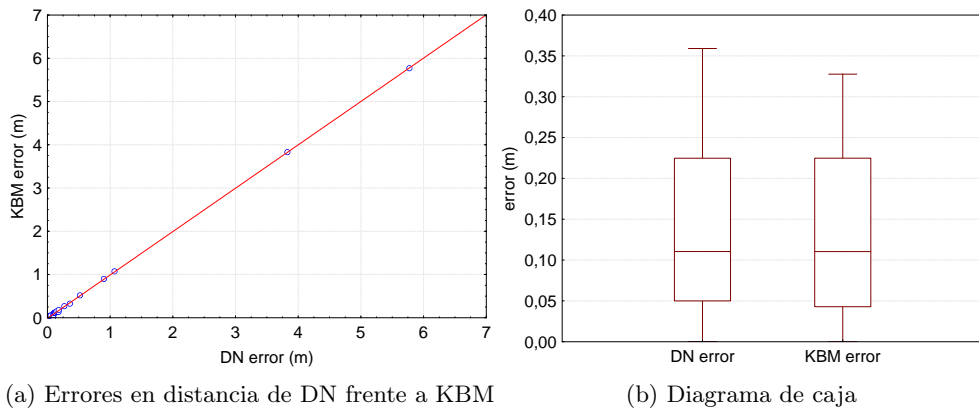


Figura 2.7: Outliers de KBM ($e > 0.5$ e $i < 1.5^\circ$) para un horizonte de propagación de 7 días.

2.4.2. Horizonte de propagación de 30 días

En primer lugar se representan los diagramas de caja de los errores en distancia de DN y KBM, figura 2.8, con el fin de tener una visión inicial de sus correspondientes outliers. En aras de la claridad, los outliers superiores a 3000 m no han sido incluidos en la figura. Como puede comprobarse, no aparecen outliers inferiores. La tabla 2.2 ofrece los valores de la mediana, mínimo, máximo, cuartiles primero y tercero, así como el límite superior, incluyendo los datos que generan desbordamientos.

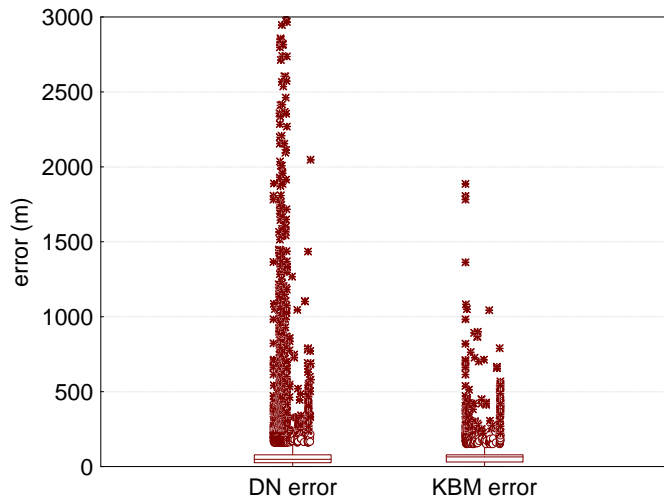


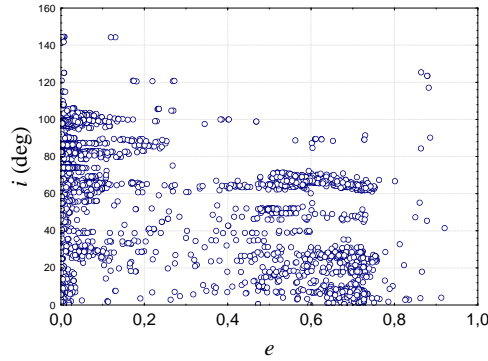
Figura 2.8: Diagramas de caja de los errores en distancia de DN y KBM para un horizonte de propagación de 30 días.

Tabla 2.2: Parámetros estadísticos de los errores en distancia (m) de DN y KBM para un horizonte de propagación de 30 días.

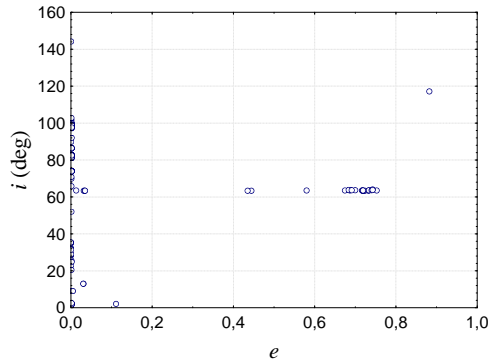
	DN	KBM
Mediana	48.8534	64.6695
Mínimo	0.00015	0.00012
Máximo	8833877	8833877
Q_1	25.8261	30.6395
Q_3	78.6987	78.4751
$Q_3 + 1.5 \times (Q_3 - Q_1)$	158.0076	150.2285

Cuando se aplican los métodos DN y KBM sobre el catálogo completo de TLEs, y se calculan los errores en distancia para un horizonte de propagación de 30 días, aparecen 1850 outliers para DN y 446 para KBM, 409 de los

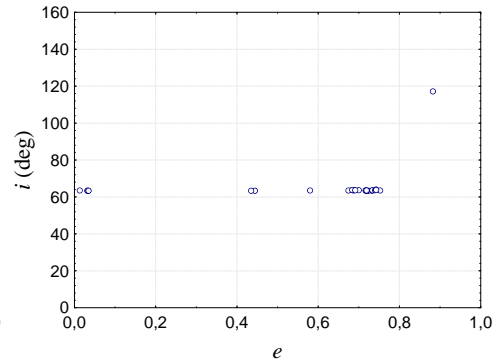
cuales son comunes. De entre los TLEs con $e < 0.01$ e inclinación próxima a la crítica, un 18 % son outliers para DN, asociación que viene respaldada por un valor de la Q de Yule de 0.54. Por su parte, del conjunto de TLEs con $e \geq 0.01$ e inclinación próxima a la crítica, un 34 % constituyen outliers para DN, con un valor de la Q de Yule de 0.78 que manifiesta un significativo grado de asociación. En el caso del método KBM, un 50 % de los TLEs en el entorno de la inclinación crítica constituyen outliers, asociación que concuerda con un representativo valor de la Q de Yule de 0.89. En la figura 2.9 se muestran las distribuciones de excentricidad frente a inclinación tanto para el catálogo completo, como para los TLEs cuyos errores en distancia constituyen outliers para DN y para KBM y son superiores a 1000 m (261 para DN y 27 para KBM, siendo todos estos últimos también outliers para DN).



(a) Catálogo completo



(b) Outliers de DN



(c) Outliers de KBM

Figura 2.9: Distribución de excentricidad frente a inclinación para un horizonte de propagación de 30 días.

A continuación se analizan los errores en distancia, along-track, cross-track y radial para los TLEs que conducen a valores del error en distancia no superiores a 1000 m.

El histograma de los errores en distancia del método DN para un horizonte de propagación de 30 días se representa en la figura 2.10(a). Por su parte, la figura 2.10(b) muestra los diagramas de caja con las distribuciones de los errores en distancia para este mismo método, descompuestas en las tres direcciones tangente, normal y binormal, y clasificadas según las mismas categorías empleadas en el apartado anterior. La componente más determinante del error resulta ser la tangente, along-track, para todas las categorías. Para el caso de TLEs con $e \geq 0.01$ e $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$, la componente normal, cross-track, es mayor que la binormal, radial, aunque la relación es justamente la inversa para las otras dos categorías.

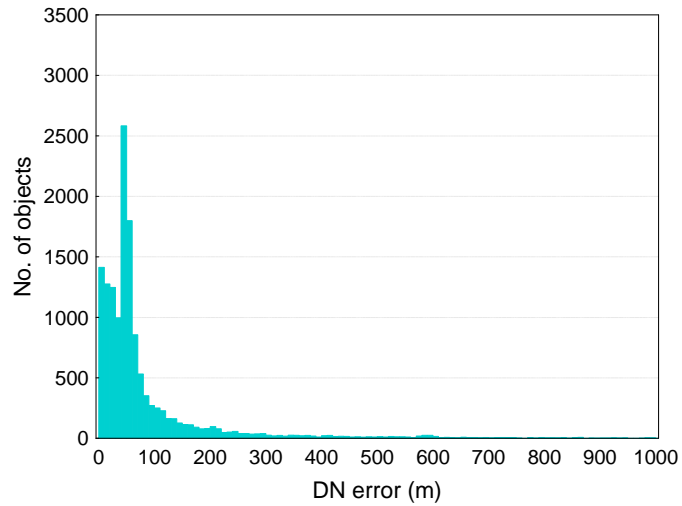
Las figuras 2.11(a) y 2.11(b) contienen la información equivalente para el método KBM: el histograma de los errores en distancia, y las distribuciones de los errores según componentes para las tres categorías ya descritas, respectivamente. Las relaciones entre las componentes del error son similares a las expuestas para el método DN.

En general, los peores resultados se obtienen para excentricidades inferiores a 0.01. Con el fin de proceder a un estudio más detallado de esta zona, y analizar el efecto de los valores reducidos de excentricidad sobre los errores en distancia, se clasifican los TLEs del catálogo en cinco categorías, atendiendo a sus valores de excentricidad: $e < 0.0015$, $0.0015 \leq e < 0.003$, $0.003 \leq e < 0.006$, $0.006 \leq e < 0.01$ y $e \geq 0.01$, que representan unos porcentajes del catálogo completo del 16.26 %, 11.97 %, 15.05 %, 12.84 % y 43.88 %, respectivamente. La figura 2.12 representa los diagramas de caja de los errores en distancia para las categorías expuestas, tanto para el método DN como para KBM. Como puede observarse, DN resulta peor que KBM para valores de excentricidad $e < 0.003$, con errores promedio de 460 m frente a 49 m para $e < 0.0015$, y de 189 m frente a 57 m para $0.0015 \leq e < 0.003$.

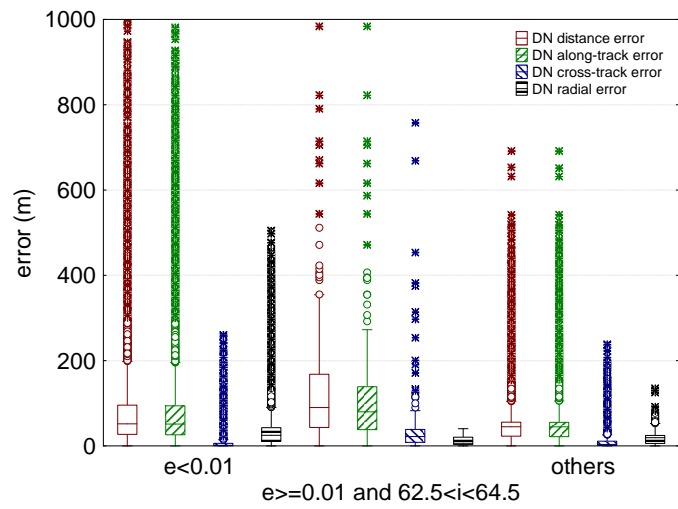
2.5. Outliers en el entorno de la inclinación crítica

Para llevar a cabo el estudio del comportamiento en el entorno de la inclinación crítica, se seleccionan los 270 TLEs del catálogo espacial con valores de inclinación $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$, de los cuales 58 presentan además valores de excentricidad inferiores a 0.01, razón por la que, de acuerdo con el análisis de la sección anterior, no serán procesados mediante el método de la normalización de Delaunay. Técnicamente, la inclinación crítica constituye una singularidad derivada del denominador $1 - 5 \cos^2 i''$, que aparece en las transformaciones directa e inversa de la eliminación del perigeo. Como consecuencia, esta transformación de Lie no es aplicable en los entornos de $i = 63.44^\circ$ e $i = 116.56^\circ$.

Con la finalidad de reducir el impacto de la singularidad sobre la aplicación de esta transformación, los términos $1/x$ pueden ser reemplazados por

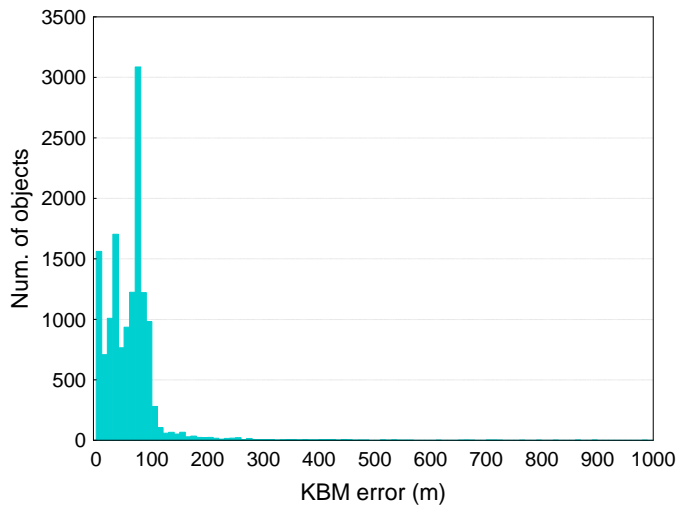


(a) Histograma de errores en distancia de DN

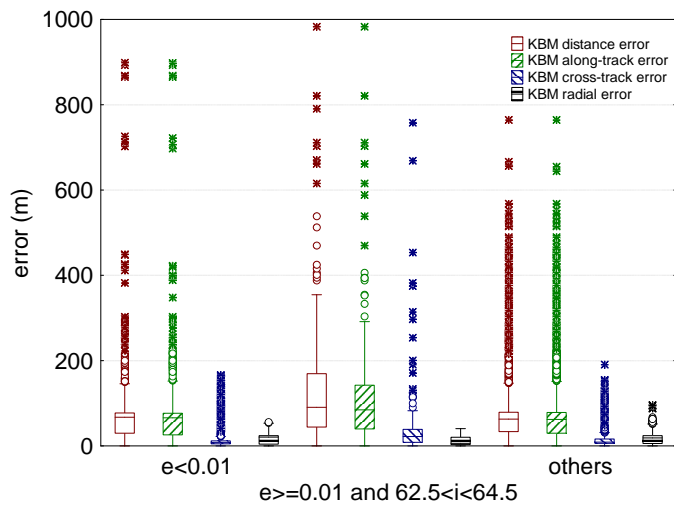


(b) Errores en distancia, along-track, cross-track y radial

Figura 2.10: Método de normalización de Delaunay para un horizonte de propagación de 30 días.



(a) Histograma de errores en distancia de KBM



(b) Errores en distancia, along-track, cross-track y radial

Figura 2.11: Método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky para un horizonte de propagación de 30 días.

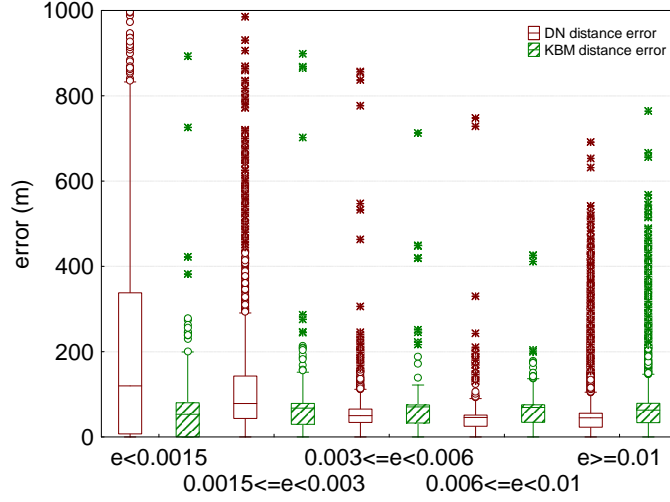


Figura 2.12: Diagramas de caja de los errores en distancia de DN y KBM, en diferentes intervalos de excentricidad, para un horizonte de propagación de 30 días.

$$T2 = \frac{1 - e^{\beta x^2}}{x} = \beta x \sum_{n=0}^{12} (-1)^n \frac{\beta^n x^{2n}}{(n+1)!} \prod_{m=0}^{10} (1 + e^{-2^m \beta x^2}), \quad (2.3)$$

donde $x = 1 - 5 \cos^2 i''$ y $\beta = 100/2^{11}$. Esta solución ha sido implementada por otros programas analíticos de propagación de órbitas (PPT2, HANDE y AOP). En este estudio se utilizará como notación DN2 y KBM2 para hacer referencia a los propagadores analíticos modificados a partir de DN y KBM, respectivamente, para incorporar la expresión (2.3). A continuación se desarrolla el análisis numérico para un horizonte de propagación de 7 días. En el primer apartado se estudia el comportamiento de DN2 y KBM2 en el entorno de la inclinación crítica para el caso de las perturbaciones J_2 – J_4 , mientras que en el segundo apartado se profundiza en el estudio del comportamiento del método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky ante las perturbaciones J_2 – J_{12} .

2.5.1. Perturbaciones J_2 – J_4

En este apartado se consideran los 212 TLEs con $e \geq 0.01$ e $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$. Varios de estos TLEs presentan errores por encima de 10^7 m, y en dos casos se obtienen desbordamientos. La tabla 2.3 muestra, a través de los parámetros estadísticos de sus errores en distancia, que los métodos DN y KBM se comportan de manera similar en estos casos. Del mismo modo, la tabla 2.4 presenta la información equivalente para los métodos DN2 y KBM2. Tal como se puede deducir de esta última tabla, así como de la figura 2.13,

el comportamiento de DN2 y KBM2 también resulta muy similar, con un error en distancia máximo de 133 m.

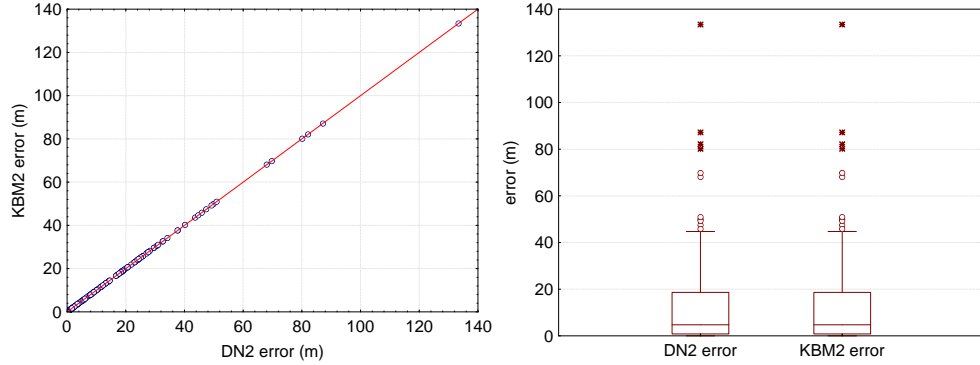
Tabla 2.3: Parámetros estadísticos de los errores en distancia (m) de DN y KBM, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días.

	DN	KBM
Mediana	0.174277	0.173565
Mínimo	0.000313	0.000313
Máximo	83620353	83620353
Q_1	0.083627	0.082587
Q_3	2.089765	2.089800
$Q_3 + 1.5 \times (Q_3 - Q_1)$	5.098972	5.100619

Tabla 2.4: Parámetros estadísticos de los errores en distancia (m) de DN2 y KBM2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días.

	DN2	KBM2
Mediana	4.735359	4.735458
Mínimo	0.0000134	0.0000159
Máximo	133.4178	133.4178
Q_1	0.818214	0.816421
Q_3	18.63646	18.63655
$Q_3 + 1.5 \times (Q_3 - Q_1)$	45.363828	45.366743

En las tablas 2.5 y 2.6 se han recogido los parámetros estadísticos de los cuatro métodos, DN, DN2, KBM y KBM2, haciendo una división en base a los TLEs que constituían outliers para los métodos no modificados: la tabla 2.5 no los incluye, mientras que la tabla 2.6 se restringe a ellos. Ambas tablas permiten comprobar con facilidad que la mayor robustez de los métodos modificados no procede de una mejora general, sino de un tratamiento más apropiado de los casos que constituían outliers para los métodos no modificados. De hecho, en los 165 casos que no incluyen los outliers originales el comportamiento de DN2 y KBM2 es peor que el de sus homólogos no modificados (13.28 m de error en distancia medio frente a 0.37 m). Sin embargo, los errores correspondientes a los 47 outliers originales, incluidos los dos casos que generaban desbordamientos, se han visto reducidos a tan solo 8.2 m en promedio.



(a) Errores en distancia de DN2 frente a KBM2

(b) Diagramas de caja

Figura 2.13: Comparación entre los errores en distancia de DN2 y KBM2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días.

Tabla 2.5: Parámetros estadísticos de los errores en distancia (m) de DN, DN2, KBM y KBM2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días, excluidos los outliers originales.

	DN	DN2	KBM	KBM2
Media	0.3742	13.275	0.3734	13.271
Mediana	0.1139	6.0134	0.1118	6.0146
Mínimo	0.000313	0.000134	0.000313	0.000159
Máximo	3.6050	133.4178	3.6049	133.4178

Tabla 2.6: Parámetros estadísticos de los errores en distancia (m) de DN, DN2, KBM y KBM2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días, correspondientes a los outliers originales.

	DN	DN2	KBM	KBM2
Media	4547873	8.2295	4547873	8.2285
Mediana	119.45	3.0804	119.45	3.0803
Mínimo	5.1048	0.00131	5.1049	0.00135
Máximo	83620353	80.1421	83620353	80.1422

La figura 2.14 muestra los diagramas de caja con las distribuciones de los errores en distancia, junto con sus componentes en las direcciones tangente, normal y binormal, para los métodos DN2 y KBM2. Al igual que sucedía en el estudio general para los TLEs con $e \geq 0.01$ e $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$, el error cross-track es la componente con una mayor contribución al error total en distancia.

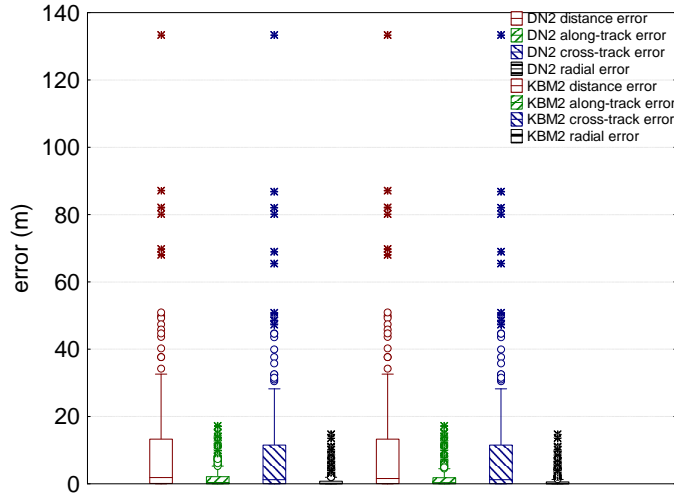


Figura 2.14: Errores en distancia, along-track, cross-track y radial de DN2 y KBM2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días.

2.5.2. Perturbaciones J_2 - J_{12}

En el apartado anterior se ha comprobado que el comportamiento de los dos métodos de integración es similar en el entorno de la inclinación crítica. Por consiguiente, sólo se emplea el método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky para llevar a cabo el estudio cuando se consideran las perturbaciones causadas por los coeficientes armónicos zonales comprendidos entre J_2 y J_{12} . Se representa como KBMJ12 el propagador analítico desarrollado para este caso, y como KBMJ12_2 la versión modificada mediante la consideración de la expresión (2.3) para un tratamiento apropiado del entorno de la inclinación crítica.

El estudio se desarrolla sobre los 270 TLEs con valores de inclinación $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$, puesto que en esta ocasión no es necesario prescindir de los 58 TLEs que presentan valores de excentricidad inferiores a 0.01, ya que, como se ha mencionado, no va a aplicarse la normalización de Delaunay. Cuando se considera el método no modificado, algunos de los TLEs conducen a errores en distancia superiores a 10^8 m, y se obtienen desbordamientos

en diez casos. La tabla 2.7 presenta los valores estadísticos de los errores en distancia correspondientes a ambos métodos, KBMJ12 y KBMJ12_2, teniendo en cuenta que en KBMJ12_2 se han incluido los diez casos no considerados en KBMJ12 por generar desbordamientos.

Tabla 2.7: Parámetros estadísticos de los errores en distancia (m) de KBMJ12 y KBMJ12_2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días.

	KBMJ12	KBMJ12_2
Mediana	859.8631	634.4462
Mínimo	0.009345	0.249139
Máximo	133147992	2247.630
Q_1	9.32829	310.6079
Q_3	8070.470	1127.350
$Q_3 + 1.5 \times (Q_3 - Q_1)$	20162.18	2352.4631

La figura 2.15(a) representa el diagrama de caja de los errores en distancia correspondientes a KBMJ12, en el que, por claridad, sólo se incluyen 5 de los 56 outliers totales. De igual modo, la figura 2.15(b) muestra la distribución de los errores para KBMJ12_2, en cuyo caso cabe destacar la ausencia de outliers.

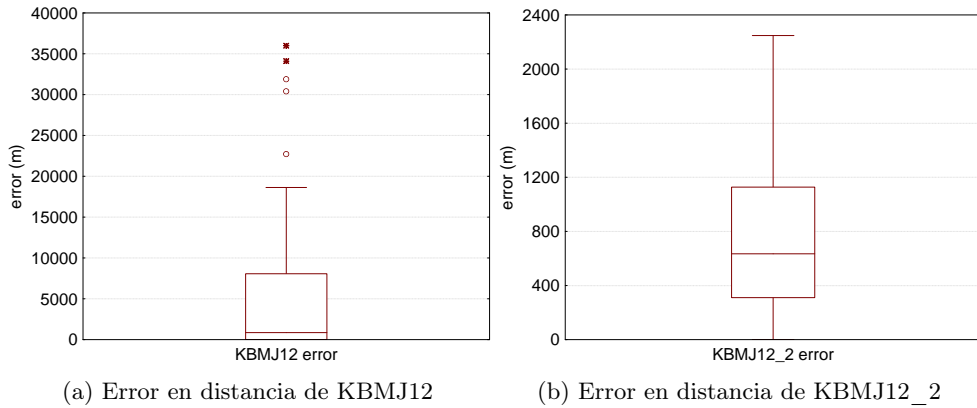


Figura 2.15: Diagramas de caja de los errores en distancia de KBMJ12 y KBMJ12_2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días.

