

# TESIS DOCTORAL

MÉTODO DE SÍNTESIS DIMENSIONAL ÓPTIMA  
DE SISTEMAS MULTICUERPO CON  
RESTRICCIONES DINÁMICAS.  
APLICACIÓN AL DISEÑO DE MECANISMOS  
PLANOS

**José Antonio Gómez Cristobal**



**UNIVERSIDAD DE LA RIOJA**



# **TESIS DOCTORAL**

MÉTODO DE SÍNTESIS DIMENSIONAL ÓPTIMA  
DE SISTEMAS MULTICUERPO CON  
RESTRICCIONES DINÁMICAS.  
APLICACIÓN AL DISEÑO DE MECANISMOS  
PLANOS

**José Antonio Gómez Cristobal**

Universidad de La Rioja  
Servicio de Publicaciones  
2003

Esta tesis doctoral, dirigida por el Doctor D. José Antonio Alba Irurzun, fue leída el 6 de Junio de 2003, y obtuvo la calificación de Sobresaliente Cum Laude por Unanimidad.

© José Antonio Gómez Cristobal

Edita: Universidad de La Rioja  
Servicio de Publicaciones

ISBN 84-688-4950-2

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA  
CENTRO DE ENSEÑANZAS CIENTÍFICAS Y TÉCNICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA



MÉTODO DE SÍNTESIS  
DIMENSIONAL ÓPTIMA DE  
SISTEMAS MULTICUERPO CON  
RESTRICCIONES DINÁMICAS.  
APLICACIÓN AL DISEÑO DE  
MECANISMOS PLANOS.

TESIS DOCTORAL

AUTOR:

D. José Antonio Gómez Cristóbal

DIRECTOR:

Dr. D. José Antonio Alba Irurzun

Logroño, marzo de 2003







*A mi familia de siempre: a mis padres y a mis hermanos.*

*A mi nueva familia: a Cristina y a Laura.*



## **Agradecimientos**

Sé de sobra que estas líneas no bastan para expresar la deuda de gratitud que me une a quienes de un modo u otro han hecho posible que escriba esta tesis, pero quiero dejar constancia de sus nombres y de mi agradecimiento. Gracias, pues, a José Antonio Alba, por iniciarme en la investigación y por su inestimable ayuda en la dirección de la tesis. A Tomás Ariznavarreta y a la empresa Arisa, por la confianza que siempre han depositado en mis esfuerzos por optimizar el comportamiento de sus prensas de mecánica articulada. Y a mis compañeros del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de La Rioja, por su amistad y por sus palabras de aliento, y en especial a Joaquín Ordieres, por el interés que ha puesto en mis progresos y por sus sugerencias, siempre valiosas.



## Índice

Índice .....	9
Lista de figuras .....	17
Lista de tablas .....	21
Introducción.....	27
Objetivos de la tesis .....	27
Estructura de la tesis.....	28
<b>1. Optimización de los sistemas multicuerpo.....</b>	<b>31</b>
1.1. Introducción.....	31
1.2. Análisis de los sistemas multicuerpo.....	32
1.2.1. Análisis cinemático .....	32
1.2.2. Análisis dinámico .....	33
1.3. Optimización de los sistemas multicuerpo .....	35
1.3.1. Síntesis .....	36
1.3.2. Análisis de sensibilidad.....	37
1.3.3. Categorías de diseño .....	37
1.3.3.1. Categorías cinemáticas de diseño .....	38
1.3.3.2. Categorías dinámicas de diseño .....	38

1.3.4. Taxonomía de la síntesis de los sistemas multicuerpo .....	41
1.4. Formulaciones para el análisis y la optimización de sistemas multicuerpo.....	46
1.4.1. Formulación simbólica versus formulación numérica.....	46
1.4.2. Sistemas de coordenadas .....	47
1.4.2.1. Coordenadas independientes .....	47
1.4.2.2. Coordenadas dependientes .....	49
1.4.2.2.1. Coordenadas relativas .....	49
1.4.2.2.2. Coordenadas cartesianas .....	50
1.4.2.2.3. Coordenadas naturales .....	51
1.4.2.2.4. Coordenadas mixtas .....	53
1.5. Estado del arte.....	53
1.5.1. Síntesis cinemática .....	53
1.5.2. Síntesis dinámica .....	56
1.5.3. Síntesis asistida por ordenador .....	58
<b>2. Síntesis dimensional óptima .....</b>	<b>61</b>
2.1. Optimización de funciones.....	61
2.1.1. Planteamiento del problema .....	62
2.1.2. Vector de diseño .....	63
2.1.3. Función objetivo .....	64
2.1.4. Restricciones.....	67
2.1.5. Taxonomía de la programación matemática.....	69
2.2. Programación sin restricciones .....	70
2.2.1. Métodos de orden cero .....	71
2.2.2. Métodos de orden uno .....	71
2.2.3. Métodos de orden dos.....	71
2.3. Programación no lineal diferenciable .....	72

	11
2.3.1. Hipótesis de cualificación de las restricciones.....	73
2.3.2. Condiciones necesarias de optimalidad de Kuhn-Tucker .....	74
2.4. Métodos clásicos.....	75
2.4.1. Método de los multiplicadores de Lagrange .....	75
2.4.2. Método de la función penalty.....	76
2.5. Método de los multiplicadores de Lagrange aumentados .....	77
2.5.1. Estimación directa de los multiplicadores de Lagrange.....	78
2.5.2. Estimación lineal de los multiplicadores de Lagrange.....	78
2.5.3. Estimación cuadrática de los multiplicadores de Lagrange .....	79
2.6. Método de los multiplicadores de Lagrange proyectados .....	80
2.6.1. Linealización del problema no lineal con restricciones .....	80
2.6.2. Programación lineal secuencial.....	81
2.6.3. Programación cuadrática secuencial .....	82
<b>3. Síntesis dimensional óptima con restricciones de posición y cinemáticas .....</b>	<b>85</b>
3.1. Antecedentes.....	85
3.1.1. Planteamiento original del método.....	86
3.1.2. Resolución del problema de posición deformada .....	88
3.1.3. Optimización de los parámetros de diseño.....	89
3.1.4. Nuevo planteamiento del problema de posición deformada .....	91
3.2. Síntesis dimensional óptima con restricciones .....	93
3.2.1. Planteamiento del problema .....	94
3.2.2. Restricciones geométricas .....	95
3.2.2.1. Igualdad de coordenadas de punto fijo .....	96
3.2.2.2. No inversión de triángulo .....	96
3.2.2.3. Colinealidad de tres puntos.....	98
3.2.2.4. Par engranaje-engranaje.....	99

3.2.2.5. Par engranaje-cremallera.....	100
3.3. Síntesis con restricciones de posición.....	100
3.3.1. Síntesis local.....	101
3.3.2. Síntesis global.....	103
3.4. Síntesis con restricciones cinemáticas.....	104
3.4.1. Síntesis con restricciones de velocidad.....	105
3.4.2. Síntesis con restricciones de aceleración.....	107
<b>4. Síntesis dimensional óptima con restricciones dinámicas.....</b>	<b>109</b>
4.1. Dinámica de los sistemas multicuerpo.....	109
4.2. Análisis de sensibilidad.....	111
4.2.1. Cálculo de sensibilidades por derivación directa.....	112
4.2.2. Cálculo de sensibilidades por el método de la variable adjunta.....	114
4.3. Dinámica del cuerpo rígido.....	116
4.4. Síntesis con restricciones dinámicas.....	119
4.4.1. Planteamiento del problema.....	119
4.4.2. Función objetivo.....	120
4.4.3. Vector de diseño.....	121
4.4.4. Restricciones geométricas.....	122
4.4.5. Síntesis con restricciones de posición.....	123
4.4.6. Síntesis con restricciones cinemáticas.....	125
4.4.7. Síntesis dinámica.....	127
4.4.8. Síntesis estática.....	132
4.5. Restricciones dinámicas.....	133
4.5.1. Restricciones de fuerza.....	134
4.5.2. Restricciones de masa.....	135
4.5.3. Restricciones de velocidad angular.....	135

	13
4.5.4. Restricciones de aceleración angular .....	135
4.5.5. Restricciones sobre los índices de mérito .....	135
4.5.5.1. Razón de velocidades angulares de salida y entrada .....	136
4.5.5.2. Ventaja mecánica .....	138
4.5.5.3. Ángulo de transmisión .....	139
<b>5. Aplicación al diseño de mecanismos planos.....</b>	<b>141</b>
5.1. Ecuaciones del movimiento .....	141
5.2. Parámetros geométricos .....	143
5.2.1. Coordenada de nudo .....	143
5.2.2. Coordenadas del centro de masa .....	143
5.2.2.1. Eslabón masa puntual .....	144
5.2.2.2. Eslabón barra .....	144
5.2.2.3. Eslabón triángulo .....	145
5.3. Parámetros inerciales .....	146
5.3.1. Masa .....	146
5.3.1.1. Eslabón masa puntual .....	146
5.3.1.2. Eslabón barra .....	146
5.3.1.3. Eslabón triángulo .....	147
5.3.2. Momento polar de inercia .....	149
5.3.2.1. Eslabón masa puntual .....	149
5.3.2.2. Eslabón barra .....	149
5.3.2.3. Eslabón triángulo .....	150
5.4. Parámetros cinemáticos .....	156
5.4.1. Velocidad angular .....	156
5.4.1.1. Eslabón masa puntual .....	156
5.4.1.2. Eslabón barra .....	157

5.4.1.3. Eslabón triángulo.....	159
5.4.2. Aceleración angular.....	159
5.4.2.1. Eslabón masa puntual.....	159
5.4.2.2. Eslabón barra.....	159
5.4.2.3. Eslabón triángulo.....	161
5.4.3. Aceleración del centro de masa.....	162
5.4.3.1. Eslabón masa puntual.....	162
5.4.3.2. Eslabón barra.....	162
5.4.3.3. Eslabón triángulo.....	164
<b>6. Ejemplos.....</b>	<b>167</b>
6.1. Cuadrilátero articulado con díada.....	167
6.1.1. Síntesis de generación de trayectoria con restricción de par de salida.....	174
6.1.2. Síntesis de generación de trayectoria con restricción de ventaja mecánica.....	184
6.1.3. Síntesis de generación de función con restricción de par de salida.....	194
6.2. Mecanismo Whitworth de retorno rápido.....	204
6.2.1. Síntesis de generación de función con restricción dinámica.....	206
6.2.2. Nueva síntesis de generación de función con restricción dinámica.....	215
6.3. Mecanismos de guiado de prensas de mecánica articulada.....	224
6.3.1. Mecanismo de rodillera modificada.....	228
6.3.1.1. Síntesis de generación de función con restricción dinámica.....	230
6.3.1.2. Síntesis de generación de función con restricciones dinámicas.....	240
6.3.1.3. Síntesis de generación de función con restricciones dinámicas.....	251
6.3.2. Mecanismo link drive.....	261
6.3.2.1. Síntesis de generación de función con restricción dinámica.....	264
6.3.2.2. Síntesis con restricciones cinemáticas y dinámicas.....	275
<b>7. Conclusiones.....</b>	<b>289</b>

<b>Apéndice I. Algoritmos</b> .....	293
I.1. Síntesis local.....	293
I.2. Síntesis global .....	297
I.3. Análisis cinemático y dinámico .....	300
<b>Apéndice II. Rutinas NAG</b> .....	305
II.1. Rutina F07ADF. Factorización LU de matrices reales.....	305
II.1.1. Formato.....	306
II.1.2. Parámetros .....	306
II.2. Rutina F07AEF. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales .....	306
II.2.1. Formato.....	307
II.2.2. Parámetros .....	307
II.3. Rutina E04UCF. Optimización SQP de funciones .....	308
II.3.1. Formato.....	310
II.3.2. Parámetros .....	310
II.3.3. Subrutina CONFUN .....	313
II.3.3.1. Formato .....	313
II.3.3.2. Parámetros.....	313
II.3.4. Subrutina OBJFUN .....	314
II.3.4.1. Formato .....	315
II.3.4.2. Parámetros.....	315
II.3.5. Indicadores de error .....	316
<b>Bibliografía</b> .....	317



## Lista de figuras

1.1. Diagrama de flujo del proceso de optimización .....	36
1.2. Coordenadas independientes para el cuadrilátero articulado .....	48
1.3. Dos soluciones para el cuadrilátero articulado .....	48
1.4. Coordenadas relativas para el cuadrilátero articulado .....	50
1.5. Coordenadas cartesianas para el cuadrilátero articulado .....	51
1.6. Coordenadas naturales para el cuadrilátero articulado .....	53
3.1. No inversión de triángulo .....	97
3.2. Colinealidad de tres puntos.....	98
3.3. Par engranaje-engranaje .....	99
3.4. Par engranaje-cremallera .....	100
4.1. Índices de mérito para el cuadrilátero articulado.....	136
5.1. Eslabón barra .....	145
5.2. Eslabón triángulo.....	145
5.3. Momento de inercia del eslabón triángulo .....	150
5.4. Esquema del cálculo de los parámetros dinámicos y sus gradientes.....	165
6.1. Cuadrilátero articulado con díada.....	168
6.2. Coordenadas del nudo 6 del mecanismo de partida .....	177
6.3. Par de salida del mecanismo de partida.....	177

6.4. Evolución de la función objetivo .....	181
6.5. Coordenada x del nudo 6 del mecanismo solución.....	182
6.6. Coordenada y del nudo 6 del mecanismo solución.....	183
6.7. Par de salida del mecanismo solución.....	183
6.8. Coordenadas del nudo 6 del mecanismo de partida.....	186
6.9. Ventaja mecánica del mecanismo de partida.....	187
6.10. Evolución de la función objetivo.....	190
6.11. Detalle de la evolución de la función objetivo.....	191
6.12. Coordenada x del nudo 6 del mecanismo solución.....	192
6.13. Coordenada y del nudo 6 del mecanismo solución .....	193
6.14. Ventaja mecánica del mecanismo solución .....	193
6.15. Ángulo del seguidor del mecanismo de partida .....	197
6.16. Par de salida del mecanismo de partida.....	197
6.17. Evolución de la función objetivo.....	201
6.18. Ángulo del seguidor del mecanismo solución .....	203
6.19. Par de salida del mecanismo solución.....	203
6.20. Mecanismo Whitworth de retorno rápido .....	204
6.21. Coordenada x del nudo 6 del mecanismo de partida.....	208
6.22. Fuerza horizontal de salida del mecanismo de partida .....	208
6.23. Evolución de la función objetivo.....	212
6.24. Detalle de la evolución de la función objetivo.....	212
6.25. Coordenada x del nudo 6 del mecanismo solución .....	214
6.26. Fuerza horizontal de salida del mecanismo solución .....	214
6.27. Coordenada x del nudo 6 del mecanismo de partida.....	217
6.28. Fuerza horizontal de salida del mecanismo de partida .....	218
6.29. Evolución de la función objetivo.....	221

6.30. Detalle de la evolución de la función objetivo .....	222
6.31. Coordenada x del nudo 6 del mecanismo solución.....	223
6.32. Fuerza horizontal de salida del mecanismo solución.....	224
6.33. Diagrama de posición del carro .....	225
6.34. Diagrama de velocidad del carro .....	226
6.35. Par motor .....	227
6.36. Fuerza de embutición.....	228
6.37. Mecanismo de rodillera modificada.....	229
6.38. Coordenada y del carro del mecanismo de partida .....	233
6.39. Reacción en el apoyo del balancín del mecanismo de partida .....	233
6.40. Evolución de la función objetivo .....	237
6.41. Coordenada y del carro del mecanismo solución.....	239
6.42. Reacción en el apoyo del balancín del mecanismo solución .....	239
6.43. Velocidad del carro.....	240
6.44. Coordenada y del carro del mecanismo de partida .....	243
6.45. Reacción en el apoyo del balancín del mecanismo de partida .....	243
6.46. Reacción horizontal sobre el carro del mecanismo de partida .....	244
6.47. Evolución de la función objetivo .....	248
6.48. Coordenada y del carro del mecanismo solución.....	249
6.49. Reacción en el apoyo del balancín del mecanismo solución .....	250
6.50. Reacción horizontal sobre el carro del mecanismo solución.....	250
6.51. Velocidad del carro.....	251
6.52. Coordenada y del carro del mecanismo de partida .....	254
6.53. Reacción en el apoyo del balancín del mecanismo de partida.....	254
6.54. Evolución de la función objetivo.....	258
6.55. Coordenada y del carro del mecanismo solución.....	260

6.56. Reacción en el apoyo del balancín del mecanismo solución.....	260
6.57. Velocidad del carro .....	261
6.58. Mecanismo link drive .....	262
6.59. Coordenada y del carro del mecanismo de partida.....	266
6.60. Reacción en el apoyo del balancín del mecanismo de partida .....	267
6.61. Fuerza de enlace entre balancín y brazo del mecanismo de partida.....	267
6.62. Detalle de la evolución de la función objetivo.....	272
6.63. Coordenada y del carro del mecanismo solución .....	273
6.64. Reacción en el apoyo del balancín del mecanismo solución.....	274
6.65. Fuerza de enlace entre balancín y brazo del mecanismo solución .....	274
6.66. Velocidad del carro .....	275
6.67. Coordenada y del carro del mecanismo de partida.....	278
6.68. Reacción en el apoyo del balancín del mecanismo de partida .....	279
6.69. Fuerza de enlace entre balancín y brazo del mecanismo de partida.....	279
6.70. Detalle de la evolución de la función objetivo.....	284
6.71. Coordenada y del carro del mecanismo solución .....	286
6.72. Reacción en el apoyo del balancín del mecanismo solución.....	286
6.73. Fuerza de enlace entre balancín y brazo del mecanismo solución .....	287
6.74. Velocidad del carro .....	287
I.1. Diagrama de flujo del algoritmo de síntesis local .....	296
I.2. Diagrama de flujo del algoritmo de síntesis global .....	299
I.3. Diagrama de flujo del algoritmo de análisis cinemático y dinámico.....	303

## Lista de tablas

4.1. Restricciones activas en síntesis de posición local.....	124
4.2. Restricciones activas en síntesis de posición global.....	124
4.3. Restricciones activas en síntesis cinemática local.....	126
4.4. Restricciones activas en síntesis cinemática global.....	127
4.5. Restricciones activas en síntesis dinámica local.....	131
4.6. Restricciones activas en síntesis dinámica global .....	131
6.1. Definición de barras en el cuadrilátero articulado con díada .....	168
6.2. Definición de eslabones en el cuadrilátero articulado con díada .....	169
6.3. Vector de diseño inicial .....	175
6.4. Longitudes iniciales de barra.....	175
6.5. Grados de libertad cinemáticos .....	176
6.6. Grados de libertad dinámicos .....	176
6.7. Densidad de los eslabones .....	176
6.8. Posiciones de síntesis .....	178
6.9. Definición de las posiciones de síntesis .....	179
6.10. Restricciones de posición .....	179
6.11. Restricciones de movilidad de los puntos fijos.....	180
6.12. Restricciones de longitud de barras.....	180

6.13. Restricciones dinámicas .....	180
6.14. Vector de diseño del mecanismo solución .....	181
6.15. Longitudes de barra del mecanismo solución .....	182
6.16. Vector de diseño inicial .....	184
6.17. Longitudes iniciales de barra.....	185
6.18. Grados de libertad cinemáticos .....	185
6.19. Grados de libertad dinámicos.....	185
6.20. Densidad de los eslabones .....	186
6.21. Posiciones de síntesis .....	187
6.22. Definición de las posiciones de síntesis .....	188
6.23. Restricciones de posición.....	189
6.24. Restricciones de movilidad de los puntos fijos .....	189
6.25. Restricciones de longitud de barras.....	189
6.26. Restricciones dinámicas .....	190
6.27. Vector de diseño del mecanismo solución .....	191
6.28. Longitudes de barra del mecanismo solución .....	192
6.29. Vector de diseño inicial .....	195
6.30. Longitudes iniciales de barra.....	195
6.31. Grados de libertad cinemáticos .....	195
6.32. Grados de libertad dinámicos.....	196
6.33. Densidad de los eslabones .....	196
6.34. Posiciones de síntesis .....	198
6.35. Definición de las posiciones de síntesis .....	199
6.36. Restricciones sobre el seno del ángulo del seguidor.....	199
6.37. Restricciones sobre el coseno del ángulo del seguidor .....	200
6.38. Restricciones de movilidad de los puntos fijos .....	200

6.39. Restricciones de longitud de barras.....	201
6.40. Restricciones dinámicas .....	201
6.41. Vector de diseño del mecanismo solución .....	202
6.42. Longitudes de barra del mecanismo solución .....	202
6.43. Definición de barras en el mecanismo Whitworth de retorno rápido .....	205
6.44. Definición de eslabones en el mecanismo Whitworth de retorno rápido.....	205
6.45. Vector de diseño inicial.....	206
6.46. Longitudes iniciales de barra .....	206
6.47. Grados de libertad cinemáticos.....	207
6.48. Grados de libertad dinámicos .....	207
6.49. Densidad de los eslabones.....	207
6.50. Masa de los eslabones punto .....	207
6.51. Posiciones de síntesis .....	209
6.52. Definición de las posiciones de síntesis .....	210
6.53. Restricciones de posición.....	210
6.54. Restricciones de movilidad de los puntos fijos.....	211
6.55. Restricciones de longitud de barras.....	211
6.56. Restricciones dinámicas .....	212
6.57. Vector de diseño del mecanismo solución .....	213
6.58. Longitudes de barra del mecanismo solución .....	213
6.59. Vector de diseño inicial.....	215
6.60. Longitudes iniciales de barra .....	215
6.61. Grados de libertad cinemáticos.....	216
6.62. Grados de libertad dinámicos .....	216
6.63. Densidad de los eslabones.....	216
6.64. Masa de los eslabones punto .....	217

6.65. Posiciones de síntesis .....	218
6.66. Definición de las posiciones de síntesis.....	219
6.67. Restricciones de posición .....	220
6.68. Restricciones de movilidad de los puntos fijos .....	220
6.69. Restricciones de longitud de barras.....	220
6.70. Restricciones dinámicas .....	221
6.71. Vector de diseño del mecanismo solución .....	222
6.72. Longitudes de barra del mecanismo solución .....	223
6.73. Definición de barras en el mecanismo de rodillera modificada .....	229
6.74. Definición de eslabones en el mecanismo de rodillera modificada .....	230
6.75. Vector de diseño inicial .....	231
6.76. Longitudes iniciales de barras .....	231
6.77. Grados de libertad cinemáticos.....	231
6.78. Grados de libertad dinámicos.....	232
6.79. Densidad de los eslabones .....	232
6.80. Posiciones de síntesis .....	234
6.81. Definición de las posiciones de síntesis.....	235
6.82. Restricciones de posición .....	236
6.83. Restricciones de movilidad de los puntos fijos .....	236
6.84. Restricciones de longitud de barras.....	236
6.85. Restricciones dinámicas .....	237
6.86. Vector de diseño del mecanismo solución .....	238
6.87. Longitudes de barra del mecanismo solución .....	238
6.88. Vector de diseño inicial .....	241
6.89. Longitudes iniciales de barras .....	241
6.90. Grados de libertad cinemáticos.....	242

6.91. Grados de libertad dinámicos .....	242
6.92. Densidad de los eslabones.....	242
6.93. Posiciones de síntesis .....	245
6.94. Definición de las posiciones de síntesis .....	245
6.95. Restricciones de posición.....	246
6.96. Restricciones de movilidad de los puntos fijos.....	246
6.97. Restricciones de longitud de barras.....	247
6.98. Restricciones dinámicas .....	247
6.99. Vector de diseño del mecanismo solución.....	248
6.100. Longitudes de barra del mecanismo solución.....	249
6.101. Vector de diseño inicial .....	252
6.102. Longitudes iniciales de barras .....	252
6.103. Grados de libertad cinemáticos.....	252
6.104. Grados de libertad dinámicos .....	253
6.105. Densidad de los eslabones .....	253
6.106. Posiciones de síntesis.....	255
6.107. Definición de las posiciones de síntesis .....	256
6.108. Restricciones de posición .....	257
6.109. Restricciones de movilidad de los puntos fijos .....	257
6.110. Restricciones de longitud de barras.....	258
6.111. Restricciones dinámicas .....	258
6.112. Vector de diseño del mecanismo solución .....	259
6.113. Longitudes de barra del mecanismo solución.....	259
6.114. Definición de barras en el mecanismo link drive .....	263
6.115. Definición de eslabones en el mecanismo link drive .....	263
6.116. Vector de diseño inicial .....	264

6.117. Longitudes iniciales de barra .....	265
6.118. Grados de libertad cinemáticos .....	265
6.119. Grados de libertad dinámicos .....	265
6.120. Densidad de los eslabones .....	266
6.121. Posiciones de síntesis .....	268
6.122. Definición de las posiciones de síntesis .....	269
6.123. Restricciones de posición .....	270
6.124. Restricciones de movilidad de los puntos fijos .....	270
6.125. Restricciones de longitud de barras .....	271
6.126. Restricciones dinámicas .....	271
6.127. Vector de diseño del mecanismo solución .....	272
6.128. Longitudes de barra del mecanismo solución .....	273
6.129. Vector de diseño inicial .....	276
6.130. Longitudes iniciales de barra .....	277
6.131. Grados de libertad cinemáticos .....	277
6.132. Grados de libertad dinámicos .....	277
6.133. Densidad de los eslabones .....	278
6.134. Posiciones de síntesis .....	280
6.135. Definición de las posiciones de síntesis .....	281
6.136. Restricciones de posición .....	282
6.137. Restricciones de movilidad de los puntos fijos .....	282
6.138. Restricciones de longitud de barras .....	283
6.139. Restricciones dinámicas .....	283
6.140. Restricciones cinemáticas .....	284
6.141. Vector de diseño del mecanismo solución .....	285
6.142. Longitudes de barra del mecanismo solución .....	285

## Introducción

La optimización de sistemas multicuerpo es un campo que ha despertado gran interés en la comunidad científica debido a la complejidad del problema y a la enorme cantidad de aplicaciones de desarrollo tecnológico que posee en los problemas de generación de función, generación de trayectoria y guiado de cuerpo rígido. Sin embargo, pese a la cantidad de recursos implicados, se trata de una disciplina en un estado de desarrollo incipiente, con multitud de metodologías desarrolladas para aplicaciones particulares pero con una carencia importante de métodos generales aptos para cualquier formulación del problema.

Dentro de la síntesis cinemática, la mayoría de los autores resuelven el problema a través de diversas técnicas de programación matemática no lineal con restricciones, aunque recientemente han surgido planteamientos alternativos basados en técnicas metaheurísticas como los algoritmos genéticos o las redes neuronales. En síntesis dinámica el número de trabajos publicados es mucho menor puesto que la aparición de las ecuaciones algebraico-diferenciales que controlan el comportamiento dinámico del mecanismo complica sensiblemente el problema. Estos problemas de síntesis dinámica se resuelven tradicionalmente a través del cálculo de las sensibilidades de la función objetivo y de las restricciones respecto a las variables de diseño, que puede efectuarse por derivación directa o por el método de la variable adjunta.

### **Objetivos de la tesis.**

El objetivo fundamental de esta tesis es el desarrollo de un método general de síntesis dimensional óptima de sistemas multicuerpo con restricciones de posición,

cinemáticas y dinámicas, que pueda ser aplicado sobre cualquier sistema multicuerpo constituido por elementos rígidos, independientemente de la dimensión de su movimiento, de su configuración topológica y de los pares cinemáticos que otorguen movimiento relativo a sus eslabones.

La incorporación de estas restricciones permitirá controlar simultáneamente los parámetros de posición, cinemáticos y dinámicos del sistema desde las fases más tempranas del diseño, permitiendo mejorar considerablemente el control sobre el comportamiento del sistema y reducir sensiblemente el tiempo de diseño del mismo.

### **Estructura de la tesis.**

La tesis está estructurada en siete capítulos y dos apéndices.

El capítulo primero constituye una introducción a la optimización de los sistemas multicuerpo. Se presentan los conceptos fundamentales de las distintas metodologías de optimización de sistemas multicuerpo y de las formulaciones numéricas y simbólicas más empleadas. Por último, se recoge también un breve estado del arte de la síntesis dimensional óptima cinemática y dinámica, poniendo especial interés en las técnicas de síntesis dimensional óptima asistidas por ordenador.

El capítulo segundo se centra en la síntesis dimensional óptima de los sistemas multicuerpo. Se analizan los aspectos fundamentales del problema de la optimización de funciones y los métodos más habituales en programación no lineal diferenciable, desde los métodos clásicos –como el método de los multiplicadores de Lagrange o el método de la función penalty– hasta los métodos de multiplicadores de Lagrange aumentados o los métodos de multiplicadores de Lagrange proyectados.

El capítulo tercero presenta los antecedentes al método propuesto, que está basado en la optimización de una función objetivo de energía potencial de deformación mediante un algoritmo de programación cuadrática secuencial. Dicho algoritmo exige la determinación analítica de la función objetivo y de todas las restricciones, así como de sus gradientes respecto de las variables de diseño, y calcula por diferencias finitas sus respectivas matrices hessianas.

Los capítulos cuarto, quinto y sexto recogen las principales aportaciones originales de esta tesis. En el capítulo cuarto se hace un resumen de las técnicas de cálculo de

sensibilidades más habituales en el ámbito de los sistemas multicuerpo, y se presenta el método general de síntesis dimensional óptima de sistemas multicuerpo con restricciones dinámicas que constituye el objeto de esta tesis. Se discuten aquí los sistemas de ecuaciones que representan el equilibrio estático y dinámico de los sistemas multicuerpo, así como sus respectivas ecuaciones de gradientes, que servirán para incorporar las restricciones dinámicas al método de programación cuadrática secuencial. Por último, se presentan las distintas restricciones de tipo dinámico que el método descrito permite imponer sobre el problema. En concreto, se presentan las restricciones sobre fuerzas, que pueden imponerse sobre las fuerzas motoras, sobre las fuerzas de salida, sobre las fuerzas de enlace, o sobre la relación temporal de todas éstas. Se presentan también algunas restricciones sobre los parámetros que intervienen en las ecuaciones de equilibrio dinámico, como la masa de los cuerpos, su velocidad angular o su aceleración angular. Finalmente se presentan las restricciones sobre los índices de mérito, que permiten evaluar de una forma sencilla el comportamiento dinámico del sistema. Se han contemplado la razón de velocidades angulares de salida y entrada, la ventaja mecánica y el ángulo de transmisión.

El capítulo quinto particulariza el problema general de síntesis dimensional óptima de sistemas multicuerpo presentado en el capítulo cuarto al caso de mecanismos con movimiento plano. En este capítulo se establece una sencilla metodología para determinar las ecuaciones de equilibrio estático y dinámico del mecanismo y las expresiones analíticas de las restricciones dinámicas a imponer, así como sus respectivos gradientes.

El capítulo sexto recoge distintos ejemplos de síntesis dimensional óptima con restricciones dinámicas de mecanismos planos diversos, con el fin de ilustrar las características y la potencia del método, así como de evaluar su robustez y convergencia.

El séptimo capítulo recoge a manera de conclusiones las aportaciones fundamentales de este trabajo, así como las principales líneas de investigación que basadas en el trabajo sugiere el autor.

El apéndice primero presenta los algoritmos que han servido para implementar el método presentado en los capítulos cuarto y quinto en un software de síntesis dimensional óptima de sistemas multicuerpo con restricciones cinemáticas y

dinámicas, con aplicación en el diseño óptimo de mecanismos de movimiento plano.

El apéndice segundo es una referencia de las rutinas matemáticas de la biblioteca NAG que se han utilizado para la implementación de los mencionados algoritmos de síntesis dimensional óptima con restricciones dinámicas presentados en el apéndice primero.

## Capítulo 1

# Optimización de los sistemas multicuerpo

### 1.1. Introducción.

Un sistema multicuerpo (Huston, 1990; Shabana, 1998; Rahnejat, 1998) es un modelo mecánico de un conjunto de cuerpos, también denominados elementos o eslabones, que pueden a su vez ser rígidos o flexibles, interconectados de tal modo que existe movimiento relativo entre ellos. Se trata pues de un término muy general que engloba a una gran cantidad de sistemas, entre los que pueden citarse los mecanismos, los vehículos de todo tipo y los robots.

El software de análisis cinemático y dinámico de los sistemas multicuerpo disponible hoy día en el mercado es capaz de generar y resolver las ecuaciones del movimiento de forma automática. Se trata de una herramienta imprescindible para el diseño de los sistemas multicuerpo en campos tan diversos como la industria del automóvil, la industria aeroespacial, la robótica o la biomecánica. En la actualidad existe una gran cantidad de software de análisis de sistemas multicuerpo en el mercado.

Este auge del análisis de los sistemas multicuerpo es un fenómeno que recuerda al producido a principios de la década de 1970 en el campo del análisis estructural, con la irrupción del software basado en el método de los elementos finitos. Sin embargo ambos análisis son sustancialmente distintos, ya que mientras el análisis estructural de elementos finitos es esencialmente un proceso *batch* que no precisa la interactividad del analista durante todo el proceso, el análisis de sistemas multicuerpo es

necesariamente interactivo, dado que el analista está interesado en obtener una respuesta del sistema en el espacio de trabajo y durante un periodo de tiempo. Además, en ocasiones es precisa una respuesta en tiempo real, con lo que el diseñador se convierte en un elemento más de la simulación que puede introducir fuerzas externas y controlar los grados de libertad del sistema.

Esta herramienta permite predecir el comportamiento cinemático y dinámico del sistema en las fases más tempranas del diseño. Es también una herramienta útil para estudiar la influencia de los distintos parámetros del diseño en el comportamiento del sistema.

## **1.2. Análisis de los sistemas multicuerpo.**

Se distingue entre análisis cinemático y análisis dinámico.

### **1.2.1 Análisis cinemático.**

En los problemas de análisis cinemático se estudia la posición y el movimiento del sistema multicuerpo. Se trata de problemas puramente geométricos, independientes de las fuerzas causantes del movimiento y de las características inerciales de los cuerpos que componen el sistema.

A continuación se tratan los problemas más comunes de análisis cinemático de sistemas multicuerpo:

- **Posición inicial.** Se trata de determinar la posición de todos los elementos de un sistema multicuerpo, a partir de la posición de los elementos de entrada. Se trata de un problema de difícil resolución que conlleva la resolución de un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales que, por regla general, tiene varias soluciones. El número de soluciones es directamente proporcional a la complejidad del sistema.
- **Desplazamiento finito.** Se trata de encontrar la posición final de los elementos de un sistema multicuerpo que evoluciona desde una posición inicial mediante un desplazamiento finito y no diferencial de los elementos de entrada. Pese a que es una variación del problema de posición inicial, en lo que se refiere tanto a un punto de vista conceptual como a la herramienta matemática que se utiliza para

resolverlo, su resolución es más sencilla puesto que la posición inicial del sistema, que es conocida, puede ser utilizada como punto de partida para el proceso iterativo de resolución del sistema de ecuaciones algebraicas no lineales. La multiplicidad de soluciones no supone un problema serio en este caso, puesto que sólo resulta de interés la solución más cercana a la posición inicial del sistema.

- **Análisis cinemático.** Con este nombre se engloban los análisis de velocidad y aceleración de los sistemas multicuerpo. En el análisis de velocidad se trata de determinar la velocidad de todos los elementos del sistema a partir de la posición del mismo y de la velocidad de los elementos de entrada. En el análisis de aceleración se trata de determinar la aceleración de todos los elementos del sistema a partir de la posición y la velocidad del mismo y de la aceleración de los elementos de entrada. Ambos problemas son sencillos de resolver, puesto que implican la resolución de un sistema de ecuaciones lineales con solución única, donde es de aplicación el principio de superposición.
- **Simulación cinemática.** Se trata de predecir el comportamiento cinemático del sistema, y engloba todos los problemas definidos hasta ahora. Sirve para detectar colisiones entre elementos del sistema, estudiar trayectorias de puntos y determinar las secuencias de las posiciones de elementos.

### **1.2.2. Análisis dinámico.**

En general los problemas dinámicos son mucho más complejos de resolver que los problemas cinemáticos, que deben ser resueltos previamente. Los problemas dinámicos involucran a las fuerzas que actúan sobre el sistema y, además, a la masa, el tensor de inercia y la posición del centro de masa de todos los elementos que forman parte del sistema.

A continuación se enumeran los problemas de análisis dinámico más importantes en el ámbito de los sistemas multicuerpo:

- **Posición de equilibrio estático.** Se trata de determinar la posición en que se equilibran las fuerzas exteriores, las fuerzas de enlace y las reacciones que actúan sobre el sistema. Se engloba aquí pese a no tratarse propiamente de un

problema dinámico, ya que al menos depende de la masa y de la posición del centro de masa de los elementos del sistema, aunque no de sus tensores de inercia. La solución del problema exige la resolución de un sistema de ecuaciones que debe ser resuelto mediante un procedimiento iterativo.

- Dinámica linealizada. Se linealizan las ecuaciones del movimiento en una posición particular del sistema para, mediante un estudio paso a paso de la historia del sistema o un análisis de valores propios, determinar los modos y las frecuencias de vibración natural que tienen lugar a partir de una posición de equilibrio estático o dinámico del sistema. De esta forma se conoce la rigidez dinámica del sistema.
- Dinámica inversa. Se trata de determinar las fuerzas de entrada que son capaces de conferir al sistema un determinado movimiento.
- Simulación dinámica. Se trata de predecir el comportamiento dinámico del sistema a partir de las fuerzas exteriores aplicadas, de las condiciones de contorno y de las condiciones iniciales del sistema. Implica la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, que pueden ser integradas de forma numérica a partir de las condiciones iniciales. Se trata de un problema cuya resolución exige un alto coste computacional, por lo que resulta imprescindible la selección del algoritmo de resolución más eficiente.

En ocasiones se incorpora a los problemas de dinámica inversa y de simulación dinámica la deformación sufrida por los distintos elementos del sistema. El problema se complica enormemente, al despreñar la hipótesis de sólido rígido, pero resulta imprescindible en algunos casos como las estructuras ligeras o la maquinaria de alta velocidad, donde las deformaciones de los elementos pueden jugar un papel importante en el análisis dinámico del sistema.

- Percusiones e impactos. Se trata de determinar el efecto que las percusiones y los impactos que actúan sobre el sistema tienen sobre la distribución de velocidades del mismo. Las percusiones, de limitada importancia práctica, producen discontinuidades en la distribución de velocidades, mientras que los impactos producen cambios en la distribución de velocidades que pueden ser calculados introduciendo una ecuación de naturaleza experimental que incorpore

el tipo de impacto y la naturaleza de las superficies en contacto durante el mismo.

### **1.3. Optimización de los sistemas multicuerpo.**

Para diseñar un sistema multicuerpo que cumpla con unas determinadas especificaciones de diseño previamente definidas por el diseñador no son suficientes las herramientas de análisis comentadas. En este caso, el diseño se convierte en un proceso iterativo de prueba y error, consistente en analizar la influencia de los distintos parámetros del diseño en el comportamiento del sistema y modificar éstos hasta dar con un sistema cuyo comportamiento satisfaga las expectativas del diseñador. Este procedimiento origina tiempos de diseño muy elevados, y el resultado está absolutamente condicionado por la experiencia del diseñador. Por estos motivos es necesario desarrollar herramientas específicas para el diseño y la optimización de los sistemas multicuerpo (Bestle y Schielen, 1996). Estas herramientas son la síntesis y el análisis de sensibilidad. Sus objetivos fundamentales son:

- Optimizar el comportamiento del sistema.
- Acortar la duración del proceso de diseño.
- Reducir la influencia de la experiencia del diseñador.

La optimización de los sistemas multicuerpo a partir de herramientas matemáticas como la síntesis o el análisis de sensibilidad requiere establecer un modelo matemático que responda adecuadamente al problema de optimización del sistema físico. El proceso de optimización del sistema es un proceso iterativo en el que están involucradas las siguientes fases:

- Establecer el modelo matemático de la optimización del sistema.
- Definir las especificaciones de diseño en el dominio físico.
- Convertir las especificaciones de diseño en restricciones del modelo matemático.
- Resolver el problema matemático.
- Trasladar la solución del problema matemático al dominio físico.
- Verificar el cumplimiento de las especificaciones de diseño, y repetir el proceso

si aquel no es satisfactorio.

Un esquema general del ciclo de diseño de los sistemas multicuerpo es el mostrado en la figura 1.1. La ausencia de convergencia hacia un diseño óptimo indica que no es posible cumplir las especificaciones de diseño desde el diseño de partida, lo que exige cambiar este diseño inicial o redefinir las especificaciones del problema para que puedan ser adecuadamente cumplidas por la solución.

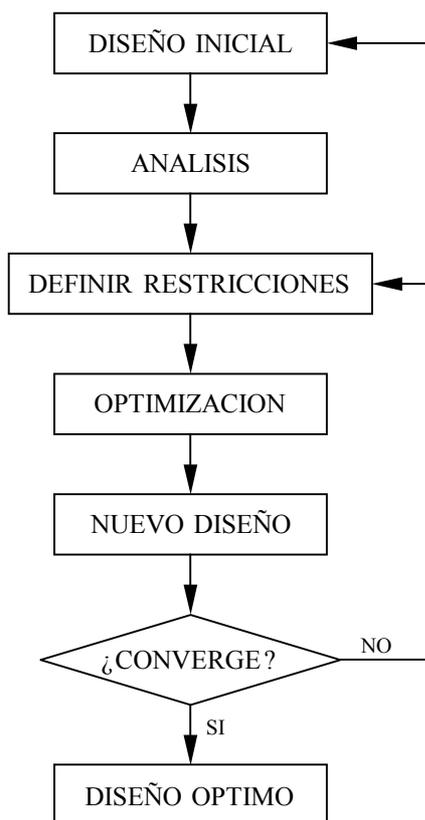


Figura 1.1: Diagrama de flujo del proceso de optimización.

### 1.3.1. Síntesis.

Del latín *synthēsis*, y éste del griego σύνθεσις, el término síntesis define la composición de un todo por la reunión de sus partes. Aplicada al campo del diseño de mecanismos, Reuleaux (1875) la define como el proceso de transformación de unas exigencias de diseño en un mecanismo. La etimología sugiere entonces que la síntesis es lo opuesto al análisis. Sin embargo, análisis y síntesis están íntimamente relacionadas, ya que las conclusiones obtenidas en el análisis son de suma utilidad para afrontar la síntesis.

La síntesis de sistemas multicuerpo se define entonces como el proceso de diseño de un sistema que ofrezca una respuesta establecida de antemano por el diseñador. El atractivo de la síntesis reside en que aborda problemas no estructurados de gran complejidad matemática, donde es preciso alcanzar un cierto grado de equilibrio entre los distintos objetivos, que son por lo general de naturaleza diversa, llegando a una solución de compromiso que satisfaga suficientemente las exigencias de diseño impuestas.

### **1.3.2. Análisis de sensibilidad.**

El análisis de sensibilidad (Petzod et al., 2000), también denominado análisis paramétrico, es un problema de un orden más general que el de la síntesis, y puede considerarse como un paso intermedio entre ésta y el análisis. A través del análisis de sensibilidad se determina la variación de la respuesta del sistema en relación con la variación de las distintas variables de diseño. Aunque son varios los métodos de optimización empleados, casi todos están basados en el conocimiento de las derivadas de una función, denominada función objetivo, respecto de las variables de diseño. Este proceso de determinación de las derivadas es lo que se denomina análisis de sensibilidad, y constituye no pocas veces un primer paso de inestimable utilidad para la síntesis.

Aunque la optimización de los sistemas multicuerpo es un problema importante, aún no ha alcanzado un desarrollo suficiente como para dar lugar a métodos de implantación general. El análisis de sensibilidad determina la tendencia de la función objetivo respecto a las variables de diseño y es muy útil en procesos de diseño interactivo no automáticos. Este diseño interactivo, basado en los métodos de análisis y en el análisis de sensibilidad, constituye no pocas veces la mejor alternativa para un uso general (García de Jalón y Bayo, 1994).

### **1.3.3. Categorías de diseño.**

Las distintas especificaciones de diseño de índole mecánica pueden englobarse en lo que se denominan categorías de diseño (Norton, 1995). A continuación se analizan las categorías de diseño que se utilizan en la formulación de los distintos problemas de optimización de los sistemas multicuerpo. Cada problema de optimización de sistemas multicuerpo puede abarcar desde una hasta la totalidad de las categorías de diseño que

se citan a continuación.

### **1.3.3.1. Categorías cinemáticas de diseño.**

Controlan el movimiento del mecanismo, y relacionan la geometría del mismo con el tiempo. Son las siguientes:

- Generación de función. Se trata de resolver el problema de coordinación de posiciones, velocidades y aceleraciones entre el eslabón de entrada y el eslabón de salida.
- Generación de trayectoria. Se trata de resolver el problema de generación de curvas del eslabón acoplador, donde se especifican posiciones, velocidades y aceleraciones a lo largo de una trayectoria de un punto trazador.
- Conducción de cuerpo rígido. Se trata de resolver el problema de generación de movimiento del eslabón acoplador, donde no sólo es necesario controlar la trayectoria de los puntos sino también la orientación de éste.

Una deficiente puesta en acción de las categorías cinemáticas de diseño puede dar lugar a los siguientes problemas:

- Posiciones inadecuadas debidas a errores geométricos de diseño o de mecanizado.
- Colapso de par cinemático debido a la existencia de situaciones de bloqueo.

### **1.3.3.2. Categorías dinámicas de diseño.**

Dado que la geometría del mecanismo influye en sus características dinámicas, las especificaciones cinemáticas son a menudo el punto de partida del problema de síntesis dinámica. Las categorías dinámicas de diseño controlan la transmisión de fuerzas del sistema, relacionando la geometría del mismo, el tiempo y las fuerzas. Son las siguientes:

- Fuerzas estáticas. Se trata de resolver el problema de la transmisión de fuerzas entre eslabones en equilibrio estático, en función de parámetros que dependen de la geometría del mecanismo como son el ángulo de transmisión o la ventaja mecánica. Una deficiente puesta en acción de las especificaciones referentes a

las fuerzas estáticas puede dar lugar a los siguientes problemas:

- Posiciones inadecuadas debidas a errores geométricos de diseño o de mecanizado.
  - Transmisibilidad inadecuada debida a un ángulo de transmisión inadecuado, a una ventaja mecánica pobre, o a fricciones excesivas.
  - Colapso de par cinemático debido a fuerzas estáticas excesivas.
- Equilibrado. Se trata de resolver el problema de transmisión de fuerzas y momentos de sacudimiento que el sistema transmite al bastidor. Por norma general el problema consiste en eliminar o reducir en lo posible estas fuerzas y momentos de sacudimiento, que originan vibraciones no deseadas. Una deficiente puesta en acción de las especificaciones referentes al equilibrado puede dar lugar a la trepidación del soporte debida al desequilibrio del sistema.
  - Fuerzas dinámicas. De igual modo, se trata de resolver el problema de transmisión de fuerzas entre eslabones, esta vez en equilibrio dinámico. Para ello deben considerarse los efectos de las fuerzas y pares de inercia, que se introducen de manera ficticia para equilibrar dinámicamente el mecanismo a través del principio de D'Alembert. Una deficiente puesta en acción de las especificaciones referentes a las fuerzas dinámicas puede dar lugar a los siguientes problemas:
    - Transmisibilidad inadecuada debida a fricciones y/o fuerzas dinámicas excesivas.
    - Colapso de par cinemático debido a fuerzas dinámicas excesivas.
  - Respuesta movimiento-tiempo. Se trata de resolver el problema de la ley temporal de transmisión de fuerzas entre eslabones. Un ejemplo típico de respuesta movimiento-tiempo es el diseño de resortes que conmutan un proceso. Una deficiente puesta en acción de las especificaciones referentes a la respuesta movimiento-tiempo puede dar lugar a los siguientes problemas:
    - Errores en la posición deseada debido a una respuesta incorrecta.
    - Transmisibilidad inadecuada debida a uniones incorrectas.

- Trepidación del soporte debida a un par motor variable, a aceleraciones excesivas o a la existencia de impactos contra topes rígidos.
- Ruido debido a la existencia de impactos contra topes rígidos.
- Efecto de holguras y tolerancias. Se trata de limitar las inexactitudes producidas en el comportamiento cinemático y dinámico del mecanismo, consecuencia de las holguras y las tolerancias de fabricación, así como las vibraciones y el ruido asociadas a las mismas. Un problema típico de efecto de holguras y tolerancias es la limitación de la desalineación del carro en las prensas mecánicas de embutición, debido al juego entre las guías del carro y las colisas. Una deficiente puesta en acción de las especificaciones referentes al efecto de holguras y tolerancias puede dar lugar a los siguientes problemas:
  - Errores en la posición deseada debido a la existencia de holguras excesivas.
  - Trepidación del soporte debida a la existencia de holguras excesivas.
  - Colapso de par cinemático debido a la existencia de holguras o fuerzas de impacto excesivas.
  - Ruido debido a la existencia de holguras excesivas.
- Dinámica de cuerpo elástico. Se trata de limitar las inexactitudes producidas en el comportamiento cinemático y dinámico del mecanismo, consecuencia de las excesivas deformaciones elásticas de los eslabones. Una deficiente puesta en acción de las especificaciones referentes a la dinámica del cuerpo elástico puede dar lugar a los siguientes problemas:
  - Errores en la posición deseada debido a la existencia de flexiones excesivas en los eslabones.
  - Trepidación del soporte debida a la existencia de flexiones excesivas en los eslabones.
  - Colapso de eslabón debido a la existencia de vibraciones o flexiones excesivas en los eslabones.
  - Ruido debido al fenómeno de resonancia.

Cada una de las distintas especificaciones de diseño añade al problema nuevas

variables, de forma que cuanto más completa es la síntesis mayor es el número de variables involucradas en el problema. Una síntesis que abarque varias especificaciones de diseño puede descomponerse en varios subproblemas que abarquen, cada uno, una única especificación. Por ejemplo, una síntesis de generación de función con limitación del desequilibrio puede resolverse primero como una síntesis exclusivamente cinemática, y una vez obtenidas las variables que afectan a la cinemática del problema se resuelve la síntesis dinámica. Sin embargo, el hecho de fijar determinadas variables obtenidas en fases anteriores del proceso puede impedir la consecución de los objetivos del diseño en una fase posterior, de tal forma que sea preciso un paso atrás en el proceso de diseño. En general, la probabilidad de alcanzar mejores diseños aumenta así con el número de iteraciones.

#### **1.3.4. Taxonomía de la síntesis de los sistemas multicuerpo.**

A continuación se establece una clasificación de los distintos tipos de síntesis de sistemas multicuerpo de acuerdo a los diferentes criterios que se citan.

Según los parámetros a determinar:

- Síntesis de tipo, o síntesis de Reuleaux. Aborda el problema de definir el tipo de cadena cinemática y los eslabones a emplear en función del uso al que se destina el sistema.
- Síntesis de número, o síntesis de Gruebler. Establece la movilidad, la topología, los isomorfismos y las inversiones cinemáticas del sistema, de tal forma que éste satisfaga los requisitos exigidos en el diseño. Se trata, en suma, de garantizar que el sistema consta del número preciso de elementos, convenientemente conectados para que se mueva del modo deseado.
- Síntesis estructural, o síntesis sistemática. Se llama síntesis estructural a aquella que comprende la síntesis de tipo y la síntesis de número. Existen muchas formas de obtener nuevas configuraciones de los sistemas en función de los eslabones y los pares cinemáticos que se añadan a sistemas preexistentes. Las técnicas más empleadas son las siguientes (Nieto, 1978):
  - Adición de díadas con pares de giro.
  - Adición de díadas con pares prismáticos.

- Adición de díadas con pares helicoidales.
- Adición de díadas con pares cilíndricos.
- Adición de resortes.
- Adición de elementos unirrigidos, tales como correas, cuerdas o cables.
- Adición de díadas con pares superiores de leva y seguidor.
- Equivalencia cinemática. Se sustituyen los pares cinemáticos por otros que conservan el movimiento relativo, variando sólo su forma. Los sistemas equivalentes lo son sólo instantáneamente, puesto que la equivalencia cinemática se conserva en una sola posición, y sólo sirven para hacer más sencillos los análisis de velocidades y aceleraciones.
- Degeneración cinemática. Se obtienen nuevos sistemas modificando las dimensiones de los eslabones o los pares cinemáticos del sistema preexistente.
- Adición de barras flexibles. En estos mecanismos la movilidad de los eslabones se obtiene en función de la propia deformación elástica de éstos, de forma que con sistemas más rígidos se eliminan pares cinemáticos, reduciendo también así el desgaste y el coste de fabricación, y ofreciendo respuestas interesantes ante fenómenos de inestabilidad, vibración o impacto.
- Inversión cinemática. A partir de una única cadena cinemática se obtiene diferentes sistemas modificando el eslabón considerado fijo.
- Síntesis dimensional, o síntesis de Burmester. Se aplica esta denominación genérica a todas las síntesis que determinan las dimensiones de los eslabones de un sistema multicuerpo. Algunos autores reservan el término para las síntesis geométricas de guiado de puntos que elaboró Burmester.

Según la dimensión espacial del movimiento:

- Síntesis plana. Es la síntesis de sistemas con movimiento plano.
- Síntesis espacial. Es la síntesis de sistemas con movimiento espacial.

Según las especificaciones de diseño de la síntesis:

- Síntesis de posición. Las especificaciones de la síntesis son de posición de puntos o eslabones.
- Síntesis cinemática. Las especificaciones de la síntesis son de tipo cinemático, generalmente de velocidad o aceleración.
- Síntesis dinámica. Las especificaciones de la síntesis son de tipo dinámico.
- Síntesis elastocinética. Introduce en el diseño las deformaciones elásticas de los eslabones.
- Síntesis elastotérmica. Introduce en el proceso de síntesis las deformaciones inducidas por los cambios de temperatura.

Según la categoría de diseño implicada en la síntesis:

- Síntesis de generación de funciones, o de coordinación de barra. Trata el problema de coordinar los parámetros de posición y cinemáticos de los eslabones de entrada y salida de un mecanismo. En función de la topología del mecanismo la generación de funciones puede referirse a la coordinación de ángulos y/o desplazamientos de los eslabones de entrada y salida.
- Síntesis de generación de trayectorias. Aborda el problema de generación de curvas del acoplador, donde se especifican los parámetros cinemáticos a lo largo de la trayectoria de un punto trazador. Algunos de los casos más típicos de generación de trayectorias son los siguientes:
  - Síntesis de generación de trayectorias simétricas respecto de un eje.
  - Síntesis de generación de trayectorias con puntos dobles.
  - Síntesis de generación de trayectorias con cúspides o puntos de retroceso.
  - Síntesis de generación de trayectorias rectilíneas.
  - Síntesis de generación de trayectorias circulares.
  - Síntesis de mecanismos con detención.
  - Síntesis de mecanismos cognados, o emparentados (Hartenberg y Denavit, 1959). Son los que generan idéntica trayectoria y pueden sustituir en

ocasiones al mecanismo original.

- Síntesis de conducción de cuerpo rígido. Se trata de resolver el problema de generación de movimiento del eslabón acoplador, donde se controlan la trayectoria de los puntos del eslabón acoplador y también la orientación de éste.

Según la exactitud exigida a la solución:

- Síntesis de precisión, o exacta. Se aplica este término cuando las condiciones exigidas en la síntesis pueden cumplirse exactamente. En la práctica, las tolerancias de fabricación y las holguras existentes en los pares cinemáticos convierten en prácticamente inservibles a las síntesis exactas.
- Síntesis aproximada. Se aplica este término a aquellas síntesis en las que las condiciones de diseño exigidas no pueden satisfacerse sin un cierto error.

Según el tipo de precisión pedida:

- Síntesis con puntos de precisión. Se trata de una síntesis exacta con un número finito de especificaciones de diseño. La síntesis de puntos de precisión permite obtener muchas soluciones, aunque la convergencia del problema limita mucho el número de puntos de precisión que se pueden escoger, y la solución puede desviarse mucho fuera de los mismos.
- Síntesis de mínimos cuadrados. Aproxima una única solución basándose en la técnica de mínimos cuadrados. Puede fijarse un gran número de puntos pero, aunque la aproximación es buena, se pierde la precisión en los puntos concretos.
- Síntesis con bandas de precisión, o síntesis de precisión selectiva. El concepto de precisión selectiva fue introducido por Kramer y Sandor (1975) en sus trabajos sobre generación de trayectorias con el cuadrilátero articulado. Se trata de una síntesis aproximada con un número finito de especificaciones de diseño. Basándose en el concepto de precisión en la vecindad permite la utilización de bandas de precisión que aproximan muy bien las posibles soluciones. El hecho de imponer las especificaciones de diseño en forma de banda y no como una síntesis exacta, como en el caso de la síntesis con puntos de precisión, otorga gran flexibilidad al proceso de búsqueda de solución, aunque también pueden aparecer problemas de convergencia.

Según el método de resolución de la síntesis:

- Síntesis gráfica. Es la síntesis que utiliza procedimientos puramente gráficos. Limitada a sistemas simples, tiende a ser demasiado específica y a veces difícil de usar.
- Síntesis *overlay*, o síntesis de tanteo gráfico. Se trata de una síntesis aproximada que se realiza por tanteo, con la ayuda de la superposición de gráficos. Aunque es sencilla, su convergencia es mala en numerosas ocasiones.
- Síntesis por gráficos de diseño. Se llama así a la síntesis que se obtiene a través de tablas o nomogramas procedentes del análisis de otros sistemas del mismo tipo.
- Síntesis analítica. Es la que se basa en la utilización de métodos puramente analíticos. Son conocidos los métodos basados en los polinomios de Chevyshev, o los basados en el álgebra de números complejos, denominados genéricamente síntesis de Bloch.
- Síntesis grafoanalítica. Es la que combina métodos gráficos y analíticos.
- Síntesis óptima. Es la síntesis basada en técnicas de programación matemática, en la que se trata de optimizar el valor de una función objetivo cuyas variables están sujetas a unas determinadas restricciones. En la actualidad el desarrollo alcanzado en las prestaciones de las computadoras digitales ha impulsado enormemente la síntesis óptima.
- Síntesis heurística. Se basa en algoritmos donde se pretende alcanzar valores satisfactorios para la función objetivo, sacrificando el concepto de óptimo a cambio de un menor coste computacional. A las primeras heurísticas (Silver et al., 1980), con interesantes aportaciones a la síntesis de mecanismos (Lee y Freudenstein, 1976) han sucedido con éxito nuevas técnicas metaheurísticas como los algoritmos genéticos (Goldberg, 1989; Davis, 1991; Sakawa, 2002), los algoritmos meméticos y las redes neuronales (Aleksander y Morton, 1990; Freeman y Shapura, 1993; Díaz y Glover, 1996), de aplicación en la moderna síntesis de mecanismos.
- Síntesis conceptual. Es la síntesis que en una temprana fase de diseño establece

el tipo de solución correspondiente a un problema concreto a partir de un método sistemático de generación de conceptos. Los conceptos extraídos de diferentes diseños pueden así combinarse para generar una gran variedad de nuevas alternativas (Han, 1999).

## **1.4. Formulaciones para el análisis y la optimización de sistemas multicuerpo.**

### **1.4.1. Formulación simbólica versus formulación numérica.**

Las herramientas basadas en formulación simbólica no procesan números, sino nombres de variables y expresiones analíticas que las relacionan. La formulación simbólica está constituida por una serie de expresiones matemáticas que modelan el comportamiento cinemático y dinámico del sistema. Están disponibles en herramientas de matemática simbólica como MAPLE, MATHEMATICA o MATLAB, y pueden a su vez incorporarse como bibliotecas en otros programas. La formulación simbólica, aplicada a los sistemas multicuerpo, presenta las siguientes ventajas:

- Es más eficiente, puesto que elimina muchas operaciones innecesarias.
- Permite ver explícitamente la influencia de cada variable en el comportamiento del sistema.

La formulación simbólica resulta ventajosa cuando todos los posibles movimientos del sistema están contenidos en unas ecuaciones de movimiento únicas. Esto no ocurre en el caso de que haya cambios cualitativos en la configuración cinemática del sistema durante el movimiento, como consecuencia de impactos o rozamientos.

La formulación numérica formula las ecuaciones del movimiento numéricamente, sin generar nuevas expresiones analíticas. Aunque es menos eficiente, es más sencilla de utilizar, y permite construir herramientas de propósito general para el análisis cinemático y dinámico de sistemas multicuerpo de todo tipo. Las principales ventajas asociadas a la formulación numérica en el ámbito de los sistemas multicuerpo son las siguientes:

- Es más flexible, puesto que su formulación es menos específica.

- Genera problemas de menor tamaño, puesto que los algoritmos para el tratamiento simbólico de las variables son mucho más largos y complejos que los algoritmos de manipulación de matrices o de resolución de sistemas de ecuaciones.

Los últimos avances en métodos numéricos, entre ellos el uso de técnicas de matrices dispersas, que eliminan las operaciones que involucran a términos nulos, o la utilización de formulaciones dinámicas avanzadas, aumentan día a día la eficiencia de las formulaciones numéricas.

La selección entre las dos formulaciones no es obvia y depende de cada caso concreto, puesto que no se puede afirmar con rotundidad que uno de los planteamientos sea mejor, en general, que el otro (Pagalday, 1994).

#### **1.4.2. Sistemas de coordenadas.**

El primer paso que debe darse para afrontar con éxito cualquier problema de análisis o síntesis de sistemas multicuerpo es la elección de un sistema de coordenadas adecuado, que defina en todo momento la posición, la velocidad y la aceleración de todos los elementos que componen el sistema. Los distintos autores resuelven este problema en función de las ventajas que cada sistema de coordenadas ofrece para cada aplicación específica. De manera general, los criterios utilizados para elegir las coordenadas deben incluir siempre:

- La sencillez de la formulación.
- La eficiencia computacional.
- La generalidad de la formulación.

A continuación se presentan los distintos sistemas de coordenadas utilizados en problemas de análisis y síntesis de sistemas multicuerpo.

##### **1.4.2.1. Coordenadas independientes.**

Su número es mínimo y coincide con el número de grados de libertad del sistema, por lo que las ecuaciones del movimiento se reducen a ecuaciones diferenciales ordinarias.

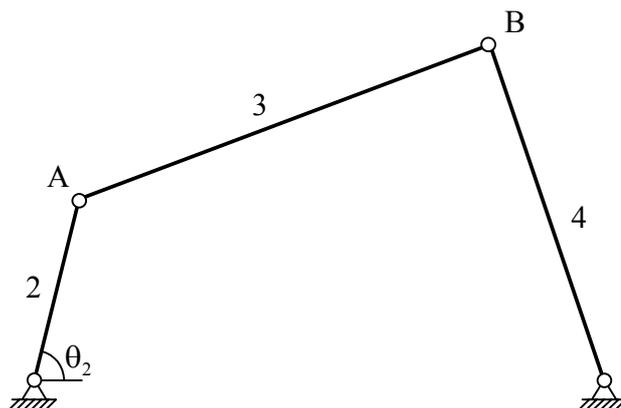


Figura 1.2: Coordenadas independientes para el cuadrilátero articulado.

Aunque aparentemente constituyen la mejor opción, no son una solución aceptable puesto que no son capaces de definir inequívocamente la posición del sistema. Por ejemplo, el cuadrilátero articulado de la figura 1.2, que posee un grado de libertad y, por tanto, una única coordenada independiente que coincide con el ángulo  $\theta_2$ , suponiendo que 2 es el eslabón de entrada, admite, sin embargo, dos posibles posiciones para los eslabones 3 y 4. Esta circunstancia invalida el uso de las coordenadas independientes para los problemas de análisis o síntesis de sistemas multicuerpo, y obliga a la utilización de las coordenadas dependientes.

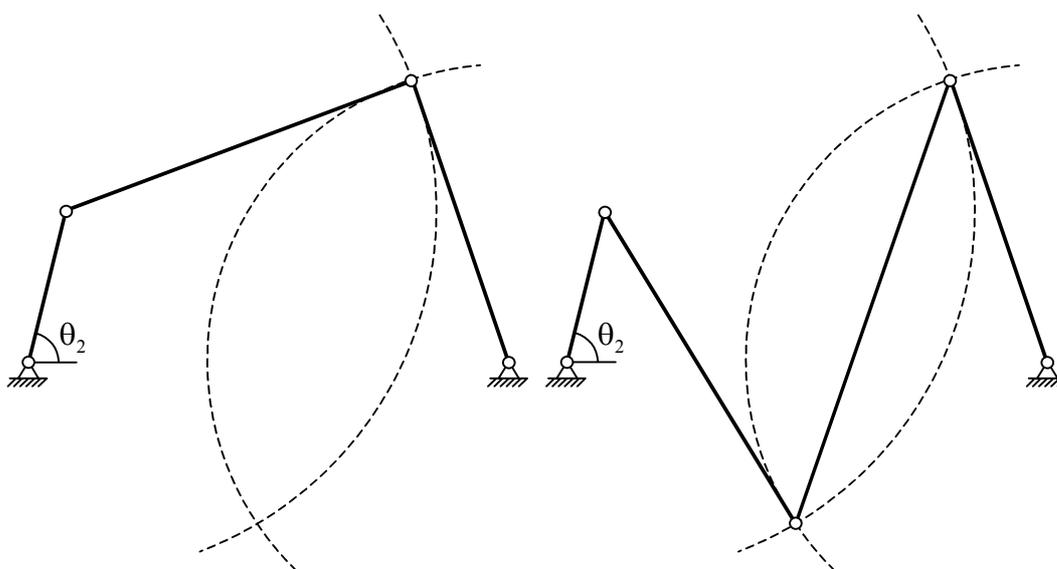


Figura 1.3: Dos soluciones para el cuadrilátero articulado definido por su coordenada independiente.

### **1.4.2.2. Coordenadas dependientes.**

Las coordenadas dependientes se relacionan entre sí mediante ecuaciones algebraicas de restricción, cuyo número es la diferencia entre el número de aquellas y el número de grados de libertad del sistema. A continuación se enumeran los tipos de coordenadas dependientes más utilizados.

#### **1.4.2.2.1. Coordenadas relativas.**

Aunque introducidas previamente para el análisis de robots en serie, fueron utilizadas por vez primera en problemas de análisis de mecanismos espaciales por Hartenberg y Denavit (1964). Definen la posición de cada eslabón en función de la posición del eslabón que lo antecede en la cadena cinemática, especificando los grados de libertad del movimiento relativo entre ambos. Para el cuadrilátero articulado, este movimiento relativo viene dado por los ángulos que las barras forman entre sí. Se genera así un sistema de coordenadas con el número mínimo de coordenadas relativas, que coincide con el número de grados de libertad del sistema en el caso particular de sistemas de cadena cinemática abierta. Las ecuaciones de restricción reciben en este caso el nombre de ecuaciones de cierre, puesto que aparecen en aquellos puntos donde la cadena cinemática genera una estructura de árbol.

Las ventajas más importantes derivadas de la utilización de coordenadas relativas son las siguientes:

- El número de coordenadas dependientes utilizado es mínimo, lo que aumenta la eficiencia computacional del algoritmo utilizado. Este hecho es particularmente importante en sistemas de cadena cinemática abierta, donde el número de coordenadas relativas coincide con el número de grados de libertad del sistema y, por tanto, con el número de coordenadas independientes.
- Contiene los grados de libertad del movimiento relativo de los pares cinemáticos, lo que puede ser particularmente importante en el caso de existencia de motores o actuadores en dichos pares.

Por otro lado, los principales inconvenientes del uso de coordenadas relativas son los siguientes:

- La formulación matemática que se obtiene es compleja, puesto que las matrices que aparecen en las ecuaciones del movimiento contienen términos altamente no lineales en las coordenadas y en sus derivadas temporales.
- Requiere un trabajo extra de preproceso y postproceso puesto que es necesario convertir los parámetros cinemáticos del movimiento absoluto de cada eslabón al movimiento relativo entre eslabones, y viceversa.

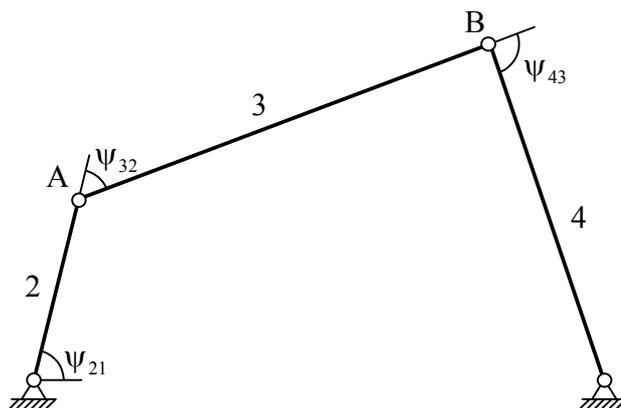


Figura 1.4: Coordenadas relativas para el cuadrilátero articulado.

#### 1.4.2.2.2. Coordenadas cartesianas.

También llamadas coordenadas de punto de referencia, las coordenadas cartesianas se formulan para evitar los inconvenientes asociados al uso de coordenadas relativas. En general se define la posición de un eslabón mediante las coordenadas cartesianas de un punto del mismo, al que se llama punto de referencia y que suele coincidir con el centro de masa del eslabón, y una serie de parámetros que definen la orientación del eslabón. En el caso particular de sistemas planos, son necesarias tres coordenadas cartesianas para definir absolutamente la posición de un elemento del sistema: se define la posición del punto de referencia mediante dos coordenadas cartesianas, y la orientación del elemento mediante un ángulo. El cuadrilátero articulado de la figura 1.4 se caracteriza entonces por seis coordenadas, que coinciden con las coordenadas de los centros de masas de las barras, y los tres ángulos que forman las barras con la dirección horizontal.

Las ventajas más importantes derivadas de la utilización de coordenadas cartesianas son las siguientes:

- Se maneja directamente la información sobre la posición, velocidad y aceleración absoluta de cada elemento, por lo que desaparece el trabajo extra de preproceso y postproceso que implicaba la utilización de las coordenadas relativas.
- Las matrices que aparecen en las ecuaciones del movimiento tienen muy pocos términos no nulos, por lo que puede adoptarse una formulación adecuada a este tipo de matrices, que resulta particularmente eficiente.
- Las restricciones se establecen a escala local, dado que las ecuaciones de restricción que introduce un par cinemático sólo implican a las coordenadas de los dos elementos conectados. Este hecho hace posible que las ecuaciones de restricción sean independientes de la complejidad del sistema.

Por otro lado, el principal inconveniente del uso de coordenadas cartesianas es el elevado número de coordenadas que son necesarias para definir la posición del sistema, lo que incide negativamente en el coste computacional.

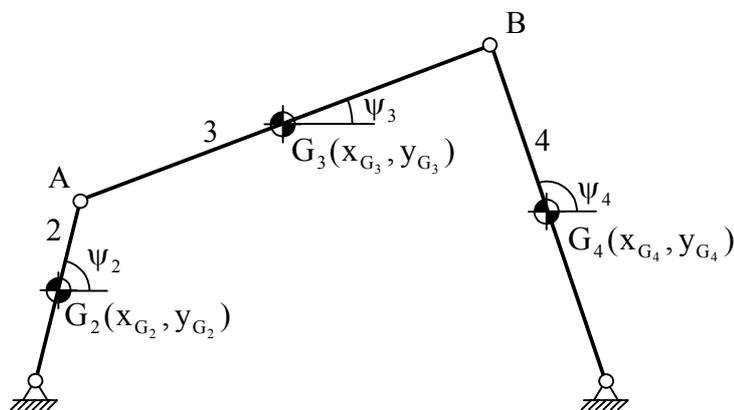


Figura 1.5: Coordenadas cartesianas para el cuadrilátero articulado.

#### 1.4.2.2.3. Coordenadas naturales.

Introducidas originalmente por García de Jalón et al. (1981) y Serna et al. (1982) para sistemas planos, y por García de Jalón et al. (1986) para sistemas espaciales, constituyen una importante alternativa a la utilización de las coordenadas cartesianas. Se trata de una formulación que es capaz de definir por completo la posición de un sistema multicuerpo evitando el uso de variables angulares. En general, la posición y

orientación de los elementos del sistema se define aquí mediante las coordenadas cartesianas de unos puntos, denominados puntos básicos, y los cosenos directores de una serie de vectores unitarios convenientemente distribuidos por el sistema.

En el caso de sistemas planos, las coordenadas naturales pueden considerarse una evolución de las coordenadas cartesianas, donde los puntos de referencia, habitualmente ubicados en el centro de masa de cada elemento, se mueven a los pares cinemáticos, de tal modo que cada elemento debe contar con al menos dos puntos básicos. En el cuadrilátero articulado de la figura 1.5, las coordenadas naturales son las coordenadas cartesianas de los puntos A y B, que son los puntos que definen los pares cinemáticos del mecanismo. Al estar cada elemento definido por al menos dos puntos básicos, su posición y orientación puede determinarse fácilmente a partir de las coordenadas cartesianas de dichos puntos. Como norma general, la definición de un sistema de coordenadas naturales en un sistema plano debe cumplir los siguientes requisitos:

- Cada elemento debe contener, al menos, dos puntos básicos.
- Cada par cinemático de giro debe coincidir con un punto básico.

Las ventajas asociadas al uso de coordenadas naturales para problemas de sistemas planos son las siguientes:

- El número de coordenadas naturales es sensiblemente menor que el número de coordenadas cartesianas.
- Desaparecen las variables angulares para definir la orientación de un elemento.
- Las ecuaciones de restricción aparecen en los pares cinemáticos, o como consecuencia de la condición de sólido rígido, por lo que las ecuaciones de restricción que se generan son lineales o cuadráticas.

Por el contrario, cabe citar los siguientes inconvenientes de su utilización:

- Su definición no es única y depende de la configuración del sistema.
- Su definición no es sencilla, lo que dificulta considerablemente su generación automática.
- La obtención de las ecuaciones de restricción que aparecen en determinado pares

cinemáticos, como el par engranaje-engranaje, es compleja.

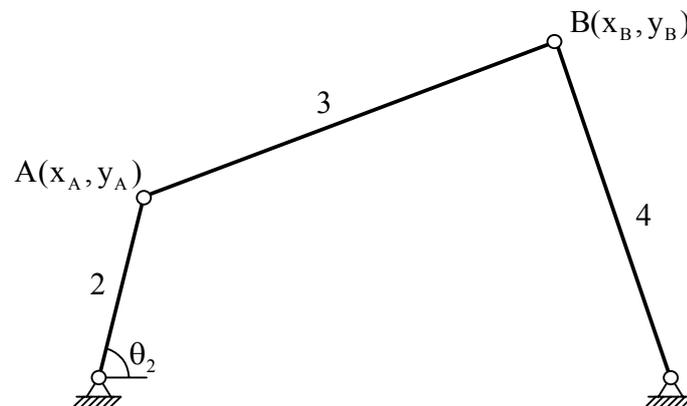


Figura 1.6: Coordenadas naturales para el cuadrilátero articulado.

#### 1.4.2.2.4. Coordenadas mixtas.

Las coordenadas mixtas se obtienen de manera muy sencilla, añadiendo a las coordenadas cartesianas o a las coordenadas naturales las coordenadas relativas que contemplen los grados de libertad del movimiento relativo entre los componentes del sistema que sean de interés. De esta forma se puede evitar una formulación en coordenadas relativas, a la vez que se puede manejar directamente los grados de libertad del movimiento relativo de los pares cinemáticos donde existan motores o actuadores, lo que simplifica enormemente las expresiones de las fuerzas motoras aplicadas.

