

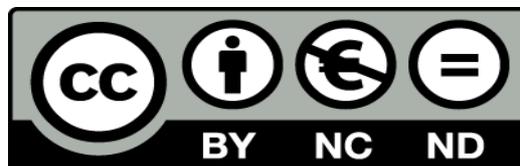


UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

Título
Formulación de la proyectividad matricial en homografía: aplicaciones homológicas y afines
Autor/es
Diego López Martínez
Director/es
Julio Blanco Fernández y Eduardo Martínez Cámara
Facultad
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial
Titulación
Departamento
Ingeniería Mecánica
Curso Académico
2014-2015

Existen circunstancias excepcionales que impiden la difusión de la versión íntegra de esta tesis. Por este motivo se difunden únicamente los contenidos que no están sujetos a confidencialidad



Formulación de la proyectividad matricial en homografía: aplicaciones homológicas y afines, tesis doctoral

de Diego López Martínez, dirigida por Julio Blanco Fernández y Eduardo Martínez Cámara (publicada por la Universidad de La Rioja), se difunde bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported. Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los titulares del copyright.



Universidad de La Rioja

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

TESIS DOCTORAL:

**FORMULACIÓN DE LA PROYECTIVIDAD MATRICIAL
EN HOMOGRAFIA: APLICACIONES HOMOLÓGICAS Y
AFINES.**

**(PROYECTIVE MATRIX APPROACH IN HOMOGRAPHY:
HOMOLOGY AND AFINITY APLICATIONS)**

**Presentada por DIEGO LÓPEZ MARTÍNEZ para optar al grado de doctor
por la Universidad de La Rioja.**

Dirigida por:

D. JULIO BLANCO FERNÁNDEZ

Dr. Ingeniero Industrial

D. EDUARDO MARTÍNEZ CÁMARA

Dr. Ingeniero Industrial.

**A Martina, Sofia, Mateo y..... por el tiempo y los cuentos que os he
robado**

A Virginia, por tu generosidad y tu forma de querer.

"La verdadera ciencia enseña, sobre todo, a dudar y a ser ignorante."

Ernest Rutherford.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a las personas e instituciones que han hecho posible la realización de esta Tesis Doctoral:

Desde el surgimiento de este trabajo hasta que vio la luz pública y dio sus primeros pasos el 9 de Septiembre de 1999, quiero y debo dar mi más sincero agradecimiento a Don Ricardo Bartolomé Ramírez (D.E.P.), por: la idea, “la obligación”, el seguimiento, la paciencia y la honradez, y tanto desde mi posición de alumno, como de colega recordarle con la más profunda admiración.

A Luis Español, en primer lugar por enseñarme una gran lección, saber dar sin recibir nada a cambio, por su gesto caballero y desinteresado, y en beneficio de este trabajo, por dotarme de la herramienta necesaria y de las explicaciones y enseñanzas que haya necesitado para llevarlo a buen fin.

A Carlos Molina Cisneros, porque aunque no ha sido parte directa en la realización del trabajo, me ha hecho sentirme dentro de la Universidad como un privilegiado, ejerciendo como un padre, advirtiéndome y enseñándome el camino a seguir. Por el saber y querer cuidar de mi, y por el gran aprecio que te tengo, ya no como alumno sino como amigo, muchas gracias.

A mi director de Tesis, director de Departamento, a mi jefe, Julio Blanco Fernández por casi todo, enseñanzas, cercanía, honestidad, por tener la paciencia necesaria conmigo y con esta tesis y saber apoyarme en todo momento.

A Emilio Jimenez Macias por ese último empujón, por saber llevarme de la mano hasta la meta cuando más cerca estaba y más lejos la veía. Por su apoyo incondicional y la confianza depositada.

A Mercedes por su ayuda en mi actividad investigadora, por mostrarme este mundo tan fantástico e infinito.

A Manuel Celso Juarez Castillo, compañero en muchas lides: Universidad, Junta del Colegio de Ingenieros Industriales de Aragón y La Rioja, por su aliento en la nuca y su cariño.

A la Universidad de La Rioja, por fomentar y facilitar el desarrollo de la actividad investigadora, por formarme y darme trabajo y por crear un espacio donde respiro felicidad.

A mis padres, por ser los mejores padres, por su ayuda, consejo, sacrificio y generosidad.

A mis hermanos, suegro, cuñados, sobrinos, tios, primos por su apoyo y su ánimo en todo momento.

A mis amigos, por preocuparse por mí y por los buenos ratos que hemos pasado.

Y por último, a mi mujer Virginia, mi inspiración, sin cuya fuerza, paciencia, generosidad e infinita comprensión esta Tesis no habría sido posible.

A todos ellos, muchas gracias.

Diego

RESUMEN

Esta tesis doctoral sobre la Proyectividad Matricial aplicado a la homología, pretende poner de manifiesto que la Geometría tiene una rama, llamada Geometría Proyectiva, que puede abordar, a través de cálculos algebraicos matriciales, la transformación homológica de elementos en sus homólogos.

El fin último trata de constatar que cada elemento que interviene en la homología puede ser plasmado a través de fórmulas matemáticas, con ayuda de las coordenadas homogéneas, que las mecánicas que en esta transformación homográfica intervienen, llevan intrínsecamente un mecanismo u operación matemática y, en definitiva, que el resumen de todos estos pasos desemboca en el hecho de controlar una transformación homológica particular, a través de una matriz 3×3 , que se desarrollará a lo largo del trabajo.

El resultado definitivo del trabajo fructifica en una matriz genérica, a partir de la cual se puede concretar algebraicamente una situación homológica particular y aprovechar esta concreción para establecer en fenómenos homograficos estrategias de resolución optimizadas.

La aplicación de las transformaciones homograficas tiene una importancia relevante y creciente en ambitos científicos practicos relacionados con la representación y/o captación visual. Desde estas perspectivas el avance matemático y conceptual que aquí se muestra puede generar mejoras en procedimientos de calibrado de maquinaria e instrumentación basados en física óptica. De igual forma se pretende constatar la reducción del error en estas actuaciones.

ÍNDICE GENERAL

I. BLOQUE I: INTRODUCCIÓN

1	OBJETIVO.....	2
2	DESCRIPCIÓN Y ESTRUCTURA DE LA INVESTIGACIÓN.....	7
3	ESTADO DEL ARTE.....	12

II. BLOQUE II: MARCO TEÓRICO

4	INICIACIÓN A LA PROYECTIVIDAD A TRAVES DE LA GEOMETRIA PROYECTIVA.....	26
	4.1 - COORDENADAS HOMOGÉNEAS.....	26
	4.2 - PLANO REGLADO. COORDENADAS TANGENCIALES.....	30
	4.3 - CASOS PARTICULARES DE LA HOMOGRAFÍA.....	33
	4.4 - INTRODUCCION AL ESPACIO PROYECTIVO.....	37

4.4.1 - ESPACIO AFIN. PLANO AFIN.	37
4.4.2 - COMPLECCION DEL ESPACIO AFIN Y RELACIONCON LAS COORDENADAS HOMOGENEAS.	40
4.4.3 - CAMBIO DE BASE.	41
4.4.4 – LA RAZON DOBLE COMO ARGUMENTO PROYECTIVO.	42
4.5 - TEOREMA DE DESARGUES.	46
4.6 - PRINCIPIO DE DUALIDAD.	49
4.6.1 – FORMAS GEOMÉTRICAS FUNDAMENTALES.	53
4.7 - PROYECTIVIDAD.	55
4.7.1 - PROPIEDADES PROYECTIVAS.	57
5 CONCEPTOS GENERALES DE LA HOMOGRAFÍA EN FORMAS DE SEGUNDO CATEGORIA.	58
5.1- ESTUDIO ANÁLITICO DE LOS ELEMENTOS DE UNA HOMOLOGIA	59
5.1.1 - LAS RECTAS LIMITE	
5.1.2 - LA RAZON DOBLE	
5.2 - ESTUDIO DE LOS ELEMENTOS DOBLES: EJE Y CENTRO DE HOMOLOGIA.	35
5.3 - IDENTIFICACION DE UNA HOMOLOGIA.	38

III. BLOQUE III: APORTACIONES METODIOLÓGICAS A LA OBTENCIÓN DE LA MATRIZ [M] DE TRANSFORMACIÓN.

6 DETERMINACIÓN DE LA MATRIZ [M].	2
6.1 – DETERMINACION DE LA MATRIZ [M] COLOCANDO V EN (0,1). .	15
6.2 – DETERMINACION DE LA MATRIZ [M] COLOCANDO V EN UN PUNTO ARBITRARIO (a, b).	17
6.3 – DETERMINACION DE LA MATRIZ [M] A TRAVES DE COORDENADAS POLARES.	18

7	COMPROBACIÓN DE LA SOLUCIÓN A TRAVÉS DE ALGEBRA LINEAL.	5
	5.1 – COMPROBACIÓN PARA EL CASO HOMOLÓGICO.	61
	5.2 – COMPROBACIÓN PARA EL CASO AFÍN.	68