Queda patente que, si bien las efemérides generadas a partir de la teoría de segundo orden presentan una buena precisión cuando se consideran las perturbaciones J_2 - J_4 , los resultados empeoran al ampliar el número de

coeficientes armónicos zonales considerados, de modo que para alcanzar el mismo grado de precisión se haría necesaria la consideración de los efectos de tercer orden. La tabla 2.8 compara los métodos KBMJ12 y KBMJ12_2 mediante la consideración por separado de los casos en los que cada método se comporta mejor. KBMJ12 presenta mejores resultados en 128 casos, con un valor promedio del error en distancia de 184 m frente a los 503 m del método modificado KBMJ12_2. Sin embargo, este último se comporta mejor en 142 casos, incluyendo los diez que generan desbordamientos en el método no modificado, de modo que el error en distancia se reduce hasta un valor promedio de tan solo 967 m. Otra diferencia con respecto del caso J_2-J_4 es que en J_2-J_{12} la principal componente del error en distancia se extiende en la dirección tangente, error along-track, como puede comprobarse en la figura 2.16.

Tabla 2.8: Parámetros estadísticos de los errores en distancia (m) de KBMJ12 y KBMJ12_2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días, clasificados según el modelo con mejor comportamiento (destacado en azul).

Modelo	N° de datos	Media	Mediana	Mínimo	Máximo
KBMJ12	128	184.3634	6.6210	0.009345	1720.197
KBMJ12_2		503.3113	311.52	0.249139	1796.142
KBMJ12	142	5671673	7939.072	166.2859	133147992
KBMJ12_2		967	763.488	2.44315	2248

Finalmente, se estudia en detalle el entorno más cercano de la inclinación crítica, en el que, como cabe esperar, empeora el comportamiento de la teoría analítica. Para ello se divide el intervalo $[62.5^\circ, 64.5^\circ]$ en cinco subintervalos. La figura 2.17 muestra la distribución de los errores en distancia de KBMJ12 para cada uno de ellos. Los cinco subintervalos albergan grandes errores, pero los mayores se concentran, como es natural, en el subintervalo que incluye el valor exacto de inclinación crítica, $[63.33^\circ, 63.66^\circ]$.

La figura 2.18(a) compara los errores en distancia entre los modelos KBMJ12 y KBMJ12_2, mientras que la figura 2.18(b) muestra sus distribuciones para KBMJ12_2 en cada uno de los cinco subintervalos de inclinación. Como puede apreciarse, el método analítico modificado KBMJ12_2 mejora claramente el comportamiento en el subintervalo que contiene la inclinación crítica. Esta misma conclusión puede ser extraída a partir del análisis de la tabla 2.9, que compara los valores estadísticos de los errores en distancia de KBMJ12 y KBMJ12_2 para cada uno de los cinco subintervalos de inclinación en el entorno de la inclinación crítica.

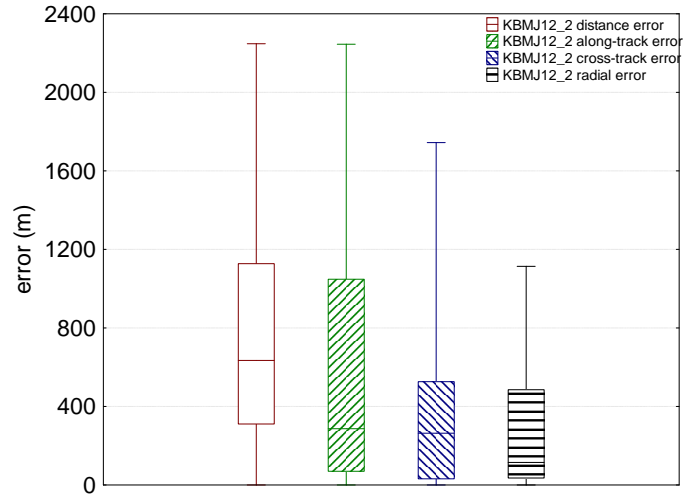


Figura 2.16: Errores en distancia, along-track, cross-track y radial de KBMJ12_2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días.

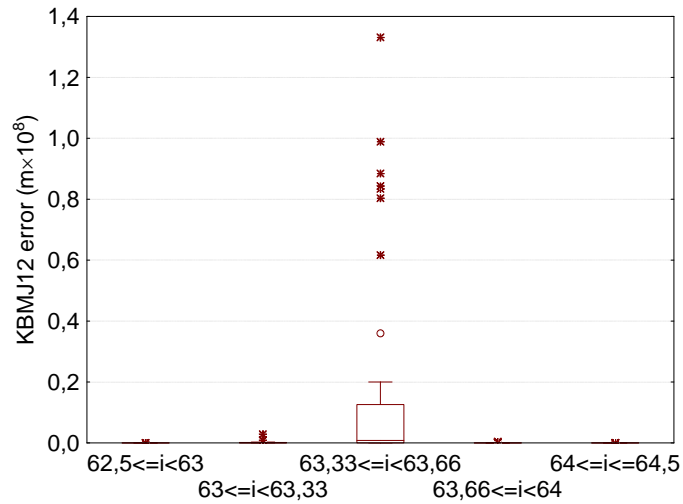
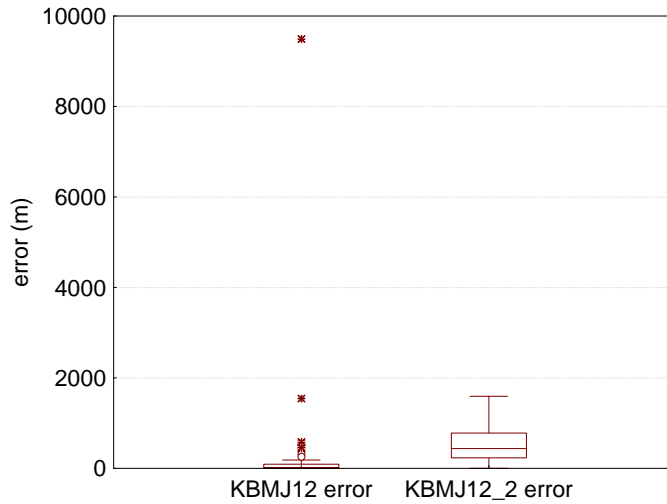
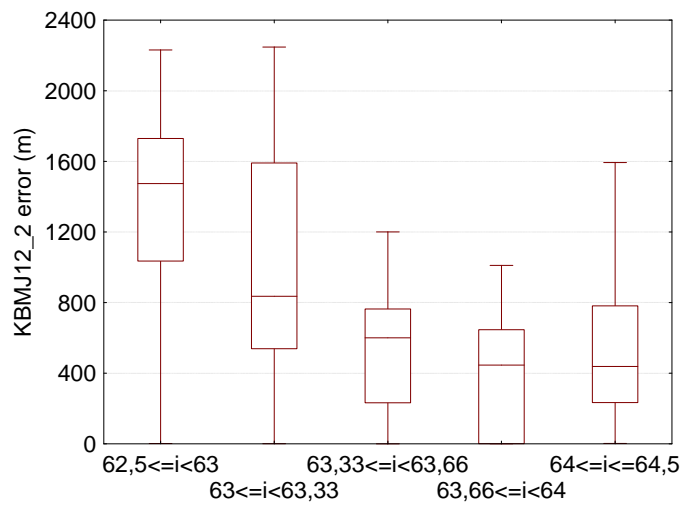


Figura 2.17: Diagramas de caja de los errores en distancia de KBMJ12, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días.



(a) Errores en distancia de KBMJ12 frente a KBMJ12_2, sin mostrar los outliers de KBMJ12 superiores a 10000 m



(b) Errores en distancia de KBMJ12_2 en cada subintervalo de inclinación

Figura 2.18: Diagramas de caja de los errores en distancia de KBMJ12 y KBMJ12_2, en el entorno de la inclinación crítica, para un horizonte de propagación de 7 días.

Tabla 2.9: Parámetros estadísticos de los errores en distancia (m) de KBMJ12 y KBMJ12_2 en el entorno de la inclinación crítica.

i	Modelo	N° de datos	Mediana	Mínimo	Máximo
$62.5^\circ \leq i < 63^\circ$	KBMJ12	64	1651	0.027	35992
	KBMJ12_2		1474	1.93	2231
$63^\circ \leq i < 63.33^\circ$	KBMJ12	31	56799	0.015	2.8×10^6
	KBMJ12_2		836	0.85	2247
$63.33^\circ \leq i < 63.66^\circ$	KBMJ12	49	8×10^5	0.014	1.3×10^8
	KBMJ12_2		600	0.25	1200
$63.66^\circ \leq i < 64^\circ$	KBMJ12	71	400	0.015	4.3×10^5
	KBMJ12_2		446	0.5	882
$64^\circ \leq i \leq 64.5^\circ$	KBMJ12	55	20.38	0.009	9495
	KBMJ12_2		438	2.13	1593

Capítulo 3

Resultados

En este capítulo se recogen los resultados más importantes alcanzados en la presente Tesis Doctoral, centrados todos ellos en la aplicación de técnicas estadísticas y de inteligencia computacional al problema de la propagación de órbitas. Inicialmente se presenta el incremento de precisión derivado de la utilización de propagadores híbridos dotados de un modelo SARIMA para el modelizado de ciertos efectos de la perturbación ocasionada por el potencial gravitatorio terrestre. También se analiza la mejora alcanzada cuando la parte predictiva del propagador híbrido está constituida por redes neuronales. A continuación se muestra el efecto de aplicar los propagadores híbridos sobre condiciones iniciales ligeramente diferentes de aquéllas para las que fueron diseñados, mediante la interpolación de sus parámetros. Por último, se exponen los resultados obtenidos en el proceso de validación de dos de las técnicas aplicables en el desarrollo de las teorías analíticas que pueden ser incorporadas en los propagadores híbridos: la normalización de Delaunay y el método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky.

3.1. Métodos híbridos de propagación de órbitas

Una de las posibilidades que ofrece la teoría híbrida de perturbaciones [49, 57, 58, 59, 60, 61] creada por el Grupo de Computación Científica de la Universidad de La Rioja es la incorporación de métodos estadísticos de tratamiento de series temporales. Se ha analizado el comportamiento de un propagador híbrido dotado de un modelo SARIMA diseñado para un satélite de tipo Quasi-Spot. Su etapa de integración está constituida por una teoría analítica en forma cerrada que sólo considera el efecto de la perturbación J_2 hasta el primer orden. Durante las 10 primeras revoluciones, aproximadamente 0.7 días, que constituyen el periodo de control, el método SARIMA ha modelizado el efecto completo de la perturbación causada por los armónicos zonales y tesorales hasta el cuarto grado y orden, para proceder a estimarlo posteriormente durante aproximadamente 30 días. Al cabo de este horizonte

de propagación, los errores correspondientes a la anomalía media y al argumento del perigeo, los dos elementos orbitales con peor comportamiento para la teoría analítica de partida, han mejorado en 3° y 1.3° , alcanzando unos valores finales de 9.4° y 8.2° , respectivamente. Por su parte, el error de posición se ha visto reducido desde 352.076 km hasta sólo 23.7489 km, resultado comparable al de una teoría analítica de orden superior que incluya un modelo de perturbaciones más preciso.

Otra alternativa consiste en incorporar técnicas de inteligencia computacional en la etapa predictiva de los propagadores híbridos de órbitas. Se ha estudiado el efecto de llevar a cabo el modelizado y reproducción de la dinámica no presente en la etapa integradora a través de uno de los métodos de inteligencia computacional más extendido en la predicción de series temporales: las redes neuronales [25, 48, 71, 72, 73, 74]. Se ha comprobado que un perceptrón multicapa dotado de 60 neuronas en su capa oculta sólo es capaz de modelizar el efecto completo del armónico zonal J_2 , partiendo de la solución de Kepler, durante un periodo orbital. Si se incorpora el primer orden de aproximación de esta perturbación en la teoría analítica de partida, una red neuronal con 30 neuronas en su capa oculta sólo ofrece resultados aceptables durante un horizonte de propagación de cuatro ciclos, aunque una capa oculta con 60 neuronas sí permite finalmente una estimación satisfactoria durante los dos días posteriores.

3.2. Interpolación de propagadores híbridos

Se ha estudiado el efecto de adaptar los propagadores híbridos para condiciones iniciales ligeramente distintas de las del diseño inicial, mediante la interpolación de los parámetros propios de la etapa predictiva. Para ello se ha considerado una malla de condiciones iniciales con variaciones en excentricidad e inclinación, y se han interpolado los coeficientes de un método aditivo de Holt-Winters a partir de los de otros propagadores híbridos próximos en la malla. El método de interpolación seleccionado ha sido el basado en splines, con un error de posición para un horizonte de propagación de 30 días de 13.598 km, frente a los 48.653 km de la regresión lineal, los 55.715 km de los polinomios de Lagrange, o los 272.777 km del método de medias ponderadas.

Cuando se comparan los errores de posición obtenidos por los propagadores híbridos interpolados para condiciones iniciales intermedias con respecto a la distribución de los errores correspondientes a los propagadores no interpolados desarrollados para todas las condiciones iniciales de la malla, se comprueba que sus valores se sitúan en torno al promedio, como era de esperar debido al comportamiento homogéneo de todas las condiciones iniciales de la malla. Resulta destacable el buen comportamiento observado cuando la interpolación es bidimensional (variación tanto en excentricidad como en

inclinación), en cuyo caso el error de posición para un horizonte de propagación de 30 días llega a constituir un valor atípicamente bajo, outlier inferior, respecto de la distribución de errores de los propagadores híbridos no interpolados de la malla de condiciones iniciales.

Otra comparación de interés es la de los errores de posición de los propagadores híbridos interpolados para condiciones iniciales intermedias con respecto de los errores que obtendrían los propagadores híbridos no interpolados diseñados específicamente para las mismas condiciones iniciales. En tal caso, se constata que los interpolados a partir de varios propagadores híbridos del entorno presentan menores errores que los propagadores híbridos específicamente diseñados, con 13.598 km frente a 14.982 km para un horizonte de propagación de 30 días cuando cambia la excentricidad, ó 13.691 km frente a 15.090 km para variaciones de la inclinación; este efecto es especialmente notable en el caso del propagador híbrido mediante interpolación spline bidimensional para variaciones en excentricidad e inclinación, que presenta un error en distancia de 11.619 km frente a los 14.950 km del propagador híbrido no interpolado.

3.3. Delaunay vs KBM

La validación numérica de un propagador de órbitas es un proceso necesario para determinar su grado de precisión y sus condiciones de aplicabilidad. Se ha desarrollado una metodología basada en un análisis exploratorio de datos [66] sobre los errores de posición, tanto en términos de distancia total como de proyecciones sobre las tres direcciones tangente, normal y binormal, que se derivan de la aplicación de un propagador sobre un catálogo espacial. Esta metodología, que será implementada en el lenguaje de programación R [51] para su aplicación automática sobre cualquier propagador, ha sido ilustrada mediante el análisis de dos técnicas alternativas en la eliminación de los términos de corto periodo, la normalización de Delaunay (DN) y el método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky (KBM), que dan lugar a sendas teorías analíticas de posible incorporación en la etapa de integración de los propagadores híbridos.

En el análisis efectuado, se ha utilizado un catálogo espacial compuesto por 14208 *two-line elements* (TLEs), que constituye un conjunto suficientemente representativo de condiciones iniciales de objetos reales. Los TLEs han sido clasificados en tres conjuntos: $e < 0.01$, $e \geq 0.01$ con $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$, y resto de datos. A continuación se ha llevado a cabo un análisis exploratorio de datos para estudiar los errores en distancia generados en la propagación del catálogo mediante ambas teorías analíticas, respecto de la integración numérica del problema original. Se han considerado dos conjuntos de perturbaciones, J_2 - J_4 y J_2 - J_{12} , así como dos horizontes de propagación, de 7 y 30 días.

Cuando se propagan los TLEs durante un periodo de 7 días, se obtienen 2662 outliers para DN y 147 para KBM, 55 de los cuales son comunes. Los outliers de DN se concentran fundamentalmente en dos grupos: pequeñas excentricidades, $e < 0.01$, e inclinaciones próximas a la crítica, $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$ con $e \geq 0.01$. De modo similar, los outliers de KBM también se agrupan mayoritariamente en dos conjuntos: inclinaciones próximas a la crítica, y pequeñas inclinaciones $i < 1.5^\circ$ con excentricidades de valor medio-alto, $e > 0.5$, que es un grupo de outliers con errores inferiores a 6 m. Para poder procesar la inclinación crítica se hace uso de la aproximación implementada en PPT2, HANDE y AOP, tanto para el caso J_2-J_4 como para J_2-J_{12} . El análisis numérico efectuado en el intervalo $(62.5^\circ, 64.5^\circ)$ ofrece unos resultados muy prometedores. En general, puede extraerse como conclusión que el método KBM resulta claramente más robusto que DN en el 87% de los casos estudiados para un horizonte de propagación de 7 días, y cuando DN se comporta mejor que KBM, se trata de una mejora moderada. El comportamiento de las variables polares-nodales es excelente para todos los casos, pues no presentan problema alguno, ni siquiera para valores de excentricidad $e < 0.01$.

Sin embargo, cuando se propagan los TLEs durante un intervalo de 30 días, el comportamiento de ambos métodos es bastante bueno. El número de outliers correspondientes a errores en distancia superiores a 1000 m es de 261 para DN y 27 para KBM, siendo todos estos últimos también outliers para DN. DN sólo se comporta peor que KBM cuando $e < 0.003$; sin embargo, su comportamiento es mejor para el resto de casos, a diferencia de lo que sucede para un horizonte de propagación de 7 días.

En el entorno de la inclinación crítica, ambos métodos se comportan peor, obteniéndose errores en distancia muy elevados, e incluso desbordamientos, dos cuando se consideran las perturbaciones correspondientes a J_2-J_4 y diez para J_2-J_{12} . Sin embargo, el uso del polinomio $T2$ (2.3) permite poder manejar TLEs cuya inclinación sea igual o próxima a la crítica, reduciendo drásticamente sus errores en distancia.

Capítulo 4

Conclusiones y trabajos futuros

4.1. Conclusiones

La presente Tesis Doctoral constituye una disertación acerca del modo en el que las técnicas estadísticas y la inteligencia computacional contribuyen al perfeccionamiento de los métodos de propagación de órbitas, en el marco de la teoría híbrida de perturbaciones.

Se ha comprobado que la combinación de una teoría analítica más un modelo SARIMA ajustado para el caso de un satélite Quasi-Spot es capaz de aproximar la perturbación causada por los armónicos zonales y teserales de cuarto grado y orden del potencial gravitatorio terrestre, partiendo de una aproximación de primer orden del primer armónico zonal J_2 . El error en distancia al cabo de 30 días se reduce desde 352 km hasta 23.7 km mediante un cálculo que implica la evaluación de solo 93 términos, frente a los más de 1000 que requeriría una teoría analítica de precisión comparable.

Asimismo, se ha verificado una mejora en la precisión de la teoría general de perturbaciones cuando se complementa con uno de los métodos más extendidos para la predicción de series temporales en el ámbito de la inteligencia computacional: las redes neuronales. El resultado obtenido muestra cómo un perceptrón multicapa provisto de una capa oculta con 60 neuronas, partiendo de una aproximación de primer orden de J_2 , es capaz de modelizar los órdenes superiores no contenidos en la teoría analítica de partida durante dos días para el caso de un satélite LEO. Se ha constatado que el modelizado de todas las variables de Delaunay, l , g , h , L y G , en vez de sólo l , g y h , que son las más representativas para el caso estudiado, no extiende el horizonte de predicción, aunque sí mejora la precisión durante el mismo. Cabe mencionar que el caso analizado no ha requerido el procesado de la variable H .

Según se ha expuesto, los propagadores híbridos están compuestos por una teoría de integración más una técnica de predicción. Esta última se desarrolla a partir de los datos de control, con el objeto de complementar a

la aproximación generada por la teoría de integración mediante el modelizado y reproducción de la dinámica no presente en ella. Se ha mostrado un avance reciente en la teoría híbrida de perturbaciones, consistente en explorar la posibilidad de deducir la etapa predictiva directamente a partir de otros propagadores híbridos desarrollados para condiciones iniciales del entorno. Esta técnica evita la necesidad de disponer de datos de control, y permite contar con una malla de propagadores híbridos preparada con antelación para una región de condiciones iniciales de interés. Se ha comprobado que la interpolación spline de los parámetros de un método de predicción de Holt-Winters aditivo, a partir de propagadores híbridos cercanos, presenta una precisión similar, o incluso mayor, a la de un propagador híbrido no interpolado. El estudio ha sido efectuado tomando el *problema principal* de la teoría del satélite artificial como modelo de propagación, y dejando a la etapa predictiva el modelizado completo del efecto de J_2 .

Finalmente, se ha ilustrado el desarrollo de una metodología para la validación de propagadores de órbitas mediante un análisis exploratorio de datos aplicado a dos teorías analíticas de posible incorporación en la etapa de integración de los propagadores híbridos.

Para desarrollar una teoría analítica que considere la perturbación de los armónicos zonales del potencial gravitatorio, pueden aplicarse diversos métodos. Concretamente, cuando se eliminan los términos de largo periodo debidos al argumento del perigeo, surge la posibilidad de aplicar dos técnicas alternativas. La primera de ellas elimina los términos de corto periodo debidos a la anomalía media mediante la clásica normalización de Delaunay (DN), tras la cual puede integrarse el Hamiltoniano transformado por medio de cuadraturas. Cabe destacar que este proceso se lleva a cabo en variables de Delaunay. La segunda técnica elimina los términos de corto periodo mediante el método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky (KBM), que se formula en variables polares-nodales. Con objeto de validar ambas técnicas, se ha empleado un catálogo espacial de *two-line elements* (TLEs). Aunque los TLEs están indicados para ser utilizados con el propagador SGP4, constituyen un conjunto de condiciones iniciales suficientemente extenso y fiable para ser utilizado en la validación de ambos modelos.

Los resultados reflejan que, para periodos de propagación cortos (7 días), el método KBM resulta, en general, más robusto que DN; sin embargo, para periodos de propagación medios (30 días), aunque ambos métodos se comportan bien, salvo para inclinaciones próximas a la inclinación crítica, DN ofrece mejores resultados que KBM para todo tipo de órbitas excepto para las de muy baja excentricidad.

4.2. Líneas de trabajo futuras

Los métodos híbridos de propagación, basados en la aplicación de técnicas estadísticas y de inteligencia computacional, constituyen una teoría en fase inicial de desarrollo que admite múltiples vías de continuación. En particular, se plantea el estudio de otros modelos estadísticos, así como de otras arquitecturas de redes neuronales que permitan incrementar tanto la precisión como el horizonte de propagación. Asimismo se considera la necesidad de ir introduciendo nuevas perturbaciones en los modelos de forma paulatina, con objeto de poder ir extrayendo conclusiones para cada una de ellas.

Otra línea de trabajo futura es la que plantea la sustitución de las variables de Delaunay por otras no singulares en los propagadores de órbitas híbridos, con el fin de evitar las singularidades analizadas para valores pequeños de excentricidad e inclinación. Asimismo, se considera la posibilidad de introducir teorías analíticas de tercer orden para tratar perturbaciones con $m > 4$. Otra línea futura se basa en el análisis del efecto que el uso del polinomio T_2 (2.3), en lugar del término $1/(1 - 5 \cos^2 i'')$, puede tener en la modificación del Hamiltoniano original, junto con el estudio de su espacio de fases.

Entre las vías que están ya en proceso de desarrollo puede citarse la creación de propagadores de órbitas híbridos adaptados al caso de la inclinación crítica. Asimismo, como se ha mencionado a lo largo de la Tesis Doctoral, otra línea sobre la que se trabaja es la implementación, en el lenguaje de programación R [51], de la metodología de validación basada en el análisis exploratorio de datos que ha sido expuesta, con el fin de poder llevar a cabo procesos de validación de propagadores de órbitas de forma automática. Por último, también se está avanzando en la interpolación de propagadores híbridos para entornos con variaciones tridimensionales de semieje mayor, excentricidad e inclinación.

Apéndice A

Artículo I

An economic hybrid J_2 analytical orbit propagator program based on SARIMA models

San-Juan, J. F., San-Martín, M.
and Pérez, I.

Mathematical Problems in Engineering
2012

Research Article

An Economic Hybrid J_2 Analytical Orbit Propagator Program Based on SARIMA Models

Juan Félix San-Juan,¹ Montserrat San-Martín,¹ and Iván Pérez²

¹ Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, 26004 Logroño, Spain

² Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de La Rioja, 26004 Logroño, Spain

Correspondence should be addressed to Juan Félix San-Juan, juanfelix.sanjuan@unirioja.es

Received 28 April 2012; Accepted 8 July 2012

Academic Editor: Carlo Cattani

Copyright © 2012 Juan Félix San-Juan et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

We present a new economic hybrid analytical orbit propagator program based on SARIMA models, which approximates to a 4×4 tesseral analytical theory for a Quasi-Spot satellite. The J_2 perturbation is described by a first-order closed-form analytical theory, whereas the effects produced by the higher orders of J_2 and the perturbation of the rest of zonal and tesseral harmonic coefficients are modelled by SARIMA models. Time series analysis is a useful statistical prediction tool, which allows building a model for making future predictions based on the study of past observations. The combination of the analytical techniques and time series analysis allows an increase in accuracy without significant loss in efficiency of the new propagators, as a consequence of modelling higher-order terms and other perturbations are not taken into account in the analytical theory.

1. Introduction

An analytical orbit propagator program (AOPP) is an application which collects and arranges all mathematical expressions involved in an approximate analytical solution of the satellite equations of motion. The analytical solutions are known as General Perturbation Theories. It is noteworthy that the perturbation force model used and the order of the analytical approximation are closely related to the accuracy and computational efficiency of an AOPP.

In many situations, in order to improve the accuracy of the solution, it may be necessary to consider a more precise perturbation force model. The solution provided by the General Perturbation Theories may not be the best approach, because the calculating process generates unmanageably large mathematical expressions and, therefore, reduces the computational efficiency of its corresponding AOPP. Other alternatives, although computationally more expensive than an economic analytical approximation, are the Special

Perturbation Theories, which directly integrate the equations of motion using numerical techniques, or by means of semi-analytical theories, which are a combination of General and Special Perturbation Theories.