Algunos autores como Jerkovski (1978) o Kim y Vanderploeg (1986) utilizan sistemas de coordenadas distintos en distintas etapas del análisis. Esta metodología, que puede aumentar apreciablemente la eficiencia del análisis, no debe ser confundida con la utilización de coordenadas mixtas.

### 1.5. Estado del arte.

#### 1.5.1. Síntesis cinemática.

El desarrollo en los métodos de análisis y optimización de los sistemas multicuerpo va inevitablemente unido al diseño de las máquinas y mecanismos. Aunque el interés en el estudio teórico del comportamiento de las máquinas despertó ya en las culturas

clásicas, fue Reuleaux (1875) el que sentó las bases de la cinemática moderna, otorgando una identidad propia al concepto de síntesis de mecanismos.

Watt, que patentó en 1769 la máquina de vapor de ciclo completo, a partir del diseño de la máquina de vapor atmosférica de Newcomen, fue el verdadero precursor de la síntesis de mecanismos (Strandh, 1982). Al diseñar la máquina se enfrentó al problema de lograr que el émbolo o pistón se moviera verticalmente en línea recta sin romperse, pese a estar conectado a un balancín cuyo extremo se movía en línea curva. Watt diseñó un sistema en el cual dos palancas articuladas guiaban al vástago, formando un paralelogramo que se movía al funcionar la máquina, resolviendo así el problema del movimiento rectilíneo de un punto del eslabón acoplador del cuadrilátero articulado. A diferencia de sus antecesores, que habían centrado su estudio en el movimiento de los eslabones de entrada y de salida, Watt abordó el problema de la determinación del movimiento de un punto cualquiera del acoplador. Basándose en estos estudios fue capaz de construir una máquina de vapor de doble acción, en la que la primitiva cadena que enlazaba el pistón quedaba reemplazada por un mecanismo capaz de transmitir la fuerza en dos sentidos. Este hecho supone, sin ninguna duda, un hito singular en la síntesis de mecanismos.

El impacto de este mecanismo de varillaje paralelo fue tan notable que en las décadas siguientes muchos estudiosos se apartaron del estudio sistemático de la cinemática para dedicarse a inventar curiosos aparatos de movimiento rectilíneo –casi siempre de dudosa utilidad práctica– como el compás compuesto de Peaucillier o el eslabonamiento de línea recta de Chebyshev. Este último hizo importantes aportaciones a la síntesis de mecanismos, entre las que destacan el teorema de la triple generación de curvas del acoplador y la teoría de aproximación polinomial de curvas, que empleó en la generación de una amplia variedad de mecanismos con error mínimo. Los discípulos de Chebyshev, agrupados en la denominada escuela rusa, hicieron también importantes aportaciones a la síntesis analítica, con los desarrollos de Bloch, en álgebra compleja, Dimentberg, en álgebra dual, o Kislitsin, en álgebra tensorial.

Casi paralelamente, en Alemania, Burmester elabora una colección de los métodos geométricos de síntesis de mecanismos más importantes utilizados en la época y utiliza métodos de geometría proyectiva para resolver el problema de guiado de biela

con trayectoria rectilínea, que después desarrollarán Hackmueller, en coordenadas complejas, Artobolevski, en coordenadas cartesianas, y Kaufman, en ecuaciones complejas. También elabora una teoría para la síntesis dimensional de mecanismos planos con posicionamiento de puntos sobre una trayectoria curva, dando origen a lo que en la actualidad se conoce como síntesis dimensional, o síntesis de Burmester. Gruebler aporta diversos teoremas para la determinación de la movilidad de los mecanismos, originando de algún modo la síntesis de número.

A pesar de que Freudenstein (1959) afirma que antes de 1957 no se conocía el problema de la síntesis de mecanismos en los Estados Unidos, gran parte del avance que en la segunda mitad del siglo XX ha experimentado este campo se debe al esfuerzo investigador de lo que ha dado en llamarse la escuela norteamericana, cuya seña de identidad es la implementación exhaustiva de métodos analíticos y numéricos para la resolución de problemas de síntesis de mecanismos en computadoras digitales.

Una aportación temprana es la de Svodoba (1948), que desarrolla un método numérico basado en técnicas nomográficas para el mecanismo de control de tiro. Otra importante contribución es la de Hrones y Nelson (1951) con un atlas que contiene casi diez mil curvas del acoplador correspondientes a diferentes configuraciones del cuadrilátero articulado.

Freudenstein (1955, 1956) publica los primeros trabajos en síntesis cinemática de mecanismos por computador, centrada en la resolución del problema de generación de funciones en el cuadrilátero articulado, planteándolo como un problema de síntesis con puntos de precisión. McLarnan (1963) extiende el método sugerido por Freudenstein al mecanismo de seis barras y Hartenberg y Denavit (1964) desarrollan un método iterativo para el análisis de desplazamiento en mecanismos espaciales, con aportaciones especialmente valiosas en el campo de las cadenas cinemáticas abiertas, que amplían posteriormente al análisis de velocidades y aceleraciones.

La mayoría de los trabajos publicados sobre síntesis cinemática no abordan el problema general de la síntesis de mecanismos, sino que plantean la resolución de problemas muy concretos, utilizando formulaciones especialmente adaptadas y que son muy poco generalizables.

Destaca la gran cantidad de trabajos dedicados al cuadrilátero articulado (Kramer y

Sandor, 1975; Haulin et al., 1991; Wang y Sodhi, 1996; Hernández et al., 1997; Bawab et al., 1997; Guangchun y Liju, 1998; Lee et al., 1999; Yan y Soong, 2001; Simionescu y Beale, 2002; Todorov, 2002), lo que demuestra de alguna manera su gran importancia como mecanismo generador de funciones.

También existen trabajos referidos a la síntesis de mecanismos diversos, como el mecanismo de cinco barras (Nieto, 1974; Balli y Chand, 2001; Noklevy y Podhorodesky, 2001; Balli y Chand, 2002), el mecanismo de seis barras (Bawab et al., 1996), el mecanismo de Stephenson (Schreiber et al., 2002), el mecanismo de Génova (Figlioni y Ángeles, 2002), el mecanismo de retorno rápido de Withworth (Zabalza et al., 1999) o los mecanismos derivados de los grupos de Assur (Innocenti, 1995). Mención especial merece la gran cantidad de trabajos publicados sobre la síntesis cinemática de manipuladores de cadena abierta (Cecarelli, 1995; Agrawal et al., 1998; Zabalza, 1999; Collins, 2002), con aplicaciones en el campo de la robótica (Cervantes et al., 2001). En todos estos trabajos se plantean formulaciones especialmente adaptadas a los mecanismos objeto de estudio, consiguiendo formulaciones muy eficientes pero escasamente generalizables a otros mecanismos. Aunque son los menos, existen también importantes contribuciones a la creación de un cuerpo de doctrina en el campo de la síntesis cinemática a través de la propuesta de diferentes métodos generales de síntesis para mecanismos planos (Han, 1966; Avilés et al., 1985) y espaciales (Vallejo et al., 1996; Jiménez et al., 1997; Alba et al., 2000).

En lo que respecta a la aplicación de métodos heurísticos en la síntesis cinemática, se han utilizado con éxito los algoritmos genéticos, y se proponen técnicas como el elitismo, la modificación Lamarckiana o los algoritmos meméticos (Avilés et al., 1997) para aliviar el coste computacional inherente a estos métodos. También son de aplicación las redes neuronales de programación matemática (Li, 1998), fundamentalmente en la optimización de sistemas multicuerpo de cadena abierta (Li y Gupta, 1998).

### **1.5.2. Síntesis dinámica.**

Los trabajos publicados en el campo de la síntesis dinámica son todavía escasos, en comparación con los vistos en síntesis cinemática. A diferencia de la síntesis cinemática, donde las ecuaciones que restringen el comportamiento del mecanismo

son ecuaciones algebraicas no lineales, en la síntesis dinámica estas ecuaciones son algebraico-diferenciales, lo que complica sensiblemente el problema. Con todo, existe una gran variedad de formulaciones dentro de la síntesis dinámica, como consecuencia de la combinación de distintas funciones objetivo, restricciones y algoritmos de optimización.

Los primeros trabajos sobre dinámica de sistemas multicuerpo (Fletcher et al., 1963; Hooker y Margulies, 1965) tienen lugar en el ámbito de los satélites artificiales. Otros trabajos más generales establecen las primeras técnicas de análisis estático (Denavit y Hartenberg, 1965) y dinámico (Uicker, 1965) en sistemas multicuerpo espaciales. Roberson y Wittenburg (1966) establecen un hito importante al generar las ecuaciones del movimiento para sólidos rígidos arbitrariamente interconectados formando estructuras en árbol.

La literatura sobre cálculo de sensibilidades en sistemas dinámicos es también escasa (Krishnaswami y Bhatti, 1984). Los primeros trabajos publicados son los de Haug y Arora (1978, 1979) en los que se adapta la teoría de la variable adjunta propuesta por Tomovic y Vukobratovic (1972) al diseño óptimo de mecanismos. Esta teoría, tomada de los campos del control óptimo y de la optimización de estructuras, requiere en el ámbito de la dinámica de dos integraciones numéricas de las ecuaciones diferenciales, una hacia delante y otra hacia atrás. Haug et al. (1982, 1986) desarrollan la teoría para sistemas más complejos, incorporando las restricciones más típicas existentes en los mecanismos y desarrollando ejemplos de gran complejidad.

Frente a estos trabajos, otros autores (Krishnaswami y Bhatti, 1984; Chang y Nikravesh, 1985) proponen el método de diferenciación directa, basado en otro trabajo de Tomovic (1963), que simplifica considerablemente la formulación del problema, aunque no se resuelven problemas tan complejos como los descritos anteriormente. En este método, las ecuaciones del movimiento se derivan directamente para obtener un nuevo conjunto de ecuaciones que son las sensibilidades de la respuesta dinámica, definidas como las derivadas de las ecuaciones del movimiento respecto a las variables de diseño.

Ashrafioun y Mani (1990) utilizan técnicas de diferenciación directa y computación simbólica, para evitar el cálculo numérico de las sensibilidades. Este trabajo es el primero en el que, a partir de formulaciones generales, se calculan sensibilidades en

problemas de dinámica de mecanismos espaciales. A este siguen otros trabajos que contribuyen a la determinación de las sensibilidades dinámicas (Krishnaswami y Bhatti, 1984; Pagalday, 1994; Conde, 2001).

Como en el caso de la síntesis cinemática, son también aquí frecuentes los trabajos que presentan la resolución de problemas concretos. Son relativamente numerosos los trabajos dedicados al equilibrado (Berkof, 1975; Tepper, 1975), colisiones (Chang y Huston, 2001), los mecanismos con movimiento intermitente (Ehle y Haug, 1982), la síntesis dinámica de robots y manipuladores de cadena abierta (Chou y Sadler, 1993; Huang y Zhao, 1994; Ascher et al., 1997; Saramago, 1998; Zhu et al., 1999) o la síntesis dinámica de mecanismos flexibles (Imam y Sandor, 1973; Cleghorn et al., 1981; Boutaghou y Erdman, 1993; Avilés, 2000). También son muchos los trabajos sobre síntesis dinámica en el ámbito de la biomecánica del deporte (Álvarez, 1996; Anderson y Pandy, 1999) y de la motricidad humana (Anderson, 1999). Sin embargo, todavía queda un largo camino para establecer una metodología de uso general para la síntesis dinámica de sistemas multicuerpo, pese a las interesantes contribuciones en este sentido (Urruzola et al., 1997; Pagalday, 1994; Conde, 2001).

### **1.5.3. Síntesis asistida por ordenador.**

Kemler y Howe (1951) publican la primera referencia acerca de las aplicaciones de las computadoras en el diseño de mecanismos, que ilustran con cálculos de posiciones, velocidades y aceleraciones de mecanismos de retorno rápido. Freudenstein y Sandor (1959) adaptaron las técnicas gráficas de síntesis dimensional para generación de trayectorias sugeridas por Burmester a la resolución por computadora. El algoritmo resultante, ejecutado por lotes en una computadora IBM 650, será la base de los códigos KINSYN (*KINematic SYNthesis*) y LINCAGES (*Linkages INteractive Computer Analysis and Graphically Enhanced Synthesis*).

En la década de 1960 las computadoras digitales se vuelven más accesibles a los investigadores, que empiezan a abandonar los métodos gráficos, la regla de cálculo y las computadoras analógicas para resolver problemas de síntesis con puntos de precisión en procesos por lotes ejecutados en computadoras digitales.

La década de 1970 se caracteriza porque las prestaciones de las computadoras se incrementan de forma espectacular. Se abandona paulatinamente el proceso por lotes

por el proceso interactivo, a la vez que el desarrollo en la visualización de gráficos beneficia enormemente la interacción con la computadora. Aparecen los códigos KINSYN (Kaufman, 1978), centrado en el análisis del cuadrilátero articulado, LINCAGES (Erdman y Gustafson, 1977; Chindambaran, 2000), centrado también en el análisis del cuadrilátero articulado, aunque ampliado por Chase en 1982 para el análisis de mecanismos de seis barras, IMP (*Integrated Mechanisms Program*), desarrollado por Sheth y Uicker, DRAM (*Dynamic Response of Articulated Machinery*) o ADAMS (*Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems*), desarrollado por Smith, Orlandea y Chace y que se convirtió en 1980 en el primer software comercial de simulación tridimensional de sistemas mecánicos.

En la década de 1980 las microcomputadoras de sobremesa sustituyen a las gigantescas unidades centrales de proceso, y las computadoras digitales se hacen cada vez más accesibles. Los métodos de síntesis se afianzan en el campo de la robótica. Los nuevos códigos, ejecutados en potentes microcomputadoras, permiten combinar animaciones tridimensionales con predicciones de espacios de trabajo, cálculos de interferencia y respuestas dinámicas, a base de integrar las herramientas de análisis y síntesis, tanto cinemática como dinámica, con otras técnicas del CAE, como el modelado paramétrico, los sistemas expertos, los elementos finitos o la simulación.

La década de 1990 se caracteriza por la integración de la computadora en todo el ciclo del diseño de los mecanismos, que resulta muy estimulante para los diseñadores. Se integran módulos de análisis de mecanismos en paquetes comerciales de CAD como Pro/Engineer, I-DEAS, Catia o AutoCAD, para optimizar mecanismos mediante el método de prueba y error. ADAMS se impone como el código por excelencia para el análisis cinemático y dinámico de sistemas multicuerpo, aunque el mercado todavía está muy fragmentado, con multitud de códigos que ejecutan tareas similares. En la actualidad todo el ciclo de diseño de los sistemas multicuerpo es inconcebible sin el uso la herramienta informática.

Los ámbitos donde se centran los esfuerzos de los investigadores en el ámbito del análisis y la optimización de sistemas multicuerpo asistida por ordenador son los siguientes:

- Desarrollo y mejora de modeladores sólidos para la simulación del movimiento.

- Integración de la síntesis y el análisis cinemático y dinámico en el CAD/CAM.
- Simulación cinemática y dinámica.
- Síntesis óptima.
- Síntesis elastocinética (Avilés et al., 2000).
- Análisis de sensibilidad dinámica (Pagalday, 1994; Conde, 2001).
- Introducción de holguras, amortiguamientos, vibraciones y fricciones.
- Desarrollo de aplicaciones cerradas para necesidades específicas del sector industrial (Alba et al., 1999; Tso y Liang, 2002).
- Sistemas expertos e inteligencia artificial.
- Síntesis heurística basada en redes neuronales (Chen, 2000; Ding 2000; Vasiliu y Yannou, 2001) y algoritmos genéticos (Cabrera et al., 2002; Schawa, 2002).
- Síntesis conceptual (Han, 1999; Wang y Yan, 2002).
- Aplicación a técnicas emergentes como la biomecánica (Alexander, 1982), la mecánica de la técnica deportiva (Hay, 1993), la micromecánica o el diseño de proteínas y medicamentos (Cagan y Antonson, 2000).

## Capítulo 2

# Síntesis dimensional óptima

### 2.1. Optimización de funciones.

A mediados del siglo XX los avances logrados en el campo de la optimización matemática permiten la aplicación de la metodología científica a una serie de problemas que hasta la fecha, y salvo honrosas excepciones que pasaron, sin embargo, inadvertidas, se habían tratado de una forma intuitiva muy alejada del obligado rigor que el tema merecía.

Kantorovitch (1960) desarrolló un primer método de programación lineal. Su revolucionario trabajo, pese a publicarse en ruso en 1939, pasó inadvertido en occidente hasta su traducción al inglés, en 1960. Otros trabajos tempranos fueron los de Karush (1939) y John (1948), que sólo fueron reconocidos cuando perdieron gran parte del impacto que hubieran merecido en su día.

La verdadera eclosión de los métodos matemáticos aplicados a problemas de optimización tuvo lugar en 1947, cuando Dantzing (1963), resumiendo el trabajo de sus predecesores, desarrolló el método simplex para la resolución de problemas lineales. A partir del trabajo de Dantzing proliferaron las contribuciones teóricas y las aplicaciones de los problemas de optimización lineal, debido también en gran parte al desarrollo acelerado que las computadoras sufrieron en esa época.

Mediado el siglo Kuhn y Tucker (1951) publicaron su trabajo, orientado a la

resolución de problemas no lineales, en el cual llegaron a conclusiones semejantes a las que Karush y John habían obtenido años atrás. Sus resultados fueron fundamentales para la resolución de problemas de optimización no lineales, y hoy se consideran de gran importancia teórica, tanto en matemáticas como en otras disciplinas.

En la actualidad son multitud los campos de aplicación de las técnicas matemáticas de optimización, que van desde una vasta gama de aplicaciones ingenieriles, como el lanzamiento de satélites espaciales o el diseño de estructuras, elementos mecánicos y circuitos electrónicos, hasta aplicaciones económicas como el control de la producción, la asignación óptima de los recursos o las estrategias de inversión.

### 2.1.1. Planteamiento del problema.

La síntesis dimensional óptima se plantea como un problema de programación matemática, que consiste en optimizar una función cuyas variables están sometidas a un conjunto de restricciones. En su forma general, el problema de programación matemática consiste en determinar el valor máximo de una función denominada función objetivo del programa

$$f(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.1)$$

definida sobre un vector  $\mathbf{x}$  que engloba a todas las variables de diseño y que recibe por tanto el nombre de vector de diseño, y que está definido en el espacio de diseño  $S$

$$\mathbf{x} \in S \subseteq \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

El hecho de que se contemple aquí un problema de maximización no resta generalidad al planteamiento, dado que determinar el mínimo de  $f(\mathbf{x})$  equivale a determinar el máximo de  $-f(\mathbf{x})$

El problema puede a su vez estar sujeto a un conjunto de restricciones funcionales, definidas según la expresión

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}, \mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (2.3)$$

que pueden ser lineales o no lineales. El hecho de plantear todas las restricciones

funcionales como restricciones mixtas no resta generalidad al problema de programación matemática, dado que una restricción de igualdad

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad (2.4)$$

equivale a dos restricciones mixtas

$$\begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{b} \end{cases} \quad (2.5)$$

El conjunto de vectores que verifican las restricciones del problema según las expresiones (2.2) y (2.3) se denomina espacio factible. Cada uno de los vectores pertenecientes al espacio factible es denominado solución factible,

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{x} \in S; \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}\} \quad (2.6)$$

Una restricción funcional del tipo

$$g_i(\mathbf{x}) \leq b_i \quad (2.7)$$

está saturada o activa en una solución factible  $\mathbf{x}_0$  si verifica

$$g_i(\mathbf{x}_0) = b_i \quad (2.8)$$

Por el contrario, una restricción funcional del mismo tipo está no saturada o inactiva en una solución factible  $\mathbf{x}_0$  si verifica

$$g_i(\mathbf{x}_0) < b_i \quad (2.9)$$

La solución del problema de programación matemática es el vector solución factible  $\mathbf{x}^*$  que hace máximo el valor de la función objetivo. Dicha solución puede ser frontera, en el caso de que existan restricciones saturadas, o interior en caso contrario.

### 2.1.2. Vector de diseño.

El vector de diseño define un punto sobre el espacio factible, de tal forma que en el ámbito de la síntesis de los sistemas multicuerpo representa un sistema dentro de todo el espacio de posibles sistemas solución del problema de optimización. Las componentes del vector de diseño vendrán entonces definidas por la modelización del sistema multicuerpo, que es el proceso de transformación de un sistema en un

conjunto de entidades matemáticas que caracterizan el comportamiento del mismo.

De cara a optimizar el funcionamiento del algoritmo de síntesis es fundamental definir el sistema de coordenadas que define el problema de posición del mecanismo. En mecanismos de cadena cinemática abierta se utiliza universalmente el sistema de coordenadas relativas, definido por Hartenberg y Denavit (1964), mientras que en mecanismos de cadena cerrada no hay acuerdo unánime entre los autores, de forma que los programas existentes adoptan también diversas formulaciones. ADAMS, por ejemplo, exige al usuario la definición de un sistema de coordenadas para cada eslabón, determinado por las coordenadas del centro de masas y los ángulos de Euler. Además cada eslabón añadido precisa la definición de un nuevo sistema de referencia local en el par cinemático, que permita controlar la posición relativa entre los eslabones. Este sistema, aunque conceptualmente simple, exige al usuario una gran introducción de datos, genera un elevado conjunto de sistemas de coordenadas y da lugar a ecuaciones de restricción complejas. Otros programas comerciales utilizan métodos ligeramente diferentes, aunque basados siempre en la idea de determinar la posición del sistema a través de las posiciones de diversos sistemas de referencia solidarios a los diferentes eslabones que conforman el mecanismo.

Una opción alternativa para la modelización de mecanismos es el método de las coordenadas naturales, definidas por García de Jalón et al (1981, 1986), que definen el problema de posición del mecanismo mediante un conjunto de puntos y vectores situados preferentemente en los pares cinemáticos. Aunque a veces resulte un método un tanto complejo, el número de coordenadas empleadas en este método es reducido, y las restricciones son sencillas. Este método ha constituido la base para el desarrollo de los programas COMPAMM, diseñado para el análisis cinemático y dinámico de mecanismos, y DYNAMAN, desarrollado por la Agencia Espacial Europea para hacer simulaciones del movimiento de los astronautas en el espacio.

### **2.1.3. Función objetivo.**

La función objetivo es la función a minimizar, y debe ser escogida con sumo cuidado puesto que define el criterio según el cual el diseñador determina que un mecanismo es *mejor* que otro. Debe cumplir los siguientes requisitos:

- Debe tratarse de una función general, que pueda ser aplicada a distintos

problemas de síntesis de sistemas multicuerpo diversos.

- Debe representar adecuadamente las características más importante del sistema estudiado.
- Su formulación debe ser lo más sencilla posible.
- Debe ser sensible a los cambios en las variables de diseño.

Existe una gran variedad de funciones objetivo, en función del tipo de problema. La mayoría de las funciones objetivo utilizadas en síntesis dimensional óptima de sistemas multicuerpo miden el error geométrico entre los datos de síntesis deseados y los datos obtenidos en el diseño óptimo (Han, 1966) según la expresión cuadrática

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \left[ \omega (\Theta_d - \Theta)^2 \right]_i \quad (2.10)$$

donde  $f(\mathbf{x})$  es la función objetivo a minimizar,  $n$  el número de posiciones de síntesis,  $\omega$  un factor de ponderación que permite establecer la importancia relativa de los distintos puntos de síntesis,  $\Theta_d$  la característica deseada y  $\Theta$  la característica generada.

En función de la dependencia del tiempo, se establece la siguiente clasificación de funciones objetivo básicas:

- Funciones objetivo independientes del tiempo. Como el peso, dependen exclusivamente del diseño. Son de la forma:

$$f = f(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

- Funciones objetivo puntuales. Miden la bondad del diseño en un único instante de tiempo. Son de la forma:

$$f = f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \Big|_{t_0} \quad (2.12)$$

donde  $t$  es el tiempo,  $\mathbf{x}$  el vector de diseño,  $\boldsymbol{\lambda}$  el vector de multiplicadores de Lagrange,  $\mathbf{q}$  el vector de coordenadas,  $\dot{\mathbf{q}}$  el vector de velocidades y  $\ddot{\mathbf{q}}$  el vector de aceleraciones.

Un caso particular de las funciones objetivo puntuales es la función objetivo máximo, muy utilizada en síntesis dinámica para representar habitualmente

esfuerzos motores máximos, fuerzas de enlace máximas o aceleraciones máximas. Es de la forma:

$$f = \max \{f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\} \quad (2.13)$$

- Funciones objetivo integrales. Miden la bondad del diseño en forma de integral extendida al tiempo de la simulación. En síntesis dinámica las funciones objetivo integrales representan valores medios de variables, como potencia media o aceleración media.

$$f = \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) dt \quad (2.14)$$

Puesto que las funciones objetivo independientes del tiempo son un caso particular dentro de las funciones objetivo puntuales, la forma general de una función objetivo puede ponerse como combinación lineal de una función objetivo puntual y una función objetivo integral.

$$f = f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})|_{t_0} + \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) dt \quad (2.15)$$

La formulación más habitual en problemas de síntesis de mecanismos exige que la función objetivo sea una función explícita de las variables de diseño del mecanismo. Chang (1984) propone una función objetivo del tipo:

$$f = f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}), \mathbf{q}(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}), \ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{x})) \quad (2.16)$$

Son muchas las funciones objetivo utilizadas en los diversos trabajos publicados acerca de síntesis de mecanismos. Una de las más importantes es la denominada energía potencial elástica, empleada originalmente por Avilés et al. (1985), y que ha sido ampliamente contrastada en trabajos sobre síntesis de mecanismos, como los de Navalpotro (1989), Vallejo (1993) o Alba (1994) Esta función objetivo, que será ampliamente comentada más adelante, mide la energía que el mecanismo almacena al alcanzar una posición de precisión dada, considerando las barras como elementos susceptibles de deformación y con comportamiento elástico lineal.

#### 2.1.4. Restricciones.

Las restricciones que se imponen al programa delimitan el espacio factible del vector solución. El algoritmo de optimización busca el vector de diseño que hace mínima la función objetivo en el espacio factible, sin violar ninguna de las restricciones dadas.

Las restricciones que aparecen en el método de síntesis óptima pueden clasificarse desde distintos criterios:

Según la función que define la restricción:

- Restricciones funcionales, también llamadas de comportamiento. Imponen restricciones sobre algún aspecto del comportamiento del sistema.
- Restricciones conjuntistas, también llamadas de borde o tecnológicas. Imponen restricciones a las variables de diseño. En realidad las restricciones de borde son un caso particular de las restricciones de comportamiento. Vanderplaats (1984) aprovecha la simplicidad de la formulación de las restricciones de borde para mejorar notablemente la eficiencia de los algoritmos de síntesis de mecanismos.

Según la formulación matemática de la restricción:

- Restricciones de igualdad.
- Restricciones mixtas.

Según la linealidad de la restricción:

- Restricciones lineales.
- Restricciones no lineales.

Según la naturaleza de la restricción:

- Restricciones geométricas.
- Restricciones de posición.
- Restricciones cinemáticas.
- Restricciones dinámicas.

En función de la dependencia del tiempo, se establece la siguiente clasificación para las restricciones de comportamiento:

- Restricciones puntuales. Limitan el comportamiento del diseño en un único instante de tiempo. Su expresión general es la siguiente:

$$g = g(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \Big|_{t_0} \leq 0 \quad (2.17)$$

De igual modo a lo visto en funciones objetivo, también son usuales las restricciones puntuales referidas a un valor máximo. Son de la forma:

$$g = \max \{g(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\} \leq 0 \quad (2.18)$$

- Restricciones integrales. Limitan el comportamiento del diseño en forma de integral extendida al tiempo de la simulación.

$$g = \int_{t_0}^{t_f} g(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) dt = 0 \quad (2.19)$$

Nuevamente la forma general de una restricción puede ponerse como combinación lineal de una restricción puntual y una restricción integral,

$$g = \max (g(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})) + \int_{t_0}^{t_f} g(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) dt \leq 0 \quad (2.20)$$

Algunos autores consideran también un tipo especial de restricciones denominadas restricciones *pointwise*, del tipo:

$$g(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \geq 0 \quad (2.21)$$

Estas restricciones no se tratan directamente, sino que deben transformarse previamente a uno de los tipos anteriormente expuestos. Urruzola et al. (1997) recomiendan la siguiente transformación a función integral:

$$g = \int_{t_0}^{t_f} (g - \|g\|) dt \geq 0 \quad (2.22)$$

En cuanto a la eficiencia de los distintos tipos de restricciones, Haug y Arora (1978) proponen reducir la función objetivo y las restricciones a una forma puramente integral, introduciendo para ello variables de diseño ficticias. Pagalday (1994) en cambio no detecta ningún tipo de problema en la utilización de funciones objetivo puntuales.

### 2.1.5. Taxonomía de la programación matemática.

Los problemas de programación matemática se clasifican en función de los siguientes factores:

- Linealidad de la función objetivo y de las restricciones funcionales. Un problema es lineal si la función objetivo y las funciones que definen las restricciones funcionales son funciones lineales. En caso contrario, el problema es no lineal.
- Existencia de restricciones funcionales. Se distingue entre problemas con restricciones y problemas sin restricciones. A su vez y dentro de los problemas con restricciones se distingue entre problemas que sólo tienen restricciones de igualdad y problemas con restricciones mixtas.
- Convexidad. Un problema es convexo si el espacio factible es convexo (el segmento que une cualquier par de puntos del espacio factible está contenido en el mismo) y la función objetivo es cóncava, en los problemas de maximización, o convexa, en los problemas de minimización. En caso contrario, el problema es no convexo.
- Diferenciabilidad de la función objetivo y de las restricciones funcionales. Un problema es diferenciable si la función objetivo y las funciones que definen las restricciones funcionales son funciones diferenciables. En caso contrario, el problema es no diferenciable.

Según los factores mencionados, los problemas de programación matemática se pueden clasificar de la siguiente forma:

- Programación lineal. Se trata de un problema lineal diferenciable convexo con restricciones mixtas. El problema de programación lineal constituye un caso particular dentro de la optimización, donde la función objetivo y todas las funciones restricción son lineales. En la actualidad se utilizan dos métodos bien diferenciados para la resolución de problemas de programación lineal. El método simplex calcula las soluciones básicas fijando variables en las fronteras del espacio factible, hasta reducir las restricciones a un sistema cuadrado. Por el contrario los métodos de punto interior, que derivan de las técnicas de

programación no lineal popularizadas en los años 60 por Fiacco y McCormick, evalúan puntos en el interior del espacio factible.

- Programación clásica libre. Se trata de un problema no lineal diferenciable sin restricciones. A la programación clásica libre se le llama también programación pura o, simplemente, programación sin restricciones. Aunque la optimización sin restricciones se utiliza habitualmente para introducir los conceptos y algoritmos más útiles en optimización, sus aplicaciones ingenieriles se ven limitadas por el hecho de que lleva frecuentemente a soluciones absurdas.
- Programación clásica con restricciones. Se trata de un problema no lineal diferenciable con restricciones de igualdad.
- Programación no lineal diferenciable. Se trata de un problema no lineal diferenciable con restricciones mixtas.
- Programación no diferenciable. Se trata de un problema no lineal no diferenciable con restricciones mixtas.

A continuación se analizan más detalladamente los principales aspectos matemáticos relacionados con la optimización no lineal de funciones, por tratarse de la metodología más usual en el campo de la síntesis dimensional óptima de mecanismos.

## 2.2. Programación sin restricciones.

Los métodos planteados para la resolución de problemas de programación sin restricciones se basan en procesos iterativos de aproximación en los que se busca optimizar el valor de la función objetivo desde el punto obtenido en la iteración anterior en una dirección de búsqueda que hay que determinar. De manera general, los métodos de programación clásica libre optimizan el valor de la función objetivo en una iteración del tipo

$$f(\mathbf{x}_{(k+1)}) = f(\mathbf{x}_{(k)} + \alpha \cdot \mathbf{s}_{(k+1)}) \quad (2.23)$$

donde  $\mathbf{x}_{(k)}$  es el vector de diseño en la  $k$ -ésima iteración,  $\mathbf{x}_{(k+1)}$  el vector de diseño en la  $k+1$ -ésima iteración,  $\alpha$  un escalar y  $\mathbf{s}_{(k+1)}$  la dirección de búsqueda en la  $k+1$ -ésima iteración.

A continuación se hace un breve repaso de los métodos de programación clásica libre más utilizados, que se clasifican en función del grado de conocimiento de las derivadas parciales de la función objetivo respecto a las variables de diseño.

### 2.2.1. Métodos de orden cero.

También llamados métodos de búsqueda directa, los métodos de orden cero son aquellos que precisan únicamente la evaluación de la función objetivo, sin requerir información adicional de sus derivadas. El más conocido de los métodos de orden cero es el método de Powell (1964), también llamado de las direcciones conjugadas, en el que las direcciones de búsqueda de las  $n$  primeras iteraciones, siendo  $n$  la dimensión espacial del problema, son las  $n$  direcciones coordenadas, y el resto se calculan como direcciones conjugadas del tipo

$$\mathbf{s}_{(n+K+1)} = \sum_{i=1}^{n+K} \alpha_{(i)} \cdot \mathbf{s}_{(i)} \quad (2.24)$$

donde se debe calcular el valor del  $\alpha_{(i)}$  correspondiente al mínimo.

### 2.2.2. Métodos de orden uno.

Los métodos de orden uno obtienen la dirección de búsqueda del óptimo a partir del vector gradiente de la función objetivo y son más eficaces que los métodos de orden cero. El más sencillo de los métodos de orden uno es el método del máximo descenso, donde la dirección de búsqueda del óptimo en cada iteración es el gradiente de la función objetivo. El método de Fletcher y Reeves (1964), también conocido con el nombre de método del gradiente conjugado, es una modificación del método del máximo descenso, y consiste en plantear cada dirección de búsqueda del óptimo como una combinación lineal de todos los vectores gradientes obtenidos en las sucesivas iteraciones, de modo que tiendan a amortiguarse las componentes de los sucesivos gradientes en la dirección del gradiente obtenido en la última iteración.

### 2.2.3. Métodos de orden dos.

Los métodos de orden dos obtienen la dirección de búsqueda del óptimo a partir del vector gradiente y de la matriz hessiana de la función objetivo. Los distintos planteamientos de los métodos de orden dos responden al nivel de conocimiento de las

derivadas primera y segunda de la función objetivo.

Los métodos de segundo orden parten de la aproximación cuadrática de la función objetivo

$$f(\mathbf{x}_{(k+1)}) = f(\mathbf{x}_{(k)}) + \nabla f(\mathbf{x}_{(k)})^T \cdot \Delta \mathbf{x}_{(k)} + \frac{1}{2} \cdot \Delta \mathbf{x}_{(k)}^T \cdot \mathbf{H}f(\mathbf{x}_{(k)}) \cdot \Delta \mathbf{x}_{(k)} \quad (2.25)$$

donde  $\nabla f$  es el vector gradiente de la función objetivo,  $\Delta \mathbf{x}_{(k)}$  es la diferencia del vector de diseño entre las iteraciones  $k+1$ -ésima y  $k$ -ésima y  $\mathbf{H}f$  es la matriz hessiana de la función objetivo. Tras derivar e imponer la condición de mínimo, según la cual se anula el gradiente de la función objetivo, se obtiene el valor del vector de diseño para la próxima iteración,

$$\mathbf{x}_{(k+1)} = \mathbf{x}_{(k)} - \mathbf{H}f(\mathbf{x}_{(k)})^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}_{(k)}) \quad (2.26)$$

Los métodos tipo-Newton utilizan la matriz hessiana, o una aproximación de la misma calculada por diferencias finitas, para definir la dirección de búsqueda. En general, los métodos tipo-Newton son los métodos de orden dos más eficaces. Los métodos quasi-Newton (Dennis y Moré, 1977), en cambio, aproximan la hessiana por una matriz que se modifica en cada iteración, incorporando información sobre la curvatura de la función objetivo a lo largo de la dirección de búsqueda. Aunque los métodos quasi-Newton no son tan robustos como los métodos tipo-Newton, pueden ser más eficientes en determinados casos porque no requieren el cálculo, directo o aproximado por diferencias finitas, de la matriz hessiana de la función objetivo.

### 2.3. Programación no lineal diferenciable.

El problema se plantea como la optimización de una función objetivo no lineal y diferenciable

$$f(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \in S \subseteq \mathbb{R}^n \quad (2.27)$$

sujeta a un conjunto de restricciones mixtas

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}, \mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (2.28)$$

Las restricciones no saturadas en el óptimo son absolutamente irrelevantes, de modo

que podrían eliminarse de la formulación del problema si fueran conocidas a priori. Suponiendo que las restricciones que se saturan en el óptimo son las  $k$  primeras, llamamos

$$I(\mathbf{x}^*) = \{1, 2, \dots, k\} \quad (2.29)$$

al conjunto de subíndices de las restricciones saturadas. Si  $\mathbf{x}^*$  no es una solución interior, alguna de las restricciones está saturada, por lo que el desplazamiento desde  $\mathbf{x}^*$  quedará dentro del espacio factible sólo si se hace en determinadas direcciones, denominadas direcciones factibles. La derivada de la restricción saturada  $g_i$  en la dirección  $\mathbf{v}$ , supuesta ésta una dirección factible, se calcula en  $\mathbf{x}^*$  a partir de la definición de derivada

$$\mathbf{v}^T \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_i(\mathbf{x}^* + h \cdot \mathbf{v}) - g_i(\mathbf{x}^*)}{h}, \forall i \in I(\mathbf{x}^*) \quad (2.30)$$

que puede simplificarse dado que  $g_i$  está saturada y se cumple (2.8), por lo que

$$\mathbf{v}^T \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_i(\mathbf{x}^* + h \cdot \mathbf{v}) - b_i}{h}, \forall i \in I(\mathbf{x}^*) \quad (2.31)$$

que verifica la desigualdad

$$\mathbf{v}^T \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_i(\mathbf{x}^* + h \cdot \mathbf{v}) - b_i}{h} \leq 0, \forall i \in I(\mathbf{x}^*) \quad (2.32)$$

dado que el nuevo punto está dentro al espacio factible, y cumple entonces la restricción funcional

$$g_i(\mathbf{x}^* + h \cdot \mathbf{v}) \leq b_i \quad (2.33)$$

### 2.3.1. Hipótesis de cualificación de las restricciones.

Las condiciones necesarias de optimalidad sólo pueden enunciarse en aquellos puntos del espacio factible que verifican la llamada hipótesis de cualificación de las restricciones. Para ello se considera el conjunto de direcciones

$$G(\mathbf{x}^*) = \{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{s}^T \mathbf{g}_i(\mathbf{x}^*) \leq 0, \forall i \in I(\mathbf{x}^*) \} \quad (2.34)$$

que constituye el cono polar de las restricciones saturadas en  $\mathbf{x}^*$ , con vértice en  $\mathbf{x}^*$  y

tangente a las restricciones saturadas en  $\mathbf{x}^*$ . Una solución factible verifica la hipótesis de cualificación de las restricciones si el conjunto de direcciones factibles coincide con el cono polar de las restricciones saturadas.

En la práctica la hipótesis de cualificación de las restricciones es difícil de comprobar, por lo que se recurre a las condiciones de Fiacco-MacCormik, Karlin o Slater (Guerrero, 1994), que siendo más sencillas son suficientes, aunque no necesarias, para que se verifique la hipótesis de cualificación de las restricciones.

### 2.3.2. Condiciones necesarias de optimalidad de Kuhn-Tucker.

A partir del lema de Farkas-Minkowski puede demostrarse que para una solución factible  $\mathbf{x}^*$  que constituye un máximo local y que verifica la hipótesis de cualificación de las restricciones, existen  $m$  escalares  $\lambda_i$  no negativos denominados multiplicadores de Kuhn-Tucker, que cumplen

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (2.35)$$

y simultáneamente

$$\lambda_i (g_i(\mathbf{x}^*) - b_i) = 0, \forall i \in I(\mathbf{x}^*) \quad (2.36)$$

que constituyen las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker para el máximo y que pueden expresarse conjuntamente en forma lagrangiana,

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.37)$$

donde  $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$  es la función lagrangiana definida según

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}) \quad (2.38)$$

La condición (2.35) indica que en el máximo, el gradiente de la función objetivo es igual a la combinación lineal no negativa de los gradientes de las restricciones saturadas en dicho punto. Por su parte, la condición (2.36), que se denomina condición de holgura, indica que si la solución es interior los multiplicadores de Kuhn-Tucker asociados son todos nulos, y por tanto el gradiente de la función objetivo se anula,

mientras que si la solución es frontera el vector gradiente de la función objetivo no se anula y se puede expresar como una combinación lineal no negativa de los gradientes de las restricciones saturadas en dicho punto, anulándose los multiplicadores correspondientes a las restricciones no saturadas en el máximo.

## 2.4. Métodos clásicos.

Dentro de los métodos clásicos para la resolución de problemas de programación no lineal diferenciable, se hará una breve referencia al método de los multiplicadores de Lagrange y al método de la función penalty.

### 2.4.1. Método de los multiplicadores de Lagrange.

Se trata de uno de los métodos clásicos para la optimización no lineal con restricciones. Se basa en el uso de una función objetivo expandida, suma de la función objetivo original y el producto de cada restricción multiplicada por el correspondiente multiplicador de Lagrange, llamada función de Lagrange o lagrangiana,

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot (g_i(\mathbf{x}) - b_i) \quad (2.39)$$

En el óptimo se anula el gradiente de la lagrangiana, por lo que derivando la expresión propuesta se llega a la expresión

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \frac{\partial (g_i(\mathbf{x}) - b_i)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (2.40)$$

con lo que el problema se reduce a un sistema de  $n+m$  ecuaciones no lineales con  $n+m$  incógnitas:

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.41)$$

que puede resolverse a través del método de Newton-Raphson, sustituyendo el gradiente de la lagrangiana y las restricciones por su aproximación lineal

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L(\mathbf{x}_{(k+1)}, \boldsymbol{\lambda}_{(k+1)})}{\partial \mathbf{x}} \approx \frac{\partial L(\mathbf{x}_{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_{(k)})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \left( \frac{\partial L(\mathbf{x}_{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_{(k)})}{\partial \mathbf{x}} \right)}{\partial (\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})} \cdot \Delta(\mathbf{x}_{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_{(k)}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_{(k+1)}) \approx \mathbf{g}(\mathbf{x}_{(k)}) + \frac{\partial (\mathbf{g}(\mathbf{x}_{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_{(k)})}{\partial (\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})} \cdot \Delta(\mathbf{x}_{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_{(k)}) \end{array} \right\} \quad (2.42)$$

Ilegándose así en cada iteración a un sistema de ecuaciones lineales del tipo

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \left( \frac{\partial L(\mathbf{x}_{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_{(k)})}{\partial \mathbf{x}} \right)}{\partial (\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})} \\ \frac{\partial (\mathbf{g}(\mathbf{x}_{(k)}) - \mathbf{b})}{\partial (\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})} \end{bmatrix} \cdot \Delta(\mathbf{x}_{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_{(k)}) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial L(\mathbf{x}_{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_{(k)})}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}_{(k)}) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

#### 2.4.2. Método de la función penalty.

Es el segundo de los métodos clásicos en la optimización no lineal con restricciones. Este método convierte el problema con restricciones en un problema sin restricciones, a costa de incluir en la función objetivo un término de penalización positivo que multiplica a cada restricción violada. Esta función de penalización puede tener distintas formas, siendo la más común la forma cuadrática.

La nueva función objetivo tiene la forma

$$P(\mathbf{x}, r) = f(\mathbf{x}) + r \cdot \sum_{i=1}^m (g_i(\mathbf{x}) - b_i)^2 \quad (2.44)$$

donde  $r$  es el factor de penalización, que es constante en cada iteración.

En el óptimo se anula el gradiente de la nueva función objetivo, por lo que derivando (2.44) se llega a la expresión

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, r)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + 2r \sum_{i=1}^m (g_i(\mathbf{x}) - b_i) \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (2.45)$$

Como puede comprobarse, el método añade la dificultad de evaluar las derivadas de las restricciones. El problema se reduce nuevamente a un sistema de  $n+m$  ecuaciones no lineales con  $n+m$  incógnitas:

$$\begin{cases} \frac{\partial P(\mathbf{x}, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{x}} = 0 \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b} = 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

que puede resolverse mediante el método de Newton. Para ello se sustituye la función objetivo penalizada por su aproximación cuadrática, y se iguala a cero su derivada. El sistema de ecuaciones resultante para cada iteración es el siguiente:

$$\mathbf{HP}(\mathbf{x}_{(k)}, \mathbf{r}_{(k)}) \cdot \Delta(\mathbf{x}_{(k)}, \mathbf{r}_{(k)}) = -\nabla P(\mathbf{x}_{(k)}, \mathbf{r}_{(k)}) \quad (2.47)$$

En estos problemas el principal problema para la convergencia es que mientras el vector de diseño se aproxima a la solución y el factor de penalización aumenta su valor, la matriz hessiana tiende a estar mal condicionada, lo que puede acarrear problemas de convergencia.

Una variante del método de la función penalty cuadrática es el denominado método de la rigidez ponderada, que solventa los problemas de convergencia de aquél adoptando un valor muy alto para el factor de penalización. Para asegurar una precisión aceptable se asigna al factor de penalización un valor del orden de cien veces mayor que el utilizado en la primera iteración del método de la función penalty cuadrática, y se mantiene constante durante todas las iteraciones. El procedimiento es muy sencillo, y proporciona una buena convergencia con un coste computacional relativamente bajo (Avilés et al, 2000)

## 2.5. Método de los multiplicadores de Lagrange aumentados.

El método de los multiplicadores de Lagrange aumentados trata de evitar el mal condicionamiento de la matriz hessiana propio de los métodos basados en la función penalty, imponiendo un valor máximo al factor de penalización. La nueva función objetivo es el resultado de combinar el método de los multiplicadores de Lagrange con el método de la función penalty cuadrática,

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, r) = f(\mathbf{x}) + r \sum_{i=1}^m \lambda_i (\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) - b_i) + r \sum_{i=1}^m (\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) - b_i)^2 \quad (2.48)$$

y el problema puede resolverse también mediante el método de Newton, quedando en cada iteración el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{HL}(\mathbf{x}_{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_{(k)}, r_{(k)}) \cdot \Delta(\mathbf{x}_{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_{(k)}, r_{(k)}) = -\nabla L(\mathbf{x}_{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_{(k)}, r_{(k)}) \quad (2.49)$$

Los distintos planteamientos basados en el método de los multiplicadores de Lagrange aumentados difieren en la forma de estimar los nuevos multiplicadores. A continuación se analizarán brevemente los tres tipos más habituales de estimación de los multiplicadores de Lagrange aumentados: estimación directa, estimación lineal y estimación cuadrática.

### 2.5.1. Estimación directa de los multiplicadores de Lagrange.

Es el método más sencillo, aunque presenta grandes limitaciones. Los nuevos multiplicadores de Lagrange se obtienen igualando a cero el gradiente de la función objetivo,

$$\nabla L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, r) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \sum_{i=1}^m (\lambda_i + 2r(g_i(\mathbf{x}) - b_i)) \frac{\partial (g_i(\mathbf{x}) - b_i)}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (2.50)$$

Comparando esta ecuación con la obtenida para el método de los multiplicadores de Lagrange, se obtienen directamente el vector de multiplicadores de Lagrange para cada iteración,

$$\boldsymbol{\lambda}_{(k+1)} = \boldsymbol{\lambda}_{(k)} + 2r(\mathbf{g}(\mathbf{x}_{(k)}) - \mathbf{b}) \quad (2.51)$$

El método presenta validez cuando el vector inicial está cerca del óptimo. En caso contrario aparecen problemas de convergencia serios que restan fiabilidad al método.

### 2.5.2. Estimación lineal de los multiplicadores de Lagrange.

La relación que deben cumplir los multiplicadores de Lagrange, que ha sido expuesta en el apartado anterior, puede expresarse ahora de la siguiente forma:

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (2.52)$$

siendo

$$\mathbf{G} = \left\{ \frac{\partial (g_i(\mathbf{x}) - b_i)}{\partial \mathbf{x}} \right\} \quad (2.53)$$

Esta condición sugiere que una buena estimación de los multiplicadores de Lagrange resolverá el problema de minimización de la expresión cuadrática

$$\left| \mathbf{G}_{(K)} \boldsymbol{\lambda} + \nabla f(\mathbf{x}_{(K)}) \right|^2 \quad (2.54)$$

Este vector puede multiplicarse por una matriz ortogonal  $\mathbf{Q}$ , sin que la longitud euclidiana del vector varíe,

$$\left| \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \nabla f(\mathbf{x}) \right| = \left| \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \nabla f(\mathbf{x})) \right| = \left| \mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Q} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) \right| \quad (2.55)$$

El problema de mínimos cuadrados planteado puede expresarse de la forma:

$$\left| \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \nabla f(\mathbf{x}) \right|^2 = \left| \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Q} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) \right|^2 = \left| \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \right|^2 \quad (2.56)$$

siendo

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

y  $\mathbf{R}$  una matriz triangular superior.

El vector de multiplicadores de Lagrange que minimiza la expresión puede calcularse como la solución de la ecuación:

$$\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{q}_1 \quad (2.58)$$

### 2.5.3. Estimación cuadrática de los multiplicadores de Lagrange.

La estimación cuadrática de los multiplicadores de Lagrange aumentados puede hacerse sustituyendo los términos del problema de minimización de la expresión cuadrática que se había obtenido para la estimación lineal por sus aproximaciones cuadráticas,

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}_{(K+1)}) \approx \nabla f(\mathbf{x}_{(K)}) + \mathbf{HL}(\mathbf{x}_{(K)}, \boldsymbol{\lambda}_{(K)}, \mathbf{r}_{(K)}) \cdot \Delta \mathbf{x}_{(K)} \\ \mathbf{G}_{(K+1)} \cdot \boldsymbol{\lambda} \approx \mathbf{G}_{(K)} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \left( \frac{\partial^2 (g_i(\mathbf{x}_{(K)}) - b_i)}{\partial \mathbf{x}^2} \right) \cdot \Delta \mathbf{x}_{(K)} \end{cases} \quad (2.59)$$

de forma que el problema se reduce a calcular el vector de multiplicadores de Lagrange que resuelve el problema de minimizar la expresión cuadrática

$$\left| \mathbf{G}_{(K)} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{(K+1)} + \nabla f(\mathbf{x}_{(K)}) + \mathbf{HL}(\mathbf{x}_{(K)}, \boldsymbol{\lambda}_{(K)}, \mathbf{r}_{(K)}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \left( \frac{\partial^2 (g_i(\mathbf{x}_{(K)}) - b_i)}{\partial \mathbf{x}^2} \right) \cdot \Delta \mathbf{x}_{(K)} \right|^2 \quad (2.60)$$

Avilés et al. (2000) documentan un estudio de estos métodos de optimización aplicado al problema de equilibrio estático no lineal de mecanismos con barras rígidas y elásticas, que incluye más de un centenar de análisis de una decena de mecanismos diferentes, de complejidad variada. Según dicho estudio, los métodos más efectivos son, por este orden, el de los multiplicadores de Lagrange, los multiplicadores de Lagrange aumentados con estimación cuadrática y lineal, y el método de la rigidez ponderada, aunque los multiplicadores de Lagrange aumentados con estimación cuadrática y lineal llevan ventaja cuando el punto de partida está muy lejos del óptimo. El método de la función Penalty, y por extensión el de los multiplicadores de Lagrange aumentados con estimación directa, se han mostrado menos eficaces, demostrando serios problemas de convergencia.

## 2.6. Método de los multiplicadores de Lagrange proyectados.

El método de los multiplicadores de Lagrange proyectados aproxima el problema no lineal con restricciones a un subproblema linealizado con restricciones, donde se linealizan la función objetivo, basada en la función lagrangiana, y las restricciones mediante sus desarrollos lineales de Taylor. El problema de programación matemática no lineal original se reduce así a la resolución iterativa por métodos numéricos de una serie de subproblemas linealizados, hasta que las condiciones de optimalidad sean satisfechas. Los multiplicadores de Lagrange de los subproblemas aproximados constituyen buenas estimaciones de los multiplicadores de Lagrange del problema de optimización no lineal original.

### 2.6.1. Linealización del problema no lineal con restricciones.

Los subproblemas linealizados aproximados se plantean a través de los desarrollos lineales de Taylor de la función objetivo y de las restricciones. Cada subproblema consiste entonces en optimizar la función objetivo linealizada

$$f(\mathbf{x}_{(K+1)}) \approx f(\mathbf{x}_{(K)}) + \nabla f^T(\mathbf{x}_{(K)}) \cdot \Delta(\mathbf{x}_{(K)}) \quad (2.61)$$

sujeta a las restricciones linealizadas de desigualdad,

$$\mathbf{g}_j(\mathbf{x}_{(k+1)}) \approx \mathbf{g}_j(\mathbf{x}_{(k)}) + \nabla \mathbf{g}_j^T(\mathbf{x}_{(k)}) \cdot \Delta(\mathbf{x}_{(k)}) \leq 0 \quad (2.62)$$

En cada iteración se calcula un nuevo vector de diseño que constituirá una mejor estimación del vector de diseño solución que hace óptimo el valor de la función objetivo. Así, el vector de diseño que se obtiene en la  $k+1$ -ésima iteración será,

$$\mathbf{x}_{(k+1)} = \mathbf{x}_{(k)} + \Delta(\mathbf{x}_{(k)}) \quad (2.63)$$

La notación se compacta de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f^K &= f(\mathbf{x}_{(k+1)}) - f(\mathbf{x}_{(k)}) \\ \mathbf{b}_j &= -\mathbf{g}_j(\mathbf{x}_{(k)}) \\ \mathbf{d}_i &= \Delta \mathbf{x}_{i(k)} \\ \mathbf{c}_i &= \frac{\partial f(\mathbf{x}_{(k)})}{\partial x_i} \\ \mathbf{a}_{ij} &= \frac{\partial \mathbf{g}_j(\mathbf{x}_{(k)})}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (2.64)$$

El subproblema linealizado se reduce entonces, con la nueva notación compactada, a minimizar la función objetivo

$$f^K = \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{d}_i \quad (2.65)$$

que se compacta de la forma

$$f^K = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{d} \quad (2.66)$$

sujeta a las restricciones

$$\sum_{i,j=1}^n \mathbf{a}_{ij} \cdot \mathbf{d}_i \leq \mathbf{b}_j \quad (2.67)$$

que se compactan de la forma

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{d} \leq \mathbf{b} \quad (2.68)$$

### 2.6.2. Programación lineal secuencial.

El subproblema que en cada iteración se genera en (2.65) y (2.67) es lineal en  $\mathbf{d}_i$ , por

lo que puede ser resuelto mediante los métodos de uso habitual en programación lineal, como por ejemplo el método simplex.

Para evitar cambios muy bruscos en el vector de diseño, que invaliden las aproximaciones lineales efectuadas, es preciso imponer un límite superior y un límite inferior a la variación del vector de diseño en cada iteración. Se impone mediante la siguiente restricción lineal en  $d_i$ ,

$$\Delta_{il(k)} \leq d_i \leq \Delta_{iu(k)} \quad (2.69)$$

El método de programación lineal secuencial incorpora esta nueva restricción lineal en  $d_i$  al problema de programación lineal. Sin embargo la correcta selección de estos límites móviles, que suelen expresarse como fracciones del vector de diseño actual, es fundamental para la convergencia del método. Esta estimación, que suele solventarse a partir de prueba y error, exige cierta interactividad y experiencia por parte del usuario. Además, el método no converge desde puntos de partida arbitrarios. Estos problemas, derivados de la fuerte dependencia de los límites móviles para la convergencia del método, hacen del método de programación lineal secuencial un método, aunque simple, poco robusto.

### 2.6.3. Programación cuadrática secuencial.

Para corregir la falta de robustez del método de programación lineal secuencial, se desarrolla el método de programación cuadrática secuencial (SQP), en el que se resuelven de manera iterativa una serie de subproblemas cuadráticos.

Los límites móviles, propios del método de programación lineal secuencial, se abandonan a favor de una restricción del tamaño del paso del tipo

$$\|\mathbf{d}\| \leq \xi \quad (2.70)$$

donde  $\|\mathbf{d}\|$  es la longitud de la dirección de búsqueda y  $\xi$  un escalar especificado muy pequeño. Esta ecuación impone una restricción en el cambio del vector de diseño, de la forma

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (d_i)^2 \leq \xi^2 \quad (2.71)$$

que en forma compacta se expresa

$$\frac{1}{2} \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{d} \leq \xi^2 \quad (2.72)$$

donde el factor  $\frac{1}{2}$  elimina el factor 2 que aparecerá en una derivación posterior, afectando únicamente al tamaño del paso. El subproblema definido en el apartado 2.6.1 queda reducido a un problema no lineal debido a la inclusión de la restricción de paso (2.72), que es no lineal, en que se debe minimizar la función objetivo

$$f^k = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{d} \quad (2.73)$$

sujeta a las restricciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{d} &\leq \mathbf{b} \\ \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{d} &\leq \xi^2 \end{aligned} \quad (2.74)$$

Un problema de programación cuadrática definido en su forma estándar está definido por una función objetivo cuadrática y una serie de restricciones lineales. El subproblema definido en el apartado 2.6.1. puede reformularse a un problema cuadrático, incorporando la restricción del paso, de forma cuadrática, a la función objetivo. El subproblema a resolver en cada iteración, definido ya como un problema de programación cuadrática, consiste en minimizar la función

$$f^k = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{d} \quad (2.75)$$

sujeta a las restricciones:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{d} \leq \mathbf{b} \quad (2.76)$$

La ventaja de plantear el problema de optimización como una serie de subproblemas cuadráticos es que la solución existe siempre que las restricciones sean consistentes, y además es única si el problema es estrictamente convexo.

Existe una gran variedad de algoritmos que resuelven de forma eficiente problemas de programación cuadrática. Los más conocidos son los de Wolfe (1959) y Hadley (1964), basados en el método simplex, o el método del pivote oscilante, desarrollado por Lenke (1965) Algunas implementaciones comerciales de algoritmos de resolución de problemas SQP son QPLSOL (Gill et al, 1984), LINDO (Schrage, 1981), VEO6A (Hopper, 1981) o E04UCF (NAG, 1995).



## Capítulo 3

# Síntesis dimensional óptima con restricciones de posición y cinemáticas

En el transcurso de los últimos años el problema de la síntesis dimensional óptima de mecanismos ha recibido importantes aportaciones, fruto del incremento de las prestaciones computacionales y de las sucesivas mejoras en los propios algoritmos de optimización. Sin embargo, la mayoría de los procedimientos publicados constituyen aplicaciones para problemas muy específicos, que ocultan buena parte de los aspectos mecánicos que intervienen en el problema y que constituyen una ayuda esencial para el diseñador. Esto hace que los procedimientos citados sean de difícil aplicación en los casos generales de diseño.

El método de síntesis dimensional óptima desarrollado por Alba (1994, 1996, 1997, 2000), que se va a exponer a continuación y que servirá como base para posteriores desarrollos encaminados a resolver el problema de la síntesis dinámica óptima, es aplicable a cualquier mecanismo plano o espacial, de cadena abierta o cerrada, con pares cinemáticos inferiores y superiores, incorporando cualquier tipo de restricción topológica, y permitiendo además la imposición de restricciones cinemáticas de cualquier tipo.

### **3.1. Antecedentes.**

A continuación se expone brevemente la génesis del método de síntesis dimensional

óptima de mecanismos que sirve de base al método de síntesis dimensional óptima con restricciones dinámicas que constituye el núcleo de este trabajo, y que tiene su origen en los trabajos llevados a cabo en el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad del País Vasco.

### **3.1.1. Planteamiento original del método.**

Avilés et al. (1985) plantean un método general para la síntesis dimensional óptima de mecanismos planos con pares inferiores, con aplicación a los problemas de generación de función, generación de trayectoria y guiado de biela. El método introduce la geometría del mecanismo a través de sus coordenadas naturales (García de Jalón et al., 1981; Serna et al, 1982; García de Jalón et al., 1986), creando elementos barra biarticulados en sus extremos, y definidos por las coordenadas de sus nudos origen y final y por la distancia entre los mismos. Esta discretización del mecanismo, que es similar a la utilizada en el método de los elementos finitos, es el camino más apropiado para enfocar la síntesis óptima de la forma más general posible (Avilés et al., 1997).

El método estructura el proceso de la síntesis dimensional óptima en dos etapas bien diferenciadas. En una primera etapa se calcula el error cometido entre la característica generada por el mecanismo y la exigida en la definición del problema. En una segunda etapa se procede a variar los parámetros que definen la geometría del mecanismo, de tal modo que el error calculado en este nuevo diseño sea menor que el calculado en el diseño anterior.

Para resolver la primera etapa de la síntesis se define el problema de posición deformada, basado en la idea de que el mecanismo puede satisfacer completamente las especificaciones de la síntesis si se le permite modificar las dimensiones de sus eslabones entre las sucesivas posiciones de síntesis. La posición deformada en cada posición de síntesis es aquella en la que la suma cuadrática de las deformaciones sufridas por todos los eslabones del mecanismo para satisfacer las especificaciones definidas en dicha posición de síntesis es mínima. Se plantean tantos problemas de posición deformada como posiciones de síntesis se definen.

La posición deformada se obtiene pues como la solución de un problema de programación matemática, donde se trata de determinar el mínimo de una función

objetivo denominada función de energía potencial elástica, definida como

$$\varphi = \sum_{i=1}^n (l_i - L_i)^2 \quad (3.1)$$

donde  $n$  es el número de barras del mecanismo,  $L_i$  la longitud nominal de la barra  $i$ -ésima sin deformar y  $l_i$  la longitud de la barra  $i$ -ésima deformada, calculada a partir de las coordenadas de sus nudos en la posición de síntesis,

$$l_i = \sqrt{(y_{F(i)} - y_{O(i)})^2 + (x_{F(i)} - x_{O(i)})^2} \quad (3.2)$$

donde  $O(i)$  y  $F(i)$  son, respectivamente, los nudos origen y final de la barra  $i$ -ésima.

La segunda etapa de la síntesis se plantea nuevamente como un problema de minimización de una nueva función objetivo de energía potencial elástica, extendida a la totalidad de las posiciones de síntesis, y definida como

$$\Phi = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \omega_j (l_{ij} - L_i)^2 \quad (3.3)$$

donde  $s$  es el número de posiciones de síntesis,  $\omega_j$  el coeficiente de ponderación de la  $j$ -ésima posición de síntesis y  $l_{ij}$  la longitud de la barra  $i$ -ésima deformada en la  $j$ -ésima posición de síntesis. La inclusión de los coeficientes de ponderación permite asignar un peso relativo a cada una de las posiciones de síntesis.

La función objetivo definida en (3.3) es una función de error que representa la energía de deformación elástica que se acumula en las barras del mecanismo a medida que éstas se deforman para satisfacer por completo las especificaciones de las sucesivas posiciones de síntesis, suponiendo que el comportamiento de las barras es elástico y lineal. El hecho de asignar a la solución óptima el valor mínimo de la función objetivo de energía de deformación elástica implica que el mejor mecanismo es aquel que sufre menor deformación cuando es forzado a verificar exactamente todas las especificaciones solicitadas en la síntesis (Ajuria et al., 1991). Esta sencilla función objetivo incorpora al problema de programación matemática un poderoso principio mecánico, a partir del cual la configuración geométrica óptima de un mecanismo que debe satisfacer unas determinadas especificaciones de diseño es aquella que hace mínimo el valor de la energía potencial elástica, definida según (3.3).

Presenta las siguientes ventajas:

- Es sencilla de trabajar, dado su carácter escalar.
- Su forma cuadrática la hace apta para utilizar el método de programación cuadrática secuencial.
- Su uso incorpora al problema matemático un sentido mecánico evidente.
- Es fácilmente ponderable, a partir de las propiedades mecánicas de la barra.

### 3.1.2. Resolución del problema de posición deformada.

Durante la primera etapa de la síntesis, la función objetivo es una función de error local, que mide la deformación sufrida por las barras del mecanismo a su paso por cada una de las posiciones de síntesis. El vector de coordenadas de nudos  $\mathbf{x}$  solución del problema de posición deformada será aquel que haga mínimo el valor de la función objetivo, y anule por tanto su gradiente,

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (3.4)$$

Para resolver el problema de minimización a partir de un método de tipo Newton-Raphson se obtiene la expresión de la función objetivo a partir de su desarrollo en serie de Taylor, despreciando los términos de orden superior a dos,

$$\varphi(\mathbf{x}) \approx \varphi(\mathbf{x}_{(k)}) + (\nabla \varphi(\mathbf{x}_{(k)}))^T \cdot \Delta \mathbf{x}_{(k)} + \frac{1}{2} \cdot (\Delta \mathbf{x}_{(k)})^T \cdot \mathbf{H}\varphi(\mathbf{x}_{(k)}) \cdot \Delta \mathbf{x}_{(k)} \quad (3.5)$$

donde  $\mathbf{x}_{(k)}$  es la aproximación k-ésima del vector  $\mathbf{x}$ ,  $\nabla \varphi$  el vector gradiente de la función objetivo y  $\mathbf{H}\varphi$  la matriz hessiana de la función objetivo.

El gradiente se calcula derivando la ecuación (3.5) respecto del vector de diseño,

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \varphi(\mathbf{x}_{(k)}) + \mathbf{H}\varphi(\mathbf{x}_{(k)}) \cdot \Delta \mathbf{x}_{(k)} \quad (3.6)$$

Esta expresión se anula en el mínimo, por lo que el vector de incrementos  $\Delta \mathbf{x}_{(k)}$  se obtiene de la resolución del sistema lineal

$$\mathbf{H}\varphi(\mathbf{x}_{(k)}) \cdot \Delta \mathbf{x}_{(k)} = -\nabla \varphi(\mathbf{x}_{(k)}) \quad (3.7)$$

Con este vector de incrementos se determina la aproximación k+1-ésima del vector

$\mathbf{x}$ , a partir de la expresión

$$\mathbf{x}_{(k+1)} = \mathbf{x}_{(k)} + \Delta\mathbf{x}_{(k)} \quad (3.8)$$

que deberá ser una solución más cercana al óptimo que  $\mathbf{x}_{(k)}$ . Se plantea así un proceso iterativo para la resolución del problema de posición deformada en el que se calcula el vector  $\mathbf{x}$  que minimiza el valor de la función objetivo de energía potencial elástica. El criterio de convergencia, que marca el final del proceso iterativo al determinar que una solución está lo suficientemente cercana al óptimo, vendrá dado por la expresión,

$$\Delta\varphi(\mathbf{x}_{(k)}) \leq \xi \quad (3.9)$$

donde  $\xi$  es un escalar cercano a cero, que depende de la precisión exigida en el diseño, y  $\Delta\varphi(\mathbf{x}_{(k)})$  la disminución del valor de la función objetivo en la k-ésima iteración, que se calcula a partir de

$$\Delta\varphi(\mathbf{x}_{(k)}) = \nabla\varphi(\mathbf{x}_{(k)}) \cdot \Delta\mathbf{x}_{(k)} \quad (3.10)$$

### 3.1.3. Optimización de los parámetros de diseño.

Una vez resuelto el problema de posición deformada para la totalidad de las posiciones de síntesis, se dispone de un indicador del error de la característica generada por el mecanismo frente a la exigida por la síntesis. En la segunda etapa de la síntesis se debe modificar el vector  $\mathbf{L}$  que contiene las longitudes de las barras que conforman el mecanismo, con el fin de determinar cuáles son las longitudes que definen el mecanismo que verifica el mejor cumplimiento de las especificaciones de todas y cada una de las posiciones de síntesis. Para resolver este problema de una manera análoga a la planteada en la primera etapa de la síntesis, se desarrolla ahora en serie de Taylor la función objetivo definida en (3.3), despreciando nuevamente los términos de orden superior a dos,

$$\Phi(\mathbf{L}) \approx \Phi(\mathbf{L}_{(k)}) + (\nabla\Phi(\mathbf{L}_{(k)}))^T \cdot \Delta\mathbf{L}_{(k)} + \frac{1}{2} \cdot (\Delta\mathbf{L}_{(k)})^T \cdot \mathbf{H}\Phi(\mathbf{L}_{(k)}) \cdot \Delta\mathbf{L}_{(k)} \quad (3.11)$$

donde  $\mathbf{L}_{(k)}$  es la aproximación k-ésima del vector  $\mathbf{L}$ ,  $\nabla\Phi$  el vector gradiente de la función objetivo y  $\mathbf{H}\Phi$  la matriz hessiana de la función objetivo.

Nuevamente se calcula el gradiente de la función objetivo, derivando la expresión anterior respecto al vector  $\mathbf{L}$ ,

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{L})}{\partial \mathbf{L}} = \nabla \Phi(\mathbf{L}_{(K)}) + \mathbf{H}\Phi(\mathbf{L}_{(K)}) \cdot \Delta \mathbf{L}_{(K)} \quad (3.12)$$

Esta expresión se anula en el mínimo, por lo que el vector de incrementos  $\Delta \mathbf{L}_{(K)}$  se obtiene de la resolución del sistema lineal

$$\mathbf{H}\Phi(\mathbf{L}_{(K)}) \cdot \Delta \mathbf{L}_{(K)} = -\nabla \Phi(\mathbf{L}_{(K)}) \quad (3.13)$$

Con este vector de incrementos se determina ahora la aproximación  $k+1$ -ésima del vector  $\mathbf{L}$ , a partir de la expresión

$$\mathbf{L}_{(K+1)} = \mathbf{L}_{(K)} + \Delta \mathbf{L}_{(K)} \quad (3.14)$$

con la que se modifica el vector  $\mathbf{L}$  de longitudes de las barras y se obtiene un acercamiento progresivo, planteado como un proceso iterativo, a las especificaciones definidas en las posiciones de síntesis.

El mayor problema que aparece en esta etapa es la determinación del vector gradiente y de la matriz hessiana de la función objetivo  $\Phi$ , puesto que la expresión analítica de las variables  $l_{ij}$  en función de las variables  $L_k$  es desconocida. Los términos contenidos en el vector gradiente son las derivadas parciales de la función  $\Phi$  definida en (3.3) respecto de las variables  $L_i$ , según la expresión

$$\frac{\partial \Phi}{\partial L_k} = 2 \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \omega_j (l_{ij} - L_i) \frac{\partial (l_{ij} - L_i)}{\partial L_k} \quad (3.15)$$

que constituye un problema fuertemente no lineal, que puede linealizarse sin embargo si las variables  $l_{ij}$  se suponen independientes de las variables  $L_k$ , con lo que

$$\frac{\partial l_{ij}}{\partial L_k} = 0 \quad (3.16)$$

y la expresión (3.15) se reduce a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial L_k} = -2 \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \omega_j \delta_{ik} (l_{ij} - L_i) \quad (3.17)$$

siendo  $\delta_{ik}$  la función delta de Kronecker, definida según la expresión

$$\delta_{ik} = \frac{\partial L_i}{\partial L_k} = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases} \quad (3.18)$$

### 3.1.4. Nuevo planteamiento del problema de posición deformada.

Posteriores desarrollos, también llevados a cabo en la Universidad del País Vasco, han completado este planteamiento original. Navalpotro (1989) reconstruye el proceso expuesto de optimización de los parámetros de diseño a través de un planteamiento semianalítico, calculando las derivadas parciales de las variables  $l_{ij}$  respecto de las variables  $L_k$ , que se habían supuesto iguales a cero en (3.16), por el método de las diferencias finitas, a partir de la expresión

$$\frac{\partial l_{ij}}{\partial L_k} = \frac{l_{ij}(L_1, L_2, \dots, L_k + \Delta L_k, \dots, L_n) - l_{ij}(L_1, L_2, \dots, L_k, \dots, L_n)}{\Delta L_k} \quad (3.19)$$

que no exige la resolución de un nuevo problema de posición deformada para el nuevo valor de la variable  $L_k$  incrementada en  $\Delta L_k$ , ya que por tratarse de un incremento diferencial se admite que la nueva posición deformada se obtiene incrementando el vector  $\mathbf{x}$  en un  $\Delta \mathbf{x}$  solución del sistema lineal

$$\mathbf{H}\varphi(\mathbf{x}) \cdot \Delta \mathbf{x} = -\nabla\varphi(\Delta L_k) \quad (3.20)$$

estimándose en  $10^{-6}$  el incremento diferencial  $\Delta L_k$  (Navalpotro, 1989).

Una vez resuelto el problema del cálculo de la derivada primera es necesario determinar las derivadas segundas que aparecen en la matriz hessiana, derivando de nuevo la expresión (3.15), con lo que se obtiene

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial L_k \partial L_p} = 2 \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \omega_j \left( \frac{\partial l_{ij}}{\partial L_k} - \delta_{ik} \right) \left( \frac{\partial l_{ij}}{\partial L_p} - \delta_{ip} \right) + (l_{ij} - L_i) \frac{\partial^2 l_{ij}}{\partial L_k \partial L_p} \quad (3.21)$$

que puede reducirse nuevamente a un problema lineal si se igualan a cero las derivadas segundas de las longitudes de las barras deformadas,

$$\frac{\partial^2 l_{ij}}{\partial L_k \partial L_p} = 0 \quad (3.22)$$

con lo que las derivadas segundas que aparecen en la matriz hessiana se determinan a partir de la expresión

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial L_k \partial L_p} = 2 \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \omega_j \left( \frac{\partial l_{ij}}{\partial L_k} - \delta_{ik} \right) \left( \frac{\partial l_{ij}}{\partial L_p} - \delta_{ip} \right) \quad (3.23)$$

Según los datos aportados por Navalpotro (1989) este nuevo planteamiento del método permite una reducción del valor del mínimo calculado del orden de 1/10, con una reducción del número de iteraciones estimada en 1/100. Aun así, el método presenta algún problema, como la indeterminación en la posición relativa de los nudos en los eslabones triangulares y el libre posicionamiento de los puntos fijos en el problema de la posición deformada. Para resolver estos problemas Vallejo (1993) añade a la función objetivo de energía potencial elástica sendas funciones de penalización que controlan estas dos restricciones, y define una nueva función objetivo  $\varphi_o$ , que tiene la forma

$$\varphi_o = \varphi + \varphi_t + \varphi_f \quad (3.24)$$

donde  $\varphi$  es la función de energía potencial elástica,  $\varphi_t$  la función de penalización que controla la inversión del triángulo, y que se construye a partir de los productos escalares y vectoriales que forman los vectores definidos por los vértices del triángulo, y  $\varphi_f$  la función de penalización que controla la movilidad de los puntos fijos, y que equivale a la adición de resortes ficticios en los nudos fijos.

Para evitar el cálculo numérico de las derivadas primera y segunda de las longitudes de las barras deformadas respecto al vector de diseño, Vallejo calcula el valor exacto de éstas mediante la definición de la derivada como límite, resultando innecesaria la utilización del método de diferencias finitas empleado por Navalpotro. Así la expresión de las derivadas primeras se reduce a

$$\frac{\partial l_{ij}}{\partial L_k} = \Delta^k \quad (3.25)$$

donde  $\Delta^k$  es la proyección de la diferencia de posición de la barra  $i$ -ésima en la dirección de  $l_i$  en la  $j$ -ésima posición de síntesis.

De igual manera, se determina la expresión de las derivadas segundas,

$$\frac{\partial^2 l_{ij}}{\partial L_k \partial L_p} = \frac{N_i^2}{l_{ij}^3} \quad (3.26)$$

donde  $N_i$  es la proyección de la diferencia de posición de la barra  $i$ -ésima en la dirección normal a  $l_j$  en la  $j$ -ésima posición de síntesis.