IV. BLOQUE IV: APLICACIÓN Y ESTUDIO DE CASOS.

8	TRANSFORMACIÓN DE UNA HOMOLOGÍA GRÁFICA EN UNA ANALÍTICA.	2
	8.1 – FORMAS DE DEFINICIÓN DE UNA HOMOLOGÍA.	15
	8.1.1 – CENTRO, EJE Y UNA RECTA LÍMITE.	
	8.1.2 – EJE, CENTRO Y UN PAR DE ELEMENTOS HOMÓLOGOS.	
	8.1.3 – CENTRO, EJE Y VALOR DE LA CARACTERÍSTICA	
	8.1.4 – TRES PARES DE PUNTOS HOMOLOGOS	
	8.1.5 – EJE, RECTAS LÍMITE Y UN PAR DE RECTAS HOMÓLOGAS.	
	8.1.6 – DOS PARES DE PUNTOS HOMOLOGOS Y LA DIRECCION DEL EJE.	
9	APLICACIONES.	98
	9.1– COMPROBACIÓN GRÁFICO-ANALÍTICA DE LA TRANSFORMACIÓN DE UN CUADRILÁTERO EN UN CUADRADO.	61
	9.2 – COMPROBACIÓN GRÁFICO-ANALÍTICA DE LA TRANSFORMACIÓN DE UN CUADRILATERO EN UN TRAPECIO.	68
	9.3 – COMPROBACIÓN GRÁFICO-ANALÍTICA DE LA TRANSFORMACIÓN DE UNA CIRCUMFERENCIA.	75
	9.4 – COMPROBACIÓN GRÁFICO-ANALÍTICA DE LA TRANSFORMACIÓN DE UNA CIRCUMFERENCIA EN PARABOLA.	80
	9.5 – COMPROBACIÓN GRÁFICO-ANALÍTICA DE LA TRANSFORMACIÓN DE UNA CIRCUMFERENCIA EN HIPÉRBOLA.	95

V. BLOQUE V: CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS.

10	PRINCIPALES APORTACIONES.....	100
11	APORTACIONES ORIGINALES.....	105
12	POSIBLES LINEAS DE DESARROLLO FUTURO.....	125

REFERENCIAS

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Caricatura sobre la sensación de profundidad	3
1.2	Viñeta gráfica acerca del error de representación plana de la profundidad	4
2.1	Estructura de la Tesis	10
3.1	“A Draftsman Making a Perspective Drawing of a Woman” Albrecht Dürer	16
3.2	“Draughtsman Drawing a Lute” Albrecht Dürer	17
3.3	Imagen pintada en la calle con tiza, generando una falsa perspectiva	20
3.4	Misma imagen pintada en la calle con tiza, vista desde otro lado.	21
3.5	Símbolo de MathWorks.	24
4.1	Representación de coordenadas homogéneas	27
4.2	Representación básica de una homología	34

4.3	Representación de dos rectas paralelas en el plano afín.	40
4.4	Razón doble para el caso particular del haz de rectas.	45
4.5	Teorema de Desargues.	47
4.6	Teorema de desargues para triángulos coplanarios y no coplanarios.	48
4.7	Demostración del Principio de dualidad I.	51
4.8	Demostración del Principio de dualidad II.	52
4.9	Biyección entre entre la serie de puntos de corte del haz de rectas y las tangentes a la cónica que se pueden trazar desde ellos.	54
4.10	Planos con elementos de la misma naturaleza: Homografía	56
4.11	Planos con elementos de la misma naturaleza: Correlación	57
4.12	Propiedades proyectivas	57
5.1	Propiedades de las rectas límite	60
5.2	Planteamiento gráfico inicial de la razón doble	62
5.3	Variación del valor de la razón doble con el punto no fijo P.	63
5.4	Característica de una homología λ	64
5.5	Característica de una homología λ , con valor negativo.	65
5.6	Pertenencia del punto doble al plano proyectivo.	69
5.7	Identificación homológica. Caso 1º: Tres raíces reales simples	71
5.8	Identificación homológica. Caso 2º: Una raíz simple y una doble	73
5.9	Identificación homológica. Caso 3º: Una raíz triple.	76
6.1	Determinación de la matriz [M] colocando V en (0,1).	81
6.2	Simplificación de la recta límite en el espacio proyectivo	86
6.3	Analogía con la razón doble	88
6.4	Cuaterna armónica.	90

6.5	Determinación de la matriz $[M]$ colocando v en (a,b) .	94
6.6	Deducción gráfica de la variable k	100
6.7	Determinación de la matriz $[M]$ a través de coordenadas polares	103
7.1	Esquema de resolución de homología a través de álgebra lineal	116
7.2	Intersección de las rectas del proceso.	117
7.3	Esquema para el caso particular de que la recta que pasa por A sea perpendicular.	123
8.1	Sistema de coordenadas de partida	127
8.2	Valor gráfico de la variable k	128
8.3	Comprobación gráfica de la solución	130
8.4	Representación gráfica de los datos para ejemplo de definición a través del centro, el eje y una recta límite.	132
8.5	Representación gráfica de los datos para ejemplo de definición a través del centro, el eje y un par de puntos homólogos.	133
8.6	Representación gráfica de los datos para ejemplo de definición a través de tres puntos homólogos.	135
8.7	Representación gráfica de los datos para ejemplo de definición a través de eje, rectas límite y un par de rectas homólogas.	137
8.8	Representación gráfica de los datos para ejemplo de definición a través de dos pares de puntos homólogos y la dirección del eje	139
9.1	Representación gráfica de las características que definen la homología, para la transformación de un cuadrilátero en cuadrado.	141
9.2	Transformación completa de un cuadrilátero en un cuadrado homológicamente.	142
9.3	Representación gráfica-analítica de las características que definen la homología, para el cálculo matricial de la transformación de un cuadrilátero en cuadrado.	143

9.4	Datos y características del cuadrilátero dado y del trapecio isósceles homólogo.	148
9.5	Ubicación del centro de homología V debe ser el punto donde se cortan los arcos capaces de 60° y 120° .	149
9.6	Resolución gráfica de la transformación de un cuadrilátero en un trapecio.	150
9.7	Representación gráfica-analítica de las características que definen la homología, para el cálculo matricial de la transformación de un cuadrilátero en trapecio.	151
9.8	Representación gráfica de las características que definen la homología, para la transformación de una circunferencia en una elipse	157
9.9	Resolución gráfica de la transformación de un circunferencia en una elipse.	158
9.10	Representación gráfica de las características que definen la homología, para la transformación de una circunferencia en una parábola.	164
9.11	Resolución gráfica de la transformación de un circunferencia en una parábola.	165
9.12	Representación gráfica de las características que definen la homología, para la transformación de una circunferencia en una hipérbola	173
9.13	Resolución gráfica de la transformación de un circunferencia en una hiperbola.	174
9.14	Comprobación de las direcciones-solución de las asintotas en la transformación de un circunferencia en una hiperbola.	178

Bloque I

Introducción

Contenidos

1	OBJETIVO Y DESCRIPCIÓN DE LA INVESTIGACIÓN.	1
2	ESTRUCTURA DE LA INVESTIGACIÓN.	5
3	ESTADO DEL ARTE.	7

Capítulo 1

Objetivo de la investigación.

Piensa geoméricamente y prueba algebraicamente (*Think geometrically, prove algebraically [1]*), tal vez esta asertación del matemático norteamericano John Torrence Tate, sea la frase que condensa la esencia del trabajo de tesis que aquí se desarrolla.

Seguramente el dibujante de la viñeta que en la imagen inferior se muestra, tenía claro que las dos líneas de los carriles fugaban hasta tocarse en el infinito, perdiéndose en una representación de profundidad que invita a pensar que la vía se estrecha. Pero lo que seguramente no tendría tan claro es la cadencia de las traviesas.



Figura 1.1 Caricatura sobre la sensación de profundidad.

Las relaciones geométricas tienen conexiones tan fuertes con la representación gráfica, que ha día de hoy, es imposible pensar en la representación visual, sin el apoyo de los axiomas matemáticos y mucho menos en la representación gráfica computerizada sin la ayuda de mecanismos de transformación gráfico sustentados en algoritmos informáticos con base geométrica.

Este vínculo se ha estudiado con profusión y profundidad en todos los campos de la geometría plana, con menor importancia en la del espacio y en la descriptiva. Tal vez por la reducida aplicabilidad de estas en comparación con la primera.

La realidad es que el manejo de estas técnicas tiene abundantes aplicaciones en los campos de la óptica y la visión en general, además de las irremplazables herramientas informáticas que manejan representaciones en 2D, simulando 3 dimensiones. La generación de NURBS y otras curvas complejas, basan su

propiedad esencial en la invariabilidad por transformaciones proyectivas, por poner un ejemplo.



Figura 1.2 Viñeta gráfica acerca del error de representación plana de la profundidad.

La principal aportación de este trabajo de tesis comprende la obtención de un mecanismo de transformación matemático de aplicación en la geometría gráfica y más concretamente en la geometría descriptiva. Una herramienta que le permita a nuestro ilustrador colocar a la distancia adecuada las traviesas de la vía al pasar de una representación tridimensional a una bidimensional.

Una herramienta que aplicada en ambitos donde la geometría descriptiva, en el campo de las transformaciones homográficas permita reducir el error de sus cálculos y construcciones apoyandose en invariabilidad de puntos característicos de estas mecánicas. Los puntos dobles infieren a la matriz de transformación un mayor grado de refinamiento matemático y una reducción sustancial del error.

La calibración de aparatos ópticos, la medición de distancias en Astronomía, son disciplinas que demandan este tipo de soluciones y que por consiguiente se pueden beneficiar de la optimización matemática que en esta tesis se presenta.

Ahora bien, no es valdi comentar que en algunas de las situaciones reales a las que se hace referencia, en la mejora y optimización de procesos de medición, calibración, etc... se puede encontrar una gran complicación a la hora de determinar esos elementos característicos homográficos.