In this paper we present a new methodology, which we will call *Hybrid Perturbation Theories*, to carry out new families of hybrid orbit propagator programs which combine a simplified analytical orbit propagator [1–4] with statistical time series models [5]. This combination allows an increase in accuracy for predicting the position of a satellite without significant loss in computational efficiency in the new hybrid propagators, as well as modelling higher-order terms and other perturbations not considered in the analytical theory.

Mathematically, the problem consists of estimating the satellite's position and velocity \mathbf{x}_t for which an approximate analytical solution is known:

$$\mathbf{x}_t^{\text{eff}} = F(t, \mathbf{x}_{t_0}), \quad (1.1)$$

where \mathbf{x}_{t_0} is the satellite's initial time position and velocity. Moreover, at any moment t_i , a precise observation \mathbf{x}_{t_i} can be obtained. This observation is related to $\mathbf{x}_{t_i}^{\text{eff}}$ by the following linear relation:

$$\varepsilon_{t_i} = \mathbf{x}_{t_i} - \mathbf{x}_{t_i}^{\text{eff}}, \quad (1.2)$$

where ε_{t_i} represents the errors produced by the perturbation forces not considered in the analytical theory and by the selfsame approximate analytical solution. In order to predict the future values of the ε_{t_i} series, we apply statistical techniques in time series analysis.

The first n values of ε_{t_i} are used to estimate a model by means of these techniques. From this model a forecast of the $\hat{\varepsilon}_{t_i}$ error can be calculated. Finally these estimations are used to obtain the forecast of the satellite's position and velocity by the relation

$$\hat{\mathbf{x}}_{t_i} = \mathbf{x}_{t_i}^{\text{eff}} + \hat{\varepsilon}_{t_i}. \quad (1.3)$$

In this paper, the orbit propagator Z2DN1 derived from a first-order closed-form analytical integration of the *main problem* of the artificial satellite theory and the SARIMA time series models are described. Secondly, using the univariate Box-Jenkins time series analysis, a specific Z2DN1-SARIMA model is developed for a Quasi-Spot satellite so as to model the effects of some zonal and tesseral harmonics by means of the statistical part, where these influences have not been taken into consideration in the analytical part. The simulated data are obtained from the numerical integration for an Earth orbiter, which has only taken into account the perturbation due to the nonsymmetrical Earth gravity field up to the fourth degree and order. Finally, we compare the simulation with both the analytical propagator alone and the analytical-statistical hybrid propagator.

2. Z2DN1 Analytical Orbit Propagator Program

This AOPP has been derived from a first-order closed-form analytical theory of the *main problem* of the artificial satellite theory.

The main problem is defined as a Kepler problem perturbed by Earth's oblateness. The Hamiltonian of this dynamical system can be written in a cartesian coordinate system (x, \mathbf{X}) as

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}) - \frac{\mu}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{\alpha}{r} \right)^2 P_2 \left(\frac{z}{r} \right) \right], \quad (2.1)$$

where $r = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, μ is the gravitational constant, α the equatorial radius of the Earth, J_2 the oblateness coefficient, and P_2 the second degree Legendre polynomial.

The first step to carry out the analytical theory consists of expressing the Hamiltonian (2.1) in terms of the Delaunay variables (l, g, h, L, G, H) . This set of canonical action-angle variables can be defined in terms of the orbital elements such as $l = M$, $g = \omega$, $h = \Omega$, $L = \sqrt{\mu a}$, $G = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$, $H = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i$, where M , ω , Ω , a , e , i are the mean anomaly, argument of the perigee, longitude of the ascending node, semimajor axis, eccentricity, and inclination, respectively. Then the transformed Hamiltonian is given as

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L^2} - \frac{\epsilon \mu}{2r} \left(\frac{\alpha}{r} \right)^2 (1 - 3s^2 \sin^2(f + g)), \quad (2.2)$$

where $\epsilon = J_2$ is a small parameter, $s = \sin i$, and f is the true anomaly.

Next, we normalize the Hamiltonian (2.2) by applying the Lie transform $\varphi : (l, g, h, L, G, H) \rightarrow (l', g', h', L', G', H')$, the so-called Delaunay Normalization [6], which up to first order reads

$$\mathcal{K}_0 = \mathcal{H}_0, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{H}_1 - \frac{\mu^2}{L^3} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial l'}. \quad (2.4)$$

The Lie method solves (2.4) by choosing the form of the transformed Hamiltonian; the Delaunay Normalization takes the Hamiltonian as the average over the fastest angle l' :

$$\mathcal{K}_1 = \frac{3\alpha^2 \mu^4 s'^2}{4L'^6 \eta'^3} - \frac{\alpha^2 \mu^4}{2L'^6 \eta'^3}, \quad (2.5)$$

and then \mathcal{W}_1 is computed as

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \frac{L'^3}{\mu^2} \int (\mathcal{H}_1 - \mathcal{K}_1) dl' \\ &= \frac{\mu^2 \alpha^2 (3s'^2 - 2) \phi'}{4L'^3 \eta'^3} + \frac{\mu^2 \alpha^2 e' (3s'^2 - 2)}{4L'^3 \eta'^3} \sin f' \\ &\quad - \frac{3\mu^2 \alpha^2 e' s'^2}{8L'^3 \eta'^3} \sin(f' + 2g') - \frac{3\mu^2 \alpha^2 s'^2}{8L'^3 \eta'^3} \sin(2f' + 2g') \\ &\quad - \frac{\mu^2 \alpha^2 e' s'^2}{8L'^3 \eta'^3} \sin(3f' + 2g'), \end{aligned} \quad (2.6)$$

where $\eta' = \sqrt{1 - e'^2}$ and $\phi' = f' - l'$.

Hence, up to the first order, the transformed Hamiltonian is given by

$$\mathcal{K} = -\frac{\mu^2}{2L'^2} + \epsilon \left(\frac{3\alpha^2\mu^4 s'^2}{4L'^6\eta'^3} - \frac{\alpha^2\mu^4}{2L'^6\eta'^3} \right). \quad (2.7)$$

We must remark that the Hamiltonian (2.7) is integrable. This Hamiltonian only depends on the momenta L' , G' , and H' , and so therefore the equations of motion are obtained as

$$\begin{aligned} \frac{dl'}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial L'} = \frac{\mu^2}{L'^3} + \epsilon \left(\frac{3\alpha^2\mu^4}{2L'^7\eta'^3} - \frac{9\alpha^2\mu^4 s'^2}{4L'^7\eta'^3} \right), \\ \frac{dg'}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial G'} = \epsilon \left(\frac{3\alpha^2\mu^4}{L'^7\eta'^4} - \frac{15\alpha^2\mu^4 s'^2}{4L'^7\eta'^4} \right), \\ \frac{dh'}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial H'} = -\epsilon \frac{3\alpha^2\mu^4 c'}{2L'^7\eta'^4}, \\ \frac{dL'}{dt} &= \frac{dG'}{dt} = \frac{dH'}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

By integrating (2.8) we can directly obtain that the values of the momenta L' , G' , and H' are constants, whereas the variables l' , g' , and h' yield

$$\begin{aligned} l' &= \left[\frac{\mu^2}{L'^3} + \epsilon \left(\frac{3\alpha^2\mu^4}{2L'^7\eta'^3} - \frac{9\alpha^2\mu^4 s'^2}{4L'^7\eta'^3} \right) \right] (t - t_0) + l'_0, \\ g' &= \left[\epsilon \left(\frac{3\alpha^2\mu^4}{L'^7\eta'^4} - \frac{15\alpha^2\mu^4 s'^2}{4L'^7\eta'^4} \right) \right] (t - t_0) + g'_0, \\ h' &= \left[-\epsilon \frac{3\alpha^2\mu^4 c'}{2L'^7\eta'^4} \right] (t - t_0) + h'_0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

where l'_0 , g'_0 , h'_0 , L'_0 , G'_0 , H'_0 are the transformed initial conditions l_0 , g_0 , h_0 , L_0 , G_0 , H_0 at the epoch t_0 .

Finally, from (2.6) the first-order explicit equations of the direct and inverse transformations [7] are calculated.

From the above analytical theory an AOPP was derived, which has to evaluate 93 terms. This AOPP has been called Z2DN1. The algebraic manipulations required to carry out this analytical theory and its corresponding AOPP were built using a set of *Mathematica* packages called MathATESAT [8]. Figure 1 shows the flowchart of the Z2DN1 analytical orbit propagator program.

Z2DN1 begins by initializing the physical parameters and the initial conditions at epoch t_0 . Next, it transforms the initial conditions into the Delaunay variables $(l_0, g_0, h_0, L_0, G_0, H_0)$ and transports them across the inverse transformation of the Delaunay normalization $(l'_0, g'_0, h'_0, L'_0, G'_0, H'_0)$. Then, the program provides Delaunay's variables at

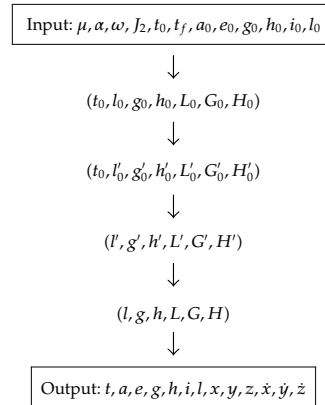


Figure 1: Flowchart of the Z2DN1 orbit propagator program.

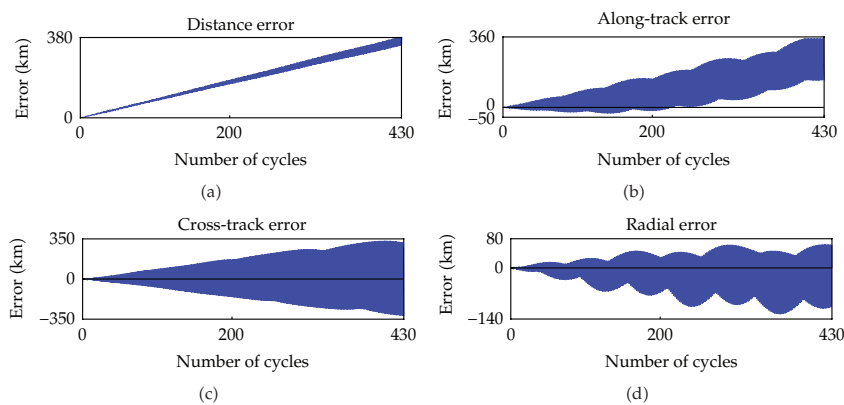


Figure 2: Distance, along-track, cross-track, and radial errors for a Quasi-Spot satellite.

epoch t_f from integrated Hamilton equations (l', g', h', L', G', H') . Finally, the direct transformation of the Delaunay normalization is applied, and therefore the osculating Keplerian elements (a, e, g, h, i, l) and the state vector $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ can be calculated.

This model has been compared with the numerical integration (8th-order Runge-Kutta method) of the equation of motion of a model, which includes the Earth's zonal and tesseral harmonic coefficients of fourth degree and order in the case of a Quasi-Spot satellite ($a = 7148$, $e = 0.001$, $i = 98^\circ$).

Figure 2 shows the distance, along-track, cross-track, and radial errors in a time span interval of 30 days, which is about 430 satellite cycles. As can be observed, the distance error of the first-order J_2 analytical theory when compared with a more complex perturbation model is about 360 km.

Figure 3 shows the relative errors of the orbital elements for a Quasi-Spot satellite. The mean anomaly and argument of the perigee are the variables which present the worst

6

Mathematical Problems in Engineering

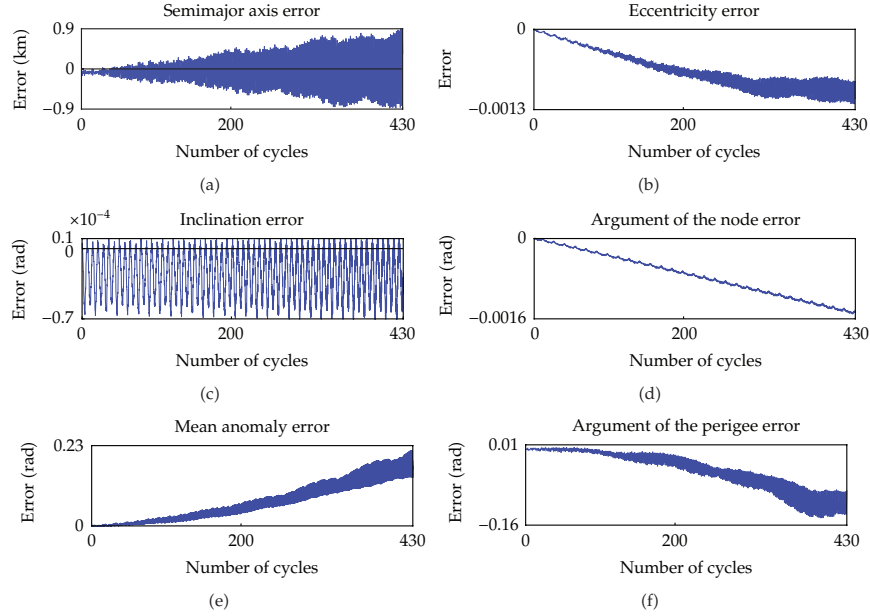


Figure 3: Relative errors of the orbital elements for a Quasi-Spot satellite.

performance. The maximum absolute errors in a time span interval of 30 days are about 12.4° and 9.5° , respectively.

3. Statistical Time Series Analysis: SARIMA Model

Introduced by Box and Jenkins [5], the *autoregressive integrated moving average* (ARIMA) model has been one of the most popular approaches for time series forecasting. Let ε_t be a discrete time series, in an $ARIMA(p, d, q)$ model, in which the future value of a series is assumed to be a linear combination of its own past values and past residuals, expressed as follows:

$$\phi(B)(1 - B)^d \tilde{\varepsilon}_t = \theta(B)v_t, \quad (3.1)$$

where $\tilde{\varepsilon}_t = \varepsilon_t - \mu$, μ is the mean of the original time series, and v_t is a white noise residual. B is the backward shift, such that $B\tilde{\varepsilon}_t = \tilde{\varepsilon}_{t-1}$, whilst d is the number of times that $\tilde{\varepsilon}_t$ needs to be differentiated to ensure its conversion to a stationary time series, that is, a time series in which the mean, variance, and autocorrelation functions of $\tilde{\varepsilon}_t$ are time invariants. $\phi(B)$ represents the *autoregressive* (AR) part, where each $\tilde{\varepsilon}_t$ is made up of a linear combination from prior observations p , which can be expressed as a polynomial in B of degree p in the following form:

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p, \quad (3.2)$$

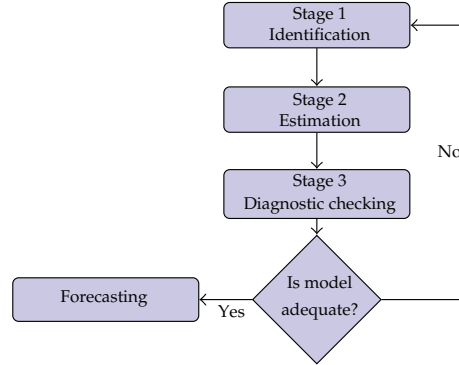


Figure 4: 3-stage Box-Jenkins methodology.

where ϕ_i , $i = 1, \dots, p$, are the AR parameters. $\theta(B)$ represents the *moving average* (MA) part, which describes the relation of $\tilde{\varepsilon}_t$ with past residuals and can also be expressed as a polynomial in B of degree q in the following form:

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q, \quad (3.3)$$

where θ_i , $i = 1, \dots, p$, are the MA parameters.

In the case that $\tilde{\varepsilon}_t$ series shows seasonal behaviour, it can be included in (3.1). The extended model is known as a *Seasonal ARIMA* model or SARIMA(p, d, q)(P, D, Q) $_s$ and takes the following form:

$$\Phi(B^s)\phi(B)(1 - B^s)^D(1 - B)^d\tilde{\varepsilon}_t = \Theta(B^s)\theta(B)v_t, \quad (3.4)$$

where

$$\begin{aligned} \Phi(B^s) &= 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_p B^{ps}, \\ \Theta(B^s) &= 1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \dots - \Theta_q B^{qs}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

represent the seasonal part with periodicity s .

To determine a suitable SARIMA model for a given series, we use the 3-stage Box-Jenkins methodology. This procedure is illustrated in Figure 4. At the identification stage, a preliminary SARIMA model is proposed from the analysis of the estimated autocorrelation function (ACF) and partial autocorrelation function (PACF), allowing us to determine the parameters d, D, p, q, P , and Q . Then, the seasonal and nonseasonal AR and MA parameters are estimated at the second stage. The last stage, diagnostic checking, determines whether the proposed model is adequate or not. If the model is considered adequate, it can be used for forecasting future values; otherwise the process is repeated until a satisfactory model is found.

4. Time Series Analysis

In order to carry out the statistical part of the hybrid propagator, we consider a simulated data set, that is, position and velocity, taken from the numerical integration of the Quasi-Spot equations of motion during 10 satellite cycles. This number of cycles was experimentally calculated; however the models obtained from fewer than 10 cycles were less accurate, but from above 10 cycles the increase in accuracy was not significant either. The force model used to generate the simulated data is a 4×4 EGM-96 gravity field, whereas for the numerical integration a high-order Runge-Kutta method [9] is used.

It is noteworthy to mention that different sets of canonical and noncanonical variables can be used to develop the statistical part, such as cartesian variables, orbital elements, Delaunay variables, and polar-nodal variables. In this work, we will only take into account the Delaunay variables, which allow a direct visualization of the geometry of the orbit.

4.1. Previous Statistical Analysis

The time series analysis begins calculating the linear relations:

$$\varepsilon_t^x = x_t - x_t^{\text{eff}}, \quad (4.1)$$

where x represents each of the Delaunay variables (l, g, h, L, G, H), x_t is the simulated data at epoch t , and x_t^{eff} is the data from the analytical theory at the same epoch. Therefore, these six time series ($\varepsilon_t^l, \varepsilon_t^g, \varepsilon_t^h, \varepsilon_t^L, \varepsilon_t^G, \varepsilon_t^H$) allocate all the information related to the perturbation forces not considered in the analytical theory (tesseral terms of fourth degree and order and the zonal coefficients J_3 and J_4), as well as the higher orders of the analytical solution, that is, the error of the analytical theory $\mathcal{O}(J_2^2)$, during 10 cycles (and 10 data points per cycle).

Then, the periodogram, a mathematical tool for examining cyclical behaviour in time series, and the autocorrelation functions, a measure of how a time series is correlated with itself at different time delays, are used to identify the time series models (see [5], for further details).

The study of the periodogram and autocorrelation functions of each ε_t^x reveals that all variables show cyclical patterns or periodicities and, moreover, there is very similar behaviour between the time series ε_t^l and ε_t^g and ε_t^L and ε_t^G . For example, this study for ε_t^l and ε_t^g can be seen in Figure 5. However ε_t^h and ε_t^H do not show any similar behaviour between them or with the rest of the time series.

On the other hand, the correlation matrix of the ε_t^x series is shown in Table 1. This matrix presents a strong relationship between ε_t^l and ε_t^g , as their correlation coefficient is near -1 (-0.9607), as well as between their respective conjugate momenta time series errors, ε_t^L and ε_t^G , where their correlation coefficient is near 1 (0.9982).

It is noteworthy to mention that although the intrinsic nature of the mean anomaly and the argument of the perigee is different, as mean anomaly is related to short-periodic terms and the argument of the perigee is related to long-periodic terms, the similar behaviours detected in the above statistical studies can be explained, because the Quasi-Spot satellite is near a repeat ground track orbit, in which the argument of the perigee and eccentricity ($e = \sqrt{1 - (G/L)^2}$) are almost constant. Figure 6 shows $\varepsilon_t^l, \varepsilon_t^g$ and $\varepsilon_t^L, \varepsilon_t^G$ time series. As can be observed, ε_t^l and ε_t^g are almost symmetric with respect to the x -axis, which explains the negative sign and the near -1 value in the correlation coefficient, whilst ε_t^L and ε_t^G are almost the same, and therefore the sign in the correlation coefficient is positive with a near 1 value.

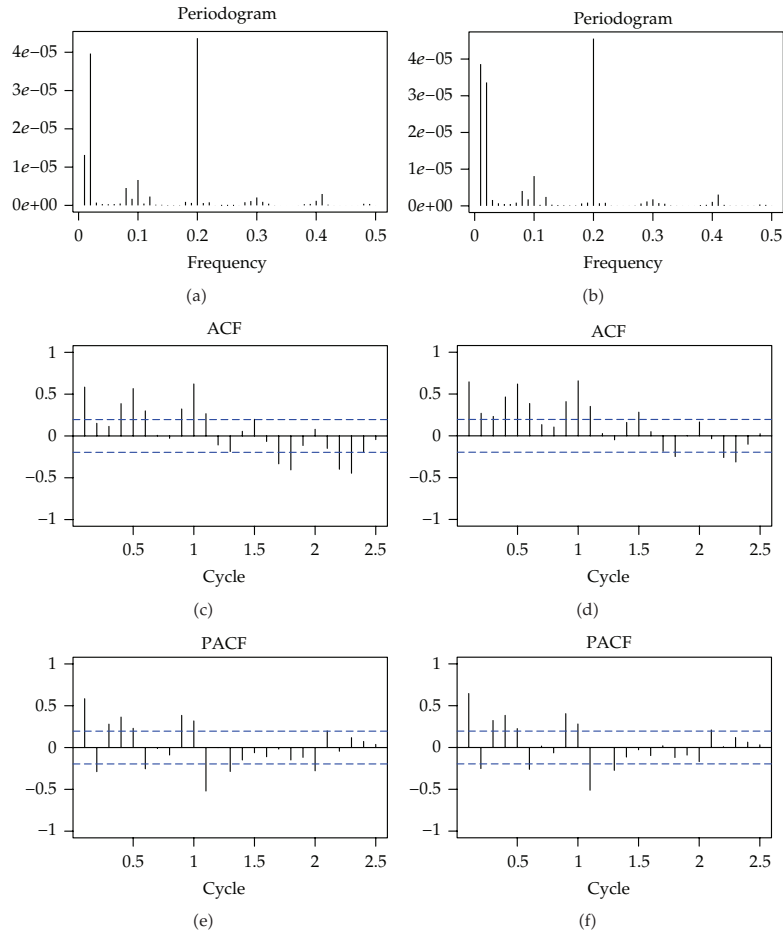


Figure 5: Periodograms and autocorrelation functions of ε_t^I (left) and ε_t^S (right).

Table 1: Correlation matrix of the ε_t^x series.

	ε_t^I	ε_t^S	ε_t^h	ε_t^L	ε_t^G	ε_t^H
ε_t^I	1.0000					
ε_t^S	-0.9607	1.0000				
ε_t^h	-0.0575	-0.1713	1.0000			
ε_t^L	-0.1037	0.0934	0.0451	1.0000		
ε_t^G	-0.1128	0.1168	-0.0070	0.9982	1.0000	
ε_t^H	0.4033	-0.4114	0.0420	0.0066	0.0005	1.0000

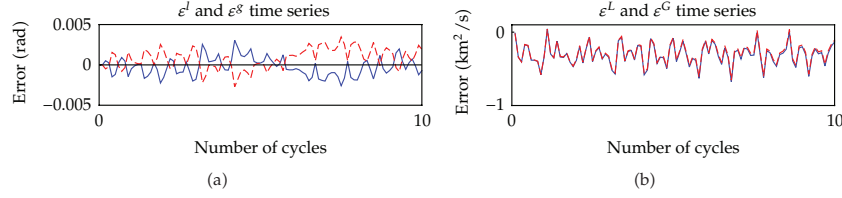


Figure 6: Blue represents ε_t^l , and ε_t^L errors. Dashed red represents ε_t^s and ε_t^G errors.

Finally, this preliminary study can be completed by analyzing the results obtained when the ε_t^x time series are combined with the data obtained from the analytical theory $(l_t^{\text{ad}}, g_t^{\text{ad}}, h_t^{\text{ad}}, L_t^{\text{ad}}, G_t^{\text{ad}}, H_t^{\text{ad}})$ during the first 10 satellite cycles. This test allows us to consider several possibilities. The first consists of considering each series separately, for instance, $(l_t^{\text{ad}} + \varepsilon_t^l, g_t^{\text{ad}}, h_t^{\text{ad}}, L_t^{\text{ad}}, G_t^{\text{ad}}, H_t^{\text{ad}})$. In all these cases the accuracy is not as good as the approach given by the Z2DN1 AOPP. After considering other possibilities we show the relations obtained in previous statistical analyses:

- (i) $(l_t^{\text{ad}} + \varepsilon_t^l, g_t^{\text{ad}} + \varepsilon_t^s, h_t^{\text{ad}}, L_t^{\text{ad}}, G_t^{\text{ad}}, H_t^{\text{ad}})$,
- (ii) $(l_t^{\text{ad}}, g_t^{\text{ad}}, h_t^{\text{ad}}, L_t^{\text{ad}} + \varepsilon_t^L, G_t^{\text{ad}} + \varepsilon_t^G, H_t^{\text{ad}})$,
- (iii) $(l_t^{\text{ad}} + \varepsilon_t^l, g_t^{\text{ad}} + \varepsilon_t^s, h_t^{\text{ad}}, L_t^{\text{ad}} + \varepsilon_t^L, G_t^{\text{ad}} + \varepsilon_t^G, H_t^{\text{ad}})$,
- (iv) $(l_t^{\text{ad}}, g_t^{\text{ad}}, h_t^{\text{ad}} + \varepsilon_t^h, L_t^{\text{ad}}, G_t^{\text{ad}}, H_t^{\text{ad}} + \varepsilon_t^H)$.

Figure 7 shows the distance errors between the simulated data and analytical theory for the first ten cycles, and the simulated data and the above corrected analytical theories with the exact error added. The strong influence of ε_t^l and ε_t^s can be seen in the first plot; the distance error is reduced to 0.63 km after ten satellite cycles, whereas ε_t^L and ε_t^G only remove part of the short-period variations, as can be seen in the second plot. The third case collects the corrections due to ε_t^l , ε_t^s , ε_t^L , and ε_t^G , which produce a distance error similar to the first case. Finally, the corrections due to ε_t^h and ε_t^H do not have any effect on the distance error, as can be observed in the last plot.