Este nuevo tratamiento del problema de posición deformada permite a Vallejo resolver el problema de optimización mediante distintos algoritmos de optimización de orden cero, de orden uno –concretamente el método de las direcciones conjugadas y el método del gradiente– y de orden dos –el método de Newton–. Estos últimos son los que muestran una mejor convergencia con menor número de iteraciones, aunque el resto de métodos resultan también de gran utilidad en aquellos casos en que el mecanismo de partida está muy alejado del objetivo final del diseño (Vallejo, 1993).

### **3.2. Síntesis dimensional óptima con restricciones.**

A partir de los distintos planteamientos expuestos y con la intención de superar los inconvenientes descritos hasta aquí, Alba (1994) desarrolla un método de síntesis dimensional óptima de mecanismos planos en el que utiliza la función objetivo de energía potencial elástica, y que estructura también en dos etapas.

La principal aportación al método descrito es la ampliación del vector de diseño, al que se añaden a las longitudes de las barras las coordenadas de los nudos en las distintas posiciones de síntesis. Este planteamiento aumenta considerablemente la dimensión del vector de diseño, penalizando el coste computacional del método, pero facilita enormemente la determinación de los gradientes y las matrices jacobianas de la función objetivo y de las restricciones, puesto que evita la derivación respecto a variables que no son estrictamente independientes. Este nuevo planteamiento se completa con la utilización de un algoritmo de programación cuadrática secuencial (Stoer, 1985; Boggs y Tolle, 1995 y 2000; Rodríguez-Toral et al., 2001) para la optimización de la función objetivo.

Las principales características del método, que se va exponer a continuación, son las siguientes:

- Admite cualquier configuración geométrica para mecanismos planos y espaciales.
- Incorpora de forma independiente cualquier restricción topológica, geométrica o dimensional.

- Controla la orientación relativa de los vértices de los eslabones triangulares, con el fin de evitar la inversión del triángulo durante el proceso de la síntesis.
- Permite la movilidad de los puntos fijos en el proceso de síntesis.
- Permite la incorporación de pares cinemáticos superiores e inferiores.
- Permite la incorporación de restricciones de tipo cinemático de velocidad y de aceleración.
- Permitirá la incorporación de restricciones de tipo dinámico, que son el objeto de la presente tesis doctoral.

El algoritmo utilizado para la resolución del problema de optimización plantea ésta como un problema de programación cuadrática secuencial donde es preciso determinar la función objetivo y las restricciones, así como sus respectivos gradientes y hessianos. La función objetivo y las funciones restricción, así como sus respectivos gradientes se definen analíticamente, mientras que los hessianos se calculan numéricamente por diferencias finitas. El método, que ha sido implementado a través de la subrutina E04VDF de la biblioteca matemática NAG, y que ha sido testado en numerosas aplicaciones, entre las que destaca el diseño de prensas de mecánica articulada para estampación y embutición profunda de chapa (Alba et al., 1999), ha mostrado una convergencia y una robustez muy apreciables.

A continuación se analiza más detenidamente este planteamiento de síntesis de mecanismos planos con restricciones de posición y cinemáticas mediante programación cuadrática secuencial, que supondrá el punto de partida del método de síntesis dimensional óptima con restricciones dinámicas propuesto en esta tesis.

### 3.2.1. Planteamiento del problema.

La síntesis óptima se plantea aquí como un problema de programación matemática, en el que se pretende minimizar una función objetivo,

$$f(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.27)$$

donde el vector de diseño  $\mathbf{x}$ , que contiene a las variables de diseño, está sujeto a restricciones funcionales lineales,

$$\mathbf{l}_1 \leq \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{u}_1 \quad (3.28)$$

a restricciones funcionales no lineales,

$$\mathbf{l}_{nl} \leq \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{u}_{nl} \quad (3.29)$$

y a restricciones directas sobre las variables de diseño, que constituyen un caso particular dentro de las restricciones lineales definiendo el espacio de diseño, y que servirán para definir las restricciones de posición que se impondrán posteriormente,

$$\mathbf{l}_x \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}_x \quad (3.30)$$

La aplicación del método de programación cuadrática secuencial exige la continuidad de la función objetivo a utilizar, así como el conocimiento del gradiente y el hessiano de la misma. El gradiente se obtiene por derivación directa, ya que todos los parámetros geométricos involucrados en cada proceso son variables de diseño. El hessiano, por el contrario, se obtendrá por diferencias finitas.

### 3.2.2. Restricciones geométricas.

La herramienta matemática utilizada permite imponer a las diferentes variables de diseño unas bandas de existencia con las cuales se puede limitar el tamaño físico de la solución obtenida. Esto permite delimitar el espacio de diseño e incluso las dimensiones de los eslabones que se den como solución óptima. La imposición de las restricciones en forma de banda permite flexibilizar, a criterio del diseñador, el cumplimiento de los puntos de síntesis. Se trabaja así con regiones del espacio de precisión, en lugar de con puntos de precisión, aportando una mayor adaptabilidad a la solución. Esta circunstancia no entra en oposición con la precisión del diseño, dado que existen muchos casos en los que es más práctico trabajar con regiones de posicionamiento adecuadas que con puntos, sobre todo cuando se hacen intervenir condicionantes cinemáticos y/o dinámicos.

Las restricciones geométricas controlan la geometría del mecanismo, estableciendo su topología y definiendo los pares cinemáticos que limitan los movimientos relativos entre eslabones en contacto.

Entre otras, se definen las siguientes restricciones geométricas en mecanismos espaciales:

- Igualdad de coordenadas de puntos fijos.
- Relación constante entre coordenadas.
- Colinealidad de tres puntos.
- Coplanaridad de cuatro puntos.
- Orientación relativa constante de triángulo.
- Orientación relativa constante de tetraedro.

Análogamente, se definen las siguientes restricciones geométricas en mecanismos planos:

- Igualdad de coordenadas de puntos fijos.
- Relación constante entre coordenadas.
- Colinealidad de tres puntos.
- Orientación relativa constante de triángulo.

A continuación se exponen brevemente las restricciones geométricas más utilizadas en la síntesis de mecanismos planos desarrolladas por Alba (1994), a donde se remite al lector interesado en la consulta de la expresión analítica de sus respectivos gradientes.

### **3.2.2.1. Igualdad de coordenadas de punto fijo.**

En el caso de que se permita una banda de existencia para los puntos fijos, con el fin de aumentar la flexibilidad del método, se debe imponer una restricción para que las coordenadas de éstos sean iguales en todas las posiciones de síntesis. Esta restricción puede expresarse linealmente, según la expresión

$$x_j[\text{PF}_m(i)] = x_j[\text{PF}_m(k)] \quad (3.31)$$

siendo  $x_j[\text{PF}_m(i)]$  la  $j$ -ésima coordenada del  $m$ -ésimo punto fijo en la  $i$ -ésima posición de síntesis.

### **3.2.2.2. No inversión de triángulo.**

Esta restricción controla la topología del eslabón triangular, impidiendo que pueda

dar la vuelta durante el proceso de síntesis.

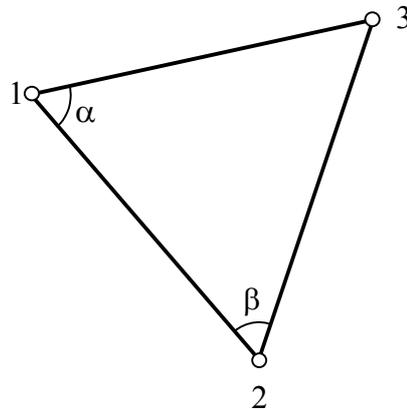


Figura 3.1: No inversión de triángulo.

Se impone mediante dos restricciones de tipo coseno y una restricción de tipo seno, de la forma

$$\begin{cases} 0 < \text{sen} \alpha < 1 \\ 0 < \text{cos} \alpha < 1 \\ 0 < \text{cos} \beta < 1 \end{cases} \quad (3.32)$$

donde los parámetros trigonométricos se definen en función de productos escalares y vectoriales entre los vectores que definen los lados del triángulo, de la forma

$$\begin{aligned} \text{sen} \alpha &= \frac{\overline{\mathbf{12}} \times \overline{\mathbf{13}}}{|\overline{\mathbf{12}}| \cdot |\overline{\mathbf{13}}|} \\ \text{cos} \alpha &= \frac{\overline{\mathbf{12}} \cdot \overline{\mathbf{13}}}{|\overline{\mathbf{12}}| \cdot |\overline{\mathbf{13}}|} \\ \text{cos} \beta &= \frac{\overline{\mathbf{21}} \cdot \overline{\mathbf{23}}}{|\overline{\mathbf{21}}| \cdot |\overline{\mathbf{23}}|} \end{aligned} \quad (3.33)$$

que puestos en función de las coordenadas de los vértices del triángulo, proporcionan las expresiones

$$\begin{aligned} \text{sen} \alpha &= \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \cdot \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}} \\ \text{cos} \alpha &= \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \cdot \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\cos \beta = \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) + (y_1 - y_2)(y_3 - y_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \cdot \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}$$

### 3.2.2.3. Colinealidad de tres puntos.

Esta restricción controla la topología de un eslabón barra con un punto intermedio, y asegura la colinealidad de los tres puntos, y la permanencia del punto central entre los dos puntos extremo y final de barra.

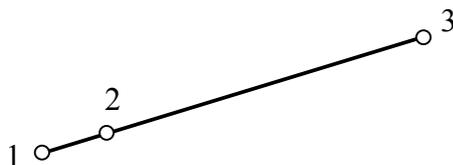


Figura 3.2: Colinealidad de tres puntos.

Se impone igualmente mediante dos restricciones de tipo coseno y una restricción de tipo seno, de la forma

$$\begin{cases} 0 \leq \text{sen} \alpha \leq 0 \\ 1 \leq \cos \alpha \leq 1 \\ 1 \leq \cos \beta \leq 1 \end{cases} \quad (3.35)$$

donde los parámetros trigonométricos se definen nuevamente en función de productos escalares y vectoriales, de la forma

$$\begin{aligned} \text{sen} \alpha &= \frac{\overline{\mathbf{13}} \times \overline{\mathbf{12}}}{|\overline{\mathbf{13}}| \cdot |\overline{\mathbf{12}}|} \\ \cos \alpha &= \frac{\overline{\mathbf{13}} \cdot \overline{\mathbf{12}}}{|\overline{\mathbf{13}}| \cdot |\overline{\mathbf{12}}|} \\ \cos \beta &= \frac{\overline{\mathbf{31}} \cdot \overline{\mathbf{32}}}{|\overline{\mathbf{31}}| \cdot |\overline{\mathbf{32}}|} \end{aligned} \quad (3.36)$$

que puestos en función de las coordenadas de los tres puntos, proporcionan las expresiones

$$\text{sen} \alpha = \frac{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad (3.37)$$

$$\cos \alpha = \frac{(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) + (y_1 - y_3)(y_2 - y_3)}{\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}$$

### 3.2.2.4. Par engranaje-engranaje.

Esta restricción controla el contacto entre dos eslabones mediante un par de tipo superior engranaje-engranaje.

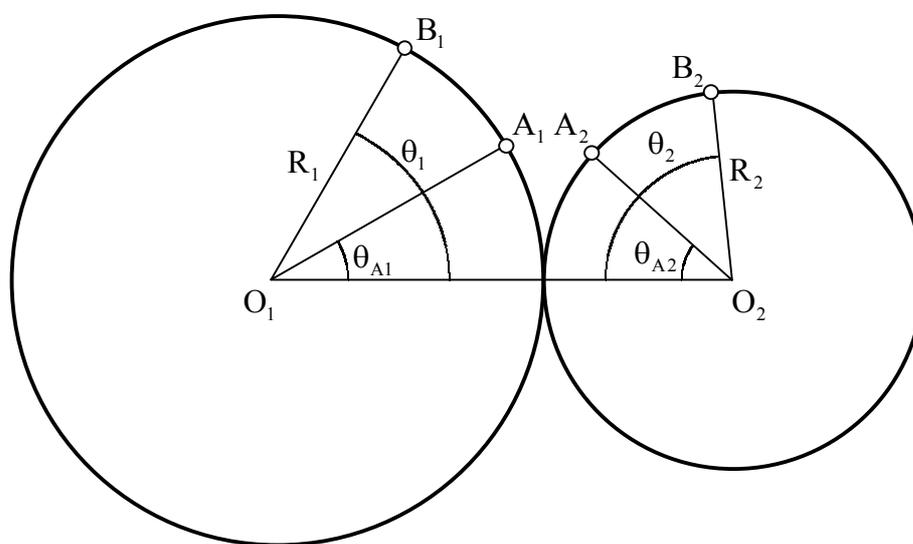


Figura 3.3: Par engranaje-engranaje.

Se plantea igualando los arcos descritos por los puntos  $B_1$  y  $B_2$ , desde una posición de referencia conocida. La ecuación de restricción resulta

$$(\theta_1 - \theta_{A1})R_1 - (\theta_2 - \theta_{A2})R_2 = 0 \quad (3.38)$$

donde

$$R_1 = \sqrt{(x_{B1} - x_{O1})^2 + (y_{B1} - y_{O1})^2}$$

$$R_2 = \sqrt{(x_{B2} - x_{O2})^2 + (y_{B2} - y_{O2})^2}$$

$$\theta_1 = \arctg \frac{y_{B1} - y_{O1}}{x_{B1} - x_{O1}} \quad (3.39)$$

$$\theta_2 = \arctg \frac{y_{B2} - y_{O2}}{x_{B2} - x_{O2}}$$

### 3.2.2.5. Par engranaje-cremallera.

Esta restricción controla el contacto entre dos eslabones mediante un par de tipo superior engranaje-cremallera.

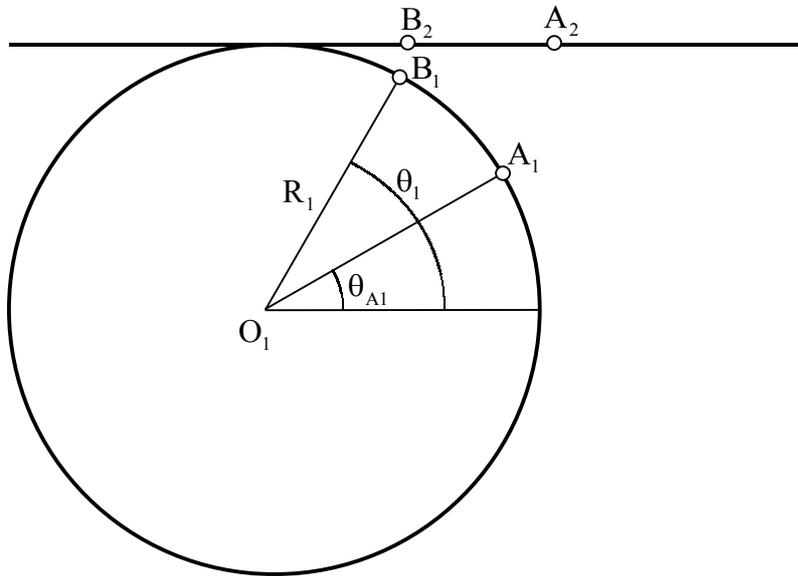


Figura 3.4: Par engranaje-cremallera.

Se plantea igualando el arco descrito por el punto  $B_1$  del engranaje con el segmento descrito por el punto  $B_2$  en la cremallera, desde una posición de referencia conocida. La ecuación de restricción resulta

$$(\theta_1 - \theta_{A1})R_1 - L_2 = 0 \quad (3.40)$$

donde

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{(x_{B1} - x_{O1})^2 + (y_{B1} - y_{O1})^2} \\ L_2 &= \sqrt{(x_{B2} - x_{A2})^2 + (y_{B2} - y_{A2})^2} \\ \theta_1 &= \arctan \frac{y_{B1} - y_{O1}}{x_{B1} - x_{O1}} \end{aligned} \quad (3.41)$$

### 3.3. Síntesis con restricciones de posición.

Continuando la línea marcada por los antecedentes expuestos, el procedimiento se desarrolla en dos etapas bien diferenciadas, denominadas síntesis local y síntesis global.

El propósito de la etapa de síntesis local es optimizar el mecanismo en cada una de las posiciones de síntesis, con el fin de obtener el vector inicial que ha de servir para comenzar la etapa de síntesis global. Se trata de un paso simple pero de gran importancia, dado que la eficiencia de la búsqueda de la solución en la síntesis global depende en gran medida de este vector. En la etapa de síntesis global, partiendo del vector obtenido con anterioridad en la síntesis local, se desarrolla el verdadero proceso de búsqueda de mínimos para el conjunto de las posiciones de síntesis fijadas.

A continuación se analizan con más detalle los aspectos matemáticos de las dos etapas implicadas en la síntesis.

### **3.3.1. Síntesis local.**

Como ya se ha dicho, en la síntesis local se obtiene el vector inicial de la síntesis global, a través de la optimización del mecanismo en cada una de las posiciones de síntesis. Se cuenta con la definición de las posiciones de síntesis, expresadas como restricciones de posición según la expresión (3.30), y con unas dimensiones iniciales del mecanismo que son las que se utilizarán como punto de partida del proceso de optimización en la síntesis local.

En el planteamiento general del problema pueden imponerse tantas posiciones de precisión como se desee y tantas restricciones como sea preciso. La convergencia o no a un mínimo local o global depende de varios aspectos, entre los que destacan la cercanía del vector inicial al mínimo y el número de restricciones impuestas.

Es importante elegir convenientemente el vector de longitudes iniciales, ya que dependiendo de éstas, el proceso llevará a un mínimo local o a otro, según la región de atracción de mínimos locales en que se sitúe el problema, siendo imposible asegurar a priori y de forma general la convergencia del proceso a un mínimo global. Este problema puede solucionarse con relativa facilidad a partir de un cierto conocimiento del comportamiento del mecanismo, consecuencia de la experiencia del diseñador, o bien mediante una búsqueda rutinaria de mínimos.

Por otro lado, a medida que aumenta el número de posiciones de precisión impuestas, aumenta también la probabilidad de encontrar un mínimo global, siempre que las restricciones impuestas no dejen la solución fuera de la región viable, en cuyo caso será imposible converger a ella. Respecto al tamaño adecuado del problema, es

imposible establecer reglas generales, dado que la convergencia depende en gran medida del vector inicial, siendo posible encontrar el mínimo global con muy pocas iteraciones si se parte de un vector inicial muy cercano a aquel.

En la etapa de síntesis local el vector de diseño está formado, en cada posición de síntesis, por las coordenadas de los puntos que definen los pares cinemáticos del mecanismo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

donde  $x_i$  es la coordenada  $i$ -ésima del mecanismo. La función objetivo a utilizar es la de energía potencial elástica, que evalúa la energía de deformación elástica almacenada en cada una de las barras, supuestas éstas elementos elásticos susceptibles de ser alargados o acortados durante la síntesis,

$$\varphi = \sum_{i=1}^n (l_i - L_i)^2 \quad (3.43)$$

donde  $n$  es el número de barras del mecanismo,  $L_i$  la longitud nominal de la barra  $i$ -ésima sin deformar y  $l_i$  la longitud de la barra  $i$ -ésima deformada, calculada a partir de las coordenadas de sus nudos en la posición de síntesis,

$$l_i = \sqrt{(y_{F(i)} - y_{O(i)})^2 + (x_{F(i)} - x_{O(i)})^2} \quad (3.44)$$

donde  $O(i)$  y  $F(i)$  son, respectivamente, los nudos origen y final de la barra  $i$ -ésima.

En lo que se refiere a las restricciones a imponer en la etapa de síntesis local, actúan las restricciones que controlan la geometría del mecanismo definidas en el apartado 3.2.2, pero los puntos fijos no tienen movilidad posible. Es obvio que no es viable dar movilidad a los puntos fijos en la síntesis local ya que ello implicaría la posibilidad de posicionamiento del mecanismo en las posiciones de síntesis sin necesidad ninguna de deformarse, lo que invalidaría por completo el proceso de síntesis local.

A estas restricciones es preciso añadir ahora las restricciones de posición, que son ahora restricciones directas sobre el vector de diseño,

$$\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \quad (3.45)$$

Una vez finalizado este proceso se obtiene una configuración deformada por cada una de las posiciones de síntesis definidas. Estas configuraciones reciben el nombre de mecanismos activos, denominándose mecanismo activo-I la configuración deformada correspondiente a la  $i$ -ésima posición de síntesis. Estas configuraciones se obtienen haciendo mínima la función objetivo definida en (3.43) en cada uno de los puntos de síntesis. Si el mecanismo es susceptible de pasar sin deformar por todos los puntos de síntesis, el resultado de este proceso será el correspondiente a distintos instantes del movimiento del mecanismo, que será la solución exacta al proceso de síntesis local, haciendo cero la función objetivo. Este caso constituye en la práctica una rara excepción.

### 3.3.2. Síntesis global.

El verdadero problema de síntesis del mecanismo se resuelve en esta etapa, aunque ello no quiere decir en absoluto que la síntesis local sea poco importante. La solución local permite obtener el vector inicial con el que se iniciará todo el proceso de búsqueda de mínimo en la síntesis global, que determinará la rapidez de la convergencia y el valor del mínimo obtenido.

En la etapa de síntesis global se parte de todas las configuraciones deformadas obtenidas en el proceso de síntesis local y se monta un vector inicial constituido por todas las coordenadas de los nudos del mecanismo en cada uno de los puntos de síntesis. Este vector inicial se completa con los valores medios ponderados de las longitudes de los eslabones obtenidas en cada punto de precisión. El problema pasa ahora a tener como variables de diseño todas las coordenadas de los nudos en todas las posiciones de síntesis, así como las longitudes de las barras que constituyen el mecanismo,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \dots \\ \mathbf{x}_s \\ \mathbf{L} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

donde  $\mathbf{x}_i$  es el vector de diseño correspondiente al mecanismo activo-I y  $\mathbf{L}$  el vector

inicial de longitudes de barras, que se calculan como la media aritmética de las longitudes de las barras de los mecanismos activos obtenidos en síntesis local. La función objetivo que se plantea en la síntesis global es la ya descrita energía potencial de deformación, expandida a todos los puntos de síntesis, incorporando ahora como variables de diseño las longitudes de los eslabones que conforman el mecanismo. Se incorpora un peso que permite ponderar la importancia relativa del cumplimiento de cada posición de síntesis.

$$\Phi = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \omega_j (l_{ij} - L_i)^2 \quad (3.47)$$

donde  $s$  es el número de posiciones de síntesis,  $\omega_j$  el coeficiente de ponderación de la  $j$ -ésima posición de síntesis y  $l_{ij}$  la longitud de la barra  $i$ -ésima deformada en la  $j$ -ésima posición de síntesis. Sobre estas variables de diseño se pueden imponer ahora todas las restricciones geométricas que se han definido en el apartado 3.2.2., incluyendo la movilidad de los puntos fijos.

Como consecuencia del proceso de minimización con restricciones de la función objetivo de energía potencial elástica expandida a la totalidad de los puntos de síntesis se obtiene una configuración única del mecanismo, que es la que mejor verifica en su totalidad las condiciones de síntesis impuestas. Esta configuración vendrá definida por las longitudes de las barras y las coordenadas de los puntos fijos.

A su vez, pueden aprovecharse las relaciones existentes entre las posiciones de los nudos, los valores cinemáticos del grado de libertad y los valores cinemáticos del mecanismo en cada uno de los puntos de síntesis para establecer restricciones cinemáticas adicionales, de velocidad, aceleración o sobreaceleración, como se verá a continuación.

### **3.4. Síntesis con restricciones cinemáticas.**

El vector de diseño de la síntesis global contiene las coordenadas de los nudos que definen la configuración de los mecanismos activos generados en la síntesis local, así como las longitudes de las barras que conforman el mecanismo. Los mecanismos activos generados cumplen la síntesis de tipo, pero sus dimensiones no coinciden con las dimensiones del mecanismo solución del problema salvo que éste tenga solución

exacta. Sin embargo, resulta evidente que el vector de diseño posee información implícita del comportamiento cinemático de las distintas configuraciones, aunque no contenga las dimensiones definitivas de las barras.

Las relaciones analíticas que permiten determinar la velocidad y aceleración de las coordenadas de los mecanismos activos pueden expresarse en función de la posición de sus nudos y del valor de las variables cinemáticas de los grados de libertad del mecanismo. Dado que el vector de diseño contiene las coordenadas de los mecanismos activos, pueden determinarse las velocidades y aceleraciones de éstas, así como sus respectivas matrices jacobianas. Esto permite establecer nuevas restricciones sobre la velocidad y/o la aceleración de las coordenadas de los mecanismos activos. Estas restricciones se incorporan al método de síntesis dimensional óptima descrito, y permiten controlar los parámetros cinemáticos de velocidad y aceleración desde las fases más tempranas del diseño del mecanismo. A continuación se analizan más detalladamente los aspectos matemáticos de la síntesis con restricciones cinemáticas.

### 3.4.1. Síntesis con restricciones de velocidad.

El problema de velocidad se plantea desde el problema de posición, resultando ser solución del sistema lineal

$$\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{b}} \quad (3.48)$$

que se obtiene al derivar con respecto al tiempo las ecuaciones de longitud de barras, las restricciones geométricas a imponer, y las coordenadas fijas existentes.

La ecuación que recoge el problema de velocidad se expande a todas las posiciones de síntesis y a todas las variables de diseño,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_2 & \cdot & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{E}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} & \mathbf{E}_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \cdot \\ \dot{\mathbf{x}}_s \\ \dot{\mathbf{L}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{b}}_1 \\ \dot{\mathbf{b}}_2 \\ \cdot \\ \dot{\mathbf{b}}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

permitiendo determinar las velocidades de las coordenadas de los mecanismos activos en función de sus coordenadas y de los parámetros cinemáticos del grado de libertad. El método permite resolver únicamente las ecuaciones correspondientes a las

restricciones impuestas, puesto que las funciones cinemáticas son independientes para cada punto de síntesis.

Al derivar con respecto al tiempo para obtener el sistema de ecuaciones en velocidad, debe tenerse en cuenta que la derivada con respecto al tiempo de las longitudes de las barras es igual a cero, ya que las longitudes de las barras no son dependientes del tiempo, y que en cualquier posición de síntesis, la velocidad del grado de libertad del mecanismo debe ser una expresión analítica y derivable de un parámetro cinemático externo.

El algoritmo de programación cuadrática secuencial utilizado en la optimización precisa además de la expresión analítica de las matrices jacobianas de las restricciones impuestas. Éstas se obtienen como solución de otro sistema lineal, que se obtiene derivando la expresión (3.48) respecto de las variables de diseño,

$$\mathbf{E} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \quad (3.50)$$

Los gradientes de las velocidades con respecto a cada una de las coordenadas del mecanismo en los puntos de síntesis deseado se obtienen también como solución de la ecuación del gradiente extendida a todos los puntos de síntesis.

Una vez determinadas las velocidades y sus matrices jacobianas, es posible imponer restricciones sobre las componentes de las velocidades de los nudos,

$$\mathbf{l}_v \leq \dot{\mathbf{x}} \leq \mathbf{u}_v \quad (3.51)$$

o también sobre su módulo,

$$\mathbf{l}_{mv} \leq |\dot{\mathbf{x}}| \leq \mathbf{u}_{mv} \quad (3.52)$$

cuyas componentes se calculan a partir de la expresión

$$|\dot{\mathbf{x}}_i| = \sqrt{\sum_{j=1}^d \dot{e}_{ij}^2} \quad (3.53)$$

donde  $d$  es la dimensión espacial del problema y  $\dot{e}_{ij}$  la  $j$ -ésima componente del vector velocidad del nudo  $i$ -ésimo, y cuyo gradiente es

$$\frac{\partial |\dot{x}_i|}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^d \dot{e}_{ij}^2}} \cdot \sum_{j=1}^d \dot{e}_{ij} \frac{\partial \dot{e}_{ij}}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.54)$$

### 3.4.2. Síntesis con restricciones de aceleración.

Una vez resueltos los problemas de posición y de velocidad, el problema de aceleración es la solución del siguiente sistema lineal, obtenido al derivar con respecto al tiempo el problema de velocidad planteado en (3.48),

$$\mathbf{E} \cdot \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{b}} - \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (3.55)$$

La ecuación que recoge el problema de aceleración se expande también a todas las posiciones de síntesis y a todas las variables de diseño,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \cdot & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{E}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} & \mathbf{E}_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_1 \\ \cdot \\ \ddot{\mathbf{x}}_s \\ \ddot{\mathbf{L}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{b}}_1 \\ \cdot \\ \ddot{\mathbf{b}}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{E}}_1 & \cdot & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \cdot & \dot{\mathbf{E}}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} & \dot{\mathbf{E}}_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \cdot \\ \dot{\mathbf{x}}_s \\ \dot{\mathbf{L}} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Nuevamente, al ser independientes las funciones cinemáticas para cada posición de síntesis, se pueden resolver sólo en las variables de diseño sobre las que se desee establecer restricciones.

De manera análoga al problema de velocidad, la expresión analítica de las matrices jacobianas de las aceleraciones se obtienen ahora como solución del sistema lineal que se obtiene al derivar (3.55)

$$\mathbf{E} \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \dot{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{E}} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}} \ddot{\mathbf{x}} \quad (3.57)$$

Una vez determinadas las aceleraciones y sus matrices jacobianas, es posible imponer restricciones sobre las componentes de las aceleraciones de los nudos,

$$\mathbf{l}_a \leq \ddot{\mathbf{x}} \leq \mathbf{u}_a \quad (3.58)$$

o también sobre su módulo

$$\mathbf{l}_{ma} \leq |\ddot{\mathbf{x}}| \leq \mathbf{u}_{ma} \quad (3.59)$$

cuyas componentes se calculan a partir de la expresión

$$|\ddot{\mathbf{x}}_i| = \sqrt{\sum_{j=1}^d \ddot{e}_{ij}^2} \quad (3.60)$$

donde  $d$  es la dimensión espacial del problema y  $\ddot{e}_{ij}$  la  $j$ -ésima componente del vector aceleración del nudo  $i$ -ésimo, y cuyo gradiente es

$$\frac{\partial |\ddot{\mathbf{x}}_i|}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^d \ddot{e}_{ij}^2}} \cdot \sum_{j=1}^d \ddot{e}_{ij} \frac{\partial \ddot{e}_{ij}}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.61)$$

Las restricciones cinemáticas descritas sólo se aplican en la etapa de síntesis global, y no en la síntesis local, dado que en esta etapa el vector inicial puede estar muy alejado de la solución. Además, y dado que al comenzar el proceso de síntesis no se conoce el comportamiento cinemático del mecanismo, una estrategia de trabajo recomendada es comenzar el proceso de síntesis imponiendo únicamente restricciones de posición. Una vez obtenidos los valores de las variables cinemáticas que se van a restringir –que se generan de forma inmediata, ya que se resuelven los sistemas para los distintos mecanismos activos– resulta sencillo imponer las restricciones cinemáticas deseadas, y repetir el proceso para obtener una solución más cercana a las especificaciones deseadas por el diseñador.

## Capítulo 4

# Síntesis dimensional óptima con restricciones dinámicas

A diferencia de lo ocurrido en la síntesis con restricciones de posición y cinemáticas, donde los métodos desarrollados eran relativamente numerosos, no ocurre lo mismo en lo que se refiere a la síntesis dimensional óptima de mecanismos con restricciones de tipo dinámico, donde apenas existen métodos de propósito general, aplicables a todo tipo de mecanismos. El objeto de este capítulo es mostrar un nuevo planteamiento de síntesis dimensional óptima que incorpore las restricciones dinámicas al método que ha sido presentado en el capítulo anterior. Para simplificar el problema, y de acuerdo a la metodología expuesta, nos limitaremos a implementar el método para mecanismos planos.

### 4.1. Dinámica de los sistemas multicuerpo.

Las ecuaciones diferenciales del movimiento para un sistema multicuerpo descrito por  $n$  coordenadas generalizadas, contenidas en el vector  $\mathbf{q}$ , y  $m$  ecuaciones de restricción que vamos a suponer holónomas y esclerónomas –dependientes únicamente de las coordenadas, e independientes por tanto de las velocidades y del tiempo– pueden escribirse según la expresión

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q} \quad (4.1)$$

(Serban, 1998), sujetas a las restricciones algebraicas

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector de diseño,  $\mathbf{q}$  el vector de coordenadas generalizadas,  $\ddot{\mathbf{q}}$  el vector de aceleraciones generalizadas,  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{q}, \mathbf{x})$  la matriz de masa,  $\boldsymbol{\lambda}$  el vector de multiplicadores de Lagrange,  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x})$  el vector que incluye las fuerzas exteriores y las fuerzas dependientes de la velocidad, y  $\Phi_{\mathbf{q}}$  la matriz jacobiana de las restricciones algebraicas respecto a las coordenadas generalizadas (Nikravesh, 1988; Haug, 1989) definida según

$$\Phi_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Las ecuaciones (4.1) y (4.2) forman un sistema de  $n+m$  ecuaciones algebraico-diferenciales, que contiene  $n$  ecuaciones diferenciales y  $m$  ecuaciones algebraicas, y que no puede ser tratado como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (Petzod, 1982). Existen muchas alternativas para resolver estos sistemas de ecuaciones algebraico-diferenciales, entre las que destacan los métodos de proyección (Gear et al., 1985; Furher y Leimkuhler, 1991), los métodos de reducción, denominados también métodos espacio-tiempo (Wehage y Haug, 1982; Haug, 1989; Mani et al., 1985; Singh y Likins, 1985; Weehage y Loh, 1993; Kim y Vanderploeg, 1986; Liang y Lance, 1987) y los métodos de estabilización (Baumgarte, 1972; Ostermeyer, 1990).

Las restricciones de velocidad pueden obtenerse derivando respecto al tiempo las restricciones algebraicas:

$$\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (4.4)$$

donde  $\dot{\mathbf{q}}$  el vector de velocidades generalizadas. Las restricciones de aceleración se obtienen derivando respecto al tiempo las restricciones de velocidad:

$$\Phi_q \ddot{\mathbf{q}} + (\Phi_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

donde el subíndice indica el vector respecto al que se calculan las derivadas parciales.

Hay muchos métodos para integrar el sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales formado por las ecuaciones (4.1), (4.2), (4.4) y (4.5) (Brenan et al., 1989; Hairer y Wanner, 1996; Potra, 1994), que implican generalmente la integración implícita de las ecuaciones, especialmente en el caso de sistemas complejos (Serban, 1998).

## 4.2. Análisis de sensibilidad.

El objeto de esta tesis es la optimización del comportamiento dinámico de un sistema multicuerpo. Tradicionalmente se han utilizado para ello algoritmos de orden cero, que no requieren información acerca de las derivadas, como los algoritmos genéticos (Davis, 1991) y el recocido simulado (Laarhoven, 1988). Estos métodos son computacionalmente costosos y requieren miles de evaluaciones (Serban, 1998).

La eficiencia y la convergencia de los algoritmos de optimización aumenta notablemente si se dispone de información acerca de las derivadas primeras de la función objetivo y de las funciones de restricción. Se han propuesto diversos métodos de optimización basados en el conocimiento de las derivadas de la función objetivo respecto a las variables de diseño (Gottfried y Weisman, 1972; Haug y Arora, 1979; Reklaitis et al, 1983). El cálculo de estas derivadas es lo que se conoce como análisis de sensibilidad, y determina la tendencia de la función objetivo respecto de las variables de diseño. Sin embargo la optimización del comportamiento dinámico de sistemas multicuerpo todavía no ha alcanzado un desarrollo suficiente como para dar lugar a métodos de implantación comercial general, puesto que todavía los tiempos de cálculo son excesivamente altos en muchos casos y son muchos los problemas sin resolver en cuanto a formulación e implementación.

El análisis de sensibilidad puede ser considerado como un paso intermedio entre el análisis dinámico y la síntesis. La inmadurez de los métodos de síntesis óptima hace sin embargo que muchos autores estimen que el procedimiento más adecuado para el problema general de optimización del comportamiento dinámico de sistemas multicuerpo sea por el momento un procedimiento interactivo, basado en la

superposición del análisis dinámico y el análisis de sensibilidad (García de Jalón y Bayo, 1994).

El análisis de sensibilidades puede efectuarse por derivación directa o por el método de la variable adjunta. La aproximación más directa es el método de derivación directa, que deriva las ecuaciones algebraico-diferenciales del movimiento respecto a los parámetros de diseño (Krishnaswami, et al., 1983; Chang y Nikraves, 1985; Haug, 1987). Los métodos de derivación directa no son populares en el ámbito de los sistemas multicuerpo pese a que proporcionan las derivadas en función del tiempo, debido fundamentalmente a la gran cantidad de ecuaciones a resolver, que para un sistema definido por  $n$  coordenadas generalizadas y  $m$  restricciones algebraicas supone la resolución de un sistema de  $(n+m)(p+1)$  ecuaciones algebraico-diferenciales, donde  $p$  es el número de variables de diseño.

El método de la variable adjunta reduce el coste computacional a costa de reducir el número de ecuaciones a resolver (Haug, 1987). En concreto, para un sistema definido por  $n$  coordenadas generalizadas y  $m$  restricciones algebraicas, el análisis de sensibilidad supone la resolución de un sistema de  $2(n+m)$  ecuaciones algebraico-diferenciales. En grandes sistemas el coste computacional se reduce espectacularmente por este motivo, pero el método no proporciona las derivadas en función del tiempo.

#### 4.2.1. Cálculo de sensibilidades por derivación directa.

Se considera la forma general de las ecuaciones del movimiento de un sistema multicuerpo

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q} \quad (4.6)$$

sujeto a las restricciones algebraicas

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

con restricciones de velocidad

$$\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

y restricciones de aceleración

$$\Phi_q \ddot{\mathbf{q}} + \left( \Phi_q \dot{\mathbf{q}} \right)_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

que se obtienen derivando directamente las restricciones algebraicas respecto al tiempo.

Derivando las ecuaciones (4.6) a (4.9) respecto al vector de diseño, utilizando la regla de la cadena, se obtiene la derivada de la ecuación del movimiento

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_x + (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}})_x + (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}})_q \mathbf{q}_x + \Phi_q^T \lambda_x + (\Phi_q^T \lambda)_x + (\Phi_q^T \lambda)_q \mathbf{q}_x = \mathbf{Q}_x + \mathbf{Q}_q \dot{\mathbf{q}}_x + \mathbf{Q}_q \mathbf{q}_x \quad (4.10)$$

que puede ser escrita como

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_x + \Phi_q^T \lambda_x = \mathbf{R}(\mathbf{q}_x, \dot{\mathbf{q}}_x, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \lambda, \mathbf{x}) \quad (4.11)$$

Se obtiene también la derivada de las restricciones algebraicas

$$\Phi_q \mathbf{q}_x + \Phi_x = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

que puede ser expresada como

$$\Psi(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (4.13)$$

De manera análoga se obtiene la derivada de las restricciones de velocidad

$$\Phi_q \dot{\mathbf{q}}_x + \left( \Phi_q \dot{\mathbf{q}} \right)_q \mathbf{q}_x + \left( \Phi_q \dot{\mathbf{q}} \right)_x = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

y la derivada de las restricciones de aceleración

$$\Phi_q + \left( \Phi_q \ddot{\mathbf{q}} \right)_q \mathbf{q}_x + \left( \Phi_q \ddot{\mathbf{q}} \right)_x + 2 \left( \Phi_q \dot{\mathbf{q}} \right)_q \dot{\mathbf{q}}_x + \left( \left( \Phi_q \dot{\mathbf{q}} \right)_q \dot{\mathbf{q}} \right)_q \mathbf{q}_x + \left( \left( \Phi_q \dot{\mathbf{q}} \right)_q \dot{\mathbf{q}} \right)_x = \mathbf{0} \quad (4.15)$$

Las ecuaciones (4.11) y (4.13) representan las ecuaciones de sensibilidad algebraico-diferenciales en la formulación de derivación directa. Estas ecuaciones contienen las derivadas respecto al vector de coordenadas generalizadas, respecto al vector de velocidades generalizadas y respecto al vector de diseño que son necesarias para la integración implícita de las ecuaciones del movimiento. Estas ecuaciones pueden integrarse en paralelo con las ecuaciones del movimiento, con el fin de obtener los valores de sensibilidad dinámica de la función objetivo respecto a las variables de diseño.

#### 4.2.2. Cálculo de sensibilidades por el método de la variable adjunta.

El método de la variable adjunta se utiliza para determinar la sensibilidad respecto al vector de diseño de funciones objetivo de la forma

$$e = \int_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda}, t) dt \quad (4.16)$$

La derivada de esta función respecto al vector de diseño se calcula aplicando la regla de Leibnitz y la regla de la cadena. El valor obtenido es

$$e_x = \int_{t_0}^{t_1} (F_x + F_q \mathbf{q}_x + F_{\dot{q}} \dot{\mathbf{q}}_x + F_{\lambda} \boldsymbol{\lambda}_x) dt \quad (4.17)$$

La idea básica del método es reemplazar los términos  $F_q \mathbf{q}_x$ ,  $F_{\dot{q}} \dot{\mathbf{q}}_x$  y  $F_{\lambda} \boldsymbol{\lambda}_x$  por otros términos fácilmente calculables. Suponiendo que las condiciones iniciales son independientes del vector de diseño e integrando por partes el tercer término de la ecuación anterior, ésta puede escribirse de la forma

$$e_x = F_{\dot{q}} \mathbf{q}_x \Big|_{t=t_1} + \int_{t_0}^{t_1} F_x dt + \int_{t_0}^{t_1} \left( \left( F_q - \frac{d}{dt} F_{\dot{q}} \right) \mathbf{q}_x + F_{\lambda} \boldsymbol{\lambda}_x \right) dt \quad (4.18)$$

Las ecuaciones del movimiento y las restricciones algebraicas se multiplican por dos vectores de variables adjuntas arbitrarias  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\mathbf{v}$  y se integran en el intervalo de tiempo considerado, para obtener

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q}) dt = 0 \quad (4.19)$$

y

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v}^T \boldsymbol{\Phi} dt = 0 \quad (4.20)$$

Las ecuaciones que se obtienen integrando por partes los términos en  $\ddot{\mathbf{q}}_x$  y  $\dot{\mathbf{q}}_x$  son

$$\begin{aligned} & \left( \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_x - (\dot{\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{M} + \boldsymbol{\mu}^T \dot{\mathbf{M}}) \mathbf{q}_x - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{Q}_{\dot{q}} \mathbf{q}_x \right) \Big|_{t_0}^{t_1} + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left( \ddot{\boldsymbol{\mu}}^T + 2\dot{\boldsymbol{\mu}}^T \dot{\mathbf{M}} + \boldsymbol{\mu}^T \ddot{\mathbf{M}} + (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})_q + (\boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda})_q + \dot{\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{Q}_{\dot{q}} + \boldsymbol{\mu}^T \dot{\mathbf{Q}}_{\dot{q}} - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{Q}_q \right) \mathbf{q}_x dt + \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\mu}^T \left( \boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda}_x + (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})_x + (\boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda})_x - \mathbf{Q}_x \right) dt = 0$$

y

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v}^T \left( \boldsymbol{\Phi}_x + \boldsymbol{\Phi}_q \mathbf{q}_x \right) dt = 0 \quad (4.22)$$

que pueden reducirse, considerando las variables adjuntas en las que los coeficientes de  $\mathbf{q}_x$  y  $\boldsymbol{\lambda}_x$  coinciden con los de la ecuación (4.18), a

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\mu}} + \boldsymbol{\Phi}_q^T \mathbf{v} = \mathbf{F}_q^T - \frac{d}{dt} \mathbf{F}_q^T - \dot{\boldsymbol{\mu}} (2\dot{\mathbf{M}} + \mathbf{Q}_q^T) - \boldsymbol{\mu} \left[ \ddot{\mathbf{M}} + (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})_q^T + (\boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda})_q^T - \dot{\mathbf{Q}}_q^T + \mathbf{Q}_q^T \right] \quad (4.23)$$

y

$$\boldsymbol{\Phi}_q \boldsymbol{\mu} - \mathbf{F}_\lambda = \mathbf{0} \quad (4.24)$$

Con estas ecuaciones se determinan los valores de los vectores de variables adjuntas  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\mathbf{v}$  a través de las condiciones finales, que se obtienen de la ecuación

$$\left( \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_x - \mathbf{q}_x \left( \dot{\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{M} + \boldsymbol{\mu}^T \dot{\mathbf{M}} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{Q}_q \right) \right) \Big|_{t=t_1} = \mathbf{F}_q \mathbf{q}_x \Big|_{t=t_1} \quad (4.25)$$

y que son

$$\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{M} \Big|_{t=t_1} = \mathbf{0} \quad (4.26)$$

y

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{M} + \boldsymbol{\mu}^T \dot{\mathbf{M}} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{Q}_q \Big|_{t=t_1} = -\mathbf{F}_q \Big|_{t=t_1} \quad (4.27)$$

que se reducen a

$$\boldsymbol{\mu} \Big|_{t=t_1} = \mathbf{0} \quad (4.28)$$

y

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{M} \Big|_{t=t_1} = -\mathbf{F}_q \Big|_{t=t_1} \quad (4.29)$$

Una vez obtenidos los vectores de variables adjuntas  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\mathbf{v}$  y obtenidas también las condiciones en el final del intervalo, la ecuación (4.18) se reduce a

$$e_x = \left( \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_x - \mathbf{q}_x \left( \dot{\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{M} + \boldsymbol{\mu}^T \dot{\mathbf{M}} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{q}}} \right) \right) \Big|_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_x \left[ -\boldsymbol{\mu}^T \left( (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}})_x + (\boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda})_x - \mathbf{Q}_x \right) - \mathbf{v}^T \boldsymbol{\Phi}_x \right] dt \quad (4.30)$$

que puede evaluarse fácilmente. Las ecuaciones de sensibilidad obtenidas a través del método de la variable adjunta difieren sensiblemente de las ecuaciones obtenidas mediante la derivación directa, aunque contiene los mismos términos (Serban, 1998).

### 4.3. Dinámica del cuerpo rígido.

Para conocer con exactitud el movimiento de un sistema material formado por  $n$  puntos materiales, la aplicación de la segunda ley de Newton a cada uno de esos puntos daría lugar a un sistema de  $3n$  ecuaciones con  $3n$  incógnitas, cuya resolución resultaría de todo punto inabordable.

Sin embargo, en el caso de los cuerpos rígidos, las ecuaciones del movimiento pueden obtenerse directamente a través de la relación existente entre el grupo cinemático y el sistema dinámico. El campo de velocidades del cuerpo queda definido a partir del vector velocidad angular y a partir de la velocidad de un punto cualquiera, que forman el grupo cinemático del sistema en dicho punto y que constituyen seis datos escalares. Éstos pueden determinarse unívocamente mediante su relación con el sistema dinámico causa del movimiento, dado que la condición de indeformabilidad permite que las fuerzas exteriores aplicadas puedan tratarse como vectores deslizantes.

Sea un cuerpo rígido en movimiento que recibe la acción de un sistema dinámico formado por  $n$  fuerzas  $\mathbf{F}_i$  con origen en  $n$  puntos  $A_i$ . El sistema dinámico origina una aceleración lineal en el cuerpo, que se calcula en su centro de masa a través del teorema del centro de masa, que es la particularización del teorema de la cantidad de movimiento en el centro de masa del cuerpo,

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}_G \quad (4.31)$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo,  $\mathbf{a}_G$  la aceleración del centro de masa y  $\mathbf{f}$  la resultante del sistema dinámico,

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (4.32)$$

La expresión (4.31) establece que el centro de masas del cuerpo se mueve como un punto material dotado de una masa igual a la masa total, bajo la acción de la resultante de las fuerzas exteriores. Esta ecuación vectorial puede convertirse en tres ecuaciones escalares, descomponiendo los vectores en las tres direcciones del espacio,

$$\begin{cases} F^x = ma_G^x \\ F^y = ma_G^y \\ F^z = ma_G^z \end{cases} \quad (4.33)$$

que quedan reducidas a dos en el caso de movimiento plano,

$$\begin{cases} F^x = ma_G^x \\ F^y = ma_G^y \end{cases} \quad (4.34)$$

De igual modo, el sistema dinámico origina una aceleración angular en el cuerpo, que se calcula a través de la expresión,

$$\mathbf{N}_G = \mathbf{I}_{Gxyz} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_{Gxyz} \boldsymbol{\omega}) \quad (4.35)$$

donde  $\mathbf{N}_G$  es el momento del sistema dinámico respecto del centro de masa, que se calcula a través de la expresión

$$\mathbf{N}_G = \sum_{i=1}^n \overline{\mathbf{GA}_i} \times \mathbf{F}_i \quad (4.36)$$

$\boldsymbol{\omega}$  es la velocidad angular del cuerpo,  $\boldsymbol{\alpha}$  la aceleración angular del cuerpo y  $\mathbf{I}_{Gxyz}$  el tensor de inercia referido al sistema de coordenadas Gxyz,

$$\mathbf{I}_{Gxyz} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

donde  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  son los momentos de inercia respecto de los ejes que forman el sistema de coordenadas Gxyz

$$\begin{cases} I_x = \int (y^2 + z^2) \cdot dm \\ I_y = \int (x^2 + z^2) \cdot dm \\ I_z = \int (x^2 + y^2) \cdot dm \end{cases} \quad (4.38)$$

y donde  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$  y  $I_{yz}$  son los productos de inercia,

$$\begin{cases} I_{xy} = \int x \cdot y \cdot dm \\ I_{xz} = \int x \cdot z \cdot dm \\ I_{yz} = \int y \cdot z \cdot dm \end{cases} \quad (4.39)$$

La expresión (4.35) se obtiene a partir del teorema del momento cinético, que se deriva respecto a un sistema de referencia móvil solidario al cuerpo con el fin de evitar la derivación de los términos contenidos en el tensor de inercia. Esta expresión se simplifica notablemente suponiendo que el sistema de coordenadas  $Gxyz$  coincide con las direcciones principales de inercia del cuerpo. En ese caso los productos de inercia se anulan y la ecuación se reduce a tres ecuaciones escalares, denominadas ecuaciones de Euler,

$$\begin{cases} N_G^x = I_x \alpha_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z \\ N_G^y = I_y \alpha_y - (I_z - I_x) \omega_x \omega_z \\ N_G^z = I_z \alpha_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y \end{cases} \quad (4.40)$$

y que junto a (4.33) forman un sistema de seis ecuaciones diferenciales con una única solución. En consecuencia, el movimiento del cuerpo rígido queda completamente definido a través de la resultante del sistema dinámico y del momento del sistema dinámico respecto al centro de masas (Bastero y Casellas, 1991).

Finalmente, las ecuaciones de Euler pueden simplificarse más aún en el caso de movimiento plano, dado que los vectores velocidad angular y aceleración angular tendrán únicamente una componente. Por ejemplo, si suponemos que el movimiento se produce en el plano  $xy$ , los vectores velocidad angular y aceleración angular son

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}^T = [0 \ 0 \ \omega_z] \\ \boldsymbol{\alpha}^T = [0 \ 0 \ \alpha_z] \end{cases} \quad (4.41)$$

y las ecuaciones de Euler se reducen a una única ecuación,

$$N_G^z = I_z \alpha_z \quad (4.42)$$

#### 4.4. Síntesis con restricciones dinámicas.

A continuación se presenta el método de síntesis dimensional óptima de sistemas multicuerpo con restricciones dinámicas que es el objeto de esta tesis.

##### 4.4.1. Planteamiento del problema.

La síntesis dimensional óptima se plantea como un problema de programación matemática, en el que se pretende minimizar una función objetivo,

$$f(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.43)$$

donde el vector de diseño  $\mathbf{x}$ , que contiene a las variables de diseño, está sujeto a restricciones funcionales lineales,

$$\mathbf{l}_1 \leq \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{u}_1 \quad (4.44)$$

a restricciones funcionales no lineales,

$$\mathbf{l}_{nl} \leq g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{u}_{nl} \quad (4.45)$$

y a restricciones directas sobre las variables de diseño, que constituyen un caso particular dentro de las restricciones lineales definiendo el espacio de diseño, y que servirán para definir las restricciones de posición que se impondrán posteriormente,

$$\mathbf{l}_x \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}_x \quad (4.46)$$

Las restricciones que se contemplarán en el método son las siguientes:

- Restricciones geométricas.
- Restricciones de posición.
- Restricciones cinemáticas.
- Restricciones dinámicas.

La aplicación del método de programación cuadrática secuencial que se utiliza para la resolución del problema de optimización de la función objetivo exige la continuidad de la función objetivo y de las restricciones a utilizar. Asimismo, es necesario determinar analíticamente el vector gradiente de la función objetivo y las matrices jacobianas de las restricciones. Las matrices hessianas de la función objetivo y de las

restricciones se calculan por diferencias finitas.

#### 4.4.2. Función objetivo.

El método se estructura en dos etapas bien diferenciadas. En una primera etapa, denominada síntesis local, se calcula el error cometido entre la característica generada por el mecanismo y la exigida en la definición del problema. En una segunda etapa se procede a variar los parámetros que definen la geometría del sistema, de tal modo que el error calculado en este nuevo diseño sea menor que el calculado en el diseño anterior.

Para resolver la primera etapa de la síntesis se define el problema de posición deformada. La posición deformada en cada posición de síntesis es aquella en la que la suma cuadrática de las deformaciones sufridas por todos los eslabones del mecanismo para satisfacer las especificaciones definidas en dicha posición de síntesis es mínima. Se plantean tantos problemas de posición deformada como posiciones de síntesis se definen. La función objetivo a minimizar en la síntesis local se denomina función de energía potencial elástica, y se define como

$$\sum_{i=1}^n (l_i - L_i)^2 \quad (4.47)$$

donde  $n$  es el número de barras del mecanismo,  $L_i$  la longitud nominal de la barra  $i$ -ésima sin deformar y  $l_i$  la longitud de la barra  $i$ -ésima deformada, calculada a partir de las coordenadas de sus nudos en la posición de síntesis,

$$l_i = \sqrt{(y_{F(i)} - y_{O(i)})^2 + (x_{F(i)} - x_{O(i)})^2} \quad (4.48)$$

donde  $O(i)$  y  $F(i)$  son, respectivamente, los nudos origen y final de la barra  $i$ -ésima.

La segunda etapa de la síntesis, denominada síntesis global, se plantea nuevamente como un problema de minimización de una nueva función objetivo de energía potencial elástica, extendida a la totalidad de las posiciones de síntesis, y definida como

$$\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \omega_j (l_{ij} - L_i)^2 \quad (4.49)$$

donde  $s$  es el número de posiciones de síntesis,  $\omega_j$  el coeficiente de ponderación de la

$j$ -ésima posición de síntesis y  $l_{ij}$  la longitud de la barra  $i$ -ésima deformada en la  $j$ -ésima posición de síntesis. La inclusión de los coeficientes de ponderación permite asignar un peso relativo a cada una de las posiciones de síntesis.

Esta función objetivo es una función de error que representa la energía de deformación elástica que se acumula en las barras del mecanismo a medida que éstas se deforman para satisfacer por completo las especificaciones de las sucesivas posiciones de síntesis, suponiendo que el comportamiento de las barras es elástico y lineal. Esta sencilla función objetivo incorpora al problema de programación matemática un poderoso principio mecánico, a partir del cual la configuración geométrica óptima de un mecanismo que debe satisfacer unas determinadas especificaciones de diseño es aquella que hace mínimo el valor de la energía potencial elástica. La utilización de esta función objetivo simplifica el tratamiento matemático del problema, dado su carácter escalar y la facilidad de su cálculo, y su forma cuadrática la hace especialmente apta para ser utilizada en el método de programación cuadrática secuencial. Además, incorpora al problema matemático un sentido mecánico evidente que facilita su comprensión.

Otras funciones objetivo que por ser menos generales son utilizadas exclusivamente en síntesis dinámica consideran la suma de los valores absolutos de los esfuerzos motores (Redfield y Hull, 1986 a), la suma cuadrática de los esfuerzos motores (Komor, 1985; González y Hull, 1989) o la suma cuadrática de los esfuerzos (Redfield y Hull, 1986 b).

#### 4.4.3. Vector de diseño.

En la etapa de síntesis local el vector de diseño está formado, en cada posición de síntesis, por las coordenadas naturales del sistema:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

donde  $x_i$  es la coordenada  $i$ -ésima del mecanismo.

En la etapa de síntesis global se parte de las configuraciones deformadas obtenidas

en el proceso de síntesis local y se monta un vector inicial constituido por todas las coordenadas de los nudos del mecanismo en cada uno de los puntos de síntesis. Este vector inicial se completa con los valores medios ponderados de las longitudes de los eslabones obtenidas en cada punto de precisión. El problema pasa ahora a tener como variables de diseño todas las coordenadas de los nudos en todas las posiciones de síntesis, así como las longitudes de las barras que constituyen el mecanismo,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \dots \\ \mathbf{x}_s \\ \mathbf{L} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

donde  $\mathbf{x}_i$  es el vector de diseño correspondiente al mecanismo activo-I, que es la configuración deformada obtenida en síntesis local para la  $i$ -ésima posición de síntesis, y  $\mathbf{L}$  el vector inicial de longitudes de barras, que se calculan como la media aritmética de las longitudes de las barras de los mecanismos activos obtenidos en síntesis local.

#### 4.4.4. Restricciones geométricas.

Las restricciones geométricas controlan la geometría del mecanismo, estableciendo su topología y definiendo los pares cinemáticos que limitan los movimientos relativos entre eslabones en contacto.

En el apartado 3.2.2. se han visto las expresiones que definen las distintas restricciones geométricas para sistemas multicuerpo con movimiento tridimensional y bidimensional.

En concreto, se han planteado las siguientes restricciones geométricas en sistemas multicuerpo espaciales:

- Igualdad de coordenadas de puntos fijos.
- Relación constante entre coordenadas.
- Colinealidad de tres puntos.
- Coplanaridad de cuatro puntos.

- Orientación relativa constante de triángulo.
- Orientación relativa constante de tetraedro.

Análogamente, se han planteado las siguientes restricciones geométricas en sistemas multicuerpo planos:

- Igualdad de coordenadas de puntos fijos.
- Relación constante entre coordenadas.
- Colinealidad de tres puntos.
- Orientación relativa constante de triángulo.

#### 4.4.5. Síntesis con restricciones de posición.

En la síntesis local se obtiene el vector inicial de la síntesis global, a través de la optimización del mecanismo en cada una de las posiciones de síntesis. Se cuenta con la definición de las posiciones de síntesis, expresadas como restricciones de posición y con unas dimensiones iniciales del mecanismo que son las que se utilizarán como punto de partida del proceso de optimización en la síntesis local.

En la etapa de síntesis local se minimiza la función objetivo energía potencial elástica definida en (4.47). En lo que se refiere a las restricciones a imponer en esta etapa, son activas todas las restricciones que controlan la geometría del mecanismo, salvo la movilidad de los puntos fijos, ya que si ésta fuera posible permitiría posicionar el mecanismo en las posiciones de síntesis sin necesidad ninguna de deformarse, lo que invalidaría la síntesis local.

A estas restricciones se añaden las restricciones de posición, que son restricciones directas sobre el vector de diseño,

$$\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \quad (4.52)$$

El resultado de este proceso es una configuración deformada –denominada mecanismo activo– por cada una de las posiciones de síntesis definidas.

RESTRICCIÓN	ACTIVA
Igualdad de coordenadas de puntos fijos	
Relación constante entre coordenadas	✓
Colinealidad/coplanaridad de puntos	✓
Orientación relativa constante de triángulo/tetraedro	✓
Restricciones de posición	✓
Restricciones cinemáticas	
Restricciones dinámicas	

Tabla 4.1: Restricciones activas en síntesis de posición local.

En la etapa de síntesis global se construye el vector de diseño a partir de los mecanismos activos obtenidos en la síntesis local, y se minimiza la función objetivo energía potencial elástica expandida a todas las posiciones de síntesis definida en (4.49). Sobre estas variables de diseño se imponen nuevamente las restricciones de posición y todas las restricciones geométricas, incluyendo la restricción de movilidad de los puntos fijos. El resultado de la síntesis es la configuración del mecanismo que verifica el mejor cumplimiento de todas las restricciones.

RESTRICCIÓN	ACTIVA
Igualdad de coordenadas de puntos fijos	✓
Relación constante entre coordenadas	✓
Colinealidad/coplanaridad de puntos	✓
Orientación relativa constante de triángulo/tetraedro	✓
Restricciones de posición	✓
Restricciones cinemáticas	
Restricciones dinámicas	

Tabla 4.2: Restricciones activas en síntesis de posición global.

#### 4.4.6. Síntesis con restricciones cinemáticas.

Otro paso en el método de síntesis dimensional óptima que se presenta es la imposición de restricciones cinemáticas de velocidad y/o de aceleración. Como se ha visto en 3.4.1. el problema de velocidad queda recogido en el sistema lineal

$$\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{b}} \quad (4.53)$$

que se obtiene al derivar con respecto al tiempo las ecuaciones de longitud de barras, las restricciones geométricas a imponer, y las coordenadas fijas existentes. Esta ecuación se expande a todas las posiciones de síntesis y a todas las variables de diseño, permitiendo determinar las velocidades de las coordenadas de los mecanismos activos en función de sus coordenadas y de los parámetros cinemáticos del grado de libertad. Dado que el algoritmo de programación cuadrática secuencial utilizado en la optimización precisa de la expresión analítica de las matrices jacobianas de las restricciones impuestas, éstas se obtienen como solución de otro sistema lineal, que se obtiene derivando la expresión (4.53) respecto de las variables de diseño,

$$\mathbf{E} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \quad (4.54)$$

Los gradientes de las velocidades con respecto a cada una de las coordenadas del mecanismo en los puntos de síntesis deseado se obtienen también como solución de la ecuación del gradiente extendida a todos los puntos de síntesis.

Una vez determinadas las velocidades y sus matrices jacobianas, es posible imponer restricciones sobre las componentes de las velocidades de los nudos, o sobre sus módulos, como se vio en 3.4.1.

Una vez resueltos los problemas de posición y de velocidad, el problema de aceleración es la solución del sistema lineal que se obtiene al derivar con respecto al tiempo el problema de velocidad planteado en (4.53),

$$\mathbf{E} \cdot \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{b}} - \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (4.55)$$

La ecuación que recoge el problema de aceleración se expande también a todas las posiciones de síntesis y a todas las variables de diseño, permitiendo determinar ahora las aceleraciones de las coordenadas de los mecanismos activos en función de sus coordenadas y de sus velocidades, y de los parámetros cinemáticos del grado de

libertad.

De manera análoga al problema de velocidad, la expresión analítica de las matrices jacobianas de las aceleraciones se obtienen ahora como solución del sistema lineal que se obtiene al derivar (4.55)

$$\mathbf{E} \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \dot{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{E}} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}} \ddot{\mathbf{x}} \quad (4.56)$$

Los gradientes de las aceleraciones con respecto a cada una de las coordenadas del mecanismo en los puntos de síntesis deseado se obtienen también como solución de la ecuación del gradiente extendida a todos los puntos de síntesis.

Una vez determinadas las aceleraciones y sus matrices jacobianas, es posible imponer restricciones sobre las componentes de las aceleraciones de los nudos, o sobre sus módulos, como se vio en 3.4.2.

RESTRICCIÓN	ACTIVA
Igualdad de coordenadas de puntos fijos	
Relación constante entre coordenadas	✓
Colinealidad/coplanaridad de puntos	✓
Orientación relativa constante de triángulo/tetraedro	✓
Restricciones de posición	✓
Restricciones cinemáticas	
Restricciones dinámicas	

Tabla 4.3: Restricciones activas en síntesis cinemática local.

Las restricciones cinemáticas descritas no se aplican en la síntesis local, dado que en esta etapa el vector inicial puede estar muy alejado de la solución.

Las restricciones cinemáticas se aplican únicamente en la etapa de síntesis global, donde de nuevo son activas todas las restricciones geométricas, incluyendo la de igualdad de puntos fijos, que nuevamente no es activa en síntesis local porque permitiría el cumplimiento de las restricciones de posición y cinemáticas sin

modificación de la longitud de las barras.

RESTRICCIÓN	ACTIVA
Igualdad de coordenadas de puntos fijos	✓
Relación constante entre coordenadas	✓
Colinealidad/coplanaridad de puntos	✓
Orientación relativa constante de triángulo/tetraedro	✓
Restricciones de posición	✓
Restricciones cinemáticas	✓
Restricciones dinámicas	

Tabla 4.4: Restricciones activas en síntesis cinemática global.

#### 4.4.7. Síntesis dinámica.

Como se ha visto en el planteamiento de las restricciones de tipo cinemático, el vector de diseño de la síntesis posee información acerca de las coordenadas de los nudos que definen el problema de posición de cada uno de los mecanismos activos. La resolución de este problema de posición de los nudos que definen la geometría del sistema, junto con los parámetros cinemáticos correspondientes a los grados de libertad de éste, permite obtener las relaciones que determinan la velocidad y la aceleración de todos los puntos. Se dispone así de las expresiones analíticas de los valores cinemáticos del mecanismo en función de las variables de diseño, por lo que es fácil determinar sus gradientes, y establecer, por tanto, restricciones con los valores cinemáticos que se desee controlar durante la fase de diseño del mecanismo. Estas restricciones de tipo cinemático así definidas son adecuadas al problema de síntesis dimensional óptima propuesto que se resuelve mediante programación cuadrática secuencial, puesto que el método exige el conocimiento de la expresión analítica de las funciones restricción y de sus gradientes, mientras que los hessianos pueden calcularse numéricamente por diferencias finitas.

El hecho de que el vector de diseño contenga entonces información implícita acerca

de las relaciones analíticas que definen los problemas de posición, velocidad y aceleración del mecanismo, implica que también pueden establecerse relaciones que definan el problema dinámico del mecanismo, donde se determinan los esfuerzos de tipo estático y dinámico que actúan sobre el mecanismo. La obtención de una expresión analítica que recoja la relación analítica de las magnitudes dinámicas en función del vector de diseño permite establecer restricciones de tipo dinámico que controlen el problema dinámico en la fase de diseño.

Sea un sistema multicuerpo de movimiento plano compuesto por  $n$  cuerpos rígidos y  $p$  nudos, que consideraremos coincidentes con los pares cinemáticos donde van a existir reacciones y fuerzas de enlace. El comportamiento dinámico del sistema está gobernado por  $2n$  ecuaciones vectoriales correspondientes al equilibrio dinámico de cada cuerpo rígido, y que según lo visto en 4.3. son,

$$\begin{cases} \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \\ \mathbf{N}_G = \mathbf{I}_{Gxyz}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_{Gxyz}\boldsymbol{\omega}) \end{cases} \quad (4.57)$$

que pueden reducirse a  $6n$  ecuaciones escalares en movimiento espacial, del tipo

$$\begin{cases} F^x = ma_G^x \\ F^y = ma_G^y \\ F^z = ma_G^z \\ N_G^x = I_x\alpha_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z \\ N_G^y = I_y\alpha_y - (I_z - I_x)\omega_x\omega_z \\ N_G^z = I_z\alpha_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y \end{cases} \quad (4.58)$$

o a  $3n$  ecuaciones escalares en movimiento plano, del tipo

$$\begin{cases} F^x = ma_G^x \\ F^y = ma_G^y \\ N_G^z = I_z\alpha_z \end{cases} \quad (4.59)$$

suponiendo en ambos casos que el sistema de coordenadas  $Gxyz$  coincide con las direcciones principales de inercia del cuerpo y pueden eliminarse los productos de inercia.

A las ecuaciones contenidas en (4.57) es necesario añadir  $p$  ecuaciones vectoriales de

equilibrio de fuerzas en los nudos. El equilibrio de fuerzas en un nudo donde confluyen  $m$  fuerzas se expresa

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (4.60)$$

y equivale a 3 ecuaciones escalares en movimiento espacial y a 2 ecuaciones escalares en movimiento plano.

El sistema de ecuaciones lineales resultante, que abarca las ecuaciones de equilibrio dinámico de los cuerpos rígidos y las ecuaciones de equilibrio de los nudos, tendrá entonces  $6n+3p$  ecuaciones en movimiento espacial y  $3n+2p$  ecuaciones en movimiento plano. Este sistema de ecuaciones representa el equilibrio dinámico del sistema, y puede plantearse en forma matricial,

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{e} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) \quad (4.61)$$

donde  $\mathbf{G}$  es una matriz geométrica, que depende exclusivamente de las coordenadas de los nudos y de las coordenadas de los centros de masas de los cuerpos,  $\mathbf{f}$  es ahora el vector de fuerzas y momentos incógnitas, que incluye fuerzas de enlace, reacciones y fuerzas motoras que puedan ser desconocidas a priori,  $\mathbf{e}$  es el vector de fuerzas y momentos conocidos,  $\mathbf{M}$  es una matriz que contiene las masas,  $\mathbf{c}$  es el vector de las aceleraciones de los centros de masa,  $\mathbf{I}$  es una matriz que contiene los elementos del tensor de inercia,  $\boldsymbol{\alpha}$  es el vector de aceleraciones angulares y  $\boldsymbol{\omega}$  es el vector de velocidades angulares.

La ecuación que recoge el problema dinámico se expande a todas las posiciones de síntesis,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{G}_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \cdot \\ \mathbf{f}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \cdot \\ \mathbf{e}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{M}_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \cdot \\ \mathbf{c}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \cdot \\ \boldsymbol{\alpha}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \cdot \\ \boldsymbol{\omega}_s \end{bmatrix} \times \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \cdot \\ \boldsymbol{\omega}_s \end{bmatrix} \right] \quad (4.62)$$

donde los subíndices indican la correspondiente posición de síntesis. Las coordenadas de los nudos de todos los mecanismos activos, que aparecen en la matriz  $\mathbf{G}$ , forman parte del vector de diseño de la síntesis global. El resto de parámetros que intervienen en la definición del problema dinámico, a excepción de las fuerzas y momentos conocidos a priori y que están recogidos en el vector  $\mathbf{e}$ , deben ser calculados a partir de los datos correspondientes a los análisis de posiciones,

velocidades y aceleraciones, que han debido resolverse previamente a partir de la información contenida en el vector de diseño y de los valores cinemáticos de los grados de libertad del mecanismo.

La expresión (4.61) puede simplificarse, si el movimiento es plano y los tensores de inercia se refieren a ejes principales de inercia, según (4.40) y (4.42), quedando reducida a

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{e} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (4.63)$$

que se expande a todas las posiciones de síntesis según

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{G}_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \cdot \\ \mathbf{f}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \cdot \\ \mathbf{e}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{M}_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \cdot \\ \mathbf{c}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \cdot \\ \boldsymbol{\alpha}_s \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

De manera análoga a lo visto en la síntesis con restricciones cinemáticas, el gradiente de la restricción dinámica se obtiene derivando el sistema de ecuaciones planteado. El gradiente del vector de fuerzas y momentos incógnitas se obtiene como solución del siguiente sistema lineal,

$$\mathbf{G} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{I} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \mathbf{x}} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times \left( \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{I} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \mathbf{x}} \right) - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f} \quad (4.65)$$

extendida a la totalidad de las posiciones de síntesis. A partir de esta expresión se determinará la expresión analítica de la matriz jacobiana de  $\mathbf{f}$  si los términos contenidos en los vectores y matrices de la ecuación de equilibrio dinámico (4.61) son funciones derivables respecto de las variables de diseño.

A su vez la expresión del gradiente del equilibrio dinámico (4.65) puede simplificarse si el movimiento es plano y los tensores de inercia se refieren a ejes principales de inercia, resultando la expresión

$$\mathbf{G} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{I} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\alpha} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f} \quad (4.66)$$

extendida a la totalidad de las posiciones de síntesis.

Como sucedía en la síntesis con restricciones cinemáticas de velocidad o aceleración, las restricciones dinámicas sólo se aplican en la etapa de síntesis global. No son de aplicación en la síntesis local, dado que en esta etapa el vector inicial puede

estar muy alejado de la solución.

RESTRICCIÓN	ACTIVA
Igualdad de coordenadas de puntos fijos	
Relación constante entre coordenadas	✓
Colinealidad/coplanaridad de puntos	✓
Orientación relativa constante de triángulo/tetraedro	✓
Restricciones de posición	✓
Restricciones cinemáticas	
Restricciones dinámicas	

Tabla 4.5: Restricciones activas en síntesis dinámica local.

RESTRICCIÓN	ACTIVA
Igualdad de coordenadas de puntos fijos	✓
Relación constante entre coordenadas	✓
Colinealidad/coplanaridad de puntos	✓
Orientación relativa constante de triángulo/tetraedro	✓
Restricciones de posición	✓
Restricciones cinemáticas	✓
Restricciones dinámicas	✓

Tabla 4.6: Restricciones activas en síntesis dinámica global.

La estrategia de trabajo recomendada es comenzar el proceso de síntesis imponiendo únicamente restricciones de posición. Una vez obtenidos los valores de las variables cinemáticas, se imponen las restricciones cinemáticas y se repite la síntesis, obteniendo una solución más cercana, o incluso exacta, a las especificaciones deseadas por el diseñador. Por último, y una vez obtenidos los valores de las variables

dinámicas que se desea restringir, se imponen las restricciones dinámicas, y se repite el proceso de síntesis. La definición de un gran número de restricciones puede exigir que abrir las bandas de precisión que marcan los límites inferior y superior de las restricciones para conseguir la convergencia.

#### 4.4.8. Síntesis estática.

La síntesis estática puede obtenerse como un caso particular de la síntesis dinámica, donde se desprecian los efectos de la aceleración lineal y de la aceleración angular de los cuerpos que forman el sistema. La síntesis estática es habitualmente utilizada como una primera aproximación a la síntesis dinámica, o definitivamente en aquellos casos donde los efectos de las fuerzas y los pares de inercia son despreciables frente a las fuerzas y los pares estáticos.

En este caso el equilibrio estático de cada cuerpo rígido equivale a

$$\begin{cases} \mathbf{F} = \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_G = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.67)$$

por lo que el sistema de ecuaciones lineales resultante, que abarca ahora las ecuaciones de equilibrio estático de los cuerpos rígidos y las ecuaciones de equilibrio de los nudos, se plantea en forma matricial,

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{e} \quad (4.68)$$

donde  $\mathbf{G}$  es la matriz geométrica,  $\mathbf{f}$  el vector de fuerzas y momentos incógnitas y  $\mathbf{e}$  el vector de fuerzas y momentos conocidos.

La ecuación que recoge el problema de equilibrio estático se expande a todas las posiciones de síntesis,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_2 & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{G}_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \cdot \\ \mathbf{f}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \cdot \\ \mathbf{e}_s \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

El gradiente de la restricción dinámica se obtiene derivando el sistema de ecuaciones planteado. El gradiente del vector de fuerzas y momentos incógnitas se obtiene como solución del siguiente sistema lineal

$$\mathbf{G} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f} \quad (4.71)$$

extendida a la totalidad de las posiciones de síntesis.

#### 4.5. Restricciones dinámicas.

Una vez obtenidas las expresiones que permiten calcular las fuerzas y los momentos incógnita y sus gradientes respecto de las variables de diseño, es posible definir en cualquier posición de síntesis restricciones sobre cualquiera de los parámetros que se han visto involucrados en la resolución del problema dinámico.

- Restricciones de fuerza.
- Restricciones de masa.
- Restricciones de velocidad angular.
- Restricciones de aceleración angular.
- Restricciones sobre los índices de mérito.