Por ejemplo en una representación centrada cónica en la que el sol es el centro homográfico, para el cálculo de sombras, la distancia de este a nuestro elemento base puede encontrarse fuera de escala en una opertiva natural. Los ejes, rectas límite, son piezas de una mecánica que en la mayoría de los casos no tiene una materialización razonable.

Dicho lo cual, lejos de pensar que los logros de este estudio no tienen una transferencia lógica al ambito práctico de la ciencia, se comprobará como el estudio de casos puede lograr mejoras como por ejemplo los movimientos, la medición, o la referenciación en robótica. De la misma forma se puede valorar su validez, como ya se ha comentado, en la representación y creación de NURBS y curvas complejas.

Por otro lado el desarrollo de líneas de trabajo a futuro y derivadas de esta tesis, pueden replantear problemas como el que se enuncia con la no materialización de elementos importantes de la geoemtría, dando pie a nuevos planteamientos o a elementos auxiliares que mantengan el nivel de compromiso entre la autenticidad matemática y la flexibilidad práctica que demande la realidad.

Por último, aunque ya se ha comentado que la principal contribución es un mecanismo matemático de transformación gráfica, como conclusión de esta primera parte se debe terminar diciendo que el mayor tributo de la tesis es la

metodología, la forma de obtención, la instrumentalización matemática en favor de la búsqueda de unos resultados.

Las líneas de desarrollo futuro que se plantean en los capítulos finales de la tesis, quedan enmarcadas en la búsqueda de mejoras en la matemática de estas transformaciones, asistidos por la metodología que se desarrolla en esta tesis. Para lo cual se antoja indispensable la inmersión total en un campo que es el de la geometría proyectiva que, con toda su dificultad, encierra una lógica tan atractiva para la investigación como la de la propia descriptiva.

Capítulo 2

Descripción y estructura de la investigación.

En este trabajo se han estudiado la proyectividad entre formas de primera y segunda especie, para con ayuda de las coordenadas homogéneas, pasar del espacio y plano afin al espacio y plano proyectivo. Lugar donde desarrollaremos la teoría metodológica del trabajo.

Se fundamenta la razón doble como demostración de esta herramienta gráfica dentro de la teoría proyectiva. A continuación, se presenta el teorema de Desargues como hito de especial relevancia de la proyectividad para llegar al principio de dualidad entre dos espacios proyectivos, demostrando que los elementos que lo componen constituyen una biyección, y en último término como no podría ser de otra forma, muestran la validez del Teorema de Desargues.

Se continúa estableciendo las propiedades proyectivas y estudiando estas en los elementos de segunda especie propios de una homología: rectas límite, ejes y centro de homología, para posteriormente utilizarlos como elementos dobles (eje y centro de homología) en la obtención de la matriz de transformación.

Una vez conocemos las reglas proyectivas de los elementos de la transformación se comenzará con la construcción de la matriz de cálculo, no sin antes establecer las pautas que identifican una homología y sus posibles soluciones en base al rango de la misma.

El núcleo del trabajo consiste en despejar cada una de las nueve incógnitas que se dan en la matriz de transformación y que generan los homólogos de los puntos base a partir de situaciones hipotéticas controladas.

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}; \text{ salvo proporcionalidad.}$$

A partir de este punto como se comentan se plantean puntos del espacio proyectivo, es decir representados por sus coordenadas homogéneas, para multiplicados por la matriz de transformación conseguir sus homólogos.

La inclusión de puntos conocidos así como sus homólogos hace posible ir resolviendo parte de las incógnitas de la matriz. Al igual que la aplicación de los elementos dobles y las propiedades proyectivas que resuelven la otra parte de los elementos incógnita.

La utilización de diferentes sistemas de coordenadas han hecho que la solución sea todavía más versátil y aplicable a situaciones y planteamientos varios. En esta línea se está trabajando para concretar los valores de la matriz de transformación en aplicaciones afines y de esta forma ampliar la generalidad de la transformación a toda la homografía.

A modo de complemento se ha creído conveniente la comprobación, desde un punto de vista teórico, a través de álgebra lineal de la validez de la solución obtenida.

El estudio de los diferentes casos homológicos, comienza con la adecuación de las diferentes formas de definir esta transformación en la matriz que se acaba de determinar, y para ello se repasan las seis formas genéricas de concreción.

Por último se resuelven una serie de casos típicos desde dos puntos de vista: el gráfico y el analítico, contrastando los resultados y dotando de rigidez la validación de la herramienta conseguida. Para la conclusión analítica de las transformaciones se ha hecho mano del software de resolución matemática Matlab.

Queda por último, rematar la labor investigadora con los artículos que se están realizando para su entrega y presentación en revistas del ámbito de la investigación.

Estructura de la investigación

La estructura de la presente Tesis se puede observar en la Figura 2.1

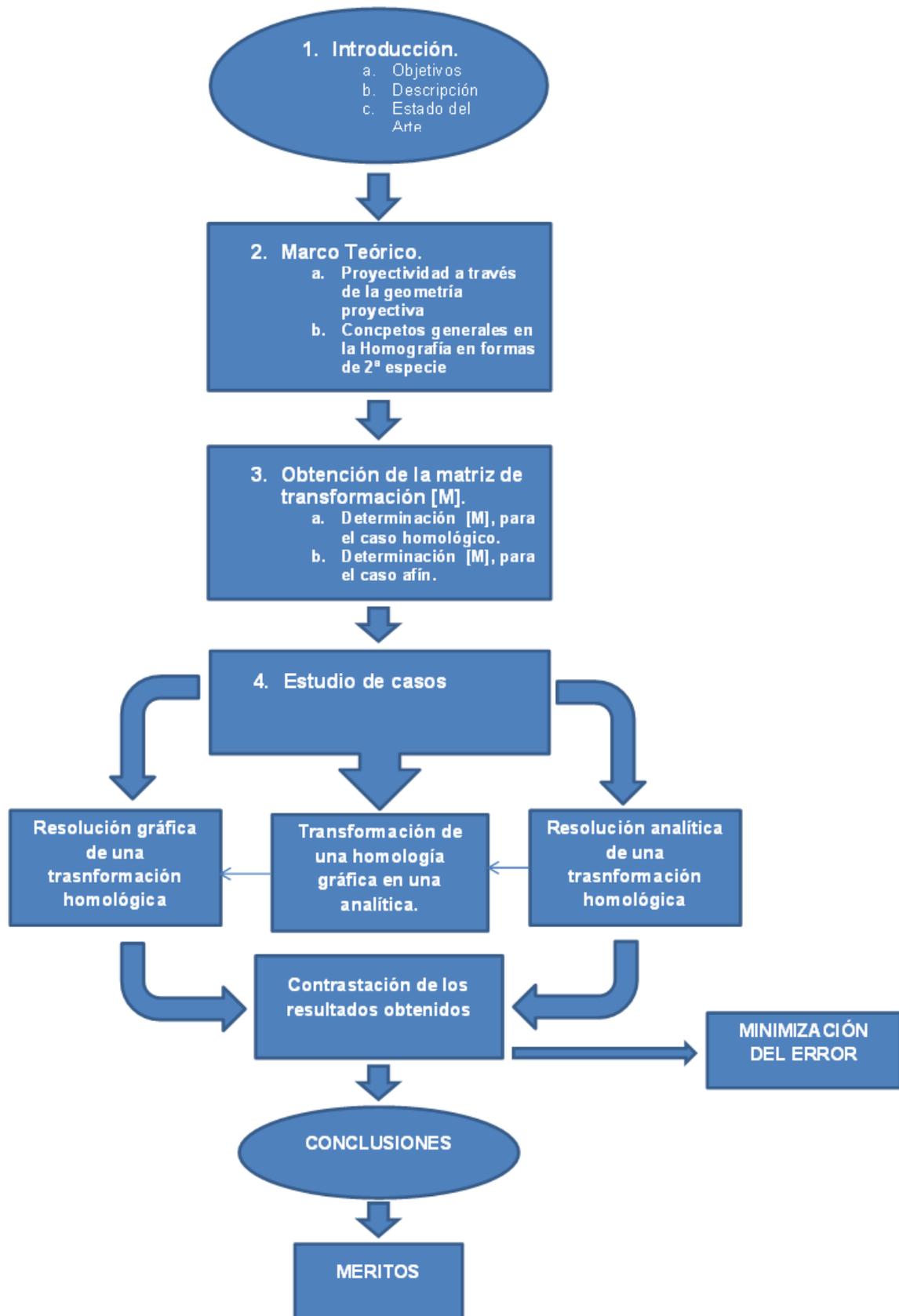


Figura 2.1. Estructura de la Tesis

Es, por último necesario comentar que la aplicabilidad de los logros metodológicos son viables en el espacio de la homografía en general, como conjunto de transformaciones de la geometría descriptiva. Por lo tanto aunque las aplicaciones, el estudio de casos y varias de las comprobaciones se han desarrollado solo para la homología, se está trabajando en la extrapolación de las conjunciones matemáticas de esta tesis, para el caso afin, incluido como se sabe, dentro del espacio homográfico.

Capítulo 3

Estado del arte.

Como se sabe la geometría es una de las ramas de las matemáticas que mayor profusión han tenido en el mundo académico. De ahí que se conozcan de una forma superficial por un elevado porcentaje de la población científica. Lo que es más inusual, por la limitada necesidad de abordar temas de este ámbito en estudios e investigaciones, es conocer con mayor profusión las diferentes ramas de esta disciplina.