Next we focus our attention on carrying out a hybrid-AOPP from $(l_t^{\text{ad}} + \varepsilon_t^l, g_t^{\text{ad}} + \varepsilon_t^s, h_t^{\text{ad}}, L_t^{\text{ad}}, G_t^{\text{ad}}, H_t^{\text{ad}})$. The following step in the process of looking for the most suitable SARIMA models using the Box-Jenkins methodology is described below.

4.2. Time Series Estimation of ε_t^l and ε_t^s

To estimate the model of the ε_t^s time series, we use the Box-Jenkins methodology. In the first step, the stationary behaviour of the time series is analyzed. Figure 6 suggests that the variance is time-invariant, whereas for the mean value the plot is not conclusive. On the other hand, Figure 5 shows that the autocorrelation function (ACF) decreases slowly and the augmented Dickey-Fuller test [10] allows accepting the null hypothesis that the time series has a unit root (P value 0.6921 > 0.05). Moreover, its periodogram (see Figure 5) shows high peaks at low frequencies ($f = 0.01$ and 0.02). Therefore, the time series does not seem stationary; thus differentiating the time series data may be necessary.

The second step analyzes the periodicity. The ACF shows a pronounced cyclical fluctuation with a strong correlation at lag 10. Besides, its periodogram shows a peak at

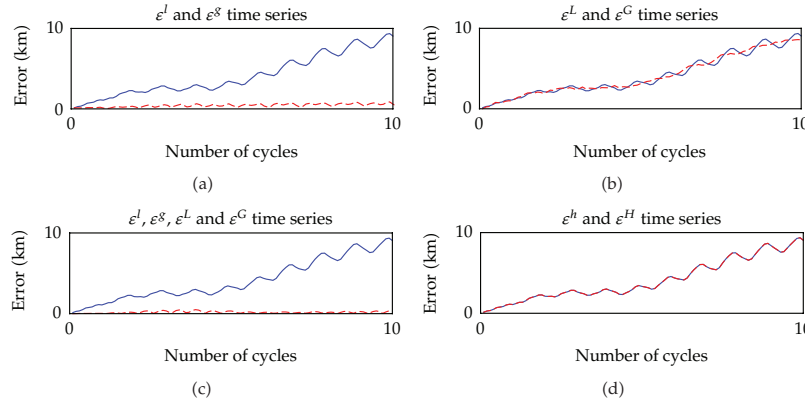


Figure 7: Blue represents the distance error between x_{t_i} and $x_{t_i}^d$, whereas dashed red is the distance error between x_{t_i} and the corrected $x_{t_i}^d$ from the exact ε_i^x .

the frequency of 0.2, which corresponds to a periodicity of 10. These patterns agree with the satellite cycle. This suggests that a seasonal model might be adequate to estimate ε_i^s . Consequently, the tentative models should incorporate both seasonal and nonseasonal parameters.

We analyzed different SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)₁₀ models in order to approximate the ε_i^s time series, where the maximum likelihood method was used to estimate model parameters, as can be seen in Table 2. Finally, the diagnostic stage showed a good fit for the SARIMA(6, 1, 7)(3, 1, 3)₁₀ model, in which the Jarque-Bera and Ljung-Box tests [11, 12] do not reject the null hypothesis of normality nor the no autocorrelation of residuals, with P values 0.182 and 0.993, respectively.

We must note that the model used to approximate the ε_i^l time series is also a SARIMA(6, 1, 7)(3, 1, 3)₁₀, which confirms the similar behaviour previously detected to ε_i^s , although the model parameters are slightly different, as can be seen in Table 2.

The GNU software R (version 2.14) [13] was the statistical tool used to perform all statistical analyses. In particular, the R packages TSA [14], forecast [15], and tseries [16] were used for all time series analyses.

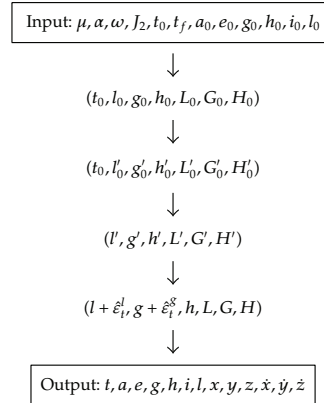
5. Z2DN1-SARIMA Hybrid-AOPP

Figure 8 shows the flowchart of the Z2DN1-SARIMA hybrid-AOPP. We find the difference to the pure Z2DN1 AOPP (Figure 1) after applying the direct transformation of the Delaunay normalization. At this point, the Delaunay variables are combined with the new forecast ($\hat{\varepsilon}_i^l, \hat{\varepsilon}_i^s$) and the osculating Keplerian elements (a, e, g, h, i, l) and state vector ($x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$) are calculated.

At this point, it is noteworthy that a pure analytical theory which takes into account the perturbation of the fourth degree and order harmonic coefficients of the gravity field, considering the dimensionless parameter ω/n , where n is the mean motion of the satellite, and the usual Garfinkel assumptions [17] with a precision of about one kilometer after

Table 2: SARIMA(6,1,7)(3,1,3)₁₀ models.

Coefficients	ε_t^l	ε_t^s
ϕ_1	-0.8167142581776827	-0.8312754102958296
ϕ_2	0.5740668630692614	0.5649950239467217
ϕ_3	1.1200190576112987	1.1322145773449677
ϕ_4	-0.3087269639691513	-0.2946598587646277
ϕ_5	-0.8631472597887673	-0.8663595825987899
ϕ_6	-0.4970128310547080	-0.5012076262623468
θ_1	0.8789635328932761	0.8901438163231377
θ_2	-0.9965719584754135	-0.9834775736328421
θ_3	-1.6921042908035564	-1.7044561386678760
θ_4	0.5206249360614155	0.4906661687944900
θ_5	1.5190020299259381	1.5136974115875366
θ_6	0.3606298858846529	0.3820758183271771
θ_7	-0.4721289483358399	-0.4568107050477830
Φ_1	1.4676902604680244	1.4557054355067451
Φ_2	-1.3618276394078148	-1.3525881149216927
Φ_3	0.7076454044934742	0.7023619159769664
Θ_1	0.8412748367694940	0.8370722835862818
Θ_2	-0.8240640881053386	-0.8282527898256336
Θ_3	0.9939014392344844	0.9966285211365780

**Figure 8:** Flowchart of the Z2DN1-SARIMA hybrid orbit propagator program.

30 days, involves several mathematical expressions of more than 10000 terms, whereas the whole Z2DN1 analytical theory only needs to evaluate 93 terms. The technical details of the tesseral analytical theory have been developed in [18, 19].

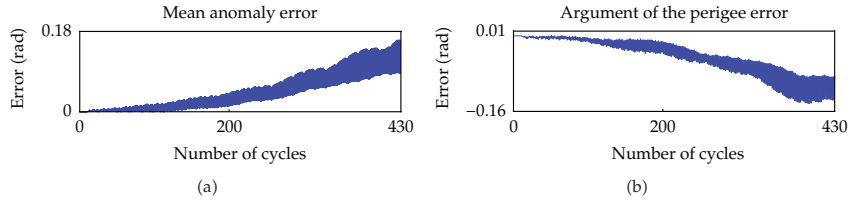


Figure 9: Z2DN1-SARIMA hybrid-AOPP. Relative errors of the mean anomaly and argument of the perigee for a Quasi-Spot satellite.

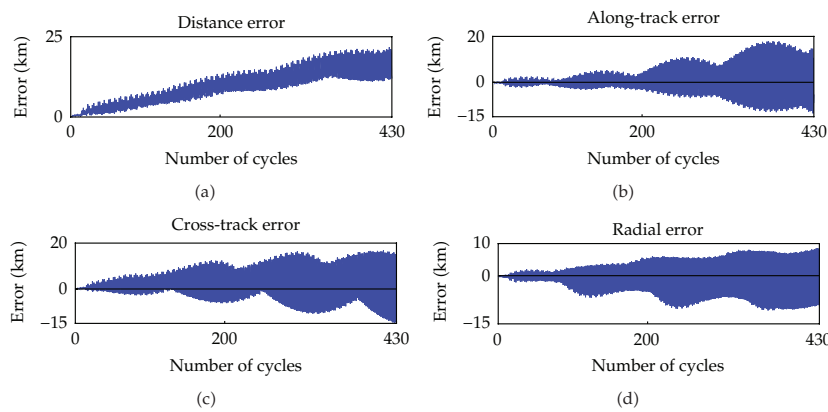


Figure 10: Z2DN1-SARIMA hybrid-AOPP. Distance, along-track, cross-track, and radial errors for a Quasi-Spot satellite.

5.1. Numerical Validations

Finally we analyze the behaviour of Z2DN1-SARIMA hybrid-AOPP designed for a Quasi-Spot satellite versus the numerical integration for an Earth orbiter, which has only taken into account the perturbation due to the nonsymmetrical Earth gravity field up to the fourth degree and order. The first 10 cycles are considered for the estimation stage, whilst from the 10th and up to approximately the 430th cycle, which is about 30 days, are used in the forecasting stage.

Figure 9 shows the relative errors of the mean anomaly and argument of the perigee for a Quasi-Spot satellite. The maximum absolute errors of mean anomaly and argument of the perigee in a time span interval of 30 days are about 9.4° and 8.2° , respectively. These errors have been reduced to 3° in the case of the mean anomaly and to 1.3° in the argument of the perigee, with respect to the Z2DN1 AOPP.

Figure 10 shows the distance, along-track, cross-track, and radial errors. The maximum distance error obtained from Z2DN1 AOPP is 352.076 km while for Z2DN1-SARIMA it is only 23.7489 km. We must remark that the accuracy obtained by the described hybrid-AOPP is only comparable to a higher-order analytical theory, which includes a more precise perturbation model.

6. Conclusions and Future Works

A new methodology to carry out hybrid-AOPP families, based on the combination of an analytical orbit propagator program and statistical time series models, is presented. To illustrate this methodology, a hybrid-AOPP, named Z2DN1-SARIMA, has been developed, which combines an economic first-order closed-form analytical orbit propagator and two SARIMA time series models fitted to the case of the Quasi-Spot satellite. Although the increment in the computational time cost is not significant with respect to the pure analytical theory, the error of our theory is reduced in comparison to the pure Z2DN1 AOPP. The accuracy reached by our new hybrid model is similar to that obtained by a more complex zonal and tesseral analytical theory, but without the inconvenience of losing computational efficiency.

To calculate the SARIMA models, 10 satellite cycles are considered and the univariate Box-Jenkins time series analysis is used to model the ε_i^x time series, using statistical software packages for R. Two of the six components were modelled, whilst, at present, we are working on the study of the bivariate SARIMA models in order to collect the similar behaviour found between the mean anomaly and the argument of the perigee. In the study of the argument of the node and the third component of angular momentum behaviour, we are performing an economic analytical theory, which includes tesseral coefficients.

The behaviour of the Z2DN1-SARIMA hybrid-AOPP with respect to other initial conditions near the Quasi-Spot conditions, as well as the adapted hybrid-AOPP, when other perturbations, like atmospheric drag, third body, and so on, are taken into account, is future works to be investigated.

Acknowledgments

This work has been supported by the Gobierno de La Rioja (Project Fomenta 2010/16). Special thanks are given to the reviewer for constructive advice and thoughtful reviews and comments pointed out and to K. Hatcher for the revision of this paper.

References

- [1] D. Brouwer, "Solution of the problem of artificial satellite theory without drag," *The Astronomical Journal*, vol. 64, pp. 378–397, 1959.
- [2] K. Aksnes, "A second-order artificial satellite theory based on an intermediate orbit," *Astronomical Journal*, vol. 75, no. 9, pp. 1066–1076, 1970.
- [3] H. Kinoshita, "Third-order solution of an artificial satellite theory, Smithsonian Astrophysical Observatory," Special Report No. 379, Cambridge, Mass, USA, 1977.
- [4] F. R. Hoots and R. L. Roehrich, *Spacetrack Report No. 3: Models for Propagation of the NORAD Element Sets*, U.S. Air Force Aerospace Defense Command, Colorado Springs, Colo, USA, 1980.
- [5] G. E. P. Box and G. M. Jenkins, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco, Calif, USA, 1976.
- [6] A. Deprit, "Delaunay normalisations," *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 26, no. 1, pp. 9–21, 1982.
- [7] A. A. Kamel, "Peturbation method in the theory of nonlinear oscillations," *Celestial Mechanics*, vol. 3, no. 1, pp. 90–106, 1970.
- [8] J. F. San-Juan, L. M. López, and R. López, "MathATESAT: a symbolic-numeric environment in astrodynamics and celestial mechanics," *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 6783, no. 2, pp. 436–449, 2011.

- [9] J. R. Dormand and P. J. Prince, "Practical runge-kutta processes," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 10, no. 5, pp. 977–989, 1989.
- [10] D. A. Dickey and W. A. Fuller, "Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 74, no. 366, pp. 427–431, 1979.
- [11] C. M. Jarque and A. K. Bera, "Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals," *Economics Letters*, vol. 6, no. 3, pp. 255–259, 1980.
- [12] G. M. Ljung and G. E. P. Box, "On a measure of lack of fit in time series models," *Biometrika*, vol. 65, no. 2, pp. 297–303, 1978.
- [13] R Development Core Team, *R: A Language and Environment For Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2011, <http://www.Rproject.org/>.
- [14] K. Chan, "TSA: Time Series Analysis, R package version 0.98," 2010, <http://CRAN.R-project.org/package=TSA/>.
- [15] R. J. Hyndman, "Forecast: Forecasting functions for time series, R package version 2.09," 2010, <http://CRAN.R-project.org/package=forecast/>.
- [16] A. Trapletti and K. Hornik, "Tseries: Time Series Analysis and Computational Finance, R package version 0.10-27," 2011, <http://CRAN.Rproject.org/package=tseries/>.
- [17] B. Garfinkel, "Tesseral harmonic perturbations of an artificial satellite," *The Astronomical Journal*, vol. 70, pp. 784–786, 1965.
- [18] J. F. San-Juan and S. Serrano, "ATESAT: revisited and improvements. Analytical theory and numerical validation for a SPOT-like satellite," Tech. Rep. No. DTS/MPI/MS/MN/2000-013, Centre National d'Études Spatiales, Toulouse, France, 2000.
- [19] S. Serrano, *Teoras Analíticas del Movimiento de un Satélite Artificial alrededor de un Planeta. Ordenación Asintótica del Potencial en el Espacio [Físico Ph.D.]*, Universidad de Zaragoza, 2003.

Apéndice B

Artículo II

Application of computational
intelligence in order to develop
hybrid orbit propagation methods

Pérez, I., San-Juan, J. F.,
San-Martín, M. and López-Ochoa, L. M.

Mathematical Problems in Engineering
2013

Research Article

Application of Computational Intelligence in Order to Develop Hybrid Orbit Propagation Methods

Iván Pérez, Juan Félix San-Juan, Montserrat San-Martín, and Luis María López-Ochoa

University of La Rioja, La Rioja, 26004 Logroño, Spain

Correspondence should be addressed to Juan Félix San-Juan; juanfelix.sanjuan@unirioja.es

Received 4 August 2013; Revised 5 October 2013; Accepted 6 October 2013

Academic Editor: Ren-Jieh Kuo

Copyright © 2013 Iván Pérez et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

We present a new approach in astrodynamics and celestial mechanics fields, called *hybrid perturbation theory*. A hybrid perturbation theory combines an *integrating technique*, general perturbation theory or special perturbation theory or semianalytical method, with a *forecasting technique*, statistical time series model or computational intelligence method. This combination permits an increase in the accuracy of the integrating technique, through the modeling of higher-order terms and other external forces not considered in the integrating technique. In this paper, neural networks have been used as time series forecasters in order to help two economic general perturbation theories describe the motion of an orbiter only perturbed by the Earth's oblateness.

1. Introduction

The goal of an orbit propagator is to determine accurately the position and velocity of an object orbiting the Earth, mainly an artificial satellite or a space debris object. In order to achieve this, the position and velocity at an initial instant t_0 must be known, as well as the set of forces acting on the orbiter. The main force is the gravitational attraction from an ideally spherical Earth, but some perturbations exist, such as the nonsphericity of the Earth, atmospheric drag, the effect of other celestial bodies, and solar radiation pressure, among others. All these perturbations are not always taken into account but only the most determinant ones for the specific orbiter, depending on its type of orbit and the scientific requirements for the mission.

In order to solve the problem, the nonlinear equations of motion of this complex dynamical system must be integrated. Depending on both the integrating techniques and applied analytical transformations, three different methods have been described: general perturbation theory, special perturbation theory, and semianalytical techniques.

General perturbation methods, also analytical theories, refer to the analytical integration of the equations of motion, using perturbation theories based on series expansions [1–8]. General perturbation methods provide analytical solutions valid for any set of initial conditions. These solutions are

explicit functions of time, constants of the problem, and integration constants, which are mainly characterized by retaining the essential behavior of motion. Provided that the position and velocity of the orbiter at an initial instant t_0 are known, their determination for any other instant t_f requires only one evaluation of the analytical solution.

Nevertheless, it must be noticed that most analytical theories currently in use do not lead to accurate solutions but to approximations, mainly due to two reasons. The first is that only very basic models of external forces are considered, because in some cases their corresponding analytical expressions are very complicated. The second reason for such inaccuracy is that only low-order approximations are usually developed, since the analytical expansions for the higher-order solutions may become unmanageably long.

On the other hand, special perturbation methods [9] refer to the accurate numerical integration of the equations of motion, including any external forces, even those in which analytical manipulations are complicated. Nonetheless, in order to achieve the intended accuracy, it is necessary to use small integrating steps, which means that all the intermediate positions of the orbiter must be computed in a dense grid between t_0 and t_f .

Finally, semianalytical techniques [10, 11] are characterized by combining special and general perturbation methods. This approach allows for including any external forces in

the equations of motion, which are simplified using analytical techniques, whereas the transformed equations of motion are integrated numerically. The determination of the position of the orbiter in t_f also requires the integration of a grid starting at t_0 , but in this case the grid can be significantly less dense than in special perturbation methods. Consequently, depending on both the integrating step and the difference between t_0 and t_f , the efficiency of this method can be very close to that of the general perturbation theory.

We present a fourth approach, called *hybrid perturbation theory*, which can combine one of the aforementioned methods with time series forecasting techniques, based on either statistics [12–14] or computational intelligence [15]. In this paper, we focus on the combination of economic general perturbation theories and neural networks [16–20], which is one of the most widespread techniques for time series forecasting in computational intelligence.

The goal of the forecasting part of the method is to model the dynamics not present in the approximate analytical expressions, due to the fact that not all the forces acting on the orbiter may have been considered and also because the higher-order terms may have been excluded to avoid extremely long expressions. To allow for the subsequent increase in precision, the forecaster needs additional data from which to model absent dynamics. Therefore, besides knowing the position and velocity of the orbiter at an initial instant t_0 , the same magnitudes must also be accurately known for a certain period of time.

To express this concept in a formal manner, the aim is to determine an accurate estimation \hat{x}_{t_f} of the real position and velocity x_{t_f} of an orbiter, expressed in any set of variables, at an instant t_f . That estimation will be calculated with the addition of these two components:

$$\hat{x}_{t_f} = x_{t_f}^A + \hat{\varepsilon}_{t_f}, \quad (1)$$

where $x_{t_f}^A$ represents the approximate position and velocity determined by means of the analytical expressions, whilst $\hat{\varepsilon}_{t_f}$ does so for the neural network forecast of the error of those expressions at epoch t_f .

The first component, $x_{t_f}^A$, can easily be obtained from the analytical propagator expressions, which are explicit functions \mathcal{P} of both time t and a known value x_{t_0} at an initial instant t_0 :

$$x_{t_f}^A = \mathcal{P}(t_f, x_{t_0}). \quad (2)$$

The second component, $\hat{\varepsilon}_{t_f}$, is the output of the neural network for the instant t_f , after having been trained to forecast the error of the analytical expressions. We define the error ε_t , at any instant t_i , as the difference between the real value of position and velocity, x_{t_i} , and the value obtained from the approximate analytical expressions, $x_{t_i}^A$,

$$\varepsilon_{t_i} = x_{t_i} - x_{t_i}^A, \quad (3)$$

which represents the dynamics missing from the analytical expressions, due to the simplifications assumed both in the

considered set of forces and in the number of terms of the expressions.

The process in order to provide the neural network with the capability to forecast errors is the training, which requires knowledge of the real errors ε_i between t_0 and another instant t_n with a regular cadence. According to (3), that implies knowing the real positions and velocities x_{t_i} , as well as approximate positions and velocities $x_{t_i}^A$, for $i = 0, \dots, n$. The former can be obtained by means of either any observational method or through the precise propagation of the equations of motion. Meanwhile, the latter can be easily determined evaluating the analytical expressions for $t = t_0, \dots, t_n$.

Once the neural network has been trained, it is capable of forecasting future errors $\hat{\varepsilon}_i$ from previous ones, thus complementing the approximate analytical expressions so as to reach more accurate results, as stated in (1).

In this paper, we illustrate and analyze the utility of the hybrid perturbation theory, considering simple models with only conservative forces, in order to draw valuable conclusions regarding its viability.

This paper is organized as follows. The considered analytical theories are summarized in Section 2. Section 3 briefly introduces neural network techniques. Section 4 illustrates the creation of a hybrid orbit propagator in the case of a LEO orbiter. Finally, Section 5 analyzes the results of the developed hybrid orbit propagator.

2. General Perturbation Methods

An analytical orbit propagator program (AOPP) is an application that collects and arranges all mathematical expressions involved in an approximate analytical solution of the satellite equations of motion. The two AOPPs here considered have been derived from the Kepler problem, which can be solved analytically (see [21] for more details) and from a first-order closed-form analytical theory of the *main problem* of the artificial satellite theory.

The *main problem* is defined as a Kepler problem perturbed by the Earth's oblateness. The Hamiltonian of this dynamical system can be written in a Cartesian coordinate system (x, X) as

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (X \cdot X) - \frac{\mu}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{\alpha}{r} \right)^2 P_2 \left(\frac{z}{r} \right) \right], \quad (4)$$

where $r = \|x\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, μ is the gravitational constant, α is the equatorial radius of the Earth, J_2 is the oblateness coefficient, and P_2 is the Legendre polynomial of degree 2.

The first step in carrying out the analytical theory consists in expressing the Hamiltonian (4) in terms of Delaunay variables (l, g, h, L, G, H) . This set of canonical action-angle variables can be defined in terms of orbital elements such as $l = M$, $g = \omega$, $h = \Omega$, $L = \sqrt{\mu a}$, $G = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$, and $H = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i$, where M , ω , Ω , a , e , and i are the mean anomaly, argument of the perigee, longitude of the ascending node, semimajor axis, eccentricity, and inclination,

respectively. Then, the transformed Hamiltonian is expressed in Delaunay variables as

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L^2} - \frac{\epsilon \mu}{2r} \left(\frac{\alpha}{r} \right)^2 (1 - 3s^2 \sin^2(f + g)), \quad (5)$$

where $\epsilon = J_2$ is a small parameter, $s = \sin i$, and f is the true anomaly.

Next, the Hamiltonian (5) is normalized [22] by applying the Lie transform $\varphi: (l, g, h, L, G, H) \rightarrow (l', g', h', L', G', H')$, which up to first order reads

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0, \quad (6)$$

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1 - \frac{\mu^2}{L^3} - \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial l'}. \quad (7)$$

Equation (7) is solved by taking \mathcal{H}_1 as the average over the mean anomaly:

$$\mathcal{H}_1 = \frac{3\alpha^2 \mu^4 s'^2}{4L'^6 \eta'^3} - \frac{\alpha^2 \mu^4}{2L'^6 \eta'^3}, \quad (8)$$

and then \mathcal{W}_1 is computed as

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \frac{L'^3}{\mu^2} \int (\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_1) dl \\ &= \frac{\mu^2 \alpha^2 (3s'^2 - 2) \phi'}{4L'^3 \eta'^3} + \frac{\mu^2 \alpha^2 e' (3s'^2 - 2)}{4L'^3 \eta'^3} \sin f' \\ &\quad - \frac{3\mu^2 \alpha^2 e' s'^2}{8L'^3 \eta'^3} \sin(f' + 2g') \\ &\quad - \frac{3\mu^2 \alpha^2 s'^2}{8L'^3 \eta'^3} \sin(2f' + 2g') \\ &\quad - \frac{\mu^2 \alpha^2 e' s'^2}{8L'^3 \eta'^3} \sin(3f' + 2g'), \end{aligned} \quad (9)$$

where $\eta' = \sqrt{1 - e'^2}$ and $\phi' = f' - l'$.

Hence, up to the first order the transformed Hamiltonian is given by

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L'^2} + \epsilon \left(\frac{3\alpha^2 \mu^4 s'^2}{4L'^6 \eta'^3} - \frac{\alpha^2 \mu^4}{2L'^6 \eta'^3} \right). \quad (10)$$

We must point out that the Hamiltonian \mathcal{H} is integrable because it only depends on the momenta L' , G' , and H' , and thus the equations of motion are obtained as

$$\begin{aligned} \frac{dl'}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L'} = \frac{\mu^2}{L'^3} + \epsilon \left(\frac{3\alpha^2 \mu^4}{2L'^7 \eta'^3} - \frac{9\alpha^2 \mu^4 s'^2}{4L'^7 \eta'^3} \right), \\ \frac{dg'}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G'} = \epsilon \left(\frac{3\alpha^2 \mu^4}{L'^7 \eta'^4} - \frac{15\alpha^2 \mu^4 s'^2}{4L'^7 \eta'^4} \right), \\ \frac{dh'}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H'} = -\epsilon \frac{3\alpha^2 \mu^4 c'}{2L'^7 \eta'^4}, \\ \frac{dL'}{dt} &= \frac{dG'}{dt} = \frac{dH'}{dt} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

where $c' = \sqrt{1 - s'^2}$.