Estas restricciones de tipo dinámico pueden ser introducidas de las siguientes formas:

- Restricciones puntuales. Se fija un valor numérico exacto para un esfuerzo incógnita.
- Restricciones en forma de banda. Se fijan unos límites superior e inferior para el esfuerzo incógnita. Como sucede en la síntesis con restricciones cinemáticas, la definición de restricciones en forma de bandas de existencia permite flexibilizar el cumplimiento de los puntos de precisión definidos, facilitando enormemente la tarea del diseñador.
- Restricciones funcionales. Especifican la relación existente entre varios esfuerzos incógnita.

A continuación se analizará en detalle la forma de imponer las distintas restricciones dinámicas expuestas.

#### 4.5.1. Restricciones de fuerza.

Pueden establecerse restricciones sobre cualquier esfuerzo contenido en el vector de esfuerzos incógnitas:

- Restricciones sobre los esfuerzos motores. Pueden limitar o hacer relativamente constante la potencia que el motor debe entregar para hacer funcionar la máquina.
- Restricciones sobre los esfuerzos de salida. Pueden limitar los esfuerzos de salida en sistemas donde se conoce la ley que rige los esfuerzos de entrada.
- Restricciones sobre las fuerzas de enlace o de restricción entre eslabones. Limitan las fuerzas actuantes sobre los eslabones, lo que permite aligerar éstos.
- Restricciones sobre las fuerzas y momentos de sacudimiento. Eliminan o limitan las fuerzas y momentos transmitidos al bastidor de la máquina, que originan vibraciones no deseadas.
- Restricción sobre la relación temporal de esfuerzos transmitidos entre eslabones. Fijan la secuencia de distribución de esfuerzos en los problemas de respuesta movimiento-tiempo.

Las restricciones, impuestas en forma de banda, son del tipo

$$\mathbf{l}_f \leq \mathbf{f} \leq \mathbf{u}_f \quad (4.72)$$

Las expresiones analíticas de sus gradientes respecto al vector de diseño se obtienen de los sistemas de ecuaciones de gradientes dinámicos obtenidos en 4.4.7 y 4.4.8.

También pueden establecerse restricciones sobre su módulo

$$\mathbf{l}_{mf} \leq |\mathbf{f}| \leq \mathbf{u}_{mf} \quad (4.73)$$

cuyas componentes se calculan a partir de la expresión

$$|f_i| = \sqrt{\sum_{j=1}^d f_{ij}^2} \quad (4.74)$$

donde  $d$  es la dimensión espacial del problema y  $f_{ij}$  la  $j$ -ésima componente de la fuerza  $i$ -ésima, y cuyo gradiente es

$$\frac{\partial |f_i|}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^d f_{ij}^2}} \cdot \sum_{j=1}^d f_{ij} \frac{\partial f_{ij}}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.75)$$

#### 4.5.2. Restricciones de masa.

Las restricciones se plantean como restricciones en forma de banda sobre los términos contenidos en la matriz de masas,

$$\mathbf{L}_m \leq \mathbf{M} \leq \mathbf{U}_m \quad (4.76)$$

#### 4.5.3. Restricciones de velocidad angular.

Estas restricciones se añaden a las restricciones cinemáticas disponibles, puesto que no habían sido desarrolladas en los trabajos previos a esta tesis. Se plantean como restricciones en forma de banda sobre los términos contenidos en el vector de velocidades angulares,

$$\mathbf{l}_\omega \leq \boldsymbol{\omega} \leq \mathbf{u}_\omega \quad (4.77)$$

#### 4.5.4. Restricciones de aceleración angular.

Estas restricciones se añaden también a las restricciones cinemáticas disponibles, puesto que no habían sido desarrolladas en los trabajos previos a esta tesis. Se plantean como restricciones en forma de banda sobre los términos contenidos en el vector de aceleraciones angulares,

$$\mathbf{l}_\alpha \leq \boldsymbol{\alpha} \leq \mathbf{u}_\alpha \quad (4.78)$$

#### 4.5.5. Restricciones sobre los índices de mérito.

Los índices de mérito son parámetros que determinan la eficiencia de la transmisión de esfuerzos que tiene lugar en un mecanismo, en función de la relación existente entre el eslabón de entrada y el eslabón de salida, que vendrá condicionada por la aplicación a la que se destine el mecanismo. Aunque no se ha llegado a un acuerdo por unificar los índices de mérito definidos por distintos autores en un único índice de mérito, todos ellos tienen características comunes y pueden determinarse fácilmente a partir de la geometría del mecanismo (Shigley y Uicker, 1988).

En cualquier caso los diferentes índices de mérito son funciones de las coordenadas y de los esfuerzos del mecanismo, por lo que sus gradientes pueden determinarse analíticamente según lo visto en 4.3. En consecuencia, los índices de mérito representarán restricciones funcionales en el problema de la síntesis dinámica.

Sin ánimo de ser exhaustivos, se considerarán los siguientes índices de mérito:

- Razón de velocidades angulares de salida y entrada.
- Ventaja mecánica.
- Ángulo de transmisión.

Para la aplicación del método presentado en este capítulo será necesario obtener la expresión analítica de los distintos índices de mérito en función de las variables de diseño, así como sus respectivos gradientes respecto del vector de diseño.

A continuación se ilustrarán los mencionados índices de mérito para el cuadrilátero articulado.

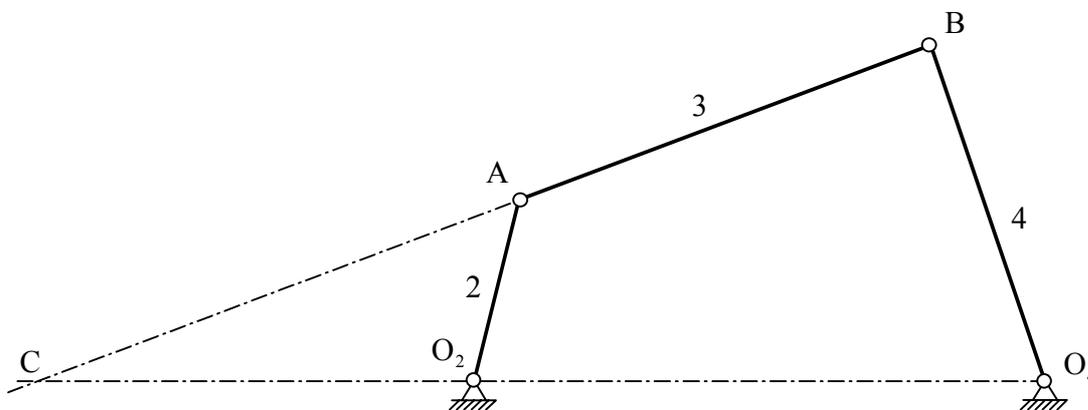


Figura 4.1: Índices de mérito para el cuadrilátero articulado.

#### 4.5.5.1. Razón de velocidades angulares de salida y entrada.

Sea el mecanismo de cuadrilátero articulado mostrado en la figura 4.1, donde el eslabón 2 es el eslabón de entrada o impulsor, el eslabón 4 el eslabón de salida o impulsado y el eslabón 3 el acoplador. La razón de velocidades angulares de salida y entrada es el cociente entre la velocidad angular del eslabón de salida, o impulsado, y la velocidad angular del eslabón de entrada, o impulsor.

$$\lambda = \frac{\omega_4}{\omega_2} \quad (4.79)$$

Dicha razón de velocidades puede determinarse a partir de la geometría del mecanismo aplicando el teorema de las velocidades angulares, que afirma que dicha razón es inversamente proporcional a la razón de las distancias del centro instantáneo común, que se obtiene como la intersección de la prolongación del eslabón acoplador con la línea que une los puntos  $O_2$  y  $O_4$ , a los centros instantáneos de rotación de los eslabones impulsado e impulsor:

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{|\overline{O_2C}|}{|\overline{O_4C}|} \quad (4.80)$$

cuyos valores extremos se presentan cuando el eslabón acoplador es perpendicular al eje de colineación, que es la recta que une el centro instantáneo común de los eslabones impulsor e impulsado con el centro instantáneo de rotación del eslabón acoplador (Freudenstein, 1956). En cuanto al signo, la expresión (4.80) es positiva cuando el centro instantáneo común cae fuera de los puntos  $O_2$  y  $O_4$ , y negativa cuando cae dentro.

Despreciando las fuerzas de rozamiento y el efecto de las fuerzas de inercia, la razón de velocidades angulares de salida y entrada puede determinarse igualando las potencias de entrada y de salida, a partir de la expresión

$$T_2\omega_2 = -T_4\omega_4 \quad (4.81)$$

siendo  $T_2$  y  $T_4$ , respectivamente, los pares de entrada y salida, de donde se obtiene la razón de velocidades angulares de salida y entrada,

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = -\frac{T_2}{T_4} \quad (4.82)$$

que resulta ser la inversa de la razón de los pares de salida y entrada, con signo negativo. Su gradiente respecto del vector de diseño se calcula según

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{(\omega_2)^2} \left( \omega_2 \frac{\partial \omega_4}{\partial \mathbf{x}} - \omega_4 \frac{\partial \omega_2}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (4.83)$$

donde la velocidad angular del eslabón de entrada es independiente del vector de diseño, por lo que su gradiente se anula

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (4.84)$$

y la expresión del gradiente de la razón de velocidades angulares de salida y entrada se reduce a

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{\omega_2} \cdot \frac{\partial \omega_4}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.85)$$

#### 4.5.5.2. Ventaja mecánica.

Es la razón instantánea de los pares de salida y entrada, por lo que según lo visto en 4.5.5.1. resulta ser la inversa de la razón de velocidades angulares de salida y entrada, con signo negativo:

$$v = \frac{T_4}{T_2} = -\frac{\omega_2}{\omega_4} \quad (4.86)$$

que puede determinarse a partir de la geometría del mecanismo, despreciando nuevamente las fuerzas de rozamiento y el efecto de las fuerzas de inercia, sin más que obtener los pares de salida y entrada como el producto de la fuerza transmitida por el eslabón acoplador y las respectivas distancias de los centros instantáneos de rotación de los eslabones de salida y entrada al eslabón acoplador:

$$\frac{T_4}{T_2} = -\frac{|\mathbf{O}_4 \mathbf{B}| \operatorname{sen} \gamma}{|\mathbf{O}_2 \mathbf{A}| \operatorname{sen} \beta} \quad (4.87)$$

donde  $\gamma$  es el ángulo formado por acoplador y seguidor y  $\beta$  es el ángulo formado por acoplador e impulsor.

Según esta expresión, la ventaja mecánica alcanza un valor infinito cuando el eslabón impulsor se alinea con el eslabón acoplador, en lo que se denomina configuración de volquete. En la práctica, estas configuraciones se utilizan para conseguir grandes ventajas mecánicas, en las que un par de entrada mínimo puede contrarrestar un par de salida muy elevado. Por otro lado, la ventaja mecánica se anula cuando el eslabón impulsado se alinea con el eslabón acoplador. En este caso el par de entrada, por muy grande que sea, no es capaz de compensar al par de salida, dando lugar a posiciones de bloqueo del mecanismo.

Su gradiente respecto del vector de diseño se calcula según

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{(T_2)^2} \left( T_2 \frac{\partial T_4}{\partial \mathbf{x}} - T_4 \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (4.88)$$

donde el par de entrada es independiente del vector de diseño, por lo que su gradiente se anula

$$\frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (4.89)$$

y la expresión del gradiente de la ventaja mecánica se reduce a

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{T_2} \cdot \frac{\partial T_4}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.90)$$

#### 4.5.5.3. Ángulo de transmisión.

El ángulo  $\gamma$  que forman el eslabón impulsado y el eslabón acoplador se denomina ángulo de transmisión. En la práctica el ángulo de transmisión determina el valor de la ventaja mecánica, puesto que conforme dicho ángulo se acerca a los valores de  $0^\circ$  o de  $180^\circ$ , la ventaja mecánica disminuye, hasta tal punto que una pequeña fuerza de rozamiento podría ser capaz de bloquear el mecanismo. En consecuencia, el ángulo de transmisión se utiliza también como índice de mérito del mecanismo. La mejor transmisión de esfuerzos tiene lugar para valores de  $\gamma$  cercanos a los  $90^\circ$ , aunque en aplicaciones prácticas se admiten como adecuadas aquellas configuraciones que mantienen el ángulo de transmisión por encima de los  $50^\circ$ .

El ángulo de transmisión se calcula a partir de la expresión

$$\gamma = \arccos \left( \frac{\overline{\mathbf{BA}} \cdot \overline{\mathbf{BO}_4}}{|\overline{\mathbf{BA}}| \cdot |\overline{\mathbf{BO}_4}|} \right) \quad (4.91)$$

que puesta en función de las coordenadas de los nudos proporciona la expresión analítica

$$\gamma = \arccos \left( \frac{(x_A - x_B) \cdot (x_{O4} - x_B) + (y_A - y_B) \cdot (y_{O4} - y_B)}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \cdot \sqrt{(x_{O4} - x_B)^2 + (y_{O4} - y_B)^2}} \right) \quad (4.92)$$

El gradiente respecto al vector de diseño se calcula derivando la expresión obtenida en (4.92) respecto del vector de diseño:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.93)$$

siendo

$$u = \frac{(x_A - x_B) \cdot (x_{O4} - x_B) + (y_A - y_B) \cdot (y_{O4} - y_B)}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \cdot \sqrt{(x_{O4} - x_B)^2 + (y_{O4} - y_B)^2}} \quad (4.94)$$

y su gradiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} = & \frac{(x_A - x_B) \cdot \left( \frac{\partial x_{O4}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial x_B}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left( \frac{\partial x_A}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial x_B}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot (x_{O4} - x_B)}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \cdot \sqrt{(x_{O4} - x_B)^2 + (y_{O4} - y_B)^2}} + \\ & + \frac{(y_A - y_B) \cdot \left( \frac{\partial y_{O4}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial y_B}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left( \frac{\partial y_A}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial y_B}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot (y_{O4} - y_B)}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \cdot \sqrt{(x_{O4} - x_B)^2 + (y_{O4} - y_B)^2}} - \\ & - \frac{[(x_A - x_B) \cdot (x_{O4} - x_B) + (y_A - y_B) \cdot (y_{O4} - y_B)] \cdot \left[ (x_A - x_B) \cdot \left( \frac{\partial x_A}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial x_B}{\partial \mathbf{x}} \right) \right]}{\left[ (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{(x_{O4} - x_B)^2 + (y_{O4} - y_B)^2}} \\ & - \frac{[(x_A - x_B) \cdot (x_{O4} - x_B) + (y_A - y_B) \cdot (y_{O4} - y_B)] \cdot \left[ (y_A - y_B) \cdot \left( \frac{\partial y_A}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial y_B}{\partial \mathbf{x}} \right) \right]}{\left[ (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{(x_{O4} - x_B)^2 + (y_{O4} - y_B)^2}} \\ & - \frac{[(x_A - x_B) \cdot (x_{O4} - x_B) + (y_A - y_B) \cdot (y_{O4} - y_B)] \cdot \left[ (x_{O4} - x_B) \cdot \left( \frac{\partial x_{O4}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial x_B}{\partial \mathbf{x}} \right) \right]}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \cdot \left[ (x_{O4} - x_B)^2 + (y_{O4} - y_B)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\ & - \frac{[(x_A - x_B) \cdot (x_{O4} - x_B) + (y_A - y_B) \cdot (y_{O4} - y_B)] \cdot \left[ (y_{O4} - y_B) \cdot \left( \frac{\partial y_{O4}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial y_B}{\partial \mathbf{x}} \right) \right]}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \cdot \left[ (x_{O4} - x_B)^2 + (y_{O4} - y_B)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (4.95)$$

## Capítulo 5

# Aplicación al diseño de mecanismos planos

En este capítulo se presenta una aplicación del método general de síntesis dimensional óptima con restricciones dinámicas presentado en el capítulo anterior al diseño de mecanismos con movimiento plano. El método general expuesto exige que los términos implicados en las ecuaciones de equilibrio dinámico sean funciones de las variables de diseño, de tal forma que sus derivadas parciales respecto de las variables de diseño puedan ser implementadas en el algoritmo de síntesis. A continuación se presenta el cálculo de las expresiones analíticas de los parámetros que aparecen en las ecuaciones de equilibrio dinámico, así como las expresiones analíticas de sus gradientes respecto de las variables de diseño, para el caso particular de mecanismos con movimiento plano. Se ha optado por limitar la aplicación del método a los sistemas de movimiento plano por simplificar el cálculo de las expresiones, aunque el método es generalizable a la síntesis de mecanismos con movimiento espacial.

### 5.1. Ecuaciones del movimiento.

El comportamiento dinámico de un sistema multicuerpo de movimiento plano compuesto por  $n$  eslabones rígidos y  $p$  nudos está gobernado por  $3n$  ecuaciones correspondientes al equilibrio dinámico de cada cuerpo rígido, y por  $2p$  ecuaciones correspondientes al equilibrio de fuerzas en los nudos.

Según lo visto en 4.3. las ecuaciones vectoriales correspondiente al equilibrio

dinámico del eslabón  $j$ -ésimo del sistema, sobre el que actúan  $m$  fuerzas, son

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \mathbf{F}_{ij} = m_j \mathbf{a}_{G_j} \\ \sum_{i=1}^n \overline{\mathbf{G}_j \mathbf{A}_{ij}} \times \mathbf{f}_{ij} = I_j \alpha_j \end{cases} \quad (5.1)$$

donde  $\mathbf{F}_{ij}$  es la  $i$ -ésima fuerza que actúa en el eslabón  $j$ -ésimo,  $m_j$  es la masa del eslabón  $j$ -ésimo,  $\mathbf{a}_{ij}$  es la aceleración del centro de masa del eslabón  $j$ -ésimo,  $G_j$  es el centro de masa del eslabón  $j$ -ésimo,  $A_{ij}$  es el punto de aplicación de la  $i$ -ésima fuerza que actúa en el eslabón  $j$ -ésimo,  $I_j$  es el momento polar de inercia del eslabón  $j$ -ésimo referido a su centro de masa y  $\alpha_j$  es la aceleración angular del eslabón  $j$ -ésimo. Las ecuaciones contenidas en la expresión (5.1) equivalen en el movimiento plano a tres ecuaciones escalares, que puestas en función de las coordenadas de los nudos donde se aplican las fuerzas son

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m F_{ij}^x = m_j a_{G_j}^x \\ \sum_{i=1}^m F_{ij}^y = m_j a_{G_j}^y \\ \sum_{i=1}^m F_{ij}^x (y_{G_j} - y_{ij}) - \sum_{i=1}^m F_{ij}^y (x_{ij} - x_{G_j}) = I_j \alpha_j \end{cases} \quad (5.2)$$

donde  $x_{G_j}$  e  $y_{G_j}$  son las coordenadas del centro de masa del eslabón  $j$ -ésimo y  $x_{ij}$  e  $y_{ij}$  son las coordenadas de  $A_{ij}$ .

Por otro lado, y también según lo visto en 4.3., la ecuación vectorial correspondiente al equilibrio del nudo  $i$ -ésimo, que es común a  $c$  eslabones, es

$$\sum_{k=1}^c \mathbf{F}_{ik} = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

que puede descomponerse en dos ecuaciones escalares

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^c F_{ik}^x = 0 \\ \sum_{k=1}^c F_{ik}^y = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

A continuación se determinan las expresiones analíticas de los parámetros que

intervienen en las ecuaciones del movimiento plano. Se determinan también las expresiones analíticas de sus gradientes respecto del vector de diseño, que deben ser implementadas en la rutina E04UCF. La rutina calculará a su vez las matrices hessianas a partir de las expresiones analíticas proporcionadas, por el método de diferencias finitas. Los distintos parámetros que aparecen en las ecuaciones del movimiento se clasifican como sigue:

- Parámetros geométricos.
  - Coordenada de nudo.
  - Coordenadas del centro de masa.
- Parámetros inerciales.
  - Masa del eslabón.
  - Momento polar de inercia del eslabón.
- Parámetros cinemáticos.
  - Velocidad angular del eslabón.
  - Aceleración angular del eslabón.
  - Aceleración del centro de masa de eslabón.

## 5.2. Parámetros geométricos.

### 5.2.1. Coordenada de nudo.

Las coordenadas de los nudos están contenidas en el vector de diseño de la síntesis global. La derivada parcial respecto a las variables de diseño es la función delta de Kronecker,

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad (5.5)$$

donde  $x_i$  es la coordenada  $i$ -ésima, y  $x_j$  es la coordenada  $j$ -ésima.

### 5.2.2. Coordenadas del centro de masa.

Se presentan a continuación tres casos sencillos. Puede abordarse cualquier otro

caso, siempre que sea factible definir el centro de masa en función de las variables de diseño:

- Eslabón masa puntual: eslabón definido por un nudo.
- Eslabón barra: eslabón definido por dos nudos.
- Eslabón triángulo: eslabón definido por tres nudos.

A continuación se obtienen las expresiones analíticas de las coordenadas del centro de masas del eslabón, así como sus derivadas parciales respecto a las variables de diseño.

### 5.2.2.1. Eslabón masa puntual.

En el eslabón masa puntual, el centro de masas coincide con el nudo que define la posición del eslabón,

$$\begin{cases} x_G = x_i \\ y_G = y_i \end{cases} \quad (5.6)$$

donde  $x_G$  e  $y_G$  son las coordenadas del centro de masas, y  $x_i$  e  $y_i$  las coordenadas del nudo. Su derivada parcial respecto a las variables de diseño se calcula a partir de la expresión (5.5),

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_G}{\partial x_j} &= \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \\ \frac{\partial x_G}{\partial y_j} &= 0 \\ \frac{\partial y_G}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial y_G}{\partial y_j} &= \frac{\partial y_i}{\partial y_j} = \delta_{ij} \end{aligned} \quad (5.7)$$

### 5.2.2.2. Eslabón barra.

Suponiendo que la distribución de masa es uniforme, lo que constituye el caso más sencillo, las coordenadas del centro de masas del eslabón barra se calculan como

$$x_G = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_G = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (5.8)$$

y sus derivadas parciales respecto de las variables de diseño

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_G}{\partial x_1} &= \frac{1}{2} & \frac{\partial y_G}{\partial x_1} &= 0 \\
 \frac{\partial x_G}{\partial y_1} &= 0 & \frac{\partial y_G}{\partial y_1} &= \frac{1}{2} \\
 \frac{\partial x_G}{\partial x_2} &= \frac{1}{2} & \frac{\partial y_G}{\partial x_2} &= 0 \\
 \frac{\partial x_G}{\partial y_2} &= 0 & \frac{\partial y_G}{\partial y_2} &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

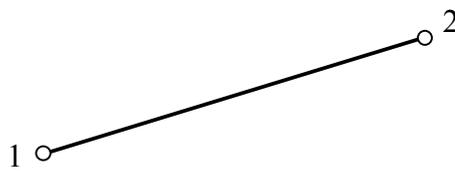


Figura 5.1: Eslabón barra.

### 5.2.2.3. Eslabón triángulo.

Suponiendo nuevamente que la distribución de masa es uniforme, el centro de masas del eslabón triangular coincide con el baricentro del triángulo definido por sus nudos, que es el punto de intersección de las tres medianas del triángulo.

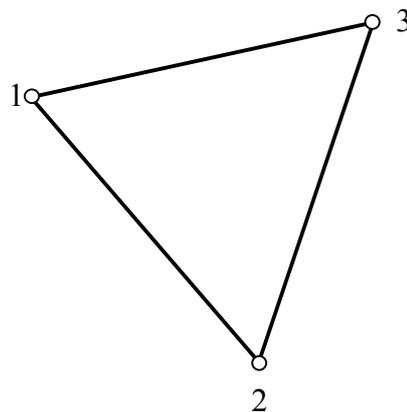


Figura 5.2: Eslabón triángulo.

Sus coordenadas se calculan a partir de las expresiones

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad (5.10)$$

y sus derivadas parciales respecto de las variables de diseño

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_G}{\partial x_1} &= \frac{1}{3} & \frac{\partial y_G}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial x_G}{\partial y_1} &= 0 & \frac{\partial y_G}{\partial y_1} &= \frac{1}{3} \\ \frac{\partial x_G}{\partial x_2} &= \frac{1}{3} & \frac{\partial y_G}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial x_G}{\partial y_2} &= 0 & \frac{\partial y_G}{\partial y_2} &= \frac{1}{3} \\ \frac{\partial x_G}{\partial x_3} &= \frac{1}{3} & \frac{\partial y_G}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial x_G}{\partial y_3} &= 0 & \frac{\partial y_G}{\partial y_3} &= \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (5.11)$$

### 5.3. Parámetros inerciales.

#### 5.3.1. Masa.

Se obtienen las expresiones analíticas de la masa del eslabón, así como sus derivadas parciales respecto a las variables de diseño. De nuevo se distinguen tres casos.

##### 5.3.1.1. Eslabón masa puntual.

La masa se define como un número real positivo  $m$ , independiente de las coordenadas del nudo que define al eslabón. En consecuencia, se anulan todas las derivadas parciales respecto de las variables de diseño,

$$\frac{\partial m}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i \quad (5.12)$$

##### 5.3.1.2. Eslabón barra.

Suponiendo nuevamente que la distribución de masa es uniforme, la masa del eslabón barra es

$$m = \rho L \quad (5.13)$$

donde  $\rho$  es la densidad lineal y  $L$  la longitud de la barra, calculada en función de sus coordenadas

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (5.14)$$

La masa del eslabón, en función de las coordenadas de los nudos que definen al eslabón, es

$$m = \rho \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (5.15)$$

y las derivadas parciales respecto de las variables de diseño,

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial x_1} &= \frac{\rho(x_1 - x_2)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \\ \frac{\partial m}{\partial y_1} &= \frac{\rho(y_1 - y_2)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \\ \frac{\partial m}{\partial x_2} &= \frac{\rho(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \\ \frac{\partial m}{\partial y_2} &= \frac{\rho(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

### 5.3.1.3. Eslabón triángulo.

Suponiendo nuevamente que la distribución de masa es uniforme, la masa del eslabón triángulo se calcula como el producto de la densidad superficial por el área del triángulo.

Para calcular el área de un triángulo definido por las coordenadas de sus vértices se define el parámetro

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3) \quad (5.17)$$

que es positivo si los vértices 1, 2 y 3 se recorren en sentido antihorario, y negativo en caso contrario. En cualquier caso el área del triángulo es el valor absoluto de  $A$ . La masa del eslabón se calcula entonces como

$$m = \rho |A| \quad (5.18)$$

donde  $\rho$  es en este caso la densidad superficial del eslabón.

En el caso en que  $A \geq 0$ , la masa del eslabón es

$$m = \rho A = \frac{1}{2} \rho (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3) \quad (5.19)$$

y las derivadas parciales respecto de las variables de diseño

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial x_1} &= \frac{1}{2} \rho (y_2 - y_3) \\ \frac{\partial m}{\partial y_1} &= \frac{1}{2} \rho (x_3 - x_2) \\ \frac{\partial m}{\partial x_2} &= \frac{1}{2} \rho (y_3 - y_1) \\ \frac{\partial m}{\partial y_2} &= \frac{1}{2} \rho (x_1 - x_3) \\ \frac{\partial m}{\partial x_3} &= \frac{1}{2} \rho (y_1 - y_2) \\ \frac{\partial m}{\partial y_3} &= \frac{1}{2} \rho (x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (5.20)$$

En el caso en que  $A < 0$ , la masa del eslabón es

$$m = -\rho A = -\frac{1}{2} \rho (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3) \quad (5.21)$$

y las derivadas parciales respecto de las variables de diseño

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial x_1} &= -\frac{1}{2} \rho (y_2 - y_3) \\ \frac{\partial m}{\partial y_1} &= -\frac{1}{2} \rho (x_3 - x_2) \\ \frac{\partial m}{\partial x_2} &= -\frac{1}{2} \rho (y_3 - y_1) \\ \frac{\partial m}{\partial y_2} &= -\frac{1}{2} \rho (x_1 - x_3) \\ \frac{\partial m}{\partial x_3} &= -\frac{1}{2} \rho (y_1 - y_2) \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial m}{\partial y_3} = -\frac{1}{2}\rho(x_2 - x_1)$$

### 5.3.2. Momento polar de inercia.

Se obtienen las expresiones analíticas del momento polar central de inercia del eslabón, así como sus derivadas parciales respecto a las variables de diseño. De nuevo se distinguen tres casos.

#### 5.3.2.1. Eslabón masa puntual.

El momento de inercia es nulo, dado que el eslabón se considera sin dimensiones:

$$I_G = 0 \quad (5.23)$$

Todas las derivadas parciales son también nulas al no depender el momento de inercia de las coordenadas del nudo:

$$\frac{\partial I_G}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i \quad (5.24)$$

#### 5.3.2.2. Eslabón barra.

El momento de inercia de un eslabón barra, supuesta ésta esbelta –esto es, sin dimensiones transversales– y suponiendo nuevamente la distribución uniforme de masa a lo largo de su longitud es

$$I_G = \frac{1}{12}mL^2 \quad (5.25)$$

que teniendo en cuenta las expresiones (5.14) y (5.15), que dejan la longitud y la masa de la barra en función de las coordenadas de sus nodos, se puede escribir como,

$$I_G = \frac{1}{12}\rho\left(\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \quad (5.26)$$

cuyas derivadas parciales respecto de las variables de diseño son

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_G}{\partial x_1} &= \frac{1}{4}\rho(x_1 - x_2)\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ \frac{\partial I_G}{\partial y_1} &= \frac{1}{4}\rho(y_1 - y_2)\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial I_G}{\partial x_2} = \frac{1}{4} \rho (x_2 - x_1) \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\frac{\partial I_G}{\partial y_2} = \frac{1}{4} \rho (y_2 - y_1) \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

### 5.3.2.3. Eslabón triángulo.

Suponiendo de nuevo que la distribución de masa es uniforme, el momento de inercia de un triángulo escaleno de base  $b$  y altura  $h$  es

$$I_G = \rho \frac{b^3 h - b^2 h a + b h a^2 + b h^3}{36} \quad (5.28)$$

donde  $\rho$  es la densidad superficial del triángulo y  $a$  la proyección sobre la base de uno cualquiera de los otros dos lados.

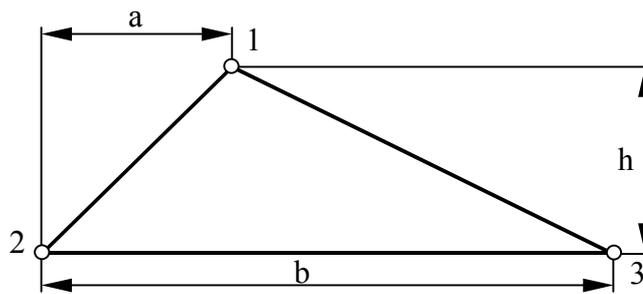


Figura 5.3: Momento de inercia del eslabón triángulo.

La expresión (5.28) es independiente de la definición de los nudos del triángulo, así que cualquiera de sus lados puede tomarse como base. Así pues, la base del triángulo se calcula, por ejemplo, como la distancia entre los vértices 2 y 3, de la forma

$$b = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \quad (5.29)$$

La altura del triángulo se calcula como la distancia entre el punto 1 y la recta definida por los puntos 2 y 3. La distancia de un punto cualquiera  $p_i$  de coordenadas  $(x_i, y_i)$  a la recta  $Ax + By + C = 0$  viene dada por la expresión

$$\frac{|Ax_i + By_i + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (5.30)$$

La ecuación de la recta definida por dos puntos 2 y 3 es

$$\frac{y - y_2}{y_3 - y_2} = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \quad (5.31)$$

que en forma implícita queda

$$(y_3 - y_2)x + (x_2 - x_3)y + x_2(y_2 - y_3) + y_2(x_3 - x_2) = 0 \quad (5.32)$$

Identificando los términos con los de la ecuación implícita de la recta, resulta

$$\begin{aligned} A &= y_3 - y_2 \\ B &= x_2 - x_3 \\ C &= x_2(y_2 - y_3) + y_2(x_3 - x_2) \end{aligned} \quad (5.33)$$

por lo que la altura del triángulo, definida como la distancia entre el punto 1 y la recta definida por los puntos 2 y 3 es

$$h = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + x_2(y_2 - y_3) + y_2(x_3 - x_2)|}{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2}} \quad (5.34)$$

Por otro lado, la proyección del lado 1-2 sobre la perpendicular a la recta 2-3 por 2 define el parámetro  $a$ . La recta perpendicular a una recta de ecuación  $Ax + By + C = 0$  por un punto cualquiera  $p_i$  de coordenadas  $(x_i, y_i)$  viene dada por la expresión

$$B(x - x_i) - A(y - y_i) = 0 \quad (5.35)$$

Sustituyendo los parámetros obtenidos en (5.33)

$$(x_2 - x_3)(x - x_2) - (y_3 - y_2)(y - y_2) = 0 \quad (5.36)$$

se obtiene una nueva ecuación implícita  $A'x + B'y + C' = 0$

$$x(x_2 - x_3) + y(y_2 - y_3) - x_2^2 + x_2x_3 - y_2^2 + y_2y_3 = 0 \quad (5.37)$$

Identificando nuevamente los términos de esta ecuación con los de la ecuación implícita de la recta, resulta

$$\begin{aligned} A' &= x_2 - x_3 \\ B' &= y_2 - y_3 \\ C' &= x_2(x_3 - x_2) + y_2(y_3 - y_2) \end{aligned} \quad (5.38)$$

por lo que el parámetro  $a$ , definido como la distancia entre el punto 1 y la recta perpendicular por 2 a la definida por los puntos 2 y 3 es

$$a = \frac{|A'x_1 + B'y_1 + C'|}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} = \frac{|(x_2 - x_3)x_1 + (y_2 - y_3)y_1 + x_2(x_3 - x_2) + y_2(y_3 - y_2)|}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \quad (5.39)$$

Las derivadas parciales del momento de inercia del triángulo respecto de las variables de diseño se obtienen derivando la expresión (5.28), y quedarán en función de las derivadas parciales de los parámetros  $b$ ,  $h$  y  $a$  definidos,

$$\frac{\rho}{36} \left[ \frac{\partial a}{\partial x_i} (2bha - b^2h) + \frac{\partial b}{\partial x_i} (3b^2h - 2bha + ha^2 + h^3) + \frac{\partial h}{\partial x_i} (b^3 - b^2a + ba^2 + 3bh^2) \right] \quad (5.40)$$

El gradiente del parámetro  $b$  respecto del vector de diseño se obtiene calculando las derivadas parciales de la expresión (5.29) respecto de las coordenadas de los vértices del triángulo

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial b}{\partial y_1} &= 0 \\ \frac{\partial b}{\partial x_2} &= \frac{x_2 - x_3}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \\ \frac{\partial b}{\partial y_2} &= \frac{y_2 - y_3}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \\ \frac{\partial b}{\partial x_3} &= \frac{x_3 - x_2}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \\ \frac{\partial b}{\partial y_3} &= \frac{y_3 - y_2}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \end{aligned} \quad (5.41)$$

El gradiente del parámetro  $h$  respecto del vector de diseño se obtiene calculando las derivadas parciales de la expresión (5.34) respecto de las coordenadas de los vértices del triángulo. Se distinguen dos casos, en función del signo de la expresión contenida en el valor absoluto. En el primer caso,

$$(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + x_2(y_2 - y_3) + y_2(x_3 - x_2) \geq 0 \quad (5.42)$$

por lo que  $h$  es

$$h = \frac{(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + x_2(y_2 - y_3) + y_2(x_3 - x_2)}{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2}} \quad (5.43)$$

y las derivadas parciales son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x_1} &= \frac{y_3 - y_2}{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2}} \\
\frac{\partial h}{\partial y_1} &= \frac{x_2 - x_3}{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2}} \\
\frac{\partial h}{\partial x_2} &= \frac{(y_1 - y_3)}{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2}} - \\
&\quad \frac{(x_2 - x_3) [(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + x_2(y_2 - y_3) + y_2(x_3 - x_2)]}{\left[ (y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial h}{\partial y_2} &= \frac{(x_3 - x_1)}{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2}} - \\
&\quad \frac{(y_2 - y_3) [(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + x_2(y_2 - y_3) + y_2(x_3 - x_2)]}{\left[ (y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial h}{\partial x_3} &= \frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2}} - \\
&\quad \frac{(x_3 - x_2) [(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + x_2(y_2 - y_3) + y_2(x_3 - x_2)]}{\left[ (y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial h}{\partial y_3} &= \frac{(x_1 - x_2)}{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2}} - \\
&\quad \frac{(y_3 - y_2) [(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + x_2(y_2 - y_3) + y_2(x_3 - x_2)]}{\left[ (y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{5.44}$$

En el segundo caso,

$$(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + x_2(y_2 - y_3) + y_2(x_3 - x_2) < 0 \tag{5.45}$$

por lo que  $h$  es

$$h = - \frac{(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + x_2(y_2 - y_3) + y_2(x_3 - x_2)}{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2}} \tag{5.46}$$

y las derivadas parciales son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x_1} &= -\frac{y_3 - y_2}{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2}} \\
\frac{\partial h}{\partial y_1} &= -\frac{x_2 - x_3}{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2}} \\
\frac{\partial h}{\partial x_2} &= -\frac{(y_1 - y_3)}{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2}} + \\
&+ \frac{(x_2 - x_3)[(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + x_2(y_2 - y_3) + y_2(x_3 - x_2)]}{[(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial h}{\partial y_2} &= -\frac{(x_3 - x_1)}{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2}} + \\
&+ \frac{(y_2 - y_3)[(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + x_2(y_2 - y_3) + y_2(x_3 - x_2)]}{[(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial h}{\partial x_3} &= -\frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2}} + \\
&+ \frac{(x_3 - x_2)[(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + x_2(y_2 - y_3) + y_2(x_3 - x_2)]}{[(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
& \tag{5.47} \\
\frac{\partial h}{\partial y_3} &= -\frac{(x_1 - x_2)}{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2}} + \\
&+ \frac{(y_3 - y_2)[(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + x_2(y_2 - y_3) + y_2(x_3 - x_2)]}{[(y_3 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Por último, el gradiente del parámetro  $a$  respecto del vector de diseño se obtiene calculando las derivadas parciales de la expresión (5.39) respecto de las coordenadas de los vértices del triángulo. De nuevo se distinguen dos casos, en función del signo de la expresión contenida en el valor absoluto. En el primer caso,

$$(x_2 - x_3)x_1 + (y_2 - y_3)y_1 + x_2(x_3 - x_2) + y_2(y_3 - y_2) \geq 0 \tag{5.48}$$

por lo que  $a$  es

$$a = \frac{(x_2 - x_3)x_1 + (y_2 - y_3)y_1 + x_2(x_3 - x_2) + y_2(y_3 - y_2)}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \tag{5.49}$$

y las derivadas parciales son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial x_1} &= \frac{x_2 - x_3}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \\
\frac{\partial a}{\partial y_1} &= \frac{y_2 - y_3}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \\
\frac{\partial a}{\partial x_2} &= \frac{(x_1 + x_3 - 2x_2)}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} - \\
&\quad - \frac{(x_2 - x_3)[(x_2 - x_3)x_1 + (y_2 - y_3)y_1 + x_2(x_3 - x_2) + y_2(y_3 - y_2)]}{[(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial a}{\partial y_2} &= \frac{(y_1 + y_3 - 2y_2)}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} - \\
&\quad - \frac{(y_2 - y_3)[(x_2 - x_3)x_1 + (y_2 - y_3)y_1 + x_2(x_3 - x_2) + y_2(y_3 - y_2)]}{[(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial a}{\partial x_3} &= \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} - \\
&\quad - \frac{(x_3 - x_2)[(x_2 - x_3)x_1 + (y_2 - y_3)y_1 + x_2(x_3 - x_2) + y_2(y_3 - y_2)]}{[(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial a}{\partial y_3} &= \frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} - \\
&\quad - \frac{(y_3 - y_2)[(x_2 - x_3)x_1 + (y_2 - y_3)y_1 + x_2(x_3 - x_2) + y_2(y_3 - y_2)]}{[(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{5.50}$$

En el segundo caso

$$(x_2 - x_3)x_1 + (y_2 - y_3)y_1 + x_2(x_3 - x_2) + y_2(y_3 - y_2) < 0 \tag{5.51}$$

por lo que  $a$  es

$$a = -\frac{(x_2 - x_3)x_1 + (y_2 - y_3)y_1 + x_2(x_3 - x_2) + y_2(y_3 - y_2)}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \tag{5.52}$$

y las derivadas parciales son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial x_1} &= -\frac{x_2 - x_3}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \\
\frac{\partial a}{\partial y_1} &= -\frac{y_2 - y_3}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \\
\frac{\partial a}{\partial x_2} &= -\frac{(x_1 + x_3 - 2x_2)}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} + \\
&+ \frac{(x_2 - x_3)[(x_2 - x_3)x_1 + (y_2 - y_3)y_1 + x_2(x_3 - x_2) + y_2(y_3 - y_2)]}{\left[\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}\right]^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial a}{\partial y_2} &= -\frac{(y_1 + y_3 - 2y_2)}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} + \\
&+ \frac{(y_2 - y_3)[(x_2 - x_3)x_1 + (y_2 - y_3)y_1 + x_2(x_3 - x_2) + y_2(y_3 - y_2)]}{\left[\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}\right]^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial a}{\partial x_3} &= -\frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} + \\
&+ \frac{(x_3 - x_2)[(x_2 - x_3)x_1 + (y_2 - y_3)y_1 + x_2(x_3 - x_2) + y_2(y_3 - y_2)]}{\left[\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}\right]^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial a}{\partial y_3} &= -\frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} + \\
&+ \frac{(y_3 - y_2)[(x_2 - x_3)x_1 + (y_2 - y_3)y_1 + x_2(x_3 - x_2) + y_2(y_3 - y_2)]}{\left[\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{5.53}$$

## 5.4. Parámetros cinemáticos.

### 5.4.1. Velocidad angular.

Es necesario determinar previamente la velocidad angular de un eslabón para calcular la componente normal de la aceleración de su centro de masa. De nuevo se distinguen tres casos.

#### 5.4.1.1. Eslabón masa puntual.

Un eslabón reducido a un punto no gira, por lo que su velocidad angular es nula

$$\omega = 0 \quad (5.54)$$

así como sus derivadas parciales respecto de las variables de diseño

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0 \quad (5.55)$$

#### 5.4.1.2. Eslabón barra.

La velocidad angular de un eslabón barra se obtiene a partir de la expresión analítica del campo de velocidades del mismo, según la expresión

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \overline{\mathbf{12}} \quad (5.56)$$

donde  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  son las velocidades de los nudos origen y final de la barra.

La expresión (5.56), que en forma matricial se expresa

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega(y_2 - y_1) \\ \omega(x_2 - x_1) \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

constituye una ecuación vectorial de donde pueden obtenerse indistintamente dos valores para la velocidad angular del elemento, que son

$$\omega = \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{y_2 - y_1} \quad (5.58)$$

y

$$\omega = \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{x_2 - x_1} \quad (5.59)$$

que serán, evidentemente, idénticos. Las componentes de las velocidades de los nudos se obtienen como solución de la ecuación de velocidades (3.48).

Las derivadas parciales de la velocidad angular del eslabón se obtienen a partir de (5.58). Por un lado se calculan las derivadas parciales respecto de las coordenadas de los nudos 1 y 2, que definen el eslabón,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \frac{\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1}}{y_2 - y_1} \quad (5.60)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y_1} = \frac{(y_2 - y_1) \left( \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial y_1} \right) + \dot{x}_1 - \dot{x}_2}{(y_2 - y_1)^2}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \frac{\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2}}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y_2} = \frac{(y_2 - y_1) \left( \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial y_2} - \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial y_2} \right) - \dot{x}_1 + \dot{x}_2}{(y_2 - y_1)^2}$$

y por otro lado se calculan las derivadas parciales respecto del resto de coordenadas, que serán,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_i}}{y_2 - y_1} \quad (5.61)$$

donde las derivadas parciales de las componentes de las velocidades de los nudos se obtienen como solución de la ecuación de los gradientes de velocidades (3.50).

Sin embargo, la expresión (5.58) puede estar indeterminada, en el caso de que las ordenadas de los vértices 1 y 2 coincidan, en cuyo caso la componente horizontal de las velocidades de los vértices 1 y 2 serán también idénticas. En este caso las derivadas parciales del vector velocidad angular respecto de las variables de diseño se determinan a partir de (5.59). Por un lado se calculan las derivadas parciales respecto de las coordenadas de los nudos 1 y 2, que definen el eslabón,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \frac{(x_2 - x_1) \left( \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial x_1} \right) + \dot{y}_2 - \dot{y}_1}{(x_2 - x_1)^2}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y_1} = \frac{\frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1}}{x_2 - x_1} \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \frac{(x_2 - x_1) \left( \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial x_2} \right) - \dot{y}_2 + \dot{y}_1}{(x_2 - x_1)^2}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y_2} = \frac{\frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1}}{x_2 - x_1}$$

y por otro lado se calculan las derivadas parciales respecto del resto de coordenadas, que serán,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial \dot{y}_2}{\partial x_i} - \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial x_i}}{x_2 - x_1} \quad (5.63)$$

#### 5.4.1.3. Eslabón triángulo.

En el caso del eslabón triángulo, la velocidad angular y sus derivadas parciales respecto de las variables de diseño se determinan igual que en el caso del eslabón barra, a partir de la expresión del campo de velocidades del eslabón que relaciona las velocidades de los nudos 1 y 2.

#### 5.4.2. Aceleración angular.

También es necesario determinar previamente la aceleración angular de un eslabón para calcular, en este caso, la componente tangencial de la aceleración del centro de masas del eslabón. De nuevo se distinguen tres casos.

##### 5.4.2.1. Eslabón masa puntual.

Un eslabón reducido a un punto no gira, por lo que su aceleración angular es nula

$$\alpha = 0 \quad (5.64)$$

así como sus derivadas parciales respecto de las variables de diseño

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = 0 \quad (5.65)$$

##### 5.4.2.2. Eslabón barra.

La aceleración angular de un eslabón barra se obtiene a partir de la expresión analítica del campo de aceleraciones del mismo, según la expresión

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overline{\mathbf{12}}) + \boldsymbol{\alpha} \times \overline{\mathbf{12}} \quad (5.66)$$

donde  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$  son las aceleraciones de los nudos origen y final de la barra.

La expresión (5.66), que en forma matricial se expresa

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega^2 (x_2 - x_1) \\ -\omega^2 (y_2 - y_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha (y_2 - y_1) \\ \alpha (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

constituye una ecuación vectorial de donde pueden obtenerse indistintamente dos valores para la aceleración angular del elemento, que son

$$\alpha = \frac{\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 - \omega^2 (x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} \quad (5.68)$$

y

$$\alpha = \frac{\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1 + \omega^2 (y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} \quad (5.69)$$

que serán, evidentemente, idénticos. Las componentes de las aceleraciones de los nudos se obtienen como solución de la ecuación de aceleraciones (3.55).

Las derivadas parciales de la aceleración angular del eslabón se obtienen a partir de (5.68). Por un lado se calculan las derivadas parciales respecto de las coordenadas de los nudos 1 y 2, que definen el eslabón,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} &= \frac{\frac{\partial \ddot{x}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \ddot{x}_2}{\partial x_1} - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} (x_2 - x_1) + \omega^2}{y_2 - y_1} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y_1} &= \frac{(y_2 - y_1) \left[ \frac{\partial \ddot{x}_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \ddot{x}_2}{\partial y_1} - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial y_1} (x_2 - x_1) \right] + \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 - \omega^2 (x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)^2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} &= \frac{\frac{\partial \ddot{x}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \ddot{x}_2}{\partial x_2} - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} (x_2 - x_1) - \omega^2}{y_2 - y_1} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y_2} &= \frac{(y_2 - y_1) \left[ \frac{\partial \ddot{x}_1}{\partial y_2} - \frac{\partial \ddot{x}_2}{\partial y_2} - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial y_2} (x_2 - x_1) \right] - \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \omega^2 (x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)^2} \end{aligned} \quad (5.70)$$

y por otro lado se calculan las derivadas parciales respecto del resto de coordenadas, que serán,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial \ddot{x}_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \ddot{x}_2}{\partial x_i} - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_i} (x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} \quad (5.71)$$

donde las derivadas parciales de las componentes de las aceleraciones de los nudos se obtienen como solución de la ecuación de los gradientes de aceleraciones (3.57). y las derivadas parciales de la velocidad angular se han obtenido en 5.4.1.

Sin embargo, la expresión (5.68) puede también estar indeterminada, en el caso de que las ordenadas de los vértices 1 y 2 coincidan. En este caso las derivadas parciales del vector aceleración angular respecto de las variables de diseño se determinan a partir de (5.69). Por un lado se calculan las derivadas parciales respecto de las coordenadas de los nudos 1 y 2, que definen el eslabón,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} &= \frac{(x_2 - x_1) \left[ \frac{\partial \ddot{y}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial x_1} + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} (y_2 - y_1) \right] + \ddot{y}_2 - \ddot{y}_1 + \omega^2 (y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y_1} &= \frac{\frac{\partial \ddot{y}_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial y_1} + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial y_1} (y_2 - y_1) - \omega^2}{x_2 - x_1} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} &= \frac{(x_2 - x_1) \left[ \frac{\partial \ddot{y}_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial x_2} + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} (y_2 - y_1) \right] - \ddot{y}_2 + \ddot{y}_1 - \omega^2 (y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y_2} &= \frac{\frac{\partial \ddot{y}_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial y_2} + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial y_2} (y_2 - y_1) + \omega^2}{x_2 - x_1} \end{aligned} \quad (5.72)$$

y por otro lado se calculan las derivadas parciales respecto del resto de coordenadas, que serán,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial \ddot{y}_2}{\partial x_i} - \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial x_i} + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_i} (y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} \quad (5.73)$$

### 5.4.2.3. Eslabón triángulo.

En el caso del eslabón triángulo, la aceleración angular y sus derivadas parciales respecto de las variables de diseño se determinan igual que en el caso del eslabón barra, a partir de la expresión del campo de aceleraciones del eslabón que relaciona las

velocidades de los nudos 1 y 2.

### 5.4.3. Aceleración del centro de masa.

Nuevamente se distinguen tres casos, en función del tipo de eslabón de que se trate.

#### 5.4.3.1. Eslabón masa puntual.

La aceleración del centro de masas coincide con la aceleración del nudo que define el eslabón,

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_i \quad (5.74)$$

en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_G \\ \ddot{y}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

por lo que sus derivadas parciales respecto de las variables de diseño se obtiene directamente del problema de gradientes de aceleraciones (3.57).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial x_i} &= \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial x_i} & \frac{\partial \ddot{y}_G}{\partial x_i} &= \frac{\partial \ddot{y}_i}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial x_j} &= \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial x_j} & \frac{\partial \ddot{y}_G}{\partial x_j} &= \frac{\partial \ddot{y}_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (5.76)$$

#### 5.4.3.2. Eslabón barra.

En el eslabón barra la aceleración del centro de masas del elemento se determina a partir de la expresión del campo de aceleraciones del eslabón, que relaciona la aceleración del centro de masas con la aceleración de un punto cualquiera del elemento,

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overline{\mathbf{1G}}) + \boldsymbol{\alpha} \times \overline{\mathbf{1G}} \quad (5.77)$$

que en forma matricial se expresa

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_G \\ \ddot{y}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega^2 (x_G - x_i) \\ -\omega^2 (y_G - y_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha (y_G - y_i) \\ \alpha (x_G - x_i) \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

de donde se obtienen las componentes de la aceleración del centro de masas, que son

$$\begin{aligned}\ddot{x}_G &= \ddot{x}_1 - \omega^2(x_G - x_1) - \alpha(y_G - y_1) \\ \ddot{y}_G &= \ddot{y}_1 - \omega^2(y_G - y_1) + \alpha(x_G - x_1)\end{aligned}\quad (5.79)$$

Las derivadas parciales de la aceleración del centro de masas respecto de las variables de diseño se obtienen derivando la expresión (5.79). Por un lado se calculan las derivadas parciales respecto de las coordenadas de los nudos 1 y 2, que definen el eslabón, de la coordenada x del centro de masa

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial x_1} &= \frac{\partial \ddot{x}_1}{\partial x_1} - \omega^2 \left( \frac{\partial x_G}{\partial x_1} - 1 \right) - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} (x_G - x_1) - \alpha \frac{\partial y_G}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} (y_G - y_1) \\ \frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial y_1} &= \frac{\partial \ddot{x}_1}{\partial y_1} - \omega^2 \frac{\partial x_G}{\partial y_1} - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial y_1} (x_G - x_1) - \alpha \left( \frac{\partial y_G}{\partial y_1} - 1 \right) - \frac{\partial \alpha}{\partial y_1} (y_G - y_1) \\ \frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial x_2} &= \frac{\partial \ddot{x}_1}{\partial x_2} - \omega^2 \frac{\partial x_G}{\partial x_2} - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} (x_G - x_1) - \alpha \frac{\partial y_G}{\partial x_2} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} (y_G - y_1) \\ \frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial y_2} &= \frac{\partial \ddot{x}_1}{\partial y_2} - \omega^2 \frac{\partial x_G}{\partial y_2} - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial y_2} (x_G - x_1) - \alpha \frac{\partial y_G}{\partial y_2} - \frac{\partial \alpha}{\partial y_2} (y_G - y_1)\end{aligned}\quad (5.80)$$

y de la coordenada y del centro de masa

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ddot{y}_G}{\partial x_1} &= \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial x_1} + \omega^2 \frac{\partial y_G}{\partial x_1} + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} (y_G - y_1) + \alpha \left( \frac{\partial x_G}{\partial x_1} - 1 \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} (x_G - x_1) \\ \frac{\partial \ddot{y}_G}{\partial y_1} &= \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial y_1} + \omega^2 \left( \frac{\partial y_G}{\partial y_1} - 1 \right) + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial y_1} (y_G - y_1) + \alpha \frac{\partial x_G}{\partial y_1} + \frac{\partial \alpha}{\partial y_1} (x_G - x_1) \\ \frac{\partial \ddot{y}_G}{\partial x_2} &= \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial x_2} + \omega^2 \frac{\partial y_G}{\partial x_2} + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} (y_G - y_1) + \alpha \frac{\partial x_G}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} (x_G - x_1) \\ \frac{\partial \ddot{y}_G}{\partial y_2} &= \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial y_2} + \omega^2 \frac{\partial y_G}{\partial y_2} + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial y_2} (y_G - y_1) + \alpha \frac{\partial x_G}{\partial y_2} + \frac{\partial \alpha}{\partial y_2} (x_G - x_1)\end{aligned}\quad (5.81)$$

que quedan en función de las derivadas parciales de las componentes de la aceleración de los nudos, que se han obtenido en el problema de gradientes de aceleraciones (3.57), de las derivadas parciales de las coordenadas del centro de masas, que se han determinado en 5.2.2, de las derivadas parciales de la velocidad angular, que se han determinado en 5.4.1., y de las derivadas parciales la aceleración angular, que se han determinado en 5.4.2.

Por otro lado se calculan las derivadas parciales respecto del resto de coordenadas, que serán,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial x_i} &= \frac{\partial \ddot{x}_1}{\partial x_i} - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_i} (x_G - x_1) - \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} (y_G - y_1) \\
\frac{\partial \ddot{y}_G}{\partial x_i} &= \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial x_i} + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_i} (y_G - y_1) + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} (x_G - x_1)
\end{aligned} \tag{5.82}$$

### 5.4.3.3. Eslabón triángulo.

La aceleración del centro de masas del triángulo es la misma que la del eslabón barra. Las derivadas parciales respecto de las coordenadas de los nudos 1 y 2 son idénticas a las calculadas en (5.80) y (5.81). Las derivadas parciales respecto de las coordenadas del nudo 3 son, sin embargo, distintas, ya que las derivadas parciales de las coordenadas del centro de masas que aparecen son distintas de cero. Por un lado se calculan las derivadas parciales respecto de las coordenadas de los nudos 1 y 2 y 3, que definen la geometría del eslabón, de la coordenada  $x$  del centro de masa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial x_1} &= \frac{\partial \ddot{x}_1}{\partial x_1} - \omega^2 \left( \frac{\partial x_G}{\partial x_1} - 1 \right) - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} (x_G - x_1) - \alpha \frac{\partial y_G}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} (y_G - y_1) \\
\frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial y_1} &= \frac{\partial \ddot{x}_1}{\partial y_1} - \omega^2 \frac{\partial x_G}{\partial y_1} - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial y_1} (x_G - x_1) - \alpha \left( \frac{\partial y_G}{\partial y_1} - 1 \right) - \frac{\partial \alpha}{\partial y_1} (y_G - y_1) \\
\frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial x_2} &= \frac{\partial \ddot{x}_1}{\partial x_2} - \omega^2 \frac{\partial x_G}{\partial x_2} - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} (x_G - x_1) - \alpha \frac{\partial y_G}{\partial x_2} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} (y_G - y_1) \\
\frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial y_2} &= \frac{\partial \ddot{x}_1}{\partial y_2} - \omega^2 \frac{\partial x_G}{\partial y_2} - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial y_2} (x_G - x_1) - \alpha \frac{\partial y_G}{\partial y_2} - \frac{\partial \alpha}{\partial y_2} (y_G - y_1) \\
\frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial x_3} &= \frac{\partial \ddot{x}_1}{\partial x_3} - \omega^2 \frac{\partial x_G}{\partial x_3} - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_3} (x_G - x_1) - \alpha \frac{\partial y_G}{\partial x_3} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} (y_G - y_1) \\
\frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial y_3} &= \frac{\partial \ddot{x}_1}{\partial y_3} - \omega^2 \frac{\partial x_G}{\partial y_3} - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial y_3} (x_G - x_1) - \alpha \frac{\partial y_G}{\partial y_3} - \frac{\partial \alpha}{\partial y_3} (y_G - y_1)
\end{aligned} \tag{5.83}$$

y de la coordenada  $y$  del centro de masa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ddot{y}_G}{\partial x_1} &= \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial x_1} + \omega^2 \frac{\partial y_G}{\partial x_1} + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} (y_G - y_1) + \alpha \left( \frac{\partial x_G}{\partial x_1} - 1 \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} (x_G - x_1) \\
\frac{\partial \ddot{y}_G}{\partial y_1} &= \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial y_1} + \omega^2 \left( \frac{\partial y_G}{\partial y_1} - 1 \right) + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial y_1} (y_G - y_1) + \alpha \frac{\partial x_G}{\partial y_1} + \frac{\partial \alpha}{\partial y_1} (x_G - x_1) \\
\frac{\partial \ddot{y}_G}{\partial x_2} &= \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial x_2} + \omega^2 \frac{\partial y_G}{\partial x_2} + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} (y_G - y_1) + \alpha \frac{\partial x_G}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} (x_G - x_1) \\
\frac{\partial \ddot{y}_G}{\partial y_2} &= \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial y_2} + \omega^2 \frac{\partial y_G}{\partial y_2} + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial y_2} (y_G - y_1) + \alpha \frac{\partial x_G}{\partial y_2} + \frac{\partial \alpha}{\partial y_2} (x_G - x_1)
\end{aligned} \tag{5.84}$$

$$\frac{\partial \ddot{y}_G}{\partial x_3} = \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial x_3} + \omega^2 \frac{\partial y_G}{\partial x_3} + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_3} (y_G - y_1) + \alpha \frac{\partial x_G}{\partial x_3} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} (x_G - x_1)$$

$$\frac{\partial \ddot{y}_G}{\partial y_3} = \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial y_3} + \omega^2 \frac{\partial y_G}{\partial y_3} + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial y_3} (y_G - y_1) + \alpha \frac{\partial x_G}{\partial y_3} + \frac{\partial \alpha}{\partial y_3} (x_G - x_1)$$

Finalmente se calculan también las derivadas parciales respecto del resto de coordenadas, que serán,

$$\frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial x_i} = \frac{\partial \ddot{x}_1}{\partial x_i} - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_i} (x_G - x_1) - \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} (y_G - y_1)$$

$$\frac{\partial \ddot{y}_G}{\partial x_i} = \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial x_i} + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_i} (y_G - y_1) + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} (x_G - x_1)$$
(5.85)

En la figura 5.4 se esquematiza el proceso de determinación de las expresiones analíticas de los parámetros requeridos para la síntesis dimensional óptima con restricciones dinámicas y de sus derivadas parciales respecto a las variables de diseño.

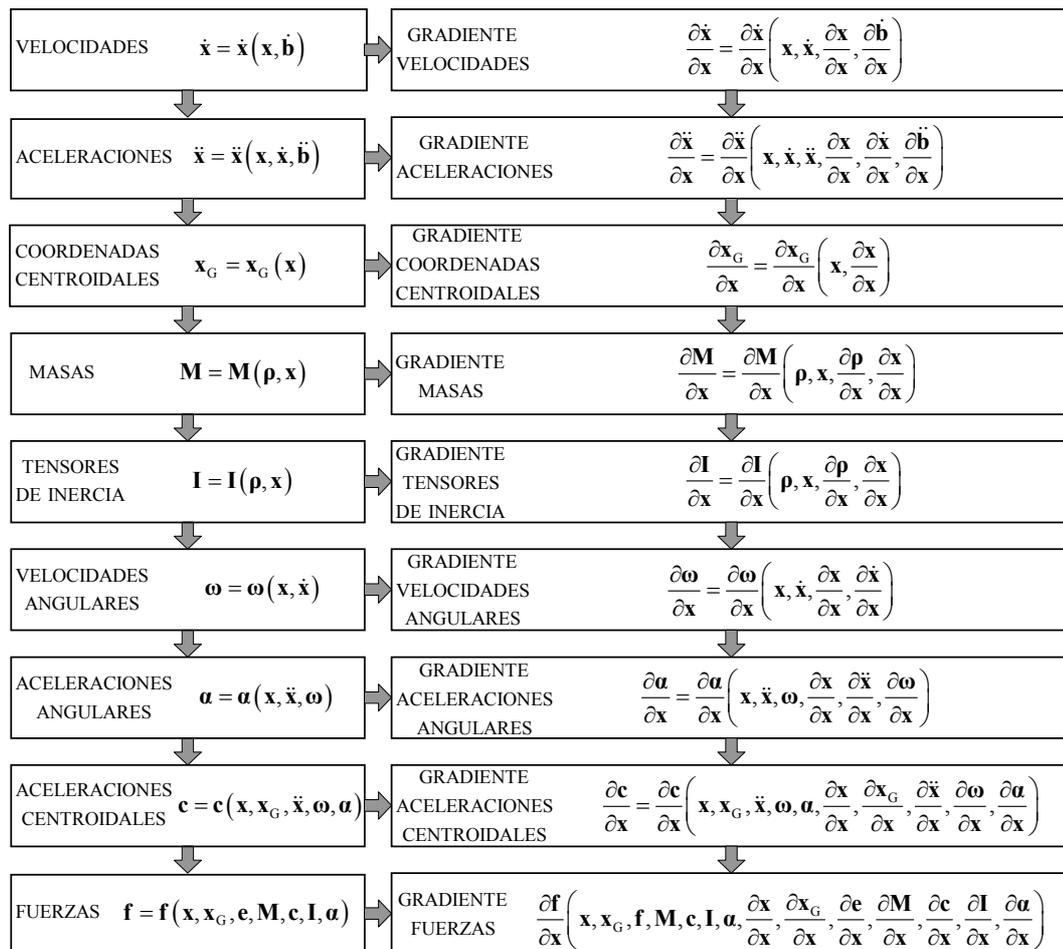


Figura 5.4: Esquema del cálculo de los parámetros dinámicos y sus gradientes.



## Capítulo 6

# Ejemplos

En el presente capítulo se recogen distintos ejemplos de síntesis dimensional óptima con restricciones de posición, cinemáticas y dinámicas de mecanismos de movimiento plano. Se pretende poner de manifiesto las principales características del método de síntesis dimensional óptima con restricciones dinámicas, así como su utilidad en el diseño óptimo de mecanismos. Los resultados obtenidos servirán también para evaluar la robustez y la convergencia de los algoritmos implementados.

En concreto se han optimizado los parámetros dinámicos de cuatro mecanismos de movimiento plano:

- Cuadrilátero articulado con díada.
- Mecanismo Whitworth de retorno rápido.
- Mecanismo de rodillera modificada.
- Mecanismo link drive.

### 6.1. Cuadrilátero articulado con díada.

El cuadrilátero articulado con díada constituye un importante generador de funciones y trayectorias dentro de la teoría de máquinas y mecanismos. Se modeliza como un mecanismo formado por 6 nudos y 6 barras, de acuerdo a la figura 6.1. Los nudos 1 y 2 son puntos fijos del mecanismo. El nudo 3 constituye el grado de libertad

cinemático del mecanismo, y permite modificar la longitud del eslabón de entrada durante el proceso de síntesis.

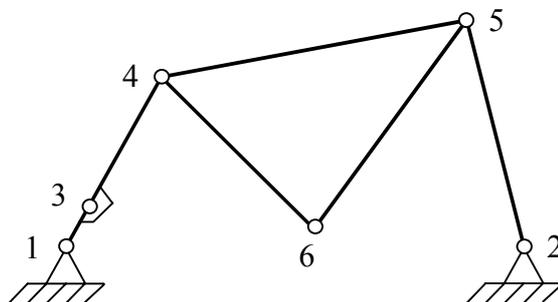


Figura 6.1: Cuadrilátero articulado con díada.

Se definen las 6 barras por los nudos que son origen y final de cada barra:

BARRA	NUDO ORIGEN	NUDO FINAL
1	1	3
2	3	4
3	4	5
4	2	5
5	4	6
6	5	6

Tabla 6.1: Definición de barras en el cuadrilátero articulado con díada.

La geometría del mecanismo viene determinada por 6 restricciones geométricas:

- 3 restricciones que aseguran la colinealidad entre los nudos 1, 3 y 4.
- 3 restricciones que aseguran la no inversión de triángulo entre los nudos 4, 5 y 6.

Se definen asimismo 3 eslabones para el planteamiento de la síntesis dinámica:

ORDINAL	ESLABÓN	NUDOS
1	Manivela	1-4
2	Acoplador	4-5-6
3	Seguidor	2-5

Tabla 6.2: Definición de eslabones en el cuadrilátero articulado con diáda.

Con objeto de aclarar el procedimiento de montaje de las matrices correspondientes a la ecuación de equilibrio dinámico y de su gradiente se presentan las ecuaciones de equilibrio de los eslabones.

Ecuaciones de equilibrio del eslabón 1:

$$\begin{aligned}
 F_{11}^x + F_{41}^x &= m_1 \cdot a_{G1}^x \\
 F_{11}^y + F_{41}^y &= m_1 \cdot a_{G1}^y \\
 T_e + F_{11}^x \cdot (y_{G1} - y_1) + F_{11}^y \cdot (x_1 - x_{G1}) + F_{41}^x \cdot (y_{G1} - y_4) + F_{41}^y \cdot (x_4 - x_{G1}) &= I_1 \cdot \alpha_1
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde  $F_{ij}$  representa la fuerza que el nudo  $i$ -ésimo transmite al eslabón  $j$ -ésimo, y  $T_e$  es el par de entrada.

Ecuaciones de equilibrio del eslabón 2:

$$\begin{aligned}
 F_{42}^x + F_{52}^x &= m_2 \cdot a_{G2}^x \\
 F_{42}^y + F_{52}^y &= m_2 \cdot a_{G2}^y \\
 F_{42}^x \cdot (y_{G2} - y_4) + F_{42}^y \cdot (x_4 - x_{G2}) + F_{52}^x \cdot (y_{G2} - y_5) + F_{52}^y \cdot (x_5 - x_{G2}) &= I_2 \cdot \alpha_2
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Ecuaciones de equilibrio del eslabón 3:

$$\begin{aligned}
 F_{23}^x + F_{53}^x &= m_3 \cdot a_{G3}^x \\
 F_{23}^y + F_{53}^y &= m_3 \cdot a_{G3}^y \\
 F_{23}^x \cdot (y_{G3} - y_2) + F_{23}^y \cdot (x_2 - x_{G3}) + F_{53}^x \cdot (y_{G3} - y_5) + F_{53}^y \cdot (x_5 - x_{G3}) + T_s &= I_3 \cdot \alpha_3
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

donde  $T_s$  es el par de salida.

De igual modo se presentan también las ecuaciones correspondientes al equilibrio de los nudos:

$$\begin{cases} F_{41}^x + F_{42}^x = 0 \\ F_{41}^y + F_{42}^y = 0 \\ F_{52}^x + F_{53}^x = 0 \\ F_{52}^y + F_{53}^y = 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

A partir de estas ecuaciones es sencillo determinar las componentes de las matrices y los vectores que intervienen en la ecuación de equilibrio dinámico (4.63) y en la ecuación del gradiente del equilibrio dinámico (4.66), como se muestra a continuación:

La matriz geométrica  $\mathbf{G}$  contiene las coordenadas de los nudos y las coordenadas de los centros de masas de los cuerpos,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y_{G1}-y_1 & x_1-x_{G1} & y_{G1}-y_4 & x_4-x_{G1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{G2}-y_4 & x_4-x_{G2} & y_{G2}-y_5 & x_5-x_{G2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{G3}-y_2 & x_2-x_{G3} & y_{G3}-y_5 & x_5-x_{G3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El vector  $\mathbf{f}$  es el vector de fuerzas y momentos incógnitas,

$$\mathbf{f}^T = \left[ T_e \quad T_s \quad F_{11}^x \quad F_{11}^y \quad F_{41}^x \quad F_{41}^y \quad F_{42}^x \quad F_{42}^y \quad F_{52}^x \quad F_{52}^y \quad F_{23}^x \quad F_{23}^y \quad F_{53}^x \quad F_{53}^y \right] \quad (6.6)$$

El vector  $\mathbf{e}$  es el vector de fuerzas y momentos conocidos,

$$\mathbf{e}^T = \left[ 0 \quad \hat{T}_e \right] \quad (6.7)$$

donde  $\hat{T}_e$  es el valor del par de entrada, que se supone el parámetro del grado de libertad dinámico del problema, y conocido por tanto a priori.

La matriz  $\mathbf{M}$  es la matriz de masas,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

El vector  $\mathbf{c}$  es el vector de las aceleraciones de los centros de masa,

$$\mathbf{c}^T = \left[ a_{G1}^x \ a_{G1}^y \ a_{G2}^x \ a_{G2}^y \ a_{G3}^x \ a_{G3}^y \right] \quad (6.9)$$

La matriz  $\mathbf{I}$  es la matriz de momentos polares de inercia,

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

El vector  $\alpha$  es el vector de aceleraciones angulares,

$$\alpha^T = \left[ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \right] \quad (6.11)$$

Las matrices jacobianas, cuya determinación analítica es obligada para la utilización del algoritmo de programación cuadrática secuencial, se construyen a partir de las derivadas parciales respecto de las variables de diseño de las matrices y los vectores involucrados en la ecuación de equilibrio dinámico y que están recogidos en las expresiones (6.5) a (6.11).

Así se determina la expresión analítica de la matriz  $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i}$ ,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial y_{G1}}{\partial x_i} - \frac{\partial y_1}{\partial x_i} - \frac{\partial x_1}{\partial x_i} - \frac{\partial x_{G1}}{\partial x_i} - \frac{\partial y_{G1}}{\partial x_i} - \frac{\partial y_4}{\partial x_i} - \frac{\partial x_4}{\partial x_i} - \frac{\partial x_{G1}}{\partial x_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial y_{G2}}{\partial x_i} - \frac{\partial y_4}{\partial x_i} - \frac{\partial x_4}{\partial x_i} - \frac{\partial x_{G2}}{\partial x_i} - \frac{\partial y_{G2}}{\partial x_i} - \frac{\partial y_5}{\partial x_i} - \frac{\partial x_5}{\partial x_i} - \frac{\partial x_{G2}}{\partial x_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial y_{G3}}{\partial x_i} - \frac{\partial y_2}{\partial x_i} - \frac{\partial x_2}{\partial x_i} - \frac{\partial x_{G3}}{\partial x_i} - \frac{\partial y_{G3}}{\partial x_i} - \frac{\partial y_5}{\partial x_i} - \frac{\partial x_5}{\partial x_i} - \frac{\partial x_{G3}}{\partial x_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

del vector  $\left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \right)^T$ ,

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccc} \frac{\partial T_e}{\partial x_i} & \frac{\partial T_s}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{11}^x}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{11}^y}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{41}^x}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{41}^y}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{42}^x}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{42}^y}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{52}^x}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{52}^y}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{23}^x}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{23}^y}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{53}^x}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{53}^y}{\partial x_i} \end{array} \right] \quad (6.13)$$

del vector  $\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x_i}$ , que es un vector nulo por tratarse de un vector de constantes

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x_i} = \mathbf{0} \quad (6.14)$$

de la matriz  $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i}$ ,

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial x_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial m_1}{\partial x_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial m_2}{\partial x_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial m_2}{\partial x_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial m_3}{\partial x_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial m_3}{\partial x_i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

del vector  $\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x_i}$ ,

$$\left( \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x_i} \right)^T = \left[ \frac{\partial a_{G1}^x}{\partial x_i} \quad \frac{\partial a_{G1}^y}{\partial x_i} \quad \frac{\partial a_{G2}^x}{\partial x_i} \quad \frac{\partial a_{G2}^y}{\partial x_i} \quad \frac{\partial a_{G3}^x}{\partial x_i} \quad \frac{\partial a_{G3}^y}{\partial x_i} \right] \quad (6.16)$$

de la matriz  $\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x_i}$ ,

$$\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial I_1}{\partial x_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial I_2}{\partial x_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial I_3}{\partial x_i} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

y del vector  $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i}$ ,

$$\left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i} \right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_i} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_i} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_i} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

### 6.1.1. Síntesis de generación de trayectoria con restricción de par de salida.

Se plantea una síntesis de generación de trayectoria en la que se pretende controlar la trayectoria del nudo 6 del eslabón acoplador, a la vez que se limita el valor del par de salida en una posición de síntesis.

El vector de diseño inicial es:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	0.720	0.000
3	0.050	0.000
4	0.130	0.000
5	0.610	0.410
6	0.500	-0.150

Tabla 6.3: Vector de diseño inicial.

Las longitudes de las barras que resultan de dicho vector inicial son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.08000
3	0.63127
4	0.42450
5	0.39925
6	0.57070

Tabla 6.4: Longitudes iniciales de barra.

Para resolver el problema cinemático es necesario definir los grados de libertad cinemáticos del mecanismo. Se supondrá que el eslabón de entrada 1 gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante de valor 100 r.p.m., que equivalen a 10.472 rad/s en unidades del S.I.

ESLABÓN	VELOCIDAD ANGULAR
1	10.472 rad/s

Tabla 6.5: Grados de libertad cinemáticos.

Para resolver el problema dinámico es necesario definir los grados de libertad dinámicos del mecanismo. Se supondrá que par motor en el eslabón de entrada 1 es de 2500 N·m

ESLABÓN	PAR MOTOR
1	2500 N·m

Tabla 6.6: Grados de libertad dinámicos.