Para definir la geometría podemos utilizar, de partida, la definición que nos ofrece el diccionario de la Real Academia de la Lengua, en el que se dice: “parte de las matemáticas mediante la cual se estudian las propiedades y las medidas de las figuras en el plano y en el espacio”.

A partir de aquí se distinguen varias clases de geometría:

- **Algebraica ó algorítmica.** Aplicación del álgebra a la geometría para, por medio del cálculo, resolver ciertos problemas de la extensión.
- **Analítica.** Estudio de figuras mediante un sistema de coordenadas y métodos de análisis matemático.
- **Plana.** Se consideran las figuras cuyos puntos están todos en un plano.
- **Del espacio.** Se estudian las figuras cuyos puntos no están todos en un mismo plano.
- **Proyectiva.** Se tratan las proyecciones de las figuras sobre un plano.
- **Descriptiva.** Parte de las matemáticas que tiene por objeto resolver los problemas de la **geometría** del espacio por medio de operaciones efectuadas en un plano y representar en él las figuras de los sólidos, la cual suministra las bases del dibujo técnico.

Una vez discriminadas las diferentes ramas de la geometría, habrá que centrarse en la parte que nos va a proporcionar las herramientas y axiomas necesarios para establecer el marco teórico por donde discurre este trabajo: la geometría proyectiva. Por otro lado la descriptiva aportará la base gráfica que queremos comprobar.

En primer lugar dando una definición más precisa, se puede decir que se llama **geometría proyectiva** a la rama de la matemática que estudia las propiedades de incidencia de las figuras geométricas, pero abstrayéndose totalmente del concepto de medida.

Entrar a investigar las bases teóricas de la geometría proyectiva conlleva dos complicaciones: tratar de interpretar notaciones y conceptos puramente matemáticos desde un posicionamiento más pragmático como el que exige la

obtenidos con las salidas gráficas generadas por métodos de dibujo. Aunque las operaciones que se han abordado son sencillamente cálculos matriciales, planteables con cualquier hoja de cálculo, se ha elegido MATLAB por su fácil manejabilidad y por la posibilidad de traer su código de una forma fiable en la parte de contrastación de resultados.



Figura 3.5. Símbolo de MathWorks.

Bloque II

Marco teórico

Contenidos

4 INICIACIÓN A LA PROYECTIVIDAD A TRAVÉS DE LA GEOMETRIA PROYECTIVA.	26
4.1 - COORDENADAS HOMOGENEAS.	26
4.2 - PLANO REGLADO. COORDENADAS TANGENCIALES.	30
4.3 - CASOS PARTICULARES DE LA HOMOGRAFÍA.	33
4.4 - INTRODUCCION AL ESPACIO PROYECTIVO.	37
4.5 - TEOREMA DE DESARGUES.	46
4.6 - PRINCIPIO DE DUALIDAD.	49
4.7 - PROYECTIVIDAD.	55
5 CONCEPTOS GENERALES DE LA HOMOGRAFÍA EN FORMAS DE SEGUNDO CATEGORIA.	58
5.1- ESTUDIO ANÁLITICO DE LOS ELEMENTOS DE UNA HOMOLOGIA	59
5.2 - ESTUDIO DE LOS ELEMENTOS DOBLES: EJE Y CENTRO DE HOMOLOGIA.	65
5.3 - IDENTIFICACIÓN DE UNA HOMOLOGÍA.	68

Capítulo 4

Iniciación a la proyectividad a través de la geometría proyectiva

4.1. COORDENADAS HOMOGÉNEAS

Las coordenadas homogéneas surgen, en el estudio de la Proyectividad, como una necesidad a la hora de abordar elementos y operaciones que utilizan el concepto de infinito.

La idea tradicional de coordenadas hace pensar en una biyección entre los puntos del plano y el conjunto de elementos \mathbf{R}^2 , de tal forma que a cada punto del plano se le asigna una pareja de coordenadas y viceversa.

El fallo de esta biyección, si se utiliza el infinito, es patente al tratar un punto de la recta, por ejemplo $y = 2x$, que esté en el infinito, nuestro razonamiento le

daría las coordenadas (∞, ∞) , las mismas que al punto del infinito de la recta $y = x$, siendo puntos diferentes. Además ∞ , no es un número operable.

Razones por las que aparecen las coordenadas homogéneas, en las que se les asigna a cada punto P del plano, no dos coordenadas (x, y) , sino tres (x, y, t) , a partir de las coordenadas tradicionales del punto, de forma que entonces quedarían $(x/t, y/t)$.

Esto permite dar coordenadas a todos los puntos del plano, incluidos los del infinito, con las ventajas que esto conlleva.

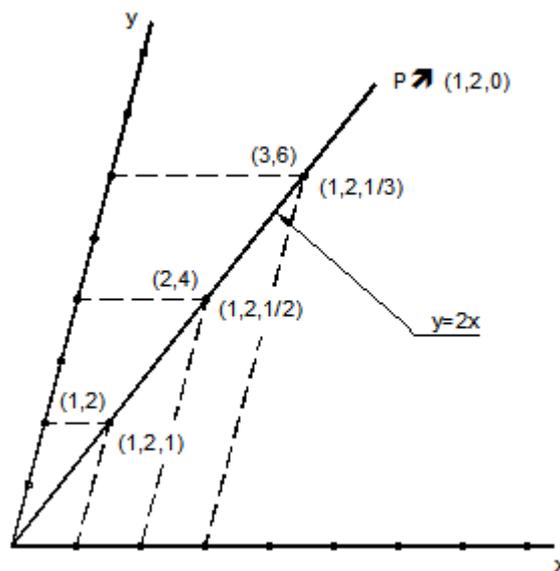


Figura 4.1. Representación de coordenadas homogéneas.

Ahora se debe cambiar la mentalidad y asignar a cada punto del plano no solo una terna (x, y, t) , sino todo un subespacio vectorial \mathbf{R}^3 de dimensión uno, debido a la proporcionalidad numérica de las ternas.

El subespacio \mathbf{R}^3 , queda dividido en 2 categorías, según se trate la tercera coordenada t .

ejemplo los puntos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ de una figura F están sobre una misma recta, sus proyecciones $P'_1, P'_2, P'_3, \dots, P'_n$, estarán asimismo en alguna recta.

2ª Propiedad: “La proyectividad conserva la razón doble de cuatro elementos homólogos

3ª Propiedad: “La razón doble que forman los elementos dobles y una pareja cualquiera de homólogos es una constante de estos que se denomina característica”. Es una propiedad que se desprende de la anterior y que será fundamental para el estudio que se realizará en páginas siguientes.

Capítulo 5

Conceptos generales de la homografía en formas de segunda categoría.

Lo normal en el estudio homográfico de los citados planos, entre los que se establece la proyectividad, es que se haga con ellos superpuestos, por lo que se presenta la posibilidad de elementos dobles. El número y distribución de los elementos dobles establece las diferentes homografías.

Una recta doble no está compuesta de puntos dobles sino que, a lo sumo, tendrá dos, en el caso de que haya más se tratará de una identidad, estructura compuesta en su totalidad por puntos dobles, y que recibe comunmente el nombre de eje.

Tampoco son dobles todas las rectas que pasan por puntos dobles, sino que, a lo sumo, serán dos, en el caso de que haya más de dos rectas dobles que pasan por el punto, se estará ante el caso en el que el punto es el centro.

También es una afirmación veraz y demostrable la que establece que en toda homografía entre planos punteados (o reglados), si existe un eje, hay un centro y viceversa.

5.1.- ESTUDIO ANALITICO DE LOS ELEMENTOS DE UNA HOMOLOGÍA

5.1.1.- LAS RECTAS LÍMITE

Son las homólogas de la recta del infinito de cada plano. Gráficamente se determinan trazando la recta que une los homólogos de dos puntos del infinito de cada figura. Dada la ecuación de la homografía:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ t \end{Bmatrix}$$

Si se hace que los puntos de la recta tengan en coordenadas homogéneas $t'=0$, para que pertenezca al infinito, entonces la ecuación de la recta límite será:

$$a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot t = 0$$

La otra recta límite ℓ' será la conseguida en la transformación inversa.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ t \end{Bmatrix} = [M]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{Bmatrix}$$

Caso 4º.- Caso de raíces imaginarias

Se refiere al caso en el que la ecuación característica tenga como solución dos raíces imaginarias y una real.

Bloque III

Aportaciones metodológicas a la obtención de la matriz [M] de transformación.

Contenidos

6 DETERMINACION DE LA MATRIZ [M].	82
6.1 – DETERMINACION DE LA MATRIZ [M] COLOCANDO v EN (0,1). . .	84
6.2 – DETERMINACION DE LA MATRIZ [M] COLOCANDO v EN UN PUNTO ARBITRARIO (a, b).	97
6.3 – DETERMINACION DE LA MATRIZ [M] A TRAVES DE COORDENADAS POLARES.	106
7 COMPROBACIÓN DE LA SOLUCIÓN A TRAVÉS DE ALGEBRA LINEAL.	114
5.1 – COMPROBACIÓN PARA EL CASO HOMOLÓGICO.	114
5.2 – COMPROBACIÓN PARA EL CASO AFÍN.	124

Capítulo 6

Determinación de la matriz [M].