By integrating (11), we directly obtain the values of the momenta L' , G' , and H' as constants, whereas the variables l' , g' , and h' yield

$$\begin{aligned} l' &= \left[\frac{\mu^2}{L'^3} + \epsilon \left(\frac{3\alpha^2 \mu^4}{2L'^7 \eta'^3} - \frac{9\alpha^2 \mu^4 s'^2}{4L'^7 \eta'^3} \right) \right] (t - t_0) + l'_0, \\ g' &= \left[\epsilon \left(\frac{3\alpha^2 \mu^4}{L'^7 \eta'^4} - \frac{15\alpha^2 \mu^4 s'^2}{4L'^7 \eta'^4} \right) \right] (t - t_0) + g'_0, \\ h' &= \left[-\epsilon \frac{3\alpha^2 \mu^4 c'}{2L'^7 \eta'^4} \right] (t - t_0) + h'_0, \end{aligned} \quad (12)$$

where l'_0 , g'_0 , h'_0 , L'_0 , G'_0 , and H'_0 are the transformed initial conditions l_0 , g_0 , h_0 , L_0 , G_0 , and H_0 at the epoch t_0 .

Finally, from (9) we can calculate the first-order explicit equations of the direct and inverse transformations [23].

An AOPP is derived from the above analytical theory, which has to evaluate 93 terms. This AOPP is called Z2DN1. The algebraic manipulations required to carry out this analytical theory and its corresponding AOPP are built using a set of *Mathematica* packages called MathATESAT [24].

Z2DN1 begins initializing the physical parameters and initial conditions at epoch t_0 . Next, it transforms the initial conditions into Delaunay variables (l_0 , g_0 , h_0 , L_0 , G_0 , and H_0) and transports them across the inverse transformation of the Delaunay normalization (l'_0 , g'_0 , h'_0 , L'_0 , G'_0 , and H'_0). Then, the program provides Delaunay variables at epoch t_f from integrated Hamilton equations (l' , g' , h' , L' , G' , and H'). Finally, the direct transformation of the Delaunay normalization is applied, and then the osculating Keplerian elements (a , e , g , h , i , and l) and the state vector (x , y , z , \dot{x} , \dot{y} , and \dot{z}) can be calculated.

Z2DN1 AOPP has been compared with the numerical integration of the original problem (4) using a high-order Runge-Kutta method [25] for the case of a LEO orbiter ($a = 7221$ km, $e = 0.0622$, and $i = 48.98^\circ$).

Figure 1 shows the distance error in a time span interval of 3 days, which is about 42 orbiter periods. As can be observed, the distance error of the first-order J_2 analytical theory when compared with a more complex perturbation model is at a level of 1.2 km. Figure 2 shows the orbital element errors.

3. Neural Networks (NN) Overview

Artificial neural networks constitute one of the most widespread techniques in the field of computational intelligence. They are based on parallel processing of information by simple units, called neurons, as happens in the brain. Knowledge resides in the strength of the connections between neurons, which are called synapses. Such strength can be reinforced or weakened through a learning process based on known data, which allows the neural network to acquire and emulate underlying dynamics in the data. Some of the fields in which artificial neural networks have been successfully used are pattern recognition, data classification, data mining, and time series forecasting.

Figure 3 shows an example of neural network architecture with three layers: the input layer, which comprises the neural

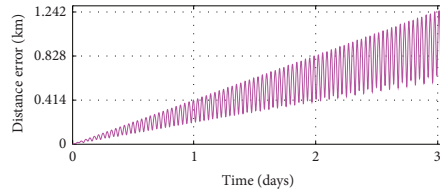


FIGURE 1: Distance error of the first-order J_2 analytical theory for a LEO orbiter.

network inputs, the hidden layer, with a certain number of hidden neurons, and the output layer, which includes one neuron per neural network output. The number of inputs and outputs is determined by the nature of the problem to be solved, whereas, on the other hand, the number of hidden layers and hidden neurons may vary. The more hidden layers are and the more hidden neurons within them are, the higher processing power the neural network will reach.

The typical connection pattern implies that each input or each neuron is connected to all the neurons in the following layer through a set of weights w , which determine the strength of the synapses. Additionally, neurons have a special input with a constant value of 1, weighted by a bias b , which represents the neuron threshold. A neuron collects the weighted sum of all its inputs and applies it to an activation function, which can be linear or nonlinear, depending on the problem to be solved. One of the most frequent nonlinear activation functions is the hyperbolic tangent.

For example, the value of the output y for the neural network in Figure 3 is given as

$$\begin{aligned}
 y = & g(f(x_1 w_{1,1} + x_2 w_{2,1} + x_3 w_{3,1} + x_4 w_{4,1} + b_1) w_{1,\text{out}} \\
 & + f(x_1 w_{1,2} + x_2 w_{2,2} + x_3 w_{3,2} + x_4 w_{4,2} + b_2) w_{2,\text{out}} \\
 & + f(x_1 w_{1,3} + x_2 w_{2,3} + x_3 w_{3,3} + x_4 w_{4,3} + b_3) w_{3,\text{out}} \\
 & + f(x_1 w_{1,4} + x_2 w_{2,4} + x_3 w_{3,4} + x_4 w_{4,4} + b_4) w_{4,\text{out}} \\
 & + b_{\text{out}}). \tag{13}
 \end{aligned}$$

As can be seen, all the involved operations are products and additions, together with the selected activation functions, which can be either calculated or determined by means of a look-up table, depending on the available hardware.

An initial training process is necessary to find the set of weights w and biases b that allows the neural network to behave as desired. In time series forecasting, supervised training methods are used, which need a training data set of inputs and target outputs. The difference between the calculated outputs and the targets regulates the adjustment of weight and bias values in an iterative process, until such difference becomes small enough.

4. Hybrid Analytical-NN AOPP

4.1. Data Preprocessing. Delaunay variables (l , g , h , L , G , and H) have been chosen to characterize the orbit. Two sets of values have been used in this process. The first consists of accurate simulated values, obtained through the numerical integration of the original problem (4) using a high-order Runge-Kutta method, which are considered as actual values from precise observations. The second is obtained by applying the analytical methods described in Section 2; these values are approximate because they assume the simplifications used in Section 2. In both cases, values have been generated with a cadence of 1 minute.

Then, ϵ_i errors have been calculated for each variable, subtracting both data sets, as stated by (3). After this operation, the error sequences of the angular variables, that is, l , g , and h , may include some outliers that differ from the rest of the values in an approximate quantity of 2π . Such differences correspond to complete spins and, although they have no effect on trigonometrical calculations, for a neural network they represent abrupt discontinuities in values that are actually very close. Therefore, complete spin differences have to be removed by adding or subtracting 2π from outliers, as can be seen in Figure 4.

The resulting errors for variable H are always 0 for the problem considered here, which means that the analytical theory is able to determine H values accurately. Therefore, forecasting of H error is not necessary in this case. For each of the remaining variables, a different neural network has been used to forecast future error values, which allows for using parallel training processes.

Data have to be arranged in a suitable format for the neural network. Forecasting will be done through a sliding window; a set of consecutive error values constitutes the input vector from which the neural network has to calculate the error value for the next instant. In the following step, the sliding window moves, and the new input vector loses the initial value, whilst simultaneously appending the recently forecasted value. This process extends until the final error value to be forecasted is reached.

Therefore, during this step, each sequence of error values, ϵ_i , has to be converted into a set of vectors that will be used during the training phase of the corresponding neural network. A sliding window length of 2 orbiter periods has been taken for this first study, which means that error values corresponding to the 2 previous periods will be available for the neural network in order to forecast the next error value. Since the orbiter period is 102 minutes, and a cadence of 1 minute has been considered, each neural network must have $2 \cdot 102 = 204$ inputs and 1 output. Consequently, the training data sets to be prepared must be sets of vectors specifying the following error value for each 204-element set of consecutive error values in each variable.

The number of vectors to be prepared for each neural network training process depends on the period of time desired for the neural network to learn the underlying dynamics. We have chosen for this purpose the duration of the number of complete orbiter periods which is closest to 1 day, that is, 14 periods of 102 minutes: 1428 minutes.

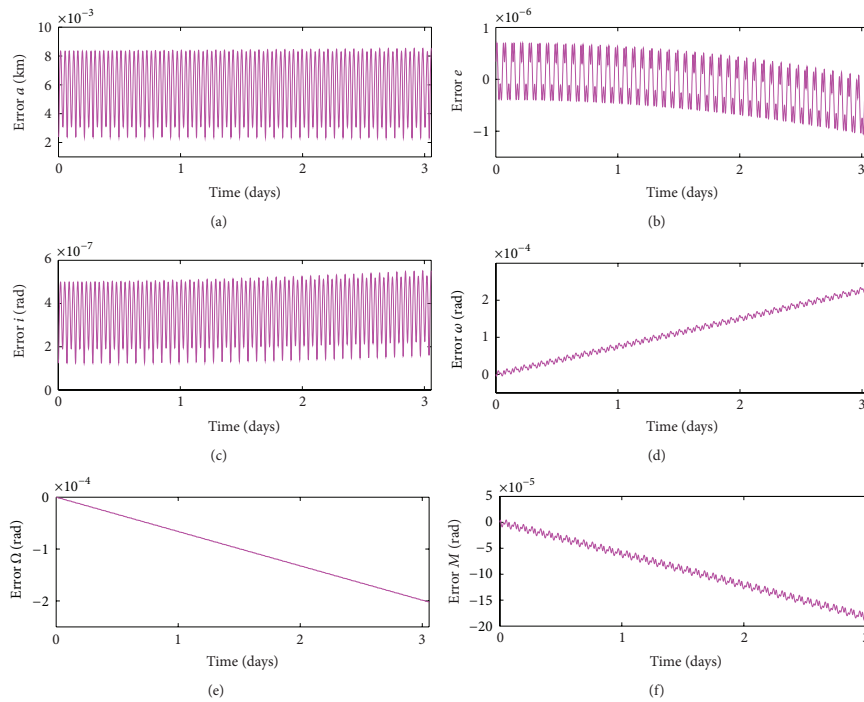


FIGURE 2: Orbital element errors (a , e , i , ω , Ω , and M) of the first-order J_2 analytical theory.

Therefore, error values from minute 1 to 1428 are used to train the neural network, and so forecasted values start at minute 1429. Distribution of all these data in 204-element vectors produces 1225 vectors for the training process of the neural network in each variable.

Finally, data to be used with neural networks must be normalized, so that values fall within the neural network operating range. A linear normalization to the interval $[-0.9, +0.9]$ has been carried out, maintaining a security margin up to the $[-1, +1]$ output range of the hyperbolic tangent activation function. Consequently, the inverse transformation must be applied to forecasted values so that they can be restored to their original ranges.

4.2. Design Parameters. The first step in designing the neural network is the selection of a network type suitable for the intended goal. Despite its simplicity, the multilayer perceptron constitutes a good time series forecaster [15]. We have considered a multilayer perceptron similar to Figure 3 but with a different number of inputs and hidden neurons. As mentioned in Section 4.1, the number of inputs to the neural network is 204, whereas the number of neurons in

the hidden layer, which determines the processing capability, constitutes a parameter for which two different values have been considered, namely, 30 and 60.

Neural networks can be provided with more than one hidden layer, but this is not recommended unless the problem to be solved is extremely complex, due to the increase in training computational cost. One hidden layer is enough for the neural network to approximate any function, provided that it has enough hidden neurons with a nonlinear activation function type [26–28]. The selected architecture for the work presented in this paper only includes one hidden layer, as in Figure 3.

Another design parameter is the type of activation function for each layer. According to [15], although there are other alternatives, the use of the hyperbolic tangent for the hidden layer, together with the linear activation function for the output layer, is a habitual configuration in multilayer perceptrons used for time series forecasting; thus this is our selected architecture.

The most common training algorithm for feedforward networks, such as the multilayer perceptron, was backpropagation [16]. It consisted in changing the weights in the direction of the negative gradient of a predetermined performance

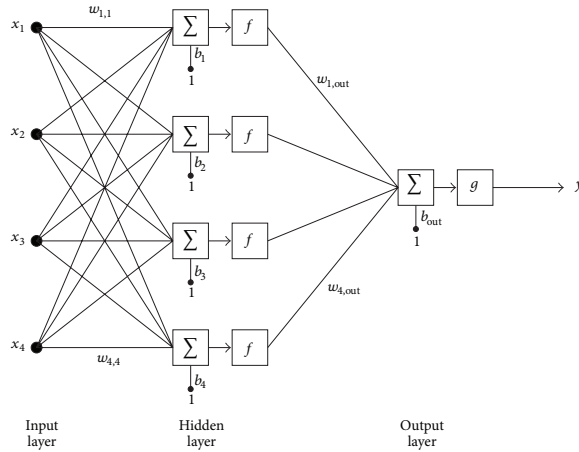


FIGURE 3: Neural network with four inputs, one hidden layer containing four neurons, and one output.

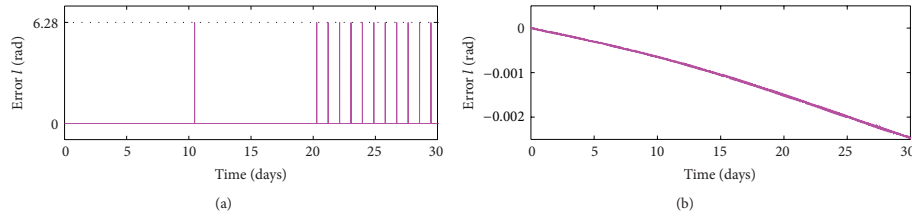


FIGURE 4: Error ϵ_i in variable l in the case of Z2DN1 AOPP (a) before subtracting complete spins and (b) after subtracting complete spins.

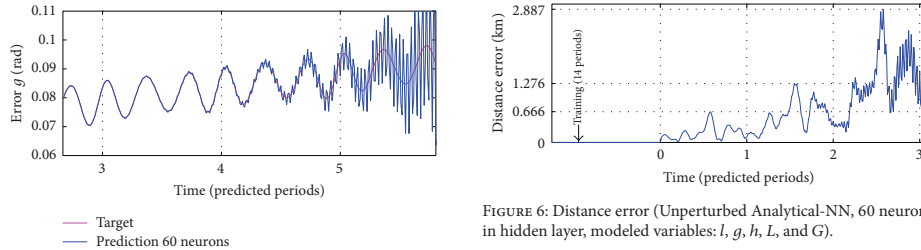


FIGURE 5: Prediction of error $\tilde{\epsilon}_i$ in variable g (Unperturbed Analytical-NN, 60 neurons in hidden layer).

FIGURE 6: Distance error (Unperturbed Analytical-NN, 60 neurons in hidden layer, modeled variables: $l, g, h, L,$ and G).

function, usually the mean square error between the network outputs and target outputs. A more sophisticated learning method was developed [29] through the application of the Levenberg-Marquardt algorithm to backpropagation, which

allowed for a remarkable acceleration of between 10 and 100 times faster in the training process.

When designing a neural network for a particular task, the possibility that overfitting might occur has to be considered. It happens when the neural network architecture is more complex than required for the problem to be solved, and this leads to a loss in the generalization capability, which causes

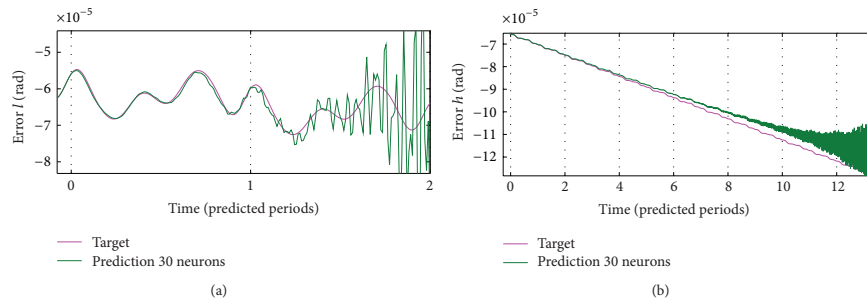


FIGURE 7: Prediction of error $\hat{\epsilon}_i$ in variables l and h (Z2DN1-NN, 30 neurons in hidden layer).

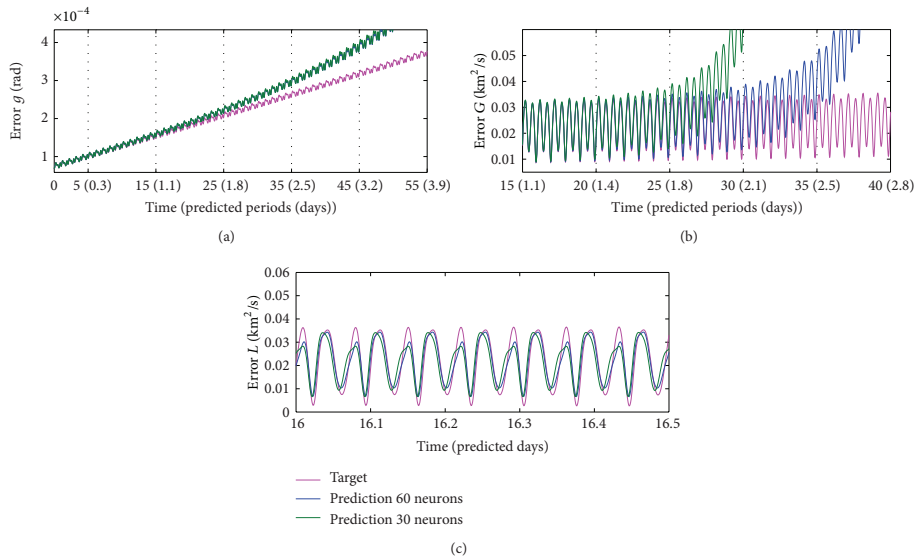


FIGURE 8: Prediction of error $\hat{\epsilon}_i$ in variables g , G , and L (Z2DN1-NN, 30 versus 60 neurons in hidden layer).

the neural network output to adjust overexcessively to data being used in the training, as well as being unable to forecast new values properly.

Overfitting risk can be minimized through the regularization method, which implies the use of the regularized mean square error performance function, comprising a weighted sum of both the habitual mean square error plus a new mean square weight value. As a consequence of the introduction of this new parameter, lower weight and bias values are preferred during the training process, leading to a smoother neural network output, which reduces the possibility that overfitting

may occur. In order to automatically adjust the necessary parameters, the Bayesian regularization method [30, 31] can be applied.

The training method we have used is a Matlab implementation of the Bayesian regularization backpropagation, which includes the Levenberg-Marquardt algorithm. This process minimizes a combination of squared errors and weights in the right proportion to achieve a neural network with generalization capability.

Finally, a selection of the initial weights and biases in order to start the training process is necessary, which has been

8

Mathematical Problems in Engineering

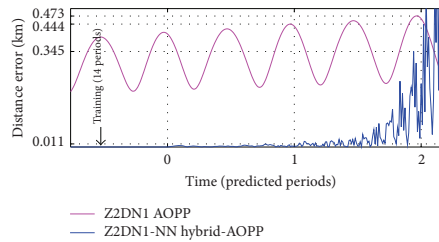


FIGURE 9: Distance error (Z2DN1-NN, 30 neurons in hidden layer, modeled variables: l , g , h , L , and G).

carried out according to the Nguyen-Widrow algorithm [32]. This algorithm distributes neuron active regions uniformly in each layer.

5. Results

After the training phase, the neural network is able to forecast future errors, $\hat{\epsilon}_t$, in Delaunay variables l , g , h , L , and G . These errors can be finally added to the variable values, obtained from the analytical theory, and the result constitutes the hybrid method output. Two different hybrid methods based on two different analytical theories have been implemented and compared with the accurate integration of (4). The former, which we have called *Unperturbed Analytical-NN*, has been carried out from the Kepler analytical solution, whereas the latter, called *Z2DN1-NN*, is from a first-order closed-form analytical theory of the main problem of the artificial satellite theory. The neural network architecture of both AOPPs is the same, namely, the multilayer perceptron. We must note that in the case of the *Z2DN1-NN* model, two different neural networks have also been considered, one with 30 neurons in its hidden layer and the other with 60. In order to compare results, the possibility of restricting neural network forecasting to a representative subset of Delaunay variables has been explored.

5.1. Unperturbed Analytical-NN Hybrid-AOPP. The analytical part of this hybrid-AOPP only takes into account the Kepler problem, that is, to consider the Earth's oblateness, J_2 , equal to zero in (4). We must note that the Earth's oblateness has a strong influence on satellite orbits and this hybrid-AOPP allows us to analyze the capability of the neural network in modeling complex dynamics, which are not present in the analytical calculations. To accomplish this task, the neural network hidden layer has been provided with 60 neurons, which, taking into account the number of inputs, constitutes a neural network that might be sufficiently powerful.

The most significant Delaunay variables for determining the studied orbiter position are l , g , and h , as can be concluded from the analysis of the influence of different subsets of variables over the distance error of the predicted orbiter

position. However, forecasts of their errors $\hat{\epsilon}_t$ remain accurate during a few periods, as can be seen in Figure 5 for variable g . A more complex neural network and a longer training data set would be necessary to extend the forecasting horizon.

The other two modeled variables, L and G , have been forecasted more precisely, but they do not have such a great influence on the orbiter dynamics as the other three. Therefore, the orbiter position can only be determined with relative precision during two periods. Figure 6 shows the maximum distance errors after periods 1, 2, and 3: 0.666 km, 1.276 km, and 2.887 km, respectively.

5.2. Z2DN1-NNHybrid-AOPP. The second approach is based on the Z2DN1 AOPP described in Section 2, which includes part of the first-order effects of the Earth's oblateness. Therefore, the neural network only has to model the higher-order terms. As the dynamics to be modeled are simpler than in the previous case, the necessary neural network should also be less complex. First, we have analyzed the effect of having 30 neurons in the hidden layer, and then we have compared the results with those obtained from a network with 60 hidden neurons.

Analyzing with 30 neurons, error prediction of some of the variables quickly deteriorates, as shown in Figure 7 for l and h , while others maintain accurate forecasts for longer, as can be seen in Figure 8; the green plots for variables g and G remain close to their target values up to approximately 25 predicted orbiter periods, that is, 1.8 days. Variable L forecast performs well even after 16 days, as can also be seen in Figure 8.

The distance error compared with the real position can be plotted when all the forecasted errors are added to their respective analytical values, and the resulting hybrid output is converted into the coordinates of the orbiter position. Figure 9 shows acceptable behavior during 1 or 2 periods, with maximum distance errors of 11 m and 345 m, respectively, both below the maximum errors of the pure analytical method for such instants, which are 444 m and 473 m, respectively.

Since this result is clearly improvable, a more complex neural network with 60 hidden neurons has been applied to the same forecasting task. Then, some of the variable errors extend their prediction horizon significantly, as can be seen in Figure 10 for l and h , in comparison with Figure 7 with 30 hidden neurons. Figure 8 shows an improvement of approximately 5 orbiter periods in variable G , whereas g and L remain similar to results with 30 hidden neurons.

When all these error forecasts are transformed into the orbiter position distance error, as shown in Figure 11, the hybrid method stands out against the purely analytical method, reducing the maximum distance error from 828 m to 22 m after 1 predicted day and from 1242 m to 120 m after 2 days. When only l , g , and h errors are forecasted by the neural network, maintaining the approximate analytical values for L and G , the distance error hardly increases (24 m instead of 22 m after 1 predicted day and 121 m instead of 120 m after 2 days), proving that the former are the most important variables to be forecasted for determining the position of

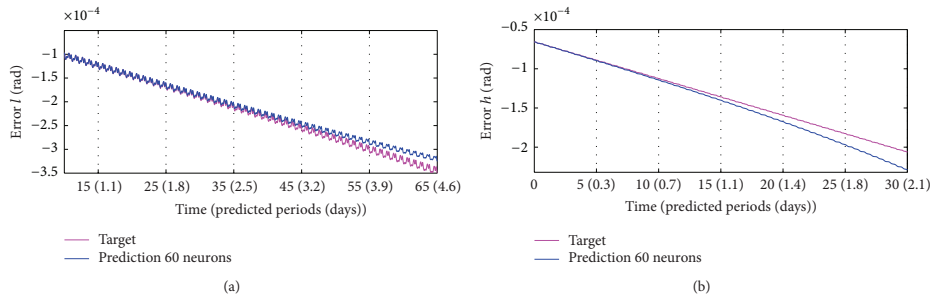


FIGURE 10: Prediction of error $\tilde{\epsilon}_i$ in variables l and h (Z2DN1-NN, 60 neurons in hidden layer).

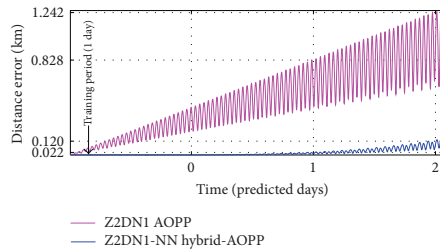


FIGURE 11: Distance error (Z2DN1-NN, 60 neurons in hidden layer, modeled variables: l, g, h, L , and G).

the orbiter under study, since the latter can be estimated analytically with sufficient accuracy.

Finally, Delaunay element errors have been transformed into the classical orbital element errors (semimajor axis a , eccentricity e , inclination i , argument of the perigee ω , longitude of the ascending node Ω , and mean anomaly M) in Figure 12, which shows a notable improvement to the hybrid Z2DN1-NN AOPP over the analytical Z2DN1 during 2 predicted days.

5.3. Analysis and Comparison of Results. The hybrid-AOPP considered in Section 5.1, namely, Unperturbed Analytical-NN, is characterized by the simplicity of the chosen analytical method, which only considers the Kepler solution with no perturbations. Despite the 60 neurons in the hidden layer, the analytical method is too simple for the neural network to model the complete error, leading to poor performance.

In Section 5.2, the analytical part of the Z2DN1-NN hybrid-AOPP includes J_2 perturbation up to the first order, which makes it closer to the precise values. Nevertheless, when the neural network is provided with only 30 neurons in its hidden layer, very little improvement is achieved during an extremely short horizon, which reveals the clearly insufficient power of the neural network for this forecasting task.

In contrast, the increase in the neural network power caused by the 60 hidden neurons used in the last part of Section 5.2 leads to a great improvement and a more satisfactory result.

As a general conclusion for all the analyzed cases herein, we can state that modeling all the Delaunay variables l, g, h, L , and G , instead of only l, g , and h , which were the most representative for this problem, does not extend the improvement horizon but does increase the improvement level during that time. H error for this problem was 0 and thus had no need to be forecasted.

Finally, as far as the validity horizon of predictions is concerned, we have reached the following conclusions. This horizon is only 1 orbiter period for the Z2DN1-NN with 30 hidden neurons, due to the inferior power of the neural network for this prediction task. Meanwhile, the Unperturbed Analytical-NN AOPP with 60 hidden neurons extends the horizon but only up to 4 orbiter periods, since the analytical part of the method does not include perturbations; thus, the neural network has to model more complex dynamics, which exceed its prediction capacity. The validity horizon of predictions extends up to 2 days for the Z2DN1-NN with 60 hidden neurons, which shows a notable initial result that opens a new field in which to research for further improvement.