Por último, también será necesario fijar las densidades de los eslabones para resolver el problema dinámico:

ESLABÓN	DENSIDAD
1	10 kg/m
2	350 kg/m <sup>2</sup>
3	15 kg/m

Tabla 6.7: Densidad de los eslabones.

Una vez efectuado el análisis cinemático y dinámico se obtienen las coordenadas del nudo 6 del mecanismo de partida, que es el nudo cuya trayectoria se quiere controlar, en las sucesivas posiciones de análisis. Se considerarán aquí un total de 36 posiciones de análisis, separadas cada una de ellas por un giro de 10° en el eslabón de entrada.

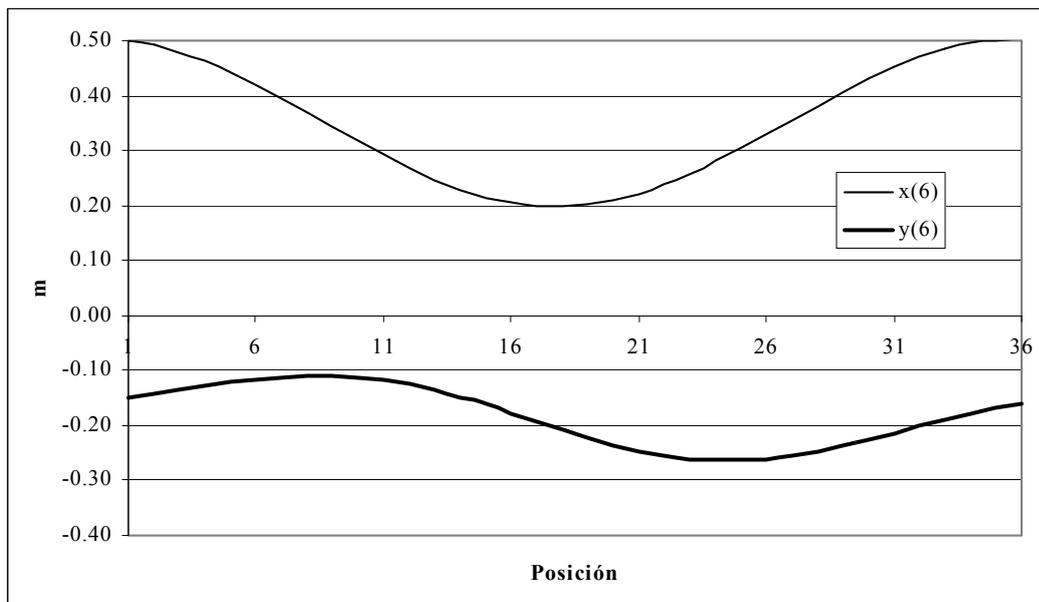


Figura 6.2: Coordenadas del nudo 6 del mecanismo de partida.

Se calcula también el par de salida del mecanismo de partida en las distintas posiciones de análisis.

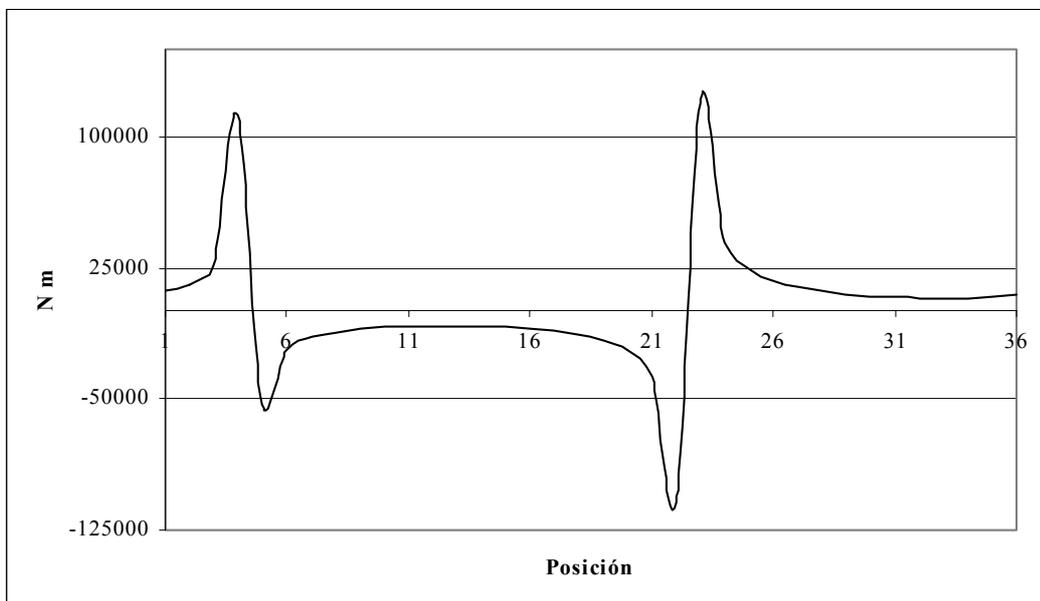


Figura 6.3: Par de salida del mecanismo de partida.

Se especifican un total de 9 posiciones de síntesis, que vienen definidas por el giro

del eslabón de entrada, expresado como el ángulo que el eslabón forma con el eje de abscisas, que constituye el grado de libertad cinemático del mecanismo.

POSICIÓN	GIRO
1	0°
2	40°
3	80°
4	120°
5	160°
6	200°
7	240°
8	280°
9	320°

Tabla 6.8: Posiciones de síntesis.

Estas posiciones de síntesis se introducen en forma de restricción directa sobre las variables de diseño correspondientes a las coordenadas  $x$  e  $y$  del nudo 3, cerrando la banda de la restricción al valor exacto de las coordenadas del nudo 3, que son conocidas dado que la barra 1 es de longitud fija.

POSICIÓN	NUDO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	3	0.05000	0.05000	0.00000	0.00000
2	3	0.03830	0.03830	0.03214	0.03214
3	3	0.00868	0.00868	0.04924	0.04924
4	3	-0.02500	-0.02500	0.04330	0.04330
5	3	-0.04698	-0.04698	0.01710	0.01710

6	3	-0.04698	-0.04698	-0.01710	-0.01710
7	3	-0.02500	-0.02500	-0.04330	-0.04330
8	3	0.00868	0.00868	-0.04924	-0.04924
9	3	-0.03830	-0.03830	-0.03213	-0.03213

Tabla 6.9: Definición de las posiciones de síntesis.

En las posiciones de síntesis definidas se definen las restricciones de posición deseadas como restricciones directas sobre las variables de diseño correspondientes a las coordenadas  $x$  e  $y$  del nudo 6:

POSICIÓN	NUDO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	6	0.52500	0.58500	-0.12000	-0.06000
2	6	0.47700	0.53700	-0.10320	-0.04320
3	6	0.38500	0.44500	-0.11170	-0.05170
4	6	0.29400	0.35400	-0.12990	-0.06990
5	6	0.24700	0.30700	-0.1810	-0.12100
6	6	0.26500	0.32500	-0.2250	-0.16500
7	6	0.33700	0.39700	-0.23000	-0.17000
8	6	0.42900	0.48900	-0.19700	-0.13700
9	6	0.50300	0.56300	-0.15100	-0.09100

Tabla 6.10: Restricciones de posición.

Se establecen también las bandas de restricción sobre las coordenadas de los puntos fijos. Únicamente se permitirá modificar la coordenada  $x$  del nudo 2.

PUNTO FIJO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.600	0.800	0.000	0.000

Tabla 6.11: Restricciones de movilidad de los puntos fijos.

Se establecen también restricciones sobre la longitud de las barras. La barra 1 es de longitud fija porque constituye el grado de libertad del problema de posición del mecanismo.

BARRA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
1	0.050	0.050
2	0.050	0.100
3	0.300	0.900
4	0.200	0.600
5	0.200	0.600
6	0.300	0.700

Tabla 6.12: Restricciones de longitud de barras.

Por último, se establecen las restricciones dinámicas que se quieren imponer. En este caso se desea limitar el valor del par de salida del mecanismo en la segunda posición de síntesis entre los valores de  $-1.25 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$  y  $-9.5 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}$ . El par de salida que se había obtenido en el análisis dinámico del mecanismo de partida en la segunda posición de síntesis era de  $-5.4 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}$ .

PUNTO DE SÍNTESIS	RESTRICCIÓN	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
2	$T_s$	$-1.25 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$	$-9.5 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}$

Tabla 6.13: Restricciones dinámicas.

Una vez ejecutadas las etapas de síntesis local y de síntesis global con las restricciones definidas, la función objetivo alcanza un valor final de  $2.62 \cdot 10^{-13}$  tras efectuar un total de 70 iteraciones.

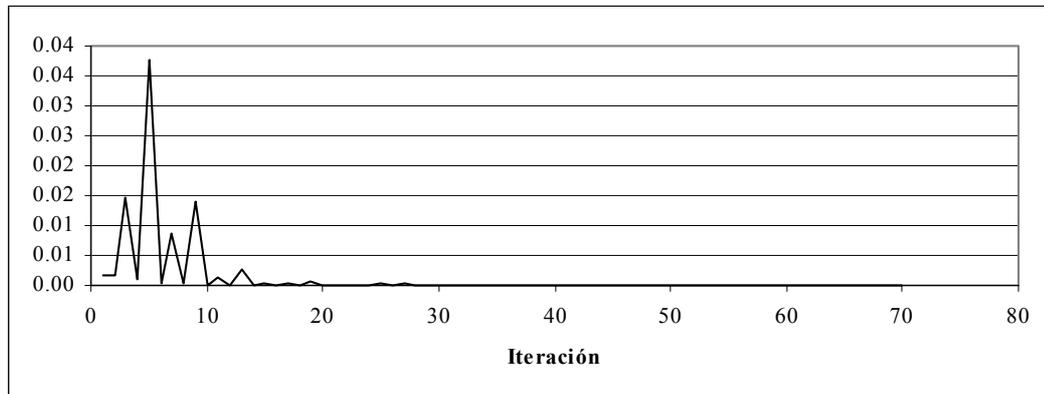


Figura 6.4: Evolución de la función objetivo.

El mecanismo solución está definido por las coordenadas de sus nudos:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	0.726	0.000
3	0.050	0.000
4	0.119	0.000
5	0.600	0.432
6	0.525	-0.116

Tabla 6.14: Vector de diseño del mecanismo solución.

Las longitudes de las barras resultantes son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.06979
3	0.63999
4	0.44975
5	0.42507
6	0.55302

Tabla 6.15: Longitudes de barra del mecanismo solución.

La coordenada  $x$  del nudo 6 del mecanismo solución en las sucesivas posiciones de análisis es:

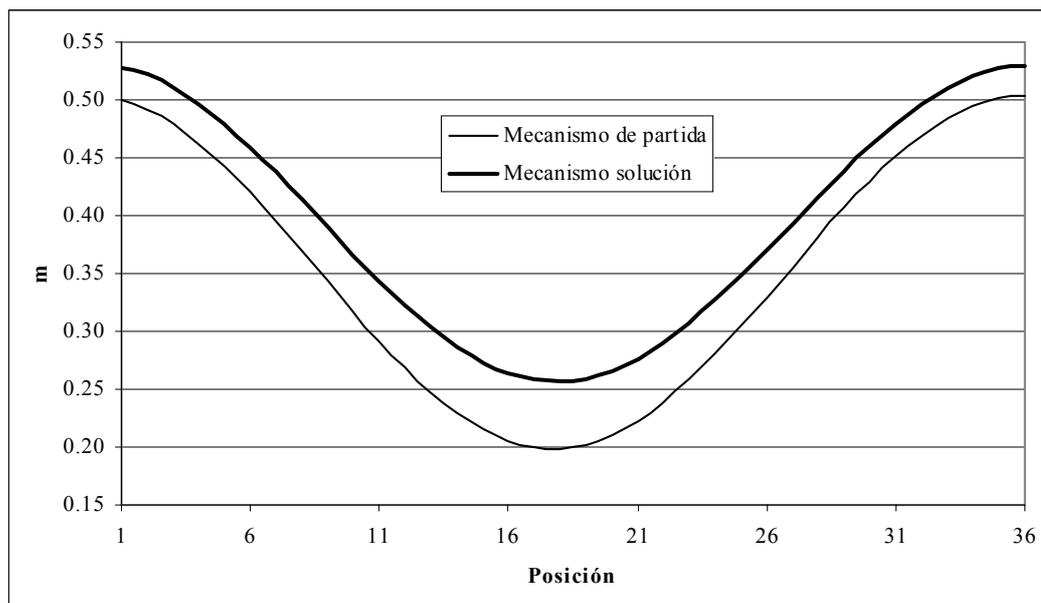


Figura 6.5: Coordenada  $x$  del nudo 6 del mecanismo solución.

La coordenada  $y$  del nudo 6 del mecanismo solución en las sucesivas posiciones de análisis es:

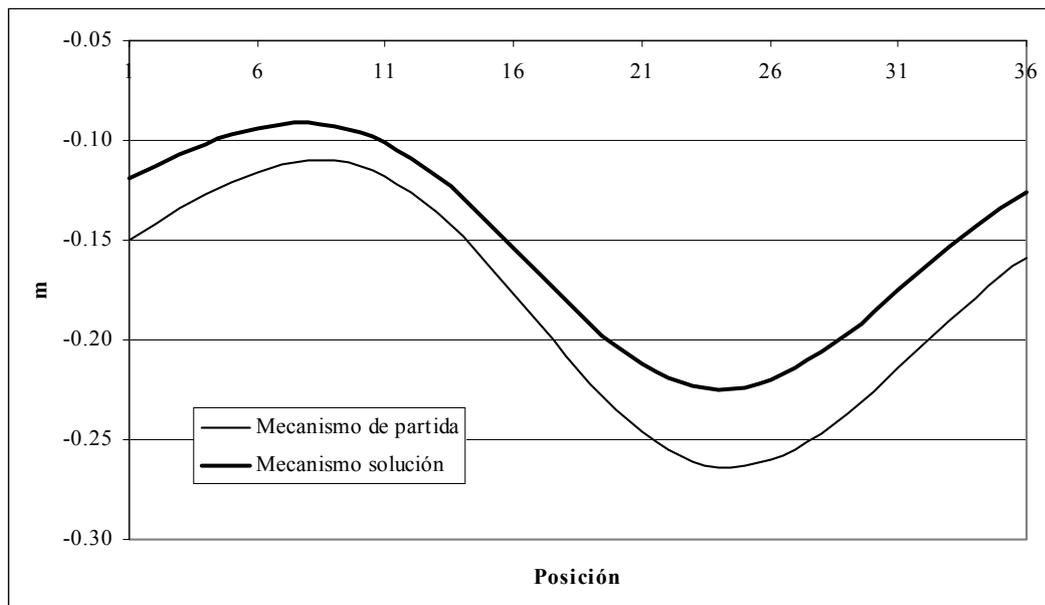


Figura 6.6: Coordenada y del nudo 6 del mecanismo solución.

El par de salida del mecanismo solución es:

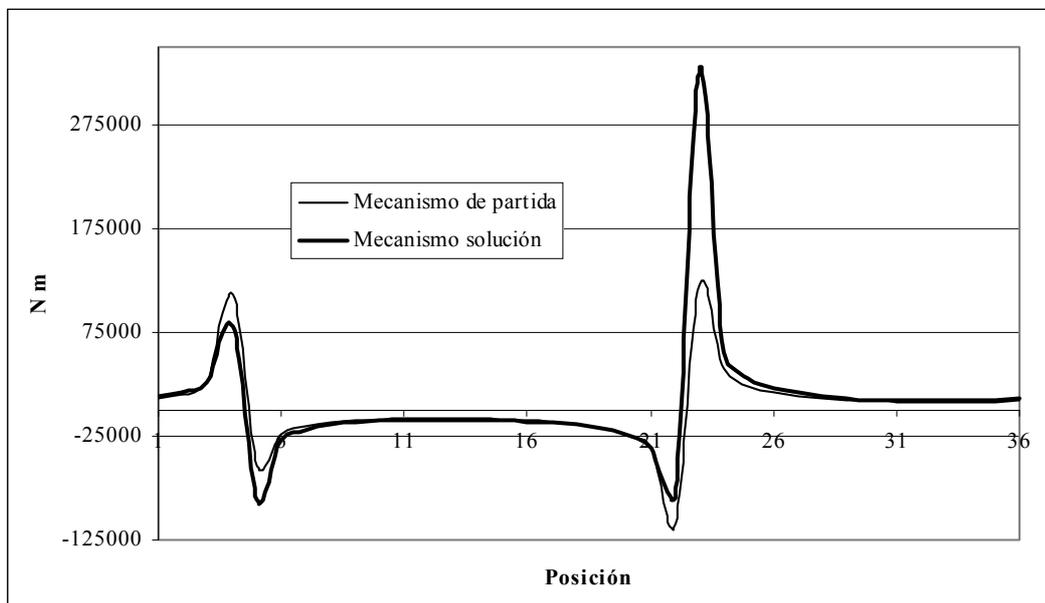


Figura 6.7: Par de salida del mecanismo solución.

El valor final de la función objetivo revela que el mecanismo solución constituye una solución que satisface las restricciones impuestas en la síntesis, incluida la restricción

dinámica, con una mínima elongación de sus barras. En cualquier caso es preciso tener en cuenta que el proceso de minimización de la función objetivo está afectado por errores numéricos de truncamiento y redondeo, debido a la limitación que presenta la propia precisión de la máquina. En este caso, la rápida convergencia se debe a que el mecanismo de partida está relativamente cerca de la solución final, por lo que el número de iteraciones que debe emplear el método para encontrar la solución es escaso.

### 6.1.2. Síntesis de generación de trayectoria con restricción de ventaja mecánica.

Se plantea ahora una nueva síntesis de generación de trayectoria en la que se pretende controlar la trayectoria del nudo 6 del eslabón acoplador, a la vez que se limita en este caso la ventaja mecánica en una posición de síntesis.

El vector de diseño inicial es:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	0.720	0.000
3	0.050	0.000
4	0.135	0.000
5	0.652	0.381
6	0.479	-0.195

Tabla 6.16: Vector de diseño inicial.

Las longitudes de las barras que resultan de dicho vector inicial son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.08500
3	0.64172
4	0.38694
5	0.39595
6	0.60120

Tabla 6.17: Longitudes iniciales de barra.

Para resolver el problema cinemático es necesario definir los grados de libertad cinemáticos del mecanismo. Se supondrá que el eslabón de entrada 1 gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante de valor 100 r.p.m. (10.472 rad/s)

ESLABÓN	VELOCIDAD ANGULAR
1	10.472 rad/s

Tabla 6.18: Grados de libertad cinemáticos.

Para resolver el problema dinámico es necesario definir los grados de libertad dinámicos del mecanismo. Se supondrá que par motor en el eslabón de entrada 1 es de 2500 N·m

ESLABÓN	PAR MOTOR
1	2500 N·m

Tabla 6.19: Grados de libertad dinámicos.

Por último, también será necesario fijar las densidades de los eslabones para resolver el problema dinámico:

ESLABÓN	DENSIDAD
1	10 kg/m
2	350 kg/m <sup>2</sup>
3	15 kg/m

Tabla 6.20: Densidad de los eslabones.

Una vez efectuado el análisis cinemático y dinámico se obtienen las coordenadas del nudo 6 del mecanismo de partida, que es el nudo cuya trayectoria se quiere controlar, en las sucesivas posiciones de análisis. Se considerarán aquí un total de 36 posiciones de análisis, separadas cada una de ellas por un giro de 10° en el eslabón de entrada.

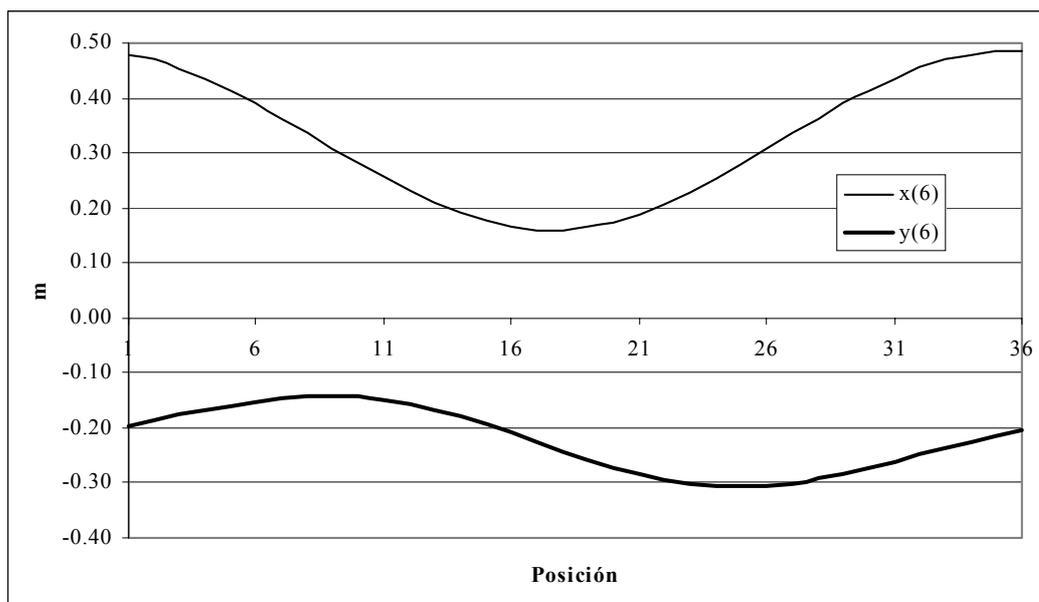


Figura 6.8: Coordenadas del nudo 6 del mecanismo de partida.

Se calcula también la ventaja mecánica del mecanismo de partida en las distintas posiciones de análisis.

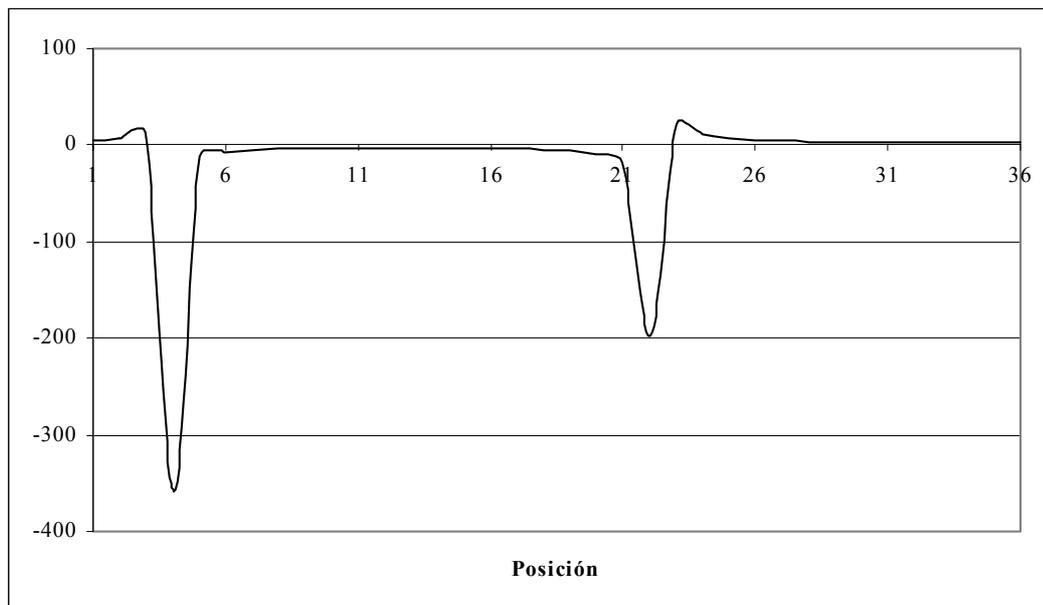


Figura 6.9: Ventaja mecánica del mecanismo de partida.

Se especifican un total de 9 posiciones de síntesis, que vienen definidas por el giro del eslabón de entrada, expresado como el ángulo que el eslabón forma con el eje de abscisas, que constituye el grado de libertad cinemático del mecanismo.

POSICIÓN	GIRO
1	0°
2	40°
3	80°
4	120°
5	160°
6	200°
7	240°
8	280°
9	320°

Tabla 6.21: Posiciones de síntesis.

Estas posiciones de síntesis se introducen en forma de restricción directa sobre las variables de diseño correspondientes a las coordenadas  $x$  e  $y$  del nudo 3, cerrando la banda de la restricción al valor exacto de las coordenadas del nudo 3, que son conocidas dado que la barra 1 es de longitud fija.

POSICIÓN	NUDO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	3	0.05000	0.05000	0.00000	0.00000
2	3	0.03830	0.03830	0.03214	0.03214
3	3	0.00868	0.00868	0.04924	0.04924
4	3	-0.02500	-0.02500	0.04330	0.04330
5	3	-0.04698	-0.04698	0.01710	0.01710
6	3	-0.04698	-0.04698	-0.01710	-0.01710
7	3	-0.02500	-0.02500	-0.04330	-0.04330
8	3	0.00868	0.00868	-0.04924	-0.04924
9	3	-0.03830	-0.03830	-0.03213	-0.03213

Tabla 6.22: Definición de las posiciones de síntesis.

En las posiciones de síntesis definidas se definen las restricciones de posición deseadas como restricciones directas sobre las variables de diseño correspondientes a las coordenadas  $x$  e  $y$  del nudo 6, y que serán idénticas a las definidas en 6.1.1.

POSICIÓN	NUDO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	6	0.52500	0.58500	-0.12000	-0.06000
2	6	0.47700	0.53700	-0.10320	-0.04320
3	6	0.38500	0.44500	-0.11170	-0.05170
4	6	0.29400	0.35400	-0.12990	-0.06990
5	6	0.24700	0.30700	-0.1810	-0.12100

6	6	0.26500	0.32500	-0.2250	-0.16500
7	6	0.33700	0.39700	-0.23000	-0.17000
8	6	0.42900	0.48900	-0.19700	-0.13700
9	6	0.50300	0.56300	-0.15100	-0.09100

Tabla 6.23: Restricciones de posición.

Se establecen también las bandas de restricción sobre las coordenadas de los puntos fijos. Nuevamente, sólo se permitirá modificar la coordenada  $x$  del nudo 2.

PUNTO FIJO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.600	0.800	0.000	0.000

Tabla 6.24: Restricciones de movilidad de los puntos fijos.

Se establecen también restricciones sobre la longitud de las barras.

BARRA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
1	0.050	0.050
2	0.050	0.100
3	0.300	0.900
4	0.200	0.600
5	0.200	0.600
6	0.300	0.700

Tabla 6.25: Restricciones de longitud de barras.

Por último, se establecen las restricciones dinámicas que se quieren imponer. En este

caso se desea limitar el valor de la ventaja mecánica en la segunda posición de síntesis entre los valores de  $-50$  y  $-38$ , con el fin de hacer la misma síntesis que la expuesta en 6.1.1., pero partiendo esta vez de otro mecanismo inicial. La ventaja mecánica que se había obtenido en el análisis dinámico del mecanismo de partida en la segunda posición de síntesis era de  $-12.33$ .

PUNTO DE SÍNTESIS	RESTRICCIÓN	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
2	v	-50	-38

Tabla 6.26: Restricciones dinámicas.

Una vez ejecutadas las etapas de síntesis local y de síntesis global con las restricciones definidas, la función objetivo alcanza un valor final de  $9.73 \cdot 10^{-13}$  tras efectuar un total de 2042 iteraciones.

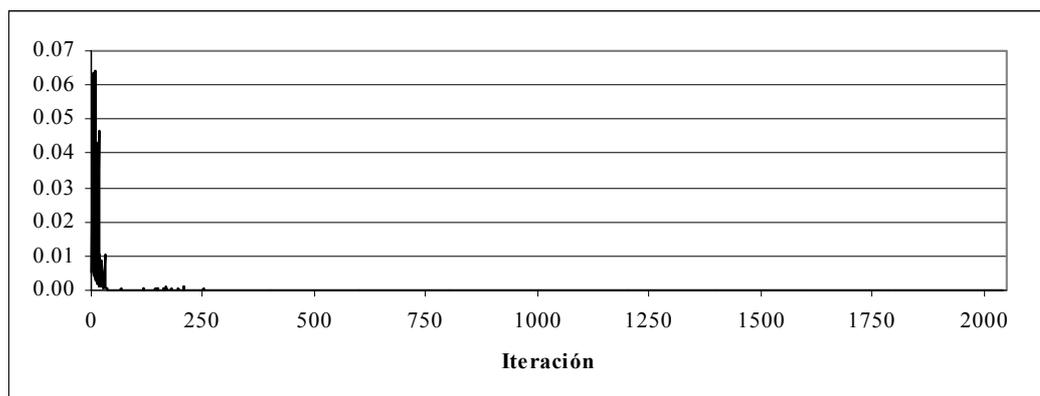


Figura 6.10: Evolución de la función objetivo.

Aunque la convergencia total exige en este caso un elevado número de iteraciones, puede observarse, sin embargo, como la función objetivo converge rápidamente en las primeras iteraciones a valores muy bajos. En concreto, después de sólo 50 iteraciones, el valor de la función objetivo pasa de  $4.99 \cdot 10^{-3}$  a  $3.82 \cdot 10^{-6}$ .

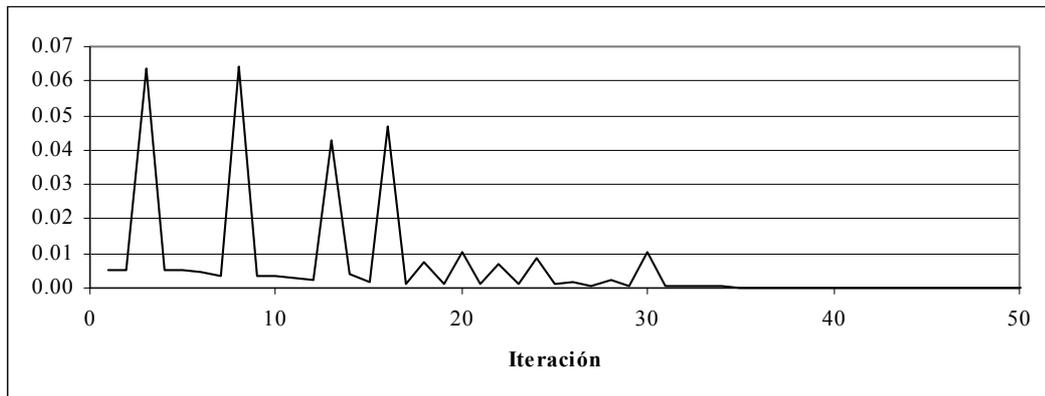


Figura 6.11: Detalle de la evolución de la función objetivo.

El mecanismo solución está definido por las coordenadas de sus nudos:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	0.733	0.000
3	0.050	0.000
4	0.110	0.000
5	0.616	0.436
6	0.525	-0.113

Tabla 6.27: Vector de diseño del mecanismo solución.

Las longitudes de las barras resultantes son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.06074
3	0.66079
4	0.45111
5	0.43301
6	0.55608

Tabla 6.28: Longitudes de barra del mecanismo solución.

La coordenada  $x$  del nudo 6 del mecanismo solución en las sucesivas posiciones de análisis es:

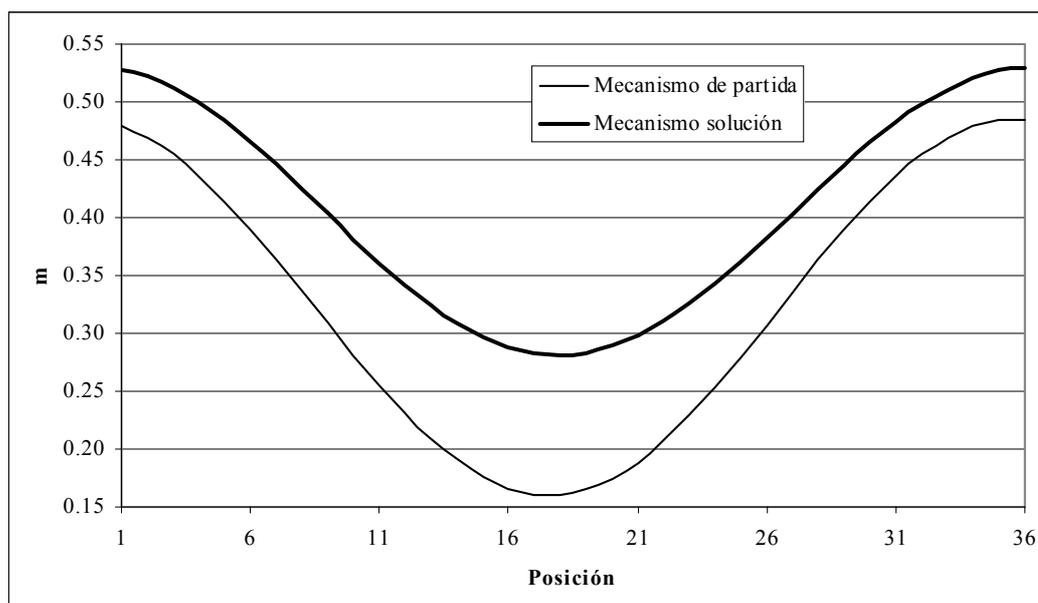


Figura 6.12: Coordenada  $x$  del nudo 6 del mecanismo solución.

La coordenada  $y$  del nudo 6 del mecanismo solución en las sucesivas posiciones de análisis es:

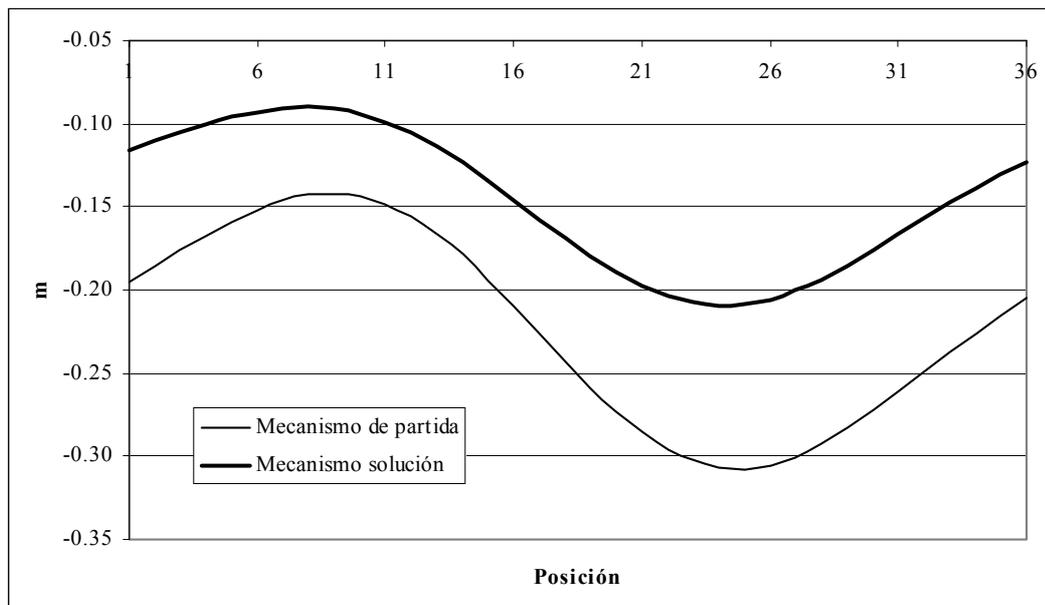


Figura 6.13: Coordenada  $y$  del nudo 6 del mecanismo solución.

La ventaja mecánica del mecanismo solución es:

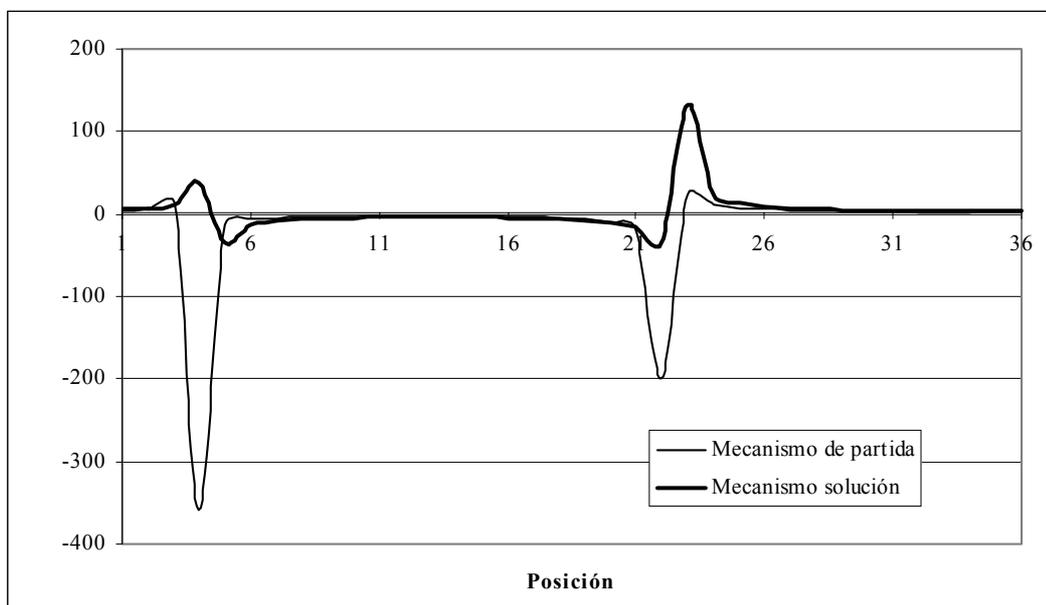


Figura 6.14: Ventaja mecánica del mecanismo solución.

Nuevamente el valor final de la función objetivo revela que el mecanismo satisface las restricciones impuestas en la síntesis. En este caso la convergencia es más lenta

debido a que el mecanismo de partida está más lejos del mecanismo solución que en 6.1.1.

### 6.1.3. Síntesis de generación de función con restricción de par de salida.

La síntesis de generación de función controla en el cuadrilátero articulado la relación existente entre los ángulos de los eslabones de entrada y salida. El ángulo del eslabón de salida se controla mediante dos restricciones trigonométricas del tipo

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta_4 &= \frac{y_5 - y_2}{L_4} \\ \operatorname{cos} \theta_4 &= \frac{x_5 - x_2}{L_4}\end{aligned}\quad (6.19)$$

donde  $L_4$  es la longitud del eslabón de salida

$$L_4 = \sqrt{(x_2 - x_5)^2 + (y_2 - y_5)^2} \quad (6.20)$$

Los gradientes de las restricciones se calculan a través de las expresiones

$$\begin{aligned}\frac{\partial \operatorname{sen} \theta_4}{\partial x_i} &= \frac{L_4 \left( \frac{\partial y_5}{\partial x_i} - \frac{\partial y_2}{\partial x_i} \right) - (y_5 - y_2) \frac{\partial L_4}{\partial x_i}}{(L_4)^2} \\ \frac{\partial \operatorname{cos} \theta_4}{\partial x_i} &= \frac{L_4 \left( \frac{\partial x_5}{\partial x_i} - \frac{\partial x_2}{\partial x_i} \right) - (x_5 - x_2) \frac{\partial L_4}{\partial x_i}}{(L_4)^2}\end{aligned}\quad (6.21)$$

donde

$$\frac{\partial L_4}{\partial x_i} = \frac{(x_2 - x_5) \left( \frac{\partial x_2}{\partial x_i} - \frac{\partial x_5}{\partial x_i} \right) + (y_2 - y_5) \left( \frac{\partial y_2}{\partial x_i} - \frac{\partial y_5}{\partial x_i} \right)}{\sqrt{(x_2 - x_5)^2 + (y_2 - y_5)^2}} \quad (6.22)$$

Se plantea ahora una síntesis de generación de función en la que se pretende controlar la relación existente entre los ángulos girados por los eslabones de entrada y salida, a la vez que se aumenta el par de salida en una posición de síntesis.

El vector de diseño inicial es:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	0.516	0.000
3	0.050	0.000
4	0.075	0.000
5	0.435	0.271
6	0.417	-0.107

Tabla 6.29: Vector de diseño inicial.

Las longitudes de las barras que resultan de dicho vector inicial son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.02500
3	0.45057
4	0.28244
5	0.35789
6	0.37795

Tabla 6.30: Longitudes iniciales de barra.

Para resolver el problema cinemático es necesario definir los grados de libertad cinemáticos del mecanismo. Se supondrá que el eslabón de entrada 1 gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante de valor 100 r.p.m. (10.472 rad/s)

ESLABÓN	VELOCIDAD ANGULAR
1	10.472 rad/s

Tabla 6.31: Grados de libertad cinemáticos.

Para resolver el problema dinámico es necesario definir los grados de libertad dinámicos del mecanismo. Se supondrá que par motor en el eslabón de entrada 1 es de  $2500 \text{ N} \cdot \text{m}$

ESLABÓN	PAR MOTOR
1	$2500 \text{ N} \cdot \text{m}$

Tabla 6.32: Grados de libertad dinámicos.

Por último, también será necesario fijar las densidades de los eslabones para resolver el problema dinámico:

ESLABÓN	DENSIDAD
1	$10 \text{ kg/m}$
2	$350 \text{ kg/m}^2$
3	$15 \text{ kg/m}$

Tabla 6.33: Densidad de los eslabones.

Una vez efectuado el análisis cinemático y dinámico se obtienen los ángulos girados por el eslabón seguidor, en las sucesivas posiciones de análisis. Se considerarán aquí un total de 36 posiciones de análisis, separadas cada una de ellas por un giro de  $10^\circ$  en el eslabón de entrada.

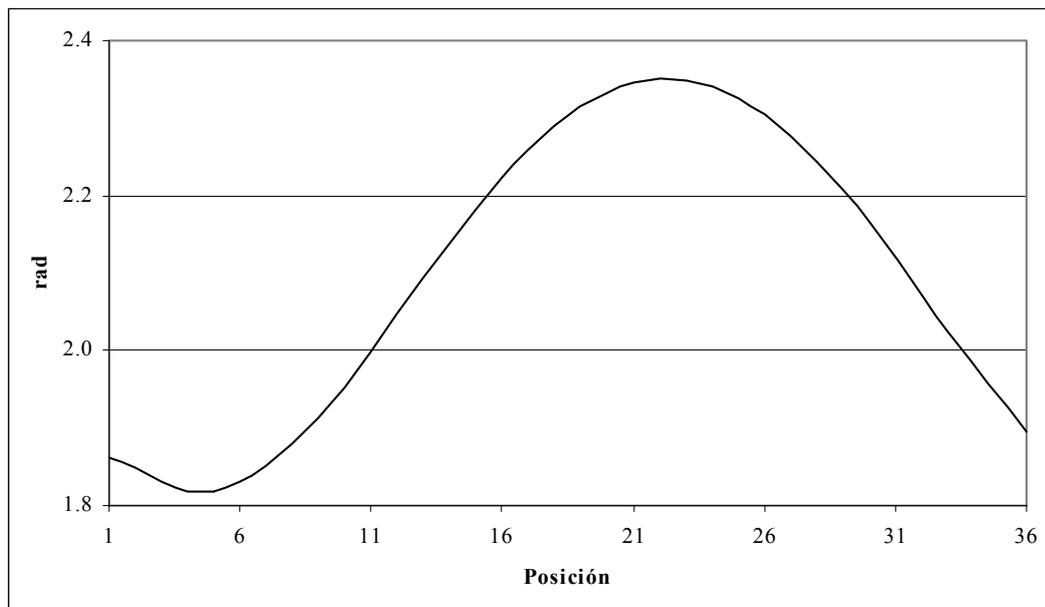


Figura 6.15: Ángulo del seguidor del mecanismo de partida.

Se calcula también el par de salida del mecanismo de partida en las distintas posiciones de análisis.

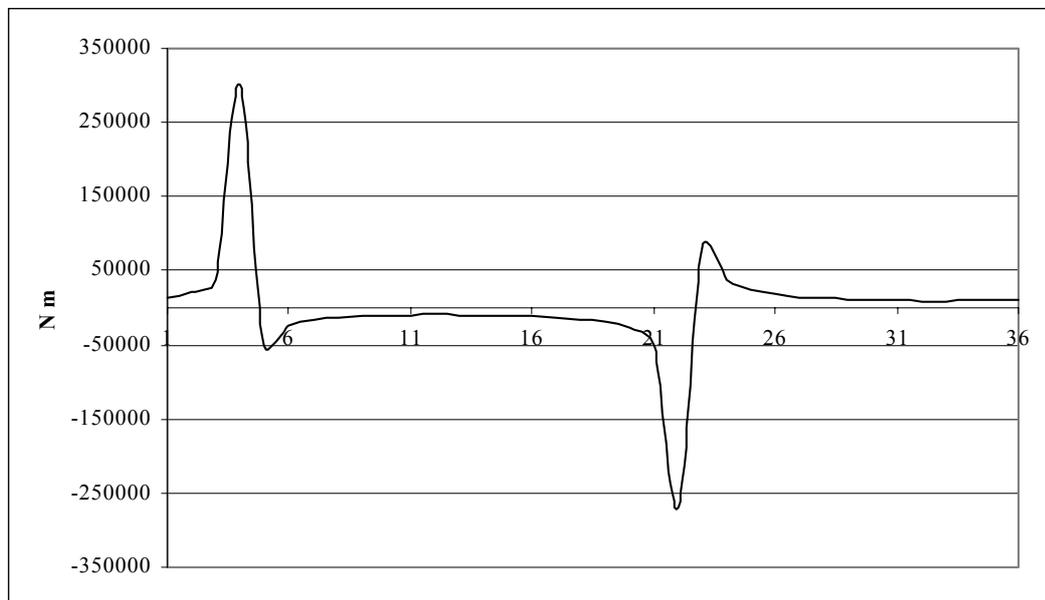


Figura 6.16: Par de salida del mecanismo de partida.

Se especifican un total de 9 posiciones de síntesis, que vienen definidas por el giro

del eslabón de entrada, expresado como el ángulo que el eslabón forma con el eje de abscisas, que constituye el grado de libertad cinemático del mecanismo.

POSICIÓN	GIRO
1	0°
2	40°
3	80°
4	120°
5	160°
6	200°
7	240°
8	280°
9	320°

Tabla 6.34: Posiciones de síntesis.

Estas posiciones de síntesis se introducen en forma de restricción directa sobre las variables de diseño correspondientes a las coordenadas  $x$  e  $y$  del nudo 3, cerrando la banda de la restricción al valor exacto de las coordenadas del nudo 3, que son conocidas dado que la barra 1 es de longitud fija.

POSICIÓN	NUDO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	3	0.05000	0.05000	0.00000	0.00000
2	3	0.03830	0.03830	0.03214	0.03214
3	3	0.00868	0.00868	0.04924	0.04924
4	3	-0.02500	-0.02500	0.04330	0.04330
5	3	-0.04698	-0.04698	0.01710	0.01710
6	3	-0.04698	-0.04698	-0.01710	-0.01710

7	3	-0.02500	-0.02500	-0.04330	-0.04330
8	3	0.00868	0.00868	-0.04924	-0.04924
9	3	-0.03830	-0.03830	-0.03213	-0.03213

Tabla 6.35: Definición de las posiciones de síntesis.

En la síntesis de generación de función, las posiciones de síntesis se introducen como restricciones sobre las funciones seno y coseno del ángulo que forma el seguidor con el eje de abscisas, y que aparecen definidas en (6.19). Por otra parte, las restricciones directas sobre las variables de diseño se definen estableciendo límites muy alejados de la solución, con el fin de que no intervengan en el problema.

POSICIÓN	FUNCIÓN	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
1	$\text{sen } \theta_4$	0.910	1.000
2	$\text{sen } \theta_4$	0.920	1.000
3	$\text{sen } \theta_4$	0.890	0.990
4	$\text{sen } \theta_4$	0.810	0.910
5	$\text{sen } \theta_4$	0.720	0.820
6	$\text{sen } \theta_4$	0.660	0.760
7	$\text{sen } \theta_4$	0.670	0.770
8	$\text{sen } \theta_4$	0.750	0.850
9	$\text{sen } \theta_4$	0.850	0.950

Tabla 6.36: Restricciones sobre el seno del ángulo del seguidor.

POSICIÓN	FUNCIÓN	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
1	$\cos \theta_4$	-0.340	-0.240
2	$\cos \theta_4$	-0.290	-0.190
3	$\cos \theta_4$	-0.380	-0.280
4	$\cos \theta_4$	-0.550	-0.450
5	$\cos \theta_4$	-0.680	-0.580
6	$\cos \theta_4$	-0.750	-0.650
7	$\cos \theta_4$	-0.730	-0.630
8	$\cos \theta_4$	-0.650	-0.550
9	$\cos \theta_4$	-0.490	-0.390

Tabla 6.37: Restricciones sobre el coseno del ángulo del seguidor.

Se establecen también las bandas de restricción sobre las coordenadas de los puntos fijos. Nuevamente, sólo se permitirá modificar la coordenada  $x$  del nudo 2.

PUNTO FIJO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.450	0.550	0.000	0.000

Tabla 6.38: Restricciones de movilidad de los puntos fijos.

Se establecen también restricciones sobre la longitud de las barras.

BARRA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
1	0.050	0.050
2	0.000	0.050

3	0.300	0.600
4	0.150	0.450
5	0.200	0.600
6	0.200	0.500

Tabla 6.39: Restricciones de longitud de barras.

Por último, se establecen las restricciones dinámicas que se quieren imponer. En este caso se desea limitar el par de salida en la segunda posición de síntesis entre los valores de  $-2.5 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$  y  $-10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$ . El par de salida del mecanismo de partida en la segunda posición de síntesis era de  $-5.2 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}$

PUNTO DE SÍNTESIS	RESTRICCIÓN	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
2	$T_s$	$-2.5 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$	$-10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$

Tabla 6.40: Restricciones dinámicas.

Una vez ejecutadas las etapas de síntesis local y de síntesis global con las restricciones definidas, la función objetivo alcanza un valor final de  $1.6 \cdot 10^{-13}$  tras efectuar un total de 152 iteraciones.

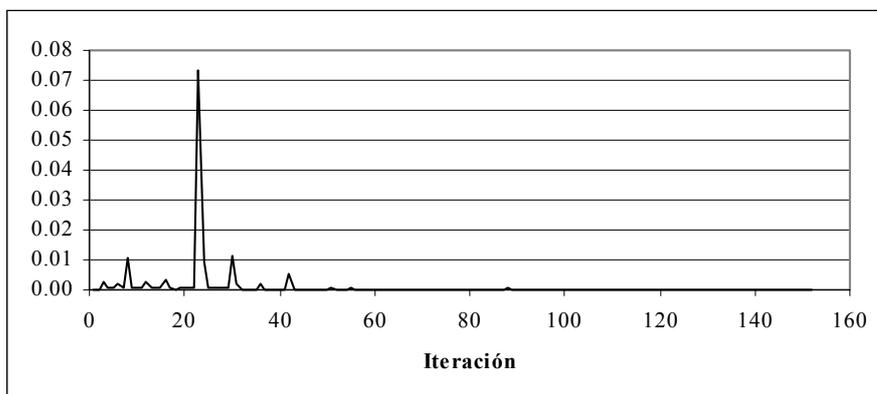


Figura 6.17: Evolución de la función objetivo.

El mecanismo solución está definido por las coordenadas de sus nudos:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	0.514	0.000
3	0.050	0.000
4	0.066	0.000
5	0.417	0.286
6	0.406	-0.108

Tabla 6.41: Vector de diseño del mecanismo solución.

Las longitudes de las barras resultantes son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.01559
3	0.45251
4	0.30244
5	0.35710
6	0.39484

Tabla 6.42: Longitudes de barra del mecanismo solución.

El ángulo girado por el eslabón seguidor del mecanismo solución en las sucesivas posiciones de análisis es:

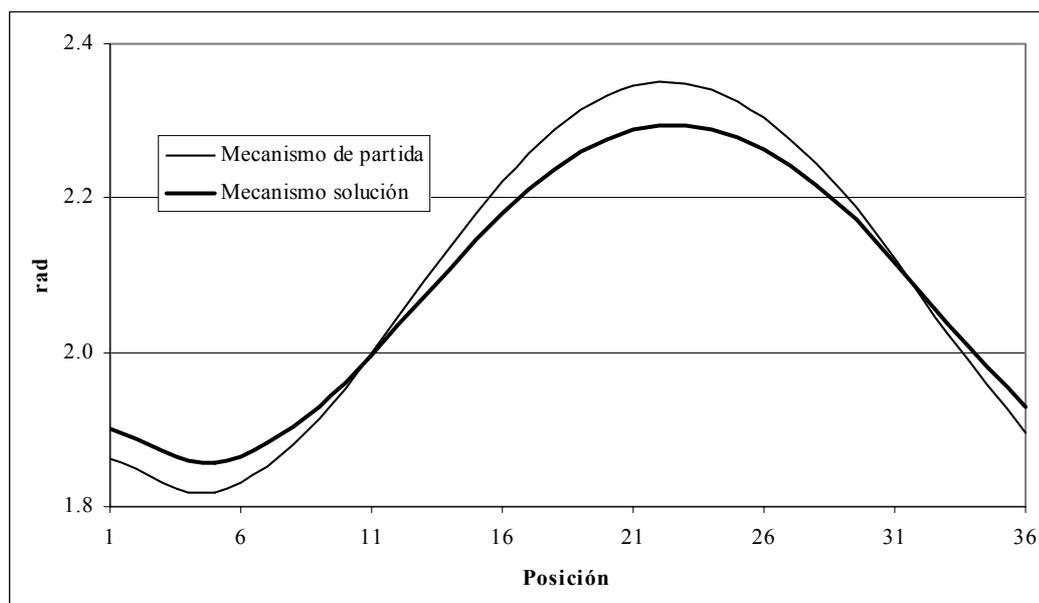


Figura 6.18: ángulo del seguidor del mecanismo solución.

El par de salida del mecanismo solución es:

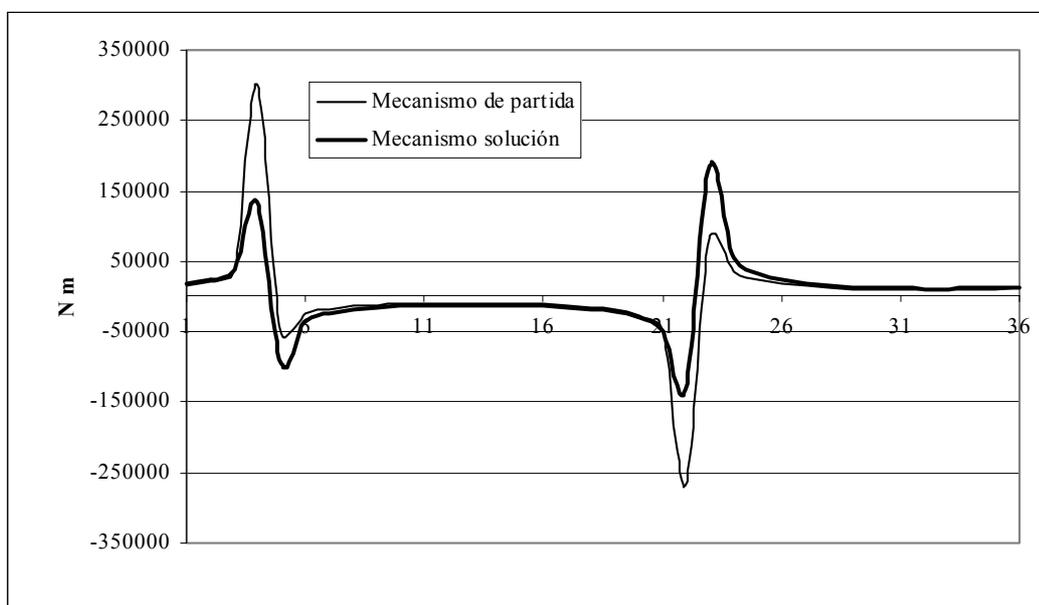


Figura 6.19: Par de salida del mecanismo solución.

El mecanismo solución cumple con las restricciones de posición y con la restricción dinámica impuesta, aumentando el valor del par de salida en el punto de síntesis

solicitado.

### 6.2. Mecanismo Whitworth de retorno rápido.

El mecanismo Whitworth de retorno rápido, también denominado mecanismo de limadora o troquel de manivela, es un clásico dentro de los mecanismos de retorno rápido. En estos mecanismos la carrera de retorno es más rápida que la carrera de trabajo, con el fin de mantener una cadencia de trabajo elevada limitando a la vez los requerimientos de potencia del motor.

El mecanismo Whitworth de retorno rápido se modeliza como un mecanismo de 6 nudos y 4 barras, de acuerdo a la figura 6.20. Los nudos 1 y 2 son puntos fijos del mecanismo. El nudo 3 constituye el grado de libertad cinemático del mecanismo, y permite modificar la excentricidad del mismo durante el proceso de síntesis.

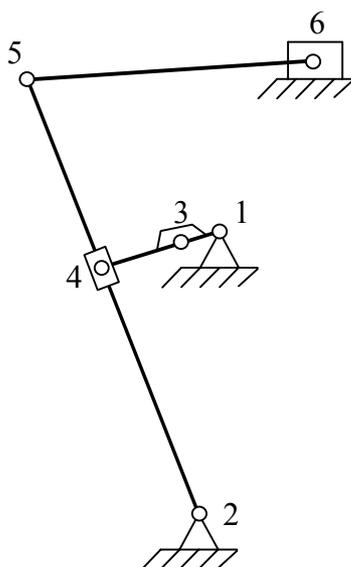


Figura 6.20: Mecanismo Whitworth de retorno rápido

BARRA	NUDO ORIGEN	NUDO FINAL
1	1	3
2	3	4

3	2	5
4	5	6

Tabla 6.43: Definición de barras en el mecanismo Whitworth de retorno rápido.

La geometría del mecanismo viene determinada por 7 restricciones geométricas:

- 3 restricciones que aseguran la colinealidad entre los nudos 1, 3 y 4.
- 3 restricciones que aseguran la colinealidad entre los nudos 2, 4 y 5, que representan el par prismático existente en el nudo 4.
- 1 restricción de coordenada y constante del nudo 6.

Se definen asimismo 5 eslabones para el planteamiento de la síntesis dinámica:

ORDINAL	ESLABÓN	NUDOS
1	Manivela	1-4
2	Corredera	4
3	Balancín	2-5
4	Biela	5-6
5	Carro	6

Tabla 6.44: Definición de eslabones en el mecanismo Whitworth de retorno rápido.

La transmisión de fuerzas entre la excéntrica y el balancín a través de la corredera se determina imponiendo la condición de que la fuerza transmitida debe ser perpendicular a la dirección del balancín

$$\frac{F_{43}^y}{F_{43}^x} = \frac{x_2 - x_5}{y_5 - y_2} \quad (6.23)$$

lo que se traduce en una ecuación del tipo

$$(y_5 - y_2)F_{43}^y + (x_5 - x_2)F_{43}^x = 0 \quad (6.24)$$

### 6.2.1. Síntesis de generación de función con restricción dinámica.

Se plantea una síntesis de generación de función en la que se pretende controlar la coordenada  $x$  del carro a la vez que se limita la componente horizontal  $H$  de la fuerza de salida ejercida por el carro.

El vector de diseño inicial es:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	0.000	-0.500
3	0.050	0.000
4	0.135	0.000
5	0.194	0.239
6	-0.150	0.350

Tabla 6.45: Vector de diseño inicial.

Las longitudes de las barras que resultan de dicho vector inicial son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.08500
3	0.76445
4	0.36123

Tabla 6.46: Longitudes iniciales de barra.

Para definir los grados de libertad del problema cinemático el eslabón de entrada 1 gira en sentido antihorario con una velocidad angular de 15 r.p.m. (1.571 rad/s)

ESLABÓN	VELOCIDAD ANGULAR
1	1.571 rad/s

Tabla 6.47: Grados de libertad cinemáticos.

Para resolver el problema dinámico se definen los grados de libertad dinámicos del mecanismo. Se supondrá que par motor en el eslabón de entrada 1 es de 200 N·m

ESLABÓN	PAR MOTOR
1	200 N·m

Tabla 6.48: Grados de libertad dinámicos.

Por último, también será necesario fijar las densidades de los eslabones barra y las masas de los eslabones puntuales para resolver el problema dinámico:

ESLABÓN	DENSIDAD
1	40 kg/m
3	50 kg/m
4	30 kg/m

Tabla 6.49: Densidad de los eslabones.

No se considerará la masa de la corredera, por considerarse despreciable frente al resto de masas que intervienen en el problema dinámico

ESLABÓN	MASA
2	0 kg
5	20 kg

Tabla 6.50: Masa de los eslabones punto.

Una vez efectuado el análisis cinemático y dinámico se obtiene la coordenada x del nudo 6 del mecanismo de partida, que representa la función a controlar, en las sucesivas posiciones de análisis. Se considerarán un total de 36 posiciones de análisis, separadas cada una de ellas por un giro de  $10^\circ$  en el eslabón de entrada.

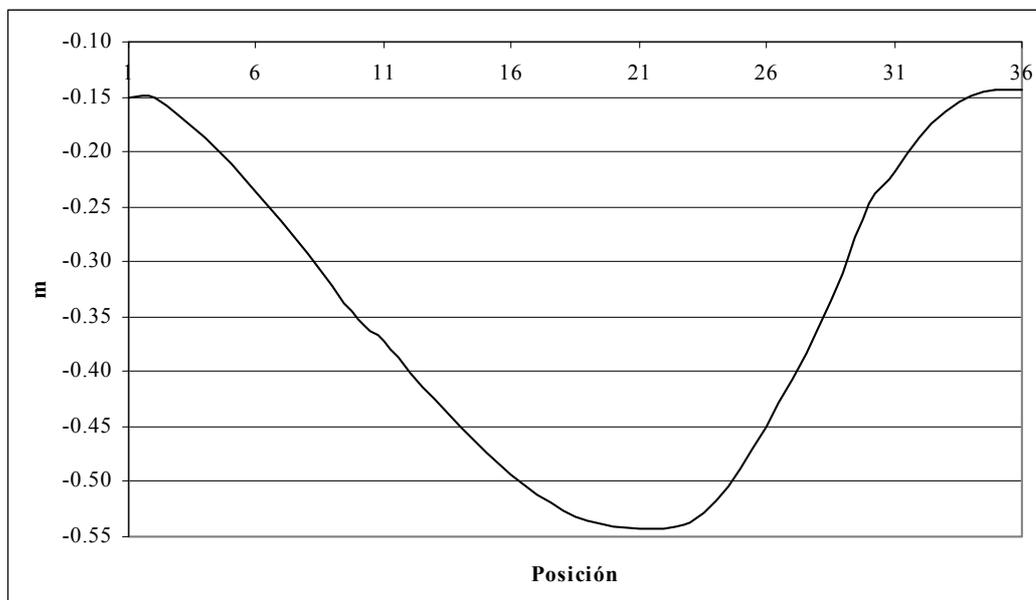


Figura 6.21: Coordenada x del nudo 6 del mecanismo de partida.

Se calcula también la fuerza de salida horizontal en las posiciones de análisis.

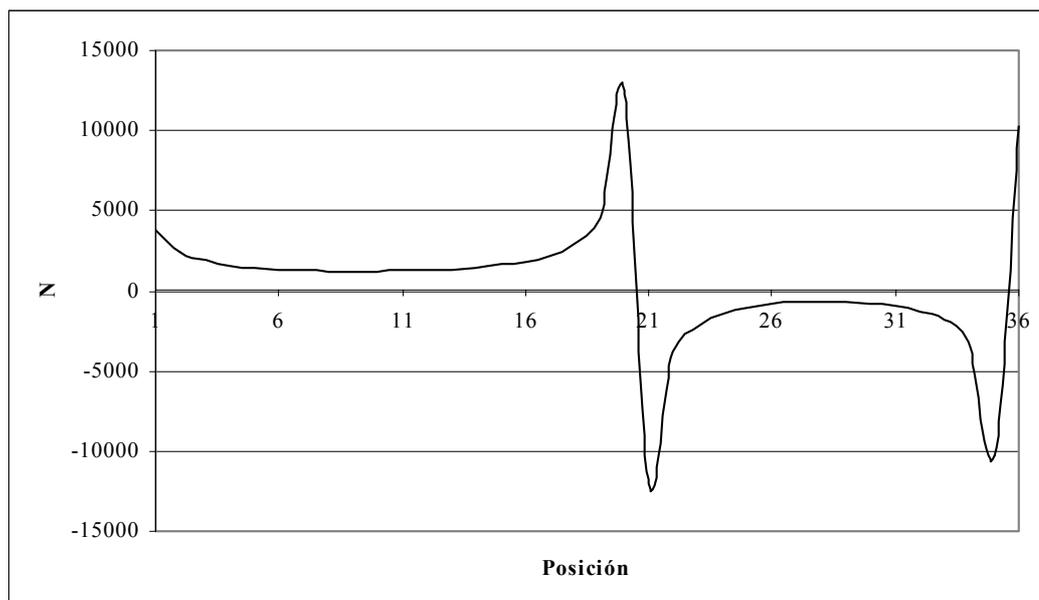


Figura 6.22: Fuerza horizontal de salida del mecanismo de partida.

Se especifican un total de 9 posiciones de síntesis, que vienen definidas por el giro del eslabón de entrada, expresado como el ángulo que el eslabón forma con el eje de abscisas, que constituye el grado de libertad cinemático del mecanismo.

POSICIÓN	GIRO
1	0°
2	40°
3	80°
4	120°
5	160°
6	190°
7	240°
8	280°
9	320°

Tabla 6.51: Posiciones de síntesis.

Estas posiciones de síntesis se introducen en forma de restricción directa sobre las variables de diseño correspondientes a las coordenadas  $x$  e  $y$  del nudo 3, cerrando la banda de la restricción al valor exacto de las coordenadas del nudo 3, que son conocidas dado que la barra 1 es de longitud fija.

POSICIÓN	NUDO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	3	0.05000	0.05000	0.00000	0.00000
2	3	0.03830	0.03830	0.03214	0.03214
3	3	0.00868	0.00868	0.04924	0.04924
4	3	-0.02500	-0.02500	0.04330	0.04330
5	3	-0.04698	-0.04698	0.01710	0.01710

6	3	-0.04924	-0.04924	-0.00868	-0.00868
7	3	-0.02500	-0.02500	-0.04330	-0.04330
8	3	0.00868	0.00868	-0.04924	-0.04924
9	3	-0.03830	-0.03830	-0.03213	-0.03213

Tabla 6.52: Definición de las posiciones de síntesis.

En las posiciones de síntesis definidas se definen las restricciones de posición deseadas como restricciones directas sobre las variables de diseño correspondientes a la coordenada  $x$  del nudo 6. Las restricciones de posición correspondientes a la coordenada  $y$  del nudo 6 se ajustan al valor de la coordenada constante.

POSICIÓN	NUDO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	6	-0.25000	-0.15000	0.35000	0.35000
2	6	-0.30000	-0.20000	0.35000	0.35000
3	6	-0.40000	-0.30000	0.35000	0.35000
4	6	-0.45000	-0.35000	0.35000	0.35000
5	6	-0.50000	-0.40000	0.35000	0.35000
6	6	-0.55000	-0.45000	0.35000	0.35000
7	6	-0.50000	-0.40000	0.35000	0.35000
8	6	-0.35000	-0.25000	0.35000	0.35000
9	6	-0.30000	-0.20000	0.35000	0.35000

Tabla 6.53: Restricciones de posición.

Se establecen también las bandas de restricción sobre las coordenadas de los puntos fijos. Únicamente se permite modificar ahora la coordenada  $y$  del nudo 2.

PUNTO FIJO	LÍMITE INFERIOR X	LÍMITE SUPERIOR X	LÍMITE INFERIOR Y	LÍMITE SUPERIOR Y
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.000	-0.550	-0.450

Tabla 6.54: Restricciones de movilidad de los puntos fijos.

Se establecen también restricciones sobre la longitud de las barras. La barra 1 es de longitud fija porque constituye el grado de libertad del problema de posición del mecanismo. Se permite una mínima variación de las longitudes de las barras 3 y 4, con el fin de que el algoritmo de síntesis resuelva el problema moviendo el punto fijo 2 en la vertical y variando la excentricidad del mecanismo, representada por la longitud de la barra 1, que sí puede cambiar sensiblemente de longitud.

BARRA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
1	0.050	0.050
2	0.000	0.100
3	0.760	0.770
4	0.360	0.370

Tabla 6.55: Restricciones de longitud de barras.

Por último, se establecen las restricciones dinámicas que se quieren imponer. En este caso se desea aumentar el valor máximo de la componente horizontal  $H$  de la fuerza de salida sobre el carro hasta un valor superior a  $6 \cdot 10^4$  N. Este valor máximo se presenta en el sexto punto de síntesis. Para ello, se impondrá en ese punto una restricción en forma de banda en la que el límite inferior corresponda a dicho valor. Se asigna asimismo un valor muy alto para el límite superior, dado que no intervendrá en el problema. La componente horizontal de salida  $H$  obtenida en el análisis dinámico del mecanismo de partida en la sexta posición de síntesis era de  $1.2 \cdot 10^4$  N.

PUNTO DE SÍNTESIS	RESTRICCIÓN	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
6	H	$6 \cdot 10^4 \text{ N}$	$6 \cdot 10^5 \text{ N}$

Tabla 6.56: Restricciones dinámicas.

Una vez ejecutadas las etapas de síntesis local y de síntesis global con las restricciones definidas, la función objetivo alcanza un valor final de  $5.28 \cdot 10^{-13}$  tras efectuar un total de 2110 iteraciones.

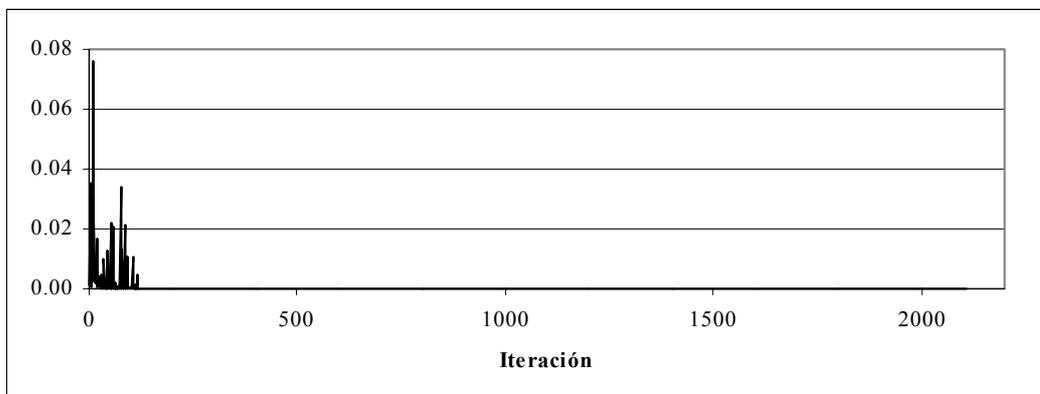


Figura 6.23: Evolución de la función objetivo.

Aunque la convergencia total exige en este caso un elevado número de iteraciones, puede observarse, sin embargo, que la función objetivo se estabiliza por debajo de valores del orden de  $10^{-5}$  después de 115 iteraciones.

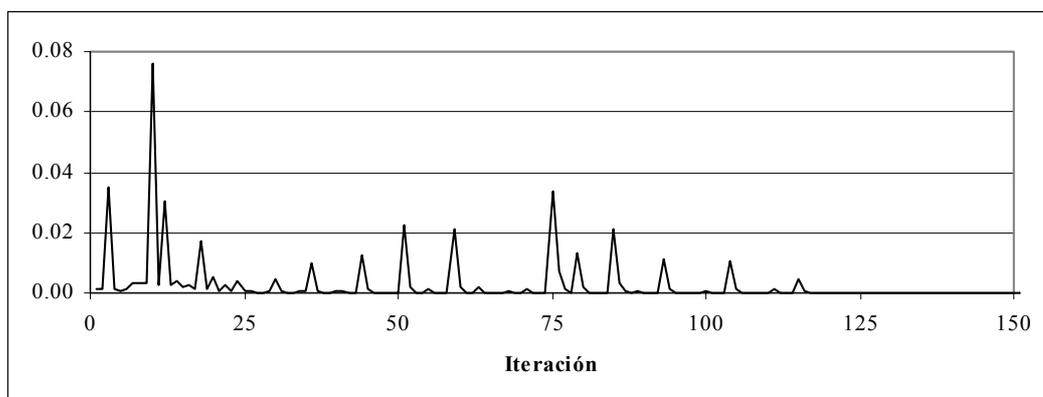


Figura 6.24: Detalle de la evolución de la función objetivo.

El mecanismo solución está definido por las coordenadas de sus nudos:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	0.000	-0.521
3	0.050	0.000
4	0.107	0.000
5	0.159	0.229
6	-0.189	0.350

Tabla 6.57: Vector de diseño del mecanismo solución.

Las longitudes de las barras resultantes son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.05742
3	0.76612
4	0.36938

Tabla 6.58: Longitudes de barra del mecanismo solución.

La coordenada  $x$  del nudo 6 del mecanismo solución en las sucesivas posiciones de análisis es:

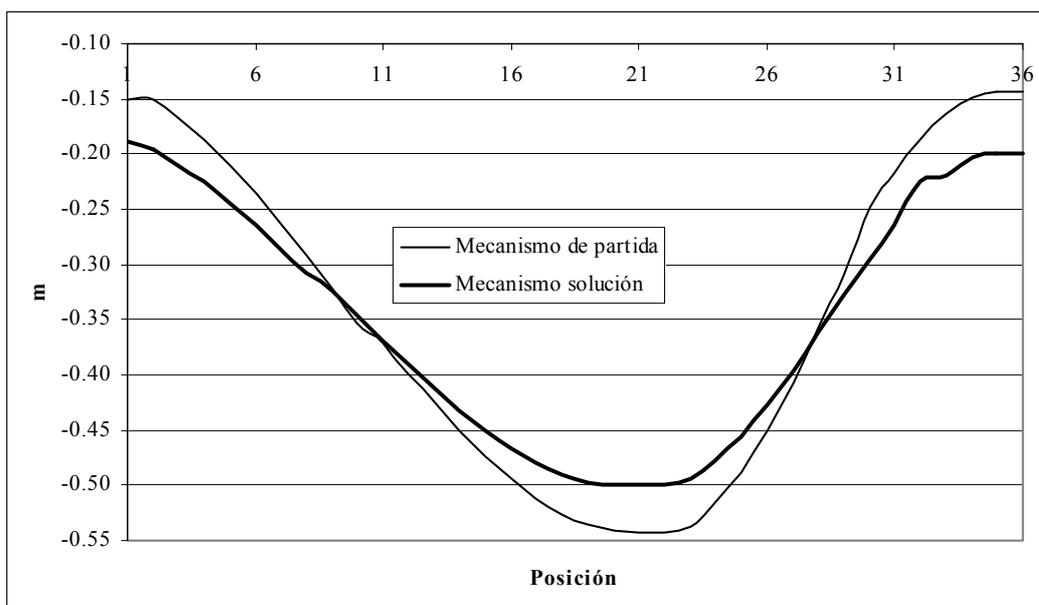


Figura 6.25: Coordenada x del nudo 6 del mecanismo solución.