Se considera este punto como el núcleo del trabajo puesto que es la búsqueda de esta matriz la que hace desarrollar la mayor parte, tanto de la teoría expuesta como de los cálculos y aplicaciones. Se sabe que la homografía, como proyectividad entre formas de una misma especie plantea, la siguiente ecuación

$$[M] \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{Bmatrix} \quad [1]$$

como forma analítica de su transformación espacial. También se sabe que esta matriz [M], es de dimensiones 3x3. Lo que se desconoce son sus componentes lo que hace que [M] se plantee considerando cada elemento como una incógnita:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}; \text{ salvo proporcionalidad.}$$

A partir de este punto se plantearán 3 casos para su determinación con el fin de conocer ésta matriz bajo ciertas condiciones. El modo operativo que se desarrollará en cada uno de ellos va a ser el mismo.

Sea cual sea la situación homográfica, existen ciertos puntos dobles que en el caso de la homología se sitúan en el centro (V) y a lo largo del eje (e). Por lo tanto, la aplicación de la transformación homográfica nos tiene que dar, como imagen de estos puntos dobles, una identidad con ellos mismos tanto de un modo gráfico como analítico.

Las incógnitas en la matriz [M] son 9, por lo que se necesitan 3 ternas de puntos dobles en donde aplicar la ecuación [1] para conseguir 9 ecuaciones. Pero se olvida el factor de proporcionalidad, que al no influir en los cálculos, infiere 3 grados más de indeterminación, por lo que se necesita otro punto más al que aplicar la ecuación [1], y así conseguir 12 ecuaciones sobre 9 incógnitas y 3 factores proporcionales.

De igual manera, en los tres casos estudiados, se tomarán los 4 puntos más cómodos para el cálculo, razón por la cual las matrices solución serán presentadas de forma sencilla. Estos 4 puntos serán: el centro de homología y tres puntos situados sobre el eje.

Las coordenadas tangenciales presentan una opción considerable dentro de las transformaciones homográficas, por lo que serán incluidas en el estudio.

De los tres casos que se presentarán; el primero sitúa el centro V en el punto (0,1) de un sistema de referencia acomodado a la homología. Este primer caso constituye una situación puntual, no genérica, que se aproxima al estudio del segundo caso el cual sitúa el centro V en (0, q). El tercer caso utiliza las

$$x + y \cdot \operatorname{tg} \alpha + k \cdot t - \frac{p \cdot t}{\cos \alpha} = 0$$

en coordenadas absolutas.

$$x + y \cdot \operatorname{tg} \alpha + k - \frac{P}{\cos \alpha} = 0$$

La lectura de estas ecuaciones muestra propiedades de la homología que ya se conocían. La recta límite ℓ , contiene el parámetro α para la orientación, que será el mismo que para el del eje, pero su distancia no está en función de la posición del eje sino del V y por el contrario en la recta límite ℓ' , interviene la inclinación α que será igual para todas, y un parámetro de distancia en función del eje, de tal forma que se cumpla: que la distancia del centro de homología a la recta límite ℓ sea igual que la distancia del eje a la recta límite ℓ' .

Nota: A lo largo de este capítulo, 6, se ha desarrollado el cálculo para la determinación de la matriz de transformación, M, en el cual se utilizó la constante k, que posteriormente se ha visto coincide con la característica de la homología. Actualmente se tiende a denominar a la característica de una homología con la letra λ , por lo que a partir de aquí se denominará a esta magnitud según la tendencia actual y su valor se sustituirá en el lugar de la constante k.

Capítulo 7

Comprobación de la solución a través de algebra lineal.

7.2.- COMPROBACIÓN PARA EL CASO HOMOLÓGICO.

La homología, o más concretamente su proceso gráfico, constituye, además de la herramienta necesaria para conseguir una operación homográfica que se ajusta a unas propiedades, un proceso geométrico susceptible de ser tratado algebraicamente.

En este estudio no se ha puesto en entredicho las mecánicas gráficas homológicas, sino que se han utilizado como guía para comprobar nuestros resultados analíticos. Una vez más se utilizarán con este fin pero tratadas

algebraicamente de forma analítica es decir, se llevarán los mecanismos a fórmulas matemáticas con el fin de que estas expresiones también corroboren los resultados matriciales a los que se está llegando.

Las condiciones de partida son las que se vienen utilizando; un sistema de referencia que alberga su eje de abscisas en el eje homológico y, un eje de ordenadas que contiene al centro V. A partir de aquí planteamos la siguiente cuestión: Dado un punto A con coordenadas (m, p), obtenemos un resultado a través de cálculo matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & \frac{k-1}{q} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ p \cdot k \\ \left(\frac{k-1}{q}\right) \cdot p + 1 \end{pmatrix}$$

Que en coordenadas absolutas se consigue tras dividir esta terna solución entre un valor igual a la tercera coordenada, de tal manera que su nueva forma tenga la unidad como coordenada t, para que así sea directamente equiparable a las coordenadas absolutas:

$$\begin{pmatrix} m \\ p \cdot k \\ \left(\frac{k-1}{q}\right) \cdot p + 1 \end{pmatrix} \div \left(\left(\frac{k-1}{q}\right) \cdot p + 1\right) = \begin{pmatrix} \frac{m}{\left(\frac{k-1}{q}\right) \cdot p + 1} \\ \frac{p \cdot k}{\left(\frac{k-1}{q}\right) \cdot p + 1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se pueden poner de forma más cómoda las coordenadas de A'

$$A' \begin{pmatrix} \frac{m}{\left(\frac{k-1}{q}\right) \cdot p + 1} \\ \frac{p \cdot k}{\left(\frac{k-1}{q}\right) \cdot p + 1} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{m \cdot q}{(k-1) \cdot p + q} \\ \frac{k \cdot p \cdot q}{(k-1) \cdot p + q} \\ 1 \end{pmatrix}$$

De lo que se trata es de comprobar este mismo resultado por medio del álgebra lineal. Se inicia el proceso a partir de un esquema como el de la Figura 7.1.

$$\xi = \frac{q}{k-1} \quad A' \Rightarrow \left(\frac{m}{\frac{p}{\xi} + 1}, \frac{k \cdot p}{\frac{p}{\xi} + 1} \right) \Rightarrow \left(\frac{\xi \cdot m}{p + \xi}, \frac{k \cdot \xi \cdot p}{p + \xi} \right)$$

Comprobando su pertenencia a la recta HH' se habrá solventado el caso particular, por ello se sustituyen las coordenadas de A' en la ecuación [2]:

$$\frac{\frac{m \cdot \xi}{p + \xi} - m}{0 - m} = \frac{\frac{k \cdot \xi \cdot p}{p + \xi} - 0}{k \cdot \xi - 0}$$

$$\frac{\xi \cdot m - m \cdot (p + \xi)}{-m \cdot (p + \xi)} = \frac{k \cdot \xi \cdot p}{k \cdot \xi \cdot (p + \xi)}$$

$$\frac{\xi \cdot m - m \cdot p - \xi \cdot m}{-m \cdot (p + \xi)} = \frac{k \cdot \xi \cdot p}{k \cdot \xi \cdot (p + \xi)}$$

$$\frac{p}{(p + \xi)} = \frac{p}{p + \xi}$$

Con esto queda también demostrado para este caso particular

7.2.- COMPROBACIÓN PARA EL CASO AFÍN.

Actualmente se está trabajando en la determinación de la matriz M de transformación, con el fin de validarla para la otra mecanica importante, la afinidad, y obtener de esta forma una solución genérica que sirviese para la homografía en general.

Por lo tanto sería lógico el que la comprobación algebraica pudiese ser valida para la mecánica afín.

Bloque IV

Aplicaciones y estudio de casos.

Contenidos

8 TRANSFORMACION DE UNA HOMOLOGIA GRAFICA EN UNA ANALITICA.	126
8.1 – FORMAS DE DEFINICION DE UNA HOMOLOGIA.	131
9 APLICACIONES.	125
9.1– COMPROBACION GRAFICO-ANALITICA DE LA TRANSFORMACION DE UN CUADRILATERO EN UN CUADRADO. ...	127
9.2 – COMPROBACION GRAFICO-ANALITICA DE LA TRANSFORMACION DE UN CUADRILATERO EN UN TRAPECIO.	128
9.3 – COMPROBACION GRAFICO-ANALITICA DE LA TRANSFORMACION DE UNA CIRCUMFERENCIA.	130
9.4 – COMPROBACION GRAFICO-ANALITICA DE LA TRANSFORMACION DE UNA CIRCUMFERENCIA EN PARABOLA. ...	140
9.5 – COMPROBACION GRAFICO-ANALITICA DE LA TRANSFORMACION DE UNA CIRCUMFERENCIA EN HIPERBOLA. ...	165

Capítulo 8

Transformación de una homología gráfica en una analítica.

Después de haber hallado la matriz, que establece la relación matricial entre dos puntos homólogos, se demostrará, con un ejemplo, la aceptación de sus resultados.

Se parte de la conocida matriz genérica de transformación M ,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & \frac{k-1}{q} & 1 \end{pmatrix}$$

y del sistema planteado, a partir del cual se dedujo esta matriz.