6. Conclusions and Future Work

A new type of orbit propagator program, the *hybrid-AOPP*, has been presented. This kind of AOPP consists of an integrating technique, which obtains an approximate solution, followed by a second phase in which the error is determined through either statistical time series models or computational intelligence methods. In this paper, we increase the propagation capabilities of general perturbation theories with one of the most widespread methods for time series forecasting in computational intelligence, namely, neural networks. A hybrid-AOPP, named Z2DN1-NN, has been created. It combines an economic first-order closed-form analytical orbit propagator and a neural network trained for the case of a LEO orbiter. It has been shown that the hybrid-AOPP outperforms

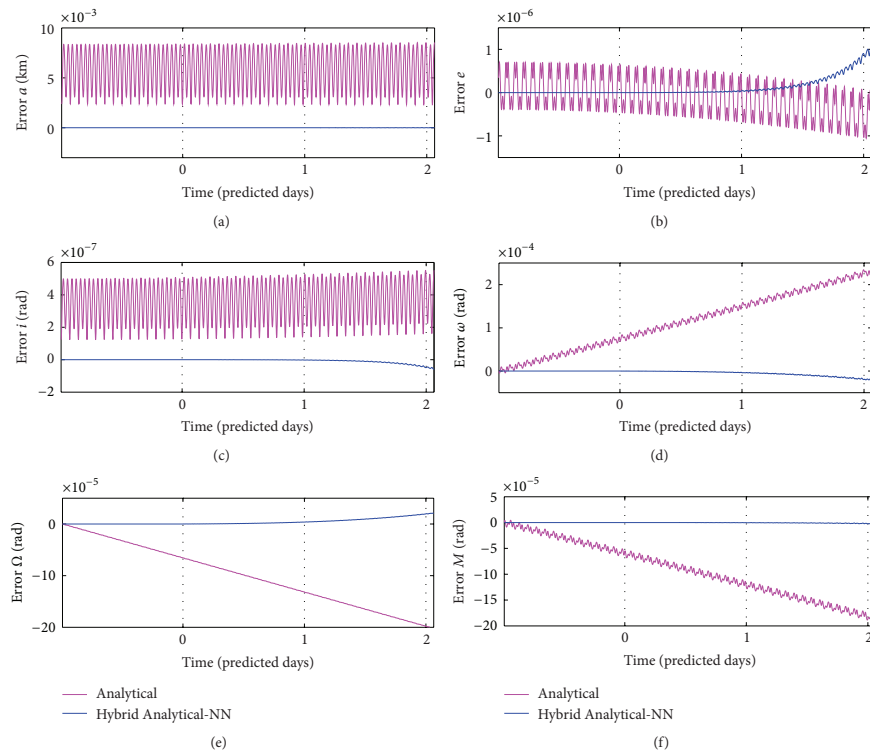


FIGURE 12: Orbital element errors (Z2DN1-NN, 60 hidden neurons, modeled variables: I , g , h , L , and G).

the analytical orbit propagator since it can drastically reduce the orbiter position error.

At present, we are carrying out research to determine the most appropriate neural network architectures and parameters for the hybrid-AOPPs. Simultaneously, statistical time series models are also being successfully applied to hybrid-AOPPs in a parallel research line.

Conflict of Interests

The authors declare that there is no conflict of interests regarding the publication of this paper.

Acknowledgments

This work has been supported by the Government of La Rioja (Project Fomenta 2010/16) and is an extract from the dissertation that Mr. Iván Pérez will submit to the University of La Rioja in order to obtain his Doctoral degree. The authors

would like to thank an anonymous reviewer for his/her valuable suggestions.

References

- [1] D. Brouwer, "Solution of the problem of artificial satellite theory without drag," *The Astronomical Journal*, vol. 64, pp. 379–397, 1959.
- [2] Y. Kozai, "Second-order solution of artificial satellite theory without air drag," *The Astronomical Journal*, vol. 67, pp. 446–461, 1962.
- [3] R. N. Lyddane, "Small eccentricities or inclinations in Brouwer theory of the artificial satellite," *The Astronomical Journal*, vol. 68, pp. 555–558, 1963.
- [4] K. Aksnes, "A second-order artificial satellite theory based on an intermediate orbit," *The Astronomical Journal*, vol. 75, pp. 1066–1076, 1970.
- [5] H. Kinoshita, "Third-order solution of an artificial satellite theory," Special Report No. 379, Smithsonian Astrophysical Observatory, Cambridge, Mass, USA, 1977.

- [6] F. R. Hoots and R. L. Roehrich, "Models for propagation of the NORAD element sets," Spacetrack Report no. 3, U.S. Air Force Aerospace Defense Command, Colorado Springs, Colo, USA, 1980.
- [7] J. F. San-Juan, "ATESAT: automatization of theories and ephemeris in the artificial satellite problem," Tech. Rep. no. CT/TI/MS/MN/94-250, CNES, Toulouse, France, 1994.
- [8] J. F. San-Juan, "ATESAT: review and improvements. Study of a family of analytical models of the artificial satellite generated by ATESAT and their numerical validation versus PSIMU and MSLIB," Tech. Rep. no. DGA/TI/MS/MN/97-258, CNES, Toulouse, France, 1998.
- [9] A. C. Long, J. O. Cappellari, C. E. Velez, and A. J. Fuchs, "Godard trajectory determination system (GTDS)," Mathematical Theory Revision 1 CSC/TR-89/6001, 1989.
- [10] J. G. Neelon, P. J. Cefola, and R. J. Proulx, "Current development of the Draper semianalytical satellite theory standalone orbit propagator package," in *Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Conference*, AAS Pre-print 97-731, Sun Valley, Idaho, USA, August 1997.
- [11] P. J. Cefola, D. Phillion, and K. S. Kim, "Improving access to the semi-analytical satellite theory," in *Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, AAS 09-341, Pittsburgh, Pa, USA, August 2009.
- [12] K. Chan, "TSA: Time Series Analysis, R package version 0.98," 2010, <http://CRAN.R-project.org/package=TSA>.
- [13] A. Trapletti and K. Hornik, "tseries: Time Series Analysis and Computational Finance, R package version 0.10-27," 2011, <http://CRAN.R-project.org/package=tseries>.
- [14] J. F. San-Juan, M. San-Martín, and I. Pérez, "An economic hybrid J_2 analytical orbit propagator program based on SARIMA models," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2012, Article ID 207381, 15 pages, 2012.
- [15] A. K. Palit and D. Popovic, *Computational Intelligence in Time Series Forecasting: Theory and Engineering Applications*, Springer, London, UK, 2005.
- [16] M. T. Hagan, H. B. Demuth, and M. H. Beale, *Neural Network Design*, PWS Publishing Company, Boston, Mass, USA, 1996.
- [17] G. Zhang, B. Eddy Patuwo, and M. Y. Hu, "Forecasting with artificial neural networks: the state of the art," *International Journal of Forecasting*, vol. 14, no. 1, pp. 35–62, 1998.
- [18] G. P. Zhang, B. E. Patuwo, and M. Y. Hu, "A simulation study of artificial neural networks for nonlinear time-series forecasting," *Computers & Operations Research*, vol. 28, no. 4, pp. 381–396, 2001.
- [19] G. P. Zhang, "An investigation of neural networks for linear time-series forecasting," *Computers & Operations Research*, vol. 28, no. 12, pp. 1183–1202, 2001.
- [20] G. P. Zhang, "Neural networks for time-series forecasting," in *Handbook of Natural Computing*, G. Rozenberg, J. N. Kok, and T. Bäck, Eds., pp. 461–477, Springer, Berlin, Germany, 2012.
- [21] J. M. Danby, *Fundamentals of Celestial Mechanics*, Willmann-Bell, Richmond, Va, USA, 1988.
- [22] A. Deprit, "Delatun normalisations," *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 26, no. 1, pp. 9–21, 1982.
- [23] A. Aly Kamel, "Perturbation method in the theory of nonlinear oscillations," *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 3, no. 1, pp. 90–106, 1970.
- [24] J. F. San-Juan, L. M. López, and R. López, "MathATESAT: a symbolic-numeric environment in astrodynamics and celestial mechanics," *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 6783, no. 2, pp. 436–449, 2011.
- [25] J. R. Dormand and P. J. Prince, "Practical Runge-Kutta processes," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 10, no. 5, pp. 977–989, 1989.
- [26] G. Cybenko, "Approximation by superpositions of a sigmoidal function," *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 2, no. 4, pp. 303–314, 1989.
- [27] K. Hornik, M. Stinchcombe, and H. White, "Multilayer feedforward networks are universal approximators," *Neural Networks*, vol. 2, no. 5, pp. 359–366, 1989.
- [28] K. Hornik, "Approximation capabilities of multilayer feedforward networks," *Neural Networks*, vol. 4, no. 2, pp. 251–257, 1991.
- [29] M. T. Hagan and M. B. Menhaj, "Training feedforward networks with the Marquardt algorithm," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 5, no. 6, pp. 989–993, 1994.
- [30] D. J. C. MacKay, "Bayesian interpolation," *Neural Computation*, vol. 3, no. 4, pp. 415–447, 1992.
- [31] F. D. Foresee and M. T. Hagan, "Gauss-Newton approximation to Bayesian learning," in *Proceedings of the International Conference on Neural Network*, pp. 1930–1935, June 1997.
- [32] D. Nguyen and B. Widrow, "Improving the learning speed of 2-layer neural networks by choosing initial values of the adaptive weights," in *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN '90)*, vol. 3, pp. 21–26, June 1990.

Apéndice C

Artículo III

Numerical validation of the Delaunay normalization and the Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky method

Ortigosa, D., San-Juan, J. F.,
Pérez, I. and San-Martín, M.

Mathematical Problems in Engineering
2014

Research Article

Numerical Validation of the Delaunay Normalization and the Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky Method

David Ortigosa,¹ Juan Félix San-Juan,¹ Iván Pérez,² and Montserrat San-Martín¹

¹Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, 26004 Logroño, Spain

²Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de La Rioja, 26004 Logroño, Spain

Correspondence should be addressed to Juan Félix San-Juan; juanfelix.sanjuan@unirioja.es

Received 18 March 2014; Accepted 4 June 2014; Published 6 July 2014

Academic Editor: Silvia Maria Giuliatti Winter

Copyright © 2014 David Ortigosa et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

A scalable second-order analytical orbit propagator programme based on modern and classical perturbation methods is being developed. As a first step in the validation and verification of part of our orbit propagator programme, we only consider the perturbation produced by zonal harmonic coefficients in the Earth's gravity potential, so that it is possible to analyze the behaviour of the mathematical expressions involved in Delaunay normalization and the Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky method in depth and determine their limits.

1. Introduction

The collision between the Iridium and Cosmos satellites in 2009 has demonstrated, among other things, the necessity of improving orbit prediction methods. With this purpose in mind, a scalable second-order analytical orbit propagator programme (AOPP) is being developed. This AOPP combines modern perturbation methods based on Lie transforms and classical averaging techniques, depending on the orbit types or the requirements needed for a space mission, such as catalogue maintenance operations or long-period evolution, for example.

Most of the analytical theories in the artificial satellite problem start by removing the short-period terms [1–4]. In fact, the most frequently used AOPPs, SGP4 (simplified general perturbations 4) [5, 6] and PPT2 (position and partials as functions of time 2) [7, 8], are developed from the Brouwer-Lyddane theory. However, other analytical theories, like AOP [9], simplify the problem by means of a Lie transform known as the elimination of the parallax [10]. In this work, we analyze other alternatives to the Brouwer approach, which may arise from the elimination of the parallax. These are based on removing the long-period terms by means of the elimination of the perigee [11]. The transformed Hamiltonian has one degree of freedom and only depends on the radial

distance r and $R = \dot{r}$. Classically, this Hamiltonian is known as the radial intermediary [10]. Finally, the elimination of the short-period terms can be made using the classical Delaunay normalization (DN) [12] or by means of the Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky method (KBM) [13, 14].

As a first step in the validation and verification of part of our AOPP, which we will call PP_{DN}^{KBM} , we only consider the perturbation produced by zonal harmonic coefficients in the Earth's gravity potential, such that it is possible to analyze the accuracy of the mathematical expressions involved in the corresponding analytical theories in depth, and thus determine its limits when classical problems, like critical inclination or small eccentricities and inclinations, appear.

The purpose of this study is to perform a comprehensive evaluation from the point of view of accuracy and the operative utility of the Delaunay normalization and Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky method once the long-period terms have been removed. A methodology based on an exploratory data analysis (EDA) [15] is proposed in order to validate both integration methods and determine the values of the initial conditions where these methods are valid, in function of the duration of propagation. A space catalogue with 14208 two-line elements (TLE) is used as simulated data in order to validate our AOPP. After that, we identify the outliers and make a general study of the rest of the TLEs considering the

2

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}(r, \theta, \nu, R, \Theta, N) & & \\
\downarrow \varphi_1 & & \\
\mathcal{H}'(r', \theta', \nu, R', \Theta', N') & & \\
\downarrow \varphi_2 & & \\
\mathcal{H}''(r'', \nu'', R'', \Theta'', N'') \equiv \mathcal{H}''(l'', \nu'', L'', G'', H'') & & \\
\begin{array}{cc}
\swarrow \varphi_3 & \searrow \varphi_4 \\
\ddot{u} + \omega^2 u = F(u, \dot{u}, \epsilon) & \mathcal{H}'''(\nu''', L''', G''', H''')
\end{array} & &
\end{array}$$

FIGURE 1: Two methods for integrating the radial intermediary \mathcal{H}'' .

zonal harmonic coefficients J_2 - J_4 . Then we proceed to study the TLEs near critical inclination ($i_c = 63.45^\circ$ or $i_c = 116.56^\circ$) and analyze the modification implemented in PPT2, HANDE (Hoots analytic dynamic ephemeris) [16], and AOP [9] for J_2 - J_4 and J_2 - J_{12} . Finally, we summarize this study.

2. Analytical Theories

In polar-nodal variables $(r, \theta, \nu, R, \Theta, N)$, the Hamiltonian for an Earth satellite perturbed by zonal harmonic potential terms is given by

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^m J_n \left(\frac{\alpha}{r} \right)^n P_n(s \sin \theta). \quad (1)$$

This Hamiltonian defines a two-degree-of-freedom dynamical system. The r coordinate is the radial distance from the Earth's center of mass to the satellite, $\theta = f + g$ represents the argument of latitude (f is the true anomaly and g is the argument of the perigee), and ν is the argument of the node, which is ignored in \mathcal{H} . The R momentum is the radial velocity of the orbiter, whereas Θ is the module and N is the third component of its angular momentum. The variables R , Θ , and N are the momenta for r , θ , and ν , respectively. P_n is the Legendre polynomial of degree n , s is the sine of the inclination of the orbit, m is the maximum order of the zonal harmonic perturbation being considered, μ is the gravitational constant, α is the equatorial radius of the planet, and J_n are the zonal harmonic coefficients. More details about the Hamiltonian formulation of the artificial satellite problem can be found in [10, 17].

Figure 1 shows the combinations of Lie transforms and classical averaging techniques used in developing the two analytical theories, Delaunay normalization and Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky method. Both theories begin by removing the long-period terms caused by the argument of the perigee through the combination of two Lie transforms, the elimination of the parallax, and the elimination of the perigee (Lie transforms φ_1 and φ_2 , resp.) from Hamiltonian (1). The transformed Hamiltonian \mathcal{H}'' has one degree of freedom but maintains the short-period terms caused by the mean anomaly. These two Lie transforms are carried out in a

Mathematical Problems in Engineering

closed form of eccentricity and inclination, which leads us to an integrable problem in the variables (r'', R'') .

The second order of the Hamiltonian, after the elimination of the perigee, takes the following form:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}'' = & \frac{1}{2} \left(R''^2 + \frac{\Theta''^2}{r''^2} \right) - \frac{\mu}{r''} + \epsilon \frac{\Theta''^2}{r''^2} \left(\frac{\alpha}{p''} \right)^2 \left(\frac{3}{4} s''^2 - \frac{1}{2} \right) \\
& + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\Theta''^2}{r''^2} \left[\left(\frac{\alpha}{p''} \right)^2 \mathcal{P}_{J_0} + \sum_{i=2}^m J_i \left(\frac{\alpha}{p''} \right)^{2i} \mathcal{P}_{J_{2i}} \right], \quad (2)
\end{aligned}$$

where the small parameter ϵ represents J_2 , $p'' = \Theta''^2/\mu$, $\mathcal{P}_{J_{2i}}$ are polynomials in eccentricity, and their coefficients are polynomials in s'' .

Traditionally, to complete the theory and obtain the mean elements, as Brouwer [2] did, a further reduction is made through Delaunay variables (l, g, h, L, G, H) by means of the Delaunay normalization [12] (Lie transform φ_4), which averages the problem over the mean anomaly. However, if the time and variable r'' are replaced by the perturbed true anomaly and u , which is defined as the inverse of r'' , in the Hamiltonian \mathcal{H}'' (φ_3 transform), the equations of motion become a one-dimensional perturbed harmonic oscillator in which the Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky method [13, 14, 18] can also be used to integrate the equations of motion [19-24]. It is worth noting that Delaunay's variables are singular for zero eccentricity and/or zero inclination.

In this study, the analytical theories are carried out maintaining the physical parameters in symbolic form, such that they can be valid for any gravity field model. On the other hand, no change of variables is introduced in these theories so as not to remove any problems generated by small eccentricities and inclinations [25], including critical inclination, which allows us to evaluate their real impact on the analytical expressions and so determine the region of the space where these problems may appear. However, in the case of critical inclination, the solution implemented in PPT2 is analyzed.

Our AOPP combines these two theories. The analytical expressions and the orbit propagator, coded in C programming language, are performed by the symbolic-numeric environment *MathATESAT* [23].

3. Methodology

In order to evaluate the sensitivity of the two analytical integration techniques in the zonal case for certain initial conditions, we use the following basic methodology. Each one of the two integration methods is used to propagate a TLE space catalogue over a time span of 30 days. Both propagations are compared with the integration of the original problem using a highly accurate 8th order Runge-Kutta method [26]. Then, the distance, along-track, cross-track, and radial errors are calculated. Finally, an exploratory data analysis consisting of the study of these errors is made. The details of this methodology are given below.

3.1. Study Data. Data from a space catalogue with 14208 TLEs are considered so as to provide a comprehensive knowledge of the DN and KBM performances. Although it is well known that TLEs have been designed to be used in combination with the SGP4 orbit propagator, we consider that a TLE space catalogue contains a large and representative number of different types of orbits, which can be considered as a reliable and independent test for our study.

The orbit data can be separated from the space catalogue. Attending to the frequency distributions of Ω , ω , and M , we can conclude that, in general, they are distributed uniformly between 0° and 360° , whereas the distributions of a , e , and i are not uniform. The values of the semimajor axis are between 1.018543 and 109.2196 Earth Radii, despite the fact that 50% of the objects have $a < 1.5$ Earth Radii. The eccentricity is between 0.000001 and 0.9203, although almost 60% have $e < 0.01$. The inclination is between 0.00120° and 144.6415° , including 270 objects near critical inclination. Near-circular low-Earth, medium-Earth, eccentric, and low-Earth orbits represent 95.6% of the orbit types belonging to the considered catalogue.

3.2. Exploratory Data Analysis (EDA). The 14208 TLEs are propagated over a time span of 30 days using the DN, KBM, and Runge-Kutta methods. Then, the distance, along-track, cross-track, and radial errors are calculated and analyzed over two time spans of 7 and 30 days. After that, we carry out an EDA consisting of the following.

- (i) A graphic study of DN and KBM errors uses the box and whisker plot. This plot of a data set consists of a box drawn around the median value, where the lower and upper box edges bound the first and third quartiles (Q_1 and Q_3), respectively. The lower and upper whiskers extending from each bound box are the minimum and maximum values without outliers (circles) and extreme values (asterisks), respectively, whereas $Q_3 + 1.5 * (Q_3 - Q_1)$ and $Q_1 - 1.5 * (Q_3 - Q_1)$ represent the upper and lower limits, respectively. We must remark that in this study the extreme values are also considered as outliers.
- (ii) Scatter plots aim to characterize the orbits in which the propagators have a poorer overall performance (greater presence of outliers—as above $Q_3 + 1.5 * (Q_3 - Q_1)$). A study of contingency tables (considering the number of outliers and corresponding orbits as variables) and the calculation of Yule's Q, a measure of the magnitude of association between the two rates, complete the study chart.
- (iii) Excluding the atypical values, the behaviour of the two propagators and the distance, along-track, cross-track, and radial errors are explored. In particular, TLEs whose distance errors are above 1000 m are considered atypical values for a time span of 30 days.
- (iv) Finally, we explore the results of the proposed improvements in the two estimates for the orbits near critical inclination.

TABLE 1: Statistical parameters for DN and KBM distance errors (m) for a time span of 7 days.

	DN	KBM
Median	0.202258	0.063508
Minimum	0.000002	0.000001
Maximum	83620353	83620353
Q_1	0.061806	0.042548
Q_3	1.595556	0.074012
$Q_3 + 1.5 * (Q_3 - Q_1)$	3.896181	0.1212079

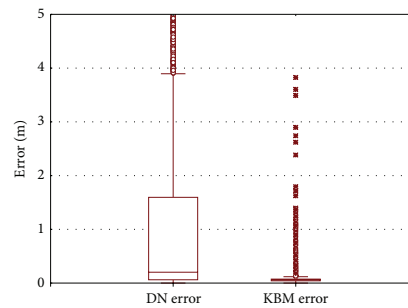


FIGURE 2: Box and whisker plots showing DN and KBM distance error values for a time span of 7 days.

It is worth noting that exploratory data analysis does not require the incorporation of any prior knowledge of this process.

4. DN versus KBM for J_2 - J_4 Model

In this section, the force model taken into account in the analytical orbit propagator only contains the zonal harmonic coefficients J_2 - J_4 , as in SGP4.

4.1. Time Span of 7 Days. The study begins by performing a box and whisker plot analysis in order to identify potential outliers for DN and KBM distance error values. The results of this analysis are shown in Figure 2. As can be seen, there are no outliers below the lower-whisker limit, but if there were, they would represent very good behaviour for the analytical methods in the corresponding TLE. Outliers larger than 5 m have not been included in this graph. The values of the median, minimum, maximum, first and third quartiles, and the upper-whisker limit are shown in Table 1 including the data which generate overflows.

The number of outliers detected in the DN and KBM cases is 2662 and 147, respectively, of which only 55 are common. DN outliers represent 33% of the TLEs in which the eccentricity is below 0.01. Thus, this strong association is confirmed by a highly significant Yule's Q value of 0.97. When the distance error is obtained from TLEs with $e \geq 0.01$ and near critical inclination (between 62.5° and 64.5°),

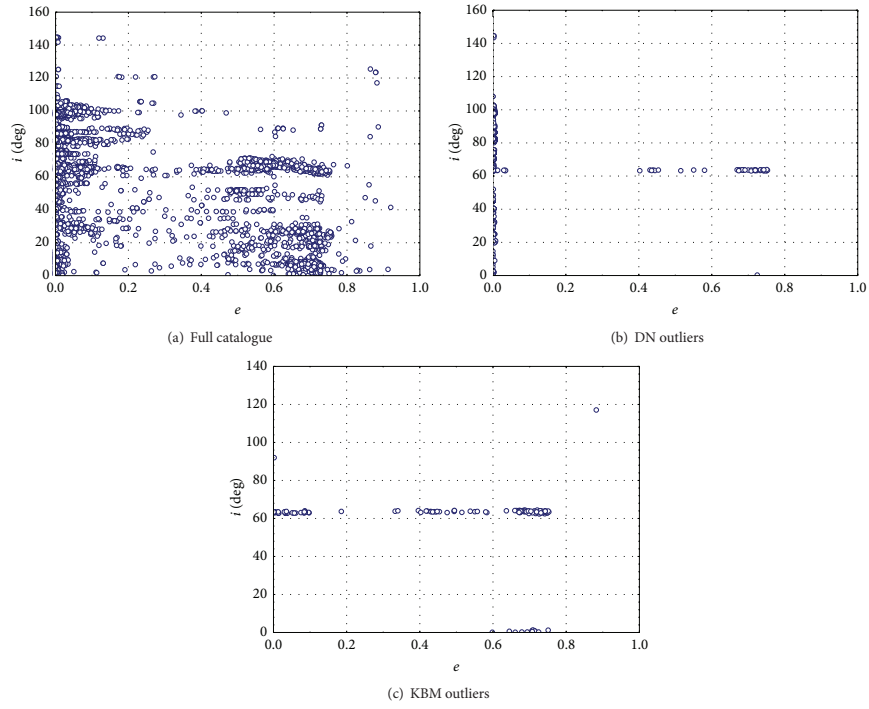


FIGURE 3: Distribution of eccentricity versus inclination for a time span of 7 days.

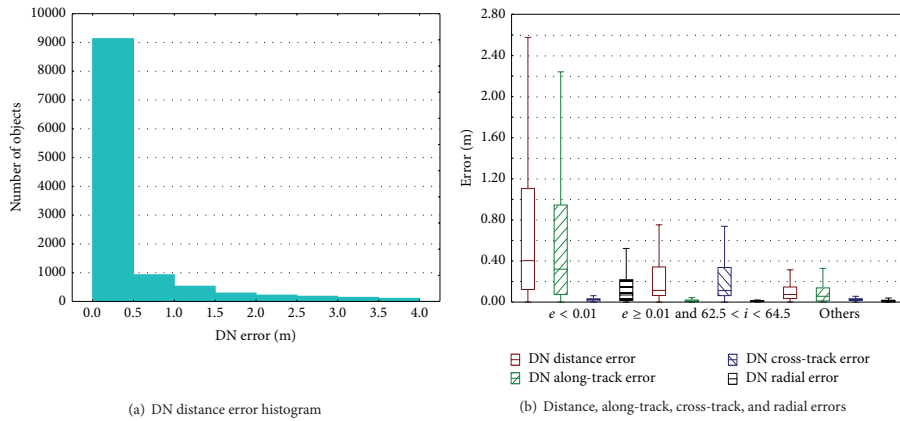


FIGURE 4: Delaunay normalization method for a time span of 7 days.