La componente horizontal de la fuerza de salida del mecanismo solución es:

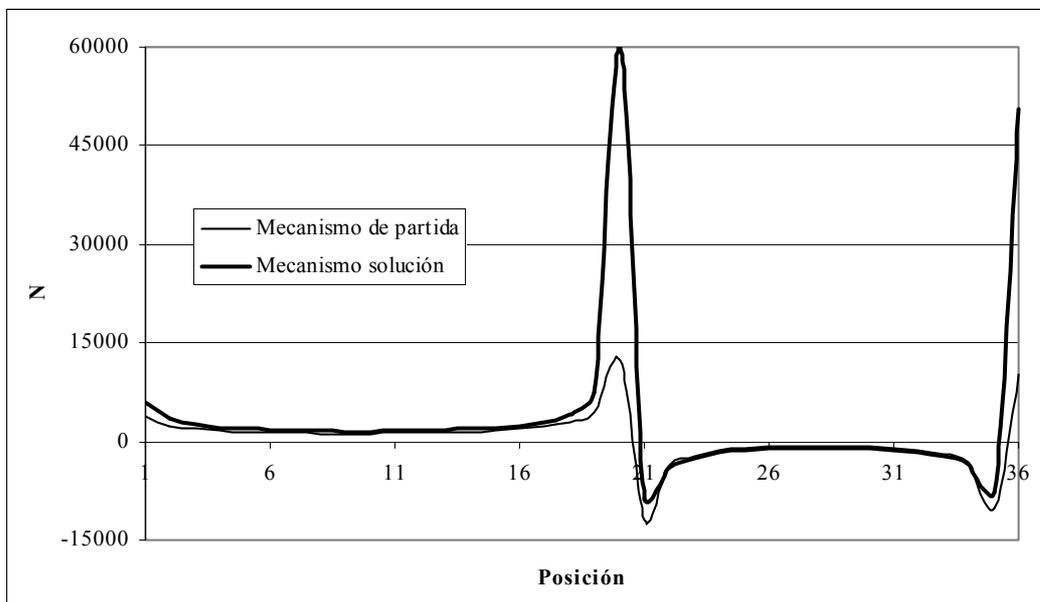


Figura 6.26: Fuerza horizontal de salida del mecanismo solución.

El algoritmo converge a una solución que satisface las restricciones impuestas, alcanzando el límite inferior de la restricción dinámica impuesta. La convergencia

necesita, sin embargo, de un gran número de iteraciones.

### 6.2.2. Nueva síntesis de generación de función con restricción dinámica.

Se plantea una nueva síntesis de generación de función en la que se pretende controlar la coordenada  $x$  del carro a la vez que se limita la componente horizontal  $H$  de la fuerza de salida ejercida por el carro. Partiendo del mismo mecanismo de partida que en 6.2.1. se pretenderá obtener el mismo valor de fuerza horizontal de salida limitando también la excentricidad del mecanismo, con el fin de evitar que el método llegue a encontrar una solución exacta.

El vector de diseño inicial es:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	0.000	-0.500
3	0.050	0.000
4	0.135	0.000
5	0.194	0.239
6	-0.150	0.350

Tabla 6.59: Vector de diseño inicial.

Las longitudes de las barras que resultan de dicho vector inicial son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.08500
3	0.76445
4	0.36123

Tabla 6.60: Longitudes iniciales de barra.

Para definir los grados de libertad del problema cinemático el eslabón de entrada 1 gira en sentido antihorario con una velocidad angular de 15 r.p.m. (1.571 rad/s)

ESLABÓN	VELOCIDAD ANGULAR
1	1.571 rad/s

Tabla 6.61: Grados de libertad cinemáticos.

Para resolver el problema dinámico se definen los grados de libertad dinámicos del mecanismo. Se supondrá que par motor en el eslabón de entrada 1 es de 200 N·m

ESLABÓN	PAR MOTOR
1	200 N·m

Tabla 6.62: Grados de libertad dinámicos.

Por último, también será necesario fijar las densidades de los eslabones barra y las masas de los eslabones puntuales para resolver el problema dinámico:

ESLABÓN	DENSIDAD
1	40 kg/m
3	50 kg/m
4	30 kg/m

Tabla 6.63: Densidad de los eslabones.

No se considerará la masa de la corredera, por considerarse despreciable frente al resto de masas que intervienen en el problema dinámico

ESLABÓN	MASA
2	0 kg
5	20 kg

Tabla 6.64: Masa de los eslabones punto.

Una vez efectuado el análisis cinemático y dinámico se obtiene la coordenada  $x$  del nudo 6 del mecanismo de partida, representa la función a controlar, en las sucesivas posiciones de análisis. Se considerarán aquí también un total de 36 posiciones de análisis, separadas cada una de ellas por un giro de  $10^\circ$  en el eslabón de entrada.

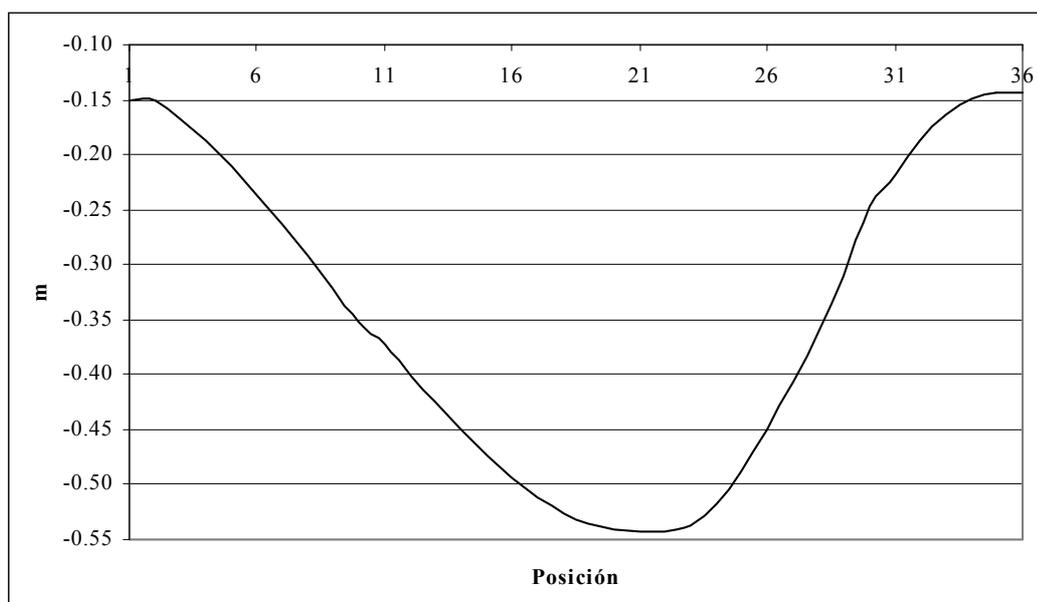


Figura 6.27: Coordenada  $x$  del nudo 6 del mecanismo de partida.

Se calcula también la componente horizontal  $H$  de la fuerza de salida en las distintas posiciones de análisis.

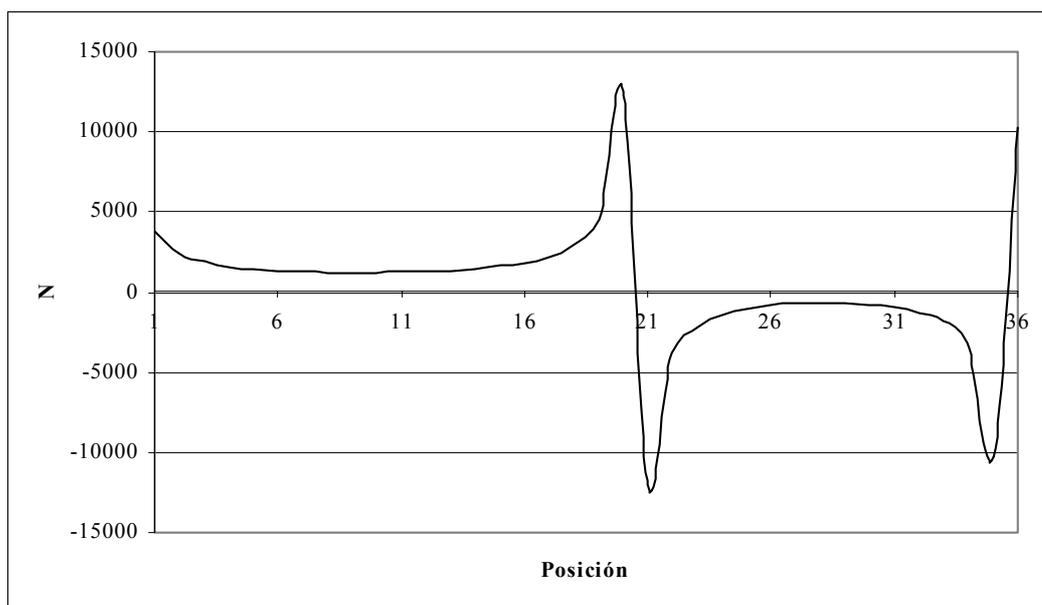


Figura 6.28: Fuerza horizontal de salida del mecanismo de partida.

Se especifican un total de 9 posiciones de síntesis, que vienen definidas por el giro del eslabón de entrada, expresado como el ángulo que el eslabón forma con el eje de abscisas, que constituye el grado de libertad cinemático del mecanismo.

POSICIÓN	GIRO
1	0°
2	40°
3	80°
4	120°
5	160°
6	190°
7	240°
8	280°
9	320°

Tabla 6.65: Posiciones de síntesis.

Estas posiciones de síntesis se introducen en forma de restricción directa sobre las variables de diseño correspondientes a las coordenadas  $x$  e  $y$  del nudo 3, cerrando la banda de la restricción al valor exacto de las coordenadas del nudo 3, que son conocidas dado que la barra 1 es de longitud fija.

POSICIÓN	NUDO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	3	0.05000	0.05000	0.00000	0.00000
2	3	0.03830	0.03830	0.03214	0.03214
3	3	0.00868	0.00868	0.04924	0.04924
4	3	-0.02500	-0.02500	0.04330	0.04330
5	3	-0.04698	-0.04698	0.01710	0.01710
6	3	-0.04924	-0.04924	-0.00868	-0.00868
7	3	-0.02500	-0.02500	-0.04330	-0.04330
8	3	0.00868	0.00868	-0.04924	-0.04924
9	3	-0.03830	-0.03830	-0.03213	-0.03213

Tabla 6.66: Definición de las posiciones de síntesis.

En las posiciones de síntesis definidas se definen las restricciones de posición deseadas como restricciones directas sobre las variables de diseño correspondientes a las coordenadas  $x$  e  $y$  del nudo 6:

POSICIÓN	NUDO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	6	-0.25000	-0.15000	0.35000	0.35000
2	6	-0.30000	-0.20000	0.35000	0.35000
3	6	-0.40000	-0.30000	0.35000	0.35000
4	6	-0.45000	-0.35000	0.35000	0.35000
5	6	-0.50000	-0.40000	0.35000	0.35000

6	6	-0.55000	-0.45000	0.35000	0.35000
7	6	-0.50000	-0.40000	0.35000	0.35000
8	6	-0.35000	-0.25000	0.35000	0.35000
9	6	-0.30000	-0.20000	0.35000	0.35000

Tabla 6.67: Restricciones de posición.

Se establecen también las bandas de restricción sobre las coordenadas de los puntos fijos. Únicamente se permite modificar la coordenada y del nudo 2.

PUNTO FIJO	LÍMITE INFERIOR X	LÍMITE SUPERIOR X	LÍMITE INFERIOR Y	LÍMITE SUPERIOR Y
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.000	-0.550	-0.450

Tabla 6.68: Restricciones de movilidad de los puntos fijos.

Se establecen también restricciones sobre la longitud de las barras. La barra 1 es de longitud fija porque constituye el grado de libertad del problema de posición del mecanismo. Se permite una mínima variación de las longitudes de las barras 3 y 4, con el fin de que el algoritmo de síntesis resuelva el problema moviendo el punto fijo 2 en la vertical y variando la excentricidad del mecanismo, representada por la longitud de la barra 1. Se limita en este caso la excentricidad del mecanismo para que no pueda converger a la solución hallada en 6.2.1.

BARRA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
1	0.050	0.050
2	0.070	0.100
3	0.760	0.770
4	0.360	0.370

Tabla 6.69: Restricciones de longitud de barras.

Por último, se establecen las restricciones dinámicas que se quieren imponer. Como en 6.2.1., se desea aumentar el valor máximo de la componente horizontal  $H$  de la fuerza de salida sobre el carro hasta un valor superior a  $6 \cdot 10^4$  N. Este valor máximo se presenta en el sexto punto de síntesis. Para ello, se impondrá en ese punto una restricción en forma de banda en la que el límite inferior corresponda a dicho valor. Se asigna asimismo un valor muy alto para el límite superior, dado que no intervendrá en el problema. La componente horizontal de salida  $H$  obtenida en el análisis dinámico del mecanismo de partida en la sexta posición de síntesis era de  $1.2 \cdot 10^4$  N.

PUNTO DE SÍNTESIS	RESTRICCIÓN	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
6	H	$6 \cdot 10^4$ N	$6 \cdot 10^5$ N

Tabla 6.70: Restricciones dinámicas.

Una vez ejecutadas las etapas de síntesis local y de síntesis global con las restricciones definidas, la función objetivo alcanza un valor final de  $2.02 \cdot 10^{-4}$  tras efectuar un total de 4395 iteraciones.

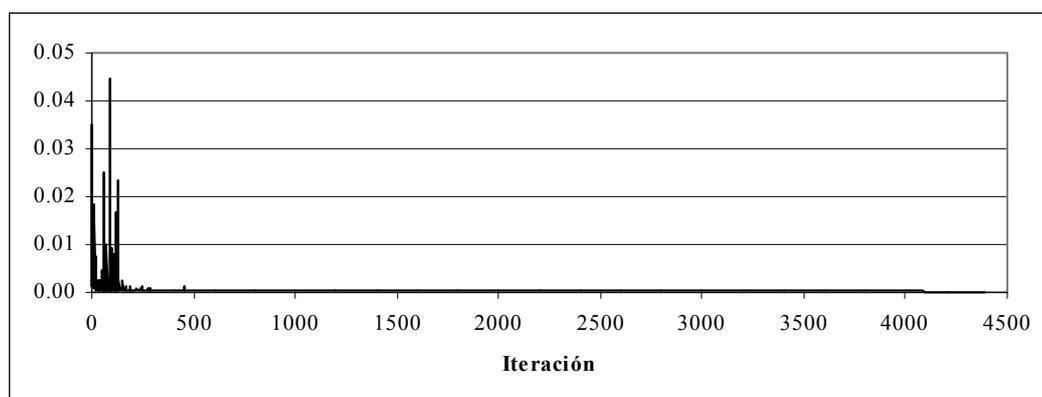


Figura 6.29: Evolución de la función objetivo.

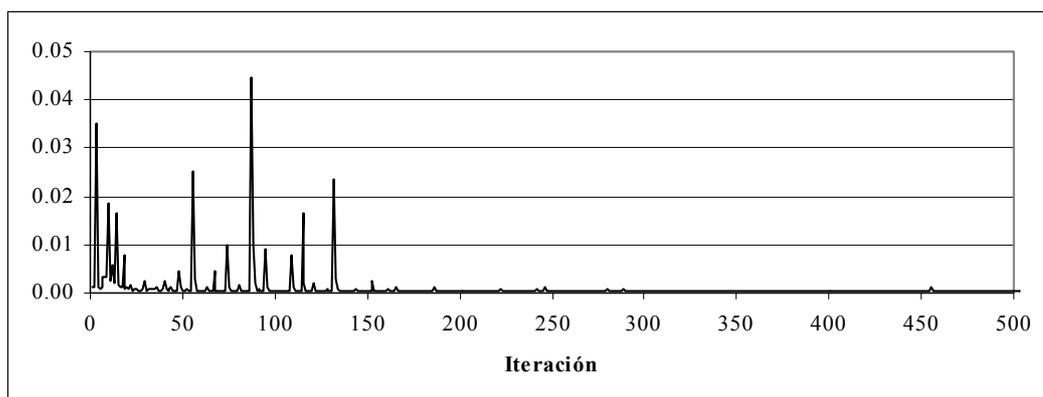


Figura 6.30: Detalle de la evolución de la función objetivo.

El mecanismo solución está definido por las coordenadas de sus nudos:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	0.000	-0.525
3	0.050	0.000
4	0.120	0.000
5	0.175	0.222
6	-0.169	0.350

Tabla 6.71: Vector de diseño del mecanismo solución.

Las longitudes de las barras resultantes son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.07000

3	0.76734
4	0.36729

Tabla 6.72: Longitudes de barra del mecanismo solución.

La coordenada  $x$  del nudo 6 del mecanismo solución en las sucesivas posiciones de análisis es:

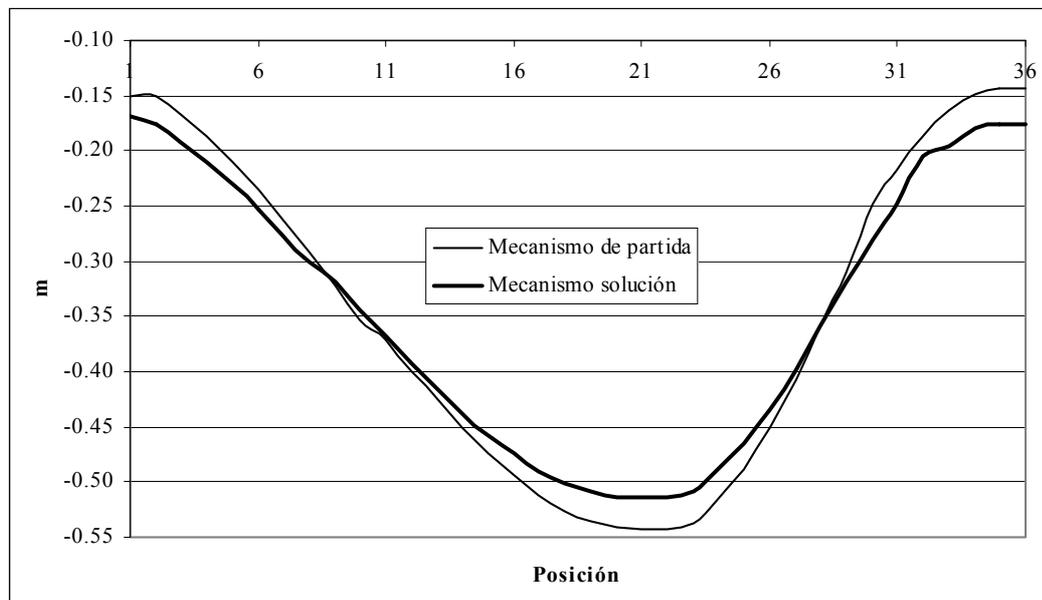


Figura 6.31: Coordenada  $x$  del nudo 6 del mecanismo solución.

La componente horizontal de la fuerza de salida del mecanismo solución es:

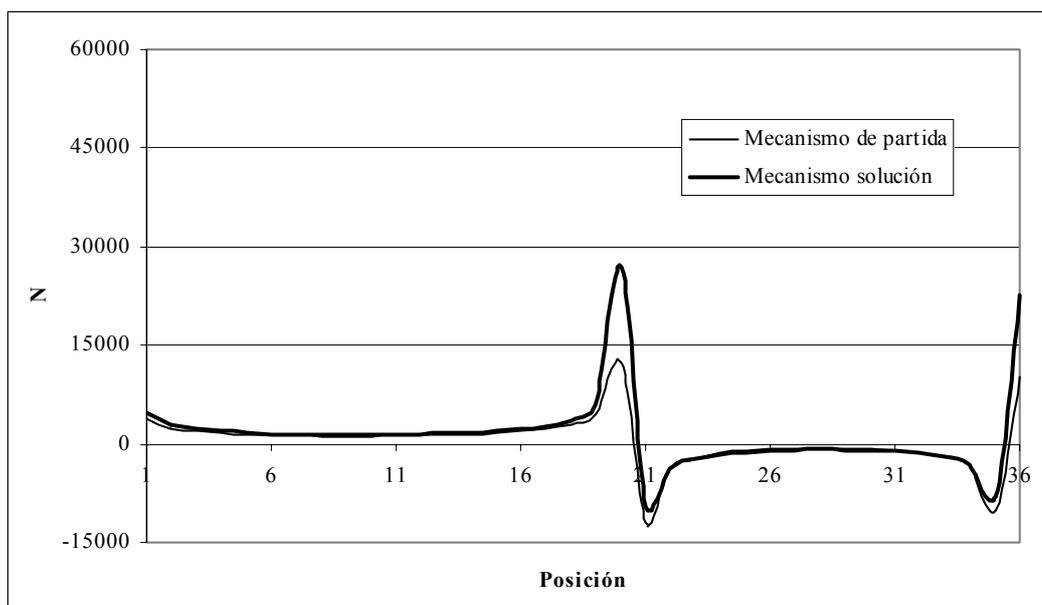


Figura 6.32: Fuerza horizontal de salida del mecanismo solución.

Debido a la exigente limitación que se ha impuesto para la longitud mínima de la barra 2, el algoritmo es incapaz de converger a una solución que no viole las restricciones impuestas. Por este motivo la solución hallada no es capaz de cumplir las restricciones de posición y dinámicas impuestas. En este caso el algoritmo busca una solución que haga mínima la función objetivo de energía potencial elástica, de forma que el mecanismo solución cumpla la totalidad de las restricciones con la mínima elongación de sus barras. Como en 6.2.1., el algoritmo va disminuyendo la longitud de la barra 2, aunque en este caso lo hace hasta el valor mínimo permitido, que aparece en el mecanismo solución. Pese a no alcanzar el valor solicitado en la restricción dinámica impuesta, la componente horizontal de la fuerza de salida aumenta sensiblemente, hasta un valor de  $2.68 \cdot 10^4$  N

### 6.3. Mecanismos de guiado de prensas de mecánica articulada.

Los mecanismos de guiado de las prensas de mecánica articulada, entre los que se encuentran el mecanismo de rodillera modificada y el mecanismo link drive, son utilizados con éxito en operaciones de estampación y embutición profunda en prensas mecánicas de curso fijo. Estos mecanismos incorporan un eslabón acoplador intermedio entre la excéntrica y la biela. Este eslabón intermedio oscila alrededor de la

vertical únicamente en la fase de deformación de la chapa, de forma que proporciona una velocidad de conformado baja y prácticamente constante que garantiza un proceso de deformación plástica de gran calidad, y simultáneamente asegura un rápido retorno del carro, que incide en una notable mejora de la producción horaria.

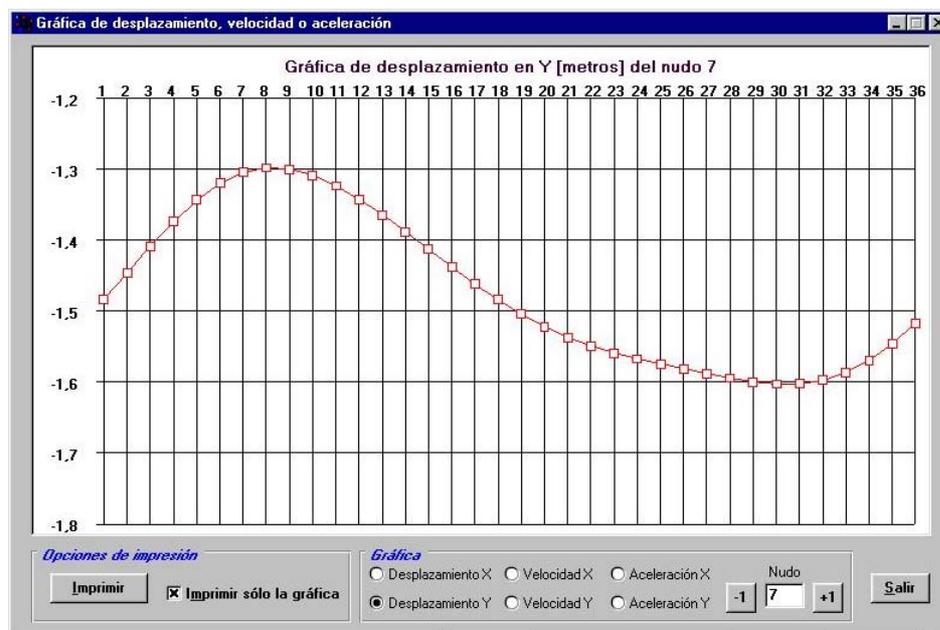


Figura 6.33: Diagrama de posición del carro.

Las prensas de mecánica articulada superan satisfactoriamente las limitaciones que las tradicionales prensas mecánicas de excéntrica presentan frente a las prensas hidráulicas, y pueden competir con ventaja en el mercado dado su menor coste. En concreto, presentan las siguientes ventajas:

- Garantizan un proceso de deformación plástica de gran calidad, dado que la velocidad de deformación de la chapa es baja y prácticamente constante. Este hecho minimiza el fenómeno de endurecimiento por velocidad de deformación, que es el causante de importantes defectos en las operaciones de deformación plástica, tales como la debilidad en los puntos críticos, la formación de resquebrajaduras o el desgarro del contorno del fondo.
- Presentan significativos aumentos en la carrera de trabajo, sin aumento de la excentricidad.
- Mejoran la producción horaria, debido a la elevada velocidad de retorno del

carro.

- Presentan importantes disminuciones en la potencia requerida.
- Minimizan el desgaste en frenos y embragues.
- Reducen los niveles de ruido.

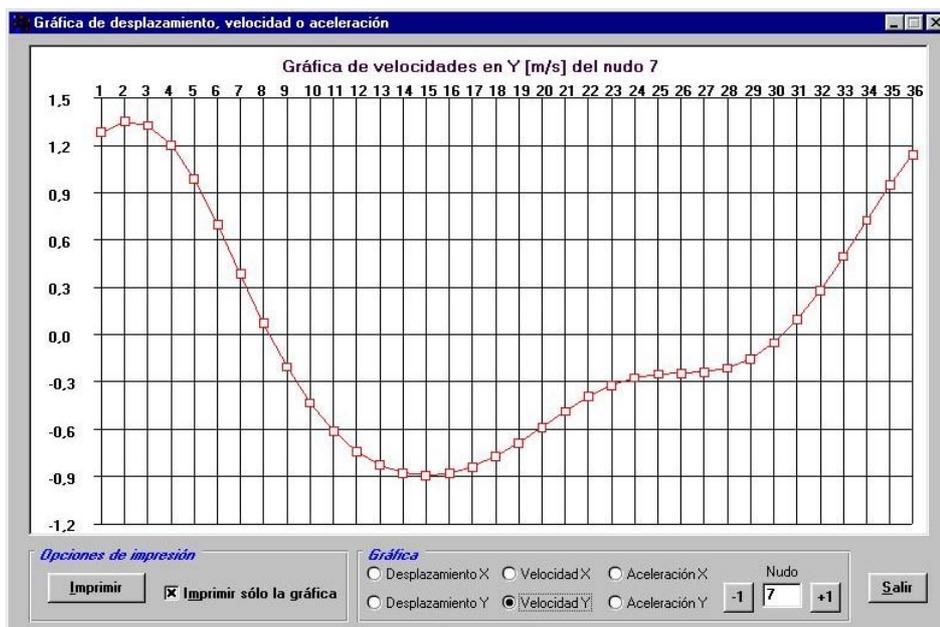


Figura 6.34: Diagrama de velocidad del carro.

En el análisis dinámico se distinguen las siguientes posiciones del carro como posiciones singulares:

- Punto muerto superior. Corresponde a la posición donde la coordenada y del carro es máxima.
- Punto muerto inferior. Corresponde a la posición donde la coordenada y del carro es mínima. Constituye el final de la denominada carrera de trabajo de la prensa.
- Punto de inicio de la carrera de trabajo. Corresponde a la coordenada donde la coordenada y del carro es el valor medio de las posiciones del carro correspondientes a los puntos muertos superior e inferior.

- Punto de fuerza. Es la posición de cálculo del par nominal. Viene definida por la diferencia entre las coordenadas y del carro entre dicho punto de fuerza y el punto muerto inferior.

El análisis dinámico se efectúa a partir de la definición de la fuerza nominal del mecanismo por biela, que es la fuerza vertical que la chapa opone como resistencia a la deformación. En la configuración geométrica correspondiente al punto de fuerza se calcula el par nominal a partir de la fuerza nominal. Las fuerzas del mecanismo se calculan de la siguiente forma:

- A par nominal entre la posición de inicio de la carrera de trabajo y el punto de fuerza.
- A fuerza nominal entre el punto de fuerza y el punto muerto inferior.
- No se consideran cargas fuera de la carrera de trabajo.

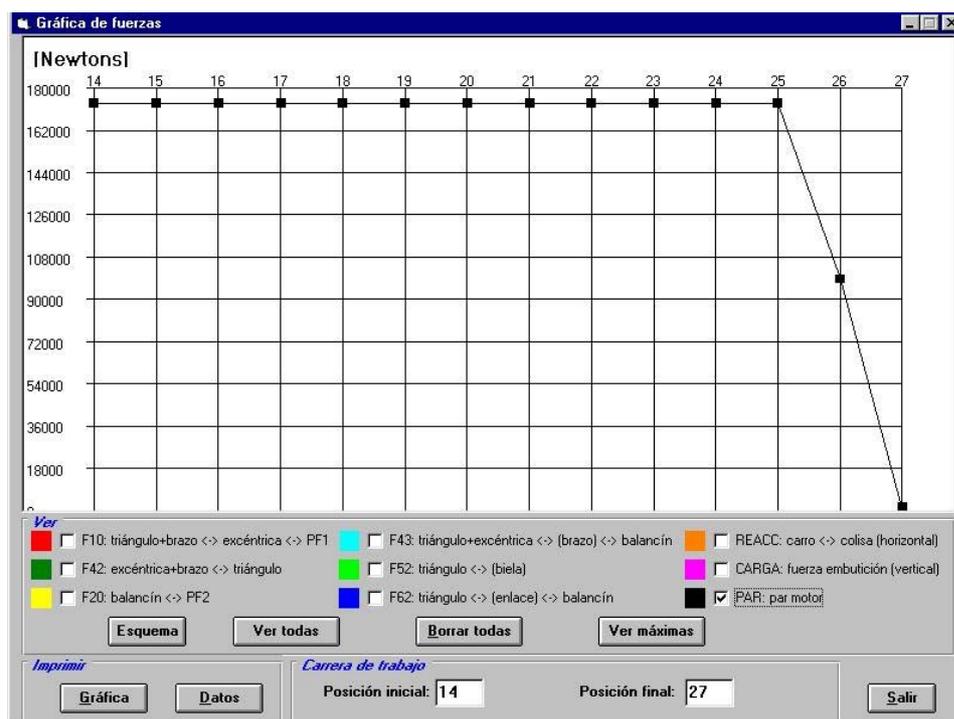


Figura 6.35: Par motor.

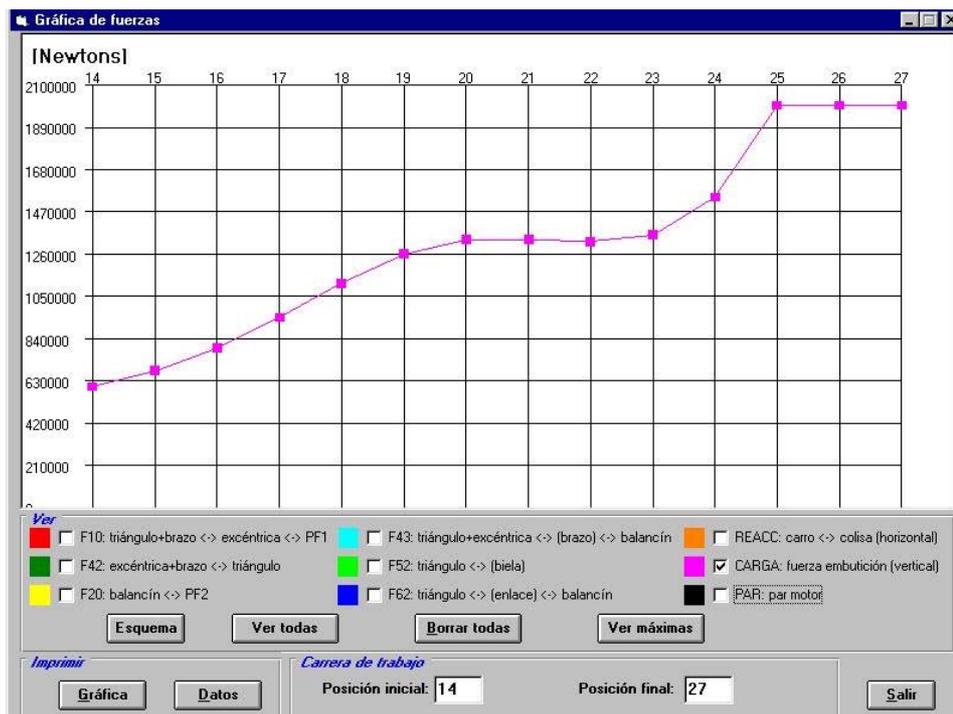


Figura 6.36: Fuerza de embutición.

### 6.3.1. Mecanismo de rodillera modificada.

El mecanismo de rodillera modificada es una variante del mecanismo de rodillera, y es muy utilizado en la actualidad como mecanismo de guiado de las prensas mecánicas destinadas a operaciones de estampación y embutición.

El mecanismo de rodillera modificada se modeliza como un mecanismo de 7 nudos y 7 barras, de acuerdo a la figura 6.37. Los nudos 1 y 2 son puntos fijos del mecanismo. El nudo 3 constituye el grado de libertad cinemático del mecanismo, y permite modificar la excentricidad del mismo durante el proceso de síntesis.

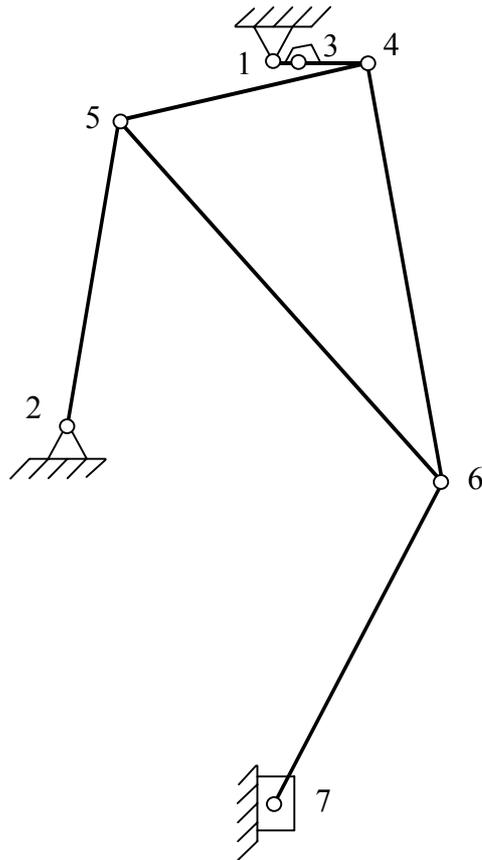


Figura 6.37: Mecanismo de rodillera modificada.

BARRA	NUDO ORIGEN	NUDO FINAL
1	1	3
2	3	4
3	2	5
4	5	6
5	4	5
6	4	6
7	6	7

Tabla 6.73: Definición de barras en el mecanismo de rodillera modificada.

La geometría del mecanismo viene determinada por 7 restricciones geométricas:

- 3 restricciones que aseguran la colinealidad entre los nudos 1, 3 y 4.
- 3 restricciones que aseguran la no inversión de triángulo entre los nudos 4, 5 y 6.
- 1 restricción de coordenada  $x$  constante del nudo 7.

Se definen asimismo 5 eslabones para el planteamiento de la síntesis dinámica:

ORDINAL	ESLABÓN	NUDOS
1	Excéntrica	1-4
2	Triángulo	4-5-6
3	Balancín	2-5
4	Biela	6-7
5	Carro	7

Tabla 6.74: Definición de eslabones en el mecanismo de rodillera modificada.

### 6.3.1.1. Síntesis de generación de función con restricción dinámica.

Se plantea una síntesis de generación de función con el fin de conseguir un óptimo desplazamiento del carro, correspondiente a la coordenada  $y$  del nudo 7, a partir del giro del eslabón de entrada 2, a la vez que se tratará de limitar la reacción en el apoyo del balancín. El desplazamiento del carro debe asegurar unas óptimas condiciones sobre la deformación de la chapa sin sacrificio de la cadencia de trabajo. Se parte de un mecanismo muy aproximado al mecanismo solución de la generación de función, y se trata de reducir el módulo de la reacción en el apoyo del balancín.

El vector de diseño inicial es:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	-0.543	-0.626

3	0.050	0.000
4	0.120	0.000
5	-0.390	-0.150
6	0.180	-0.840
7	0.000	-1.480

Tabla 6.75: Vector de diseño inicial.

Las longitudes de las barras que resultan de dicho vector inicial son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.07000
3	0.49999
4	0.89499
5	0.53160
6	0.84214
7	0.66483

Tabla 6.76: Longitudes iniciales de barra.

Para resolver el problema cinemático es necesario definir los grados de libertad cinemáticos del mecanismo. Se supondrá que el eslabón de entrada 1 gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante de valor 20 r.p.m. (2.094 rad/s)

ESLABÓN	VELOCIDAD ANGULAR
1	2.094 rad/s

Tabla 6.77: Grados de libertad cinemáticos.

Para resolver el problema dinámico es necesario definir los grados de libertad dinámicos del mecanismo. Se supondrá que la fuerza nominal en el punto de fuerza es de  $2 \cdot 10^6$  N. El punto de fuerza se supondrá 16 mm por encima del punto muerto inferior.

PUNTO DE FUERZA	FUERZA NOMINAL
0.016 m	$2 \cdot 10^6$ N

Tabla 6.78: Grados de libertad dinámicos.

Por último, también será necesario fijar las densidades de los eslabones para resolver el problema dinámico:

ESLABÓN	DENSIDAD
1	150 kg/m
2	$1500 \text{ kg/m}^2$
3	100 kg/m
4	150 kg/m

Tabla 6.79: Densidad de los eslabones.

En lo que respecta al peso del carro, éste no se considera nunca en el diseño de las prensas de mecánica articulada, puesto que durante la bajada del carro el peso de éste actúa contra la fuerza de embutición, y durante la subida del carro es anulado mediante unos mecanismos hidráulicos de compensación.

Una vez efectuado el análisis cinemático y dinámico se obtienen la coordenada y del nudo 7 del mecanismo de partida en las sucesivas posiciones de análisis. Se considerarán aquí un total de 36 posiciones de análisis, separadas cada una de ellas por un giro de  $10^\circ$  en el eslabón de entrada.

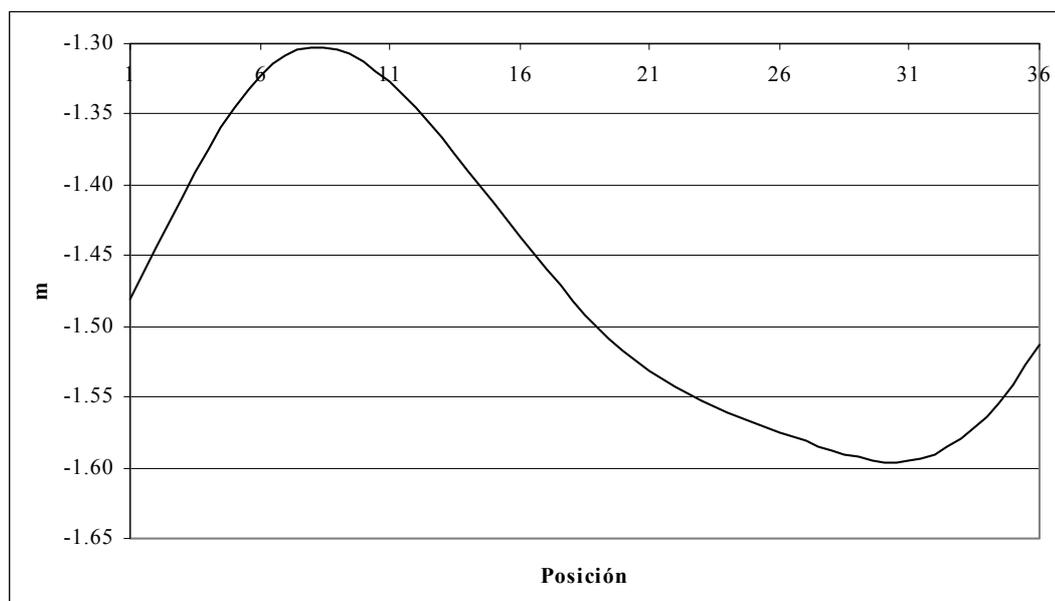


Figura 6.38: Coordenada y del carro del mecanismo de partida.

Se obtiene también el módulo de la reacción en el apoyo del balancín:

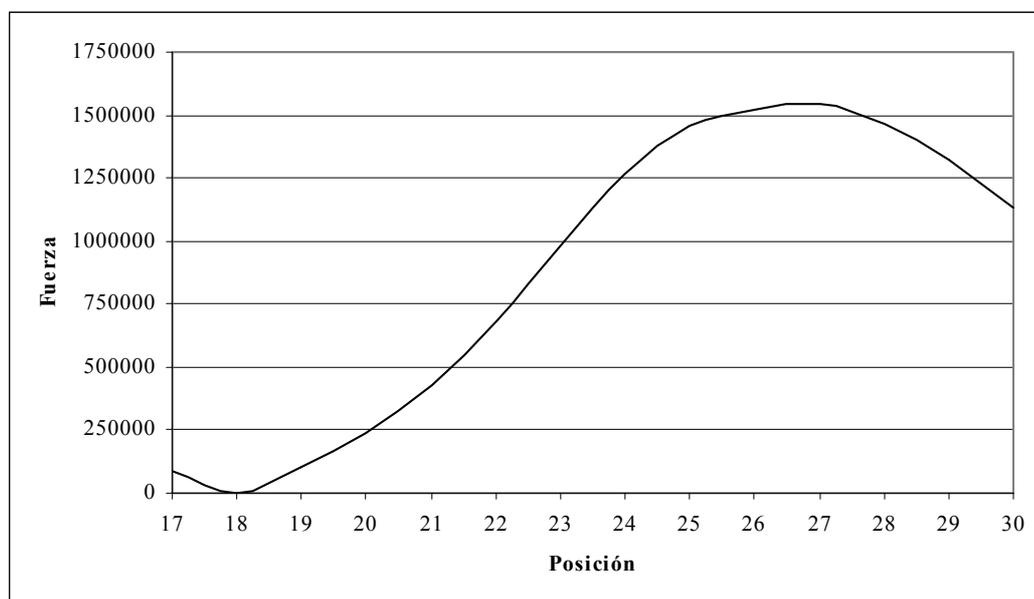


Figura 6.39: Reacción en el apoyo del balancín del mecanismo de partida.

Se especifican un total de 13 posiciones de síntesis, que vienen definidas por el giro del eslabón de entrada, expresado como el ángulo que el eslabón forma con el eje de abscisas, que constituye el grado de libertad cinemático del mecanismo.

POSICIÓN	GIRO
1	0°
2	20°
3	40°
4	70°
5	110°
6	170°
7	200°
8	220°
9	260°
10	280°
11	290°
12	300°
13	330°

Tabla 6.80: Posiciones de síntesis.

Estas posiciones de síntesis se introducen en forma de restricción directa sobre las variables de diseño correspondientes a las coordenadas  $x$  e  $y$  del nudo 3, cerrando la banda de la restricción al valor exacto de las coordenadas del nudo 3, que son conocidas dado que la barra 1 es de longitud fija.

POSICIÓN	NUDO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	3	0.05000	0.05000	0.00000	0.00000
2	3	0.04698	0.04698	0.00868	0.00868
3	3	0.03830	0.03830	0.03214	0.03214
4	3	0.01710	0.01710	0.04698	0.04698

5	3	-0.01710	-0.01710	0.04698	0.04698
6	3	-0.04924	-0.04924	0.00868	0.00868
7	3	-0.04698	-0.04698	-0.01710	-0.01710
8	3	-0.03830	-0.03830	-0.03214	-0.03214
9	3	-0.00868	-0.00868	-0.04924	-0.04924
10	3	0.00868	0.00868	-0.04924	-0.04924
11	3	0.01710	0.01710	-0.04698	-0.04698
12	3	0.02500	0.02500	-0.04330	-0.04330
13	3	0.04330	0.04330	-0.02500	-0.02500

Tabla 6.81: Definición de las posiciones de síntesis.

En las posiciones de síntesis definidas se definen las restricciones de posición deseadas como restricciones directas sobre las variables de diseño correspondientes a la coordenada  $y$  del nudo 7:

POSICIÓN	NUDO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	7	0.00000	0.00000	-1.50765	-1.45765
2	7	0.00000	0.00000	-1.42976	-1.37976
3	7	0.00000	0.00000	-1.36881	-1.31881
4	7	0.00000	0.00000	-1.32592	-1.27592
5	7	0.00000	0.00000	-1.36542	-1.31542
6	7	0.00000	0.00000	-1.50877	-1.45877
7	7	0.00000	0.00000	-1.55280	-1.50280
8	7	0.00000	0.00000	-1.57424	-1.52424
9	7	0.00000	0.00000	-1.60585	-1.55585

10	7	0.00000	0.00000	-1,61605	-1.56601
11	7	0.00000	0.00000	-1.61826	-1.56826
12	7	0.00000	0.00000	-1.61939	-1.56939
13	7	0.00000	0.00000	-1.58553	-1.53553

Tabla 6.82: Restricciones de posición.

Se establecen también las bandas de restricción sobre las coordenadas de los puntos fijos:

PUNTO FIJO	LÍMITE INFERIOR X	LÍMITE SUPERIOR X	LÍMITE INFERIOR Y	LÍMITE SUPERIOR Y
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2	-0.600	-0.500	-0.700	-0.600

Tabla 6.83: Restricciones de movilidad de los puntos fijos.

Se establecen las restricciones sobre la longitud de las barras. En el caso del mecanismo de rodillera modificada se limita el valor de la excentricidad y se permite que el resto de barras tome la longitud necesaria.

BARRA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
1	0.050	0.050
2	0.060	0.085
3	0.000	20.000
4	0.000	20.000
5	0.000	20.000
6	0.000	20.000
7	0.000	20.000

Tabla 6.84: Restricciones de longitud de barras.

Por último, se establecen las restricciones dinámicas que se quieren imponer. En este caso se desea limitar el valor del módulo de la reacción en el balancín en la novena posición de síntesis entre los valores de  $10^6$  y  $1.3 \cdot 10^6$  N. El módulo de la reacción en el balancín que se había obtenido en el análisis dinámico del mecanismo de partida en la novena posición de síntesis era de  $1.545 \cdot 10^6$  N

PUNTO DE SÍNTESIS	FUERZA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
9	$ \mathbf{F}_{23} $	$10^6$ N	$1.3 \cdot 10^6$ N

Tabla 6.85: Restricciones dinámicas.

Una vez ejecutadas las etapas de síntesis local y de síntesis global con las restricciones definidas, la función objetivo alcanza un valor final de  $3.32 \cdot 10^{-7}$  tras efectuar un total de 83 iteraciones.

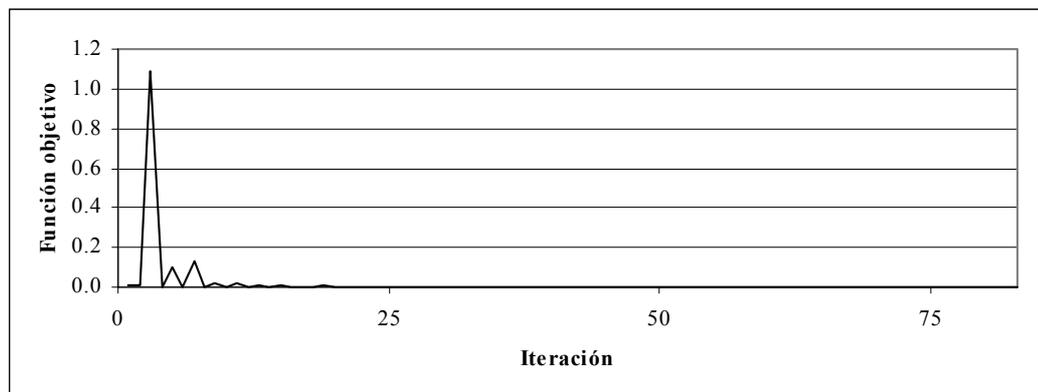


Figura 6.40: Evolución de la función objetivo.

El mecanismo solución está definido por las coordenadas de sus nudos:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	-0.544	-0.627
3	0.050	0.000

4	0.110	0.000
5	-0.406	-0.150
6	0.188	-0.831
7	0.000	-1.482

Tabla 6.86: Vector de diseño del mecanismo solución.

Las longitudes de las barras resultantes son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.05999
3	0.49641
4	0.90630
5	0.53764
6	0.83510
7	0.67722

Tabla 6.87: Longitudes de barra del mecanismo solución.

La coordenada  $y$  del carro del mecanismo solución en las sucesivas posiciones de análisis es:

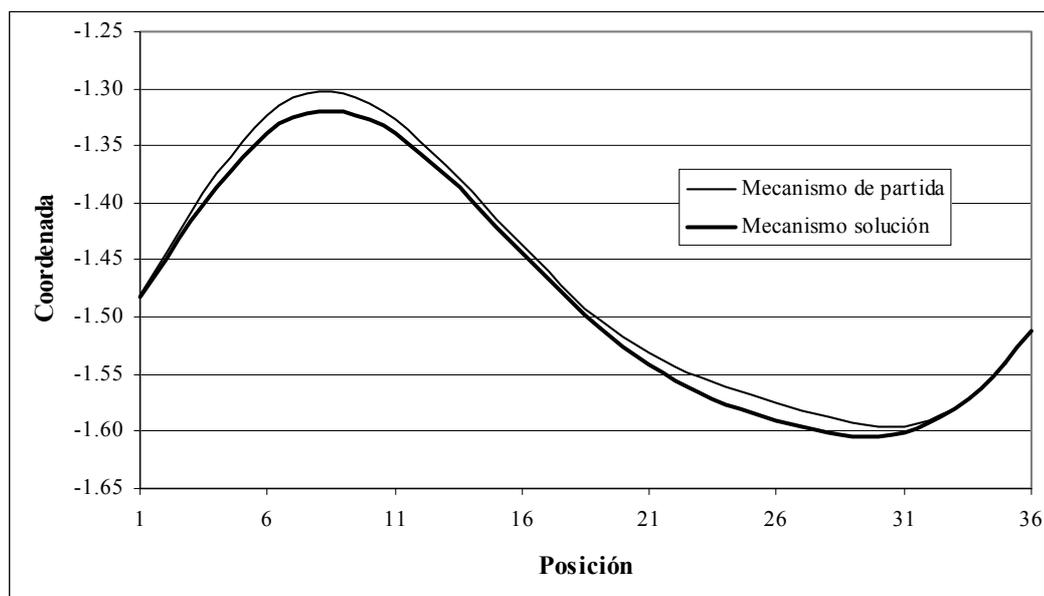


Figura 6.41: Coordenada y del carro del mecanismo solución.

El módulo de la reacción en el apoyo del balancín del mecanismo solución es:

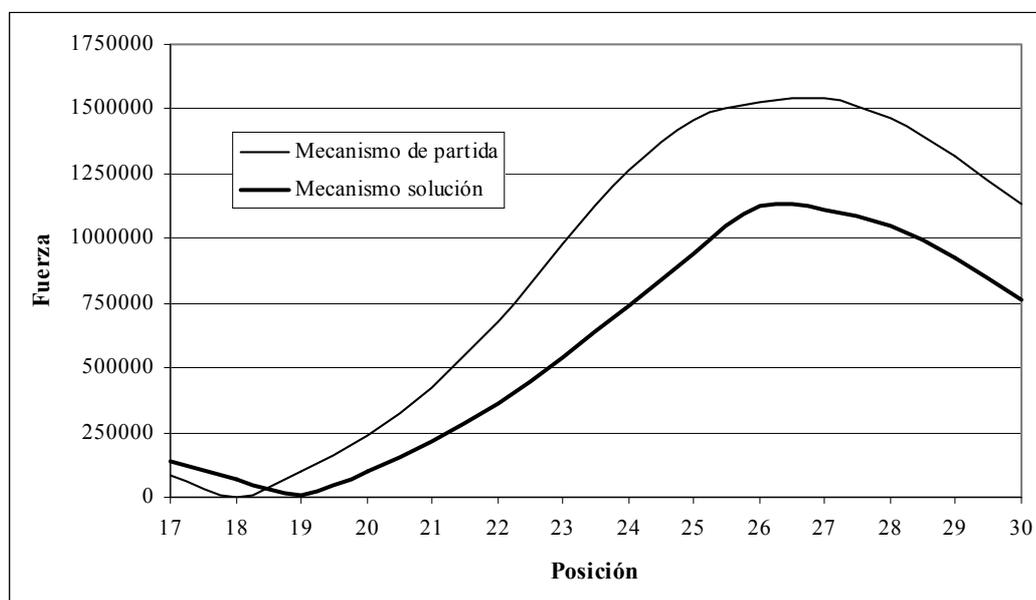


Figura 6.42: Reacción en el balancín del mecanismo solución.

En este caso la limitación impuesta en la longitud de la excéntrica impide el cumplimiento estricto de la totalidad de las restricciones de posición. La restricción dinámica, sin embargo, se cumple sin problemas, pese a que el algoritmo no converge

a una solución exacta. Aunque no se ha considerado en el planteamiento del problema, se puede comprobar que la reducción de la reacción en el apoyo del balancín origina una importante pérdida en el escalón de velocidades del carro en la zona de trabajo, con lo que el mecanismo solución perdería buena parte de sus virtudes cinemáticas.

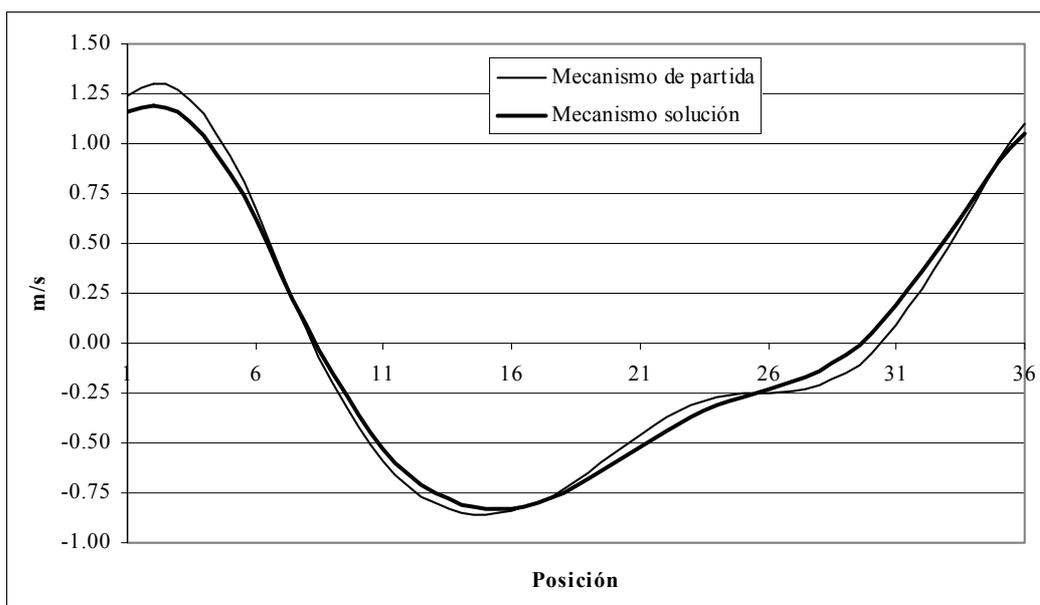


Figura 6.43: Velocidad del carro.

### 6.3.1.2. Síntesis de generación de función con restricciones dinámicas.

Se plantea ahora una síntesis de generación de función con el fin de conseguir un óptimo desplazamiento del carro, correspondiente a la coordenada  $y$  del nudo 7, a partir del giro del eslabón de entrada 2, a la vez que se tratará de limitar simultáneamente la reacción en el balancín y la componente horizontal de la reacción que se ejerce sobre el carro. Se parte de un mecanismo muy aproximado al mecanismo solución de la generación de función, y se trata de reducir el módulo de las reacciones descritas.

El vector de diseño inicial es:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	-0.543	-0.626
3	0.050	0.000
4	0.120	0.000
5	-0.390	-0.150
6	0.180	-0.840
7	0.000	-1.480

Tabla 6.88: Vector de diseño inicial.

Las longitudes de las barras que resultan de dicho vector inicial son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.07000
3	0.49999
4	0.89499
5	0.53160
6	0.84214
7	0.66483

Tabla 6.89: Longitudes iniciales de barra.

Para resolver el problema cinemático es necesario definir los grados de libertad cinemáticos del mecanismo. Se supondrá que el eslabón de entrada 1 gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante de valor 20 r.p.m. (2.094 rad/s)

ESLABÓN	VELOCIDAD ANGULAR
1	2.094 rad/s

Tabla 6.90: Grados de libertad cinemáticos.

Para resolver el problema dinámico es necesario definir los grados de libertad dinámicos del mecanismo. Se supondrá que la fuerza nominal en el punto de fuerza es de  $2 \cdot 10^6$  N. El punto de fuerza se supondrá 16 mm por encima del punto muerto inferior.

PUNTO DE FUERZA	FUERZA NOMINAL
0.016 m	$2 \cdot 10^6$ N

Tabla 6.91: Grados de libertad dinámicos.

Por último, también será necesario fijar las densidades de los eslabones para resolver el problema dinámico:

ESLABÓN	DENSIDAD
1	150 kg/m
2	1500 kg/m <sup>2</sup>
3	100 kg/m
4	150 kg/m

Tabla 6.92: Densidad de los eslabones.

Una vez efectuado el análisis cinemático y dinámico se obtienen la coordenada y del nudo 7 del mecanismo de partida en las sucesivas posiciones de análisis. Se considerarán aquí un total de 36 posiciones de análisis, separadas cada una de ellas por un giro de  $10^\circ$  en el eslabón de entrada.

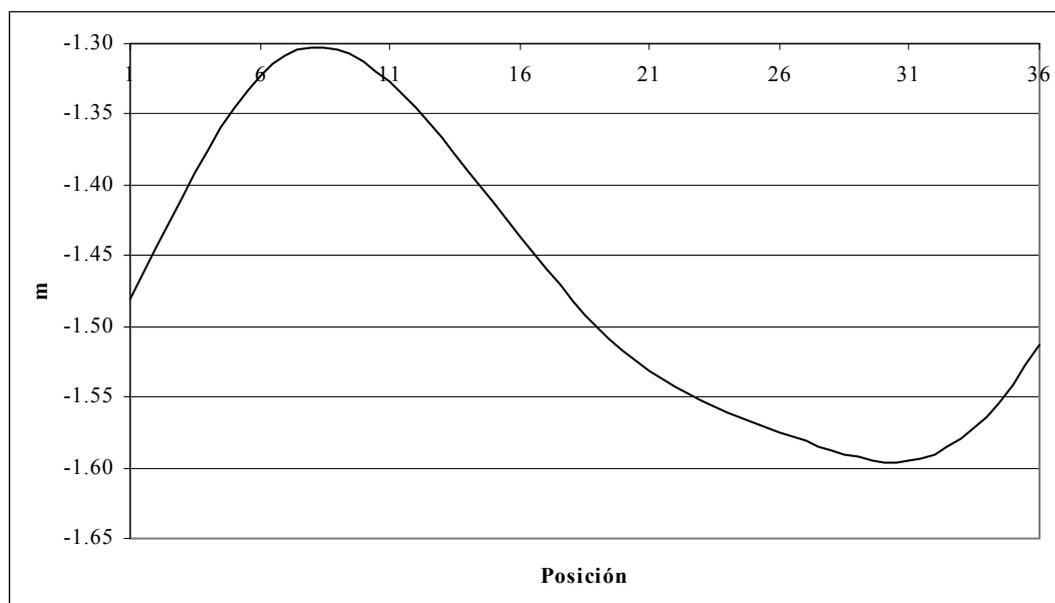


Figura 6.44: Coordenada y del carro del mecanismo de partida.

Se obtiene también el módulo de la reacción en el apoyo del balancín:

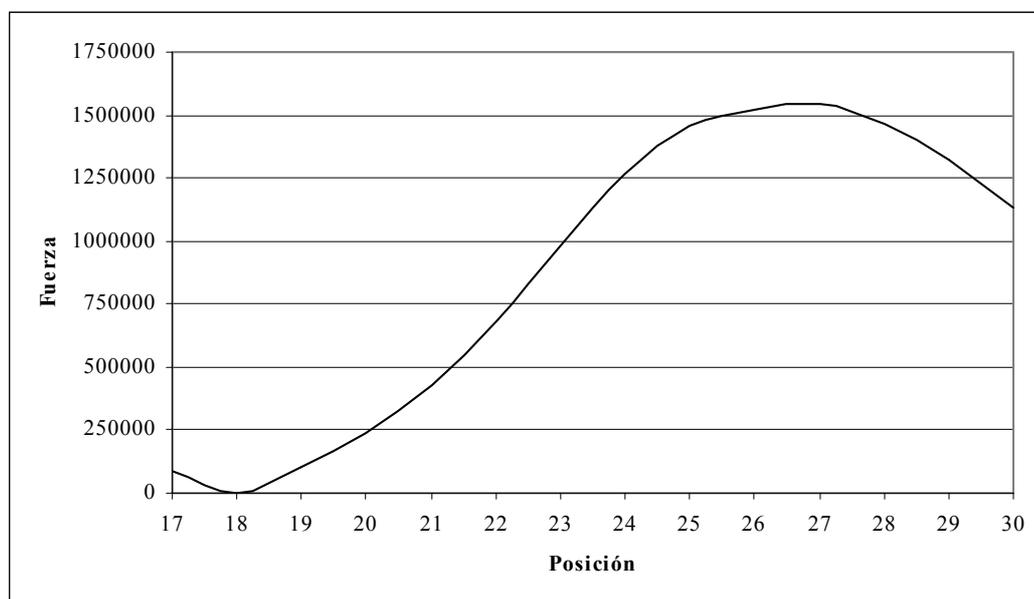


Figura 6.45: Reacción en el apoyo del balancín del mecanismo de partida.

Se obtiene también el módulo de la reacción horizontal en el carro:

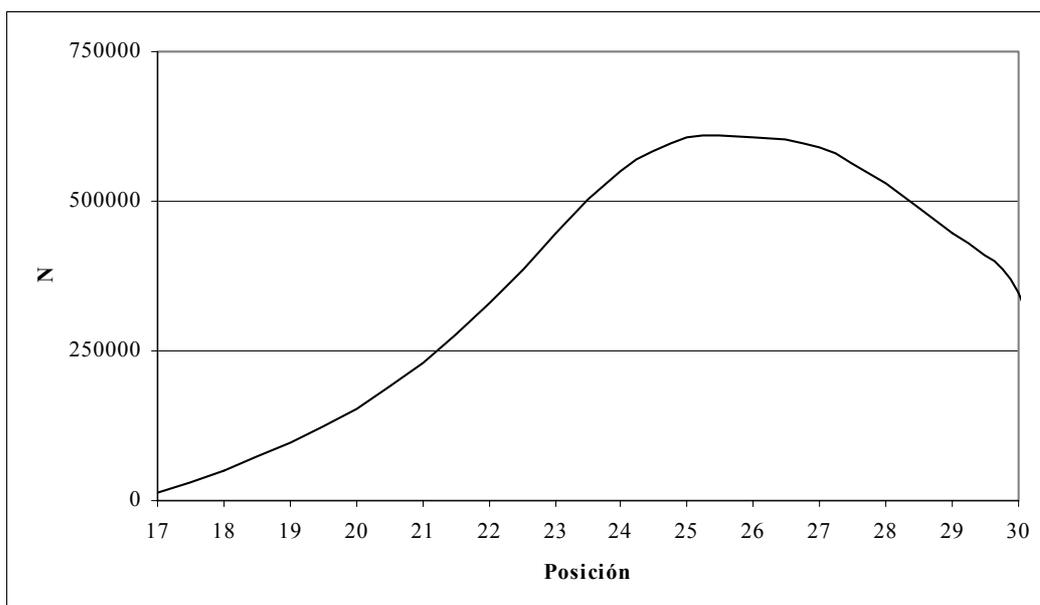


Figura 6.46: Reacción horizontal en el carro del mecanismo de partida.

Se especifican un total de 13 posiciones de síntesis, que vienen definidas por el giro del eslabón de entrada, expresado como el ángulo que el eslabón forma con el eje de abscisas, que constituye el grado de libertad cinemático del mecanismo.

POSICIÓN	GIRO
1	0°
2	20°
3	40°
4	70°
5	110°
6	170°
7	200°
8	220°
9	260°
10	280°

11	290°
12	300°
13	330°

Tabla 6.93: Posiciones de síntesis.

Estas posiciones de síntesis se introducen en forma de restricción directa sobre las variables de diseño correspondientes a las coordenadas  $x$  e  $y$  del nudo 3, cerrando la banda de la restricción al valor exacto de las coordenadas del nudo 3, que son conocidas dado que la barra 1 es de longitud fija.

POSICIÓN	NUDO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	3	0.05000	0.05000	0.00000	0.00000
2	3	0.04698	0.04698	0.00868	0.00868
3	3	0.03830	0.03830	0.03214	0.03214
4	3	0.01710	0.01710	0.04698	0.04698
5	3	-0.01710	-0.01710	0.04698	0.04698
6	3	-0.04924	-0.04924	0.00868	0.00868
7	3	-0.04698	-0.04698	-0.01710	-0.01710
8	3	-0.03830	-0.03830	-0.03214	-0.03214
9	3	-0.00868	-0.00868	-0.04924	-0.04924
10	3	0.00868	0.00868	-0.04924	-0.04924
11	3	0.01710	0.01710	-0.04698	-0.04698
12	3	0.02500	0.02500	-0.04330	-0.04330
13	3	0.04330	0.04330	-0.02500	-0.02500

Tabla 6.94: definición de las posiciones de síntesis.

En las posiciones de síntesis definidas se definen las restricciones de posición deseadas como restricciones directas sobre las variables de diseño correspondientes a la coordenada  $y$  del nudo 7:

POSICIÓN	NUDO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	7	0.00000	0.00000	-1.50765	-1.45765
2	7	0.00000	0.00000	-1.42976	-1.37976
3	7	0.00000	0.00000	-1.36881	-1.31881
4	7	0.00000	0.00000	-1.32592	-1.27592
5	7	0.00000	0.00000	-1.36542	-1.31542
6	7	0.00000	0.00000	-1.50877	-1.45877
7	7	0.00000	0.00000	-1.55280	-1.50280
8	7	0.00000	0.00000	-1.57424	-1.52424
9	7	0.00000	0.00000	-1.60585	-1.55585
10	7	0.00000	0.00000	-1,61605	-1.56601
11	7	0.00000	0.00000	-1.61826	-1.56826
12	7	0.00000	0.00000	-1.61939	-1.56939
13	7	0.00000	0.00000	-1.58553	-1.53553

Tabla 6.95: Restricciones de posición.

Se establecen también las bandas de restricción sobre las coordenadas de los puntos fijos:

PUNTO FIJO	LÍMITE INFERIOR X	LÍMITE SUPERIOR X	LÍMITE INFERIOR Y	LÍMITE SUPERIOR Y
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2	-0.600	-0.500	-0.700	-0.600

Tabla 6.96: Restricciones de movilidad de los puntos fijos.

Se establecen las restricciones sobre la longitud de las barras. En el caso del mecanismo de rodillera modificada se limita el valor de la excentricidad y se permite que el resto de barras tome la longitud necesaria.

BARRA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
1	0.050	0.050
2	0.060	0.085
3	0.000	20.000
4	0.000	20.000
5	0.000	20.000
6	0.000	20.000
7	0.000	20.000

Tabla 6.97: Restricciones de longitud de barras.

Por último, se establecen las restricciones dinámicas que se quieren imponer. En este caso se desea limitar simultáneamente los valores del módulo de la reacción en el balancín y de la reacción horizontal sobre el carro en la novena posición de síntesis. El módulo de la reacción en el balancín que se había obtenido en el análisis dinámico del mecanismo de partida en la novena posición de síntesis era de  $1.545 \cdot 10^6$  N. El módulo de la reacción horizontal en el carro que se había obtenido en el análisis dinámico del mecanismo de partida en la novena posición de síntesis era de  $5.9 \cdot 10^6$  N.

PUNTO DE SÍNTESIS	FUERZA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
9	$ \mathbf{F}_{23} $	$1.2 \cdot 10^6$	$1.4 \cdot 10^6$
9	$F_{75}^x$	$4 \cdot 10^6$	$5.5 \cdot 10^6$

Tabla 6.98: Restricciones dinámicas.

Una vez ejecutadas las etapas de síntesis local y de síntesis global con las restricciones definidas, la función objetivo alcanza un valor final de  $3.98 \cdot 10^{-13}$  tras efectuar un total de 98 iteraciones.

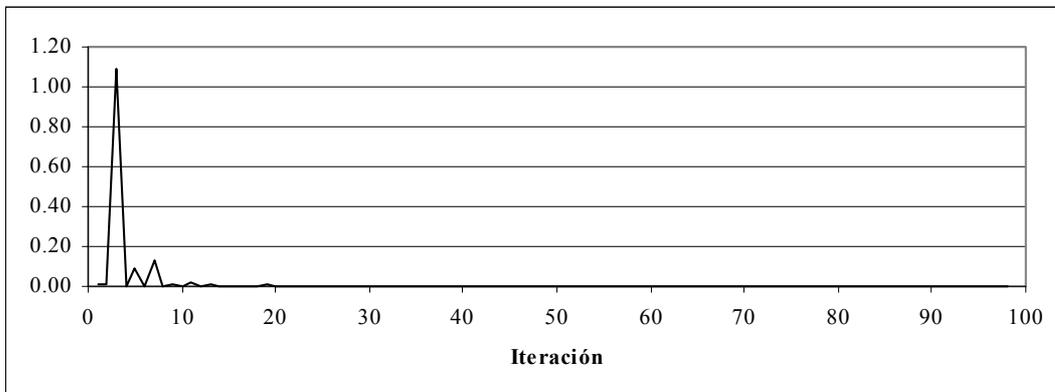


Figura 6.47: Evolución de la función objetivo.

El mecanismo solución está definido por las coordenadas de sus nudos:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	-0.543	-0.626
3	0.050	0.000
4	0.114	0.000
5	-0.395	-0.150
6	0.185	-0.836
7	0.000	-1.486

Tabla 6.99: Vector de diseño del mecanismo solución.

Las longitudes de las barras resultantes son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.06411
3	0.49885
4	0.89862
5	0.53113
6	0.83930
7	0.67594

Tabla 6.100: Longitudes de barra del mecanismo solución.

La coordenada  $y$  del carro del mecanismo solución en las sucesivas posiciones de análisis es:

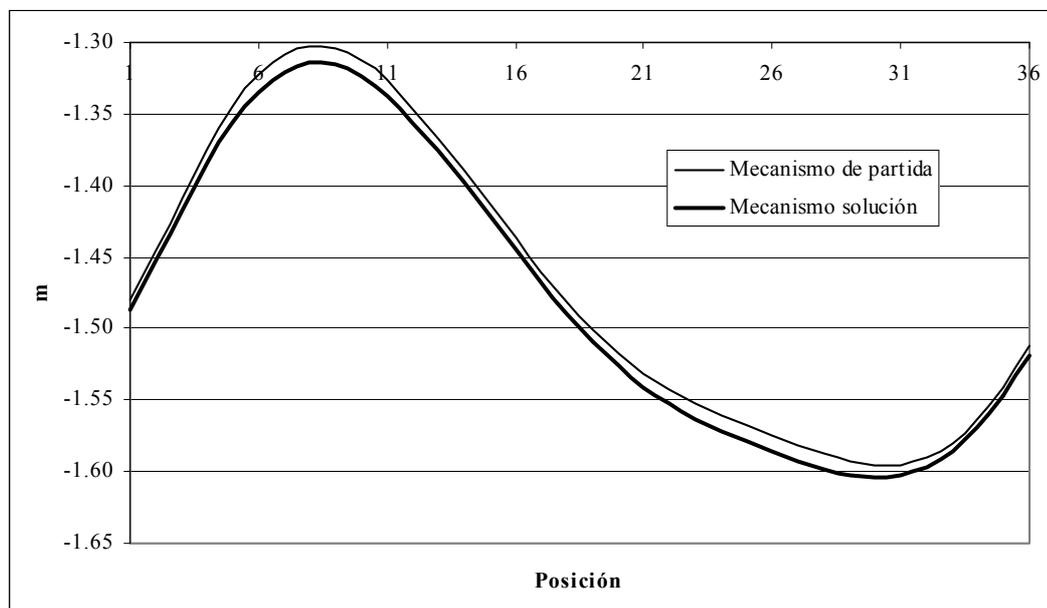


Figura 6.48: Coordenada  $y$  del carro del mecanismo solución.

El módulo de la reacción en el apoyo del balancín del mecanismo solución es:

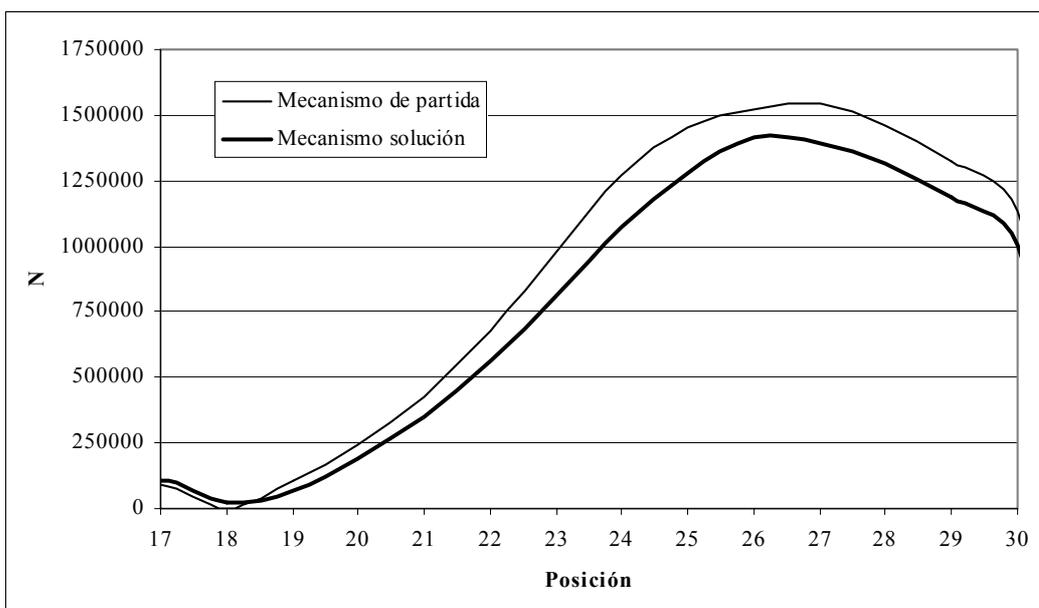


Figura 6.49: Reacción en el balancín del mecanismo solución.