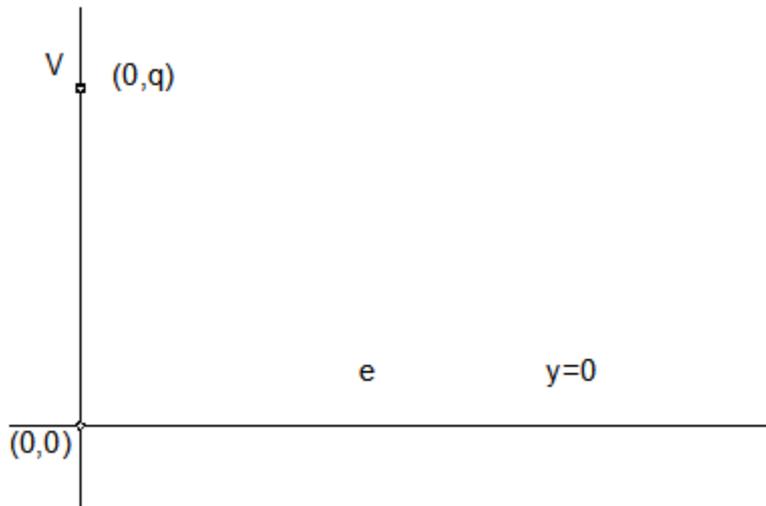


Figura 8.1. Sistema de coordenadas de partida

Se plantean varias posibilidades para definir la homología. Las opciones, que más tarde se estudiarán puntualmente, son las siguientes:

- a) El centro, el eje y la recta límite
- b) Eje, centro y un par de puntos homólogos.
- c) El centro, el eje, y el valor de la característica (λ)
- d) Tres pares de puntos homólogos.
- e) Eje, rectas límite y un par de rectas homólogas.
- f) Dos pares de puntos homólogos y la dirección del eje

La realidad admite que todas estas formas de definición de una homología están íntimamente relacionadas a través de las propiedades de la geometría homográfica.

Se tomará la primera opción de definición, por ser la de uso más frecuente. Los datos son: el eje (e), el centro (V) y la recta límite (ℓ). El eje y el centro ya están situados inicialmente por lo que sólo habrá que colocar la recta límite (ℓ). La ubicación de ésta puede situarse en infinitas posiciones, condicionando con cada

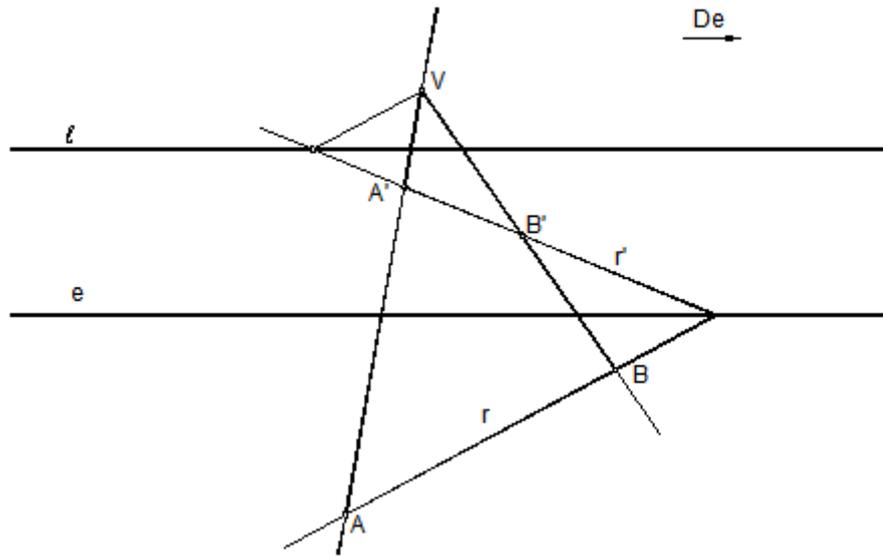


Figura 8.8. Representación gráfica de los datos para ejemplo de definición a través de dos pares de puntos homólogos y la dirección del eje.

Capítulo 9

Aplicaciones.

9.1.- COMPROBACION GRAFICO-ANALITICA DE LA TRANSFORMACION DE UN CUADRILATERO EN UN CUADRADO

El siguiente apartado quiere ser un ejemplo práctico del estudio que se está realizando sobre proyectividad matricial aplicada a la homología. Se trata de ver que la transformación homológica de un cuadrilátero en un cuadrado tiene la posibilidad de tratarse gráfica y analíticamente, existiendo una relación tanto entre los elementos homológicos y la matriz de transformación como, por supuesto, entre los resultados conseguidos mediante uno y otro método.

9.2.- COMPROBACION GRAFICO-ANALITICA DE LA TRANSFORMACION DE UN CUADRILATERO EN UN TRAPECIO

El trapecio es una figura conocida geoméricamente y, a través de sus relaciones internas, se puede diseñar una homología capaz de convertir la figura inicial en un trapecio de las condiciones pedidas. Las relaciones sobre las que se tendrá que actuar son: el paralelismo entre base mayor y base menor y los ángulos entre las bases y los lados no paralelos.

Aplicación práctica:

Por lo tanto y, como se ha dejado entrever anteriormente, para este ejercicio disponemos como datos de partida de los vértices de un cuadrilátero.

En la figura figura 9.4 aparecen los datos y características del cuadrilátero dado y del trapecio isósceles homólogo.

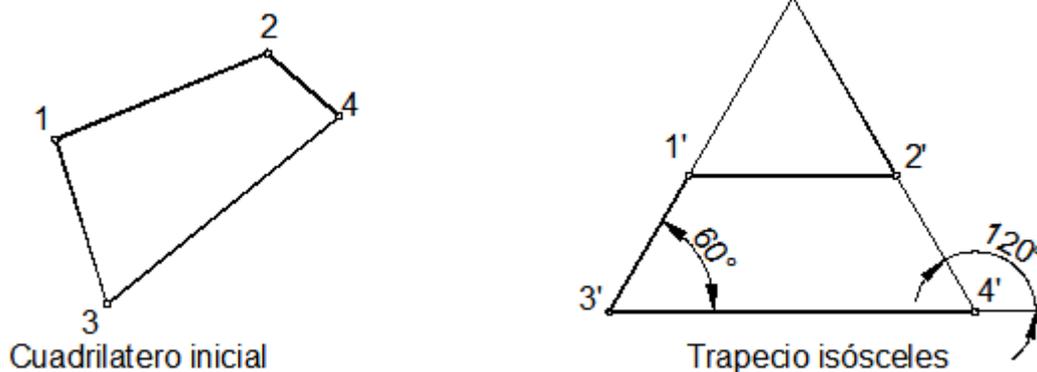


Figura 9.4. Datos y características del cuadrilátero dado y del trapecio isósceles homólogo.

La recta límite de la homología pasará por la intersección de los lados 12 y 34, por tener que transformarse en paralelos y por lo tanto cortarse en el infinito. El centro de homología V debe ser el punto donde se cortan los arcos capaces de

9.3.- COMPROBACION GRAFICO-ANALITICA DE LA TRANSFORMACION DE UNA CIRCUNFERENCIA EN ELIPSE

La primera aplicación, que se realizará en el tema referente a las cónicas homológicas de la circunferencia, será aquella que consigue transformarla en una elipse. Se sabe que una circunferencia se transforma en una cónica diferente, en función de la disposición de los elementos de la homología. Para conseguir, como figura homóloga, una elipse, la condición que se le impone a la circunferencia es, que no tenga ningún punto en común con la recta límite ya que, de esta forma, ninguno de los puntos homólogos de la circunferencia será impropio.

Aplicación práctica:

Dada una circunferencia de centro C y los elementos homológicos: recta límite (ℓ), eje (e) y centro de homología (V). Hallar la transformada de la misma y comprobar analíticamente los resultados.

1º Resolución gráfica

Los puntos, cuya comprobación se llevará acabo son los vértices de dos diámetros conjugados de la circunferencia, que posteriormente se transformarán en los vértices de los ejes de la elipse solución. Se denominarán a tales puntos T1, T2, T3 y T4. Las coordenadas de estos puntos y las de sus homólogos una vez completada la operación gráfica son los siguientes:

$$T1 (29.019, 15.9045) \rightarrow T1' (43.8747, -17.34)$$

$$T2 (-2.4981, 28.2480) \rightarrow T2' (-6.2670, -51.1030)$$

$$T3 (14.0149, 31.5809) \rightarrow T3' (42.7727, -69.5051)$$

$$T4 (-5.3318, -1.5193) \rightarrow T4' (-5.1648, 1.0613)$$

9.4.- COMPROBACION GRAFICO-ANALITIA DE LA TRANSFORMACION DE UNA CIRCUNFERENCIA EN PARABOLA

En caso de que la circunferencia sea tangente en un punto a la recta límite, la transformación homológica tendrá como solución una parábola en la que los ramales, que se alargan hasta el infinito, representan la discontinuidad a que da lugar este punto tangente. Los extremos de la figura homóloga fugan hasta el infinito, en la dirección del eje de la parábola, lugar donde supuestamente se encontrarán.

Aplicación práctica:

Dados los elementos homólogos fundamentales como son: eje (e), recta límite (ℓ) y centro de homología (V), una circunferencia tangente a la recta límite, se transforma en parábola y para su determinación habrá de obtenerse, el eje, la directriz, el vértice y el foco. Obtenida la solución, se tratará de comprobar analíticamente el resultado.

1º Resolución gráfica

Los puntos que se eligieron para realizar la comprobación del ejercicio son puntos utilizados para la construcción de la parábola y, tanto ellos como sus homólogos, son representados a continuación por medio de sus coordenadas:

$$\begin{aligned} & . V (19.9355, 20.5698) \rightarrow M' (29.9091, -17.7440) \\ & . M (50.0940, 23.9279) \rightarrow M' (81.8397, -224764) \\ & . 2 (10.8020, 35.1159) \rightarrow 2' (25.0786, -46.8756) \\ & . N (52.3042, 26.8584) \rightarrow N' (92.6409, -27.3521) \\ & . L (53.7745, 29.5676) \rightarrow L' (103.2793, -32.6512) \\ & . P (54.8536, 32.4175) \rightarrow P' (115.6099, -39.2838) \end{aligned}$$

9.5.- COMPROBACION GRAFICO-ANALITICA DE LA TRANSFORMACION DE UNA CIRCUNFERENCIA EN HIPERBOLA

La tercera de las transformaciones homológicas de una circunferencia es la que la convierte en una hipérbola. La característica de la transformación consiste en que la circunferencia a transformar deberá ser cortada por la recta límite, ya que de esta forma dos puntos de la circunferencia tendrán sus homólogos en el infinito, lo que hace que la figura homóloga quede dividida en dos ramas.