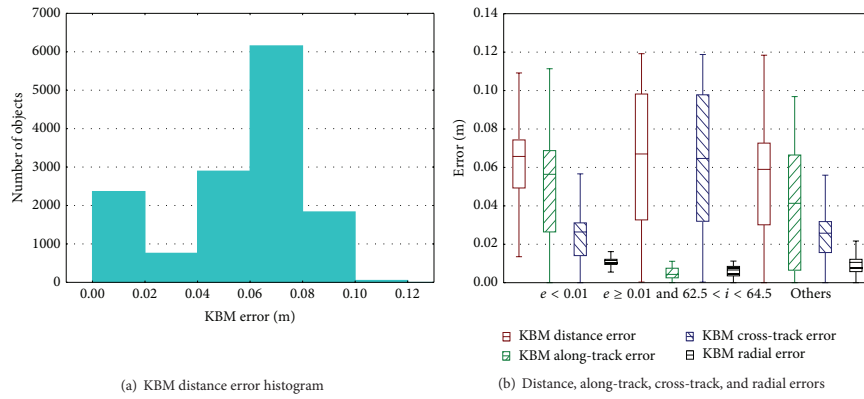


FIGURE 5: Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky method for a time span of 7 days.

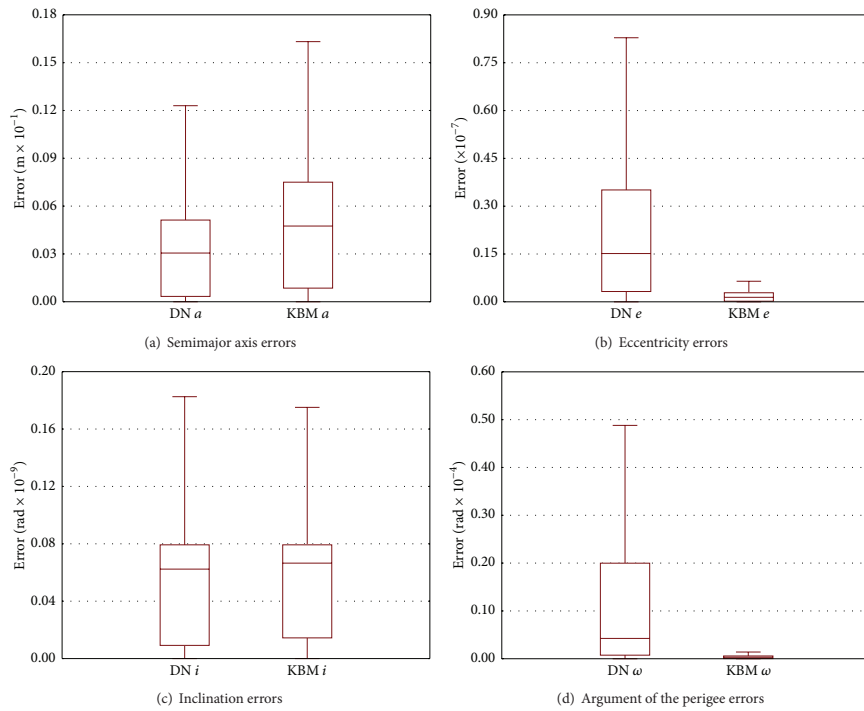


FIGURE 6: Box and whisker plots for DN and KBM orbital element errors with $e < 0.01$ for a time span of 7 days.

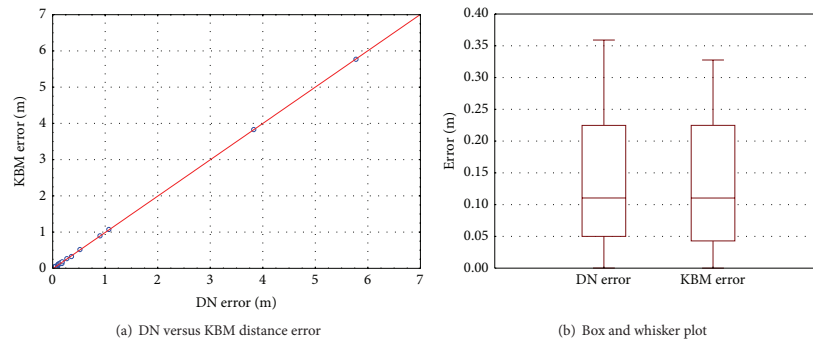
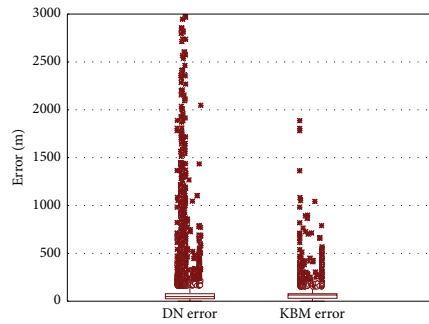
FIGURE 7: KBM outliers ($e > 0.5$ and $i < 1.5^\circ$) for a time span of 7 days.

FIGURE 8: Box and whisker plots showing DN and KBM distance error values for a time span of 30 days.

DN outliers represent 47% of the corresponding TLEs. In this case, Yule's Q of 0.997 also indicates a very strong association. For KBM, outliers also represent 50% of TLEs near critical inclination (between 62.5° and 64.5°), with a Yule's Q of 0.998, whilst 12 of the remaining 16 outliers correspond to TLEs with inclinations of below 1.5° and $e > 0.5$, in which Yule's Q is 0.985. It is worth noting that the maximum distance error in these cases is below 6 m. The distributions of the eccentricity versus inclination of the full TLE catalogue and of the TLEs which correspond to DN and KBM distance error outliers are depicted in Figure 3.

Next, the behaviour of the DN and KBM methods, starting from distance, along-track, cross-track, and radial errors, is analyzed.

The histogram of DN distance error is shown in Figure 4(a). It should be noted that the lack of robustness of estimates is due to the asymmetry on the right of the histogram. This asymmetry corresponds to TLEs with small eccentricity, $e < 0.01$, and near critical inclination.

Figure 4(b) shows a box and whisker plot of the distance, along-track, cross-track, and radial errors without upper outliers. These data are classified into three sets: $e < 0.01$, $e \geq 0.01$, and $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$, and any other data. The most influential errors for TLEs with $e < 0.01$ are found in the along-track and radial components, whereas for TLEs with $e \geq 0.01$ and $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$ the worst error behaviour is found to be in the cross-track component.

Figure 5(a) depicts the histogram of KBM distance error, which exhibits a fairly symmetric behaviour. It is necessary to bear in mind the robustness of estimates. Figure 5(b) shows a box and whisker plot of the distance, along-track, cross-track, and radial errors without upper outliers. These data are classified as mentioned in the DN case. However, in this case, the most influential errors for TLEs with $e < 0.01$ are found in the along-track and cross-track components, whereas for TLEs with $e \geq 0.01$ and $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$ the worst error behaviour is found to be in the cross-track component, as in the DN case. Note the scarce influence of radial error in the three cases.

In general, the worst behaviour is found in the $e < 0.01$ category of the Delaunay normalization. Figure 6 shows box and whisker plot analysis, without outliers, for semimajor axis, eccentricity, inclination, and argument of the perigee errors for both DN and KBM methods in this category. The graphics, on the one hand, of the argument of the perigee and mean anomaly errors and, on the other hand, of the inclination and argument of the node errors are similar for DN and KBM methods. It is worth noting that the semimajor axis error is only slightly better in DN than in KBM cases, that is, 0.0035 m versus 0.0045 m in mean values, respectively. Eccentricity, argument of the perigee, and mean anomaly errors are much better in KBM than in DN cases. The worst eccentricity and mean anomaly determinations using the Delaunay normalization method, in this case, explain the influence of the radial error over the cross-track error (Figures 6(b) and 6(d)).

Finally, in this section some of the KBM outliers are analyzed, in particular, those corresponding to TLEs with $e > 0.5$ and $i < 1.5^\circ$. Both DN and KBM methods exhibit

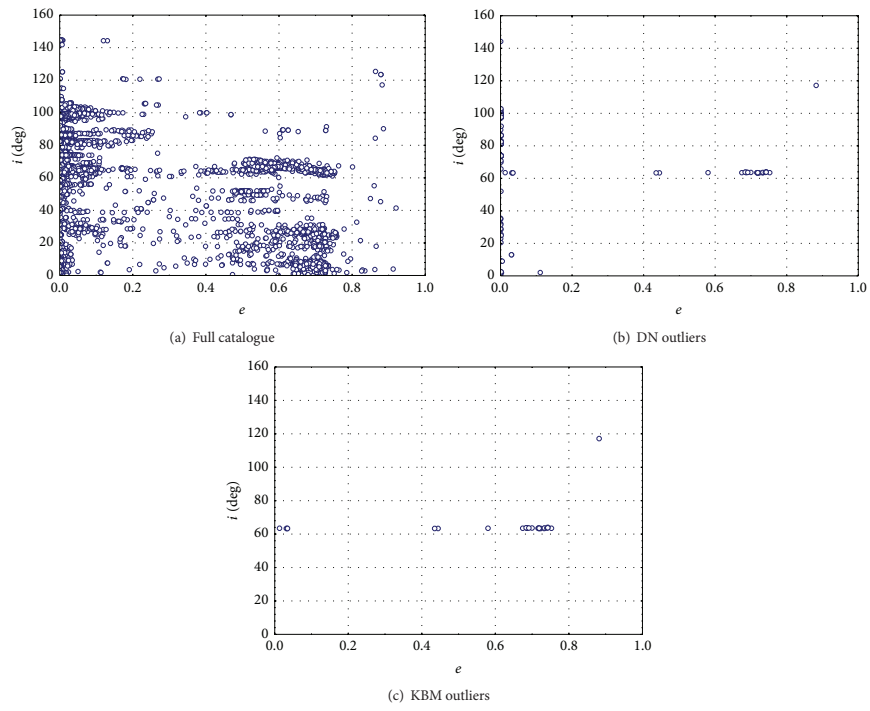


FIGURE 9: Distribution of eccentricity versus inclination for a time span of 30 days.

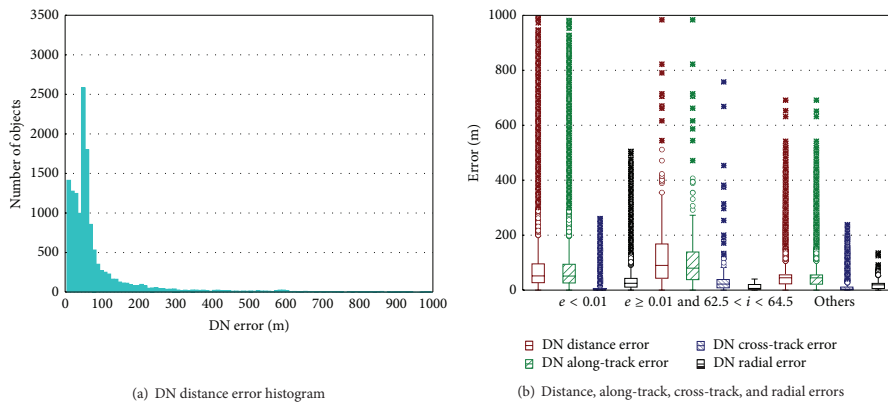


FIGURE 10: Delaunay normalization method for a time span of 30 days.

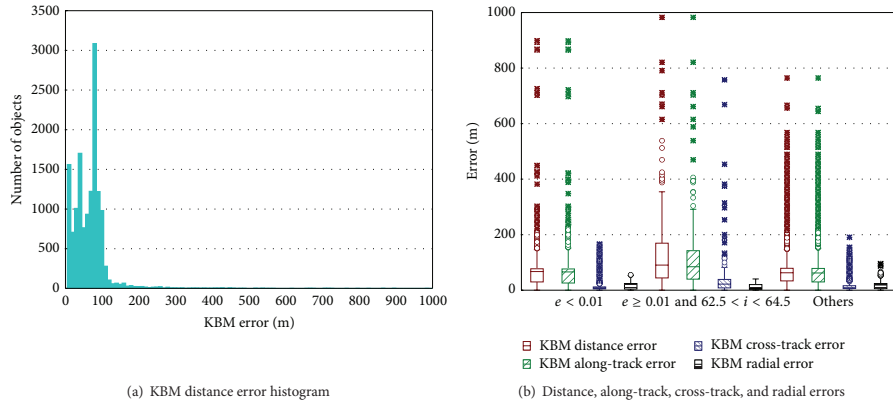


FIGURE 11: Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky method for a time span of 30 days.

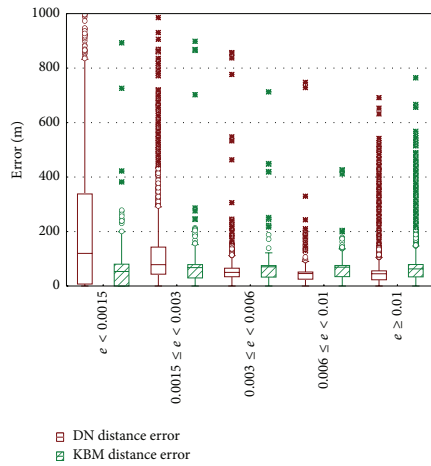


FIGURE 12: Box and whisker plots showing DN and KBM distance errors for different eccentricity ranges after a time span of 30 days.

similar behaviour, but when this set of outlier values is studied KBM is slightly better than DN, 0.12 m versus 0.14 m in mean values, respectively, as can be seen in Figure 7.

4.2. Time Span of 30 Days. The box and whisker plot analysis is used in order to identify potential outliers for DN and KBM distance error values. Results of this analysis are shown in Figure 8. Outliers larger than 3000 m are not included in this graph. As can be seen, there are no outliers below the

TABLE 2: Statistical parameters for DN and KBM distance errors (m) for a time span of 30 days.

	DN	KBM
Median	48.8534	64.6695
Minimum	0.00015	0.00012
Maximum	8833877	8833877
Q_1	25.8261	30.6395
Q_3	78.6987	78.4751
$Q_3 + 1.5 * (Q_3 - Q_1)$	158.0076	150.2285

lower-whisker limit. The values of the median, minimum, maximum, first and third quartiles, and the upper-whisker limit are shown in Table 2, including the data which generate overflows.

The number of outlier values detected in the DN and KBM cases is 1850 and 446, respectively, 409 of which are common. DN outliers represent 18% of the TLEs with $e < 0.01$ and near critical inclination. Thus this association is confirmed by a Yule's Q value of 0.54. When the distance error is obtained from TLEs with $e \geq 0.01$ and near critical inclination, the outliers represent 34% of the corresponding TLEs, in which case Yule's Q of 0.78 also indicates a significant association. For KBM, outliers also represent 50% of TLEs near critical inclination with a significant Yule's Q of 0.89. The distributions of the eccentricity versus inclination of the full TLE catalogue and of the TLEs which correspond to DN and KBM outliers with distance error values above 1000 m are depicted in Figure 9. The number of outliers for a distance error above 1000 m detected in the DN and KBM cases is 261 and 27, respectively, 27 of which are common.

Next, the behaviour of the DN and KBM methods, starting from distance, along-track, cross-track, and radial

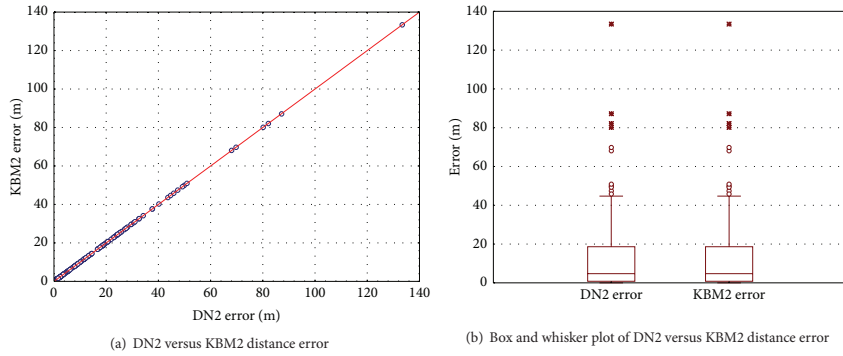


FIGURE 13: Comparison between DN2 and KBM2 distance errors near critical inclination for a time span of 7 days.

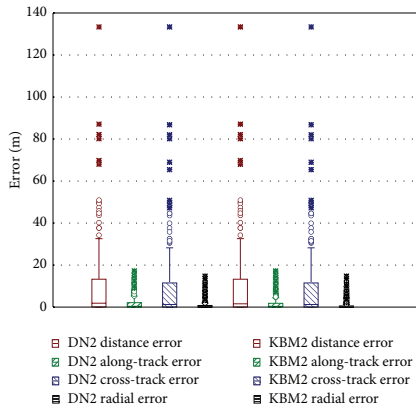


FIGURE 14: DN2 and KBM2 distance, along-track, cross-track, and radial errors near critical inclination for a time span of 7 days.

errors, is analyzed for TLEs with distance errors below 1000 m.

The histogram of DN distance error is shown in Figure 10(a). Figure 10(b) shows a box and whisker plot of the distance, along-track, cross-track, and radial errors. These data are classified as mentioned in the previous section. The most influential error for TLEs is found in the along-track component in all categories. The cross-track component is greater than the radial component for TLEs with $e \geq 0.01$ and $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$, whereas in the other two categories the radial component is greater than the cross-track component.

Figure 11(a) depicts the histogram of KBM distance error. Figure 11(b) shows a box and whisker plot of the distance,

along-track, cross-track, and radial errors. The behaviour of the three error components is the same as in the DN case.

The worst behaviour of the two methods is found for eccentricities below 0.01, although the behaviour is more robust in the case of DN than in KBM, as the asymmetries on the right of the histograms in Figures 10(a) and 11(a) show. Then a detailed study is presented to determine the range of influence of the eccentricity over the distance error. Catalogue data are classified into five sets: $e < 0.0015$, $0.0015 \leq e < 0.003$, $0.003 \leq e < 0.006$, $0.006 \leq e < 0.01$, and $e \geq 0.01$, which represent 16.26%, 11.97%, 15.05%, 12.84%, and 43.88% of the catalogue, respectively. Figure 12 shows a box and whisker plot analysis of the DN and KBM distance error. As can be seen, DN is worse than KBM for $e < 0.003$, in particular, 460 m versus 49 m in mean values, respectively, for $e < 0.0015$, and 189 m versus 57 m in mean values, respectively, for $0.0015 \leq e < 0.003$.

5. Outliers Near Critical Inclination

The number of TLEs with $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$ in the space catalogue considered in this study is 270, 58 of which have eccentricities below 0.01, and thus they are not taken into account with the Delaunay normalization method. Technically, the critical inclination singularity is directly related to the denominator $1 - 5\cos^2 i''$, which appears in the direct and inverse transformations of the elimination of the perigee. We must point out that this Lie transform is not valid in the neighborhood of $i = 63.45^\circ$ and $i = 116.56^\circ$.

In order to reduce the impact of the singularity over this transform, we replace the terms $1/x$ with

$$T2 = \frac{1 - e^{\beta x^2}}{x} = \beta x \sum_{n=0}^{12} (-1)^n \frac{\beta^n x^{2n}}{(n+1)!} \prod_{m=0}^{10} (1 + e^{-2^m \beta x^2}), \quad (3)$$

where $x = 1 - 5\cos^2 i''$ and $\beta = 100/2^{11}$. This solution is implemented in other analytical orbit propagator programmes (PPT2, HANDE, and AOP). DN2 and KBM2 will

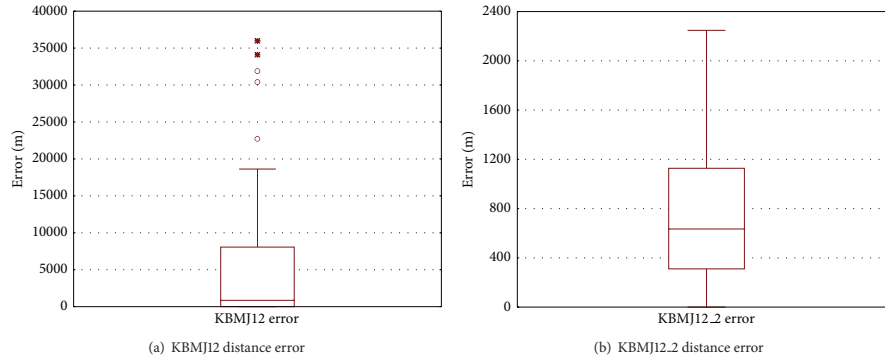


FIGURE 15: Box and whisker plot of the KBMJ12 and KBMJ12.2 distance errors near critical inclination for a time span of 7 days.

TABLE 3: Statistical parameters for DN and KBM distance errors (m) near critical inclination for a time span of 7 days.

	DN	KBM
Median	0.174277	0.173565
Minimum	0.000313	0.000313
Maximum	83620353	83620353
Q_1	0.083627	0.082587
Q_3	2.089765	2.089800
$Q_3 + 1.5 * (Q_3 - Q_1)$	5.098972	5.100619

TABLE 4: Statistical parameters for DN2 and KBM2 distance errors (m) near critical inclination for a time span of 7 days.

	DN2	KBM2
Median	4.735359	4.735458
Minimum	0.0000134	0.0000159
Maximum	133.4178	133.4178
Q_1	0.818214	0.816421
Q_3	18.63646	18.63655
$Q_3 + 1.5 * (Q_3 - Q_1)$	45.363828	45.366743

refer to the errors obtained with the modified analytical orbit propagator programme. It is worth noting that this modified propagator does not integrate Hamiltonian (1) exactly but is an approximation, which must be identified and its phase space needs to be characterized. The preliminary numerical analysis is here presented over a time span of 7 days. The first subsection studies the behaviour of DN2 and KBM2 near critical inclination in the case of J_2 - J_4 perturbations, while in the second subsection the Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky behaviour is analyzed only for J_2 - J_{12} perturbations.

5.1. J_2 - J_4 Perturbations. Data considered in this study correspond to TLEs with $e \geq 0.01$ and $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$. Several of these TLEs have distance errors above 10^7 m, and overflow values are obtained in two cases. Table 3 shows through statistical parameters that the behaviour of DN and KBM distance errors is similar in the considered TLEs.

Table 4 shows the values of the median, minimum, maximum, first and third quartiles, and the upper-whisker limit in the cases of DN2 and KBM2 distance errors for all TLEs with $e \geq 0.01$ and $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$, including the two data which generate overflows. Figure 13 shows that the behaviour in both cases is very similar. The maximum error is 133 m.

Tables 5 and 6 show that robustness is not obtained from a general improvement on estimates but from a proper calculation of original outliers. In fact, in 75% of the cases, the behaviour of both estimators is worse, but original outlier estimates have improved. 165 estimates obtained by the modified models in the nonoutlier cases are worse, between 0.37 m and 13.28 m in mean values, while the remaining 47 outliers and the two overflows have reduced to 8.2 m in mean value.

Figure 14 shows the box and whisker plot of DN2 and KBM2 distance errors; in this case the cross-track error is also the most influential as was seen in the previous general study for TLEs with $e \geq 0.01$ and $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$.

5.2. J_2 - J_{12} Perturbations. As can be seen in the previous subsection, the behaviour of the two integration methods is similar for the near critical inclination case. Therefore, we will only consider the Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky method to conduct the study when perturbations caused by zonal harmonic coefficients from J_2 to J_{12} are taken into consideration. We will refer to this model as KBMJ12, and KBMJ12.2 will be the modified analytical orbit propagator programme when (3) is taken into account.

The same previously studied 270 TLEs are considered here. Several of these TLEs have distance errors above 10^8 m,

TABLE 5: Statistical parameters for DN, DN2, KBM, and KBM2 distance errors (m) near critical inclination for a time span of 7 days in the nonoutlier cases.

	DN	DN2	KBM	KBM2
Mean	0.3742	13.275	0.3734	13.271
Median	0.1139	6.0134	0.1118	6.0146
Minimum	0.000313	0.000134	0.000313	0.000159
Maximum	3.6050	133.4178	83620353	80.1422

TABLE 6: Statistical parameters for DN, DN2, KBM, and KBM2 distance errors (m) near critical inclination for a time span of 7 days with outliers.

	DN	DN2	KBM	KBM2
Mean	4547873	8.2295	4547873	8.2285
Median	119.45	3.0804	119.45	3.0803
Minimum	5.1048	0.00131	5.1049	0.00135
Maximum	83620353	133.4178	83620353	80.1422

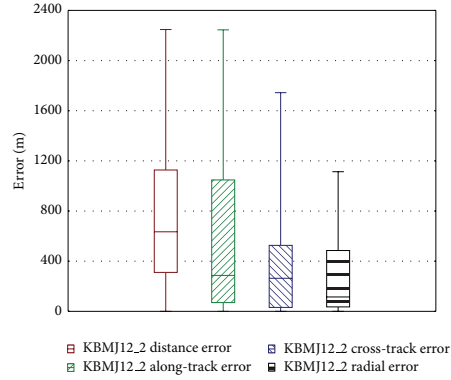


FIGURE 16: KBMJ12.2 distance, along-track, cross-track, and radial errors near critical inclination for a time span of 7 days.

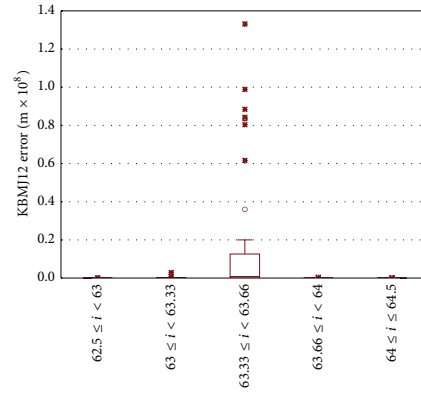


FIGURE 17: Box and whisker plot of the KBMJ12 distance error near critical inclination for a time span of 7 days.

and overflow values are obtained in ten cases. The values of the median, minimum, maximum, first and third quartiles, and the upper-whisker limit in the case of KBMJ12 distance error are 859.8631, 0.009345, 133147992, 9.32829, 8070.470, and 20162.18, respectively. Figure 15(a) shows a box and whisker plot of the KBMJ12 distance error in which only 5 out of 56 outliers were included.