La reacción horizontal en el carro del mecanismo solución es:

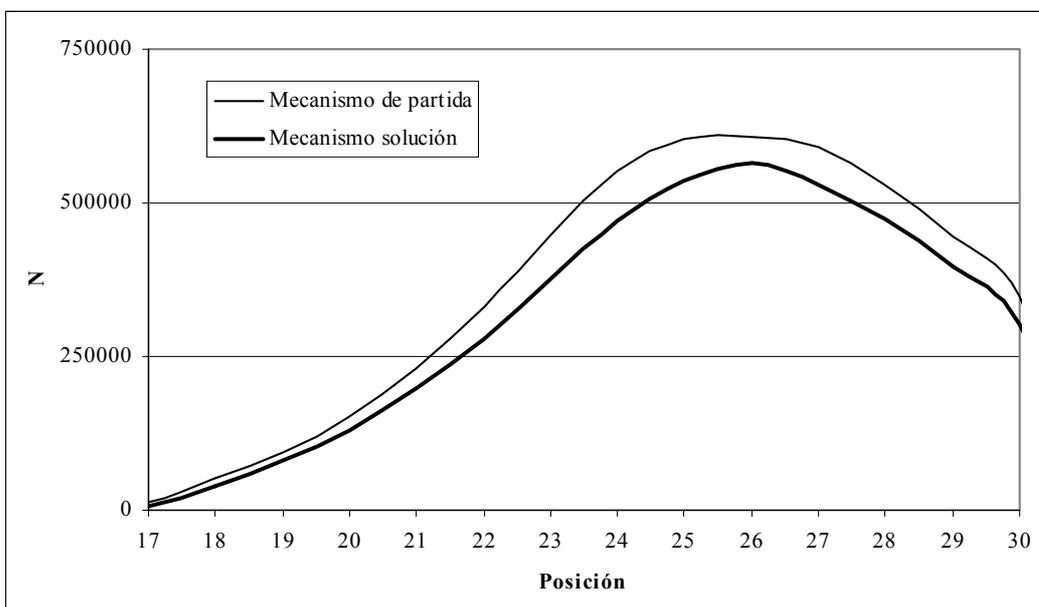


Figura 6.50: Reacción horizontal en el carro del mecanismo solución.

El algoritmo converge en este caso a una solución capaz de cumplir las restricciones de posición y dinámicas impuestas, dado que las exigencias dinámicas son menos exigentes que las de 6.3.1.1. Dado que la disminución de los esfuerzos es pequeña,

apenas se produce pérdida en el comportamiento cinemático del mecanismo, manteniendo el escalón de velocidad constante en la zona de trabajo.

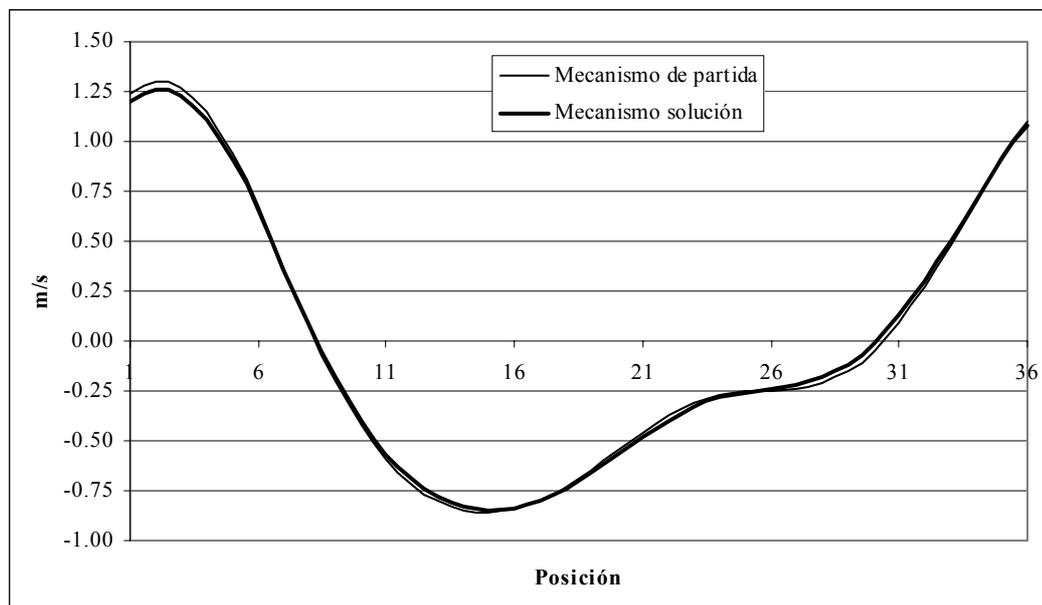


Figura 6.51: Velocidad del carro.

### 6.3.1.3. Síntesis de generación de función con restricciones dinámicas.

Se plantea una síntesis de generación de función con el fin de conseguir un óptimo desplazamiento del carro, correspondiente a la coordenada  $y$  del nudo 7, a partir del giro del eslabón de entrada 2, a la vez que se tratará de limitar la reacción en el balancín. El desplazamiento del carro debe asegurar unas óptimas condiciones sobre la deformación de la chapa sin sacrificio de la cadencia de trabajo. Se parte de un mecanismo muy aproximado al mecanismo solución de la generación de función, y se trata de reducir el módulo de la reacción en el apoyo del balancín.

El vector de diseño inicial es:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	-0.543	-0.626
3	0.050	0.000

4	0.120	0.000
5	-0.390	-0.150
6	0.180	-0.840
7	0.000	-1.480

Tabla 6.101: Vector de diseño inicial.

Las longitudes de las barras que resultan de dicho vector inicial son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.07000
3	0.49999
4	0.89499
5	0.53160
6	0.84214
7	0.66483

Tabla 6.102: Longitudes iniciales de barra.

Para resolver el problema cinemático es necesario definir los grados de libertad cinemáticos del mecanismo. Se supondrá que el eslabón de entrada 1 gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante de valor 20 r.p.m. (2.094 rad/s)

ESLABÓN	VELOCIDAD ANGULAR
1	2.094 rad/s

Tabla 6.103: Grados de libertad cinemáticos.

Para resolver el problema dinámico es necesario definir los grados de libertad dinámicos del mecanismo. Se supondrá que la fuerza nominal en el punto de fuerza es de  $2 \cdot 10^6$  N. El punto de fuerza se supondrá 16 mm por encima del punto muerto inferior.

PUNTO DE FUERZA	FUERZA NOMINAL
0.016 m	$2 \cdot 10^6$ N

Tabla 6.104: Grados de libertad dinámicos.

Por último, también será necesario fijar las densidades de los eslabones para resolver el problema dinámico:

ESLABÓN	DENSIDAD
1	150 kg/m
2	$1500 \text{ kg/m}^2$
3	100 kg/m
4	150 kg/m

Tabla 6.105: Densidad de los eslabones.

En lo que respecta al peso del carro, éste no se considera nunca en el diseño de las prensas de mecánica articulada, puesto que durante la bajada del carro el peso de éste actúa contra la fuerza de embutición, y durante la subida del carro es anulado mediante unos compensadores hidráulicos.

Una vez efectuado el análisis cinemático y dinámico se obtienen la coordenada y del nudo 7 del mecanismo de partida en las sucesivas posiciones de análisis. Se considerarán aquí un total de 36 posiciones de análisis, separadas cada una de ellas por un giro de  $10^\circ$  en el eslabón de entrada.

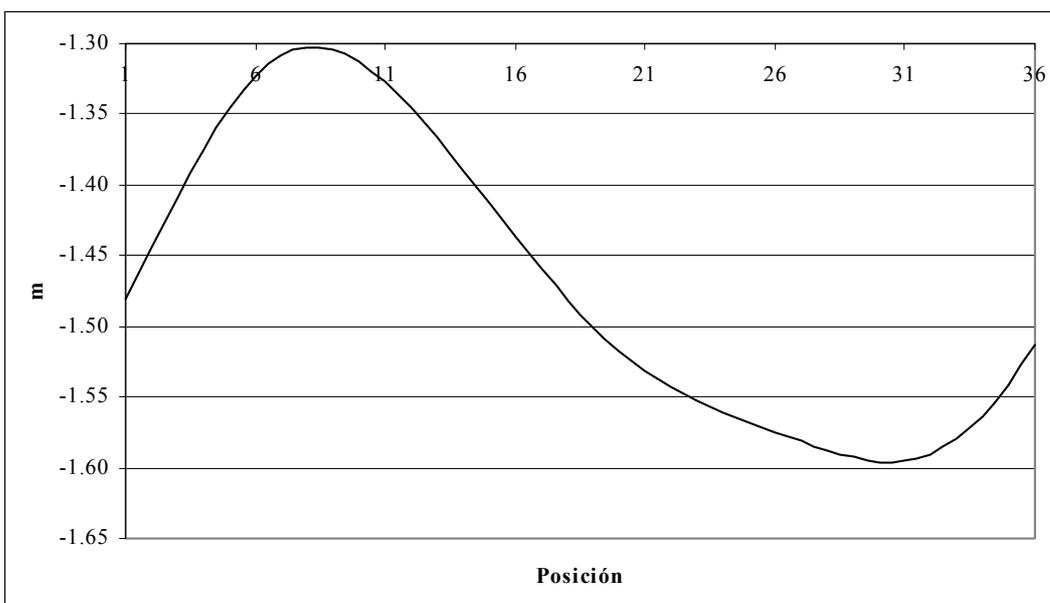


Figura 6.52: Coordenada y del carro del mecanismo de partida.

Se obtiene también el módulo de la reacción en el apoyo del balancín:

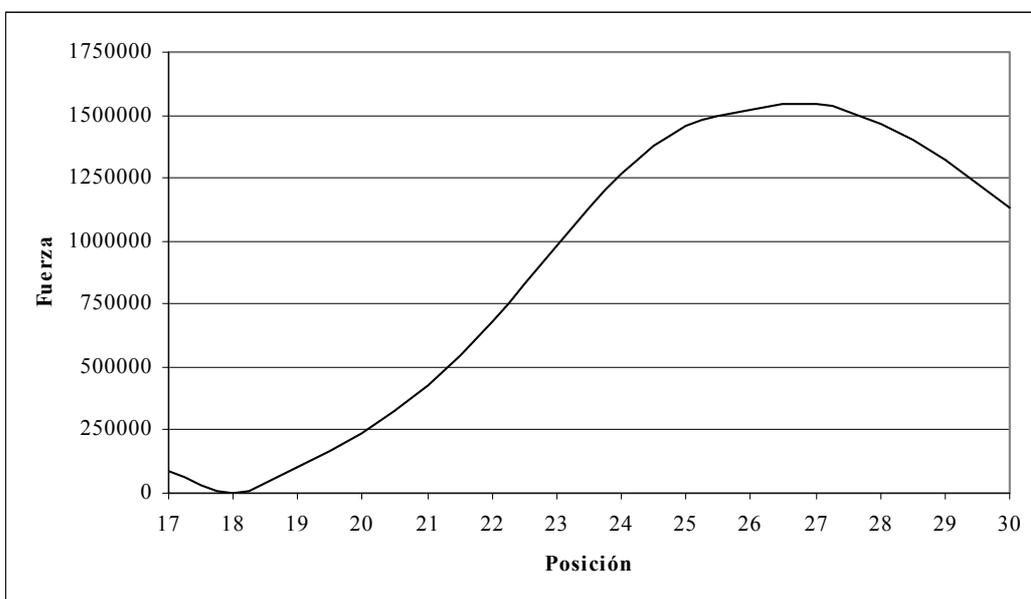


Figura 6.53: Reacción en el apoyo del balancín del mecanismo de partida.

Se especifican un total de 13 posiciones de síntesis, que vienen definidas por el giro del eslabón de entrada, expresado como el ángulo que el eslabón forma con el eje de abscisas, que constituye el grado de libertad cinemático del mecanismo.

POSICIÓN	GIRO
1	0°
2	20°
3	40°
4	70°
5	110°
6	170°
7	200°
8	220°
9	260°
10	280°
11	290°
12	300°
13	330°

Tabla 6.106: Posiciones de síntesis.

Estas posiciones de síntesis se introducen en forma de restricción directa sobre las variables de diseño correspondientes a las coordenadas  $x$  e  $y$  del nudo 3, cerrando la banda de la restricción al valor exacto de las coordenadas del nudo 3, que son conocidas dado que la barra 1 es de longitud fija.

POSICIÓN	NUDO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	3	0.05000	0.05000	0.00000	0.00000
2	3	0.04698	0.04698	0.00868	0.00868
3	3	0.03830	0.03830	0.03214	0.03214

4	3	0.01710	0.01710	0.04698	0.04698
5	3	-0.01710	-0.01710	0.04698	0.04698
6	3	-0.04924	-0.04924	0.00868	0.00868
7	3	-0.04698	-0.04698	-0.01710	-0.01710
8	3	-0.03830	-0.03830	-0.03214	-0.03214
9	3	-0.00868	-0.00868	-0.04924	-0.04924
10	3	0.00868	0.00868	-0.04924	-0.04924
11	3	0.01710	0.01710	-0.04698	-0.04698
12	3	0.02500	0.02500	-0.04330	-0.04330
13	3	0.04330	0.04330	-0.02500	-0.02500

Tabla 6.107: Posiciones de síntesis.

En las posiciones de síntesis definidas se definen las restricciones de posición deseadas como restricciones directas sobre las variables de diseño correspondientes a la coordenada  $y$  del nudo 7. Se plantea una importante bajada del punto muerto inferior con el fin de alargar la carrera de trabajo.

POSICIÓN	NUDO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	7	0.00000	0.00000	-1.50000	-1.45000
2	7	0.00000	0.00000	-1.42500	-1.37500
3	7	0.00000	0.00000	-1.37500	-1.32500
4	7	0.00000	0.00000	-1.28000	-1.23000
5	7	0.00000	0.00000	-1.35000	-1.30000
6	7	0.00000	0.00000	-1.60000	-1.53000
7	7	0.00000	0.00000	-1.70000	-1.62000
8	7	0.00000	0.00000	-1.75000	-1.65000

9	7	0.00000	0.00000	-1.80000	-1.68000
10	7	0.00000	0.00000	-1.80000	-1.67500
11	7	0.00000	0.00000	-1.80000	-1.67500
12	7	0.00000	0.00000	-1.75000	-1.66000
13	7	0.00000	0.00000	-1.65000	-1.58000

Tabla 6.108: Restricciones de posición.

Se establecen también las bandas de restricción sobre las coordenadas de los puntos fijos:

PUNTO FIJO	LÍMITE INFERIOR X	LÍMITE SUPERIOR X	LÍMITE INFERIOR Y	LÍMITE SUPERIOR Y
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2	-0.550	-0.475	-0.665	-0.600

Tabla 6.109: Restricciones de movilidad de los puntos fijos.

Se establecen las restricciones sobre la longitud de las barras. En el caso del mecanismo de rodillera modificada se limita el valor de la excentricidad y se permite que el resto de barras tome la longitud necesaria.

BARRA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
1	0.050	0.050
2	0.060	0.085
3	0.000	20.000
4	0.000	20.000
5	0.000	20.000

6	0.000	20.000
7	0.000	20.000

Tabla 6.110: Restricciones de longitud de barras.

Por último, se establecen las restricciones dinámicas que se quieren imponer. En este caso se desea mantener la reacción en el balancín en un intervalo comprendido entre  $1.25 \cdot 10^5$  y  $6 \cdot 10^5$  N, imponiendo la restricción dinámica en los puntos de síntesis 6, 8 y 9. El máximo valor de la reacción en el balancín del análisis dinámico del mecanismo de partida tenía lugar en la novena posición de síntesis y era de  $1.545 \cdot 10^6$  N

PUNTO DE SÍNTESIS	FUERZA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
6	$ \mathbf{F}_{23} $	$1.25 \cdot 10^5$ N	$5 \cdot 10^5$ N
8	$ \mathbf{F}_{23} $	$1.25 \cdot 10^5$ N	$5 \cdot 10^5$ N
9	$ \mathbf{F}_{23} $	$1.25 \cdot 10^5$ N	$5 \cdot 10^5$ N

Tabla 6.111: Restricciones dinámicas.

Una vez ejecutadas las etapas de síntesis local y de síntesis global con las restricciones definidas, la función objetivo alcanza un valor final de  $3.22 \cdot 10^{-9}$  tras efectuar un total de 1404 iteraciones.

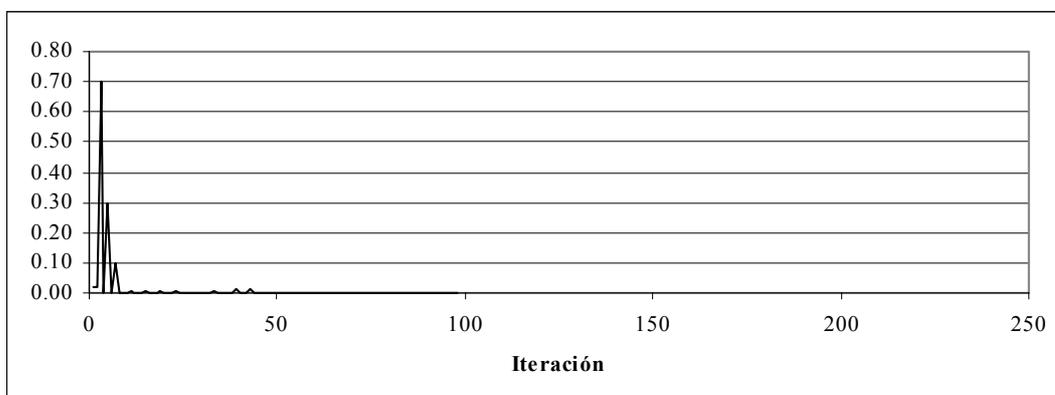


Figura 6.54: Evolución de la función objetivo.

El mecanismo solución está definido por las coordenadas de sus nudos:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	-0.480	-0.665
3	0.050	0.000
4	0.110	0.000
5	-0.408	-0.198
6	0.305	-0.839
7	0.000	-1.500

Tabla 6.112: Vector de diseño del mecanismo solución.

Las longitudes de las barras resultantes son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.06000
3	0.47224
4	0.95813
5	0.55493
6	0.86100
7	0.72803

Tabla 6.113: Longitudes de barra del mecanismo solución.

La coordenada  $y$  del carro del mecanismo solución en las sucesivas posiciones de análisis es:

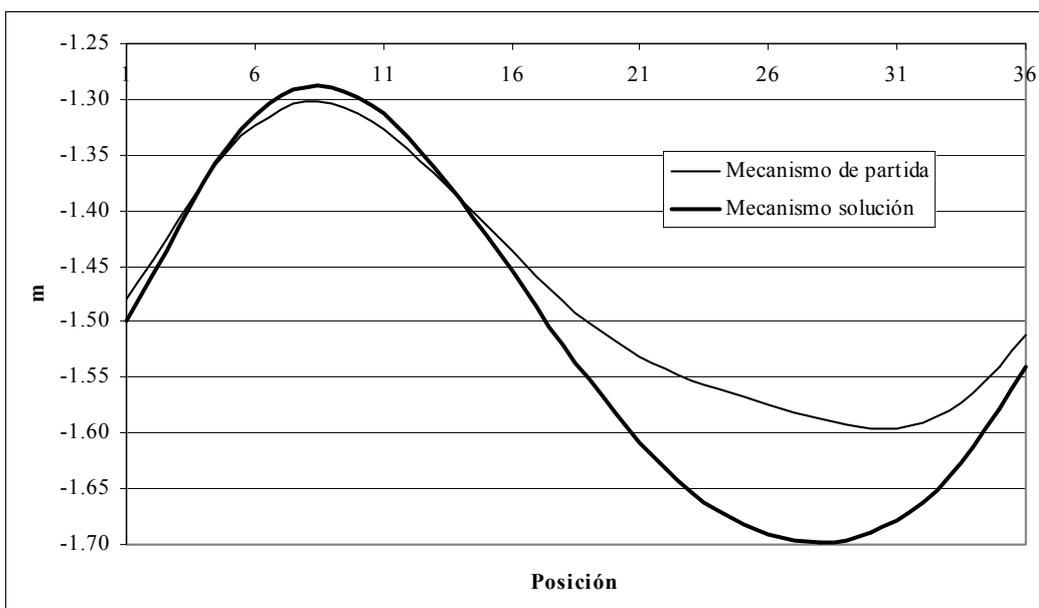


Figura 6.55: Coordenada y del carro del mecanismo solución.

El módulo de la reacción en el apoyo del balancín del mecanismo solución es:

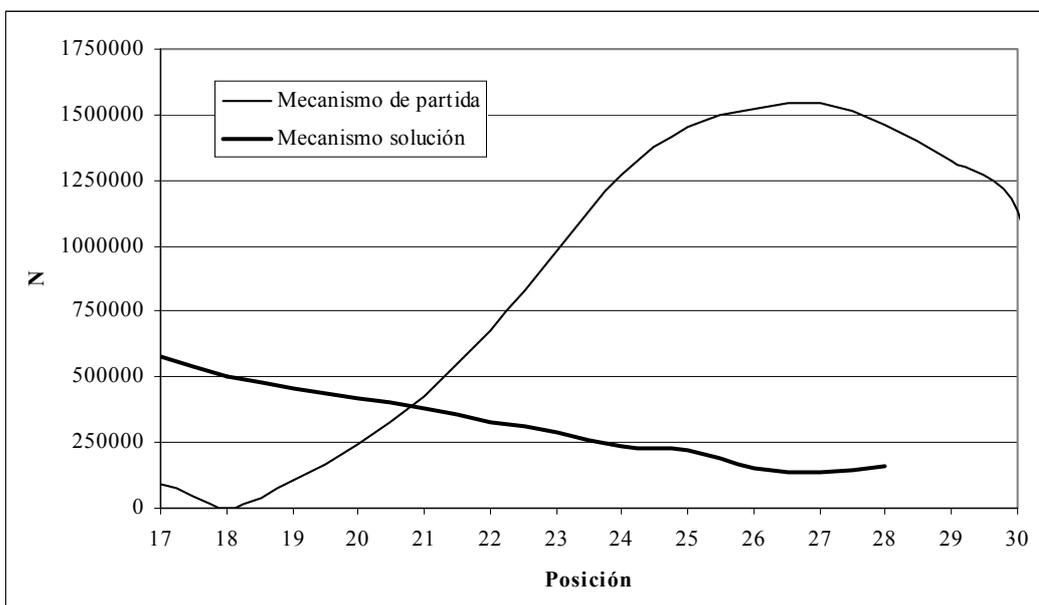


Figura 6.56: Reacción en el balancín del mecanismo solución.

En este caso el algoritmo converge a una solución que cumple las restricciones impuestas, siendo el número de iteraciones elevado dada la lejanía existente entre el mecanismo de partida y el mecanismo solución. La exigente disminución de la

reacción en el apoyo del balancín origina una fuerte pérdida de las virtudes cinemáticas del mecanismo, que pierde el escalón de velocidad del carro prácticamente constante en la zona de trabajo.

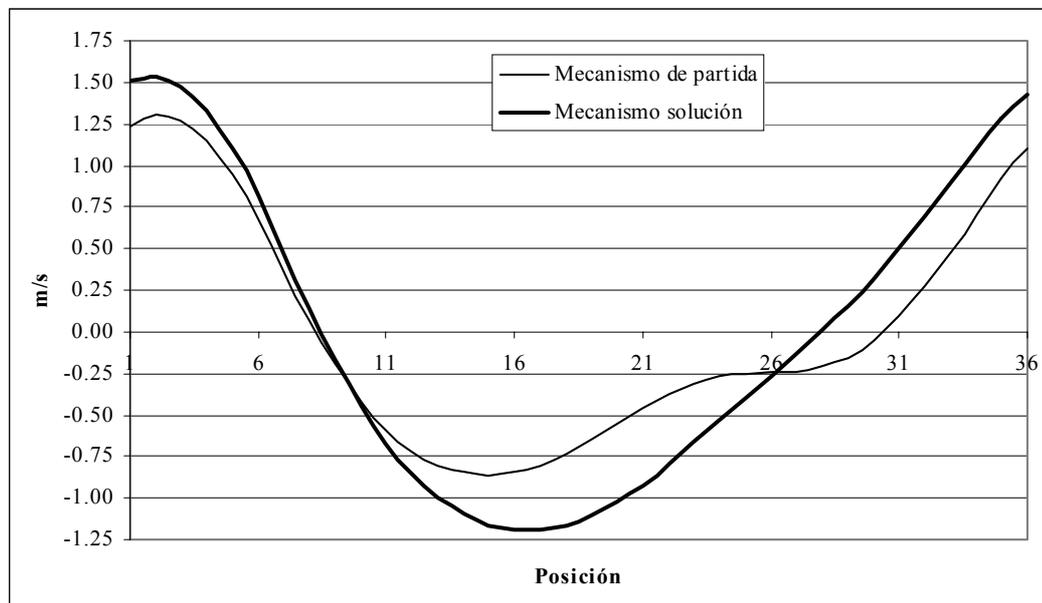


Figura 6.57: Velocidad del carro.

### 6.3.2. Mecanismo link drive.

El mecanismo link drive, también denominado mecanismo de biela articulada, presenta las mismas cualidades cinemáticas que el mecanismo de rodillera modificada, aunque su geometría y construcción son más complejas. Es utilizado tradicionalmente para el guiado de las prensas mecánicas de embutición profunda, aunque la menor complejidad del mecanismo de rodillera modificada lo está desplazando progresivamente del mercado.

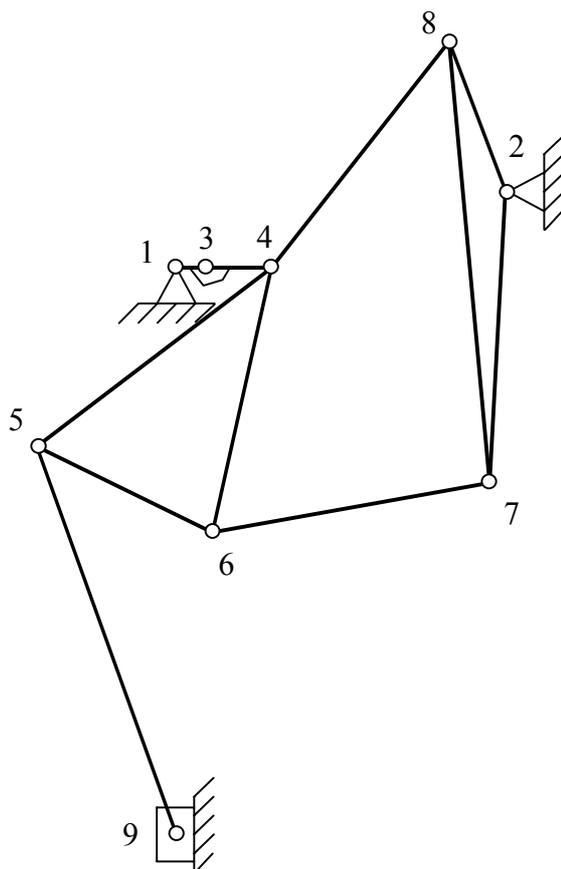


Figura 6.58: Mecanismo link drive.

El mecanismo link drive se modeliza como un mecanismo de 9 nudos y 11 barras, de acuerdo a la figura 6.58. Los nudos 1 y 2 son puntos fijos del mecanismo. El nudo 3 constituye el grado de libertad cinemático del mecanismo, y permite modificar la excentricidad del mismo durante el proceso de síntesis.

BARRA	NUDO ORIGEN	NUDO FINAL
1	1	3
2	3	4
3	4	6
4	5	6
5	5	9

6	4	5
7	4	8
8	6	7
9	7	8
10	2	8
11	2	7

Tabla 6.114: Definición de barras en el mecanismo link drive.

La geometría del mecanismo viene determinada por 10 restricciones geométricas:

- 3 restricciones que aseguran la colinealidad entre los nudos 1, 3 y 4.
- 3 restricciones que aseguran la no inversión de triángulo entre los nudos 4, 5 y 6.
- 3 restricciones que aseguran la no inversión de triángulo entre los nudos 2, 7 y 8.
- 1 restricción de coordenada x constante del nudo 9.

Se definen asimismo 7 eslabones para el planteamiento de la síntesis dinámica:

ORDINAL	ESLABÓN	NUDOS
1	Excéntrica	1-4
2	Triángulo	4-5-6
3	Brazo	4-8
4	Enlace	6-7
5	Balancín	2-7-8
6	Biela	5-9
7	Carro	9

Tabla 6.115: Definición de eslabones en el mecanismo link drive.

### 6.3.2.1. Síntesis de generación de función con restricción dinámicas.

Se plantea una síntesis de generación de función en la que se pretende controlar la posición del carro, a la vez que se limita simultáneamente la reacción en el apoyo del balancín y la fuerza de enlace entre los eslabones balancín y brazo en una posición de síntesis.

El vector de diseño inicial es:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	1.200	0.350
3	0.050	0.000
4	0.200	0.000
5	-0.550	-0.650
6	0.175	-0.900
7	1.250	-0.600
8	1.100	1.000
9	0.000	-1.800

Tabla 6.116: Vector de diseño inicial.

Las longitudes de las barras que resultan de dicho vector inicial son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.15000
3	0.90035
4	0.76689

5	1.27475
6	0.99247
7	1.34536
8	1.11608
9	1.60702
10	0.65765
11	0.95131

Tabla 6.117: Longitudes iniciales de barra.

Para resolver el problema cinemático es necesario definir los grados de libertad cinemáticos del mecanismo. Se supondrá que el eslabón de entrada 1 gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante de valor 20 r.p.m. (2.094 rad/s)

ESLABÓN	VELOCIDAD ANGULAR
1	2.094 rad/s

Tabla 6.118: Grados de libertad cinemáticos.

Para resolver el problema dinámico es necesario definir los grados de libertad dinámicos del mecanismo. Se supondrá que la fuerza nominal en el punto de fuerza es de  $2 \cdot 10^6$  N. El punto de fuerza se supondrá 16 mm por encima del punto muerto inferior.

PUNTO DE FUERZA	FUERZA NOMINAL
0.016 m	$2 \cdot 10^6$ N

Tabla 6.119: Grados de libertad dinámicos.

Por último, también será necesario fijar las densidades de los eslabones para resolver

el problema dinámico:

ESLABÓN	DENSIDAD
1	125 kg/m
2	1250 kg/m <sup>2</sup>
3	100 kg/m
4	100 kg/m
5	1500 kg/m <sup>2</sup>
6	150 kg/m

Tabla 6.120: Densidad de los eslabones.

Una vez efectuado el análisis cinemático y dinámico se obtiene la coordenada y del nudo 9 del mecanismo de partida, que es el nudo cuya trayectoria se quiere controlar, en las sucesivas posiciones de análisis. Se considerarán aquí un total de 36 posiciones de análisis, separadas cada una de ellas por un giro de 10° en el eslabón de entrada.

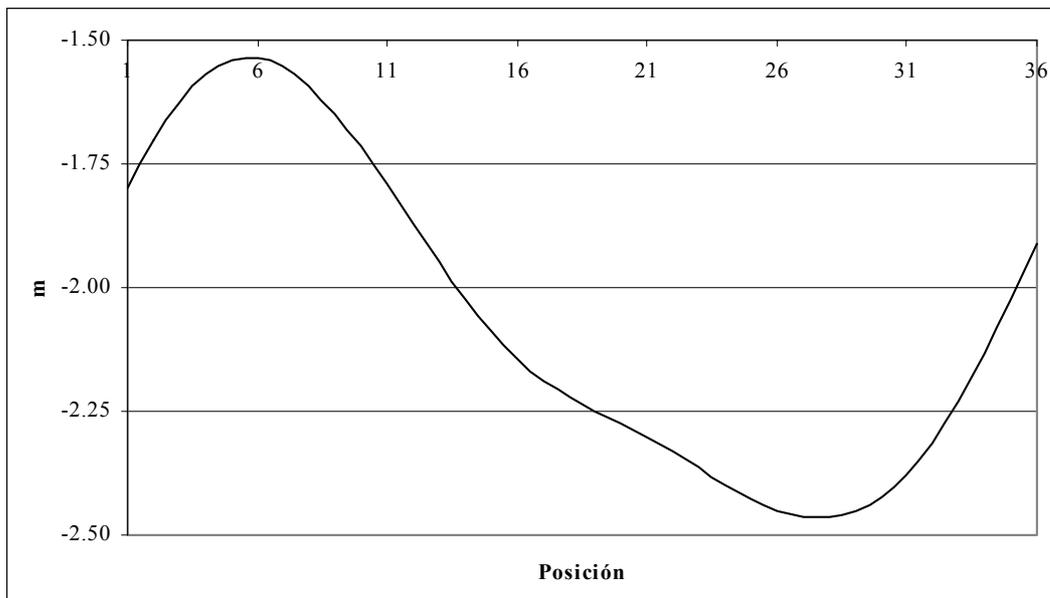


Figura 6.59: Coordenada y del carro del mecanismo de partida.

Se calcula el módulo de la reacción en el apoyo del balancín del mecanismo de partida en las distintas posiciones de análisis.

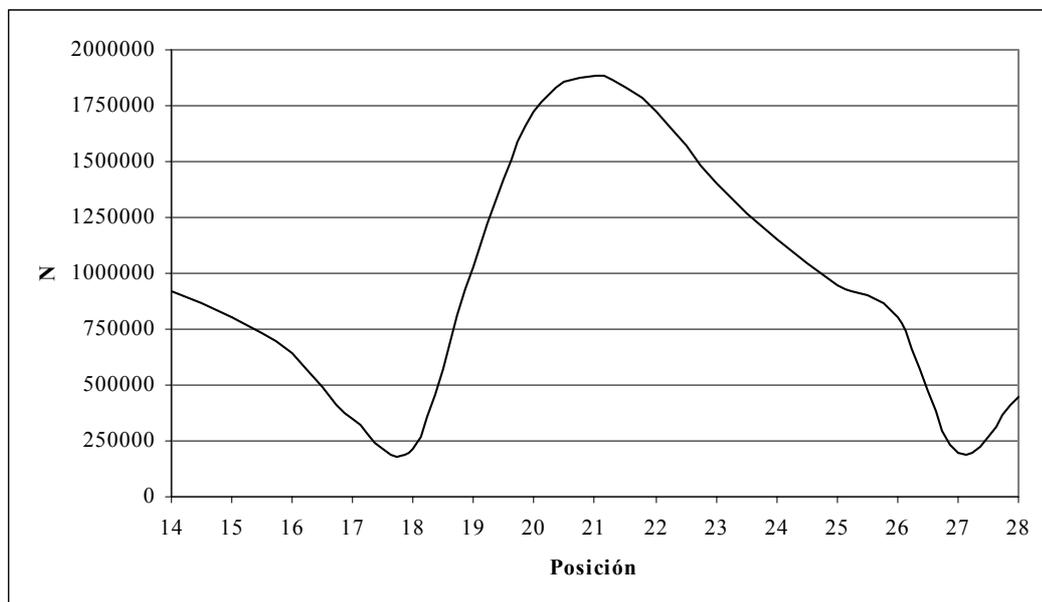


Figura 6.60: Reacción en el apoyo del balancín del mecanismo de partida.

Se calcula también el módulo de la fuerza de enlace entre balancín y brazo.

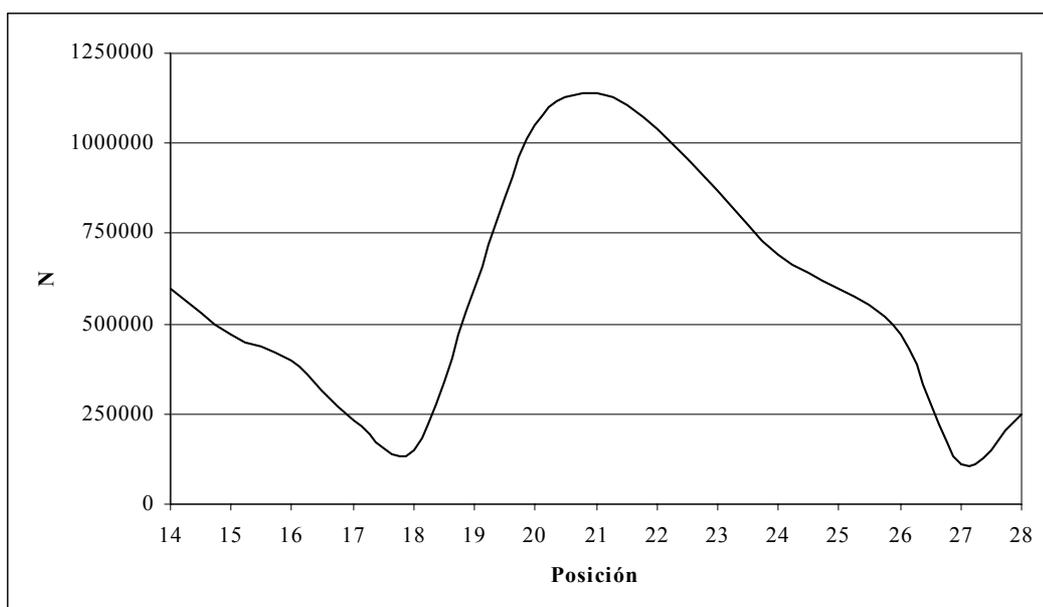


Figura 6.61: Fuerza de enlace entre balancín y brazo del mecanismo de partida.

Se especifican un total de 9 posiciones de síntesis, que vienen definidas por el giro del eslabón de entrada, expresado como el ángulo que el eslabón forma con el eje de abscisas, que constituye el grado de libertad cinemático del mecanismo.

POSICIÓN	GIRO
1	0°
2	20°
3	40°
4	70°
5	110°
6	170°
7	200°
8	220°
9	260°
10	280°
11	290°
12	300°
13	330°

Tabla 6.121: Posiciones de síntesis.

Estas posiciones de síntesis se introducen en forma de restricción directa sobre las variables de diseño correspondientes a las coordenadas  $x$  e  $y$  del nudo 3, cerrando la banda de la restricción al valor exacto de las coordenadas del nudo 3, que son conocidas dado que la barra 1 es de longitud fija.

POSICIÓN	GIRO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	0°	0.05000	0.05000	0.00000	0.00000
2	20°	0.04698	0.04698	0.00868	0.00868
3	40°	0.03830	0.03830	0.03214	0.03214
4	70°	0.01710	0.01710	0.04698	0.04698
5	110°	-0.01710	-0.01710	0.04698	0.04698
6	170°	-0.04924	-0.04924	0.00868	0.00868
7	200°	-0.04698	-0.04698	-0.01710	-0.01710
8	220°	-0.03830	-0.03830	-0.03214	-0.03214
9	260°	-0.00868	-0.00868	-0.04924	-0.04924
10	280°	0.00868	0.00868	-0.04924	-0.04924
11	290°	0.01710	0.01710	-0.04698	-0.04698
12	300°	0.02500	0.02500	-0.04330	-0.04330
13	330°	0.04330	0.04330	-0.02500	-0.02500

Tabla 6.122: Definición de las posiciones de síntesis.

En las posiciones de síntesis definidas se definen las restricciones de posición deseadas como restricciones directas sobre las variables de diseño correspondientes a las coordenadas x e y del nudo 9. Se plantea subir el punto muerto inferior para acortar la carrera de trabajo.

POSICIÓN	NUDO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	9	0.00000	0.00000	-1.80000	-1.70000
2	9	0.00000	0.00000	-1.65000	-1.55000
3	9	0.00000	0.00000	-1.60000	-1.50000
4	9	0.00000	0.00000	-1.65000	-1.55000

5	9	0.00000	0.00000	-1.80000	-1.70000
6	9	0.00000	0.00000	-2.15000	-2.05000
7	9	0.00000	0.00000	-2.20000	-2.10000
8	9	0.00000	0.00000	-2.20000	-2.10000
9	9	0.00000	0.00000	-2.25000	-2.15000
10	9	0.00000	0.00000	-2.25000	-2.15000
11	9	0.00000	0.00000	-2.15000	-2.05000
12	9	0.00000	0.00000	-2.10000	-2.00000
13	9	0.00000	0.00000	-1.95000	-1.85000

Tabla 6.123: Restricciones de posición.

Se establecen también las bandas de restricción sobre las coordenadas de los puntos fijos. Se permite la movilidad del nudo 2 entre los límites fijados.

PUNTO FIJO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.950	1.210	0.250	0.400

Tabla 6.124: Restricciones de movilidad de los puntos fijos.

Se establecen también restricciones sobre la longitud de las barras. La barra 1 es de longitud fija porque constituye el grado de libertad del problema de posición del mecanismo.

BARRA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
1	0.050	0.050
2	0.000	20.000

3	0.000	20.000
4	0.000	20.000
5	0.000	20.000
6	0.000	20.000
7	0.000	20.000
8	0.000	20.000
9	0.000	20.000
10	0.000	20.000
11	0.000	20.000

Tabla 6.125: Restricciones de longitud de barras.

Por último, se establecen las restricciones dinámicas que se quieren imponer. En este caso se desea limitar simultáneamente la reacción en el apoyo del balancín y la fuerza de enlace entre balancín y brazo en la séptima posición de síntesis. Los módulos de la reacción en el apoyo del balancín y la fuerza de enlace entre balancín y brazo que se habían obtenido en el análisis dinámico del mecanismo de partida en la séptima posición de síntesis eran de  $1.88 \cdot 10^6$  N y  $1.14 \cdot 10^6$  N respectivamente.

PUNTO DE SÍNTESIS	RESTRICCIÓN	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
7	$ \mathbf{F}_{25} $	$2.5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$
7	$ \mathbf{F}_{75} $	$2.5 \cdot 10^5$	$3.5 \cdot 10^5$

Tabla 6.126: Restricciones dinámicas.

Una vez ejecutadas las etapas de síntesis local y de síntesis global con las restricciones definidas, la función objetivo alcanza un valor final de  $2.02 \cdot 10^{-9}$  tras efectuar un total de 2596 iteraciones.

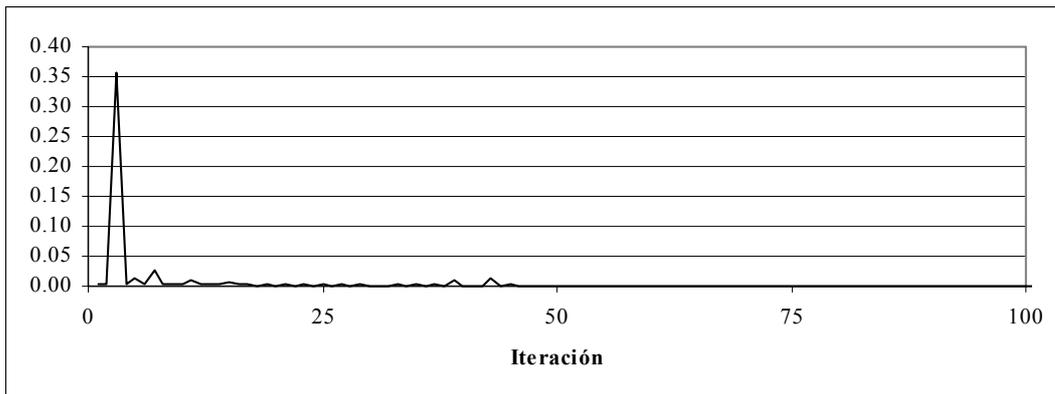


Figura 6.62: Detalle de la evolución de la función objetivo.

El mecanismo solución está definido por las coordenadas de sus nudos:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	1.158	0.387
3	0.050	0.000
4	0.115	0.000
5	0.561	-0.674
6	0.245	-0.870
7	1.228	-0.691
8	1.067	-0.960
9	0.000	-1.732

Tabla 6.127: Vector de diseño del mecanismo solución.

Las longitudes de las barras resultantes son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.065345
3	0.87967
4	0.82976
5	1.19715
6	0.95478
7	1.35213
8	0.99842
9	1.65940
10	0.58072
11	1.08026

Tabla 6.128: Longitudes de barra del mecanismo solución.

La coordenada y del carro del mecanismo solución es:

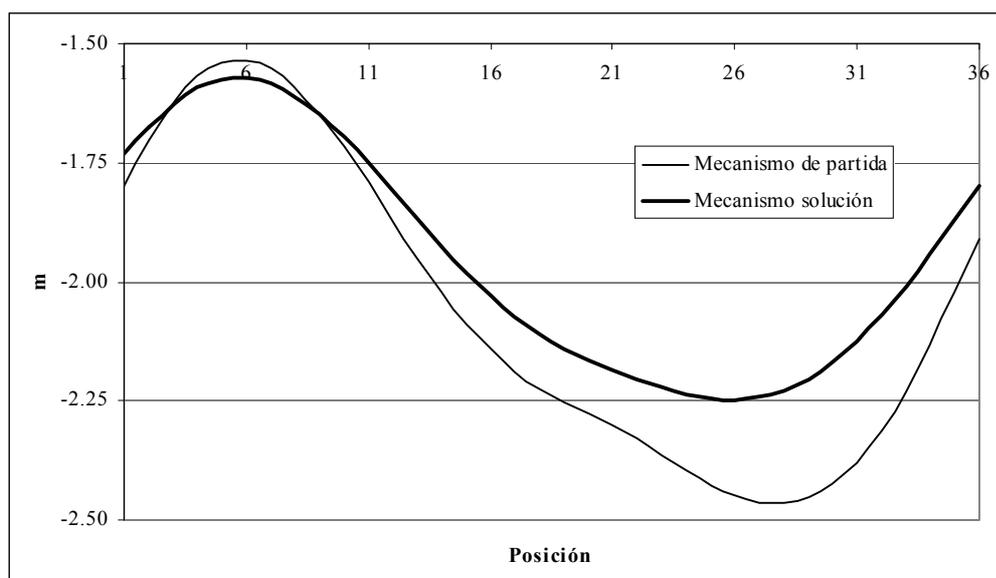


Figura 6.63: Coordenada y del nudo 9 del mecanismo solución.

La reacción en el apoyo del balancín del mecanismo solución es:

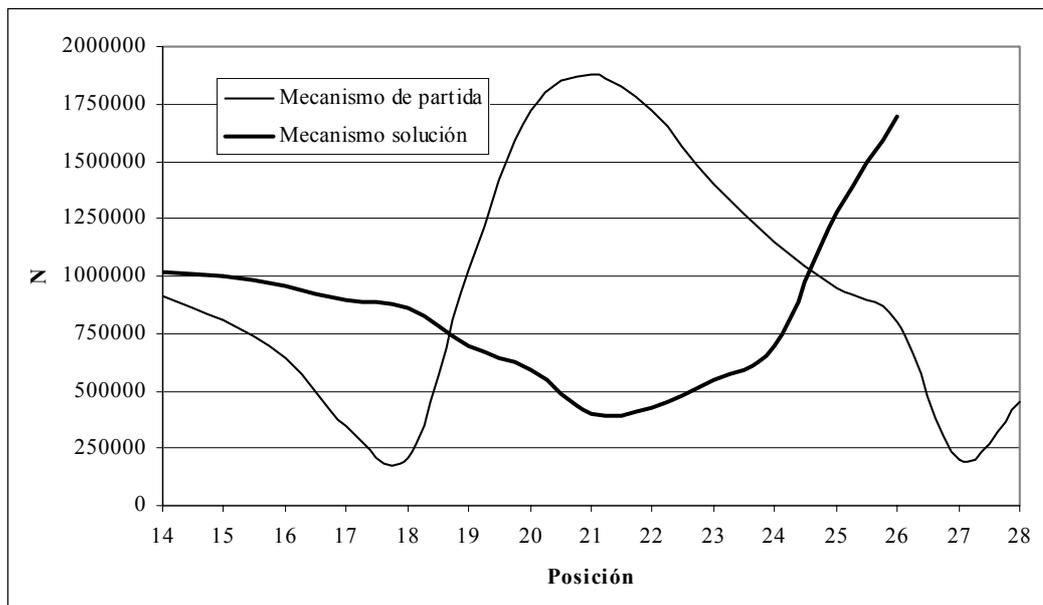


Figura 6.64: Reacción en el apoyo del balancín del mecanismo solución.

La reacción en el apoyo del balancín del mecanismo solución es:

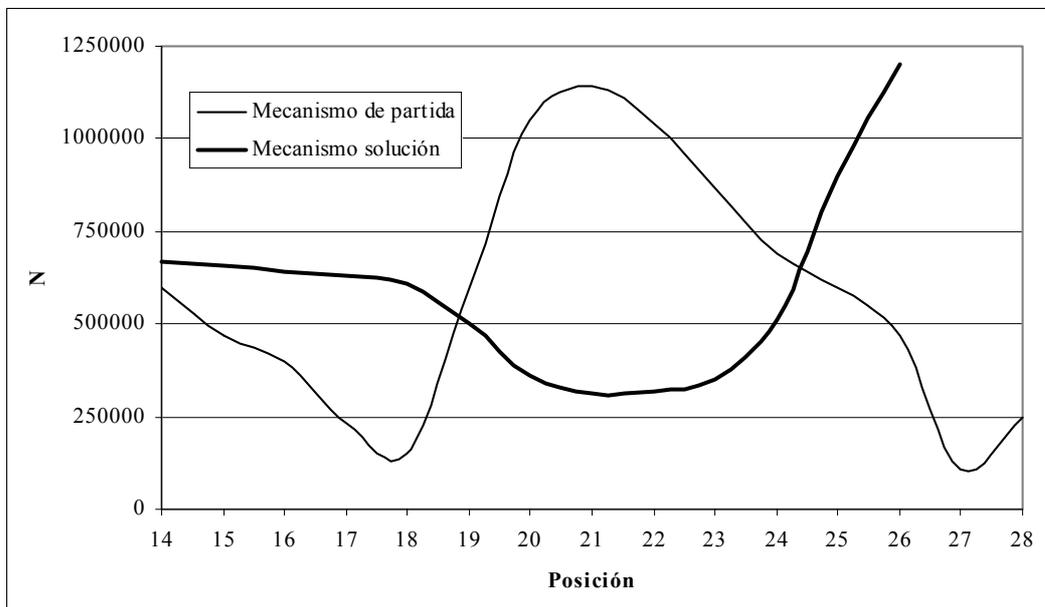


Figura 6.65: Fuerza de enlace entre balancín y brazo del mecanismo solución.

El mecanismo solución se adapta aceptablemente a las restricciones impuestas en la síntesis, acortando sensiblemente su carrera a base de subir el punto muerto inferior,

principalmente. La reducción de los esfuerzos en la posición de síntesis considerada es notable, aunque los esfuerzos aumentan cerca del punto muerto inferior, llegando a superar incluso los valores del mecanismo de partida. Además, se observa muy claramente la pérdida del escalón horizontal en el diagrama de velocidades del carro, lo que implica que el mecanismo solución ha perdido sus cualidades cinemáticas.

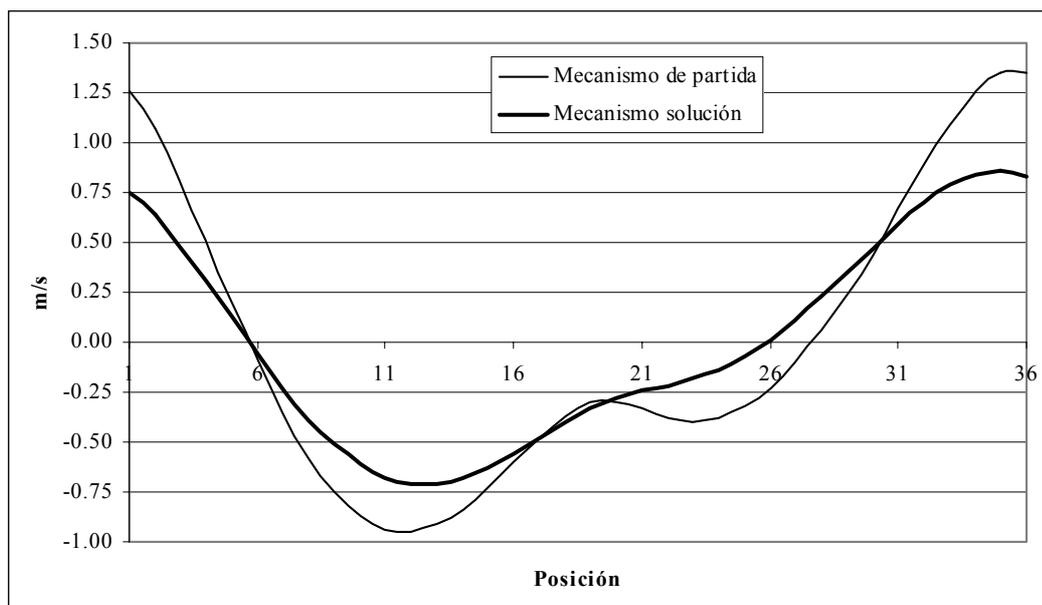


Figura 6.66: Velocidad del carro.

### 6.3.2.2. Síntesis de generación de función con restricciones cinemáticas y dinámicas.

Se plantea nuevamente una síntesis de generación de función en la que se pretende controlar la posición del carro, a la vez que se limita simultáneamente la reacción en el apoyo del balancín y la fuerza de enlace entre los eslabones balancín y brazo en una posición de síntesis. Con el fin de que el mecanismo no pierda sus virtudes cinemáticas, se impondrá también una restricción de velocidad sobre la componente vertical de la velocidad del nudo 9, correspondiente al eslabón carro.

El vector de diseño inicial es:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	1.200	0.350
3	0.050	0.000
4	0.200	0.000
5	-0.550	-0.650
6	0.175	-0.900
7	1.250	-0.600
8	1.100	1.000
9	0.000	-1.800

Tabla 6.129: Vector de diseño inicial.

Las longitudes de las barras que resultan de dicho vector inicial son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.15000
3	0.90035
4	0.76689
5	1.27475
6	0.99247
7	1.34536
8	1.11608

9	1.60702
10	0.65765
11	0.95131

Tabla 6.130: Longitudes iniciales de barra.

Para resolver el problema cinemático es necesario definir los grados de libertad cinemáticos del mecanismo. Se supondrá que el eslabón de entrada 1 gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante de valor 20 r.p.m. (2.094 rad/s)

ESLABÓN	VELOCIDAD ANGULAR
1	2.094 rad/s

Tabla 6.131: Grados de libertad cinemáticos.

Para resolver el problema dinámico es necesario definir los grados de libertad dinámicos del mecanismo. Se supondrá que la fuerza nominal en el punto de fuerza es de  $2 \cdot 10^6$  N. El punto de fuerza se supondrá 16 mm por encima del punto muerto inferior.

PUNTO DE FUERZA	FUERZA NOMINAL
0.016 m	$2 \cdot 10^6$ N

Tabla 6.132: Grados de libertad dinámicos.

Por último, también será necesario fijar las densidades de los eslabones para resolver el problema dinámico:

ESLABÓN	DENSIDAD
1	125 kg/m
2	1250 kg/m <sup>2</sup>

3	100 kg/m
4	100 kg/m
5	1500 kg/m <sup>2</sup>
6	150 kg/m

Tabla 6.133: Densidad de los eslabones.

Una vez efectuado el análisis cinemático y dinámico se obtiene la coordenada y del nudo 9 del mecanismo de partida, que es el nudo cuya trayectoria se quiere controlar, en las sucesivas posiciones de análisis. Se considerarán aquí un total de 36 posiciones de análisis, separadas cada una de ellas por un giro de 10° en el eslabón de entrada.

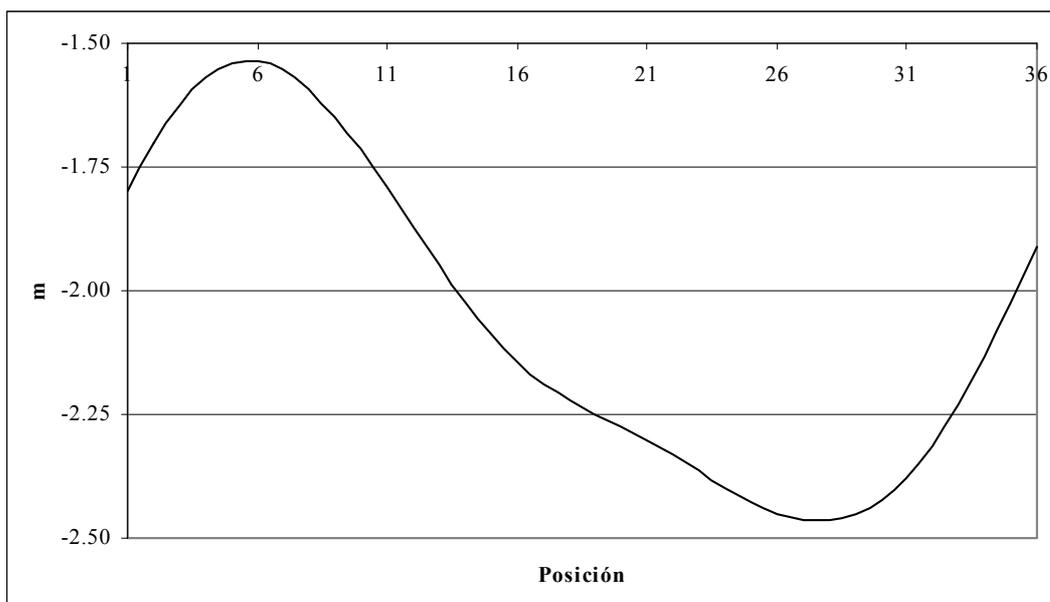


Figura 6.67: Coordenada y del nudo 9 del mecanismo de partida.

Se calcula el módulo de la reacción en el apoyo del balancín del mecanismo de partida en las distintas posiciones de análisis.

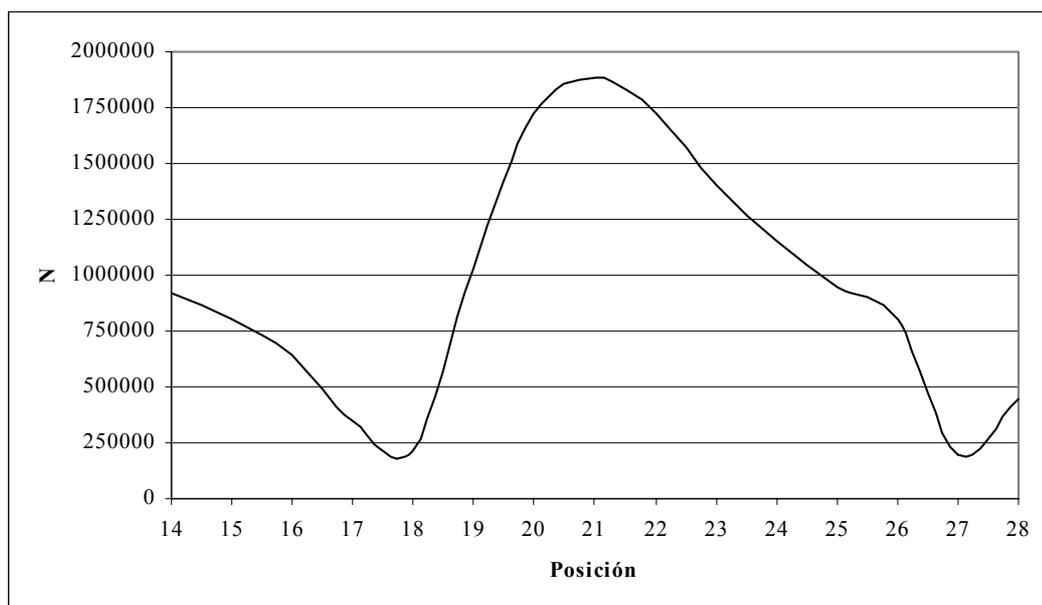


Figura 6.68: Reacción en el apoyo del balancín del mecanismo de partida.

Se calcula también el módulo de la fuerza de enlace entre balancín y brazo del mecanismo de partida en las distintas posiciones de análisis.

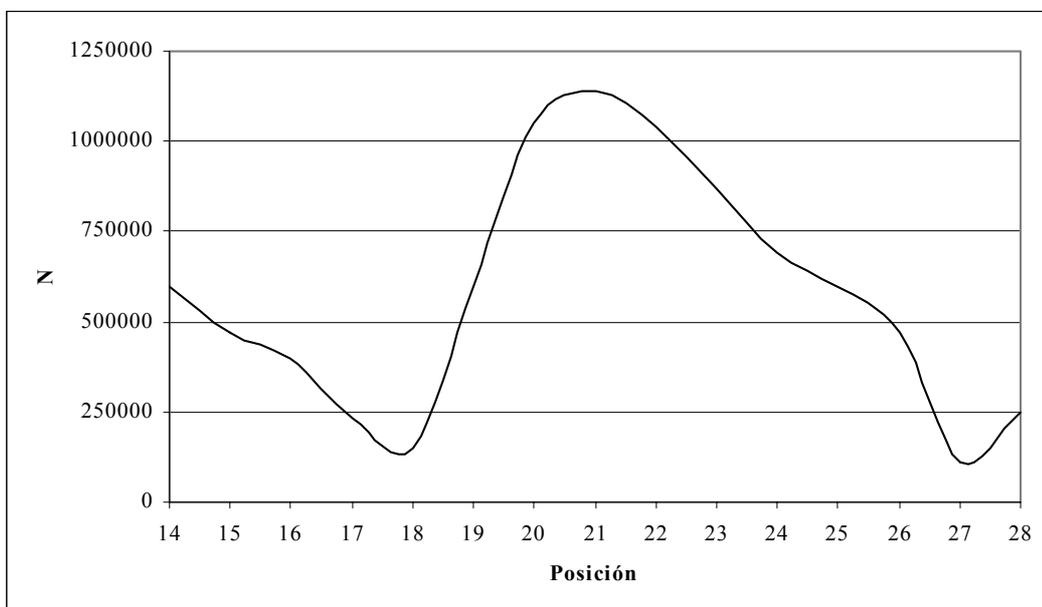


Figura 6.69: Fuerza de enlace entre balancín y brazo del mecanismo de partida.

Se especifican un total de 9 posiciones de síntesis, que vienen definidas por el giro del eslabón de entrada, expresado como el ángulo que el eslabón forma con el eje de abscisas, que constituye el grado de libertad cinemático del mecanismo.

POSICIÓN	GIRO
1	0°
2	20°
3	40°
4	70°
5	110°
6	170°
7	200°
8	220°
9	260°
10	280°
11	290°
12	300°
13	330°

Tabla 6.134: Posiciones de síntesis.

Estas posiciones de síntesis se introducen en forma de restricción directa sobre las variables de diseño correspondientes a las coordenadas  $x$  e  $y$  del nudo 3, cerrando la banda de la restricción al valor exacto de las coordenadas del nudo 3, que son conocidas dado que la barra 1 es de longitud fija.

POSICIÓN	GIRO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	0°	0.05000	0.05000	0.00000	0.00000
2	20°	0.04698	0.04698	0.00868	0.00868
3	40°	0.03830	0.03830	0.03214	0.03214
4	70°	0.01710	0.01710	0.04698	0.04698
5	110°	-0.01710	-0.01710	0.04698	0.04698
6	170°	-0.04924	-0.04924	0.00868	0.00868
7	200°	-0.04698	-0.04698	-0.01710	-0.01710
8	220°	-0.03830	-0.03830	-0.03214	-0.03214
9	260°	-0.00868	-0.00868	-0.04924	-0.04924
10	280°	0.00868	0.00868	-0.04924	-0.04924
11	290°	0.01710	0.01710	-0.04698	-0.04698
12	300°	0.02500	0.02500	-0.04330	-0.04330
13	330°	0.04330	0.04330	-0.02500	-0.02500

Tabla 6.135: Definición de las posiciones de síntesis.

En las posiciones de síntesis definidas se definen las restricciones de posición deseadas como restricciones directas sobre las variables de diseño correspondientes a las coordenadas x e y del nudo 9:

POSICIÓN	NUDO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	9	0.00000	0.00000	-1.80000	-1.70000
2	9	0.00000	0.00000	-1.65000	-1.55000
3	9	0.00000	0.00000	-1.60000	-1.50000
4	9	0.00000	0.00000	-1.65000	-1.55000
5	9	0.00000	0.00000	-1.80000	-1.70000

6	9	0.00000	0.00000	-2.15000	-2.05000
7	9	0.00000	0.00000	-2.20000	-2.10000
8	9	0.00000	0.00000	-2.20000	-2.10000
9	9	0.00000	0.00000	-2.25000	-2.15000
10	9	0.00000	0.00000	-2.25000	-2.15000
11	9	0.00000	0.00000	-2.15000	-2.05000
12	9	0.00000	0.00000	-2.10000	-2.00000
13	9	0.00000	0.00000	-1.95000	-1.85000

Tabla 6.136: Restricciones de posición.

Se establecen también las bandas de restricción sobre las coordenadas de los puntos fijos.

PUNTO FIJO	X INFERIOR	X SUPERIOR	Y INFERIOR	Y SUPERIOR
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.950	1.210	0.250	0.400

Tabla 6.137: Restricciones de movilidad de los puntos fijos.

Se establecen también restricciones sobre la longitud de las barras. La barra 1 es de longitud fija porque constituye el grado de libertad del problema de posición del mecanismo.

BARRA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
1	0.050	0.050
2	0.000	20.000
3	0.000	20.000

4	0.000	20.000
5	0.000	20.000
6	0.000	20.000
7	0.000	20.000
8	0.000	20.000
9	0.000	20.000
10	0.000	20.000
11	0.000	20.000

Tabla 6.138: Restricciones de longitud de barras.

Por último, se establecen las restricciones dinámicas que se quieren imponer. En este caso se desea limitar simultáneamente la reacción en el apoyo del balancín y la fuerza de enlace entre balancín y brazo en la séptima posición de síntesis, aunque se abrirán las bandas de restricción para permitir la adaptación de la solución a la nueva restricción de velocidad. Los módulos de la reacción en el apoyo del balancín y la fuerza de enlace entre balancín y brazo que se habían obtenido en el análisis dinámico del mecanismo de partida en la séptima posición de síntesis eran de  $1.88 \cdot 10^6$  N y  $1.14 \cdot 10^6$  N respectivamente.

PUNTO DE SÍNTESIS	RESTRICCIÓN	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
7	$ \mathbf{F}_{25} $	$5 \cdot 10^5$	$7.5 \cdot 10^5$
7	$ \mathbf{F}_{75} $	$2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$

Tabla 6.139: Restricciones dinámicas.

Por último, se establece una restricción de velocidad en la sexta posición de síntesis, con objeto de controlar el tramo de velocidad constante del carro:

PUNTO DE SÍNTESIS	RESTRICCIÓN	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
6	$\dot{y}_9$	-0.35 m/s	-0.15 m/s

Tabla 6.140: Restricciones cinemáticas.

Una vez ejecutadas las etapas de síntesis local y de síntesis global con las restricciones definidas, la función objetivo alcanza un valor final de  $7.32 \cdot 10^{-9}$  tras efectuar un total de 2924 iteraciones.

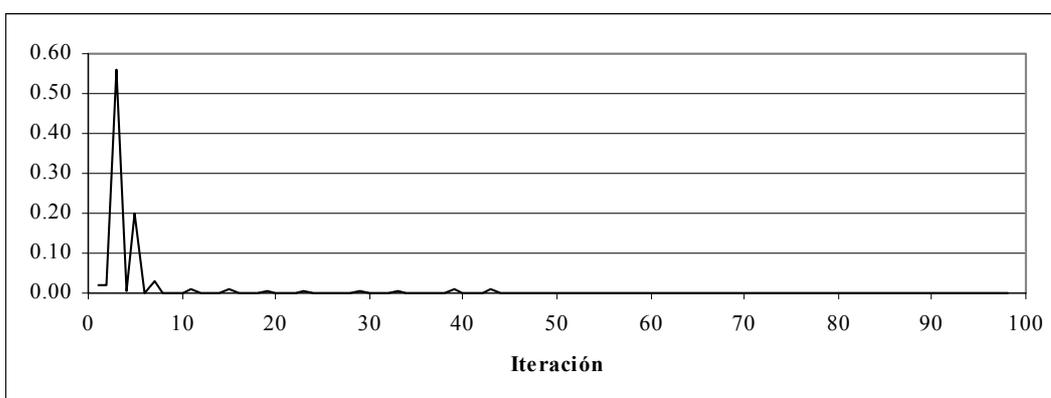


Figura 6.70: Detalle de la evolución de la función objetivo.

El mecanismo solución está definido por las coordenadas de sus nudos:

NUDO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000	0.000
2	1.157	0.387
3	0.050	0.000
4	0.116	0.000
5	0.561	-0.667
6	0.215	-0.834
7	1.226	-0.689

8	1.080	-0.941
9	0.000	-1.731

Tabla 6.141: Vector de diseño del mecanismo solución.

Las longitudes de las barras resultantes son:

BARRA	LONGITUD
1	0.05000
2	0.06538
3	0.83972
4	0.79389
5	1.20364
6	0.94949
7	1.34713
8	1.02232
9	1.63850
10	0.55927
11	1.08186

Tabla 6.142: Longitudes de barra del mecanismo solución.

La coordenada y del carro del mecanismo solución en las sucesivas posiciones de análisis es:

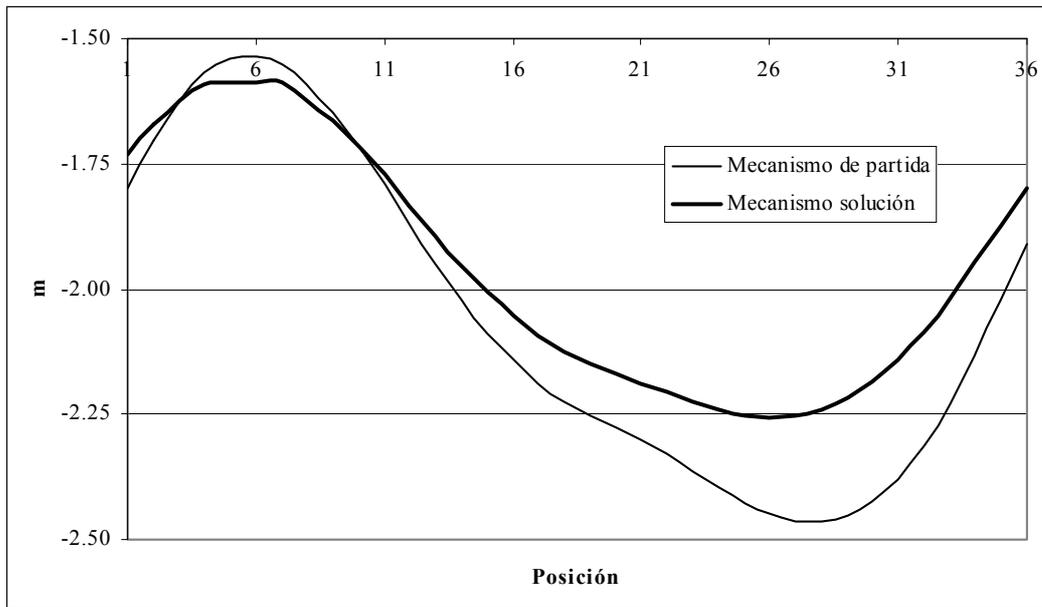


Figura 6.71: Coordenada y del nudo 9 del mecanismo solución.

La reacción en el apoyo del balancín del mecanismo solución es:

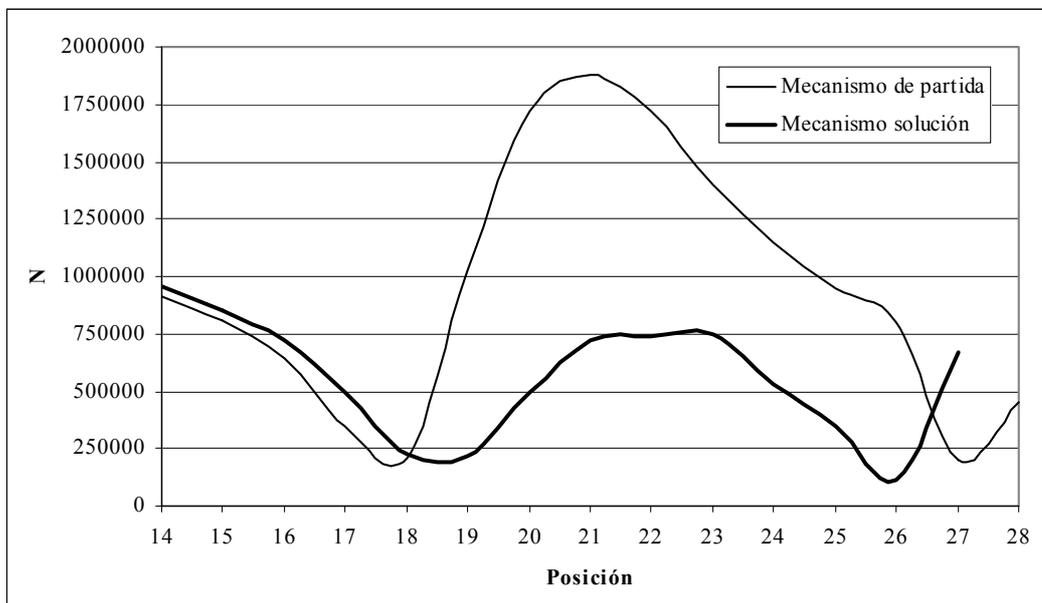


Figura 6.72: Reacción en el apoyo del balancín del mecanismo solución.

La reacción en el apoyo del balancín del mecanismo solución es:

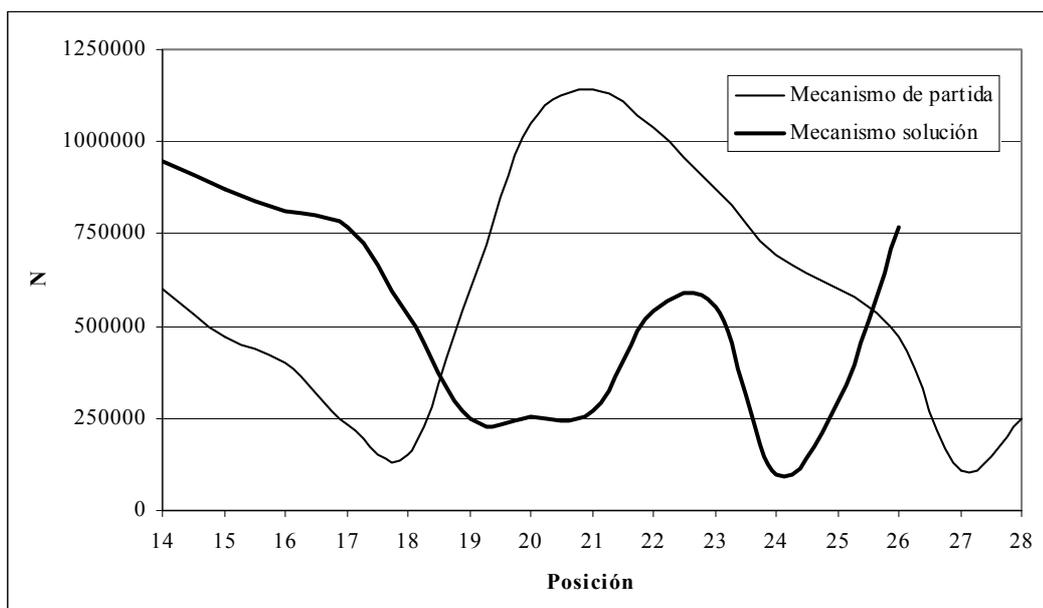


Figura 6.73: Fuerza de enlace entre balancín y brazo del mecanismo solución.

El mecanismo solución se adapta nuevamente de forma muy aceptable a las restricciones impuestas en la síntesis, acortando sensiblemente su carrera a base de subir el punto muerto inferior. La restricción cinemática tira de la curva de velocidades, logrando un escalón prácticamente horizontal en el diagrama de velocidades del carro, lo que hace del mecanismo solución un ejemplo perfecto de las virtudes cinemáticas de las prensas de mecánica articulada.