Aplicación práctica:

Dada una circunferencia de centro C y los elementos homológicos: recta límite (l), eje (e) y centro de homología (V), de tal forma que la recta límite sea secante a la circunferencia dada; hallar la transformada de la misma y comprobar analíticamente sus resultados.

1º Resolución gráfica.

De la circunferencia, los puntos que han sido seleccionados para su comprobación son los que a continuación se muestran acompañados de sus correspondientes homólogos, obtenidos mediante operaciones gráficas:

- . P (7.0998, 14.4423) → P' (11.9018, -9.4193)
- . M (20.1953, 9.7592) → M' (27.7290, -5.1484)
- . N (27.9919, 12.3663) → N' (42.7486, -7.3263)
- . L (34.8208, 20.8608) → L' (83.4601, -19.4527)
- . R (1.8805, 26.4746) → R' (7.2567, -39.9860)

La homología se presenta gráficamente a través de los elementos siguientes.
Figura 9.12:

Bloque V

Conclusiones y desarrollo futuro.

Contenidos

10	PRINCIPALES APORTACIONES.....	182
11	APORTACIONES ORIGINALES.....	186
12	POSIBLES LINEAS DE DESARROLLO FUTURO.....	188

Capítulo 10

Principales aportaciones.

La geometría proyectiva y su aplicabilidad a la geometría descriptiva, es parte de una disciplina de la que se han asentado las bases y las directrices fundamentales desde los tiempos de Rene Desargues (s. XVII). Aunque es en los últimos 10 años donde se han establecido estrechas relaciones prácticas.

Sin embargo, no en muchas ocasiones se ha mirado desde una perspectiva tan técnica, un asunto a priori, perteneciente al ámbito matemático. Si de algo puede pecar la ingeniería en temas matemáticos, lejos claro está del capítulo de la investigación, es de su pragmatismo.

La geometría descriptiva y proyectiva, confieren como se ha dicho bases teóricas para las ciencias exactas y en el presente trabajo las herramientas para conseguir una relación real, práctica y precisa entre los números y los grafos.

El estudio de la geometría descriptiva en ingeniería no ha dejado de lado un sentimiento de escasa renta para la vida real. Un paso más allá de la escuadra y el cartabón, coavitan disciplinas como la óptica, la astronomía o la propia representación gráfica a través de ordenador, para la cual son indispensables cualquiera de las dos ramas de la geometría.

La principal aportación de esta tesis, consiste en dotar de los mecanismos de obtención de la matriz de transformación de un punto en su homólogo, conociendo datos propios de la conversión geométrica en cuestión, apoyándose en la existencia de puntos de especial importancia que reducen la complejidad de la misma.

Más que la propia matriz, el método para alcanzar la definición matemática de la homografía en particular, contribuye considerablemente a abordar técnicas, problemas y situaciones de una manera más rápida y eficaz.

Los algoritmos empleados hasta el momento actual en la técnica de la calibración, requieren de pares de puntos homólogos pertenecientes al objeto y a su proyección. Dichas duplas, parten de información testeada manualmente, lo cual supone la adquisición de errores relativos y/o absolutos de cara a establecer conseguir la ley de transformación intrínseca a ambos.

Si estas operativas, basan la composición de la matriz de transformación, en puntos cuya principal característica es la inmutabilidad proyectiva, simplifican cuantiosamente el número de elementos a recoger y por lo tanto el error asociado.

La simplificación que, que tanto en coordenadas cartesianas como polares, ha conseguido que una transformación homológica quede caracterizada por dos variables (k y q para este estudio), constituye la sintetización intrínseca de los esfuerzos de caracterización de este tipo de operaciones gráficas, así como la reducción de los errores sufragados en operaciones posteriores.

El error cuadrático medio, valor consensuado para establecer criterios de calibración en maquinaria óptica, puede verse reducido si se consigue definir correctamente los puntos proyectivos dobles a los que se hace alusión en este trabajo y contrastar puntos homologos por medio de la matriz generada con estos elementos y la metodología expuesta.

Capítulo 11

Aportaciones originales.

Se resumen en los siguientes puntos algunas de las aportaciones originales que surgen fruto del desarrollo de la presente tesis:

- Desarrollo de una metodología para la determinación de la matriz de transformación que gobierna un mecanismo de geométrica descriptiva como son la homología y la afinidad.
- Caracterización de una transformación homológica a través de dos variables (k, q) relativas a la posición de los elementos geométricos en un plano determinado.
- Estudio de los parámetros de definición de transformaciones homográficas, aportando a estos la posibilidad de incluir directa o indirectamente los parámetros geométricos deducidos matemáticamente.
- Estudio de casos prácticos donde se aplica la metodología desarrollada, obteniendo:

- La validez de la transformación matemática, con referencia a la transformación gráfica.
 - La validez de la transformación gráfica, con referencia a la transformación matemática.
 - Error cometido en la operación homográfica utilizando cualquiera de las dos direcciones.
 - Análisis y minimización del error cuadrático medio en mecanismo de calibración.
-

Capítulo 12

Posibles líneas de desarrollo futuro.

Algunas de las líneas de trabajo para desarrollos futuros, relacionados con los resultados y aportaciones de esta tesis, son los siguientes:

- Aplicación de la metodología de obtención de
- Determinación de los errores de calibración ...

Estos desarrollos son en algunos casos laboriosos, porque implican la reestructuración del proceso teórico y numérico, pero factibles en general. No se ha considerado necesario incluirlos en esta Tesis y se plantean como futuras líneas de estudio que la completarían, en tanto en cuanto se podrían tener planteadas todas las tipologías geométricas relacionadas con la homografía y las diferentes formas y opciones que plantean a la hora de definirse.

REFERENCIAS

- [1] Jean Gallier: Geometric Methods and Applications. For Computer Science and Engineering.
- [2] Julian Lowell Coolidge: A History of Geometrical Methods, Dover, N. York, 2003.
- [3] Hubert Damisch: El origen de la perspectiva. Alianza Ed., Madrid, 1997.
- [4] W. M. Ivins, Jr.: Art and Geometry. A study in space intuitions. Dover, N. York, 1964.
- [5] Marin Kemp: La ciencia del arte. La óptica en el arte occidental de Brunelleschi a Seurat. Ed. Akal, Madrid, 2000.
- [6] Dan Pedoe: La Geometría del Arte. Ed. Gustavo Gili, Barcelona, 1979.
- [7] Leonardo da Vinci: Tratado de la Pintura. Ed. Akal, Madrid, 2007.
- [8] Heinrich Wölfflin: Conceptos fundamentales de la Historia del Arte. Ed. Optima, Barcelona, 2002.
- [9] Susana Woodford: Cómo mirar un cuadro. Ed. Gustavo Gili, Barcelona, 2004.
- [10] Brannan, David A.; Esplen, Matthew F. ; Gray, Jeremy J.: Geometry. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [11] Coxeter, H. S. M.: Fundamentos de Geometría, Limusa, 1988.
- [12] Frenkel, J.: Géométrie pour l'élève-professeur. Hermann, 1973.
- [13] J.M. Rodríguez Sanjurjo, J.M. Ruiz Sancho: Geometría Proyectiva. Addison-Wesley, 1998.
- [14] L.A. Santaló: Geometría proyectiva E.U.D.E.B.A. 1966.
- [15] R. I. Hartley, A. Zisserman: Multiple View Geometry in Computer Vision. Cambridge University Press, 2004.
- [16] Y. Ma, S. Soatto, J. Kosecká, S. Shankar Sastry: An Invitation to 3-D Vision.

Springer, New York, 2004.

- [17] I. Herman: *The Use of Projective Geometry in Computer Graphics*. Springer, Berlin, 1992.
- [18] D.A. Forsyth, J. Ponce, *Computer vision—a modern approach*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [19] R. Hartley, A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, UK, 2000.
- [20] D.C. Brown, Close-range camera calibration, *Photogrammetric Engineering* 37 (8) (1971) 855–866.
- [21] P.F. Sturm, S.J. Maybank, On plane-based camera calibration: a general algorithm, singularities, applications, *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'99)*, Fort Collins, CO, June 1 (1999) 23–25.
- [22] D. Liebowitz, A. Zisserman, Metric rectification for perspective images of planes, *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'98)*, Santa Barbara, June 1998; 482–488.
- [23] L. Lucchese, S.K. Mitra, Using saddle points for subpixel feature detection in camera calibration targets, *Proceedings of the 2002 Asia Pacific Conference on Circuits and Systems*, Singapore, December 2002;.
- [24] J.-Y. Bouguet, Camera calibration toolbox for Matlab, http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/, November 2001.
- [25] L. Lucchese, Estimating the pose and focal length of a camera from the perspective projection of a planar calibration plate, *Proceedings of the Fifth IASTED International Conference on Signal and Image Processing (SIP 2003)*, Honolulu, Hawaii, August 2003; 201–206.
- [26] L. Lucchese, Digital camera calibration. Part I: internal and external geometry from multi-view alignment, *Proceedings of the 3rd IASTED International Conference on Visualization, Imaging, and Image Processing (VIIP 2003)*, Benalma´dena, Spain, September III (2003) 1061–1065.
- [27] L. Lucchese, Digital camera calibration. Part II: camera model, subpixel feature extraction, and algorithm initialization, *Proceedings of VIIP 2003*, Benalma´dena, Spain, September III (2003) 1066–1070.
- [28] C.C. Slama, *Manual of Photogrammetry*, 4th ed, American Society of

Photogrammetry, Falls Church, VA, 1980.