The values of the median, minimum, maximum, first and third quartiles, and the upper-whisker limit in the case of KBMJ12.2 distance error for all TLEs, including the ten data which generate overflows, are 634.4462, 0.249139, 2247.630, 310.6079, 1127.350, and 2352.4631, respectively. Figure 15(b) shows a box and whisker plot for KBMJ12.2 distance error and as can be observed there are no outlier values.

Although the ephemeris generated by the second-order theory in the J_2-J_4 case provides good accuracy, this becomes worse when the number of zonal harmonics increases. The

same accuracy is only achieved if third-order effects are included. The estimation in 142 cases, including the ten overflow values, is better in KBMJ12.2, being 967 m in mean value, although it is worse in 128 cases, with mean values of 184 m and 503 m, as can be seen in Table 7. Another difference with respect to J_2-J_4 is that in J_2-J_{12} the main error is obtained in the along-track component, as can be seen in Figure 16.

Finally, a detailed study is presented to determine the range of influence of critical inclination. As might be expected, the behaviour of the analytical theory becomes worse in the neighborhood of near inclinations. This study is restricted to the interval $[62.5^\circ, 64.5^\circ]$, which has been divided into five subintervals. Figure 17 shows the distribution of the KBMJ12 distance error in the five subintervals. This distribution is similar in the case of J_2-J_4 perturbations. As can be observed, the errors produced by the analytical theory

TABLE 7: Statistical parameters for KBMJ12 and KBMJ12.2 distance errors (m) near critical inclination, for a time span of 7 days, classified according to the model with the best performance.

Model	Number of data	Mean	Median	Minimum	Maximum
KBMJ12	128	184.3634	6.6210	0.009345	1720.197
KBMJ12.2		503.3113	311.52	0.249139	1796.142
KBMJ12	142	5671673	7939.072	166.2859	133147992
KBMJ12.2		967	763.488	2.44315	2248

TABLE 8: Statistical parameters for KBMJ12 and KBMJ12.2 distance errors (m) near critical inclination.

i	Model	Number of data	Median	Minimum	Maximum
$62.5^\circ \leq i < 63^\circ$	KBMJ12	64	1651	0.027	35992
	KBMJ12.2		1474	1.93	2231
$63^\circ \leq i < 63.33^\circ$	KBMJ12	31	56799	0.015	2.8×10^6
	KBMJ12.2		836	0.85	2247
$63.33^\circ \leq i < 63.66^\circ$	KBMJ12	49	0.8×10^8	0.014	1.3×10^8
	KBMJ12.2		600	0.25	1200
$63.66^\circ \leq i < 64^\circ$	KBMJ12	71	400	0.015	4.3×10^5
	KBMJ12.2		446	0.5	1882
$64^\circ \leq i \leq 64.5^\circ$	KBMJ12	55	20.38	0.009	9495
	KBMJ12.2		438	2.13	1593

are greater in the interval $[63.33^\circ, 63.66^\circ]$, whereas in the rest of the intervals other large errors can be found.

Figure 18(a) compares the KBMJ12 versus KBMJ12.2 distance errors, whilst Figure 18(b) shows the box and whisker plot analysis for KBMJ12.2 distance errors in each subinterval. It can be seen that the modified analytical method KBMJ12.2 clearly improves the behaviour in the critical inclination subinterval. The same conclusion can be drawn from the comparison between KBMJ12 and KBMJ12.2 distance error statistical parameters shown in Table 8.

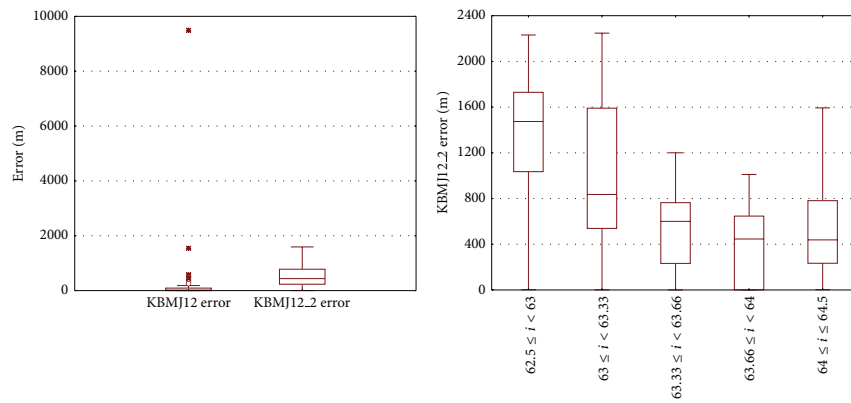
6. Conclusion and Future Work

A scalable closed-form analytical orbit propagator programme is being developed. In this paper, only zonal harmonic perturbation is considered. This perturbation can be handled by means of two analytical theories. Both are derived after removing the long-period perturbation terms due to the argument of the perigee. The first removes the short-period terms due to the mean anomaly, using the classical Delaunay normalization (DN), and then the transformed Hamiltonian is integrated by quadratures. It should be noted that Delaunay variables are used here. The second removes the short-period terms by means of the Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky method (KBM). This process is formulated in polar-nodal variables. In order to validate both models a TLE space catalogue is used. Although this input is only valid for SGP4, it can be considered a reliable set of initial conditions for validating our propagator. These data are classified into three sets: $e < 0.01$, $e \geq 0.01$ with $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$, and any other data. Then, an exploratory data analysis is

applied to analyze the errors produced by the propagation of the TLE catalogue through both analytical theories with respect to the numerical integration of the original problem. The considered perturbations are the J_2 - J_4 and J_2 - J_{12} effects for two time spans of 7 and 30 days.

When the TLEs are propagated over 7 days, the number of outliers is 2662 and 147 in the DN and KBM cases, respectively, 55 of which are common. DN outliers concentrate in two groups: low eccentricities, $e < 0.01$, and near critical inclinations, $e \geq 0.01$ with $62.5^\circ < i < 64.5^\circ$. Similarly, KBM outliers are also concentrated in two groups: near critical inclinations, and low inclinations, $i < 1.5^\circ$, with medium-high eccentricities, $e > 0.5$, which is a group of outliers with an error below 8 m. The critical inclination is handled using the approximation implemented in PPT2, HANDE, and AOP in the J_2 - J_4 and J_2 - J_{12} cases. Preliminary numerical analysis seems to be very promising in the inclination interval $(62.5^\circ, 64.5^\circ)$. In general, our conclusion is that KBM is clearly more robust than DN in 87% of the study cases over 7 days, and whenever DN is better than KBM, it is only slightly better. The behaviour of the polar-nodal variables is excellent in all cases and does not present any problem, not even when $e < 0.01$.

On the other hand, when TLEs are propagated over 30 days, the behaviour of the two methods is pretty good. The number of outliers detected in the DN and KBM cases for a distance error above 1000 m is 261 and 27, respectively, 27 of which are common. DN is worse than KBM only when $e < 0.003$; however, for the rest of the cases DN shows better behaviour than KBM, in contrast to the time span of 7 days. Both methods show worse behaviour near critical inclination, producing very high distance errors and two overflow cases.



(a) KBMJ12 versus KBMJ12.2 distance errors not showing KBMJ12 outliers above 10000 m

(b) KBMJ12.2 distance errors in each subinterval

FIGURE 18: Box and whisker plots of KBMJ12 and KBMJ12.2 distance errors near critical inclination for a time span of 7 days.

In the near future Delaunay variables will be replaced with nonsingular variables in our propagator so as to avoid the analyzed singularities, and third-order analytical theories for $m > 4$ perturbation will be generated. We will also analyze how using polynomial T_2 , (3), instead of $1/(1 - 5\cos^2 i'')$ may modify the original Hamiltonian and what its corresponding phase space may be. Tesseral influence will be the next perturbation to be included in our propagator.

Conflict of Interests

The authors declare that there is no conflict of interests regarding the publication of this paper.

References

- [1] K. Aksnes, "A second-order artificial satellite theory based on an intermediate orbit," *Astronomical Journal*, vol. 75, pp. 1066–1076, 1970.
- [2] D. Brouwer, "Solution of the problem of artificial satellite theory without drag," *The Astronomical Journal*, vol. 64, pp. 378–397, 1959.
- [3] H. Kinoshita, "Third-order solution of an artificial satellite theory," Special Report no. 379, Smithsonian Astrophysical Observatory, Cambridge, Mass, USA, 1977.
- [4] Y. Kozai, "Second-order solution of artificial satellite theory without air drag," *Astronomical Journal*, vol. 67, pp. 446–461, 1962.
- [5] F. R. Hoots and R. L. Roehrich, *Spacetrack Report #3: Models for Propagation of the NORAD Element Sets*, U.S. Air Force Aerospace Defense Command, Colorado Springs, Colo, USA, 1980.
- [6] D. A. Vallado, P. Crawford, R. Hujsak, and T. S. Kelso, "Revisiting spacetrack report #3," in *Proceedings of the AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference*, pp. 1984–2071, Keystone, Colo, USA, August 2006.
- [7] P. J. Cefola and D. J. Fonte, "Extension of the naval space command satellite theory PPT2 to include a general tesseral M-daily model," in *Proceedings of the AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference*, Paper AIAA-96-3606, pp. 306–327, San Diego, Calif, USA, July 1996.
- [8] "PPT2: The NAVSPASUR Model of Satellite Motion," NAVSPASUR Report 92-01, July 1992, Commander, NAVSPACECOM, Dahlgren, Va, USA; Attention: Logistics and Information Systems Division (Mail Code N4/6).
- [9] S. L. Coffey, H. L. Neal, A. M. Segerman, and J. J. Travisano, "An analytic orbit propagation program for satellite catalog maintenance," Paper AAS 1995-426, Halifax, Nova Scotia, Canada, 1995.
- [10] A. Deprit, "The elimination of the parallax in satellite theory," *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 24, no. 2, pp. 111–153, 1981.
- [11] K. T. Alfriend and S. L. Coffey, "Elimination of the perigee in the satellite problem," *Celestial Mechanics*, vol. 32, no. 2, pp. 163–172, 1984.
- [12] A. Deprit, "Delaunay normalisations," *Celestial Mechanics*, vol. 26, no. 1, pp. 9–21, 1982.
- [13] N. Krylov and N. N. Bogoliubov, *Introduction to Nonlinear Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1947.
- [14] N. N. Bogoliubov and Y. A. Mitropolsky, *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*, Gordon and Breach, New York, NY, USA, 1961.
- [15] J. W. Tukey, *Exploratory Data Analysis*, Addison Wesley, Reading, Pa, USA, 1977.
- [16] F. R. Hoots and R. G. France, "An analytic satellite theory using gravity and a dynamic atmosphere," *Celestial Mechanics*, vol. 40, no. 1, pp. 1–18, 1987.

- [17] S. L. Coffey, A. Deprit, and E. Deprit, "Frozen orbits for satellites close to an Earth-like planet," *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 59, no. 1, pp. 37–72, 1994.
- [18] J. A. Morrison, "Generalized method of averaging and the von Zeipel method," *Progress in Astronautics and Aeronautics*, vol. 17, pp. 117–138, 1966.
- [19] A. Abad, J. F. San-Juan, and A. Gavín, "Short term evolution of artificial satellites," *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 79, no. 4, pp. 277–296, 2001.
- [20] J. A. Caballero, *Movimiento de un satélite artificial bajo la acción gravitatoria terrestre. Teoría de segundo orden en variables de Hill [Ph.D. thesis]*, University of Zaragoza, 1975.
- [21] M. Calvo, *Aplicación del método de promedios al estudio del movimiento de satélites artificiales [Ph.D. thesis]*, University of Zaragoza, 1971.
- [22] J. F. San-Juan and S. Serrano, "ATESAT: revisited and improvements. Analytical theory and numerical validation for a SPOT-like satellite," Tech. Rep. DTS/MPI/MS/MN/2000-013, Centre National d'Etudes Spatiales, Toulouse, Francia, 2000.
- [23] J. F. San-Juan, L. M. López, and R. López, "MathATESAT: a symbolic-numeric environment in Astrodynamics and Celestial Mechanics," in *Computational Science and Its Applications—ICCSA 2011* vol. 6783 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 436–449, Springer, Berlin, Germany, 2011.
- [24] M. Sein-Echaluce, *Estudio comparativo de intermediarios radiales y su aplicación a la teoría del satélite artificial zonal [Ph.D. thesis]*, University of Zaragoza, 1986.
- [25] R. H. Lyddane, "Small eccentricities or inclinations in the Brouwer theory of the artificial satellite," *The Astronomical Journal*, vol. 68, pp. 555–558, 1963.
- [26] J. R. Dormand and P. J. Prince, "Practical Runge-Kutta processes," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 10, no. 5, pp. 977–989, 1989.

Bibliografía

- [1] Abad, A., San-Juan, J. F. and Gavín, A., “Short term evolution of artificial satellites,” *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 79, no. 4, pp. 277–296, 2001.
- [2] Aksnes, K., “A second-order artificial satellite theory based on an intermediate orbit,” *The Astronomical Journal*, vol. 75, pp. 1066–1076, 1970.
- [3] Alfriend, K. T. and Coffey, S. L., “Elimination of the perigee in the satellite problem,” *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 32, no. 2, pp. 163–172, 1984.
- [4] Bogoliubov, N. N. and Mitropolsky, Y. A., *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*, Gordon and Breach, New York, NY, USA, 1961.
- [5] Box, G. E. P. and Jenkins, G. M., *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco, CA, USA, 1976.
- [6] Brouwer, D., “Solution of the problem of artificial satellite theory without drag,” *The Astronomical Journal*, vol. 64, pp. 379–397, 1959.
- [7] Byrd, R. H., Lu, P. and Nocedal, J., “A limited memory algorithm for bound constrained optimization,” *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 16, no. 5, pp. 1190–1208, 1995.
- [8] Caballero, J. A., *Movimiento de un satélite artificial bajo la acción gravitatoria terrestre. Teoría de segundo orden en variables de Hill [Ph.D. Thesis]*, University of Zaragoza, 1975.
- [9] Calvo, M., *Aplicación del método de promedios al estudio del movimiento de satélites artificiales [Ph.D. Thesis]*, University of Zaragoza, 1971.
- [10] Cefola, P. J. and Fonte, D. J., “Extension of the Naval Space Command satellite theory PPT2 to include a general tesseral M-daily model,” in *Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Conference*, paper AIAA 96-3606, pp. 306–327, San Diego, CA, USA, July 1996.

- [11] Cefola, P. J., Phillion, D. and Kim, K. S., “Improving access to the semi-analytical satellite theory,” in *Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, AAS 09-341, Pittsburgh, PA, USA, August 2009.
- [12] Chan, K. and Ripley, B., “TSA: Time Series Analysis, R package version 1.01,” 2012, <http://CRAN.R-project.org/package=TSA>.
- [13] Coffey, S. L., Deprit, A. and Deprit, E., “Frozen orbits for satellites close to an Earth-like planet,” *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 59, no. 1, pp. 37–72, 1994.
- [14] Coffey, S. L., Neal, H. L., Segerman, A. M. and Travisano, J. J., “An analytic orbit propagation program for satellite catalog maintenance,” in *Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, paper AAS 1995-426, Halifax, Nova Scotia, Canada, 1995.
- [15] Cybenko, G., “Approximation by superpositions of a sigmoidal function,” *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 2, no. 4, pp. 303–314, 1989.
- [16] Danby, J. M., *Fundamentals of Celestial Mechanics*, Willmann-Bell, Richmond, VA, USA, 1988.
- [17] Deprit, A., “The elimination of the parallax in satellite theory,” *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 24, no. 2, pp. 111–153, 1981.
- [18] Deprit, A., “Delaunay normalisations,” *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 26, no. 1, pp. 9–21, 1982.
- [19] Dickey, D. A. and Fuller, W. A., “Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root,” *Journal of the American Statistical Association*, vol. 74, no. 366, pp. 427–431, 1979.
- [20] Dormand, J. R. and Prince, P. J., “Practical Runge-Kutta processes,” *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 10, no. 5, pp. 977–989, 1989.
- [21] Foresee, F. D. and Hagan, M. T., “Gauss-Newton approximation to Bayesian learning,” in *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, pp. 1930–1935, June 1997.
- [22] Forsythe, G. E., Malcolm, M. A. and Moler, C. B., *Computer Methods for Mathematical Computations*, Wiley, 1977.
- [23] Garfinkel, B., “Tesseral harmonic perturbations of an artificial satellite,” *The Astronomical Journal*, vol. 70, pp. 784–786, 1965.

- [24] Hagan, M. T. and Menhaj, M. B., “Training feedforward networks with the Marquardt algorithm,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 5, no. 6, pp. 989–993, 1994.
- [25] Hagan, M. T., Demuth, H. B. and Beale, M. H., *Neural Network Design*, PWS Publishing Company, Boston, MA, USA, 1996.
- [26] Hoots, F. R. and Roehrich, R. L., *Spacetrack Report #3: Models for Propagation of the NORAD Element Sets*, U.S. Air Force Aerospace Defense Command, Colorado Springs, CO, USA, 1980.
- [27] Hoots, F. R. and France, R. G., “An analytic satellite theory using gravity and a dynamic atmosphere,” *Celestial Mechanics*, vol. 40, no. 1, pp. 1–18, 1987.
- [28] Hornik, K., Stinchcombe, M. and White, H., “Multilayer feedforward networks are universal approximators,” *Neural Networks*, vol. 2, no. 5, pp. 359–366, 1989.
- [29] Hornik, K., “Approximation capabilities of multilayer feedforward networks,” *Neural Networks*, vol. 4, no. 2, pp. 251–257, 1991.
- [30] Hyndman, R. J. with contributions from Athanasopoulos, G., Razbash, S., Schmidt, D., Zhou, Z., Khan, Y. and Bergmeir, C., “Forecast: Forecasting functions for time series and linear models, R package version 4.8,” 2013, <http://CRAN.R-project.org/package=forecast/>.
- [31] Jarque, C. M. and Bera, A. K., “Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals,” *Economics Letters*, vol. 6, no. 3, pp. 255–259, 1980.
- [32] Kamel, A. A., “Perturbation method in the theory of nonlinear oscillations,” *Celestial Mechanics*, vol. 3, no. 1, pp. 90–106, 1970.
- [33] Kinkrad, H., *Space Debris: Models and Risk Analysis*, Springer-Praxis, Chichester, UK, 2006.
- [34] Kinoshita, H., “Third-order solution of an artificial satellite theory,” Special Report no. 379, Smithsonian Astrophysical Observatory, Cambridge, Mass, USA, 1977.
- [35] Kinoshita, H. and Nakai, H., “Numerical integration methods in Dynamical Astronomy,” *Celestial Mechanics*, vol. 45, no. 1, pp. 231–244, 1989.
- [36] Kozai, Y., “Second-order solution of artificial satellite theory without air drag,” *The Astronomical Journal*, vol. 67, pp. 446–461, 1962.

- [37] Krylov, N. and Bogoliubov, N. N., *Introduction to Nonlinear Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1947.
- [38] Liu, J. J. F. and Alford, R. L., “Semianalytic theory for a close-Earth artificial satellite,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 3, no. 4, pp. 304–311, 1980.
- [39] Ljung, G. M. and Box, G. E. P., “On a measure of lack of fit in time series models,” *Biometrika*, vol. 65, no. 2, pp. 297–303, 1978.
- [40] Long, A. C., Cappellari, J. O., Velez, C. E. and Fuchs, A. J., “Goddard Trajectory Determination System (GTDS),” Mathematical Theory Revision 1. CSC/TR-89/6001, 1989.
- [41] López, R., *Técnicas de computación científica aplicada al ámbito de la Mecánica Celeste y de la Astrodinámica [Ph.D. Thesis]*, University of La Rioja, 2015.
- [42] Lyddane, R. N., “Small eccentricities or inclinations in Brouwer theory of the artificial satellite,” *The Astronomical Journal*, vol. 68, pp. 555–558, 1963.
- [43] MacKay, D. J. C., “Bayesian interpolation,” *Neural Computation*, vol. 3, no. 4, pp. 415–447, 1992.
- [44] Morrison, J. A., “Generalized method of averaging and the von Zeipel method,” *Progress in Astronautics and Aeronautics*, vol. 17, pp. 117–138, 1966.
- [45] Neelon, J. G., Cefola, P. J. and Proulx, R. J., “Current development of the Draper semianalytical satellite theory standalone orbit propagator package,” in *Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Conference*, AAS Pre-print 97-731, Sun Valley, ID, USA, August 1997.
- [46] Nguyen, D. and Widrow, B., “Improving the learning speed of 2-layer neural networks by choosing initial values of the adaptive weights,” in *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN '90)*, vol. 3, pp. 21–26, June 1990.
- [47] Ortigosa, D., San-Juan, J. F., Pérez, I. and San-Martín, M., “Numerical validation of the Delaunay normalization and the Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky method,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, Article ID 927975, 14 pages, 2014.
- [48] Palit, A. K. and Popovic, D., *Computational Intelligence in Time Series Forecasting: Theory and Engineering Applications*, Springer, London, UK, 2005.

- [49] Pérez, I., San-Juan, J. F., San-Martín, M. and López-Ochoa, L. M., “Application of computational intelligence in order to develop hybrid orbit propagation methods,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, Article ID 631628, 11 pages, 2013.
- [50] “PPT2: The NAVSPASUR Model of Satellite Motion,” NAVSPASUR Report 92-01, July 1992. Available from Commander, NAVSPACE-COM, 5280 Fourth Street, Dahlgren, VA 22448-5300, USA; attention: Logistics and Information Systems Division (Mail Code N4/6).
- [51] R Development Core Team, *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2013, <http://www.R-project.org/>.
- [52] San-Juan, J. F., “ATESAT: automatization of theories and ephemeris in the artificial satellite problem,” Tech. Rep. no. CT/TI/MS/MN/94-250, CNES, Toulouse, France, 1994.
- [53] San-Juan, J. F., “ATESAT: review and improvements. Study of a family of analytical models of the artificial satellite generated by ATE-SAT and their numerical validation versus PSIMU and MSLIB,” Tech. Rep. no. DGA/T/TI/MS/MN/97-258, CNES, Toulouse, France, 1998.
- [54] San-Juan, J. F. and Serrano, S., “ATESAT: revisited and improvements. Analytical theory and numerical validation for a SPOT-like satellite,” Technical Report no. DTS/MPI/MS/MN/2000-013, Centre National d’Études Spatiales, Toulouse, Francia, 2000.
- [55] San-Juan, J. F., López, L. M. and López, R., “MathATESAT: A symbolic-numeric environment in Astrodynamics and Celestial Mechanics,” *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 6783, no. 2, pp. 436–449, 2011.
- [56] San-Juan, J. F., López, L. M., Ortigosa, D., Lara, M. and Cefola, P. J., “Comparison of Delaunay normalization and the Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky method,” in *Proceedings of the 22nd AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, AAS 12-218, pp. 1743–1759, Charleston, SC, USA, January–February 2012.
- [57] San-Juan, J. F., Pérez, I. and San-Martín, M., “Hybrid perturbation theories based on computational intelligence,” in *Proceedings of the 5th International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques*, 8 pages, Noordwijk, the Netherlands, May–June 2012.
- [58] San-Juan, J. F., San-Martín, M. and Pérez, I., “An economic hybrid J_2 analytical orbit propagator program based on SARIMA models,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2012, Article ID 207381, 15 pages, 2012.

- [59] San-Juan, J. F., San-Martín, M. and Pérez, I., “Hybrid perturbation methods. Modelling the J_2 effect through the Kepler problem,” in *Proceedings of the 25th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, AAS 15-207, Williamsburg, VA, USA, January 2015.
- [60] San-Juan, J. F., San-Martín, M., Pérez, I. and López, R., “Hybrid perturbation methods based on statistical time series models,” *Advances in Space Research*, in press, 2015.
- [61] San-Martín, M., *Métodos de propagación híbridos aplicados al problema del satélite artificial. Técnicas de suavizado exponencial [Ph.D. Thesis]*, University of La Rioja, 2014.
- [62] Sein-Echaluze, M., *Estudio comparativo de intermediarios radiales y su aplicación a la teoría del satélite artificial zonal [Ph.D. Thesis]*, University of Zaragoza, 1986.
- [63] Serrano, S., *Teorías analíticas del movimiento de un satélite artificial alrededor de un planeta. Ordenación asintótica del potencial en el espacio fásico [Ph.D. Thesis]*, University of Zaragoza, 2003.
- [64] Shanno, D., “Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization,” *Mathematics of Computation*, vol. 24, pp. 647–656, 1970.
- [65] Trapletti, A. and Hornik, K., “tseries: Time Series Analysis and Computational Finance, R package version 0.10-32,” 2013, <http://CRAN.R-project.org/package=tseries>.
- [66] Tukey, J. W., *Exploratory Data Analysis*, Addison Wesley, Reading, PA, USA, 1977.
- [67] Vallado, D. A., Crawford, P., Hujsak, R. and Kelso, T. S., “Revisiting Spacetrack Report #3,” in *Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, pp. 1984–2071, Keystone, CO, USA, August 2006.
- [68] Wertz, J. R. and Larson, W. J., *Space Mission Analysis and Design*, Microcosm & Kluwer, Torrance, CA, USA, 2007.
- [69] Winters, P. R., “Forecasting sales by exponentially weighted moving averages,” *Management Science*, vol. 6, no. 3, pp. 324–342, 1960.
- [70] Yule, G. U., “On the methods of measuring association between two attributes,” *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 75, no. 6, pp. 579–652, 1912.
- [71] Zhang, G., Patuwo, B. E. and Hu, M. Y., “Forecasting with artificial neural networks: the state of the art,” *International Journal of Forecasting*, vol. 14, no. 1, pp. 35–62, 1998.

-
- [72] Zhang, G. P., Patuwo, B. E. and Hu, M. Y., “A simulation study of artificial neural networks for nonlinear time-series forecasting,” *Computers & Operations Research*, vol. 28, no. 4, pp. 381–396, 2001.
- [73] Zhang, G. P., “An investigation of neural networks for linear time-series forecasting,” *Computers & Operations Research*, vol. 28, no. 12, pp. 1183–1202, 2001.
- [74] Zhang, G. P., “Neural networks for time-series forecasting,” in *Handbook of Natural Computing*, Rozenberg, G., Kok, J. N. and Bäck, T., Eds., pp. 461–477, Springer, Berlin, Germany, 2012.