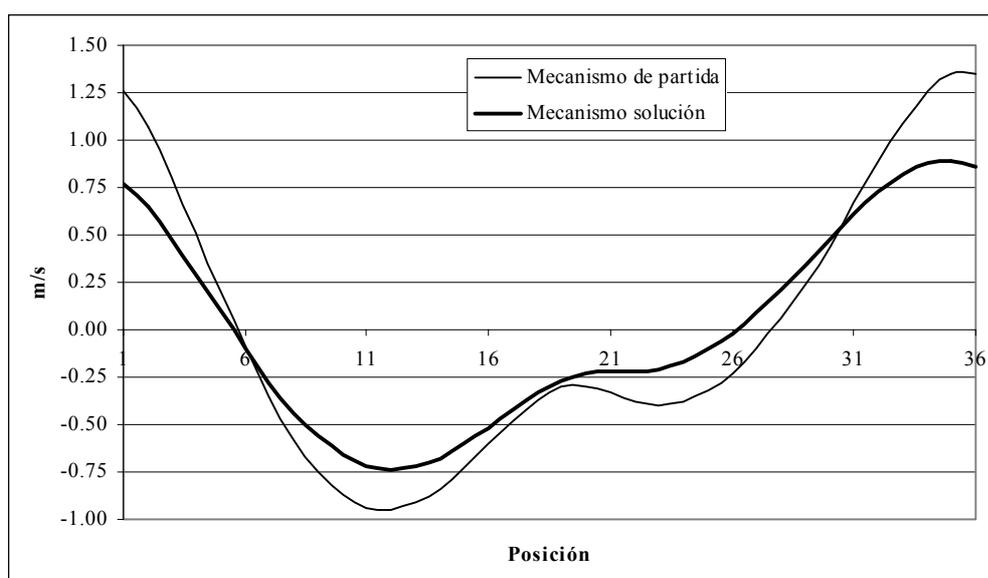


Figura 6.74: Velocidad del carro.



## Capítulo 7

# Conclusiones

La optimización de los sistemas multicuerpo es un campo que ha despertado gran interés en la comunidad científica debido a la propia complejidad del problema y a la enorme cantidad de aplicaciones de desarrollo tecnológico que posee en sectores tan diversos como la industria automovilística, la industria aeroespacial, la robótica o la biomecánica. Pese a la cantidad de recursos aplicados, se trata aún de una disciplina en un estado de desarrollo incipiente, con multitud de metodologías desarrolladas para aplicaciones particulares pero con una carencia importante de métodos generales que sean aptos para una formulación estándar del problema.

Pese a la dispersión comentada, una gran parte de los esfuerzos en el ámbito de la síntesis dimensional de sistemas multicuerpo se centran en métodos de síntesis óptima. La síntesis óptima se plantea como un problema de programación matemática donde debe minimizarse una función, denominada función objetivo, cuyo valor determina el criterio que fija el diseñador para determinar que un mecanismo es mejor que otro, sujeta a unas determinadas restricciones o especificaciones de diseño. Tanto la función objetivo como las restricciones que definen el problema pueden ser o no lineales, lo que origina una gran cantidad de métodos de resolución de este tipo de problemas de optimización. También son numerosos los métodos basados en el análisis de sensibilidad interactivo, así como los métodos heurísticos, entre los que cabe citar los algoritmos genéticos, los algoritmos meméticos o las redes neuronales.

Dentro de los métodos de síntesis dimensional óptima se ha prestado especial

atención al método desarrollado por Alba (1994, 1996, 1997, 2000), que plantea el problema de optimización no lineal como un problema de programación cuadrática secuencial con restricciones de posición y cinemáticas. El método exige la determinación analítica de los gradientes de la función objetivo y de las restricciones, y a partir de dichas expresiones analíticas calcula las matrices hessianas por el método de las diferencias finitas.

La aportación principal de este trabajo es la ampliación de la generalidad del método, permitiendo añadir al problema las restricciones dinámicas derivadas de las condiciones de equilibrio dinámico del sistema. La propia formulación del método de síntesis dimensional óptima descrito permite incorporar al mismo cualquier restricción que sea función de las variables contenidas en el vector de diseño, en la que puedan determinarse analíticamente la restricción y sus gradientes. Se han planteado las ecuaciones de equilibrio dinámico del sistema de forma que las incógnitas del problema –que en general representan fuerzas motoras, fuerzas de enlace entre elementos, o reacciones– y sus derivadas parciales respecto de las variables de diseño son la solución de sendos sistemas de ecuaciones que pueden solucionarse a partir de los problemas de posición, velocidad y aceleración previamente resueltos, y de los parámetros que constituyen los datos del problema dinámico.

Una vez determinadas las expresiones analíticas de las incógnitas del problema dinámico y de sus gradientes, que quedarán en función de las variables de diseño, el método permite establecer cualquier restricción sobre las propias incógnitas o sobre una función de las mismas. En concreto se han obtenido las expresiones de las siguientes restricciones dinámicas:

- Restricciones sobre los esfuerzos motores.
- Restricciones sobre los esfuerzos de salida.
- Restricciones sobre las fuerzas de enlace o de restricción entre eslabones.
- Restricciones sobre las reacciones.
- Restricción sobre la relación temporal de esfuerzos
- Restricciones sobre la masa de los elementos del sistema.
- Restricciones cinemáticas sobre la velocidad angular y/o la aceleración angular

de los elementos del sistema.

- Restricciones sobre los índices de mérito que determinan la calidad del diseño de un sistema multicuerpo. En concreto se han planteado restricciones sobre la razón de velocidades angulares de salida y entrada, la ventaja mecánica y el ángulo de transmisión.

Las principales características del método de síntesis dimensional óptima con restricciones de posición, cinemáticas y dinámicas aquí propuesto son las siguientes:

- Permite incorporar cualquier tipo de restricción topológica,
- Es aplicable indistintamente a sistemas de movimiento plano o espacial.
- Es aplicable indistintamente a sistemas de cadena abierta o cerrada.
- Admite pares cinemáticos inferiores y superiores
- Permite imponer restricciones cinemáticas y dinámicas de todo tipo.

Se ha implementado el método en un software de síntesis dimensional óptima de mecanismos con movimiento plano, desarrollando las expresiones analíticas que permiten una sencilla determinación de los parámetros envueltos en las ecuaciones de equilibrio dinámico del sistema. Asimismo, se han elaborado distintos ejemplos que han puesto de manifiesto la potencia del método, que ha mostrado una convergencia y una robustez muy apreciables.

La incorporación de restricciones dinámicas ha permitido controlar simultáneamente los parámetros de posición, cinemáticos y dinámicos del problema de diseño de mecanismos con movimiento plano en las fases más tempranas del diseño, permitiendo mejorar considerablemente el control sobre el comportamiento dinámico del sistema y reducir sensiblemente el tiempo de diseño del mismo.

Las líneas de investigación más significativas que se sugieren a partir de este trabajo son las siguientes:

- Desarrollo de una metodología para determinar de una forma general las expresiones analíticas de los parámetros de las ecuaciones de equilibrio dinámico de sistemas con movimiento espacial y de sus gradientes, que permita implementar una aplicación de síntesis dimensional óptima con restricciones

dinámicas de sistemas multicuerpo con movimiento espacial.

- Ampliación del método expuesto a la síntesis dimensional óptima de sistemas multicuerpo de curso variable. La síntesis dimensional óptima de los sistemas de curso variable, de creciente aplicación en el ámbito de las prensas de mecánica articulada expuestas en el capítulo 6, permitiría optimizar simultáneamente el comportamiento cinemático y dinámico de los mecanismos en una amplia gama de cursos de trabajo, mediante el cambio de longitud de algunas de sus barras.
- Introducción de las fuerzas de rozamiento existentes en los enlaces en el problema dinámico.
- Limitación de las vibraciones del sistema.
- Introducción de holguras.
- Desarrollo de técnicas para la determinación del vector inicial.
- Introducción de nuevas funciones objetivo.
- Desarrollo de técnicas de comprobación de la robustez del comportamiento cinemático y dinámico del sistema. Estas técnicas evitarían una sensibilidad excesiva del diseño óptimo de un mecanismo hacia posibles defectos de fabricación o montaje.
- Implementación de mejoras en los algoritmos de optimización, como la utilización de nuevas rutinas de optimización o la utilización de técnicas específicas para matrices dispersas (Youssef, 1996; Duff et al., 1997).
- Integración del método en software general de análisis de sistemas multicuerpo.
- Aplicación del método en aplicaciones concretas como la biomecánica o el diseño óptimo de mecanismos.
- Desarrollo de algoritmos de cálculo de los parámetros dinámicos (masas, inercias...) de cuerpos de geometría compleja para aplicaciones concretas.
- Introducción de nuevas restricciones geométricas: carrera de trabajo, distancia entre puntos fijos...

## Apéndice I

# Algoritmos

El método de síntesis dimensional óptima con restricciones cinemáticas y dinámicas expuesto en esta tesis se ha implementado en distintos algoritmos desarrollados en Fortran. Los problemas matemáticos implicados en el proceso de la síntesis se han resuelto mediante llamadas a rutinas de la biblioteca matemática NAG para Fortran (NAG, 1995). Los algoritmos desarrollados son los siguientes:

- Síntesis local.
- Síntesis global.
- Análisis cinemático y dinámico.

### **I.1. Síntesis local.**

El algoritmo de síntesis local calcula el vector que servirá de punto de partida de la síntesis global a partir de:

- El vector inicial propuesto por el usuario
- Las restricciones que controlan la geometría del mecanismo.
- Las restricciones de posición definidas en las distintas posiciones de síntesis.

En la etapa de síntesis local no se permite la movilidad de puntos fijos, por lo que no se consideran las restricciones de movilidad de puntos fijos que haya podido definir el usuario. La movilidad de los puntos fijos permitiría que el mecanismo cumpliera las

restricciones de posición definidas en las distintas posiciones de síntesis sin deformación alguna en las barras, lo que invalidaría la etapa de síntesis local.

Tampoco se consideran las restricciones cinemáticas ni las restricciones dinámicas definidas, dado que el vector inicial puede estar todavía muy lejos de la solución. Estas restricciones sólo serán tenidas en cuenta en la etapa de síntesis global, una vez que la etapa de síntesis local calcule el vector inicial que será utilizado en aquella, y que razonablemente estará más cerca de la solución final que el vector inicial dado por el usuario.

La secuencia de pasos que sigue el algoritmo de síntesis local es la siguiente:

1. Lectura de datos.
  - Nudos origen y final de barra.
  - Vector inicial introducido por el usuario.
  - Longitudes iniciales de barra introducidas por el usuario.
  - Parámetros cinemáticos del grado de libertad.
  - Restricciones geométricas: colinealidad, no inversión del triángulo, coordenada fija de punto...
  - Restricciones sobre las longitudes de las barras.
  - Restricciones de posición, definidas en cada posición de síntesis.
2. Hace infinito el valor de la función objetivo en cada posición de síntesis.
3. Determinación de los mecanismos activos. El algoritmo abre un bucle DO donde, partiendo de distintas configuraciones geométricas del sistema inicial, que se obtienen como secuencias del movimiento de éste, se obtiene un mecanismo activo para cada una de las posiciones de síntesis. Por defecto, se asigna un número de 36 configuraciones o posiciones desde donde se rastrearán los mecanismos activos. A partir de los mecanismos activos obtenidos en esta etapa, se determinará el vector inicial para la síntesis local. La secuencia de pasos que se sigue en cada iteración es la siguiente:
  - Cálculo de las coordenadas de posición de los grados de libertad del sistema para la configuración correspondiente.

- Resolución del problema de posición. La rutina E04UCF resuelve el problema de posición, considerando únicamente las restricciones que definen la geometría del mecanismo y las restricciones sobre las longitudes de las barras, que se reducen a las longitudes exactas de las barras del sistema que se analiza. Las subrutinas CONFUN y OBJFUN evalúan respectivamente las restricciones y la función objetivo, así como sus gradientes, a partir de sus expresiones analíticas.
  - Almacena el vector de coordenadas de los nudos como vector inicial para resolver el problema de posición de la siguiente configuración.
  - Abre un nuevo bucle DO anidado donde, a partir del vector inicial, resuelve el problema de optimización en cada punto de síntesis. La secuencia de pasos que se sigue en cada iteración es la siguiente:
    - Lectura del vector inicial.
    - Lectura de las restricciones de posición correspondientes a la posición de síntesis activa.
    - La rutina E04UCF resuelve el problema de optimización para la posición de síntesis considerada. Las subrutinas CONFUN y OBJFUN evalúan respectivamente las restricciones y la función objetivo, así como sus gradientes, a partir de sus expresiones analíticas.
    - Evaluación de la función objetivo. Si la función objetivo para la posición de síntesis activa es menor que las funciones objetivo calculadas para las posiciones de síntesis anteriores, se guarda el vector de coordenadas de nudos resultante como mecanismo activo correspondiente a la posición de síntesis activa.
    - Se almacena la posición resultante como vector inicial para el rastreo de mecanismos activos desde la siguiente configuración geométrica del mecanismo de partida.
4. Montaje del vector inicial de la síntesis global, que está formado por las coordenadas de todos los nudos de todos los mecanismos activos, y por las longitudes de las barras. La longitud de cada barra se calcula aquí como la media

aritmética de las longitudes de dicha barra en todos los mecanismos activos.

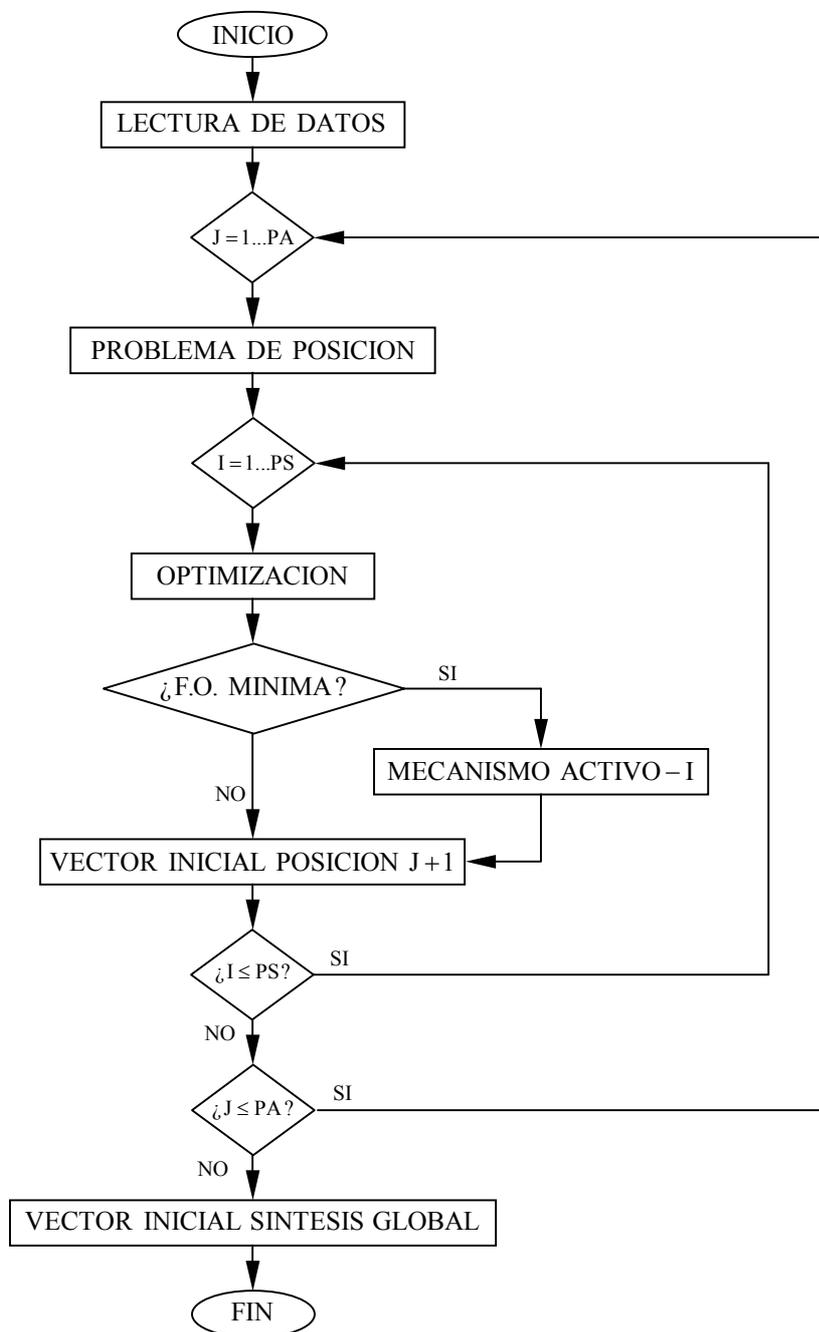


Figura I.1: Diagrama de flujo del algoritmo de síntesis local.

## I.2. Síntesis global.

El algoritmo de síntesis global resuelve el problema de optimización propiamente dicho, determinando la longitud de las barras que conforman el sistema que cumple mejor, desde un punto de vista global, con la totalidad de las restricciones impuestas por el usuario. Para ello toma como punto de partida el vector inicial calculado en la etapa de síntesis local, que está formado por las coordenadas de todos los nudos de todos los mecanismos activos, y por las longitudes de las barras, calculadas como la media aritmética de las barras de los mecanismos activos. Es evidente que dado que en esta etapa se resuelve propiamente el problema de optimización, todas las restricciones son ahora activas, incluyendo aquellas –las restricciones que definen la movilidad de los puntos fijos, las restricciones cinemáticas y las restricciones dinámicas– que no intervienen en la síntesis local.

La secuencia de pasos que sigue el algoritmo de síntesis global es la siguiente:

### 1. Lectura de datos.

- Nudos origen y final de barra.
- Vector inicial calculado en la síntesis local. Este vector contiene las coordenadas de todos los nudos de todos los mecanismos activos, y las longitudes de las barras, calculadas como la media aritmética de las barras de los mecanismos activos.
- Parámetros cinemáticos del grado de libertad.
- Restricciones geométricas: colinealidad, no inversión del triángulo...
- Restricciones de movilidad de los puntos fijos.
- Restricciones sobre las longitudes de las barras.
- Restricciones de posición.
- Restricciones cinemáticas: velocidad, aceleración, velocidad angular y aceleración angular.
- Restricciones dinámicas: fuerza motora, fuerza de enlace, reacción en apoyo, masa e índices de mérito.

## 2. Montaje de vectores y matrices.

- Matriz de restricciones lineales. Únicamente se considera aquí la restricción de movilidad de los puntos fijos. El resto de las restricciones se tratan como restricciones no lineales, para facilitar la programación.
- Vector de restricciones no lineales. Incluye el resto de restricciones.
- Vectores de límites inferior y superior de las restricciones lineales y no lineales.

## 3. Optimización de la función objetivo. El algoritmo abre un bucle DO donde la rutina E04UCF optimiza el valor de la función objetivo. El algoritmo abandona el bucle cuando la solución alcanza la precisión deseada o, en su defecto, cuando el número de iteraciones sobrepasa el número máximo de iteraciones especificado por el usuario. La secuencia de pasos que se sigue en cada iteración es la siguiente:

- La subrutina CONFUN evalúa las restricciones y sus gradientes, a partir de sus expresiones analíticas. Los valores de las restricciones cinemáticas y dinámicas, así como sus gradientes, se obtienen a partir de la resolución de los correspondientes sistemas de ecuaciones lineales, para lo que se recurre a la rutina F07AEF. Esta rutina exige la factorización LU previa de la matriz que multiplica al vector incógnita, que hace la rutina F07ADF. En el caso de sistemas donde los grados de libertad dinámicos dependen del problema de posición, como las prensas de mecánica articulada mostradas en el capítulo 6, es necesario resolver previamente los problemas de posición, velocidad y aceleración en todas las posiciones de síntesis. Así se determina el par nominal que servirá para resolver el problema dinámico, en el caso de que existan posiciones de síntesis anteriores al punto de fuerza.
- La subrutina OBJFUN evalúa la función objetivo y sus gradientes, a partir de sus expresiones analíticas.
- La rutina E04UCF resuelve el problema de optimización.

## 4. Escritura de archivos de resultados.

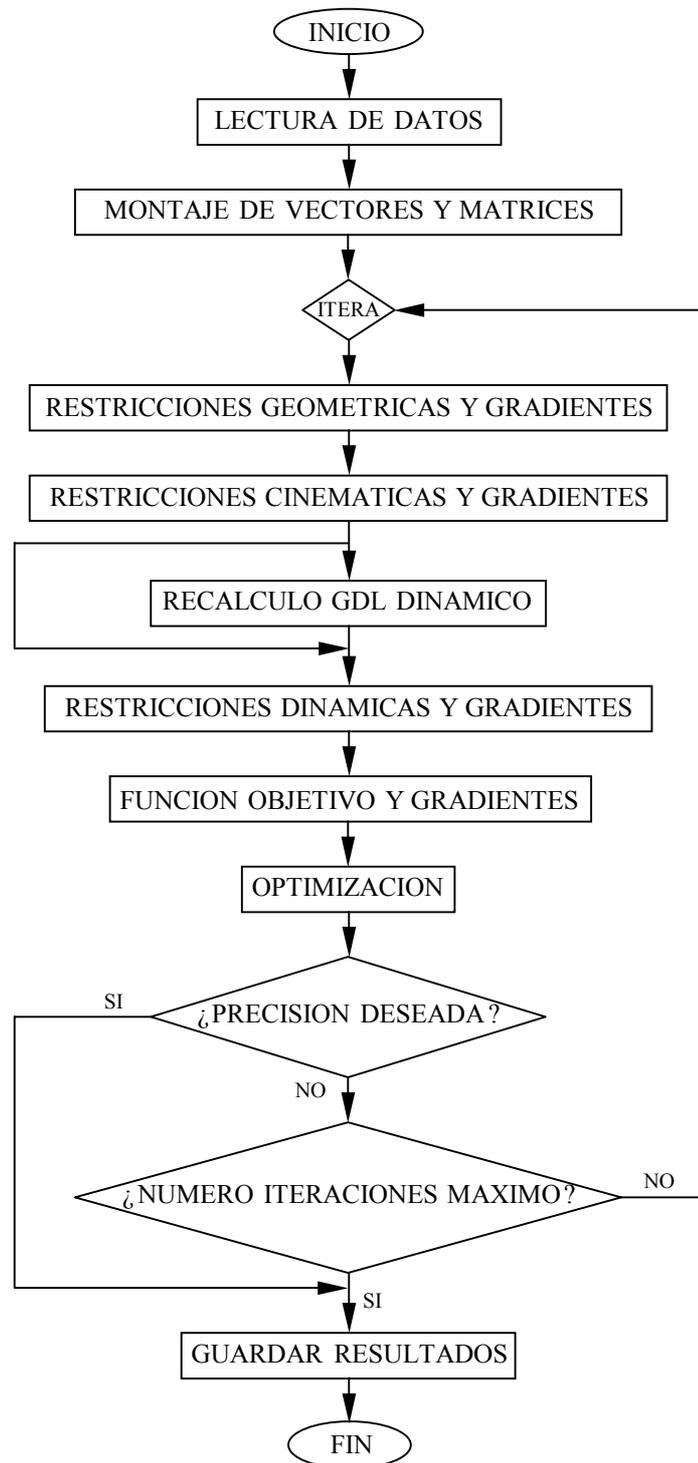


Figura I.2: Diagrama de flujo del algoritmo de síntesis global.

### **I.3. Análisis cinemático y dinámico.**

El algoritmo de análisis cinemático y dinámico resuelve los problemas de posición, velocidad, aceleración y equilibrio dinámico en un número de posiciones de análisis definidas por el usuario. Este número de posiciones debe ser lo suficientemente grande como para proporcionar información que permita evaluar correctamente el comportamiento del sistema, sin suponer un elevado coste computacional. El problema de la estimación del número ideal de posiciones de análisis se complica además en algunos casos, como en el análisis dinámico de los mecanismos de accionamiento de las prensas de mecánica articulada, tratados en el capítulo 6. En estos casos el número de posiciones de análisis determina la exactitud de la solución, al estar ésta influida por el cálculo del par nominal, que se hará en este caso en la posición de análisis más cercana a la posición correspondiente al punto de fuerza.

La información proporcionada por el algoritmo de análisis cinemático y dinámico resulta de gran utilidad para comprender el comportamiento del sistema, y se utiliza después del proceso de síntesis dimensional óptima para verificar en qué medida el mecanismo solución satisface las expectativas del diseñador.

La secuencia de pasos que sigue el algoritmo de análisis cinemático y dinámico es la siguiente:

1. Lectura de datos.
  - Número de posiciones de análisis.
  - Nudos origen y final de barra.
  - Vector inicial introducido por el usuario.
  - Longitudes iniciales de barra introducidas por el usuario.
  - Parámetros cinemáticos del grado de libertad.
  - Restricciones geométricas: colinealidad, no inversión del triángulo, coordenada fija de punto...
2. Análisis cinemático. El algoritmo abre un bucle DO donde se resuelven, de

manera secuencial, los problemas de posición, velocidad y aceleración, para cada una de las posiciones de análisis definidas por el usuario. La secuencia de pasos que se sigue en cada iteración es la siguiente:

- Lectura del vector inicial.
  - Cálculo de las coordenadas de posición de los grados de libertad del sistema.
  - Resolución del problema de posición. La rutina E04UCF resuelve el problema de posición, considerando únicamente las restricciones que definen la geometría del mecanismo y las restricciones sobre las longitudes de las barras, que se reducen ahora a las longitudes exactas de las barras del sistema que se analiza. Las subrutinas CONFUN y OBJFUN evalúan respectivamente las restricciones y la función objetivo, así como sus gradientes, a partir de sus expresiones analíticas.
  - Se almacena el vector de posición resultante como vector inicial del próximo punto de análisis.
  - Resolución del problema de velocidad. La rutina F07AEF resuelve el sistema de ecuaciones lineales que define el problema de velocidad a partir de los resultados obtenidos en la resolución del problema de posición. Previamente, la rutina F07ADF hace la factorización LU de la matriz que multiplica al vector incógnita.
  - Resolución del problema de aceleración. La rutina F07AEF resuelve el sistema de ecuaciones lineales que define el problema de aceleración a partir de los resultados obtenidos en la resolución de los problemas de posición y velocidad. Previamente, la rutina F07ADF hace la factorización LU de la matriz que multiplica al vector incógnita.
3. Recálculo del grado de libertad dinámico, en el caso de sistemas donde los grados de libertad dinámicos dependen del problema de posición, como las prensas de mecánica articulada mostradas en el capítulo 6. En estos casos es necesario calcular el par nominal en la posición del punto de fuerza, para determinar el par de entrada que constituirá el grado de libertad del

problema dinámico en las posiciones anteriores al punto de fuerza.

4. Análisis dinámico. El algoritmo abre un nuevo bucle DO donde se resuelve el problema dinámico para cada una de las posiciones de análisis definidas por el usuario. La rutina F07AEF resuelve el sistema de ecuaciones lineales que define el problema de equilibrio dinámico a partir de los resultados obtenidos en la resolución de los problemas de posición, velocidad y aceleración. Previamente, la rutina F07ADF hace la factorización LU de la matriz que multiplica al vector incógnita.
5. Escritura de archivos de resultados.

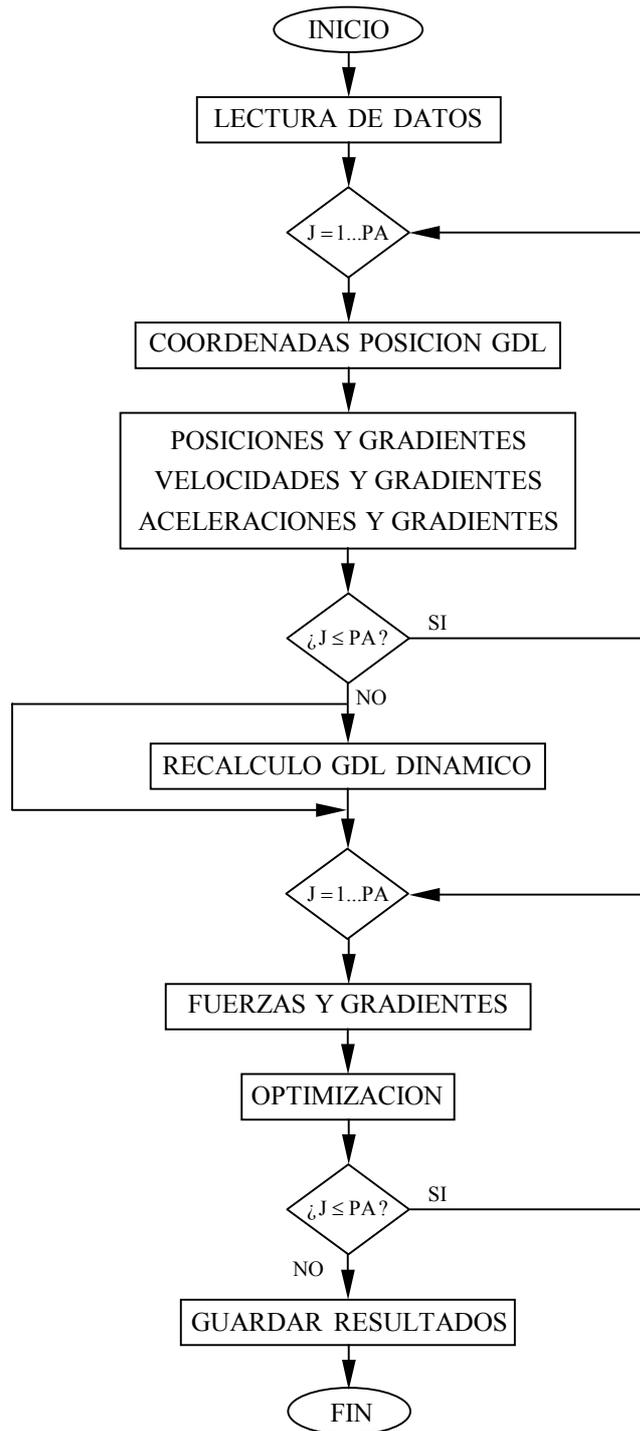


Figura I.3: Diagrama de flujo del algoritmo de análisis cinemático y dinámico.



## Apéndice II

# Rutinas NAG

En el software descrito en el apéndice I se hace referencia a las rutinas NAG que se han utilizado para resolver distintos problemas planteados en el método de síntesis dimensional óptima descrito en esta tesis. Las rutinas utilizadas son las siguientes:

- Rutina F07ADF, para la factorización LU de matrices reales.
- Rutina F07AEF, para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Rutina E04UCF, para la optimización SQP de funciones reales.

En este apéndice se hace un somero repaso al funcionamiento de dichas rutinas, especificando también el formato de llamada de la rutina, una breve descripción de los parámetros que utiliza –especificando para cada parámetro su dimensión y el correspondiente tipo de dato– y las subrutinas que, en su caso, contiene. Se han incluido también los indicadores de error de la rutina de optimización E04UCF, dado que recogen todas las posibles situaciones en las que el método no es capaz de encontrar una solución óptima para el problema.

### II.1. Rutina F07ADF. Factorización LU de matrices reales.

La rutina F07ADF efectúa la factorización LU de una matriz real mediante un algoritmo de pivotación parcial con intercambio de filas. Convierte una matriz  $\mathbf{A}$  en un producto de la forma  $\mathbf{A} = \mathbf{PLU}$ , donde  $\mathbf{P}$  es una matriz de permutaciones,  $\mathbf{L}$  es una matriz trapecial inferior cuya diagonal principal está formada por coeficientes unidad

y  $\mathbf{P}$  es una matriz trapecial inferior.

### II.1.1. Formato.

El formato de llamada de la rutina es:

F07ADF (M, N, A, LDA, IPIV, INFO)

### II.1.2. Parámetros.

Los parámetros de la rutina son los siguientes:

M-INTEGER

Número de filas de la matriz  $\mathbf{A}$ .

N-INTEGER

Número de columnas de la matriz  $\mathbf{A}$ .

A (LDA,\*)-REAL ARRAY

Matriz  $\mathbf{A}$ . Devuelve las matrices  $\mathbf{L}$  –sin su diagonal principal– y  $\mathbf{U}$ .

LDA-INTEGER

Primera dimensión de A declarada en el programa que efectúa la llamada a F07ADF.

IPIV(\*)-INTEGER ARRAY

Índices de pivotamiento, que señalan el intercambio entre las filas  $i$  e IPIV( $i$ ) de la matriz  $\mathbf{A}$ .

INFO-INTEGER

Parámetro de salida indicador de errores.

## II.2. Rutina F07AEF. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

La rutina F07AEF resuelve sistemas reales de ecuaciones lineales del tipo,

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \quad (\text{II.1})$$

o bien del tipo,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (\text{II.2})$$

donde la matriz **A** es la factorización LU devuelta por F07ADF.

### II.2.1. Formato.

El formato de llamada de la rutina es:

F07AEF (TRANS, N, NRHS, A, LDA, IPIV, B, LDB, INFO)

### II.2.2. Parámetros.

Los parámetros de la rutina son los siguientes:

TRANS-CHARACTER

Indica si la forma del sistema de ecuaciones a resolver es del tipo (II.1) o bien del tipo (II.2).

N-INTEGER

Orden de la matriz **A**.

NRHS-INTEGER

Número de columnas de **B** con elementos no nulos.

A (LDA,\*)-REAL ARRAY

Factorización LU de la matriz **A** devuelta por F07ADF.

LDA-INTEGER

Primera dimensión de A declarada en el programa que efectúa la llamada a F07AEF.

IPIV (\*)-INTEGER ARRAY

Índices de pivotamiento, devueltos por F07ADF.

B (LDB,\*)-INTEGER ARRAY

Matriz **B**. Devuelve la matriz solución **X**.

LDB-INTEGER

Primera dimensión de B declarada en el programa que efectúa la llamada a F07AEF.

INFO-INTEGER

Parámetro de salida indicador de errores.

### II.3. Rutina E04UCF. Optimización SQP de funciones.

La rutina E04UCF (NAG, 1995), que es básicamente idéntica a la rutina NPSOL (Gill et al., 1986), minimiza una función no lineal derivable al menos dos veces sujeta a un conjunto de restricciones –que puede incluir restricciones directas sobre las variables de diseño, restricciones lineales y restricciones no lineales– mediante un método de programación cuadrática secuencial (Fletcher, 1987; Gill et al., 1981; Powell, 1983) El problema se plantea formalmente como la minimización de una función no lineal,

$$f(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{II.3})$$

sujeta a las restricciones,

$$\mathbf{l} \leq \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{A}_L \mathbf{x} \\ \mathbf{c}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} \leq \mathbf{u} \quad (\text{II.4})$$

donde  $f(\mathbf{x})$  es la función objetivo,  $\mathbf{A}_L$  es la matriz de restricciones lineales y  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  es el vector de restricciones no lineales. Esta distinción entre las restricciones del problema se hace por razones de eficiencia computacional, dado que las restricciones directas sobre las variables de diseño podrían ser tratadas como restricciones lineales, y éstas a su vez como restricciones no lineales. Una restricción de igualdad puede establecerse igualando los correspondientes términos de los vectores  $\mathbf{l}$  y  $\mathbf{u}$  que definen las bandas de restricción, haciendo  $l_i = u_i$ . Por otro lado, la ausencia de una restricción puede establecerse asignando a los correspondientes términos de los vectores  $\mathbf{l}$  y  $\mathbf{u}$  valores lo suficientemente grandes como para que puedan ser considerados como  $-\infty$  y  $+\infty$ .

En el caso de que no existan restricciones no lineales y que la función objetivo sea lineal o cuadrática, las subrutinas E04MFF, E04NCF o E04NFF (NAG, 1995) son generalmente más eficientes. También puede resultar indicada la utilización del paquete MINOS (Murtagh y Saunders, 1983) para problemas con matrices grandes y dispersas.

En la subrutina E04UCF el usuario debe aportar el vector inicial solución de (II.3), así como las subrutinas que definen la función objetivo y el vector de restricciones no lineales. De igual forma, también debe aportar las subrutinas que definen las derivadas

primeras de la función objetivo y de las restricciones respecto del vector de diseño, mientras que las derivadas segundas se calculan de forma aproximada por el método de las diferencias finitas. Todas las derivadas primeras que no sean proporcionadas por el usuario serán calculadas también por diferencias finitas.

La rutina genera una secuencia de iteraciones que converge en un punto de Kuhn-Tucker de primer orden, y donde cada nueva iteración se calcula de la forma,

$$\mathbf{x}_{(K+1)} = \mathbf{x}_{(K)} + \alpha \mathbf{p} \quad (\text{II.5})$$

donde  $\mathbf{x}_{(K)}$  es la  $k$ -ésima iteración de  $\mathbf{x}$ ,  $\alpha$  es la longitud de paso y  $\mathbf{p}$  la dirección de búsqueda. El punto  $\mathbf{x}^*$  es un punto de Kuhn-Tucker de primer orden (Powell, 1974) si verifica las siguientes condiciones:

1. Pertenece al espacio factible.
2. Existen dos vectores  $\boldsymbol{\lambda}$  y  $\boldsymbol{\xi}$  que verifican,

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\xi} \quad (\text{II.6})$$

donde  $\boldsymbol{\lambda}$  es el vector de multiplicadores de Lagrange y  $\xi_j$  se anula si la variable  $j$ -ésima es libre.

3. El multiplicador de Lagrange correspondiente a una restricción activa de desigualdad es no negativo en su límite inferior y no positivo en su límite superior.

Cada iteración implica tres pasos:

1. La solución de un subproblema de programación cuadrática, en el que se obtiene la dirección de búsqueda minimizando mediante la rutina E04NCF (Gill et al., 1986) una función cuadrática,

$$\mathbf{g}^T \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} \quad (\text{II.7})$$

sujeta a,

$$\mathbf{l} \leq \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{A}_L \mathbf{p} \\ \mathbf{A}_N \mathbf{p} \end{Bmatrix} \leq \mathbf{u} \quad (\text{II.8})$$

donde  $\mathbf{g}$  es el gradiente de la función objetivo,  $\mathbf{H}$  la aproximación quasi-Newton de la matriz hessiana de la función lagrangiana,  $\mathbf{A}_L$  la matriz jacobiana de las restricciones lineales evaluada en  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{A}_N$  la matriz jacobiana de las restricciones no lineales evaluada en  $\mathbf{x}$ .

2. La determinación de la longitud del paso, que se calcula como aquella que produce un descenso suficiente en una función lagrangiana aumentada, denominada función de mérito, del tipo,

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) - \sum_i \lambda_i (c_i(\mathbf{x}) - s_i) + \frac{1}{2} \sum_i p_i (c_i(\mathbf{x}) - s_i)^2 \quad (\text{II.9})$$

donde  $\mathbf{s}$  es el cambio en el vector de diseño entre dos iteraciones sucesivas,

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}_{(K+1)} - \mathbf{x}_{(K)} \quad (\text{II.10})$$

3. Una actualización quasi-Newton BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) de la matriz hessiana de la función lagrangiana, según la expresión,

$$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H} - \frac{1}{\mathbf{s}^T \mathbf{H} \mathbf{s}} \mathbf{H} \mathbf{s} \mathbf{s}^T \mathbf{H} + \frac{1}{\mathbf{y}^T \mathbf{s}} \mathbf{y} \mathbf{y}^T \quad (\text{II.11})$$

donde  $\mathbf{y}$  es, idealmente, el cambio en el gradiente de la función lagrangiana entre dos iteraciones sucesivas, que deberá ser actualizado en caso de que no sea suficientemente positivo.

### II.3.1. Formato.

El formato de llamada de la rutina es:

E04UCF (N, NCLIN, NCNLN, LDA, LDCJ, LDR, A, BL, BU, CONFUN, OBJFUN, ITER, C, CJAC, CLAMDA, OBJF, OBJGRD, R, X, IWORK, LIWORK, WORK, LWORK, IUSER, USER, IFAIL)

### II.3.2. Parámetros.

Los parámetros de la rutina son los siguientes:

N-INTEGER

Número de variables.

NCLIN-INTEGER

Número de restricciones lineales.

NCNLN-INTEGER

Número de restricciones no lineales.

LDA-INTEGER

Primera dimensión de A declarada en el programa que efectúa la llamada a E04UCF.

LDCJ-INTEGER

Primera dimensión de CJAC declarada en el programa que efectúa la llamada a E04UCF.

LDR-INTEGER

Primera dimensión de R declarada en el programa que efectúa la llamada a E04UCF.

A (LDA,\*)-REAL ARRAY

Matriz de restricciones lineales **A**.

BL (N+NCLIN+NCNLN)-REAL ARRAY

Vector **l** de límites inferiores de las restricciones.

BU (N+NCLIN+NCNLN)-REAL ARRAY

Vector **u** de límites superiores de las restricciones.

CONFUN-SUBROUTINE

Subrutina externa que calcula el vector de restricciones no lineales **c** y, opcionalmente, su matriz jacobiana para un elemento especificado del vector **x**.

OBJFUN-SUBROUTINE

Subrutina externa que determina la función objetivo **f** y, opcionalmente, su vector gradiente para un elemento especificado del vector **x**.

ITER-INTEGER

Número máximo de iteraciones permitido.

ISTATE (N+NCLIN+NCNLN)-INTEGER ARRAY

Definición del espacio factible para los subproblemas cuadráticos. Devuelve las

violaciones de las restricciones que se producen en la resolución de los sucesivos subproblemas cuadráticos.

C (\*)-REAL ARRAY

Evaluación del vector de restricciones no lineales.

CJAC (LDCJ,\*)-REAL ARRAY

Evaluación de la matriz jacobiana de las restricciones no lineales

CLAMDA (N+NCLIN+NCNLN)-REAL ARRAY

Estimación de los multiplicadores de las restricciones no lineales. Devuelve los valores de los multiplicadores QP del último subproblema cuadrático resuelto.

OBJF-REAL

Devuelve el valor de la función objetivo.

OBJGRD (N)-REAL ARRAY

Devuelve el vector gradiente de la función objetivo, o su aproximación por diferencias finitas.

R (LDR,N)-REAL ARRAY

Matriz triangular superior de la factorización de Cholesky para la aproximación inicial de la matriz hessiana de la función lagrangiana.

X(N)-REAL ARRAY

Vector inicial. Devuelve el vector solución  $x$  que minimiza la función objetivo.

IWORK (LIWORK)-INTEGER ARRAY

Definición del espacio de trabajo.

LIWORK-INTEGER

Dimensión de IWORK declarada en el programa que efectúa la llamada a E04UCF.

WORK (LWORK)-REAL ARRAY

Definición del espacio de trabajo.

LWORK-INTEGER

Dimensión de WORK declarada en el programa que efectúa la llamada a E04UCF.

IUSER(\*)-INTEGER ARRAY

No es utilizada por E04UCF, aunque se pasa directamente a las subrutinas OBJFUN y CONFUN, para suministrar información adicional a dichas rutinas.

USER(\*)-REAL ARRAY

No es utilizada por E04UCF, aunque se pasa directamente a las subrutinas OBJFUN y CONFUN, para suministrar información adicional a dichas rutinas.

IFAIL-INTEGER

Parámetro de salida indicador de errores.

### **II.3.3. Subrutina CONFUN.**

La subrutina CONFUN calcula el vector de restricciones no lineales  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  y, opcionalmente, su matriz jacobiana,

$$\nabla \mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{II.12})$$

La subrutina, que debe ser provista por el usuario, debe ser declarada como subrutina externa en el programa que efectúa la llamada a E04UCF.

#### **II.3.3.1. Formato.**

El formato de llamada de la subrutina es:

CONFUN (MODE, NCNLN, N, LDCJ, NEEDC, X, C, CJAC, NSTATE, IUSER, USER)

#### **II.3.3.2. Parámetros.**

Los parámetros de la subrutina son los siguientes:

MODE-INTEGER

Indicador de valores de C y CJAC que deben ser asignados en la llamada a CONFUN.

NCNLN-INTEGER

Número de restricciones no lineales.

N-INTEGER

Número de variables.

LDCJ-INTEGER

Primera dimensión de CJAC.

NEEDC (NCNLN)-INTEGER ARRAY

Índices de los elementos de C y/o CJAC que deben ser evaluados por CONFUN.

X (N)-REAL ARRAY

Vector de variables de diseño donde deben evaluarse las restricciones no lineales y, en su caso, la matriz jacobiana.

C (NCNLN)-INTEGER ARRAY

Vector de restricciones no lineales.

CJAC (LDCJ,N)-REAL ARRAY

Matriz jacobiana de las restricciones no lineales,

$$CJAC(i, j) = \frac{\partial c_i}{\partial x_j} \quad (II.13)$$

NSTATE-INTEGER

Control de llamada de E04UCF a CONFUN.

IUSER (\*)-INTEGER ARRAY

Parámetro de información suplementaria, de uso libre.

USER (\*)-REAL ARRAY

Parámetro de información suplementaria, de uso libre.

#### **II.3.4. Subrutina OBJFUN.**

La subrutina OBJFUN calcula la función objetivo  $f(\mathbf{x})$  y, opcionalmente, su gradiente,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{II.14})$$

La subrutina, que debe ser provista por el usuario, debe ser declarada como subrutina externa en el programa que efectúa la llamada a E04UCF.

#### **II.3.4.1. Formato.**

El formato de llamada de la subrutina es:

OBJFUN (MODE, N, X, OBJF, OBJGRD, NSTATE, IUSER, USER)

#### **II.3.4.2. Parámetros.**

Los parámetros de la rutina son los siguientes:

MODE-INTEGER

Indicador de valores de OBJF y OBJGRD que deben ser asignados en la llamada a OBJFUN.

N-INTEGER

Número de variables.

X (N)-REAL ARRAY

Vector de variables de diseño donde debe evaluarse la función objetivo y, en su caso, el vector gradiente.

OBJF-REAL

Evaluación de la función objetivo.

OBJGRD (N)-REAL ARRAY

Vector gradiente de la función objetivo,

$$\text{OBJGDR}(j) = \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (\text{II.15})$$

NSTATE-INTEGER

Control de llamada de E04UCF a OBJFUN.

IUSER (\*)-INTEGER ARRAY

Parámetro de información suplementaria, de uso libre.

USER (\*)-REAL ARRAY

Parámetro de información suplementaria, de uso libre.

### **II.3.5. Indicadores de error.**

A continuación se recogen los principales errores que impiden el correcto funcionamiento de la rutina E04UCF, junto con el indicador que ésta devuelve. Son los siguientes:

IFAIL=1

El vector de diseño obtenido en la última iteración cumple las condiciones de Kukn-Tucker de primer orden pero la secuencia de iteraciones no converge.

IFAIL=2

No se encuentra una solución factible para las restricciones lineales.

IFAIL=3

No se encuentra una solución factible para las restricciones no lineales.

IFAIL=4

Se alcanza el número máximo de iteraciones permitidas.

IFAIL=6

El vector de diseño obtenido en la última iteración no cumple las condiciones de Kukn-Tucker de primer orden.

IFAIL=7

Las derivadas parciales de la función objetivo y/o de las restricciones no lineales proporcionadas por el usuario son incorrectas.

IFAIL=9

Los parámetros de entrada de la rutina son incorrectos.

## Bibliografía

- Agrawal, S.K., Claewplodtook, P., Fabien, B.C., *Optimal trajectories of open-chain mechanical systems: a new solution without Lagrange multipliers*, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME, vol. 120, n.º 1, 1998.
- Ajuria, G., Navalpotro, S., Vallejo, J., Campos J.J., *Un método numérico para la síntesis óptima de mecanismos*, Actas del XII Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, pp. 283-290, Oviedo, 1991.
- Alba, J.A., *Método de síntesis óptima de mecanismos planos y espaciales dotados de pares inferiores y superiores con restricciones de posición y cinemática*, Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, 1994.
- Alba, J.A., Doblaré, M., Gracia, L., *Un método general para la síntesis de posición de mecanismos con pares inferiores y superiores (I): síntesis de posición de mecanismos planos*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, vol. 12, n.º 4, pp. 467-496, 1996.
- Alba, J.A., Doblaré, M., Gracia, L., *Un método general para la síntesis de posición de mecanismos con pares inferiores y superiores (II): síntesis de posición con restricciones cinemáticas*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, vol. 13, n.º 1, pp. 71-94, 1997.
- Alba, J.A., Gómez, J.A., Martínez de Pisón, E., Conde, F., *Aplicación del método de*

*síntesis óptima de mecanismos al desarrollo de prensa con transmisión de mecánica articulada*, IV Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, Sevilla, 1999.

Alba, J.A., Doblaré, M., Gracia, L., *A simple method for the synthesis of 2D and 3D mechanisms with kinematic constraints*, Mechanism and Machine Theory, vol. 35, n.º 5, pp. 645-674, 2000.

Aleksander, I., Morton, H., *An introduction to neural computing*, Chapman & Hall, 1990.

Alexander, R.M., *Biomecánica*, Omega, Barcelona, 1982.

Álvarez, G., *Análisis y optimización biomecánica de la técnica de pedaleo ciclista*, Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, 1996.

Anderson, F.C., *A dynamic optimization solution for a complete cycle of normal gait*, Ph.D. Thesis, The University of Texas at Austin, 1999.

Anderson, F.C., Pandy, M.G., *A dynamic optimization solution for vertical jumping in three dimensions*, Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, vol. 2, pp.201-231, 1999.

Anderson, F.C., Pandy, M.G., *Static and dynamic optimization solutions for gait are practically equivalent*, Journal of Biomechanics, vol. 34, n.º 2, pp. 153-161, 2001.

Ascher, U.M., Pai, D.K., Cloutier, B., *Forward dynamics, elimination methods, and formulation stiffness in robot simulation*, International Journal of Robotics Research, vol. 16, n.º 6, pp. 749-758, 1997.

Ashrafiuon, H., Mani, N.K., *Analysis and optimal design of spatial mechanical systems*, Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, vol. 112, pp. 200-207, 1990.

Avilés, R., Ajuria, G., García de Jalón, J., *A fairly general method for optimum synthesis of planar mechanisms*, Mechanism and Machine Theory, vol. 20, n.º 4, pp. 321-328, 1985.

Avilés, R., Ajuria, G., Vallejo, J., Gómez, V., *Algoritmos genéticos en la síntesis de mecanismos*, Anales de Ingeniería Mecánica, año 11, vol. 3, pp. 55-64, 1997.

- Avilés, R., Ajuria, G., Gómez-Garay, V., Navalpotro, S., *Comparison among nonlinear optimization methods for the static equilibrium analysis of multibody systems with rigid and elastics elements*, Mechanism and Machine Theory, vol. 35, n.º 8, pp. 1151-1168, 2000.
- Balli, S.S., Chand, S., *Synthesis of a five-bar mechanism with variable topology for motion between extreme positions (SYNFBVTM)*, Mechanism and Machine Theory, vol. 36, n.º 10, pp. 1147-1156, 2001.
- Balli, S.S., Chand, S., *Five-bar motion and path generators with variable topology for motion between extreme positions*, Mechanism and Machine Theory, vol. 37, n.º 11, pp. 1435, 2002.
- Bastero, J.M., Casellas, J., *Curso de mecánica*, Ediciones Universidad de Navarra, 1991.
- Baumgarte, J.W., *Stabilization of the constraints and integrals of motion in dynamic systems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 1, pp. 1-16, 1972.
- Bawab, S., Kinzel, G.L., Waldron, K.J., *Rectified synthesis of six-bar mechanisms with well-defined transmission angles for four-position motion generation*, Journal of Mechanical Design, vol. 118, n.º 3, pp. 377-383, 1996.
- Bawab, S., Sabada, S., Srinivasan, U., Kinzel, G.L., Waldron, K.J., *Automatic synthesis of crank driven four-bar mechanisms for two, three, or four-position motion generation*, Journal of Mechanical Design, vol. 119, n.º 2, pp. 225-231, 1997.
- Berkof, R.S., *On the input torque in mechanisms*, Fourth Congress of the Theory of Machines and Mechanisms, Newcastle, 1975.
- Bestle, D., Schiehlen W.O., *Optimization of mechanical systems*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- Boggs, P.T., Tolle, J.W., *Sequential quadratic programming*, Acta numérica, Cambridge Univ. Press., pp. 1-51, 1995.
- Boggs, P.T., Tolle, J.W., *Sequential quadratic programming for large-scale nonlinear optimization*, Journal of Computational and Applied Mathematics,

vol. 124, pp. 123-137, 2000.

Boutaghou, Z.E., Erdman, A.G., *A design methodology for system parameters synthesis of elastic planar linkages*, Journal of Mechanical design, vol. 114, pp. 536-546, 1993.

Brenan K.B., Campbell, S.L., Petzod, L.R., *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations*, North Holland Publishing Co., 1989.

Cabrera, J.A., Simon, A., Prado, M., *Optimal synthesis of mechanisms with genetic algorithms*, Mechanism and Machine Theory, vol. 37, n.º 10, pp. 1165-1178, 2002.

Cagan, J., Antonson, E., *Formal engineering design synthesis*, Cambridge University Press., 2000.

Ceccarelli, M., *A synthesis algorithm for three-revolute manipulators by using an algebraic formulation of workspace boundary*, ASME Journal of Mechanical Design, vol. 117, n.º 2, 1995.

Cervantes, J., Hernández, J.C., Ángeles, J., *On the kinematic design of the 5R planar, symmetric manipulator*, Mechanism and Machine Theory, vol. 36, n.º 11, pp. 1301, 2001.

Chang, C.O., Nikravesh, P.E., *Optimal design of mechanical systems with constraint violation stabilization method*, ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, vol. 107, pp. 493-498, 1985.

Chang, C.C., Huston, R.L., *Collisions of multibody systems*, Computational Mechanics, vol. 27, n.º 5, pp. 436-444, 2001.

Chen, S.L., Chang, C.C., Chang, C.H., *Application of a neural network for improving the quality of five-axis machining*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, vol. 214, n.º 1, pp. 47-60, 2000.

Chidambaran, N.C., *Product development for LINCAGES Windows version*, M.S. Thesis, University of Minnesota, 2000.

Chou, H.C., Sadler, J.P., *Optimal location of robot trajectories for minimization of actuator torque*, Mechanisms and Machine Theory, vol. 28, n.º 1, pp. 145-158,

1993.

Cleghorn, W.L., Fenton, R.G., Tabarrok, B., *Optimum design of high speed flexible mechanisms*, Mechanisms and Machine Theory, vol. 16, n.º 4, pp. 399-406, 1981.

Collins, C.L., *Forward kinematics of planar parallel manipulators in the Clifford algebra of  $P^2$* , Mechanism and Machine Theory, vol. 37, n.º 8, pp. 799-813, 2002.

Conde, F., *Método general de síntesis en cadenas cinemáticas cerradas*, Tesis doctoral, Universidad Pública de Navarra, 2001.

Dantzig, G.B., *Linear programming and extensions*, Princeton University Press, 1963.

Davis, L., *Handbook of genetic algorithms*, Van Nostrand Reinhold, 1991.

Denavit, J., Hartenberg, R.S., *A kinematic notation for lower pair mechanisms based on matrices*, ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 22, pp. 215-221, 1965.

Dennis, J.E., Moré, J.J., *Quasi-Newton methods*, Motivation and Theory SIAM, n.º 19, pp. 46-89, 1977.

Díaz, A., Glover, F., *Optimización heurística y redes neuronales*, Paraninfo, 1996.

Ding, H., Li, Y.F., Tso, S.K., *Dynamic optimization of redundant manipulators in worst case using recurrent neural networks*, Mechanism and Machine Theory, vol. 35, n.º 1, pp. 55-70, 2000.

Duff, I.S., Erisman, A.M., Reid, J.K., *Direct methods for sparse matrices*, Oxford University Press, 1997.

Ehle, P.E., Haug, E.J., *A logical function method for dynamic and design sensitivity analysis of mechanical systems with intermittent motion*, Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, vol. 104, pp. 90-97, 1982.

Erdman, A.G., Gustafson, J.E., *LINCAGES: Linkage INteractive Computer Analysis and Graphically Enhanced Synthesis*, ASME paper n.º 77-DTC-5, 1977.

Figliolini, G., Angeles, J., *Synthesis of conjugate Geneva mechanisms with curved slots*, Mechanism and Machine Theory, vol. 37, n.º 10, pp. 1043-1062, 2002.

- Fletcher, H.J., Rongved, L., Yu, E.Y., *Dynamic analysis of a two-body gravitationally oriented satellite*, Bell Syst. Tech. J., vol. 42, 1963.
- Fletcher, R., *Practical methods of optimization*, Wiley, 1987.
- Fletcher, R., Reeves, C.M., *Function minimization by conjugate gradients*, Computer Journal, vol. 7, pp. 149-154, 1964.
- Freudenstein, F., *Approximate synthesis of four bar linkage*, American Society of Mechanical Engineering Transactions, vol. 77, n.º 8, pp. 853-861, 1955.
- Freudenstein, F., *On the maximum and minimum velocities and accelerations in four-link mechanisms*, Transactions of the ASME, pp. 779-787, 1956.
- Freudenstein, F., *Trends in the kinematic of mechanisms*, Applied Mechanics Reviews, vol. 12, n.º 9, pp. 587-590, 1959.
- Freudenstein, F., Sandor, *Synthesis of a path generating mechanism by a programmed digital computer*, Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME, vol. 81, n.º 2, pp. 159-168, 1959.
- Freeman, J.A., Skapura, D.M., *Redes neuronales: algoritmos, aplicaciones y técnicas de programación*, Addison-Wesley, 1993.
- Fuhrer, C., Leimkehlner, B.J., *Numerical solution of differential-algebraic equations for constrained mechanical motion*, Numerical Mathematics, vol. 59, pp. 55-69, 1991.
- García, F., *Fortran 90*, Paraninfo, 1999.
- García de Jalón, J., Bayo, E., *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems: the real-time challenge*, Springer-Verlag, 1994.
- García de Jalón, J., Serna, M.A., Viadero, F., Avilés, R., *A simple numerical method for the kinematic analysis of spatial mechanisms*, 1980 ASME Mechanisms Conference, Beverly Hills, Calif., 1980.
- García de Jalón, J., Serna, M.A., Avilés, R., *Computer method for kinematic analysis of lower-pair mechanisms I. Velocities and accelerations*, Mechanism and Machine Theory, vol. 16, n.º 5, pp. 543-556, 1981.
- García de Jalón, J., Serna, M.A., Avilés, R., *Computer method for kinematic analysis*

- of lower-pair mechanisms II. Position problems*, Mechanism and Machine Theory, vol. 16, n.º 5, pp.557-566, 1981.
- García de Jalón, J., Unda, J., Avelló, A., *Natural coordinates for the computer analysis of multibody systems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 56, pp. 309-327, 1986.
- Gear, C.W., Leimkuhler, B., Gupta, G.K., *Automatic integration of Euler-Lagrange equations with constraints*, Journal of Computational and Applied Mathematics, vols. 12 & 13, pp. 77-90, 1985.
- Gill, P.E., Murray, W., Wright, M., *Practical optimization*, Academic Press, 1981.
- Gill, P.E., Murray, W., Saunders, M.A., Wright, M., *User's guide for SOL/QPSOL (version 3.2)*, Report SOL 84, Stanford University, 1984.
- Gill, P.E., Hammarling, S.J., Murray, W., Saunders, M.A., Wright, M., *User's guide for LSSOL (versión 1.0)*, Report SOL 86-1, Stanford University, 1986.
- Golberg, D.E., *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*, Addison Wesley, 1989.
- González, H.K., Hull, M.L., *Multivariable optimization of cycling biomechanics*, Journal of Biomechanics, vol. 22, pp. 1151-1161, 1989.
- Guangchun, L., Liju, X., *A synthesis approach for rigid-body guidance synthesis of planar four-bar linkage*, Journal of Machine Design, vol. 15, n.º 2, pp. 19-29, 1998.
- Guerrero, F.M., *Curso de optimización: programación matemática*, Ariel, 1994.
- Hadley, G., *Nonlinear and dynamic programming*, Addison-Wesley, 1964.
- Hairer, E., Wanner, G., *Solving ordinary differential equations II: stiff and differential algebraic problems*, Springer-Verlag, 1991.
- Han, C.Y., *A general method for mechanism optimum design*, Journal of Mechanisms, vol. 1, pp. 657-663, 1966.
- Han, Y., *Conceptual design of mechanisms: synthesis of design alternatives and spatial configuration design*, Ph.D. Thesis, Seoul National University, 1999.
- Hartenberg, R.S., Denavit, L., *Cognate linkages*, Machine Design, vol. 16, pp. 149-

152, 1959.

Hartenberg, R.S., Denavit, L., *Kinematic synthesis of linkages*, McGraw-Hill, 1964.

Haug, E.J., *Computer-aided kinematics and dynamics of mechanical systems*, Allyn & Bacon, 1989.

Haug, E.J., Arora, J.S., *Design sensitivity analysis of elastic mechanical systems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 15, pp. 35-62, 1978.

Haug, E.J., Arora, J.S., *Applied optimal design*, John Wiley & Sons, 1979.

Haug, E.J., Choi, K.K., Komkov, V., *Design sensitivity analysis of structural systems*, Academic Press., 1986.

Haug, E.J., Ehle, P.E., *Second-order design sensitivity analysis of mechanical systems dynamics*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 18, pp. 1699-1717, 1982.

Haulin, E.N., Lakis, A.A., Vinet, R., *Optimal synthesis of a planar four-link mechanism used in a hand prosthesis*, Mechanism and Machine Theory, Vol. 36, n.º 11, pp. 1203-1214, 2001.

Hay, J., *The biomechanics of sports techniques*, Prentice Hall, 1993.

Hernández, A., Amezua, E., Ajuria, G., Vallejo, J., *Síntesis de puntos triples en curvas de acoplador del cuadrilátero articulado*, Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica, vol. 1, n.º 1, pp. 5-22, 1997.

Hooker, W.W., Margulies, G., *The dynamical attitude equations for an m-body satellite*, J. Astronaut Sci., vol. 12, 1965.

Hopper, M.J., *Harwell subroutine library*, AERE Harwell, 1981.

Hrones, J.A., Nelson, G.L., *Analysis of the four-bar linkage: its application to the synthesis of mechanisms*, Wiley, 1951.

Huang, Z., Zhao, Y.S., *The accordance and optimization-distribution equations of the over-determinate inputs of walking machines*, Mechanism and Machine Theory vol. 29, n.º 2, pp. 327-332, 1994.

Huston, R.L., *Multibody dynamics*, Butterworth-Heinemann, 1990.

- Imam, I., Sandor, G.N., *A general method of kineto-elastodynamic design of high speed mechanisms*, Mechanism and Machine Theory, vol. 8, pp. 497-516, 1973.
- Innocenti, C., *Polynomial solution to the position analysis of the 7-link Assur kinematic chain with one quaternary link*, Mechanism and Machine Theory, vol. 30, n.º 8, pp. 1295-1303, 1995.
- Jerkovsky, W., *The structure of multibody dynamic equations*, Journal of Guidance and control, vol. 1, pp. 173-182, 1978.
- Jiménez, J.M., Álvarez, G., Cardenal, J., Cuadrado, J., *A simple and general method for kinematic synthesis of spatial mechanisms*, Mechanism and Machine Theory, vol. 32, n.º 3, pp. 323-342, 1997.
- John, F., *Extremum problems with inequalities as side conditions*, Studies and Essays, Courant Anniversary Volume, Wiley-Interscience, 1948.
- Kantorovich, L.V., *Mathematical methods in organization and planning of production*, Management Science, vol. 6, n.º 4, pp. 366-422, 1960.
- Karush, W. *Minima of functions of several variables with inequalities as side conditions*, M.S. Thesis, University of Chicago, 1939.
- Kaufman, R.E., *Mechanism design by computer*, Machine Design, vol. 50, n.º 24, pp. 94-100, 1978.
- Kemler, E.N., Howe, R.J., *Machine design*, 1953.
- Kim, S.S., Vanderploeg, M.J., *QR decomposition for state space representation of constrained mechanical dynamic systems*, ASME Journal on Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, vol. 108, pp.176-182, 1986.
- Komor, A.J., *Methodological aspects of modelling and computer simulation applied to analysis and optimization of cycling performance*, Abano Terme, 1985.
- Kramer, S.N., Sandor, G.N., *Selective precision synthesis. A general method of optimization for planar mechanisms*, Journal Engineering for Industry, Transactions of the ASME, vol. 97 B, n.º 2, pp. 689-701, 1975.
- Krishnaswami, P., Bhatti, M.A., *A general approach for design sensitivity analysis of constrained dynamic systems*, ASME paper 84-DET-132, 1984.

- Kuhn, H.W., Tucker, A.W., *Non-linear programming*, Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Berkeley Symposium of Mathematical Statistics and Probability, pp. 481-492, University of California Press., 1951.
- Lee, M.Y., Erdman, A.G., Faik, S., *A generalized performance sensitivity synthesis methodology for four-bar mechanisms*, Mechanism and Machine Theory, vol. 34, n.º 7, pp. 1127, 1999.
- Lee, T.W., Freudenstein, F., *Heuristic combinatorial optimization in the kinematic design of mechanisms*, Journal of Engineering for Industry, vol. 98, n.º 4, pp. 1281-1284, 1976.
- Lemke, C.E., *Bimatrix equilibrium points and mathematical programming*, Management Science, vol. 11, pp. 681-689, 1965.
- Li, J., Gupta, K.C., *Mechanism design with MP-neural networks*, Journal of Mechanical Design, vol. 120, n.º 4, pp. 527-532, 1998.
- Liang, C.G., Lance, G.M., *A differentiable null space method for constrained dynamic analysis*, ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, vol. 109, pp. 405-411, 1987.
- Mani, N.K., Haug, E.J., Atkinson, K.E., *Application of singular value decomposition for analysis of mechanical system dynamics*, ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, vol. 107, pp. 82-87, 1985.
- Mc Larnan, C.W., *Synthesis of six link plane mechanisms by numerical analysis*, Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME, vol. 85, 1963.
- Murtagh, B.A., Saunders, M.A., *MINOS 5.0 user's guide*, Report SOL 83-20, Stanford University, 1983.
- NAG, *NAG Fortran library manual*, The Numerical Algorithms Group Ltd., 1995.
- Navalpotro, S., *Un método de síntesis óptima de mecanismos mediante elementos finitos*, Tesis Doctoral, Universidad del País Vasco, 1989.
- Nieto, J., *Mecanismos planos con dos grados de libertad. Aplicación al análisis y síntesis de mecanismos de cinco barras*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Barcelona, 1974.

- Nieto, J., *Síntesis de mecanismos*, Editorial AC, 1978.
- Nikravesh, P.E., *Computer-aided analysis of mechanical systems*, Prentice-Hall, 1988.
- Nokleby, S.B., Podhorodeski, R.P., *Optimization-based synthesis of Grashof geared five-bar mechanisms*, Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, vol. 123, n.º 4, pp. 529-534, 2001.
- Norton, R.L., *Diseño de maquinaria: una introducción a la síntesis y al análisis de mecanismos y máquinas*, McGraw-Hill, 1995.
- Ostermeyer, G., *On Baumgarte stabilization for differential algebraic equations*, en Haug, E.J., Deyo, R.C. (eds.), *Real time integration methods for mechanical systems simulation*, Springer-Verlag, 1990.
- Pagalday, J.M., *Optimización del comportamiento dinámico de mecanismos*, Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, 1994.
- Petzold, L.R., *Differential/algebraic equations are not ODE's*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol. 3, n.º 3, pp. 367-384, 1982.
- Petzold, L.R., Serban, R., Li, S., Raha, S., Cao, Y., *Sensitivity analysis and design optimization of differential-algebraic equation systems*, Proceedings of NATO Advanced Research Workshop on Computational Aspects of Nonlinear Structural Systems with Large Rigid Body Motion, Pultusk, Poland, pp. 247-262, 2000.
- Potra, F.A., *Numerical methods for differential-algebraic equations with application to real-time simulation on mechanical systems*, ZAMM, vol. 74, n.º 3, pp. 177-187, 1994.
- Powell, M.J.D., *An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives*, Computer Journal, vol. 7, pp. 155-162, 1964.
- Powell, M.J.D., *Introduction to constrained optimization*, Numerical Methods for Constrained Optimization, Academic Press, pp. 1-28, 1974.
- Powell, M.J.D., *Variable metric methods on constrained optimization* en Bachem, A., Grötschel, M., Korte., B. (eds.), *Mathematical programming: the state of the*

- art*, Springer-Verlag, 1983.
- Rahnejat, H., *Multi-body dynamics. Vehicles, machines and mechanisms*, Professional Engineering Publishing, 1998.
- Redfield, R., Hull, M.L., *On the relation bewteen joint moments and pedalling rates at constant power in bicycling*, Journal of Biomechanics, vol. 19, pp. 317-329, 1986.
- Redfield, R., Hull, M.L., *Prediction of pedal forces in bicycling using optimization methods*, Journal of Biomechanics, vol. 17, pp. 523-540, 1986.
- Reuleaux, F., *Theoretische kinematik*, Vieweg, 1875.
- Roberson, R.E., Wittenburg, J.A., *A dynamical formalism for an arbitrary number of interconnected rigid bodies with reference to the problem of attitude control*, Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Congress of Automated Control, London, 1966.
- Rodríguez-Toral, M.A., Morton, W., Mitchell, D.R., *The use of new SQP methods for the optimization of utility systems*, Computers and Chemical Engineering, vol. 25, pp. 287-300, 2001.
- Sakawa, M., *Genetic algorithms and fuzzy multiobjective optimization*, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- Saramago, S.F., Steffen, V. Jr., *Optimization of the trajectory planning of robot manipulators taking into account tha dynamics of the system*, Mechanism and Machine Theory, vol. 33, n.º 7, pp. 883-894, 1998.
- Schrage, L., *User's manual for LINDO*, The Scientific Press, 1981.
- Schreiber, H., Meer, K., Schmitt, B.J., *Dimensional synthesis of planar Stephenson mechanisms for motion generation using circlepoint search and homotopy methods*, Mechanism and Machine Theory, vol. 37, n.º 7, pp. 717, 2002.
- Serban, R., *Dynamic and sensitivity analysis of multibody systems*, Ph.D. Thesis, The University of Iowa, 1998.
- Serna, M.A., Avilés, R., García de Jalón, J., *Dynamic analysis of plane mechanisms with lower pairs in basic coordinates*, Mechanism and Machine Theory, vol. 17,

- n.º 6, 397-403, 1982.
- Shabana, A.A., *Dynamics of multibody systems*, Cambridge University Press, 1998.
- Shigley, J.E., Uicker Jr., J.J., *Teoría de máquinas y mecanismos*, McGraw-Hill, 1988.
- Silver, E.A., Vidal, R.V., de Werra, D., *A tutorial of heuristic methods*, European Journal of Operational Research, Vol. 5, 1980.
- Simionescu, P.A., Beale, D., *Synthesis and analysis of the five-link rear suspension system used in automobiles*, Mechanism and Machine Theory, vol. 37, n.º 9, pp. 815-832, 2002.
- Simionescu, P.A., Beale, D., *Optimum synthesis of the four-bar function generator in its symmetric embodiment: the Ackermann steering linkage*, Mechanism and Machine Theory, vol. 37, n.º 12, pp. 1487-1504, 2002.
- Singh, R.P., Likins, P.W., *Singular value decomposition for constrained dynamical systems*, ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 52, pp. 943-948, 1985.
- Smith, I.M., *Programming in Fortran 90: a first course for engineers and scientists*, John Wiley & Sons, 1995.
- Stoer, J., *Principles of sequential quadratic programming methods for solving nonlinear programs*, Computational Mathematical Programming, Vol. 15, 1985.
- Strandh, S., *Máquinas. Una historia ilustrada*, Hermann Blume Ediciones, 1982.
- Svoboda, A., *Computing mechanisms and linkages*, McGraw-Hill, 1948.
- Tepper, F.R., Lowen, G.G., *Shaking force optimization of four-bar linkages with adjustable constraints on ground bearing forces*, Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME, vol. 97, pp. 643-651, 1975.
- Todorov, T.S., *Synthesis of four-bar mechanisms by Freudenstein-Chebyshev*, Mechanism and Machine Theory, vol. 37, n.º 12, pp. 1505-1512, 2002.
- Tomovic, R., *Sensitivity analysis of dynamic systems*, McGraw-Hill, 1963.
- Tomovic, R., Vukobratovic, M., *General sensitivity theory*, Elsevier, 1972.
- Tso, P.L., Liang, K.C., *A nine-bar linkage for mechanical forming presses*,

- International Journal of Machine Tools and Manufacture, vol. 42, n.º 1, pp. 139-145, 2002.
- Uicker, J.J., Jr., Denavit, J., Hartenberg, R.S., *An iterative method for the displacement analysis of spatial mechanisms*, J. Appl. Mech., ser. E, vol. 87, pp. 309-314, 1965.
- Urruzola, J., Avelló, A., Jiménez, J.M., *Optimización cinemática y dinámica de mecanismos espaciales*, Anales de Ingeniería Mecánica, año 11, vol. 3, pp. 45-54, 1997.
- Vallejo, J., *Optimización de mecanismos planos con cualquier configuración y síntesis*, Tesis Doctoral, Universidad del País Vasco, 1993.
- Vallejo, J, Ajuria, G., Hernández, A., Llorente, J.I., *Un método para la optimización de características cinemáticas de mecanismos*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, vol. 12, n.º 1, pp. 31-52, 1996.
- Vasiliu, A., Yannou, B., *Dimensional synthesis of planar mechanisms using neural networks: application to path generator linkages*, Mechanism and Machine Theory, Vol. 36, n.º 2, pp. 299-310, 2001.
- Vanderplaats, G.N., *An efficient feasible direction algorithm for design synthesis*, AIAA Journal, vol. 22, n.º 11, pp. 1633-1639, 1984.
- Wang, S.J., Sodhi, R.S., *Kinematic synthesis of adjustable moving pivot four-bar mechanisms for multi-phase motion generation*, Mechanism and Machine Theory, vol. 31, n.º 4, pp. 459-474, 1996.
- Wang, Y.X., Yan, H.S., *Computerized rules-based regeneration method for conceptual design of mechanisms*, Mechanism and Machine Theory, vol. 37, n.º 9, pp. 833-850, 2002.
- Wehage, R.A., Haug, E.J., *Generalized coordinate partitioning for dimension reduction in analysis of constrained dynamic systems*, ASME Journal of Mechanical Design, vol. 104, pp. 247, 1982.
- Wehage, R.A., Loh, W.Y., *Application of SVD to independent variable definition in constrained mechanical systems*, ASME Advanced Automotive Technologies,

- vol. 52, pp. 71-79, 1993.
- Wolfe, P., *The simplex method for quadratic programming*, *Econometrica*, vol. 27, n.º 3, pp. 382-398, 1959.
- Yan, H.S., Soong, R.C., *Kinematic and dynamic design of four-bar linkages by links counterweighing with variable input speed*, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 36, n.º 9, pp. 1051-1071, 2001.
- Yousef, S., *Iterative methods for sparse linear systems*, PWS Publishing Company, Boston, 1996.
- Zabalza, I., *Síntesis cinemática y dinámica de mecanismos. Manipulador paralelo 6-RKS*, Tesis Doctoral, Universidad Pública de Navarra, 1999.
- Zabalza, I., Benítez, V., Ros, J., Pintor, J.M., *Síntesis dimensional óptima del mecanismo de retorno rápido de Whitworth*, IV Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Santiago de Chile, 1999.
- Zhu, Z.H., Mayorga, R.V., Wong, A.K.C., *Dynamic robot manipulator trajectory planning for obstacle avoidance*, *Mechanics Research Communications*, vol. 26, n.º 2, pp. 139-144, 1999.