- [29] Y.I. Abdel-Aziz, H.M. Karara, Direct linear transformation into object space coordinates in close-range photogrammetry, Proceedings of the Symposium on Close-Range Photogrammetry, Urbana-Champaign, IL, January 1971; 1–18.
- [30] R.Y. Tsai, A versatile camera calibration technique for high accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf cameras and lenses, IEEE Journal of Robotics and Automation RA-3 (4) (1987) 323–344.
- [31] R.K. Lenz, R.Y. Tsai, Techniques for calibration of the scale factor and image center for high accuracy 3D machine vision metrology, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 10 (5) (1988) 713–720.
- [32] J. Weng, P. Cohen, M. Herniou, Camera calibration with distortion models and accuracy evaluation, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 14 (10) (1992) 965–980.
- [33] H. Bacakoglu, S. Kamel, A tree-step camera calibration method, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement 46 (5) (1997) 1165–1172.
- [34] J. Heikkilä, O. Silven, A four-step camera calibration procedure with implicit image correction, Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, San Juan, Puerto Rico, June 1997; 1106–1112.
- [35] S.J. Maybank, O.D. Faugeras, A theory of self calibration of a moving camera, International Journal of Computer Vision 8 (2) (1992) 123–151.
- [36] D. Liebowitz, A. Zisserman, Combining scene and auto-calibration constraints, Proceedings of the Seventh IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'99), Kerkyra, Greece, September 1 (1999) 293–300.
- [37] A.W. Fitzgibbon, Simultaneous linear estimation of multiple view geometry and lens distortion, Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'01), Kauai, HI, December 1 (2001) 125–132.
- [38] L. deAgapito, E. Hayman, I.D. Reid, Self-calibration of rotating and zooming cameras, International Journal of Computer Vision 45 (2) (2001) 107–127.

- [39] Q.-T. Luong, O.D. Faugeras, Self-calibration of a moving camera from point correspondences and fundamental matrices, *International Journal of Computer Vision* 22 (3) (1997) 261–289.
- [40] O.D. Faugeras, L. Quan, P. Sturm, Self-calibration of a 1D projective camera and its application to the self-calibration of a 2D projective camera, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 22 (10) (2000) 1179–1185.
- [41] E. Malis, R. Cipolla, Camera self-calibration from unknown planar structures enforcing the multiview constraints between collineations, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 24 (9) (2002) 1268–1272.
- [42] M. Pollefeys, R. Koch, L. Van Gool, Self-calibration and metric reconstruction inspite of varying and unknown intrinsic camera parameters, *International Journal of Computer Vision* 32 (1) (1998) 7–25.
- [43] P.F. Sturm, Self-calibration of a moving zoom-lens camera by precalibration, *Image and Vision Computing* 15 (1997) 583–589.
- [44] B. Triggs, Autocalibration from planar scenes, *Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV'98)*, Freiburg, Germany, June 1 (1998) 89–105.
- [45] K.-Y. Wong, P.R.S. Mendonca, R. Cipolla, Camera calibration from surfaces of revolution, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 25 (2) (2003) 147–161.
- [46] P.F. Sturm, L. Quan, Camera calibration and relative pose estimation from gravity, *Proceedings of the 16th International Conference on Pattern Recognition (ICPR 2000)*, Barcelona, Spain, September 1 (2000) 72–75.
- [47] T.-S. Shen, C.-H. Menq, Automatic camera calibration for multiplesensor integrated coordinate measurement system, *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 17 (4) (2001) 502–507.
- [48] Z. Zhang, Flexible camera calibration by viewing a plane from unknown orientations, *Proceedings of International Conference on Computer Vision (ICCV'99)*, Corfu, Greece, September 1999; 666–673.
- [49] MathWorks. Matlab documentation center, 2012. URL <http://www.mathworks.nl/help/matlab/index.html>. 6, 318
- [50] Z. Zhang, A flexible new technique for camera calibration, *IEEE*

Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 22 (11)
(2000) 1330–1334.

- [50] C. Chatterjee, V.P. Roychowdhury, Algorithms for coplanar camera calibration, *Machine Vision and Applications* 12 (2000) 84–97.
- [51] F. Pedersini, A. Sarti, S. Tubaro, Accurate and simple geometric calibration of multi-camera systems, *Signal Processing* 77 (1999) 309–334.
- [52] J. Heikkilä, O. Silven, Calibration procedure for short focal length off-the-shelf CCD cameras, *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition (ICPR'96)*, Vienna, Austria, August 1 (1996) 166–170.
- [53] J. Heikkilä, Geometric camera calibration using circular control points, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 22 (10) (2000) 1066–1077.
- [54] M. Li, J.-M. Lavest, Some aspects of zoom lens camera calibration, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 18 (11) (1996) 1105–1110.
- [55] J.-M. Lavest, M. Viala, M. Dhome, Do we really need an accurate calibration pattern to achieve a reliable camera calibration?, *Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV'98)*, Freiburg, Germany, June 1 (1998) 158–174.
- [56] R. Samtaney, A method to solve interior and exterior camera calibration parameters for image resection, *NASA Advanced Supercomputing*, Moffett Field, CA, Technical report # NAS-99-003, 1999.
- [57] M. Ahmed, A. Farag, Non-metric calibration of camera lens distortion, *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, Thessaloniki, Greece, September 2 (2001) 157–160.
- [58] F. Devernay, O.D. Faugeras, Straight lines have to be straight, *Machine Vision and Applications* 13 (1) (2001) 14–24.
- [59] B. Prescott, G.F. McLean, Line-based correction of radial lens distortion, *Graphical Models and Image Processing* 59 (1) (1997) 39–47.
- [60] R. Swaminathan, S.K. Nayar, Nonmetric calibration of wide-angle lenses and polycameras, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 22 (10) (2002) 1172–1178.
- [61] G.P. Stein, Lens distortion calibration using point correspondences, *Proceedings of the International Conference on*

- Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'97), San Juan, Puerto Rico, June 1997; 602–608.
- [62] Y. Altunbasak, R.M. Mersereau, A.J. Patti, A fast parametric motion estimation algorithm with illumination and lens distortion correction, *IEEE Transactions on Image Processing* 12 (4) (2003) 395–408.
 - [63] H.S. Sawhney, R. Kumar, True multi-image alignment and its application to mosaicking and lens distortion correction, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 21 (3) (1999) 235–243.
 - [64] R.T. Collins, Y. Tsin, Calibration of outdoor active camera, Carnegie Mellon University, Technical report # CMU-RI-TR-98-36, 1999.
 - [65] F. Du, M. Brady, Self-calibration of the intrinsic parameters of cameras for active vision systems, *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'93)*, New York, NY, June 1993; 477–482.
 - [66] J.Z.C. Lai, On the sensitivity of camera calibration, *Image and Vision Computing* 11 (10) (1993) 656–664.
 - [67] S.K. Koppurapu, P. Corke, The effect of measurement noise on intrinsic camera calibration parameters, *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Detroit, MI, May 1999; 1281–1286.
 - [68] Z. Zhang, A flexible new technique for camera calibration, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 22 (11) (2000) 1330–1334.
 - [69] C. Harris, M. Stephens, A combined corner and edge detector, *Proceedings of the Fourth Alvey Vision Conference*, Manchester, UK, August 1988; 147–151.
 - [70] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, 2nd ed, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
 - [71] Emil Artin. *Geometric Algebra*. Wiley Interscience, first edition, 1957. 2. A. Beutelspacher and U. Rosenbaum. *Projective Geometry*. Cambridge University Press, first edition, 1998.
 - [72] Marcel Berger. *Geométrie 1*. Nathan, 1990. English edition: *Geometry 1*, Universitext, Springer-Verlag.
 - [73] Marcel Berger. *Geométrie 2*. Nathan, 1990. English edition: *Geometry 2*, Universitext, Springer-Verlag.

- [74] H.S.M. Coxeter. *Non-Euclidean Geometry*. The University of Toronto Press, first edition, 1942.
- [75] H.S.M. Coxeter. *Introduction to Geometry*. Wiley, second edition, 1989.
- [76] M. Prieto Alberca. Fundamentos geométricos de diseño en ingeniería Editorial adi (aula documental de investigación). Madrid.
- [77] N. V. Efimov. Geometría superior. Editorial mir. Moscu.
- [78] Lars kadison; Matthias t. kromann. Projective geometry and modern. Editorial birkhäuser. U.S.A.
- [79] Frank ayres. Geometría proyectiva. Editorial mcgraw-hill (1971). Madrid.
- [80] Alberto campos. Notas de clase geometría lineal. Editorial unibiblos (2003).
- [81] H.S.M. Coxeter. Projective geometry. Editorial blaisdell publishing company (1964).
- [82] H.S.M. Coxeter. The real projective plane. Editorial springer-verlag (1964).
- [83] David Gans. Transformations and geometries. Editorial appleton-century-crofts (1969).